République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Probabilité

Par Mme Sadaoui Hajer Belkis

Titre :

Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades Réfléchies

Devant le Jury :

Mme.	Bougherara Saliha	MCB	U. Biskra	Président
Mme.	Chaouchkhouane Nassima	MCB	U. Biskra	Encadreur
Mme.	Djaber Ibtisem	MAB	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

Je dédié ce modeste travail :

A mes chers parents qui ont toujours été présent pour moi et qui m'ont donné la vie. Pour de million des raisons, ils m'ont donné jour aprés jour autant d'amour et de confaice, ils ont veillé à m'encourager tout au long de ma vie.

À mes chers fréres et soeurs, ma source de joie et de bonheur,

À mes oncles, mes tantes, mes cousins et cousines,

À tout mes amis et camarades,

À tous ceux qui me sont chers,

À tous ceux qui m'aiment,

Et à tous ceux que j'aime.

Remerciements

Je tiens à remercier vivement ma trés chère mére pour sa patience et ses sacrifices, mon pére, et toute ma famille.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur, M^{me} CHAOUCHKHOUANE Nassima pour la qualité de son encadrement, du soutien qu'il m'a accordé durant ma formation, et de sa contribution à l'élaboration de ce mémoire.

Je voudrais remercier également les membres de jury de m'avoir fait l'honneur en acceptant de juger ce travail.

Je tiens à remercier, tous les enseignants qui ont contribué dans ma formation du primaire jusqu'à l'université.

Merci également à mes amis H.Chaima et H.Ratiba pour leurs encouragements, leurs conseils et leurs préciense.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes amis et toutes les personnes qui m'ont apportée une aide pour la réalisation de ce travail.

“ Merci à vous tous

Notations et symbols

$v.a$	:	Variable aléatoire.
MB	:	Mouvement Brownien.
MG	:	Martingale.
sM	:	Sous-martingale.
SM	:	Sur-martingale.
$EDSR$	:	Equations différentielles stochastiques rétrogrades.
$i.e$	:	C'est-à-dire.
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	:	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$dt \otimes d\mathbb{P}$	:	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ avec la mésure de $d\mathbb{P}$.
$\boldsymbol{L}^1$	:	Espace des processus intégrables.
$\mathbb{P} - p.s$	:	Presque sûrement puor la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

$\mathbf{1}_A$	:	Indicatrice de A est noté : $\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in A \\ 0, \text{ si } x \notin A \end{cases}$
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réel enclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{k \times d}$	:	Ensemble des matrices réelles $k \times d$.
$resp$	:	Respectivement.
$(.\vert.)$	:	Produit scalaire.
$B(.)$	:	Mouvement Brownien.
$\mathbb{E}[X]$	:	Espérence mathématique du v.a X.
$\mathbb{E}[X\vert\mathcal{F}_t]$	:	Espérence conditionnelle de v.a X par rapport à $\mathcal{F}_t$.
EDS	:	Equations différentielles stochastiques.
C^1	:	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la premiére dérivée est continue.
C^2	:	Ensemble des fonctions deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continue.
ssi	:	Si et seulement si.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades, en abrégé **EDSR** ont été apparu pour la première fois par **Pardoux et Peng**[11], qui ont établi le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas non-linéaire. Ce type d'équations fournissent un cadre utile pour résoudre un grand nombre de problèmes en mathématique financière[7], contrôle optimal[8] et équations aux dérivées partielles quasi-linéaires [12]. Dans le cas unidimensionnel **El- karoui et al**[6] , ont introduit les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies (**EDSRR** en abérgé) dont la solution de l' **EDSR** reste au-dessus d'un processus donné.

Il s'agit de chercher un triplet de processus (X, Y, Z) progressivement mesurables, où le processus Z est non décroissant et tel que :

$$\begin{cases} X_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Y_s)\, ds + Z_T - Z_t - \int_t^T Y_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T, \\ X_t \geq S_t \ , \ 0 \leq t \leq T, \\ \int_0^T (X_t - S_t) dZ_t = 0. \end{cases}$$

Ici, S est un processus progressivement mesurable, qui jouera le rôle d'une barrière. Le rôle du processus Z ici est de pousser le processus X vers le haut pour le maintenir au-dessus de la barrière S. La dernière condition est connue sous le nom de condition de Skorohod et garantit que le processus Z agit de manière minimale,c'est-à-dire seulement lorsque le processus X atteint la barrière inférieure S. Dans[6], les auteurs ont prouvé l'unicité et l'existence à la fois par un argument de point fixe et par une approximation par pénalisation. Sur la base de ces résultats, **Cvitanic Karatzas** ont ensuite introduit dans [14] des **EDSRs** refléchies avec deux barrières, ils cherchent alors une solution à une **EDSRR** dont la composante X est forcée de rester entre deux processus progressivement mesurables L et U $(L \leq U)$.

Notre mémoire est composé de trois chapitres :

Chapitre 01 :

Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on va présenter une foule de définition, proposition, théorèmes faits sans démonstration et des résultats de bases du calcul stochastique tels que les processus stochastiques, espérence conditionnelle...ect.

Chapitre 02 :

L'objectif de ce chapitre est de présenter briévement le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une $EDSR$ dont les coefficients sont globalement Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 avec un générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

Chapitre 03 :

Dans ce chapitre, nous avons étudié le résultat d'existence et d'unicité d'une équations différentielles stochastiques rétrogrades réflichies, ont utilisant $EDSR$ la méthode de pénalisation.

Chapitre 1

Rappel de calcul stochastique

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notations de base, est des résultats principaux (processus stochastique, filtration,...), pour les utiliser aux prochains chapitres.

1.1 Généralités

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet.

Définition 1.1.1 *Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ des applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$; pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Définition 1.1.2 *Un processus X est mesurable si l'application*

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$
$$(t, w) \longmapsto X_t(w)$$

est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.3 *Soit $T \subseteq \mathbb{R}_+$, toute famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d > 1, d \in \mathbb{N})$ est appelé processus stochastique.*

Remarque 1.1.1 *Un processus stochastique peut être vrai comme :*

1\ comme une famille de v.a indexé par de temps.

2\ Une famille de deux variables :

$$X : \Omega \times T \to \mathbb{R}^d$$
$$(w, t) \longmapsto X_t(w) = X(t, w)$$

telle que :

a) $t \in T$ est fixé, $w \in \Omega \mapsto X_t(w)$ est une v.a sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

b) Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \in T \longmapsto X_t(w)$ est un fonction à valeurs réelles, appellée trajectoire du processus.

3\ Si $T = \mathbb{N}$ où $T = \mathbb{Q}^+$, X est appelée un suite de v.a où un processus à temps discret.

4\ Si T est une sous ensemble finie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}^+$ le pocessus X est une vecteur aléatoire.

Définition 1.1.4 ***(Filtration) :*** *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est a dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

Remarque 1.1.2 *a) L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ s'appelle espace filtré.*

b) On dit qu'un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ satisfait les conditions habituelles si :

– Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$ i.e $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

– La filtration est continue à droite i.e $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$, $\forall t$.

Définition 1.1.5 *On dit que $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est $\mathcal{F}$-adapté si pour tout $t \geqslant 0$ la v.a X est $\mathcal{F}$-mesurable.*

Remarque 1.1.3 *Un processus est toujours adapté à sa filtration naturelle.*

Définition 1.1.6 ***(processus progressivement mesurable)*** *: Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si $\forall t \geq 0$, l'application $(s, w) \to X_s(w)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 1.1.4 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

1.1.1 Espérance conditionnelle

Définition 1.1.7 *Soit (X, Y) un couple aléatoire, avec Y intégrable. L'espérance conditionnelle de Y sachant X est l'unique variable aléatoire fonction de X, notée $\mathbb{E}[Y|X]$, telle que pour toute fonction bornée $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit :*

$$\mathbb{E}[u(X) Y] = \mathbb{E}[u(X) \mathbb{E}[Y|X]].$$

Ainsi il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable tel que $\mathbb{E}[Y|X] = \varphi(X)$.

Propriété 1.1.1 *Soit* (X, Y) *un couple aléatoire, avec* $Y \in \boldsymbol{L}^1(\Omega)$.

1. **Cas d'égalité :** Si $Y = g(X)$ est un fonction de X, alors $\mathbb{E}[Y|X] = Y$. En particulier $\mathbb{E}[X|X] = X$.
2. **Linéarité :**Soit Y_1et Y_2 intégrables, α et β deux réels, alors :

$$\mathbb{E}[\alpha Y_1 + \beta Y_2|X] = \alpha\mathbb{E}[Y_1|X] + \beta\mathbb{E}[Y_2|X].$$

3. **Linéarité(bis) :** Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée, alors $\mathbb{E}[u(X)Y|X] = u(X)\mathbb{E}[Y|X]$.
4. **Positivité :** Si $Y \geq 0$, alors $\mathbb{E}[Y|X] \geq 0$.
5. **Positivité(bis) :** Si Y_1 et Y_2 sont intégrables, avec $Y_1 \leq Y_2$. Alors $\mathbb{E}[Y_1|X] \leq \mathbb{E}[Y_2|X]$.
6. **Calcul d'espérance par conditionnement :** $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$.
7. **Espérance conditionnelle et indépendantes :** Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$.

1.1.2 Mouvement Brownien(MB)

Définition 1.1.8 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $B = (B)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique.*

Le processus B est appelé Mouvement Brownien (standard). si B satisfait les proprietes suivant**:**

1. $B(0) = B = 0$ (position zéro).
2. B est a des accroissements indépendants c'est-à-dire:

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n < \infty \quad \text{les v.a } (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\text{sont indépendants} \cdot$$

3. B a des accroissements stationnaires $\forall 0 \leq s < t < \infty$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ **:**

$$\mathbb{P}(B_t - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi (t-s)}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

$B_t - B_s$ sont la loi normale d'espérence 0 et de variance $t - s$.

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \quad , 0 \leq s < t < \infty \ \cdot$$

4. Les trajectiores $t \mapsto B_t(w)$ sont continues.

Définition 1.1.9 *On appelle* MB *standard un processus stochastique* B *à valeurs réelles tel que :*

a) $B_0 = 0$,$\mathbb{P}$-$p.s$

b) pour $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B, u \leq s\}$ est de lio gaussienne centrée de variance $t - s$.

c) $\mathbb{P}$-p.s.$t \to B_t(w)$ est continue.

Remarque 1.1.5 *On dit que* B*est un* $\mathcal{F}$-MB *si* B *est un processus continu, adapté à la filtration* $\mathcal{F}$*, vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(\exp iu\,(B_t - B_s)\,|\mathcal{F}_s) = \exp\left(\frac{-u^2\,(t-s)}{2}\right).$$

1.1.3 Martingales (MG)

Définition 1.1.10 *Un processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *à valeurs réelles est une martingale si :*

1. pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable ;

2. pour tout $t \geq 0, X_t$ est intégrable *i.e.* $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$;

3. pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.

On dit que X est sur-MG si on remplace le troisiéme condition par

$0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ (résp X est sous-MG si : $0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$).

Proposition 1.1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et soit X un processus stochastique $\mathcal{F}_t$-adapté et intégrable alors*

i) si X est une MG, alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s], \forall s, t \in I$.

ii) Si X est une sM, alors

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) \geq \mathbb{E}\left(X_s\right), \forall t, s \in I, s \leq t.$$

iii) $\mathbf{X}$ est une SM, alors

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) \leq \mathbb{E}\left(X_s\right), \forall s, t \in I, s \leq t.$$

Définition 1.1.11 *Soit X une martingale. On dit que X est une MG réguliére, s'il exist un variable aléatoire η tq :*

$$\forall t \in I, on : X_t = \mathbb{E}\left[\eta|\mathcal{F}_t\right].$$

Proposition 1.1.2 *Si $I = [0, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$, et X est une MG, alors*

$$X_t = \mathbb{E}\left[X_T|\mathcal{F}_t\right].$$

Remarque 1.1.6 *Si le temps est fini, toute martingale est régulière.*

Proposition 1.1.3 *Soit X une martingale et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction* *convexe alors le processus* $(f(X_t))_{t\in I}$ *est une sous-martingale (à condition que* $f(X_t)$ *est intégrable).*

Théoreme 1.1.1 *Soit* $I = \mathbb{R}_+$ *est soit* X *une* MG *(* SM, sM *) continue en probabilité alors il existe une modification càdlàg de* X.

Théoreme 1.1.2 *Soit* $I = \mathbb{R}_+$ *et soit* X *une* MG*(resp* sM, SM *)càdlàg. Soit* $\tau_1 \leq \tau_2$ *deux temps d'arrets bornés alors,*

$$E\left[X_{\tau_2}|X_{\tau_1}\right] = X_{\tau_1}\left(resp \leq, \geq\right).$$

1.1.4 Calcul d'Itô

Dans tout ce paragraphe, on se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ une filtration qui vérifie les conditions habituelles et B un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-$MB$ (on peut prendre $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$).

Les martingales seront toujours cadlàg.

Intégrale stochastique :

L'objectif de ce paragraphe est de définir $\int_0^t H_s dW_s$. Ceci n'est pas évident car comme nous l'avons rappelé précédant les trajectoires du MB ne sont pas à variation finie et donc l'intégrale précédente n'est en aucun cas une intégrale de Lebesgue-Stiljes.

Dans toute la suite, on fixe un réel T strictement positif. Les processus sont définis pour $t \in [0, T]$; on notera X pour $(X_t)_{t\in[0,T]}$.

Définition 1.1.12 *On appelle processus élémentaire $H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :*

$$H_t = \phi_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i[}(t),$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = T$,$\phi_0$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable bornée et, pour $i = 1, ..., p, \phi_i$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et bornée.

Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à B comme étant le processus continue $\{I(H)_t\}_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \left(B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}\right),$$

soit encore, si $t \in]t_k, t_{k+1}[$,

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1}\left(B_t - B_{t_k}\right).$$

On note $\int_0^t H_s dW_s$ pour $I(H)_t$. On obtient alors directement à l'aide de cette définition le résultat suivant :

Proposition 1.1.4 *Si H est un processus élémentaire, alors $\left(\int\limits_0^t H_s^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ martingale continue telle que*

$$\forall t \in [0,T], \quad \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t H_s dB_s\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right].$$

On veut à présent définir l'intégrale stochastique pour une classe plus vaste de processus H.

Pour la première extension, on utilise la densité des processus élémentaires dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}^2$ suinent :

$$\mathcal{M}^2 = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ progressivement mesurable, } \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty \right\}.$$

On désigne par H^2 l'espace vectoriel des martingales bornées dans L^2 ; le sous-espace de H^2 formé par les martingales qui sont continues est noté H_c^2. On munit H^2 de la norme définie par $\|M\|_{H^2} = \mathbb{E}\left[|M_T|^2\right]^{1/2}$ qui en fait un espace de Hilbert. L'inégalité de Doob montre que cette norme est équivalente à la norme $\mathbb{E}\left[\sup_t |M_t|^2\right]^{1/2}$; par suite, H_c^2 est un sous-espace fermé.H_c^2 désignent les sous-espaces de H^2 et H_c^2 constitués des martingales nulles en 0 ; ces deux sous-espaces sont fermés.

On obtient alors le résultat suivant :

Théoreme 1.1.3 *Il existe une unique application linéaire J de $\mathcal{M}^2$ dans H_c^2 telle que :*

1. si H est un processus élémentaire, alors $I(H)$ et $J(H)$ sont indistinguables ;
2. pour tout t , $\mathbb{E}\left[J(H)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]$.

L'unicité signifie que si J et J' sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes alors $J(H)$ et $J'(H)$ sont indistinguables.

On note toujours $\int_0^t H_s dB_s$ pour $J(H)_t$.

1.1.5 Formule d'Itô

Soit X un processus d'Itô

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière.

La formule d'Itô vése à donner une formule de changement de variable $f(X_t)$.

1er formule d'Itô :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ alors :

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) \sigma_s ds.$$

Si f est à dérivеés bornées.

Le processus

$$f(X_t) - \int_0^t f'(X_s) ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s ds$$

est martingale.

Cette formule s'écrit

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X_t \rangle$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t) b_t dt + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X_t \rangle + f'(X_t) \sigma_t dB_t \\ &= \left(f'(X_t) b_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma_t^2 \right) dt + f'(X_t) \sigma_t dB_t \end{aligned}$$

Le processus $t \to f(X_t)$ est un processus d'Itô.

de dérive : $\int_0^t \left(f'(X_s)\, b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\, \sigma_s^2\right) ds$ et de déffision (partie martingale .)

$$\int_0^t f'(X_s)\, \sigma_s dB_s.$$

condition initiale $f(X_0) = f(x)$.

Notation 1.1.1

$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, dX_t.dX_t.$$

2^{éme} formule d'Itô :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport x $\left(C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \mathbb{R}\right)$ si $X_t = x$.

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X \rangle_s$$

sous forme différentielle

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\, d\langle X \rangle_t.$$

3^{éme} formuled'Itô :

Soient X et Y deux processus d'Itô issur de x et y $(X_0 = x$ et $Y_0 = y)$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. de classe C^2 à dérivées bornées .On a :

$$f(X_t, Y_t) = f(x, y) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s)\, d\langle Y\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)\, d\langle X, Y\rangle_s.$$

Soient X_t et Y_t des processus d'Itô suivant les dynamiques :

$$dX_t = b_t^X dt + \sigma_t^X dB_t^X$$
$$dY_t = b_t^Y dt + \sigma Y_t dB_t Y_t$$

B^X et B^Y sont deux MB corrélés de coefficient de corrélation ρ la formule.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est de présentatique et montrer le résultat d'équations différentielles stochastiques rétrogrades dont les cofficients sont globalement Lipchitziens.

Ce résultat a été obtenu par **Pardoux** et **Peng** en **1990** avec le générateur f non linéaire et une donnée terminale de carré intégrable.

Résoudre une $EDSR$, c'est trouver une couple de processus adapté par rapport à la filtration du MB $(B_t)_{0\leq t\leq T}$,$(X_t, Y_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant l'EDS

$$-dX_t = f(t, X_t, Y_t)\, dt - Y_t dB_t, \quad \text{avec,} \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

avec la condition finale (c'est pour cela que l'on dit rétrograde) $X_T = \xi$ où ξ est une v.a de carré intégrable. Comme les EDS, ces équation être compris au sens intégrale i.e

$$X_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Y_s)\, ds - \int_t^T Y_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.2}$$

Les $EDSR$ ont ètè introduites en 1973 par **J-M.Bismut** (voir[9])dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables X et Y. Il a fallu attender le début des années 90 le travaile de **E.Pardoux** et **S.Peng** pour avoir le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où f n'est pas linéaire.

2.1 Motivations et notations

2.1.1 Présentation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et v.a ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, ou T désigne un temps terminal.

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{-dX_t}{dt} = f(X_t), \quad t \in [0, T], \quad \text{avec } X_T = \xi \ ,$$

en imposant que, pour tout instant t, X_t ne dépende pas du futur après t c-à-d que le processus X soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{t\geq 0})$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f = 0$. Le candidat naturel est $X_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleur approximation disons dans L^2- adapté est la martingale $X_T = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un MB, le théorème de représentation des martingales browniennes d'Itô, permet de construire un processus Y de carré intégrable et adapté tel que :

$$X_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Y_s dB_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

$$X_t = \xi - \int_t^T Y_s dB_s, \quad t \in [0, T] \ .$$

Ou de facon équivalente

$$-dX_t = -Y_t dB_t, \quad t \in [0, T] \quad X_T = \mathcal{E} \ \cdot$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Y dans le rôle est de rendre le processus X adapté.

Par suite, comme une seconde varaible apparît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Y ; l'équation devient alors comme (2.1), ou de façon équivalente, sous forme intégrale (2.2).

Notation :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complète et B un MB d-dimensionnel sur cet espace. On notera $(\mathcal{F}_{t\geq 0})$ la filtration naturelle du MB B. On travaillera avec deux espaces de processus :

– $L_k^2(\mathcal{F}_t) = \left\{ \begin{array}{c} \eta : \text{ variable aléatoire à valeurs dans } \mathbb{R}^k, \mathcal{F}_t - \text{mesurable tq :} \\ \mathbb{E}\left[|\eta|^2\right] < \infty. \end{array} \right\}$

– $S^2(0, T)^k$ désigne l'espace vectoriel formé des processus X, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\|X\|_{S^2}^2 := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty,$$

et $S_c^2(0,T)^k$ le sous-espace formé par les processus continus.

– $\mathcal{H}^2(0,T)^{k\times d}$ désigne l'espace vectoriel formé par les processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$||Y||_{\mathcal{H}^2}^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^T ||Y||^2 dt\right] < \infty,$$

ou si $y \in (\mathbb{R}^{k\times d})$, $||y|| = trace(yy^*)$. $\mathcal{H}^2(0,T)^{k\times d}$ désignent l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{H}^2(0,T)^{k\times d}$,

les espaces S^2, S_c^2 et $\mathcal{H}^2$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'éspace de Banach $S_c^2(0,T)^k\times\ \mathcal{H}^2(0,T)^{k\times d}$.

Dans tout ce chapitre

– $f\ :\ \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ tq $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ le processus $\{f(t,x,y)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable.

– ξ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^k$ $\mathcal{F}_T$-mesurable.

On veut résoudre l'$EDSR$ (2.1) et de façon équivalents, sous forme intégrale (2.2)

La fonction f s'appelle le générateur de l'$EDSR$ et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce qui l'on étend par solution de l'$EDSR$ (2.2)

Définition 2.1.1 *Une solution de l'$EDSR$ (2.2) est un couple de processus $\{(X_t,Y_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*

1. X et Y sont progressivement mesurables à valeurs resp dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;

2. $\mathbb{P} - p.s.$

$$\int_0^T \{|f(r, X_r, Y_r)| + ||Y_r||^2\} dr < \infty;$$

3. $\mathbb{P} - p.s.$, on a :

$$X_t = \xi + \int_t^T f(r, X_r, Y_r)\, dr - \int_t^T Y_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T \ .$$

Remarque 2.1.1 *Il est important de retenir les deux points suivants :*

1) Les intégrales de l'équation (2.2) étant bien définies.

2) Le processus X est une semi-martingale continue et il est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier X_0 est une quantité déterministe.

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus X appartient à S_c^2.

Proposition 2.1.1 *supposons qu'il existe un processus $\{f(t, x, y)\}_{0 \leq t \leq T}$ positif appartenant à $\mathcal{H}^2(0, T)^{k \times d}$ et deux constantes positives C et K telles que :*

$$\forall (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}, \quad |f(t, x, y)| \leq f_t + C.|x| + K.||y|| \ \cdot$$

Si $\{(X_t, Y_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.2) telle que $Y \in \mathcal{H}^2$, alors X appartient à S_c^2.

Preuve. On a pour tout $t \in [0, T]$,

$$X_t = X_0 + \int_0^T f(r, X_r, Y_r)\, dr - \int_0^T Y_r dB_r,$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur f,

$$|X_t| \leq |X_0| + \int_0^T (f_r + K||Y_r||)dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r dB_r\right| + C\int_0^t |X_r|dr.$$

posons

$$\lambda = |X_0| + \int_0^T (f_r + K||Y_r||)dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r dB_r\right|,$$

par suite on a

$$|X_t| \leq \lambda + C\int_0^t |X_r|dr.$$

X étant un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité :

$$|X_t| \leq \lambda \exp(Ct),$$

et donc

$$\sup_{0\leq t\leq T} |X_t| \leq \lambda \exp(Ct),$$

λ est une $v.a$ de carré intégrable, puisque par hypothèse, Y appartient à $\mathcal{H}^2$ et donc, d'aprés l'inégalité de Doob, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r dB_r\right|^2\right] \leq 4 \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[\int_0^t \left[\|Y_r\|^2\right] dr\right],$$

ce qui signifie que le troisième terme de λ est de carré intégrable. Il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ et X_0 puisqu'il est déterministe donc de carré intégrable. Ceci montre que X appartient à S^2. ■

Lemme 2.1.1 *Soient* $X \in S^2(0,T)^k$ *et* $Y \in \mathcal{H}^2(0,T)^{k\times d}$ *alors :*

$$\left\{ \int_0^t X_s Y_s dB_s, t \in [0,T] \right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. En appliquant l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante positive C telle que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X_r Y_r dB_r\right|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |X_r|^2 ||Y_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^2\left(\int_0^T ||Y_r||^2 dr^{\frac{1}{2}}\right)\right], \end{aligned}$$

et par suit en appliquant l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X_r Y_r dB_r]\right|\right] \leq C\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_r|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T ||Y_r||^2 dr\right]\right).$$

Par hypothèse le deuxième membre de cette inégalité est fini, et donc on aura :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t X_r Y_r dB_r\right|\right] \leq \infty.$$

■

2.2 Cas Lipschitz

Dans cette section on va étudier l'existence et l'unicité de l'$EDSR$ (2.2) qui à démontrer à **E.Pardoux** et **S.Peng** en 1990 dans le cas ou le générateur f est non linéaire.

On travaille sur les deux hypothèses suivantes :

Il existe α une constante telle que $\mathbb{P}$-$p.s.$

H1 Condition de Lipschitz en (x, y) **:** pour tout t, x, x', y, y',

$$|f(t,x,y) - f(t,x',y')| \leq \alpha(|x - x'| + ||y - y'||);$$

H2 Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds\right] < \infty$$

On commence par trouver une solution de l'$EDSR$ suivante :

$$X_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Y_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.3}$$

Lemme 2.2.1 *Soit* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ *dans* $\mathcal{H}^2(0,T)^{k \times d}$. *l'$EDSR$ (2.3) admet une unique solution* (X, Y) *tq :* $Y \in \mathcal{H}^2$.

Preuve. On suppose que (X, Y) soit une solution qui vérifier $Y \in \mathcal{H}^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ on a nécessairement,

$$X_t := \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds | \mathcal{F}_t\right),$$

a l'aide de la formule précédent on définie X et il reste de trouver Y.

a d'après la théorème de Fubini, l'intégrale $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à $\mathcal{F}_t$ car F est progressivement mesurable. Et on a F est de carré intégrable (en fait dans l'éspace S_c^2), on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$X_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds | \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds := M_t - \int_0^t F_s ds.$$

Où M est une martingale brownienne et d'après le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus $Y \in \mathcal{H}^2$ tel que :

$$X_t = M_t - \int_0^t F_s ds = M_0 + \int_0^t Y_s dBs - \int_0^t F_s ds.$$

Facilement on peut trouver que (X, Y) est une solution de l'$EDSR$ qui étudiée puisque comme $X_T = \xi$.

Alors

$$\begin{aligned} X_t - \xi &= M_0 - \int_0^t F_s ds + \int_0^t Y_s dBs - (M_0 + \int_0^T Y_s dBs - \int_0^T F_s ds) \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Y_s dBs. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'unicité existe pour les solutions qui vérifient $Y \in \mathcal{H}^2$. ■

Maintenant on va montrer la théorème de **Pardoux** et **Peng**.

Théoreme 2.2.1 ***(Pardoux- Peng)****D'après les hypothèses* $(H1$ *et* $H2)$ *l'*$EDSR$ (2.2) *possède une unique solution* (X, Y) *tq* $Y \in \mathcal{H}^2$ *:*

Preuve. On utilise un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Φ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(X,Y) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'$EDSR$ (2.2) si et seulement si (X,Y) est un point fixe de Φ. Pour (U,V) de $\mathcal{B}^2$ on définit $(X,Y) = \Phi(U,V)$ comme une solution de l'$EDSR$:

$$X_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T Y_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

Remarquons que cette dernière l'EDSR possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$.en effet, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$.ce processus appartient à $\mathcal{H}^2$ puisque ; f étant Lipschitz,

$$|F_r| \leq |f(r,0,0)| + \lambda |U_r| + \lambda ||V_r||,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le lemme(2.2.1) pour obtenir une unique solution (X,Y) telle que $Y \in \mathcal{H}^2$. (X,Y) appartient à $\mathcal{B}^2$: l'intégralité de Y est obtenue par construction et, d'après la proposition(2.1.1), X appartient à S_c^2. l'application de Φ dans $\mathcal{B}^2$ est bien définie.

(U,V) et $(U^{`}, V^{`})$ deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et $(X,Y) = \Phi(U,V), (X^{`}, Y^{`}) = \Phi(U^{`}, V^{`})$. On note que : $y = Y - Y^{`}$ et $x = X - X^{`}$. on a $x_T = 0$ et

$$dx_t = -\{f(t, U_t', V_t')\} dt + y_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{at}|x_t|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d(e^{at}|x_t|^2) &= \alpha e^{at} |x_t|^2 dt - 2e^{at} x_t \ \{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\} dt \\ &\quad + 2e^{at} x_t . y_t dB_t + e^{at} ||y_t||^2. \end{aligned}$$

et par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient

$$\alpha e^{at}|x_t|^2 + \int_t^T e^{ar}||y_r||^2 dr = \int_t^T e^{ar}(-\alpha|x_r|^2 + 2x_r.\{f(t,U_r,V_r) - f(t,U'_r,V'_r)\})dr$$
$$- \int_t^T 2e^{ar}x_r.y_r dB_r.$$

et comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement

$$e^{at}|x_t|^2 + \int_t^T e^{ar}||y_r||^2 dr \leq \int_t^T e^{ar}(-\alpha|x_r|^2 + 2\lambda|x_r||u_r| + 2\lambda|x_r||v_r||)dr - \int_t^T 2e^{ar}x_r.y_r dB_r$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$e^{at}|x_t|^2 + \int_t^T e^{ar}||y_r||^2 dr \leq \int_t^T e^{ar}(-\alpha + 2\lambda^2/\varepsilon)|x_r|^2 dr - \int_t^T 2e^{ar}x_r.y_r dB_r$$
$$+ \varepsilon \int_t^T e^{ar}(|u_r|^2 + ||v_r||^2)dr,$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$, on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{ar}(|u_r|^2 + ||v_r||^2)dr$,

$$\forall t \in [0,T],\ e^{at}|x_r|^2 + \int_t^T e^{ar}||y_r||^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{ar}x_r.y_r dB_r. \tag{2.4}$$

D'aprés le lemme (2.1.1), la martingale locale $\{\int_0^T e^{ar}x_r.y_r dB_r\}_{t\in[0,T]}$est en réalité une martingale nulle en 0 puisque X, X' appartiennent à S^2 et Y, Y'appartienent à $\mathcal{H}^2$.

En prenant l'espérance, il vient que pour $t = 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{at}||y_r||^2 dr\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] \tag{2.5}$$

Revenant à l'inégalité de (2.4), les inégalités Burkholder-Davis-Gundy fournissent fourni

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{at}|y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2ar}\left|x_r\right|^2\left||y_r|\right|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{at/2}|x_t|\left(\int_0^T e^{2ar}||y_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right].\end{aligned}$$

Puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{at}|x_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{at}|x_t|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{ar}||y_r||^2 dr\right],$$

prenant en considération l'inégalité (2.5), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{at}|x_t|^2 + \int_0^T e^{ar}||y_r||^2 dr\right] \leq (3 + C^2)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]$$

et par suit, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{at}|x_t|^2 + \int_0^T e^{ar}||y_r||^2 dr\right] \leq \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{at}|u_t|^2 + \int_0^T e^{ar}||v_r||^2 dr\right]$$

prenons ε tel que $\varepsilon(3 + C^2)(1 \vee T) = 1/2$ de sorte que l'application Φ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans si on lui-même si on le munit de la norme

$$||U,V||_\alpha = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{at}|U_t|^2 + \int_0^T e^{ar}||V_r||^2 dr\right]^{1/2}$$

qui on fait un espace de Banach, cette dernier norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Φ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.2) dans $\mathcal{B}^2$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Y \in \mathcal{H}^2$ puisque la proposition (2.1.1)implique qu'une telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$. ■

2.3 EDSR linéaire

Dans cette partie on va étudier l'$EDSR$ linéaire pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; X est donc réel et Y est une matrice de taille $1 \times d$ c'est- à- dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 2.3.1

Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $(C_t)_{t\in[0,T]}$ un élément de $\mathcal{H}^2(0,T)$ et ξ une $v.a$, $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable,à valeurs réelles.

On a l'$EDSR$ linéaire :

$$X_t = \xi + \int_t^T \{a_s X_s + Y_s b_s + C_s\} ds - \int_t^T Y_s dB_s.$$

Posséde une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T],\ X_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}(\xi\Gamma_T + \int_t^T C_s\Gamma_s ds|\mathcal{F}_t),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\{\int_0^T b_s.dB_s - \frac{1}{2}\int_t^T |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s ds\}.$$

Preuve. Commencons par remarquer que le processus Γ vérifier :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t.dB_t),\ \Gamma_0 = 1.$$

D'autre part, comme b est borné, l'inégalité de Doob montre que Γ apaartient à S^2.De plus, les hypothéses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (X,Y) à l'$EDSR$ linéaires ; il suffit de poser $f(t,x,y) = a_t x + y b_t + c_t$ et de vérifier que il satisfait. X appartient à S^2par la proposition(2.1.1).

La formule d'intégration par parties donne

$$d\Gamma_t X_t = \Gamma_t dX_t + X_t d\Gamma_t + d\langle\Gamma, X\rangle_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Y_t dB_t + \Gamma_t X_t b_t.dB_t, \quad (2.6)$$

D'aprés (2.6), on a le processus $\Gamma_t X_t + \int_0^t c_s\Gamma_s ds$ est une martingale locale qui on fait une martingale car $c \in \mathcal{H}^2$ et Γ, X sont dans S^2.Par suit, on trouve :

$$\Gamma_t X_t + \int_0^t c_s\Gamma_s ds = \mathbb{E}\left[\Gamma_T X_T + \int_0^T c_s\Gamma_s ds|\mathcal{F}_t\right],$$

ce qui implique

$$\Gamma_t X_t = \mathbb{E}\left[\Gamma_T X_T + \int_0^T c_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t c_s \Gamma_s ds$$

comme $\int_0^t c_s \Gamma_s ds$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable, on obtient :

$$\Gamma_t X_t = \mathbb{E}\left[\Gamma_T X_T + \int_t^T c_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t\right],$$

alors la solution de l'EDSR lineéaire est

$$X_t = \Gamma^{-1} \mathbb{E}\left[\Gamma_T X_T + \int_t^T c_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t\right].$$

■

2.3.1 Théorème de comparaison

Théoreme 2.3.1 *Supposons que $k = 1$, et que $(\xi, f), (\xi', f')$ vérifient l'hypothèse $(H_1$ et $H_2)$. On note $(X, Y), (X', Y')$ les solutions de l' EDSR correspondantes. On suppose également que,*

$$\mathbb{P}-p.s., \xi \leq \xi' \text{ et que } f(t, X_t, Y_t) \leq f'(t, X_t, Y_t) \ \ \lambda \otimes \mathbb{P}-p.p.$$

$$\lambda \text{ mesure de Lebesgue.}$$

Alors

$$\forall t \in [0, T], \ X_t \leq X'_t \ \mathbb{P}-p.s$$

Si de plus, $X_0 = X'_0$, alors

$\mathbb{P}-p.s.,\ X_t = X_t^{\backprime}, 0 \leq t \leq T$ *et* $f(t, X_t, Y_t) = f^{\backprime}(t, X_t, Y_t)\ \lambda \otimes \mathbb{P}-p.p.$

En particulier, $\mathbb{P}(\xi \leq \xi^{\backprime}) > 0$ *où* $f(t, X_t, Y_t) < f^{\backprime}(t, X_t, Y_t)$ *sur un ensemble de* $\lambda \otimes \mathbb{P}-$*mesure strictement positive alors* $X_0 < X_0^{\backprime}$.

Preuve. voir[13] ■

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies

Dans ce chapitre, on va étudier les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies à une barrière, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution, ont utilisant l'approximation via la pénalisation. Notons que ce résultat a été établi par El-karoui et al (1997).

On pose :

$$(A_1) \quad \begin{cases} f(t,0,0)_{t\leq T} \in H^2\left(0,T\right)^k \\ f \text{ est uniformément Lipschitz par rapport à } (x,y) : \exists C \geq 0, \forall (x,x',y,y') : \\ |f(t,w,,x,y) - f(w,t,x',y')| \leq C(|x-x'| + |y-y'|),\ dt \otimes d\mathbb{P} \end{cases}$$

Dans cette section, la dimension k est égale à 1. Donc nous allons traiter des solutions de $EDSR$ dont les composants X sont contraints de rester au-dessus d'une barrière donnée.

Soient $\xi \in L_1^2(\mathcal{F}_T)$ et $f(t,w,x,y)$ une fonction qui satisfait l'hypothèse (A_1). Introduisons par ailleurs un autre objet, appelé l'obstacle qui est un processus $S := (S_t)_{t\leq T}$, continu, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}$, satisfaisant $\xi > S_T$ et

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} (S_t^+)^2\right] < \infty.$$

Introduisons maintenant la notion de $EDSR$ réfléchie (en abrégé $EDSRR$) associée à (f,ξ,S). Une solution pour cette équation est un triple des processuses progressivement mesurables $(X,Y,Z) := (X_t,Y_t,Z_t)_{t\leq T}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{1+d+1}$ telle que :

$$\begin{cases} X \in S^2(0,T), Y \in H^2(0,T)^d \text{ et } Z \in S^2(0,T) \text{ un processus non décroissant , et } Z_0 = 0 \\ X_t = \xi + \int_t^T f(s,X_s,Y_s)\,ds + Z_T - Z_t - \int_t^T Y_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T \\ X_t \geq S_t \text{ et } \int_0^T (X_t - S_t) dZ_t = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Existence et unicité de la solution

Nous allons montrer que l'$EDSR$ (3.1) admet une unique solution. Pour commencer, abordons la question de l'unicité.

Proposition 3.1.1 ***(unicité)***

L'$EDSR$ (3.1) associée à (f,ξ,S) a au moins un solution.

Preuve. On suppose que (X,Y,Z) et (X',Y',Z') sont deux solutions de (3.1).

Premièrement, nous avons

$$\forall t \leq T, \quad \left\{ \mathbf{1}_{[X_t > X'_t]} - \mathbf{1}_{[Y'_t > Y_t]} \right\} (dZ_t - dZ'_t) \leq 0 \ ,$$

puisque $\mathbf{1}_{[X_t > X'_t]} dZ_t = \mathbf{1}_{[Y'_t > Y_t]} dZ'_t = 0$. Maintenant, en utilisent la formule d'**anaka** avec $X - X'$ et d'apres l'inégalité précédent, on obtient :

$$|X - X'| \leq \int_t^T sgn(X_s - X'_s)(f(s, X_s, Y_s) - f(s, X'_s, Y'_s))ds - \int_t^T sgn(X_s - X'_s)(Y_s - Y'_s)dB_{s.}$$

D'autre part, f est Lipschitz, alors il existe deux processus bornés $(a_t)_{t \leq T}$ et $(b_t)_{t \leq T}$, telle que $f(s, X_s, Y_s) - f(s, X'_s, Y'_s) = a_t(X_s - X'_s) + b_t(Y_s - Y'_s)$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} |X - X'| &\leq \int_t^T \{a_s |X - X'| + b_s sgn(X_s - X'_s)(Y_s - Y'_s)\} \, ds - \int_t^T sgn(X_s - X'_s)(Y_s - Y'_s)dB_s \\ &\leq C \int_t^T |X_s - X'_s| ds - \int_t^T sgn(X_s - X'_s)(Y_s - Y'_s)d\tilde{B}_s, \quad t \leq T \end{aligned}$$

$\tilde{B}$ est un MB sous une nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ équivalant à $\mathbb{P}$. Maintenant prendre l'espérance des deux côtés implique :

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[|X_s - X'_s| \right] \leq C \int_t^T \tilde{\mathbb{E}} \left[|X_s - X'_s| \right] ds, \quad \forall t \leq T \ .$$

Enfin, l'utilisation de l'inégalité de Gronwall implique que $\tilde{\mathbb{E}} \left[(X_t - X'_t)^2 \right] = 0$ tel que $t \leq T$.

Nous avons $\mathbb{P}$-$p.s$, $X = X'$ puis aussi $Y = Y'$et $Z = Z'$ puisque $\tilde{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont mesurés de probabilités équivalentes, nous avons donc l'unicité. ■

Nous allons maintenant montrer que l'équation (3.1) à une solution en utilisant la méthode de pénalisation.

Théoreme 3.1.1 ***(Existence)***

L'$EDSR$ réfléchie associée à (f, ξ, S) a une unique solution.

Preuve. (Existence via la pénalisation) Pour $n \in \mathbb{N}$. soit $(X^n, Y^n) := (X_t^n, Y_t^n)_{t \leq T}$ le processus $\mathcal{F}_t-$progressivement mesurable de $S^2(0,T) \times H^2(0,T)^d$ telle que :

$$X_t^n = \xi + \int_t^T f(s, X_s^n, Y_s^n)\, ds + \int_t^T n(X_s^n - S_s)^- ds - \int_t^T Y_s dB_s, \quad t \leq T \ . \tag{3.2}$$

Tout d'abord, précision que par théorème de comparaison (2.3.1), vous avez $X^n \leq X^{n+1}, \forall n \geq 0$. D'autre part, posons $Z_t^n = \int_0^t n(X_s^n - S_s)^- ds,\ t \leq T$.

Etape 01 :

existe une constante $C \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq 0 \quad \text{et } t \leq T \quad \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n|^2 + \int_0^T |Y_s^n|^2 ds + (Z_t^n)^2\right] \leq C \tag{3.3}$$

De plus, il existe un processus $\mathcal{F}_t-$progressivement mésurable $(X_t)_{t \leq T}$, qui est la limite de la suite $(X^n)_{n \geq 0}$ ponctuellement et dans $H^2(0,T)$. En effet appliquer la formule d'Itô à $(X^n)^2$ et en prendre l'espérance donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2+\int_0^T |Y_s^n|^2 ds\right] &= \mathbb{E}|\xi|^2+2\mathbb{E}\int_t^T f\left(s,X_s^n,Y_s^n\right)X_s^n ds+2\mathbb{E}\int_t^T X_s^n dZ_s^n \\
&\leq \mathbb{E}|\xi|^2+2\mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s,X_s^n,Y_s^n\right)ds\right]+2\mathbb{E}\left[\int_t^T X_s^n n(X_s^n-S_s)^- ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}[\xi]^2+C+C\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_s^n|^2 ds\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T |Y_s^n|^2 ds\right]+\alpha^{-1}\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T}(S_s^+)^2\right] \\
&\quad +\alpha\mathbb{E}\left[(Z_T^n-Z_t^n)^2\right],
\end{aligned}$$

ôu α est une constante réelle non négative. Mais, pour tout $t\leq T$, on a :

$$Z_T^n-Z_t^n=X_t^n-\xi-\int_t^T f(s,X_s^n,Y_s^n)ds+\int_t^T (Y_s^n,dB_s).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(Z_T^n-Z_t^n)^2\right] &\leq \tilde{C}\mathbb{E}\left[\xi^2+|X_t^n|^2+\left(\int_t^T |f(s,X_s^n,Y_s^n)|\,ds\right)^2+\left(\int_t^T Y_s^n dB_s\right)^2\right] \\
&\leq \tilde{C}\mathbb{E}\left[1+\xi^2+|X_t^n|^2+\int_t^T |X_s^n|^2 ds+\int_t^T |Y_s^n|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

En choisissant $\alpha=\left(\frac{1}{3}\tilde{C}\right)$, on obtient

$$\frac{2}{3}\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2\right]+\frac{1}{3}\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^n|^2 ds\leq C\left(1+\mathbb{E}\int_t^T |X_s^n|^2 ds\right).$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2\right]+\mathbb{E}\int_0^T|Y_t^n|^2dt+\mathbb{E}\left[(Z_T^n)^2\right]\leq C,\ n\in\mathbb{N}.$$

En utilisant l'équation (3.2) , et l'inégalité de BDG on obtient l'éstimation(3.3) .

Etape 02 :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|\left(X_t^n-S_t\right)^-|^2\right]=0. \tag{3.4}$$

Cette propriété est essentielle, nous donnons la preuve dans la suite.

$(\tilde{X}_t^n,\tilde{Y}_t^n)$ la solution du standard $EDSR$ linéaire suivante :

$$\tilde{X}_t^n=\xi+\int_t^T\left\{f(s,X_s^n,Y_s^n)-n(\bar{X}_s^n-S_s)\right\}-\int_t^T\tilde{Y}_s^ndB_s,\quad t\leq T\ .$$

Par le théorème de comparaison, nous avons $\mathbb{P}-p.s$, $\forall t\leq T$, $X_t^n\geq\tilde{X}_t^n$, pour tout $n\geq0$.

Soit maintenant τ un $\mathcal{F}_t$- temps d'arrêt tel que $\tau\leq T$. Alors :

$$\bar{X}_t^n=\mathbb{E}\left[\xi e^{-n(T-\tau)}+\int_t^T(f(s,X_s^n,Y_s^n)-nS_s)e^{-n(s-\tau)}ds|\mathcal{F}_r\right].$$

Puisque S est continue alors :

$$\xi_Te^{-n(T-\tau)}+\int_\tau^Te^{-n(s-\tau)}(f(s,X_s^n,Y_s^n)+nS_s)ds\to\xi_T\mathbf{1}_{[\tau=T]}+S_r\mathbf{1}_{[\tau<T]}\quad\mathbb{P}-p.s\ ,$$

et d'autres par

$$\left| \int_{\tau}^{T} e^{-n(s-\tau)} |f(s, X_s^n, Y_s^n)| ds \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \left\{ \int_{0}^{T} f(s, X_s^n, Y_s^n)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Donc

$$\bar{X}_\tau^n \to \xi_T \mathbf{1}_{[\tau=T]} + S_r \mathbf{1}_{[\tau<T]} \text{ dans } L^2(\mathbb{P}) \text{ pour } n \to \infty,$$

par conséquent $X_\tau \geq S_\tau$ $p.s.$ Et par le théorème de section (voir [4]), en déduit que $\mathbb{P}-p.s$, $X_t \geq S_t$,$\forall t \in [0,T]$ ceci implique que $(X_t - S_t)^- \searrow 0$, $t \leq T$, $\mathbb{P}-p.s.$ Et par le théorème de Dini implique que $\sup\limits_{t\leq T} (X_t^n - S_t)^- \to 0$ pour $n \to \infty$.
Enfin, le théorème de convergence monotone donne le résulta souhaité (3.4).

Etape 03 :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2\right] \to 0,$$

et il existe deux processus $\mathcal{F}_t-$progressivement mesurables $Y = (Y_t)_{t\leq T}$, $Z = (Z_t)_{t\leq T}$ (Z étant continu non décroissant et $Z_0 = 0$) telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Y_s^n - Y_s|^2 ds + \sup\nolimits_{t\leq T} |Z_t^n - Z_t|^2\right] \to 0, \quad \text{pour} \quad n \to \infty \ .$$

En utilisant la formule d'Itô, on obtient pour tout $p \geq n \geq 0$ et $t \leq T$,

$$
\begin{aligned}
(X_t^n - X_t^p)^2 + \int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 ds &\leq \int_t^T \left\{ C|X_s^n - X_s^p|^2 + \tfrac{1}{2}|Y_s^n - Y_s^p|^2 \right\} ds \\
&+2\int_t^T (X_s^n - X_s^p)(dZ_s^n - dZ_s^p) \qquad (3.5) \\
&-2\int_t^T (X_s^n - X_s^p)(Y_s^n - Y_s^p)\, dB_s.
\end{aligned}
$$

Puisque $p \geq n$, alors $\int_t^T (X_s^n - X_s^p)(dZ_s^n - dZ_s^p) \leq \sup_{t\leq T} (X_s^n - S_s)^- Z_T^p$. En prenant l'espérance, en utilisant (3.3) pour Z_T^n et le résultat obtenu à l'etape 02, nous obtenons :

$$
\mathbb{E}\left[\int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 ds\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_t^T |X_s^n - X_s^p|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} (X_s^n - S_s)^- Z_T^p\right] \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty,
$$

alors il existe un processus $(Y_t)_{t\leq T}$ qui appartient à $H^2(0,T)^d$ et quelle est la limite de $(Y^n)_{n\geq 0}$dans $H^2(0,T)^d$. Et par (3.5), en prenant d'abord le sup puis l'espérance et en utilisant l'inégalité BDG, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T} (X_s^n - X_s^p)^2 + \int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 ds\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T} (X_s^n - S_s)^- Z_T^p\right] \\
&+\alpha\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T} |X_s^n - X_s^p|^2\right] + \alpha\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T} (X_s^n - X_s^p)^2\right] \\
&+\alpha^{-1}\mathbb{E}\left[\int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 ds\right] + C\left[\int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

Òu α est une constante réelle non négative. Nous choisissons $\alpha < \frac{1}{2}$ implique que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T}(X_s^n - X_s^p)^2\right] \rightarrow 0, \quad \text{pour } p, n \rightarrow \infty \ ,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T}(X_s^n - X_s)^2\right] \rightarrow 0, \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

de plus $X = (X_t)_{t\leq T}$ est un processus continu. Enfin, puisque pour tout $n \geq 0$ et $t \leq T$,

$$Z_t^n = X_0^n - X_s^n - \int_0^t f(s, X_s^n, Y_s^n)ds + \int_0^t Y_s^n dB_s,$$

alors nous avons aussi, $\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T}(Z_s^n - Z_s^p)^2\right] \rightarrow 0$, pour $n \rightarrow \infty$.
existe donc un processus $\mathcal{F}_t$-adapté non décroissant et continu $(Z_t)_{t\leq T}$ avec $Z_0 = 0$ telle que $\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T}(Z_s^n - Z_s)^2\right] \rightarrow 0$, pour $n \rightarrow \infty$.

Etape 04 :

Le processus limite $(X, Y, Z) = (X_t, Y_t, Z_t)_{t\leq T}$ est la solution de l'$EDSR$ réfléchie associée à (f, ξ_T, S).

Evidemment, les processus $(X_t, Y_t, Z_t)_{t\leq T}$ satisfait :

$$X_t = \xi_T + \int_t^T f(s, X_s, Y_s)ds + Z_T - Z_T - \int_t^T Y_s dB_s, \quad t \leq T \ .$$

D'autre part, $\lim_{n\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\left((X_t^n - S_s)^-\right)^2\right] = 0$, P-$p.s$, $\forall t \leq T$, $X_t \geq S_t$. Enfin aussi $\int_0^T (X_s - S_s)\, dZ_s = 0$, d'autre part les suites $(X^n)_{n\geq 0}$ et $(Z^n)_{n\geq 0}$ sont convergentes uniformément respectivement vers X et Z et

$$\int_0^T (X_s - S_s)\, dZ_s = -n \int_0^T \left((X_t^n - S_s)^-\right)^2 ds \leq 0.$$

Ce qui montre (X, Y, Z) est une solution de l'EDSR réfléchie(3.1) . ■

Quelques inégalités et théorémes fondamentales

Théorème de Fubuni Soit f une fonction continue sûre $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans un ensemble E, alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Théorème de représentation des martingales browniennes Soit une M martingale càdlàg de caré intégrable pour la filtration du MB $\{F_t^B\}_{t\in[0,T]}$, alors il existe un unique processus $(G_t)_{t\in[0,T]}$, appartenant à $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^k)$, telque :

$$\mathbb{P} - p.s, \quad \forall \in t[0, T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t G_s dB_s.$$

Inégalité de Doob Si M est une sous-martingale à temps continu, positive et càdlàg, alors pour $p > 1$ et $q = p/p - 1$,on a :

$$|| \sup_{s \leq t} M_s ||_p \leq q || M_t ||_p \quad \text{et} \quad || \sup_t M_t ||_p \leq q \sup_t || M_t ||_p \; .$$

Lemme de Fatou Soit $f_n \geq 0$ une suite, alors :

$$\int_X \lim_{n\to\infty 0} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu.$$

Lemme de Gronwall Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t :

$$f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)ds, a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

alors pour tout t :

$$f(t) \leq a\exp(bt).$$

Inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t[0,T]}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s\right|^2\right] \leq c\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2 ds\right].$$

Ou, c constante positive.

Bibliographie

[1] Arnaud, Guyader. "Espérence conditonnelle et chaînes de Markov."Université Rennes 2 licence Mass 3, 27.

[2] Labed. Boubakeur. "Cours de movement Brownien et calcul stochastique". Université de Biskra(2022).

[3] Khalfallah, Nabil. "Cours de la théorie générale des processus stochastique". Université de Biskra(2022).

[4] Dellacherie, Claude, and Paul-André Meyer. "Probabilités et potentiel. Hermann, Paris, 1975. Chapitres Ia IV, Édition entifierement refondue, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. XV." Actualités Scientifiques et Industrielles 1372 : 39.

[5] Ramdani, Amine. "les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies". Mémoire de master(2019).

[6] El Karoui, Nicole, eArnaud.Gt al. "Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's." the Annals of Probability 25.2 (1997) : 702-737.

[7] El Karoui, Nicole, et al. "Backward stochastic differential equation in finance." Mathematic finance,(1994).

[8] El-Karoui, Nicole, and Said Hamadène. "BSDEs and risk-sensitive control, zero-sum and nonzero-sum game problems of stochastic functional differential equations." Stochastic Processes and their Applications 107.1 (2003) : 145-169.

[9] Bismut, Jean-Michel. "Conjugate convex functions in optimal stochastic control." Journal of Mathematical Analysis and Applications 44.2 (1973) : 384-404.

[10] Briand, Philippe. "Équations défférentielles stochastiques rétrogrades." Université Savoie Mont Blanc (23 February 2014).

[11] Pardoux, Etienne, and Shige Peng. "Adapted solution of a backward stochastic differential equation." Systems & control letters 14.1 (1990) : 55-61.

[12] Pardoux, Etienne, and Shige Peng. "Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations." Stochastic partial differential equations and their applications. Springer, Berlin, Heidelberg, 1992. 200-217.

[13] Briand, Philippe. "Équations défférentielles stochastiques rétrogrades." Université Savoie Mont Blanc (2001).

[14] Cvitanic, Jaksa, and Ioannis Karatzas. "Backward stochastic differential equations with reflection and Dynkin games." The Annals of Probability (1996) : 2024-2056.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde dont les coefficients sont globalement Lipchitziens, ensuite nous définissons les EDSR réfléchie à une seule barrière. La "réflexion" signifie que la solution reste au-dessus d'un processus stochastique donné, de plus on montre l'existence et l'unicité de la solution ont utilisant la méthode de pénalisation.

Abstract

In this memory, we study the existence and uniqueness of the solution of a backward stochastic differential equation whose coefficients are globally Lipchitzian, then we define the reflected BSDE with one barrier. The "reflection" means that the solution stay above a given stochastic process, moreover we show the existence and uniqueness of the solution using the penalization method.

ملخـــص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة وجود ووحدانية الحل لمعادلة تفاضلية عشوائية تراجعية ذات معاملات ليبشيزية، بعدها عرفنا المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية بحاجز واحد.

الانعكاس يعني أن الحل يبقى فوق قيمة عشوائية، علاوة على ذلك نظهر وجود الحل ووحدانيته باستخدام طريقة العقوبة.