

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la

VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par :

Khaldi Messaouda

Titre :

## Stabilité et Bifurcation dans un Système Dynamique Chaotique Continu

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BELLAGOUN ABEDELGHANI	UMKB	Président
Pr. MENACER TIDJANI	UMKB	Encadreur
Dr. LAADJAL BAYA	UMKB	Examinatrice

26 /06/ 2022

*Dédicace*

♥*Je dédie ce modeste travail* ♥ :

♥A ma mère et A mon père que dieu lui fasse miséricorde♥,

♥source de force et corage♥

♥*A mes enseignants,*♥

♥A ma famille,♥

♥A tous mes amis et collègues.♥

♥**Khaldi Messaouda**♥

## REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à remercier Dieu*

Le tout puissant, qui m'a donné la force  
et la patience d'accomplir ce modeste travail.

*Je tiens à saisir cette occasion et à*

dresser profonde remercier et

profonde reconnaissances à

parent.

Un remercier particulier à mon encadreur

Pr : MENACER TIDJANI

pour sa présence, ses précieux conseils et  
aide durant toute période du travail.

J'adresse également mes remerciements

aux membres du jury

Dr : BELLAGOUN ABEDELGHANI et

Dr : LAADJAL BAYA

Et enfin, je tiens également à remercier toutes

les personnes qui ont participé de près ou

de loin à la réalisation de ce travail.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>1 Notions de Base sur les Systèmes Dynamiques</b>	<b>3</b>
1.1 Système dynamique . . . . .	3
1.1.1 Représentations mathématique des systèmes dynamiques . . . . .	4
1.1.2 Types des systèmes dynamiques . . . . .	5
1.1.3 Espace de phase . . . . .	6
1.1.4 Trajectoire . . . . .	6
1.1.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs . . . . .	6
1.2 Point d'équilibre . . . . .	8
1.3 Cycle limite . . . . .	8
1.4 Stabilité . . . . .	9
1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	9
1.4.2 Stabilité structurelle . . . . .	12
<b>2 Bifurcations et Chaos</b>	<b>13</b>

<b>2.1</b>	<b>Théorie des bifurcations</b>	14
2.1.1	Définition de bifurcation	14
2.1.2	Types de bifurcations	14
2.1.3	Diagramme de bifurcation	20
2.1.4	Codimension d'une bifurcation	20
<b>2.2</b>	<b>Théorie du chaos</b>	20
2.2.1	Définition du chaos	20
2.2.2	Caractéristiques du chaos	21
2.2.3	Détection du chaos	23
2.2.4	Routes vers le chaos	24
<b>3</b>	<b>Applications : Stabilité et Bifurcation dans un Système Jerky</b>	<b>26</b>
3.1	Introduction	26
3.2	Le système de Jerky	27
3.2.1	Stabilité des équilibres	27
3.2.2	Analyse de bifurcation de Hopf	29
3.2.3	Diagramme de bifurcation	32
	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>
	<b>Annexe A : Programme de Matlab</b>	<b>37</b>
	<b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>	<b>39</b>

# Table des figures

1.1 Différents types de stabilité de Lyapunov . . . . .	10
2.1 Bifurcation noeud-col . . . . .	15
2.2 Bifurcation de transcritique . . . . .	16
2.3 Bifurcation fourche . . . . .	17
2.4 Bifurcation de Hopf . . . . .	18
2.5 Sensibilité au conditions initiales . . . . .	21
3.1 L'attracteur du système (3.2) (chaotique) , pour $\alpha = 0.6$ . . . . .	31
3.2 L'attracteur du système (3.2) (cycle limite) , pour $\alpha = 1$ . . . . .	31
3.3 L'attracteur du système (3.2) stable , pour $\alpha = 1.2$ . . . . .	32
3.4 L'évolution de l'attracteur suivant la variation de paramètre $\alpha$ . . . . .	33

# Introduction

Les systèmes dynamiques représentent des phénomènes qui évoluent, dans l'espace, avec temps. Ces systèmes viennent de Biologie, physique, Chimie, ou même des sciences sociales, le système dynamique est le sujet qui fournit des outils mathématiques pour son analyse. Ils sont développés et spécialisés au cours du 19<sup>e</sup> siècle. Au cours de la fin de ce siècle (1890) le mathématicien, philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. Toujours au 19<sup>e</sup> siècle, de notre point de vue, les années 1970 sont une période de rupture dans le domaine que nous considérons ici : «systèmes dynamiques et chaos», le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesure de l'écart entre trajectoires ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. [7]

Les systèmes dynamiques chaotiques sont des systèmes déterministes non linéaires, aperiodiques et bornés. Les signaux qui évoluent dans ces systèmes sont en général à large bande et très sensibles aux conditions initiales, ce qui apparaît leur trajectoire comme un bruit pseudo aléatoire. En raison de ces propriétés, les signaux chaotiques sont en plus utilisés dans les systèmes de communications, permettant ainsi de transférer les informations entre deux systèmes sans altérer le contenu. Afin d'augmenter le degré de sécurité, on utilise la cryptographie chaotique qui consiste

à noyer l'information dans un signal chaotique.

Dans ce mémoire, on a fait une étude de la stabilité et bifurcation dans un système dynamique chaotique continu. Nous avons divisé notre travail en trois chapitres comme suit :

► **Le première chapitre** : Nous avons présenté quelque notions de base sur les systèmes dynamiques tel que : définitions, points d'équilibres, cycles limites et stabilité.

► **Le deuxième chapitre** est consacré à la théorie de bifurcation (définition, types de bifurcations, diagramme de bifurcation et codimension d'une bifurcation) puis on a présenté la théorie de chaos (définition du chaos, caractéristique du chaos, détection et routes vers le chaos).

► **Le troisième chapitre** : Nous étudions la stabilité et bifurcation dans un système dynamique continu choisi, appelé Jerky, où nous montrons l'existence d'une bifurcation de Hopf pour ce système.

Le mémoire est clôturé par une conclusion et des un anexes sur les programmes en matlab utilisés ainsi les notations.



# Chapitre 1

## Notions de Base sur les Systèmes Dynamiques

Dans ce chapitre, on s'intéresse d'abord à la présentation des notions de base sur le système dynamique tels que : définition, points d'équilibre, stabilité, cycle limite.....

### 1.1 Système dynamique

**Définition 1.1.1** *On appelle système dynamique tout système évolutif par l'intermédiaire d'au moins un paramètre réel (qui pourra jouer le rôle de temps par exemple), qui utilise des équations différentielles.*

*Il défini par un triplet  $(X, T, f)$  consistué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état  $f : X \times T \rightarrow X$ , qui possède la propriété, pour tout  $x \in X$  et  $t_1, t_2 \in T$  :*

$$\begin{cases} f(x, 0) = x \\ f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2) \end{cases}$$

Si  $T = \mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}$ , le système est dit à temps continu, et si  $T = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , le système est dit à temps discret. [1]

### 1.1.1 Représentations mathématique des systèmes dynamiques

Un système dynamique d'écrit par une fonction mathématique, présente deux type de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statique encore appelés paramètres du système sont fixes. [13] [5]

- Le système dynamique dans le cas ou la composante temps est continue est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \text{ ou } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, n \text{ et } r \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

- Le système dynamique, dans le cas ou le temps est discret, est présenté par une application (fonction itéraitve)

$$x_{k+1} = f(x_k, p), \quad x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

**Remarque 1.1.1**  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phase,  $\mathbb{R}^r$  est l'espace des paramètres.

L'ensemble  $\Omega$  est appelé espace de phases du système dynamique. [12]

### 1.1.2 Types des systèmes dynamiques

#### Un système linéaire

Un système dynamique linéaire ou système différentielle linéaire est une équation portant sur une fonction vectorielle  $x(t)$ , qui peut s'écrire :

$$\dot{x} = A(t)x(t) \tag{1.3}$$

Où plus généralement

$$\dot{x} = A(t)x(t) + g(t)$$

où  $A$  est une matrice carrée et  $g$  est un vecteur dont les éléments sont des fonctions de  $t$

Le mot linéaire concerne uniquement la dépendance par rapport à  $x$ , les éléments sont de  $A(t)$  et de  $g(t)$  n'ont pas à être linéaire en  $t$ . [2]

#### Un système non linéaire

Un système dynamique non linéaire peut toujours être écrit par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x(t)) \end{pmatrix}$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , et  $f$  est une fonction non linéaire. On note  $f(t, x(t)) = F(x(t))$ .

A la section [1.3], on va étudier le cas où  $f$  est linéaire bien entendu, dans le cas non

linéaire, on ne peut pas faire une description aussi détaillée, puisque la fonction  $f$  est arbitraire, l'analyse des systèmes linéaires va nous aider énormément dans l'étude des systèmes non linéaire; plus précisément, on montre qu'un voisinage des champs des vecteurs, le comportement des solutions d'une équation est presque toujours du même type que celui des solutions de son approximation linéaire. [2]

### 1.1.3 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique d'écrit par des équations différentielles par rapport au temps. [6]

### 1.1.4 Trajectoire

**Définition 1.1.2** Soient  $(M, \{\Psi^t\}_{t \in G})$  un système dynamique et  $x$  un état de l'espace des phases. On appelle trajectoire d'un point  $x$  de  $M$ , l'application définie sur  $G$  et à valeurs dans  $M$  par :

$$\begin{aligned}\Psi : G &\rightarrow M, \\ t &\rightarrow \Psi^t(x)\end{aligned}$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel. [6]

### 1.1.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que

les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale  $x_0$  un et un seul état final  $x(t)$ , il faut pour cela qu'il existe une application bijective  $\varphi$  de l'espace des phases.

$$\begin{aligned} \varphi : X \times \mathbb{R} &\rightarrow X \\ (x, t) &\rightarrow \varphi_t(x) = \varphi(x, t) \end{aligned}$$

On appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_t(x_0) &= x_0 \\ \varphi_{t+s}(x_0) &= \varphi_t(\varphi_s(x_0)) \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijective et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système. [\[13\]](#)

**Exemple 1.1.1** *Cas continu (L'oscillateur de Duffing)*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \varpi t \end{cases} \quad (1.4)$$

ou  $\delta, \gamma, \varpi$  sont des paramètres physiques réels (variables statiques).

$\mathbb{R}^2$  est l'espace des phases.

$\mathbb{R}^3$  est l'espace des paramètres.

**Exemple 1.1.2** *Cas discret (L'application de Hénon)*

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

ou  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels.

$\mathbb{R}^2$  est l'espace des phases.

$\mathbb{R}^2$  est l'espace des paramètres

## 1.2 Point d'équilibre

**Définition 1.2.1** *Un point d'équilibre (ou point critique, ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation  $\dot{x} = f(x)$  est un point  $x^*$  l'espace des phases vérifiant  $f(x^*) = 0$ .* [13]

**Remarque 1.2.1** *Par un changement de variable  $y = x - x^*$ , on peut ramener le point à l'origine (0).*

**Exemple 1.2.1** *Considérons*

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

on a deux points d'équilibre :  $x^* = (1.0)^T$  et  $x^* = (-1.0)^T$ . [10]

## 1.3 Cycle limite

**Définition 1.3.1** *Un cycle limite  $C$  du système différentiel est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phases, c'est à dire qu'il existe un voisinage de  $C$  dans lequel*

il n'y a pas d'autres courbes fermées.

## 1.4 Stabilité

### 1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1.5)$$

avec  $f$  une fonction non linéaire.

**Définition 1.4.1** Le point d'équilibre  $x^*$  du système [1.5](#) est :

**.Stable si :**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.6)$$

**.Asymptotiquement stable si :**

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x^*\| = 0. \quad (1.7)$$

**.Exponentiellement stable si :**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < a \|x(t_0) - x^*\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0. \quad (1.8)$$

**.Instable si :**

l'équation [1.6](#) n'est pas satisfaite.

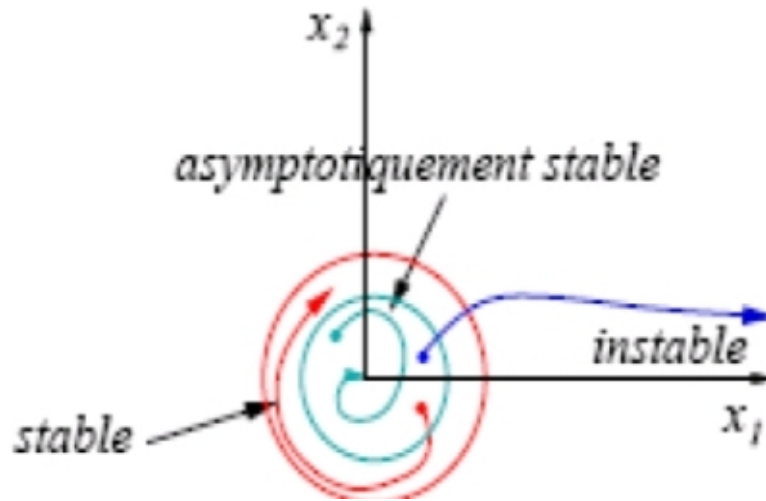


FIG. 1.1 – Différents types de stabilité de Lyapunov

### *Linéarisation des systèmes dynamiques*

L'étude de la stabilité autour d'un point d'équilibre  $x^*$ , consiste à étudier le système linéaire définie par :

$$\dot{x} = Ax$$

ou  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ .

Supposons qu'une petite perturbation  $\varepsilon(t)$  soit appliquée au voisinage  $x^*$  et la fonction  $f$  peut être développée en série de Taylor au voisinage de point  $x^*$  comme suite :

$$\varepsilon'(t) + x^* = f(x^* + \varepsilon(t)) \simeq f(x^*) + J_f(x^*)\varepsilon(t) \quad (1.9)$$

avec  $J_f(x^*)$  est la **matrice de Jacobienne** de  $f$  définie par :

$$J_f(x^*) = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x^*} \quad (1.10)$$



Comme  $f(x^*) = x^*$  alors l'équation [1.9](#) devient :

$$\varepsilon'(t) = J_f(x^*)\varepsilon(t). \quad (1.11)$$

L'écriture [1.11](#) veut dire que le système [1.10](#) est linéarisé.

### ***La méthode indirecte de Lyapunov***

La méthode indirecte de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $x^*$  du système [1.5](#). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de  $x^*$  expriment comme suit :

- ▶ Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative,  $x^*$  est exponentiellement stable.
- ▶ Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive,  $x^*$  est instable.

### ***La méthode directe de Lyapunov***

La méthode directe de Lyapunov est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode. [13](#)

**Théorème 1.4.1** *Le point d'équilibre  $x^*$  du système [1.5](#) est stable si il existe une fonction  $V(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- 1)  $S$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x^* \in S$
- 2)  $V(x^*) = 0$  et  $V(x) \succ 0, \forall x \neq x^*$  dans  $S$ .
- 3)  $\dot{V}(x) \prec 0, \forall x \neq x^*$  dans  $S$

*Si de plus pour  $x, \dot{V}(x) \prec 0, \forall x \neq x^*$  dans  $S$  alors  $x_0$  asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Si on suppose encore que  $V$  tend vers l'infini lorsque  $x \in \mathbb{R}^n$  tend*

vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de  $x^*$ , tendent vers  $x^*$  (on dit que  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable). [20]

**Exemple 1.4.1** Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

Considérons la fonction suivant : (point d'équilibre unique  $(0, 0)$ ) :

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

On a  $V(0, 0) = 0$  et  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \succ 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ .

de plus :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt}(V(x_1, x_2)) = \frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) \\ &= 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \\ &= 2x_1(x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)) + 2x_2(-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2) \succ 0 \end{aligned}$$

Alors : l'origine est instable car  $\dot{V}(x_1, x_2) \succ 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ . [18]

## 1.4.2 Stabilité structurelle

**Définition 1.4.2** Un système dynamique (champ de vecteur ou application) est structurellement stable ou robuste si les systèmes suffisamment "proches" présentent un même comportement dynamique.

# Chapitre 2

## Bifurcations et Chaos

Le terme de bifurcation est utilisé pour désigner dans un sens large, toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique suit à la variation de l'un de ces paramètre. Une bifurcation correspond donc à la collision de deux objets (point répulsif ou selle, attracteur) ou de deux variétés. La collision de deux objets donne naissance à une bifurcation "locale" alors que la collision de deux variétés donne naissance à une bifurcation "global".

Les bifurcations se produisent dans les deux systèmes dynamiques, continus (décrit par des équations différentielles, EDO ou EDP), et discrets (décrit par des applications ou cartes).

D'autre part, le chaos est un objet de recherches actives dans les domaines de la physique, les mathématique et dans de nombreux autres domaines de la science au cours des dernières années. Le chaos est un véritable théorie scientifique. Elle repose sur la représentation des solutions des équations différentielles dans l'espace des phases associé : représenter les solutions sous forme de trajectoire dans l'espace plutôt que l'une des variables en fonction du temps permet de révéler la structure sous-jacente c'est ce qui conduit à affirmer que la théorie du chaos contribue à «trouver de l'ordre caché sous un désordre apparent.» .

## 2.1 Théorie des bifurcations

Soit le système dynamique non linéaire de dimension  $n$  suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (2.1)$$

### 2.1.1 Définition de bifurcation

**Définition 2.1.1** Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x^*$  du système [\[2.1\]](#) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions

**Définition 2.1.2** Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres, par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre  $\mu$  pour la quelle le système [\[2.1\]](#) n'est pas structurellement stable). [\[13\]](#)

### 2.1.2 Types de bifurcations

Les bifurcations d'un système dynamique se divisent en deux classes principales :

♠ Bifurcations locales, qui peuvent être analysés entièrement par des changements dans les propriétés de stabilité des équilibres locaux, orbites périodiques ou d'autres ensembles invariants comme les paramètres traversent des seuils critiques.

♠ Bifurcations globaux, qui se produisent souvent lorsque les plus grands ensembles invariants du système entrent en collision avec l'autre, ou avec les équilibres du système.

#### les bifurcations locales

Il existe quatre types de bifurcation (noeud-col ,transcritique, fourche,hopf) : [\[3\]](#)

### 1-Bifurcation noeud-col

**Définition 2.1.3** *Définition 2.1.4* Un système dynamique présentant un point fixe stable  $a$  subit une bifurcation **noeud-col** en  $\mu = \mu_c$ , si une valeur propre réelle du système linéarisé autour de  $a$  traversé l'axe imaginaire pour  $\mu = \mu_c$ . Pour  $\mu$  voisin de  $\mu_c$ , le comportement du système est alors gouverné, après éventuellement un changement de variable, par l'équation suivante, appelée forme normale de la bifurcation **noeud-col** :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2$$

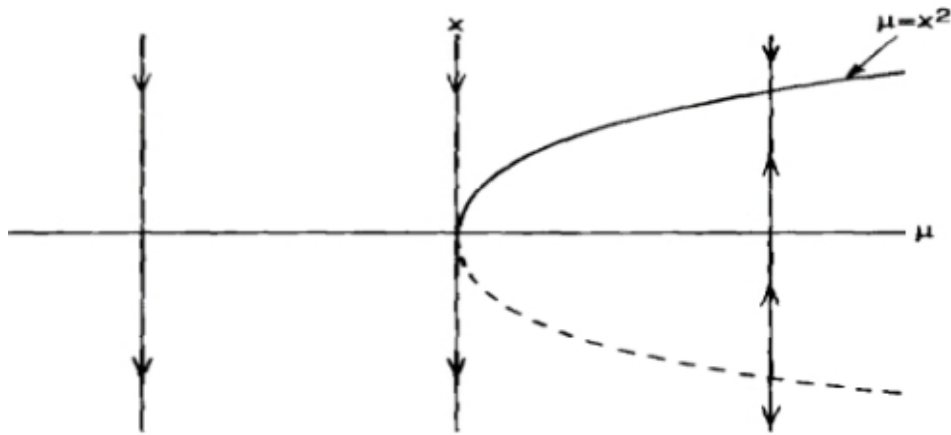


FIG. 2.1 – Bifurcation noeud-col

### 2-Bifurcation transcritique :

**Définition 2.1.5** On considère la forme normale suivante :

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2$$

Cette équation admet deux points d'équilibre  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \mu$

La stabilité de ces deux points d'équilibre peut être investie grace à la méthode indirecte de Lyapunov et on aura :

$$\ddot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x = \mu x$$

$$x_1 = 0 \text{ est } \begin{cases} \text{stable si } \mu < 0 \\ \text{instable si } \mu \geq 0 \end{cases}$$

Sinon :  $\dot{y} = -\mu y$  avec  $y = \mu - x$ .

On conclut :

$$x_2 = \mu \text{ est } \begin{cases} \text{stable si } \mu > 0 \\ \text{instable si } \mu \leq 0 \end{cases}$$

Ce qui démontre qu'au point  $\mu = 0$  il y a un échange de stabilité entre les points  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \mu$ . Cet échange est appelé «**Bifurcation transcritique**»

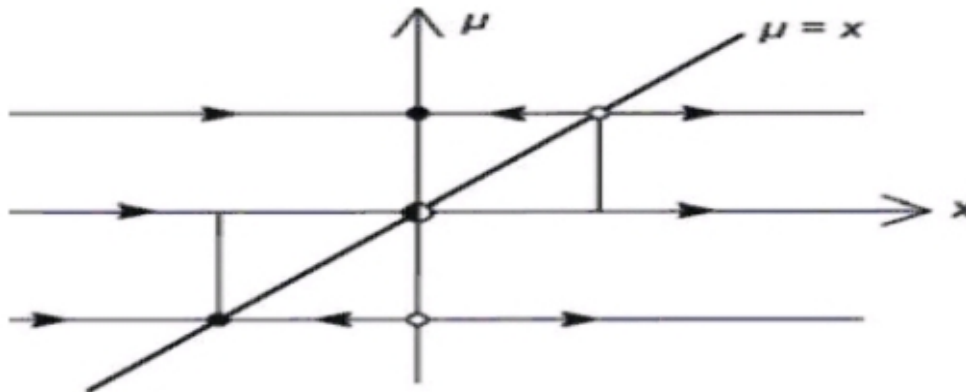


FIG. 2.2 – Bifurcation de transcritique

### 3-Bifurcation fourche :

**Définition 2.1.6** *Un système dynamique invariant par réflexion, i.e : invariant par la transformation  $x \rightarrow -x$  (liée à une symétrie du système physique), et présentant un point fixe stable  $a$ , subit une bifurcation **fourche** en  $\mu = \mu_c$  si une valeur propre*

réelle du système linéarisé autour de  $a$  traversé l'axe imaginaire pour  $\mu = \mu_c$ . Pour  $\mu$  voisin de  $\mu_c$ , le comportement du système est gouverné, après éventuellement un changement de variable, par l'équation suivante, appelée forme normale de la bifurcation **fourche** :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - \lambda x^3$$

Le cas  $\lambda = 1$  est dit *supercritique*, le cas  $\lambda = -1$  est dit *sous-critique*.

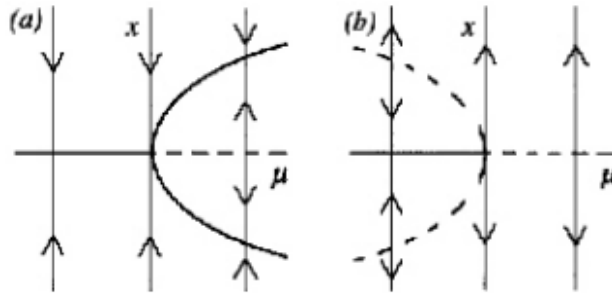


FIG. 2.3 – Bifurcation fourche

#### 4-Bifurcation de Hopf :

La bifurcation de Hopf correspond à la présence de deux valeurs propres complexes conjuguées, elle est modélisée par :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -wy + x(\mu - (x^2 + y^2)) \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \\ \frac{dy}{dt} &= wx + y(\mu - (x^2 + y^2)) \quad y \in \mathbb{R}, w = cste \end{aligned}$$

Cette équation, en coordonnées polaires, devient  $\frac{dr}{dt} = r(\mu - r^2)$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = w$ .

Ces deux équations sont découplées, la première correspondant à une bifurcation fourche (valable seulement pour  $r$  positif). On en déduit que  $\mu_0 = 0$  est une valeur de bifurcation et qu'il y a création d'une orbite fermée asymptotiquement stable et perte de stabilité pour l'origine lorsque  $\mu$  devient positif.

Origine : asymptotiquement stable ( $\mu < 0$ )  $\rightarrow$  instable ( $\mu > 0$ ).

Orbite ( $r = \sqrt{\mu}$ ) n'existe pas ( $\mu < 0$ )  $\rightarrow$  existe est asymptotiquement stable ( $\mu > 0$ ). Le diagramme de bifurcation de Hopf à été donné par le figure suivant :

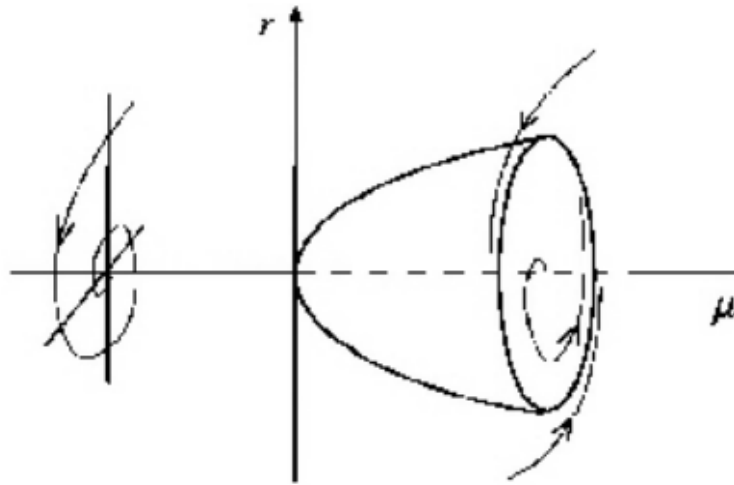


FIG. 2.4 – Bifurcation de Hopf

Le théorème de Poincaré-Andronov-Hopf permet de démontrer l'existence de solutions périodiques correspondant à un cycle limite.

**Théorème 2.1.1** *Soit le système dynamique :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \alpha) \\ \dot{y} = g(x, y, \alpha) \end{cases}$$

Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Supposons que le système admet un point d'équilibre  $(x^*(\alpha), y^*(\alpha))$ .

Soit  $A(x^*(\alpha), y^*(\alpha))$  la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme  $\lambda_{\pm} = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$  avec  $\gamma(\alpha)$  la partie réelle et  $\omega(\alpha)$  la partie imaginaire.

Soit  $\alpha_c$  une valeur particulière du paramètre  $\alpha$  pour laquelle on a  $\gamma(\alpha_c) = 0, \omega(\alpha_c) \neq 0$  et  $\frac{d\gamma}{d\alpha}(\alpha_c) \neq 0$ .

Alors si  $\frac{d\gamma}{d\alpha}(\alpha_c) > 0$ , trois cas sont possibles :



1. Lorsque  $\alpha = \alpha_c$  (à la bifurcation), il existe des trajectoires concentriques autour de  $(x^*(\alpha_c), y^*(\alpha_c))$  : le point d'équilibre  $(x^*(\alpha_c), y^*(\alpha_c))$  correspond alors à des centres. On parle de bifurcation de Hopf dégénéré.
2. Lorsque  $\alpha = \alpha_c$ , le point d'équilibre  $(x^*(\alpha_c), y^*(\alpha_c))$  est asymptotiquement stable et  $\exists \tilde{\alpha} \succ \alpha_c$  tel que  $\forall \alpha, \alpha_c \prec \alpha \prec \tilde{\alpha}$  il existe autour de  $(x^*(\alpha_c), y^*(\alpha_c))$  qui est instable, un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à  $\sqrt{\alpha - \alpha_c}$ . Dans ce cas, on parle de bifurcation de Hopf super-critique.
3. Lorsque  $\alpha = \alpha_c$ , le point d'équilibre  $(x^*(\alpha_c), y^*(\alpha_c))$  est instable et  $\exists \tilde{\alpha} \prec \alpha_c$  tel que  $\forall \alpha, \tilde{\alpha} \prec \alpha \prec \alpha_c$  il existe autour de  $(x^*(\alpha_c), y^*(\alpha_c))$  qui est asymptotiquement stable, un cycle limite instable, dont l'amplitude est proportionnelle à  $\sqrt{\alpha - \alpha_c}$ . Dans ce cas, on parle de bifurcation de Hopf sous-critique.

### les bifurcations globales

Les bifurcations globales se produisent lors que des ensembles invariants, comme orbites périodiques, entrent en collision avec les équilibres. Des exemples de cette bifurcation sont :

- ♣ Bifurcation homocline dans laquelle un cycle limite entre en collision avec un point selle.
- ♣ Bifurcation hétéroclinique dans laquelle un cycle limite entre en collision avec deux ou plusieurs points selles.

Les bifurcations globales peuvent également impliquer des ensembles plus complexes, comme les atracteurs chaotiques.

### 2.1.3 Diagramme de bifurcation

**Définition 2.1.7** *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.* [6]

### 2.1.4 Codimension d'une bifurcation

L'ensemble des valeurs de bifurcation est défini par  $n$  conditions

$$C_1(\mu) = C_2(\mu) = \dots = C_n(\mu) = 0 \text{ avec } 1 \preceq n \preceq p$$

La bifurcation est dite de codimension  $n$  (on peut dire que la codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation.) [1]

## 2.2 Théorie du chaos

### 2.2.1 Définition du chaos

**Définition 2.2.1** *Un système dynamique est dit chaotique si une portion «significative» de son espace des phases présente simultanément les trois caractéristiques suivantes :*

*a. Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.*

*b. Attracteur étrange.*

*c. Spectre de puissance*

## 2.2.2 Caractéristiques du chaos

### Sensibilité aux conditions initiales

En 1963 par Edward Lorenz était découverte la sensibilité aux conditions initiales lors de ses travaux en météorologie. Le phénomène de dépendance sensible aux conditions initiales est plus familièrement connu sous le nom d'effet papillon, l'idée est que le temps est un système chaotique et donc une petite perturbation, comme le battement des ailes d'un papillon, pourrait entraîner de grands changements dans la trajectoire de l'orbite. [15]

D'un point de vue mathématique on dit que  $f : I \rightarrow I$  montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists (y, p) \in D : \begin{cases} \|x - y\| < \varepsilon \\ \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta \end{cases}$$

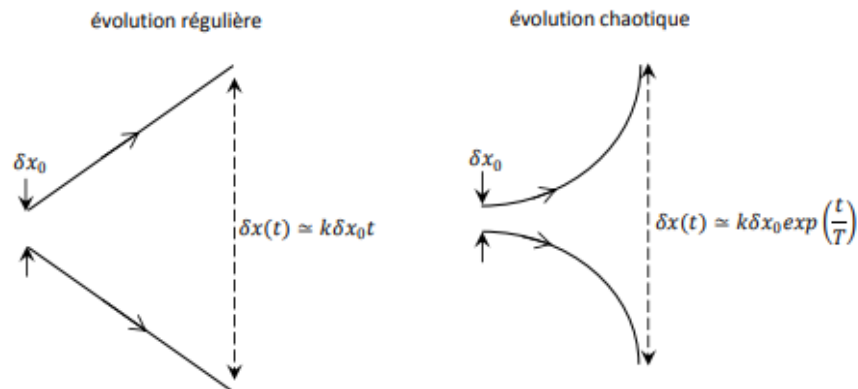


FIG. 2.5 – Sensibilité aux conditions initiales

## L'attracteur étrange

**Définition 2.2.2** *Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales.* [13]

Berge et al. [14] imposent une condition supplémentaire d'un type dimensionnel :

**Définition 2.2.3** *Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.*

Farmer. [8] définit un attracteur étrange comme suit :

**Définition 2.2.4** *Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov  $\lambda_k > 0$ .*

Les attracteurs chaotiques (étrange) peuvent être classés en trois types principales :

1. Attracteur hyperbolique
2. Attracteur de type Lorenz
3. Quasi-attracteurs

## Spectre de puissance

Une façon simple de caractériser le chaos consiste à calculer le spectre de Fourier de l'évolution temporelle d'une des variables du système. Lorsque le système est intégrable c'est-à-dire qu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace de phases, ce système est dit intégrable, les trajectoires étant la composition de mouvement d'oscillation ayant chacune une pulsation  $\omega_i$ .

Le spectre d'une variable d'un tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsation  $\omega_i$ , à leurs harmoniques  $m\omega_i$  avec  $m \in \mathbb{N}$ , aux combinaisons linéaire de fréquence  $m\omega_i + n\omega_j$  avec  $m, n \in \mathbb{Z}$ , les spectres qui sont la combinaison de plusieurs fréquences sans rapport simple sont dit quasipériodiques.

L'existence de spectres larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système.

L'évolution temporelle d'un système dynamique est souvent représentée par la valeur d'une de ses variables à intervalle régulier, c'est ce qu'on appelle la série temporelle. [13]

### 2.2.3 Détection du chaos

Il existe des méthodes numériques qui permettent de déterminer le comportement chaotique d'un système dynamique non linéaire. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On choisit de mettre en œuvre deux méthodes les plus couramment utilisées : la dimension fractale et les exposants de Lyapunov.

#### les exposants de Lyapunov

Le test de l'exposant de Lyapunov peut être utilisé pour dissipatif ou systèmes non dissipatifs (conservatifs), alors que le test de dimension fractale n'a de sens que pour les systèmes dissipatifs.

Le test d'exposant de Lyapunov mesure la sensibilité du système aux changements des conditions initiales. Conceptuellement, on imagine une petite boule des conditions initiales dans l'espace des phases et on regarde sa déformation dans un ellipsoïde sous la dynamique du système . Si c'est la longueur maximale de l'ellipsoïde et  $d_0$  est la taille initiale de la sphère de condition initiale, l'exposant de Lyapunov  $\lambda$  est interprété par l'équation :

$$d = d_0 2^{\lambda(t-t_0)}$$

Une seule mesure, cependant, n'est pas suffisante et le calcul doit être moyenné sur

différentes régions de l'espace des phases. Cette moyenne peut être représentée par :

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N \frac{1}{(t - t_{0i})} \log_2 \frac{d_i}{d_{0i}}$$

est la vitesse de divergence ou convergence des trajectoires sur l'attracteur. [15]

## Dimension fractale

**Définition 2.2.5** *Il existe plusieurs définitions pour la dimension fractale :*

★ *Ceux, qui définissent la dimension d'un ensemble. Cet ensemble peut être un sous ensemble d'un espace métrique quelconque, un attracteur ou non , nous présentons la dimension de Hausdorff et la dimension de capacité.*

★ *Ceux qui tiennent compte de la dynamique d'un système. Ce sont la dimension d'information et la dimension de corrélation. Habituellement on dit qu'on définit la dimension fractale d'un attracteur. [15]*

*Il existe plusieurs type de dimensions pour les attracteurs chaotique, parmi celle-ci on peut citer :*

1. *Dimension de Lyapunov*
2. *Dimension de Hausdorff*
3. *Dimension de Kolmogorov*
4. *Dimension de corrélation*

## 2.2.4 Routes vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

### L'intermittence vers le chaos

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus fréquentes.

Finalement, la turbulence domine. [4] [17]

### Le dédoublement de période

Le dédoublement de période dans les systèmes physiques a été observé expérimentalement dans toutes les branches du classique physique, chimie et biologie ainsi que dans de nombreux dispositifs techniques, il est caractérisé par une succession de bifurcations de fourches. A mesure que la contrainte augmente, La période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ect.... [13]

### La quasi-périodicité

Ce scénario a été mis en évidence par travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens**. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle le comportement est périodique.

Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi-périodicité. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos. [9]

# Chapitre 3

## Applications : Stabilité et Bifurcation dans un Système Jerky

### 3.1 Introduction

Ces dernières années, on a observé que l'équation différentielle autonome explicite du troisième ordre, appelée équation de **jerky**, représente une sous-classe intéressante de systèmes dynamiques qui peuvent présenter de nombreuses caractéristiques majeures du mouvement régulier et chaotique. Dans ce chapitre, nous étudions la dynamique globale d'une famille spéciale de système de **jerky**  $\dot{z} = -\alpha z - y + f(x)$ , où  $f(x)$  est une fonction non linéaire, connue pour présenter un comportement chaotique à certaines valeurs de paramètres. Nous identifions en particulier les régions de l'espace des paramètres avec différentes dynamiques asymptotiques en utilisant des méthodes analytiques ainsi qu'un calcul approfondu des spectres de Lyapunov dans l'espace complet des paramètres. [16]



## 3.2 Le système de Jerky

On considère le système de trois équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z - y + f(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $f(x)$  est la fonction logistique donnée par :

$$f(x) = |x| - 2$$

Le système [3.1](#) est modifié comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z - y + |x| - 2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec  $\alpha$  est un nombre réel positif.

### 3.2.1 Stabilité des équilibres

Le système [3.2](#) a deux points d'équilibre qui sont donnés comme suit :

$$E_+ = (2, 0, 0), \quad E_- = (-2, 0, 0)$$

L'expression de matrice Jacobienne  $J_{E_{\pm}}$  est :

$$J_{E_{\pm}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pm 1 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Alors, le pôleynome caractéristique est :

$$P_{E_{\pm}}(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda \pm 1$$

Pour étudier les conditions de stabilité des points d'équilibre, on a appliqué le critère de **Routh-Hurwitz** [19], dans lequel toutes les parties réelles des valeurs propres sont négatives si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$a_1 \succ 0, a_3 \succ 0, \text{ et } a_1a_2 - a_3 \succ 0 \quad (3.3)$$

Où  $a_1, a_2$ , et  $a_3$  sont définis tels que :

$$P_E(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

Où  $E$  est le point d'équilibre associé.

### Condition de stabilité de $E_+$

Le pôleynome caractéristique de  $J_{E_+}$  est :

$$P_{E_+}(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda - 1$$

En appliquant le critère de **Routh-Hurwitz** 3.3, on trouve que  $E_+$  est instable pour chaque valeur positive de  $\alpha$ , car  $a_3 = -1$  est négatif.

### Condition de stabilité de $E_-$

Le pôleynome caractéristique de  $J_{E_-}$  est :

$$P_{E_-}(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda + 1 \quad (3.4)$$

Suivant le critère de **Routh-Hurwitz** [3.3](#),  $E_-$  est stable si seulement, si le paramètre  $\alpha$  satisfaisant la condition  $\alpha \succ 1$ .

### 3.2.2 Analyse de bifurcation de Hopf

Cette section décrit la bifurcation de Hopf du système  $\alpha$ -paramétrique. Puisque le point d'équilibre  $E_+$  est instable pour chaque valeur positif de  $\alpha$ ,  $E_-$  change les propriétés de stabilité à  $\alpha = 1$ , on étudie la bifurcation de Hopf à partir de  $E_-$ .

**Proposition 3.2.1** *Le système [3.2](#) subit une bifurcation de Hopf supercritique à  $E_-$ , lorsque le paramètre  $\alpha$  croise la valeur critique  $\alpha_c = 1$ .*

**Preuve.** la matrice Jacobienne  $J_{E_-}$  est donné par :

$$J_{E_-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

On souhaite déterminer les conditions suffisantes pour que  $J_{E_-}$  ait une valeur propre réelle négative  $\lambda_0(\alpha)$  et deux valeurs propres conjugués complexes  $\lambda_{\pm}(\alpha) = \gamma(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ , avec la partie réelle  $\gamma(\alpha)$  remplit les conditions :

$$\gamma(\alpha_c) = 0 \text{ et } \left. \frac{d\gamma}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_c} \neq 0$$

On écrit l'équation caractéristique comme suit.

$$(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-) = 0 \tag{3.5}$$

L' équation [3.5](#) se transforme à forme suivante

$$\lambda^3 - \lambda^2(2\gamma + \lambda_0) + \lambda(|\lambda_+|^2 + 2\gamma\lambda_0) - |\lambda_+|^2\lambda_0 = 0 \tag{3.6}$$

De [3.4](#) et [3.6](#), on obtient :

$$\begin{cases} 2\gamma + \lambda_0 = -\alpha \\ |\lambda_+|^2 + 2\gamma\lambda_0 = 1 \\ |\lambda_+|^2 \lambda_0 = -1 \end{cases} \quad (3.7)$$

On a  $\lambda_0 = -(\alpha + 2\gamma) < 0$  alors, la matrice jacobienne  $J_{E_-}$  a deux valeurs propres imaginaires pures si et seulement si  $a_1 a_2 = a_3$ , donc,  $a = 1$  (dans ce cas, on a  $\lambda_0 = -\alpha$ ,  $\lambda_+ = i$ , et  $\lambda_- = -i$ ).

Alors, le point critique de la bifurcation de Hopf  $\alpha_c$  est  $\alpha_c = 1$ , le point d'équilibre  $E_-$  change sa propriété de stabilité en  $\alpha_c$ . À partir de [3.7](#), on obtient :

$$1 - 2\gamma - \alpha - 2\gamma(2\gamma + \alpha)^2 = 0$$

La dérivation par rapport à  $\alpha$ , nous donne :

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{1}{(2\gamma + \alpha)^2 + 4\gamma(2\gamma + \alpha) + 1}$$

Alors

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_c} = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \neq 0$$

Parsuite le système [3.2](#) satisfait les conditions du théorème de bifurcation de Hopf à  $E_-$ .

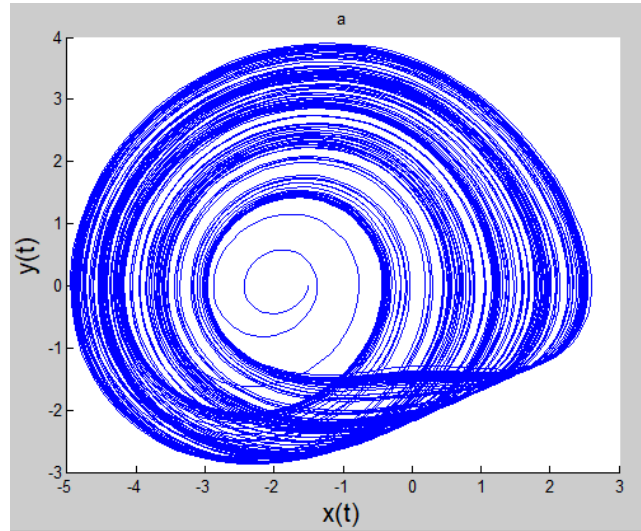


FIG. 3.1 – L'attracteur du système (3.2) (chaotique) , pour  $\alpha = 0.6$

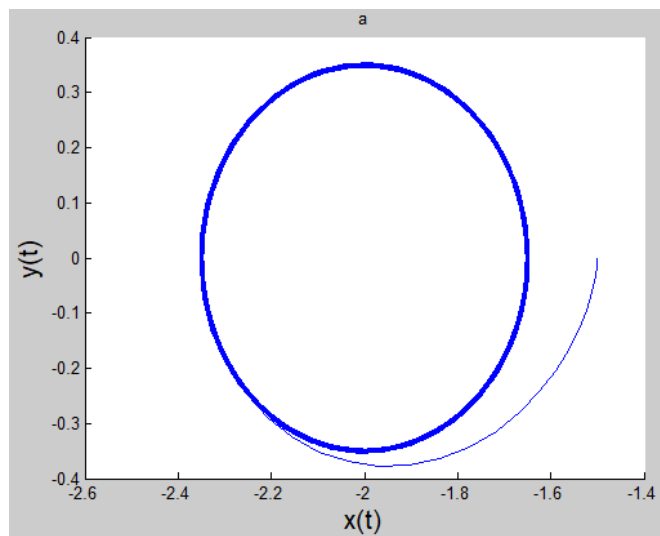


FIG. 3.2 – L'attracteur du système (3.2) (cycle limite) , pour  $\alpha = 1$

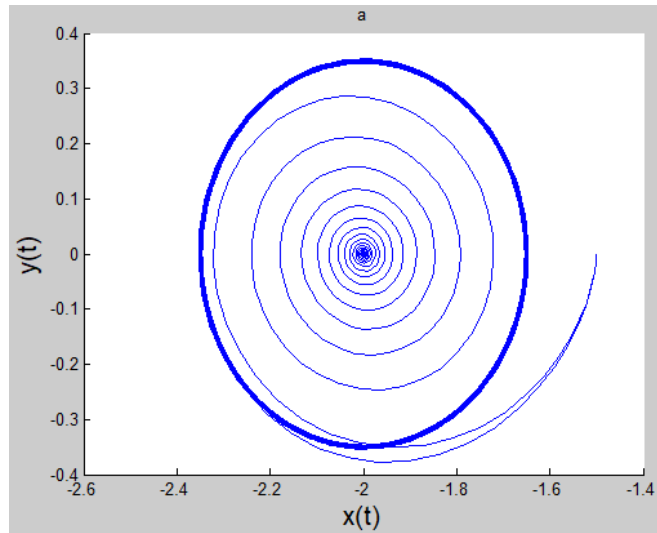


FIG. 3.3 – L'attracteur du système (3.2) stable , pour  $\alpha = 1.2$

■

### 3.2.3 Diagramme de bifurcation

Dans ce figure on remarque :

- Si  $\alpha = 0.6$  , on observe l'attracteur est chaotique.
- Si  $0.6 < \alpha < 0.7$ ,l'attracteur est cycle limite.
- Si  $\alpha = 1$ , on trouve nécessaire point de bifurcation Hopf.
- Si  $\alpha > 1$ , l'attracteur est stable.

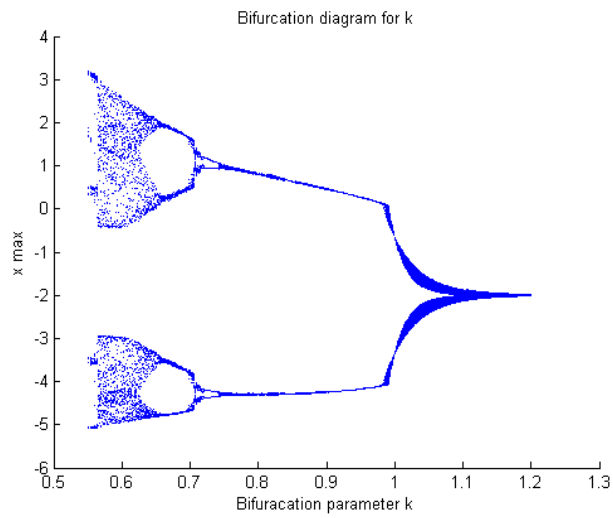


FIG. 3.4 – L'évolution de l'attracteur suivant la variation de paramètre  $\alpha$

# Conclusion

Ce mémoire a pour but d'étudier la stabilité et la bifurcation dans un système dynamique chaotique continu dépendant de paramètre et les différents comportements asymptotiques des solutions. Nous avons intrduit les notions de bases et les outils mathématiques nécessaires pour étudier les systèmes chaotiques. En première lieu, à maîtriser et à comprendre certaines des propriétés complexes de la dynamique chaotique. Cette compréhension a été accompagnée par une illustration concrète de quelque notions précédentes par un exemple célèbre "modèle de Jerky".



# Bibliographie

- [1] Abedlouahab, M.S. (2009). Les systèmes Chaotiques à dérivées Fractionnaires. Mémoire de Magister, Université Mentouri-Constantine.
- [2] Charif, M. (2018). Systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.
- [3] Charru, F. (2012). Instabilités hydrodynamiques. EDP sciences.
- [4] Eckmann, J. P. (1981). Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Reviews of modern physics*, 52(4), 643
- [5] Dang-Vu, H., & Delcarte, C. (2000). Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses Ed. Marketing.
- [6] Gasri, A, & Zeraouia, E. (2018). Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques (Doctoral dissertation, Université Frères Mentouri-constantine).
- [7] Housna, F.I. L. I., & Kaothar, C. H. O. U. C. H. A. N. E. (2020). Sur un algorithme pour le calcul des exposants de Lyapunov d'un système dynamique .
- [8] Farmer, J. D., & Sidorowich, J.J. (1987). Predicting chaotic time series. *Physical review letters*, 59(8), 845.
- [9] Kaplan, D., & Glass, L.(1995). Finite-Difference Equations. In *Understanding Nonlinear Dynamics* (pp. 1-53). Springer, New York, NY.

- [10] Lamnabhi-Lagarrigue, F. (1994). Analyse des systèmes non linéaires. Hermes science publications.
- [11] Mammeri, Mohammed. (2011). Sur la stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques en dimension 2. Mémoire Magistère de Université kasdi merbah-ouargla.
- [12] Marle, C. M. (2003). Systèmes dynamiques : une introduction. Ellipses.
- [13] Menacer, T. (2014). Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires.
- [14] Mindlin, G.B., Hou, X.J., Solari, H.G., Gilmore, R., & Tufillaro, N.B. (1990). Classification of strange attractors by integers. *Physical Review Letters*, 64(20), 2350.
- [15] Moon, F.C. (2008). Chaotic and fractal dynamics : introduction for applied scientists and engineers. John Wiley & Sons.
- [16] Patidar, V., & Sud, K. K. (2005). Bifurcation and chaos in simple jerk dynamical systems.
- [17] Pomeau, Y., & Manneville, P. (1980). Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 74(2), 189-197.
- [18] Soltani, S. (2017). Cours Équations différentielles. Université de mohamed khider-Biskra.
- [19] Taconet, B., Kebairi, S., Djematene, A., & Mercy, P. (1997). Marge de stabilité des systèmes lineaires : une extention du critère de Routh-Hurwitz.
- [20] Wiggins, S., & Golubitsky, M. (2003). Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos(Vol. 2, No. 3). New : Springer.

## Annexe A : Programme de Matlab

```
global c ;

crange = 0.5 : 0.01 : 1.2;

k=0; tspan = 0 : 0.01 : 500;

xmax = [];

for c = crange

f = @(t,x)[x(2); x(3); -c*x(3)-x(2)+abs(x(1))-2];

x0 = [1.500];

k = k+1;

[t, x] = ode45(f, tspan, x0);

count = find (t>100);

x = x(count, :);

j = 1;

n = length(x( :,1));

for i = 2 : n-1

if x(i-1,1) < x(i,1) && x(i,1) > x(i+1,1)||x(i-1,1)>x(i,1)&& x(i,1) < x(i+1,1)

xmax(k,j) = x(i,1);

j = j+1;

end
```

```
end

if j>1

plot(c, xmax(k,1 :j-1),'k','Marker Size',1);

end

hold on;

index(k) = j-1;

end

xlabel('Bifurcation parameter k');

ylabel('Xmax');

title('Bifurcation diagram for k');

hold on

beta = 1.2; Alpha = 0.01

Med = @(t,x)[x(2); x(3); -beta*x(3)-x(2)+abs(x(1))-2];

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);

%[t,xa] = ode45(Med,[1001000],[-1.5,0,0], options);

%plot(t,xa( :,2))

[t,xa] = ode45(Med,[900010000],[-1.5,0,0],options);

plot(xa( :,1),xa( :,2))

title('a')

fsize = 15;

xlabel('x(t)', 'FontSize', fsize);

ylabel('y(t)', 'FontSize', fsize);

zlabel('z(t)', 'FontSize', fsize);
```

# **Annexe B : Abréviations et Notations**

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de cet thèse sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ n fois.
$\mathbb{R}^r$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ r fois
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\dot{x}$	Dérivée temporelle.
lim	La limite
$x^*$	Piont d'équilibre.
$\exists$	Il existe.
$\forall$	Pour tout.
$\lambda_i$	Les valeurs propres.
$V(x)$	Fonction de Lyapunov.
$U$	Ensemble ouvert.
exp	Fonction expnnentielle.
$\ \cdot\ $	Norme sur $\mathbb{R}^n$
$ \cdot $	Valeur absolue
$J_{E_{\pm}}$	La matrice jacobienne de $E_{\pm}$
$P_{E_{\pm}}(\lambda)$	La pôlynome caractéristique de $\lambda$ en $E_{\pm}$ .
$\sum$	La somme algébrique.
$\implies$	Implique.
$\iff$	Équivalence.

# الملخص

في هذه الاطروحة، نقدم الاستقرار والتشعب في نظام ديناميكي فوضوي مستمر. نقدم في البداية، المفاهيم الرئيسية للأنظمة الديناميكية مثل الدورات الحدية و نقاط التوازن واستقرارها.

بعد ذلك، نركز على نظريتين للأنظمة الديناميكية، نظرية التشعب ونظرية الفوضى. أخيراً، نقدم تطبيقاً للمفاهيم النظرية التي قدمت انفاً على نظام جيرك، كان الهدف هو البحث عن نقاط التوازن ودراسة استقرارها وإيجاد التشعبات بالإضافة الى ذلك قمنا برسم الرسم البياني للتشعب.

## الكلمات المفتاحية :

نظام ديناميكي , الاستقرار , التشعب , فوضى .

# Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié la stabilité et la bifurcation dans un système dynamique chaotique continu.

Au début, on a introduit les notions principales des systèmes dynamiques telles que : Définitions, les cycles limites, ensuite les points d'équilibre et leurs stabilités

Après, on a focalisé sur deux théories des systèmes dynamiques, la théorie de bifurcation et la théorie de chaos.

Finalement, on a appliqué ces notions théoriques introduit précédement au système Jerky. L'objectif a été de chercher les points d'équilibre et étudier leurs stabilités et trouver les bifurcations, en effet on a montré l'existence d'un point de bifurcation de Hopf, plus on a tracé le diagramme de bifurcation.

## **Mots clés :**

Système dynamique , La stabilité , La bifurcation , Chaos .

# Abstract

In this memory, we studied the stability and bifurcation in a continuous chaotic dynamic system.

At the beginning, we introduced the main notions of dynamical systems such as :definitions , limit cycles, then the points of balance and their stabilities.

Afterwards, we focused on two theories of dynamical systems, the bifurcation theory and the chaos theory.

Finally ,we applied these theoretical notions introduced previously to the Jerky system. The objective was to seek the points of balance and to study their stabilities and to find the bifurcations ,indeed we have shown the existence of a bifurcation point of Hopf, the more we have to draw the bifurcation diagram.

***Key words :***

Dynamic system , stability , bifurcation , chaos.