République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Hamel chaima

Titre :

Equations différentielles stochastiques de Volterra

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**BOUGHERARA Saliha**	UMKB	Président
Dr.	**BENABBA Fadhila**	UMKB	Encadreur
Dr.	**CHAOUCHKHOUANE Nassima**	UMKB	Examinateur

28 Juin 2022

Dédicace

Je dédie cet humble ouvrage :

À mes trés chers parents :*Aissa* & *Fatima* et ma grand-pére *Ali* et ma grand-mére *Zineb*.

les étres les plus chérs a mon coeur.

À mon cher mari *Salah Eddine*, pour le soutien dont il a fait preuve pendant toute la durée de de ce travail.

À ma cousine *Sabrina*, pour sa patience et son conseils.

À ma trés chére amie *Asma* pour son soutien morale.

À mes oncles et mes tantes.

À mes frères : *Okba* & *Oussama*.

À ma trés chere soeur : *Nour*.

À ma jumeau *Hadjer Belkis*.

À tous ceux qui, ont contribué à faire ce long voyage.

Tout la famille du département de mathématiques.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon mére et ma pére qui m'ont soutenu moralement et financiérement.

Je tiens à remercier M$^{\text{me}}$‹‹***BENABBA Fadhila***›› *pour la bienveillance avec laquelle a encadreé ce mémoire et pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.*

Je tiens à remercier également les membres de jurys : **Dr.** ***BOUGHERARA Saliha*** et **Dr.** ***CHAOUCHKHOUANE Nassima*** *pour avoir accepter à discuter mon mémoire*

Enfin, Je tiens à remercier qui m'ont soutenu et encouragé durant mes études de prés ou de loin.

Merci à tous.

Table des matières

Introduction

Les premières équations intégrales furent obtenues par Daniel Bernoulli vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Les équations intégrales apparaissent notamment dans la résolution des problèmes de Cauchy et les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Dans la théorie classique d'équations intégrales on distingue :

$\triangleleft$ Equation de Fredholm ;

$\triangleleft$ Equation de Volterra.

Ce mémoire est organisé comme suit :

- Dans le premier chapitre, on donne quelques rappels sur le processus stochastique et quelques propriétés : Martingale, mouvement Brownien et formule d'Itô et l'existence et l'unicité de la solution pour les équations différentielles stochastiques (EDS).
- Le deuxième chapitre, on commence par l'équation intégrale et l'existence et l'unicité de la solution pour les équations intégrale de Volterra, ensuite on démontre l'éxistence et l'unicité d'une solution de l'équation intégrale stochastique de Volterra (EISV) suivante :

$$X_t = \varphi(t) + \int_0^t b(t, s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(t, s, x_s)dB_s, \forall t \in [0, T],$$

où :

◀ $\varphi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et à trajectoire continue $\forall t \in [0, T]$.

◀ $b(t, s, x)$ et $\sigma(t, s, x)$ sont des fonctions aléatoires définies pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 1

Rappels sur le Calcul Stochastique

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique, en biologie , médecine et bien entendu les sciences de l'ingénieur.

Définition 1.1.1 *: Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T. En général $T = \mathbb{R}^+$ et on considère que le processus est indexé par temps t.*

Remarque 1.1.1 *:*

- *Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.*
- *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 *: Un processus stochastique $\{X(t, \omega),\ t \in T\}$ est dit à temps discret (respectivement à temps continu) si T est un ensemble infini dénombrable (respectivement un ou plusieurs intervalles).*

Définition 1.1.3 *:*

1. *Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \textit{pour tous} \quad 0 \leq s \leq t \;\; \textit{dans}\; T.$$

2. *On dit que la filtration est naturelle (ou canonique) de processus X si*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right), \quad t \leq T.$$

Remarque 1.1.2 *: Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est appelé espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.4 *: Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.5 *: Un processus $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ est dit mesurable si l'ensemble :*

$$\{(t,\omega) \in \mathbb{T}\times\Omega : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \otimes \mathcal{F}, \forall B \in \zeta,$$

c'est-à-dire l'application :

$$\begin{array}{ccc} (\Omega\times\mathbb{T}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & (\mathbb{E}, \zeta) \\ (\omega, t) & \longmapsto & X(\omega, t) \end{array}$$

est mesurable.

Définition 1.1.6 *: Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \geq 0$, l'application : $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ est une mesurable sur $[0,t]\times\Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.7 *: Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles est continu en probabilité :*

$$\lim_{s\to t} X(s,\omega) = X(t,\omega), \;\; s, \;\; t \in \mathbb{R}_+.$$

Et $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *et* $\varepsilon > 0,$ *on a :* $\lim_{s \to t} \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \left|X\left(t+h\right) - X\left(t+h\right)\right| > \varepsilon\right) = 0.$

Définition 1.1.8 *:*

1. *Un processus X est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche.*
2. *Un processus X est dit càglàd (continu à gauche, pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite.*

Définition 1.1.9 *: On dit que $\{X_s,\ s \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\mathcal{F}$-adapté, càdlàd, et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] < +\infty \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Définition 1.1.10 *: On dit que $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur aléatoire gaussien si tout combinaison linéaire des X_{t_i} suit une loi normale :*

$$\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} \left(a_i X_{t_i}\right)$$

est une variable aléatoire gaussienne.

Définition 1.1.11 *:Un processus X est gaussien si tout combinaison linéaire finie de $(X_t,\ t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si :*

$$\forall n, t_i \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^{n} \left(a_i X_{t_i}\right)$$

est une variable aléatoire gaussienne

Définition 1.1.12 *:Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique intégrable, où T un ensemble d'indices. On dit que ce processus est uniformément intégrable si :*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in T} \mathbb{E}\left[\left|X_t\right| 1_{\{|X_t| \geq n\}}\right] = 0.$$

Définition 1.1.13 *:*

1. *Soit* $X = (X_t)_{t \in I}$ *et* $Y = (Y_t)_{t \in I}$ *des processus stochastiques dans* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sont dit indistinguables si et seulement si :* $\mathbb{P}(X_t = Y_t, t \in I) = 1$.
2. *Soit* $X = (X_t)_{t \in I}$ *et* $Y = (Y_t)_{t \in I}$ *des processus stochastiques dans* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, les processus* X *et* Y *sont modifications l'un de l'autre si :* $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1, t \in I$.

Proposition 1.1.1 *: Si* X *et* Y *sont dit indistinguables alors 'ils sont modification l'un de l'autre. La réciproque n'est pas vraie en général.*

Définition 1.1.14 *: Deux processus* X *et* Y *sont dit équivalentes s'ils ont la même loi. On écrira* $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.

Définition 1.1.15 *: Soit une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathbb{P})$ *et* $(X_t)_{t \geq 0}$ *un processus adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$*, le processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est à variation finie si* $\mathbb{P}$*-presque toutes les trajectoires* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *sont à variation finie. Ou si la variation totale de* $(X_t)_{t \geq 0}$ *existe et est fini, i.e :*

$$V_{[0,T]}(X) = \sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{p_n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| < +\infty, \ p.s,$$

où $\Pi_n = \left(t_1^n, t_2^n, ..., t_{p_n}^n\right)$ *une subdivision de* $[0, T]$.

Définition 1.1.16 *: Un processus* X *est à variation bornée sur* $[0, T]$ *s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{p_n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| < +\infty, \ p.s.$$

Définition 1.1.17 ***:*** *Un processus* X *est dite à accroissements indépendants si on a :*

1. $X_0 = 0$, *p.s ;*
2. $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, *tel que :* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, *les variables aléatoires (v.a)*

$$X_{t_1}, \ \left(X_{t_2} - X_{t_1}\right), ..., \ \left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$$

sont indépendantes.

Définition 1.1.18 *: Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus accroissements indépendants stationnaires si : $\forall s,\ t \in \mathbb{R}_+,$ tel que $0 \leq s < t,$ la variable aléatoire $X_t - X_s$ a la même loi que X_{t-s}. Autrement dit :*

$$\forall h \geq 0 \ : \ X_{t+h} - X_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

(notation $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ ssi X et Y ont la même loi).

1.2 Martingale et Mouvement Brownien

1.2.1 Martingale

Pour les probabilistes, les martingales sont avant tout des processus intégrables et adaptés vérifiant une propriété précise d'espérance conditionnelle. Les pionniers du concept de martingale sont alors **S. Bernstein, P. Lévy, J. Ville, E. Borel** et **J. Doob**.

On se donne un espace probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right)$.

Définition 1.2.1 *: Un processus $(X_t, t \in \mathbb{T})$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale si :*

1. *X_t est un processus adapté ;*
2. *$\mathbb{E}\,|X_t| < \infty$, pour tout $t \in \mathbb{T}$, (le processus X_t est intégrable) ;*
3. *Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}\,(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$.*

Remarque 1.2.1 *:*

- *Si on remplace (c) par : (c') pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}\,(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$, on dit que X_t est une sur-martingale.*
- *Si on remplace (c) par : (c") pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}\,(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$, on dit que X_t est une sous-martingale.*

Définition 1.2.2 *: Soit Y une variable aléatoire intégrable, alors :*

$$(X_t)_{t\in\mathbb{T}} = \mathbb{E}\,(Y \mid \mathcal{F}_t)$$

est une martingale.

Définition 1.2.3 *(Inégalité de Doob) : Soit* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-martingale à trajectoires continues. Alors, pour tout* $p \in \,]1,\infty[$ *:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right) \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left(|X_t|^p\right).$$

Proposition 1.2.1 *(Décomposition de Doob) : Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$*-sous martingale, alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une décomposition unique sous la forme :*

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}} + (M_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un processus croissante prévisible et intégrable.*

Proposition 1.2.2 *: Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*-martingale alors :*

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Théoréme 1.2.1 *: Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, et* M_t *une martingale* $\mathcal{F}_t$*-adapté. Alors, il existe un processus adapté* H_s *tel que :*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Définition 1.2.4 *: Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$*un processus* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-adapté à trajectoire continue à droite. On dit que* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale local s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt* $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$*,* $\mathbb{P}$*-p.s. et pour tout n,* $M^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ *est une martingale.*

1.2.2 Mouvement Brownien (MB)

Mouvement Brownien a été découvert en 1827 par le botaniste Robert Brown (1773-1858). C'est en observant sous un microscope du pollen dispersé dans de l'eau qu'il remarqua que les grains microscopiques le constituant étaient soumis à un mouvement continuel et irrégulier. Il crut, à l'époque, qu'il avait découvert « la molécule primitive » responsable de la vie. Il s'aperçut plus tard que l'on pouvait observer ce même phénomène avec toutes sortes de particules de taille suffisamment petite.

Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t)_{t\geq 0}$ en référence à **Wiener** ou $(B_t)_{t\geq 0}$ en référence à **Brown.**

Définition 1.2.5 *: On appelle X_t-mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifier :*

1. *B est à des accroissements indépendantes i.e : si $0 \leq t_1 \leq t_2 ... \leq t_n < \infty$, les variables aléatoires*
$$B_{t_1},\ \left(B_{t_2} - B_{t_1}\right), ...,\ \left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$$
sont indépendantes.
2. *B à des accroissements stationnaires, $B_t - B_s$ sont la loi normale d'espérance 0 et de variance $t-s$,*
$$B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s), \forall 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$
3. *Les trajectoires $t \mapsto B_t(\omega)$ sont continues pour tout $\omega \in \Omega$.*

Définition 1.2.6 *: Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien **standard** si :*
$$X_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-}p.s, \quad \mathbb{E}\left[X_t\right] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}\left[X_t^2\right] = t.$$
Dans ce cas la loi de X_t est une loi normale.

Proposition 1.2.3 *: Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard alors $(-B_t)$ est un MB.*

Preuve. $X = (-B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien car :

1. Soit $X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$, les variables aléatoires :

$$\left(B_{t_1} - B_{t_0}\right), \ \left(B_{t_2} - B_{t_1}\right), ..., \ \left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$$

   sont indépendantes, alors : $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$ les variables aléatoires :

$$\left(B_{t_0} - B_{t_1}\right), \ \left(B_{t_1} - B_{t_2}\right), ..., \ \left(B_{t_{n-1}} - B_{t_n}\right)$$

   sont indépendantes, alors :

$$\left(X_{t_1} - X_{t_0}\right), \left(X_{t_2} - X_{t_1}\right), ..., \left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$$

   sont indépendantes.

2. $\forall s, t > 0$, tell que $s < t$, $X_t - X_s = B_s - B_t \backsim \mathcal{N}\left(0, s - t\right)$;
3. La trajectoire $t \mapsto X_t\left(\omega\right) = -B_t\left(\omega\right)$ est continue puisque $t \mapsto B_t\left(\omega\right)$ est continue ;
4. $X_0 = (-B_0) = 0$.

■

Proposition 1.2.4 *:*

a) *Soit c réel positive $(c > 0)$, on a : $W_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$, donc (W_t) est un mouvement Brownien standard.*

b) *Pour tout $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.*

Proposition 1.2.5 *: Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard alors B_t est une martingale.*

Proposition 1.2.6 *: Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, alors : $B_t^2 - t$ est une martingale.*

Preuve.

- $B_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable car c'est une fonction continue de B_t qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
- $\mathbb{E}\left[\mid B_t^2 - t \mid\right] \leq \mathbb{E}\left[\mid B_t^2 \mid\right] + t = t + t = 2t < \infty$.
- $\forall s \in [0, t]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s + B_s)^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left((B_t - B_s)^2 + 2B_s\left(B_t - B_s\right) + B_s^2 - t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2B_s\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] + B_t^2 - t.
\end{aligned}$$

On a :

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s,$$

et

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left(B_t - B_s\right) = 0$$

On trouve **:** $\mathbb{E}\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$, alors **:**

$$\left\{B_t^2 - t : t \geq 0\right\}$$

est une martingale.

■

Proposition 1.2.7 *: Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien. Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, on a :*

$$X_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

est une martingale.

Théoréme 1.2.2 *: Un processus B est un mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance :*

$$cov\left(B_t, B_S\right) = \mathbb{E}\left(B_t B_s\right) = s \wedge t = \min\left(t, s\right).$$

Proposition 1.2.8 *: Soit B un mouvement Brownien alors presque sûrement on a :*

a) $t \longmapsto B_t(\omega)$ *n'est pas différentiable en aucun point t.*

b) $t \longmapsto B_t(\omega)$ *n'est pas à variation finie en aucun point t.*

1.3 Calcul d'Itô

1.3.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $B : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $X : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô $\int_0^t \phi_s dB_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. L'objectif c'est définir l'intégrale

$$\int_0^t \phi_s dB_s,$$

pour des processus ϕ :

◄ Cas étagé

On dit qu'un processus ϕ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable de carré intégrable $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$. Soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

On sait que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 ds\right].$$

Alors :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right).$$

◄ Cas général

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ est $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite). Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2)\, ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$, il existe une v.a $I_t(\phi) = \displaystyle\int_0^\infty \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dB_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (B_t) est un processus gaussien alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = 0.\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = 0$ cas $\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ sont à accroissements indépendantes.

Pour montrer que :

$$\mathbb{V}ar\left[I_t\left(\phi\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[I_t\left(\phi\right)\right] &= \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)^2\right) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \phi_s dB_s\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\phi_i\right)^2 \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\phi_i\right)^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) = \int_0^\infty \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.3.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1) Linéarité :

$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \phi_s^1 dB_s + b\int_0^t \phi_s^2 dB_s.$$

2) Additivité : Pour $0 \leq s < u < t \leq \mathbb{T}$

$$\int_s^t \phi_v dB_v = \int_s^u \phi_v dB_v + \int_u^t \phi_v dB_v.$$

3) Propriétés de martingale : Pour tout processus ϕ les processus :

$$t \mapsto I_t\left(\phi\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto I_t\left(\phi\right)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t\left(\phi\right)-I_s\left(\phi\right)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^B\right].$$

4) Si $\left(\phi_t\right)_{t\in[0,\mathbb{T}]}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}\left(\int_0^t \mid \phi_s \mid^2 ds\right)<+\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \mid \phi_s \mid^2 dB_s\right|^2\right]\leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid \phi_s \mid^2 ds\right].$$

5) Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right]=\mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.3.3 Processus d'Itô

Définition 1.3.1 (Processus d'Itô) *: Un processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$X_t=X_0+\int_0^t \varphi_s ds+\int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifient les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t \left|\varphi_s\right| ds<+\infty \quad et \quad \int_0^t \parallel \theta_s \parallel^2 ds<+\infty,$$

où le coefficient φ et le drifter ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion. On note de manière infinitésimale :

$$dX_t=\varphi_s ds+\theta_s dB_s.$$

1.3.4 Formule d'Itô

Théoréme 1.3.1 (Première formule d'Itô) *: On Suppose f de classe $\mathbb{C}^2$. Alors :*

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\left\langle X, X\right\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

Théoréme 1.3.2 (Deuxième formule d'Itô) *: Soient X un processus d'Itô et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t et de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à X, on a :*

$$\begin{aligned} f(t, X) &= f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)d\left\langle X, X\right\rangle_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df\left(t, X\right) = \left[f_t'\left(t, X_t\right) + \frac{1}{2}f_{xx}''\left(t, X_t\right)\theta_t^2\right]dt + f_x'(t, X_t)dX_t.$$

Remarque 1.3.1 *: La formule d'Itô s'énonce également dans le cas multidimensionnel (i.e $\varphi\left(t\right)$, $\theta\left(t\right), B\left(t\right)$ sont des matrices)*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\varphi_s ds \\ + \frac{1}{2}tr\left[\theta\left(s\right)^T f(s, X\left(s\right))\theta\left(s\right)\right] + \int_0^t f_x(s, X_s)\theta_s dB_s. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 (Formule d'intégration par parties) *: Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s \quad et \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Alors :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t \,.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.4 Equations différentielles stochastiques (EDS)

Equations différentielles stochastiques sont des généralisations des équations différentielles qui sont gouvernent de plusieurs des phénomènes déterministes en physique, mécanique, biologie où la dynamique déterministe d'évolution est perturbée par une terme aléatoire.

On étude l'existence et l'unicité d'une équation différentielle à coefficients Lipschitziens et donne quelques propriétés sur les solutions des EDS**.**

Définition 1.4.1 *: Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = X, \end{cases} \tag{1.1}$$

où sous forme intégral

$$X_t = X + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad \forall t \geq 0,$$

où :

- $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d$ *et* $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times n}$ *sont deux fonctions mesurables bornées où* $(T > 0)$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *et* n, $d \in \mathbb{N}$.
- x : *la condition initiale à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$.
- $\sigma\sigma^t$ *est dit matrice de diffusion, et :*

$$|\mathbf{b}| = \left(\sum_{i=1}^{d} b_i^2\right)^{1/2} \quad et \quad ||\sigma|| = (trace(\sigma\sigma^t))^{1/2}.$$

- $\{B; t \geq 0\}$ *est un mouvement Brownien d-dimensionnel.*
- *Le coefficient* $b\,(t, X_t)$ *est appelé dérive et le coefficient* $\sigma(t, X_t)$ *de* dB_t *est appelé terme de diffusion.*

Définition 1.4.2 *: Une solution forte à l'équation* (1.1) *est un processus* $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ *continu qui est* $\mathcal{F}_t$*-adapté tel que :*

1. *Pour tout* $t \geq 0$, *les intégrales* $\int_0^t b(s, X_s)ds$ *et* $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ *sont biens définies :*

$$\int_0^t \mid b(s, X_s) \mid ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \mid \sigma(s, X_s) \mid^2 ds < +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

2. $(X_t)\,, t \geq 0$ *vérifie* $(1.1)\,.$

$$X_t = X + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

1.4.1 Existence et unicité

Le théorème suivante donne des conditions sur b et σ sous les quelles on peut avoir un résultat l'existence et d'unicité de la solution de l'équation $(1.1)\,.$

Théoréme 1.4.1 (existence et Unicité) *: Si* b *et* σ *sont des fonctions continues telles qu'il existe* $K < +\infty$ *,* X, Y *dans* $\mathbb{R}^n$ *:*

i) *Conditions de Lipschitz :*

$$\mid b(t, X) - b(t, Y) \mid + \mid \sigma(t, X) - \sigma(t, Y) \mid \leq K|X - Y|.$$

ii) *Conditions de croissance linéaire :*

$$|b(t, X) \mid + \mid \sigma(t, X) \mid \leq K(1 + |X|).$$

iii) $\mathbb{E}\,(X^2) < +\infty.$

Alors pour tout $t \geq 0$ l'équation (1.1) *admet solution unique dans l'intervalle* $[0,T]$. *D'autre part la solution* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *vérifie :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right) < +\infty.$$

Preuve. Existence. On définit l'espace S_c^2 par :

$$S_c^2 = \left\{\begin{array}{c} \text{les processus progressivement mesurables tel que } \mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right) < +\infty \text{ continue,} \\ \text{muni de } \parallel X \parallel = \mathbb{E}\left(\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty\right) \end{array}\right\},$$

pour $X \in S_c^2$ pose pour tout $t \in [0,T]$

$$\Psi(X_t) = X + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s.$$

le processus Ψ est bien définie et est continu si $X \in S_c^2$.

Soient X et Y deux éléments de S_c^2 on utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$\begin{aligned}
&\mid \Psi\left(X_t\right) - \Psi\left(Y_t\right) \mid^2 = \left|\int_0^t \left(b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right)ds + \int_0^t \left(\sigma(s,X_s - \sigma(s,Y_s)\right)dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\left|\int_0^t \left(b(s,X_s - b(s,Y_s)\right)ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s)ds\right|^2 + 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s\right|^2.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right) - \Psi\left(Y_t\right)|^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds\right|^2\right. \\
&\left.+\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s\right|^2\right].
\end{aligned}$$

On utilise les propriétés (4 et 5) de l'intégrale stochastique alors on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)dB_s\right|^2\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^u (b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds\right|\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[4\left(\int_0^u \left|\sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)\right|^2 ds\right)\right].$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]$$

$$\leq 2T\mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^u (b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds\right|\right)^2\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u \left|\sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)\right|^2 ds\right].$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipschitz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]\\ &\leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^u \left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^u \left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]\\ &\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^u \left|\left(X_s-Y_s\right)\right|^2 ds\right].\end{aligned}$$

On pose $C=2K^2\left(T+4\right),$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^u \left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right]\\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^u \left|X_s-Y_s\right|^2 ds\right].\end{aligned}$$

Alors on obtient l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2\right]\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^u \mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]. \tag{1.2}$$

Maintenant on va montrer que la fonction $\Psi(X)\in S_c^2$. Notant $\Psi(0)$ le processus nul

$$\Psi(0)=X+\int_0^t b(s,0)\,ds+\int_0^t \sigma(s,0)\,dB_s.$$

On a d'une part :

$$\mid\Psi(0)\mid^2\leq\left|X+\int_0^t b(s,0)\,ds+\int_0^t\sigma(s,0)\,dB_s\right|^2,$$

et comme :

$$(a+b+c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right). \tag{1.3}$$

On a, pour tout $0\leq t\leq T$,

$$\mid\Psi(0)\mid^2\leq 3\mid X\mid^2+3\left|\int_0^t b(s,0)\,ds\right|^2+3\left|\int_0^t\sigma(s,0)\,dB_s\right|^2$$

$$\leq 3\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X\mid^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b(s,0)\,ds\right|^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\sigma(s,0)\,dB_s\right|^2\right].$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid\Psi(0)\mid^2\right]$$

$$\leq 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X\mid^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b(s,0)\,ds\right|^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\sigma(s,0)\,dB_s\right|^2\right],$$

on utilise l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(0)|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[\mid X\mid^2\right]+T^2K^2+4K^2T\right),$$

et d'une autre part, l'inégalité (1.2) donne ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(0\right)|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s-0\mid^2 ds\right] \\
&\leq C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s\mid^2 ds\right] \\
&\leq C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s\mid^2\right] ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(X_t\right)|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(0\right)|^2\right] + C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s\mid^2\right] ds.$$

Alors $\Psi\left(X\right)\in S_c^2$, dés que le processus $X\in S_c^2$.

On définit alors par récurrence une suite de processus de S_c^2 en posant

$$X^0=0, \quad \text{et} \quad X^{n+1}=\Psi\left(X^n\right), \quad \text{pour tout} \quad n\geq 0.$$

On voudrait montrer que la suite X^n converge vers une limite qui représente la solution de l'EDS (1.1). Pour cela, on a majorer $\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2$ et montrer que la série de terme générale $X_t^{n+1}-X_t^n$ est uniformément convergente sur $[0,T]$. Alors on a :

$$|X_t^{n+1}-X_t^n|^2=|\Psi\left(X_t^n\right)-\Psi\left(X_t^{n-1}\right)|^2.$$

On utilise la condition de Lipschitz, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(X_t^n\right)-\Psi\left(X_t^{n-1}\right)|^2\right] \\
&\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{0\leq t\leq s_1}|X_t^n-X_t^{n-1}|^2 ds_1\right] \\
&\leq C\int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_1}|X_t^n-X_t^{n-1}|^2\right] ds_1.
\end{aligned}$$

Et par récurrence, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\leq C^n\int_0^T\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}...\int_0^{s_n-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_n}|X_t^1|^2\right]ds_n...ds_2ds_1.$$

Donc on trouve que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\leq \frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X_t^1\mid^2\right].$$

Ce qui signifie que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\leq L\frac{C^nT^n}{n!},$$

avec L est le majorant de $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X_t^1\mid^2\right]$. Il résulte de cette dernière inégalité que :

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\right)^2\leq\left(L\frac{C^nT^n}{n!}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et comme :

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\right)^2=\left\|\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2}.$$

Alors :

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{L}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}.$$

En sommant sur n, il vient

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^1}\leq\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{L}\sum_{n\geq 0}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}<\infty.$$

Alors le série $\sum_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|$ converge $\mathbb{P}$-$p.s$, et donc, $\mathbb{P}$-$p.s$, X^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus continue. De plus $X\in S_c^2$. On vérifier que X est solution de l'EDS (1.1) en passant à la limite dans la définition

$$X^{n+1}=\Psi\left(X^n\right).$$

En effet :

$$\begin{aligned} X &= \lim_{n\to\infty}\left(X^{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\Psi\left(X^{n}\right) \\ &= \Psi\left(\lim_{n\to\infty}\left(X^{n}\right)\right) = \Psi\left(X\right). \end{aligned}$$

Unicité. Si X_t et Y_t deux solutions de l'EDS avec les conditions initiales respectivement dans $X_0 = X$ et $Y_0 = Y$. On pose $f(t) = b(t, X_t) - b'(t, Y_t)$ et $g(t) = \sigma(t, X_t) - \sigma'(t, Y_t)$. Alors :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] = \mathbb{E}\left[X - Y + \int_0^t f(s)\,ds - \int_0^t g(s)\,dB_s\right]^2.$$

En utilisant l'inégalité (1.3) on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right]^2 + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g(s)\,dB_s\right]^2,$$

et d'après Cauchy Schwartz et le propriété (5) de l'intégrale stochastique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t ds\right]\mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)^2\,ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g(s)^2\,dB_s\right] \\ &= 3\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] + 3t\mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)^2\,ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g(s)^2\,dB_s\right], \end{aligned}$$

et comme b et σ sont Lipschitziennes, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] + 3(1+t)\,C^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - Y_s|ds\right],$$

D'aprés le lemme de Gronwall, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right]\exp\left\{3(1+t)\,C^2 t\right\},$$

alors : $X_t = Y_t$, $\mathbb{P}$-$p.s$, ce qui montre l'unicité. ■

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques de Volterra

L'objective de ce chapitre est d'introduire les équations différentielles stochastiques de Volterra (aussi dit les équations intégrales stochastiques de Volterra ($\mathbb{EISV}$ en abrégé) et on va étudier l'existence et l'unicité de la solution.

2.1 Equations différentielles de Volterra

Une équation intégrale linéaire est l'équation dans laquelle la fonction doit être déterminée apparaît dans une intégrale.

Les équations intégrales généralement écrit sous la forme suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.1}$$

tel que :

◀ φ est une fonction inconnue.

◀ f et K sont des fonctions inconnues et continues.

◀ $a(x)$ et $b(x)$ sont des limites de l'intégrations.

Il existe plusieurs types d'équations intégrales linéaires :

- Equation intégrale de Fredholm est sous la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \quad x \in [a,b],$$

où : $a(x) = a$, $b(x) = b$ tel que a, b sont des constants.

- Equation (2.1) est appelée l'équation intégrale de Volterra si : $a(x) = a$, $b(x) = x$ tel que a est constant. Et on écrit l'équation (2.1) sous la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a,b] \quad \text{et } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

où :

◀ φ est une fonction inconnue et f est une fonction connue.

◀ K est le noyau de Volterra connue et continue sur l'ensemble $\{(t,x)|a \leq x; a \leq x \leq b|\}$.

On a ;

1) Equation intégrale de Volterra du second espèce :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt, \quad \text{avec} \quad K(x,t) = 0 \quad \text{pour} \quad x < t.$$

2) Equation intégrale de Volterra du premier espèce :

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt, \quad \text{avec} \quad K(x,t) = 0 \quad \text{pour} \quad x < t.$$

Remarque 2.1.1 *: L équation intégrale de Volterra est un cas particulier de équation intégrale de Fredholm.*

Exemple 2.1.1 *:*

i) $\int_0^x \exp(t+s)\varphi(t)dt = 2x$ et $\int_0^x (t^2 - 4xt + 3t^2)\varphi(t)dt = \frac{x^4}{4}$ sont des équations de Volterra du premièr espèce .

ii) $\varphi(x) = \exp(x) - \int_0^x \exp(t-x)\varphi(t)\, dt$ et $\varphi(x) = \sin(x) + \int_0^x \cos(t-x)\varphi(t)\, dt$ sont des équations de Volterra du second espèce.

2.1.1 Existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra

La vocation de cette partie est d'illustrer quelques résultats fondamentaux dans la théorie d'une large classe d'équations intégrales, concernant la question d'existence et d'unicité de la solution pour les équations de second type.

Existence de la solution

En cherchant donc la solution de l'équation (2.2) sous la forme d'une série entière suivante les puissances de λ comme :

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n \varphi_n(x) = \lambda^0\varphi_0(x) + \lambda^1\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ...,$$

Et en portant formellement cette série dans l'équation (2.2) il vient :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi_0(x) + \lambda^1\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) \left[\varphi_0(t) + \lambda^1\varphi_1(t) + \lambda^2\varphi_2(t) + ... + \lambda^n\varphi_n(t) + ...\right] dt,\end{aligned}$$

en identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_1(x) &= \int_a^x K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_a^x K(x,t)f(t)dt, \\ \varphi_2(x) &= \int_a^x K(x,t)\varphi_1(t)dt, \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= \int_a^x K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $K(x,t)$ on démontre que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda^n \varphi_n(x)$ dont les coefficients sont donnés par (2.2) constitue effectivement une solution de l'équation (2.2) ; ainsi on pose :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = M, \quad \text{et} \quad \sup_{(x,t)} |K(x,t)| = N.$$

On a alors : $|\varphi_0(x)| = |f(x)| \leq M$, et

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x)| &= \left| \int_a^x K(x,t) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |K(x,t)| \, |f(t)| \, dt \\ &\leq MN \int_a^x dt, \end{aligned}$$

alors :

$$|\varphi_1(x)| \leq MN(x-a).$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x)| &= \left| \int_a^x K(x,t) \varphi_1(x) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |K(x,t)| \, |\varphi_1(x)| \, dt \\ &\leq N \int_a^x MN(t-a) dt \leq MN^2 \frac{(x-a)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Et pour suivant de cette manière, on peut démontrer par récurrence que :

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &= \left| \int_a^x K(x,t) \varphi_{n-1}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |K(x,t)| \, |\varphi_{n-1}(t)| \, dt \\ &\leq \frac{MN^{\,n-1}}{(n-1)!} \int_a^x |K(x,t)| \, (t-a)^{n-1} dt \leq MN^{\,n} \frac{(x-a)^n}{n!}, \end{aligned}$$

ainsi la série de terme général $\lambda^n \varphi_n(x)$ converge pour toute valeur de λ cette convergence est absolue et aussi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$, il résulte que la solution obtenue formellement est effectivement une solution de l'équation intégrale (2.2).

Unicité de la solution

Suppose que l'équation (2.2) admette deux solutions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ on a :

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\lambda\int_a^x K(x,t)\left[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right]dt=\lambda\int_a^x K(x,t)\Psi\left(x\right)dt,$$

ainsi on pose :

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|=L,$$

donc on obtient l'inégalité suivante :

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|=\left|\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi_1(x)-\varphi_2(x)dt\right|\leq\left|\lambda\right|N\int_a^x\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|dt,\quad\text{car}\quad\sup_{(x,t)}\left|K(x,t)\right|=N,$$

d'où :

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\leq\left|\lambda\right|NL\int_a^x dt=\left|\lambda\right|NL(x-a),\tag{2.3}$$

substituant cette expression, dans le deuxième membre de (2.3) on obtient :

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|=\left|\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi_1(x)-\varphi_2(x)dt\right|\leq\left|\lambda\right|N\int_a^x\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|dt\leq\left|\lambda\right|N\int_a^x\left|\lambda\right|NL(t-a)dt,$$

d'où :

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\leq\frac{L\left[\left|\lambda\right|N(x-a)\right]^2}{2!}.$$

En répétant la substitution, on obtient finalement :

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\leq\left|\lambda\right|N\int_a^x\left|\Psi\left(x\right)\right|dt\leq\left|\lambda\right|N\int_a^x\frac{L\left[\left|\lambda\right|N(t-a)\right]^{n-1}}{(n-1)!}dt,$$

alors :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \frac{L\left[|\lambda| N(x-a)\right]^n}{n!}.$$

En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on a : $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$, donc : $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, alors l'équation (2.2) admet une unique solution.

Exemple 2.1.2 *: Trouver à l'aide de la méthode d'approximation successive la solution de l'équation intégrale suivante :*

$$\varphi(x) \quad = x - \lambda \int_0^x (x-t)\varphi(x)dt \ .$$

Solution 2.1.1 *En identifiant les coefficients, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= x, \\
\varphi_1(x) &= \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)dt = x - \int_0^x 0.dt = x, \\
\varphi_2(x) &= \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt = x - \int_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt \\
&= x - \int_0^x (x-t)tdt, \\
&= x - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\
&= x - \frac{x^3}{6} = x - \frac{x^3}{3!}. \\
\varphi_3(x) &= \int_0^x K(x,t)\varphi_2(t)dt = x - \int_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt \\
&= x - \int_0^x (x-t)(t - \frac{t^3}{6})dt = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

D'aprés (2.4), *on trouve*

$$\varphi_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2-1)!}. \tag{2.5}$$

Alors (2.5) *est une série de Maclaurin. Le solution de l'équation suivante est :*

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sin x.$$

2.1.2 Résolvante de l'équation intégrale de Volterra

Soit l'équation intégrale de Volterra du second espèce :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.6}$$

où $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$ et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.

On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière suivante les puissances de λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x).... \tag{2.7}$$

Portons formellement cette série dans (2.6), il vient :

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x)...\\
&= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\left[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2\varphi_2(t) + ... + \lambda^n\varphi_n(t)...\right] dt.
\end{aligned}$$

En procédant par identification on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f(x),\\
\varphi_1(x) &= \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x K(x,t)f(t)dt,\\
\varphi_2(x) &= \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1\right] dt\\
&= \int_0^x f(t_1)dt_1 \int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt = \int_0^x K_2(x,t_1)f(t_1)dt_1,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

où :

$$K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^{x} K(x,t)K(t,t_1)dt.$$

On établit de façon analogue qu'en général :

$$\varphi_n(x) \quad = \int_0^x K_n(x,t)f(t)dt, \quad (n = 1, 2, ...)\,. \tag{2.9}$$

Les fonctions $K_n(x,t)$ s'appellent noyaux itérés et sont définies, on le montre aisément, par formules récurrence :

$$\begin{aligned} K_1(x,t) \quad &= K(x,t), \\ K_{n+1}(x,t) \quad &= \int_t^x K(x,z)K_n(z,t)dz, \quad (n = 1, 2, ...)\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Compte tenu de (2.9)-(2.10) l'égale (2.7) peut s'écrire :

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \int_0^x K_n(x,t)f(t)dt.$$

Une fonction $R(x,t;\lambda)$ définie par la série :

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t) \tag{2.11}$$

est la résolvante (ou le noyau résolvant) de l'équation intégrale (2.6). Si le noyau est continu, la série (2.11) est converge absolument et uniformément.

La résolvante $R(x,t;\lambda)$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x K(x,s)R(s,t;\lambda)ds.$$

La solution de l'équation intégrale (2.6) en fonction de la résolvante s'écrit comme suite :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda)f(t)dt. \tag{2.12}$$

Exemple 2.1.3 *: Trouver la résolvante de l'équation intégrale de Volterra à noyau* $K(x,t)=1$.

Solution 2.1.2 *On a :*

$$K_1(x,t)=K(x,t)=1.$$

Conformément aux formules (2.10),

$$\begin{aligned}
K_2(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_1(z,t)dz = \int_t^x dz = x-t \\
K_3(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_2(z,t)dz = \int_t^x 1.(z-t)dz \\
&= \left[\frac{1}{2}(z-t)^2\right]_t^x = \frac{1}{2}(x-t)^2, \\
K_4(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_3(z,t)dz = \int_t^x 1.\frac{1}{2}(z-t)^2dz \\
K_4(x,t) &= \left[\frac{1}{3!}(z-t)^3\right]_t^x = \frac{1}{3!}\left(x-t\right)^3.
\end{aligned}$$

Par réccurence on a :

$$\begin{aligned}
K_n(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_{n-1}(z,t)dz \\
&= \int_t^x \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz \\
&= \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition :

$$\begin{aligned}
R(x,t,\lambda) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} \\
&= e^{\lambda(x-t)}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$R(x,t;\lambda)=e^{\lambda(x-t)}.$$

Et donc la solution de l'équation suivante est :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt.$$

Exemple 2.1.4 *: Trouver à l'aide de la résolvante la solution de l'équation integrale :*

$$\varphi(x) \quad = x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

Solution 2.1.3 *: Pour $\lambda = 1$, on a :*

$$K(x,t) \quad = \exp(x-t),$$

$$K_1(x,t) \quad = K(x,t) = \exp(x-t),$$

$$\begin{aligned} K_2(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_1(z,t)dz \\ &= \int_t^x (z-x)(t-z)dz = \frac{-1}{3!}(t-x)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_2(z,t)dz \\ &= \int_t^x (z-x)\left[\frac{-(t-z)^3}{3!}\right]dz = \frac{1}{5!}(t-z)^5. \end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve :

$$K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\exp(x^2-t^2).$$

Alors :

$$\begin{aligned} R(x,t;\lambda) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t) \\ &= \frac{(t-z)}{1!} - \frac{(t-z)^3}{1!} - \frac{(t-z)^5}{1!} \text{........jusqu'à } \infty(\lambda = 1) = \sin(t-x). \end{aligned}$$

D'après la formule (2.12) , l'équation intégrale donnée a pour solution la fonction

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda) f(t) dt. \\ &= x + \lambda \int_0^x t \sin(t-x) dt \\ &= x + \sin x - x \ \text{ (par l'intégration par partie)} \\ &= \sin x,\end{aligned}$$

donc : $\varphi(x) = \sin x$.

2.2 Equation différentielle stochastique de Volterra

Equations différentielles stochastiques de Volterra est une spécial type de les équations intégrales.

2.2.1 Préliminaires

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien de dimension 1, on donne par $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien ($\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$).

Définition 2.2.1 *: L'équation différentielle stochastique de Volterra est donnée sous la forme suivante :*

$$X_t = \varphi(t) + \int_0^t b(t,s,X_s) ds + \int_0^t \sigma(t,s,X_s) dB_s, \forall t \in [0,T]. \tag{2.13}$$

Et on écrit l'équation (2.13) *de la forme différentielle comme suite :*

$$dX_t = d\varphi(t) + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial t}(t,s,X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t,s,X_s) dB_s + b(t,t,X_t) dt + \sigma(t,t,X_t) dB_t, \tag{2.14}$$

où :

1. *$\varphi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et à trajectoire continue $\forall t \in [0,T]$.*

2. *Le processus X_t est une solution de l'équation* (2.14) *s'il est $\mathcal{F}_t$-adapté et à trajectoire continu $\forall t \in [0, T]$.*

3. *$b(t, s, x)$ et $\sigma(t, s, x)$ sont des fonctions aléatoires définies pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}$.*

On considère les hypothèses suivantes : Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}$:

H1) $\varphi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et càdlàg.

H2) $b(t, s, x)$ et $\sigma(t, s, x)$ sont $\mathcal{F}_s$-mesurables pour tout $s \leq t$.

H3) $\exists K > 0$ tel que pour tout (t, s), on a :

$$|b(t, s, 0)| + \|\sigma(t, s, 0)\| \leq K.$$

H4) Croissance linéaire. $\exists K \in \mathbb{R} : |b(t, s, x)| + \|\sigma(t, s, x)\| \leq K(1 + |x|)$.

H5) Condition de Lipschitz. $\exists K \in \mathbb{R}$:

$$|b(t, s, x_1) - b(t, s, x_2)| + \|\sigma(t, s, x_1) - \sigma(t, s, x_2)\| \leq K|x_1 - x_2|, p.s.$$

2.2.2 Existence et l'unicité des solutions

On étudie la transformation intégrale suivante :

$$I_1(t) = \int_0^t \sigma(t, s, X(s)) dB_s \ , \forall t \in [0, T], \tag{2.15}$$

où l'intégrale (2.15) est bien définie.

Définition 2.2.2 *: Soit $X = (X_t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté avec $\sup\limits_{t \in [0,T]} \mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$, alors d'après les hypothèses précédentes on a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(t, s, X(s))|^2 ds\right] < \infty.$$

Alors (2.15) est mesurable (car il est bien définie).

Lemme 2.2.1 *: Si* $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[X^4(t)] < \infty$ *alors l'integrale qui présentée dans* (2.15) *est a version continue.*

Lemme 2.2.2 *: Si* $X_i(t)$, $\forall i = 1,2$ *vérifies* $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[X_i^4(t)] < \infty$*, alors :*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T \sigma(t,s,X_1(s) - \sigma(t,s,X_2(s))dB_s\right| \geq \lambda\right] \leq \frac{K_0T^2C_2}{\lambda^4},$$

où : $K_0 \in \mathbb{R}_+$ *et*

$$C_1 = 288K^4\left(16T^2\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_1(t)-X_2(t)|^2] + \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_1(t)-X_2(t)|^4]\right).$$

Lemme 2.2.3 *: Si* $X(t)$ *et* $Y(t)$ *sont vérifies* $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[X^4(t)] < \infty$ *et* $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[Y^4(t)] < \infty$*, alors :*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T \sigma(t,s,X(s))dB_s\right| \geq \frac{K_0T^2C_2}{\lambda^4}\right],$$

où : $C_2 = 288K^4\left(T^4 + 8 + 8\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[X^4(s)]\right).$

Théoréme 2.2.1 *: On Suppose que* $\sigma(t,s,x)$ *et* $b(t,s,x)$ *sont satisfaits* $H1)$*-*$H5)$*. Si* $\varphi(t)$ *est un processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté et continue, alors l'EISV* (2.13) *admet une solution* $X(t)$ *satisfait :*

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty.$$

Preuve.

I) Existence. L'idée de la démonstration est l'application de la méthode d'approximation successive de Picard. On définit une suite comme suit :

$$\begin{cases} X_n(t) = \varphi(t) + \int_0^t b(t,s,X_{n-1}(s))ds + \int_0^t \sigma(t,s,X_{n-1}(s))dB_s, \forall t \in [0,T] \\ X_0(t) = \Psi(t), \end{cases}$$

Alors :

$$X_{n+1}(t)-X_n(t) = \int_0^t \left(b(t,s,X_n(s)) - b(t,s,X_{n-1}(s))\right) ds + \int_0^t \left(\sigma(t,s,X_n(s)) - \sigma(t,s,X_{n-1}(s))\right) dB_s. \tag{2.16}$$

D'après la majoration $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on trouve :

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t) - X_n(t) &\leq 2\left|\int_0^t \left(b(t,s,X_n(s)) - b(t,s,X_{n-1}(s))\right) ds\right|^2 \\ &+2\left|\int_0^t \left(\sigma(t,s,X(s)) - \sigma(t,s,X_{n-1}(s))\right) dB_s\right|^2. \end{aligned}$$

En passant par l'espérance et appliquant d'intégrale stochastique, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2] &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(t,s,X_n(s)) - \sigma(t,s,X_{n-1}(s))|^2 \, ds\right] \\ &+2\mathbb{E}\left[|\int_0^t [b(t,s,X_n(s)) - b(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^2\right]. \end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2] &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \|\sigma(t,s,X_n(s)) - \sigma(t,s,X_{n-1}(s))\|^2 \, ds\right] \\ &+2T\mathbb{E}\left[|\int_0^t [b(t,s,X_n(s)) - b(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^2\right], \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse $H5$), on donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2\right] &\leq 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_n(s) - X_{n-1}(s))|^2 ds\right] \\ &+2K^2T\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds\right] \\ &\leq 2M\int_0^t \mathbb{E}[|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2]ds, \end{aligned} \tag{2.17}$$

où $M = 2\,(1+T)\,K^2$.

On utilise l'hypothèse $H4$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_1(t)-X_0(t)|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[|\int_0^t \sigma(t,s,\varphi(s))dB_s + \int_0^t b(t,s,\varphi(s))ds|^2\right] \\
&\leq 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(t,s,\varphi(s)|^2 ds\right] + 2K^2T\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(t,s,\varphi(s))|^2 ds\right] \\
&\leq 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t 2(1+|\varphi(s)|^2)ds\right] + 2K^2T\mathbb{E}\left[\int_0^t 2(1+|\varphi(s)|^2)ds\right] \\
&\leq 2M\int_0^t \mathbb{E}[(1+\varphi^2(s))]ds \\
&\leq 2M\alpha\int_0^t ds \leq 2M\alpha t,
\end{aligned}$$

où $\alpha = \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[1+\varphi^2(t)] < \infty$. Ou utilise le résultat de (2.17), on trouve :

$$\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2] \leq \frac{2\alpha(Mt)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{2.18}$$

Maintenant, on suit la même technique précedente pour majorer $\mathbb{E}[|X_n(t)-X_{n-1}(t)|^4]$. On commence par $(a+b)^4 \leq 8a^4+8b^4$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4] &\leq 8\mathbb{E}\left[|\int_0^t [\sigma(t,s,X_n(s))-\sigma(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^4\right] \\
&\quad +8\mathbb{E}\left[|\int_0^t [b(t,s,X_n(s))-b(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^4\right].
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4] &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[|\int_0^t [\sigma(t,s,X_n(s))-\sigma(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^2\right] \\
&\quad +8\mathbb{E}\left[|\int_0^t [b(t,s,X_n(s))-b(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^4\right].
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4] &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[t\int_0^t|\sigma(t,s,X_n(s))-\sigma(t,s,X_{n-1}(s))|^4ds\right]\\ &+8\mathbb{E}\left[t^3\int_0^t|b(t,s,X_n(s))-b(t,s,X_{n-1}(s))|^4]ds\right],\end{aligned}$$

à l'aide de l'hypothése $H5$), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4] &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[t\int_0^t(K|X_n(s)-X_{n-1}(s)|)^4ds\right]\\ &+8\mathbb{E}\left[t^3\int_0^t(K|X_n(s)-X_{n-1}(s)|)^4ds\right]\\ &\leq 8K^4T(36+T^2)\int_0^t\mathbb{E}[|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^4ds]\\ &\leq N\int_0^t\mathbb{E}[|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^4ds].\end{aligned}$$

Où $N=8K^4T(36+T^2)$. D'autre part, on utilise l'hypothése $H3$) et la même téchnique précédentes pour obtenir :

$$\mathbb{E}[|X_1(t)-X_0(t)|^4]\leq 8N\mu_4 t,$$

où :

$$\mu_4=\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[1+\varphi^4(t)]<\infty \quad \text{et} \quad N=8K^4T(36+T^2).$$

Finalement on déduit :

$$\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4]\leq\frac{8\mu_4(Nt)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{2.19}$$

Ainsi tous les $X_n(t)$ sont bien définis et de plus, ils sont des processus continus $\mathcal{F}_t$-adaptés grâce à la continuité de $\varphi(t)$.

En prenant maintenant le sup carrés de (2.16), donc la majoration $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothése $H4$) de la fonction b, nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}|X_{n+1}(t)-X_n(t)| &= 2\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t [b(t,s,X_n(s))-b(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^2 \\
&+2\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t [\sigma(t,s,X_{n-}(s))-\sigma(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2 \\
&\leq 2\sup_{t\in[0,T]} t\int_0^t |b(t,s,X_n(s))-b(t,s,X_{n-1}(s))|^2 ds \\
&+2\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t [\sigma(t,s,X_n(s))-\sigma(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2 \\
&\leq 2\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t [\sigma(t,s,X_n(s))-\sigma(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2 \\
&+2TK^2\int_0^T |X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2>\lambda\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t [\sigma(t,s,X_{n-}(s))-\sigma(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2>\frac{\lambda}{4}\right] \\
&+\mathbb{P}\left[\int_0^T |X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2 ds>\frac{\lambda}{4TK^2}\right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

D'aprés le lemme (2.2.2), les inégalités (2.20) − (2.19), on trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t [\sigma(t,s,X_n(s))-\sigma(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2>\frac{\lambda}{4}\right] \qquad (2.21)\\
&\leq \frac{16K_0T^2 288K^4}{\lambda^4}\left(16T^2\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}[|X_n(t)-X_{n-1}(t)|^2]+\sup_{t\in[0,T]}[|X_n(t)-X_{n-1}(t)|^4]\right) \\
&\leq \frac{16K_0T^2 288K^4}{\lambda^4}\left(\frac{16T^2 2\mu_2(MT)^n}{n!}+\frac{8\mu_4(NT)^n}{n!}\right).
\end{aligned}$$

Par inégalité de Chebychev au terme :

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds > \frac{\lambda}{4TK^2}\right]$$

avec (2.20) et (2.19), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\int_0^T |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds > \frac{\lambda}{4TK^2}\right] &\leq \frac{4TK^2}{\lambda}\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds\right] \\ &\leq \frac{4TK^2}{\lambda} \times \frac{2\mu_2(MT)^n}{n!}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Prenant $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$ et utilisant les résultats de (2.22), (2.23) et (2.20), on trouve :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > 2^{-n}\right] \leq const \times \frac{(16MT)^n}{n!} + const \times \frac{(16NT)^n}{n!} + const \times \frac{(4MT)^n}{n!}. \tag{2.23}$$

Puisque le côté droit de l'inégalité (2.23) est un terme générale d'une série convergente, on applique le lemme de Borel-Cantelli, on trouve :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > 2^{-n}, n \to \infty\right] = 1.$$

Alors les sommes partielles suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1}(t) - X_k(t)) + \varphi(t) = X_n(t)$$

sont uniformement convergente sur $[0, T]$ avec probabilité égale 1. Puisque tous les $X_n(t)$ sont $\mathcal{F}_t$-adaptés et continues donc on peut indiquer que $X(t)$ est la limite uniforme de $X_n(t)$. On remarque que vérifie l'équation (2.13), alors on a preuvé l'existence de la solution de l'équation (2.13).

II) Unicité . On suppose qu'il existe deux solutions pour l'équation (2.13), X_t et Y_t alors :

$$X_t - Y_t = \int_0^t [(b(t, s, X(s)) - b(t, s, Y(s)))\, ds + \int_0^t [(\sigma(t, s, X(s)) - \sigma(t, s, Y(s)))\, dB_s.$$

On utilise la majoration $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothèse $H5$) puis passant à l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_t - Y_t|^2] &\leq 2\mathbb{E}\left[|\int_0^t [\sigma(t,s,X(s)) - \sigma(t,s,Y(s))]dB_s|^2\right] \\
&+2\mathbb{E}\left[|\int_0^t [b(t,s,X(s)) - b(t,s,Y(s))]ds|^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[|\int_0^t [\sigma(t,s,X(s)) - \sigma(t,s,Y(s))]dB_s|^2\right] \\
&+2T\mathbb{E}\left[|\int_0^t [b(t,s,X(s)) - b(t,s,Y(s))]|^2 ds\right] \\
&\leq 2K^2\int_0^t \mathbb{E}[|X(s) - Y(s)|^2]ds + 2TK^2\int_0^t \mathbb{E}[|X(s) - Y(s)|^2]ds.
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Gronwall, on trouve :

$$\mathbb{E}[|X(t) - Y(t)|^2] = 0.$$

Alors :

$$\mathbb{P}[|X(t) = Y(t)|] = 1; \forall t \in [0,T].$$

Puisque $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux processus continus, on déduit que :

$$\mathbb{P}\left[|X(t) = Y(t)|; \forall t \in [0,T]\right] = 1.$$

On conclure que :X et Y sont indistinguables.

■

Bibliographie

[1] Aigo, M. U. S. A. (2013). On the numerical approximation of Volterra integral equations of the second kind using quadrature rules. International Journal of Advanced Scientific and Technological Research, 1, 558-564.

[2] Atkinson, K. (1997). The numerical solution of integral equations of the second kind, the press syndicate of the university of Cambridge. united Kingdom.

[3] Aggarwal, S., Sharma, N., & Chauhan, R. (2018). Solution of linear Volterra integral equations of second kind using Mohand transform. International Journal of Research in Advent Technology, 6(11), 3098-3102.

[4] Ito, I. (1979). On the existence and uniqueness of solutions of stochastic integral equations of the Volterra type. Kodai Math. J. 2, no. 2.

[5] González-Rodelas, P., Pasadas, M., Kouibia, A., Mustafa, B. (2022). Numerical solution of linear Volterra integral equation systems of second kind by Radial Basis Functions. Mathematics, 10(2), 223.

[6] Jeanblanc, M . (2006) . Cours de calcul stochastique.

[7] Jerri, A. (1999). Introduction to integral equations with applications. John Wiley & Sons.

[8] Krasnov, M., Kissélev, A., & Makarenko, G. (1977). Equations integrales,problé. Mir.

[9] ∅ksendal, B., & Zhang, T. (1992). The stochastic Volterra equation. Preprint series : Pure mathematics http ://urn. nb. no/URN : NBN : no-8076.

[10] Rahman, M. (2007). Integral equations and their applications. WIT press.

[11] Rahmoune, A. (2018). Equations intégrales linéaires et non linéaires. Analyse et techniques de résolution

[12] Vrabie, I. I. (2004). Differential equations : an introduction to basic concepts, Results and Applications.

[13] WazWaz, A. M. (2011). Lineaire and non lineaire integral equations : Methods and Applications. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[14] Yanga, Z. W., Mab, S., & Liangc, H. Strong convergence of the semi-implicit Euler Method for linear stochastic Volterra integral equations.

Annexe A : Rappel

Lemme de Gronwall. Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une application borélienne bornée tell que pour a, $b \geq 0$:

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$g(t) \leq a\exp(bt) \quad \forall t \in [0,T].$$

Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy. On a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)\right|^2 ds\right].$$

Oú, C est constante positive.

Inégalité de Cauchy-Schwartz intégrable. En se placant sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) muni de produit scalaire $(f,g) \to \langle f \backslash g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$,

On obtient :

$$\forall f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \quad \left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}.$$

Inégalité de Hölder. Soient p et q deux nombres conjugués $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ avec $p,\, q\in]1,\infty[$, $X\in\mathcal{L}^p$ et $Y\in\mathcal{L}^q$. Alors $XY\in\mathcal{L}^1$ et

$$\parallel XY \parallel\leq\parallel X \parallel_p\parallel Y \parallel_q,$$

pour $p=q=2$, on obtient l'inégalité ce Cauchy-Schwartz

$$\mathbb{E}\left[\mid XY \mid\right]\leq\mathbb{E}\left[\mid X \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[\mid Y \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Inégalité de Doob (Inégalité maximale). Si X est une sous-martingale à temps continu, positive et càdlàge,alors pour $p>1$et $q=p/p-1$, on a :

$$||\sup_{s\leq t}X_s||_p\leq q||X_t||_p \quad \text{et} \quad ||\sup_t X_t||_p\leq q\sup_t ||X_t||_p.$$

En particulier si X est une martingale càdlàg pour $p=2$, $q=2$ alors :

$$\mathbb{E}[\sup_{s\leq t}X_s^2]\leq 4\mathbb{E}(X_t^2) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\sup_t X_t^2]\leq 4\sup_t\mathbb{E}(X_t^2).$$

Lemme de Fatou. Soit $f_n\geq 0$ une suite, alors :

$$\int_X(\lim_{n\to+\infty}\inf f_n d\mu\leq\lim_{n\to+\infty}\inf\int_X f_n d\mu).$$

Lemme de Borel-Cantelli. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évenements aléatoires, on définit :

$$\limsup_n A_n=\bigcap_p\bigcup_{n\geq p}A_n.$$

► Si la série $\sum_n\mathbb{P}(A_n)<\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n)=0$.

► Si de plus la suite est indépendante, alors ;

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$$

Inégalité de Chebychev. Soit X une v.a positive définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}.$$

Inégalité de Kolmogorov. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de careé intégrable et $\lambda > 0$, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(\sup_{1\leq k\leq n} |X_k| \geq \lambda) \leq 1/\lambda^2 \mathbb{E}(X_n^2).$$

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	:	Filtration naturelle.
$W(.)$	:	Mouvement Brownien.
$\mathbb{R}^d$	:	L'espace réel euclidien de dimension d.
$\mathcal{B}([0,T])$	:	Un borélien de $[0,T]$.
$\mathbb{E}[X]$	:	Espérance mathématique du v.a. X.
$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$	:	Espérance conditionnelle de variable aléatoire X par rapport à $\mathcal{F}_t$.
$\mathbb{P}-p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$v.a$	:	Variable aléatoire.
EDS	:	Equation différentielle stochastique
$EISV$	:	Equation integrale stochastique de Volterra
$i.e$	:	C'est-à-dire
ssi	:	Si et seulement si

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie l'équation intégral stochastique de Volterra **(EISV),** on utilise la méthode d'approximation successive de Picard pour prouve l'existence et l'unicité de cette équation.

Mots clés

Equation différentielle stochastique, Equation intégrale de Volterra, Equation intégrale linéaire de Volterra.

ملخص

في مذكرتنا هذه, درسنا المعادلة التكاملية العشوائية لفولتيرا, استخدمنا طريقة التقريبات المتعاقبة لبيكارد من اجل إثبات وجود ووحدانية لهذه المعادلة.

كلمات مفتاحيه

المعادلة التفاضلية العشوائية, المعادلة التكاملية لفولتيرا, المعادلة التكاملية الخطية لفولتيرا.

Abstract

In this work, we study the stochastic integral equation of Volterra ***(SIEV)****, we use the successive approximation of Picard to prove the existence and uniqueness of this equation.*

Keywords

Stochastic differential equation, Volterra integral equation, Volterra linear integral, Volterra linear integral equation.