République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

*Université Mohamed Khider, Biskra*

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : **Probabilités**

**Par**

**Fouad Guechi**

**Titre :**

# Principe du maximum pour les EDSs de type McKean-Vlasov

**Devant le Jury :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr. | *HAFAYED Mokhtar* | Prof., U. Biskra | Président |
| Mr. | *LAKHDARI Imad Eddine* | MCA, U. Biskra | Encadreur |
| Mme. | *AOUN Salima* | MAA, U. Biskra | Examinatrice |

**Le 28/06/2022**

# *Dédicace*

Je dédie ce travail à :

A ma très chère mère, mon bonheur et ma vie.

A mon très chère père, qui a fait me donné le désir d'apprendre et qui a fait beaucoup de sacrifices pour m'aider à avancer dans la vie

Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de vous.

A mes très chères frères.

A mes très chères soeurs.

A tous mes amis intimes.

A tous mes chers élèves

# $\mathcal{R}$emerciements

En premier lieu, je remercie allah tout puissant, qui nous a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail. Ce travail a été réalisé au sein Tension du département de mathématiques de l'université de Biskra. Je remercie particulièrement mon promoteurs *Dr. Lakhdari Imad Eddine*, pour son dévouement exceptionnel, sa précieuse directive et son suivi constant. Je tiens également à remercier *Pr. HAFAYED Mokhtar*, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury de ce mémoire. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à *Dr.AOUN SALIMA,* qui a accepté d'être dans le jury de cette thèse. Je tiens à remercier mes parents car ce travail représente un petit fruit de leur souffrance et qui sans eux nous ne pouvons traverser ces longues années d'études et de travail. J'adresse mes vifs remerciements à tous les professeurs ayant contribué à notre formation trouvent ici notre profonde reconnaissance. Enfin, je remercie tous ce qu'ont contribués de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

# Résumé du mémoire

Dans ce mémoire, nous établissons les conditions nécessaires générales d'optimalité pour le contrôle stochastique des équations de type McKean-Vlasov. Les coefficients de l'équation d'état dépendent de l'état du processus de résolution ainsi que de sa loi de probabilité et de la variable de contrôle. Les coefficients du système sont non linéaires et dépendent explicitement de contrôle. Le domaine de contrôle considéré n'est pas supposé être convexe (general action space). La preuve de notre résultat principal est basée sur les dérivées du premier et du second ordre, par rapport à la mesure dans l'espace de Wasserstein des mesures de probabilité, et en utilisant la méthode variationnelle.

# Notations et symbols

| | |
|---|---|
| $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ | Espace de probabilité filtré. |
| $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F})$ | L'espace des fonctions de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F})$ |
| $\mathbb{P} - p.s$ | Presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. |
| *càdlàg* | Continue à droite admet de limite à gauche. |
| $B(\cdot)$ | Mouvement brownien. |
| **EDS** | Èquation différentielle stochastique. |
| $J(u(\cdot))$ | La fonction de coût à minimiser. |
| $\mathcal{U}$ | Ensemble de contrôles admissibles. |
| $u(\cdot)$ | Contrôle admissible. |
| $u^*$ | Contrôle optimal. |
| $H(t, X, u, p, q)$ | Hamiltonien. |
| $\mathbb{P}_X$ | Loi de Probabilité de $X$. |

# Table des matières

**Dédicace** **i**

**Remerciements** **ii**

**Résumé du mémoire** **iii**

**Notations et symbols** **iv**

**Table des matières** **v**

**Introduction** **1**

**1 Rappel sur le calcul stochastique** **4**

1.1 Généralités. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.1.1 Mouvement Brownien. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.1.2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu . . . . . 6

1.1.3 Propriétés de l'espérance conditionnelle . . . . . . . . . . . 7

1.2 Intégrale de Wiener . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

1.2.1 Intégration par parties . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

1.3 Intégrales stochastique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

1.3.1 Cas de processus étagés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
1.3.2 Cas général . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
1.4 Propriétés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.5 Processus d'Itô . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.5.1 Propriétés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.6 Équations différentielles stochastiques (EDSs) . . . . . . . . . . . 15
1.6.1 Conditions d'existence et d'unicité d'une solution forte . . 16
1.6.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs) 17

**2 Différentiabilité par rapport à une mesure de probabilité 19**

2.1 Les notations et la différentiabilité par mesure . . . . . . . . . . . 19

**3 Principe du maximum stochastique 26**

3.1 Formulation du probléme de contrôle . . . . . . . . . . . . . . . . 26
3.2 Principe du maximum stochastique . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

**Conclusion 45**

**Bibliographie 46**

# Introduction

Nous étudions les solutions optimales du problème de contrôle stochastique de type McKean-Vlasov, dans lequel le domaine de contrôle n'a pas besoin d'être convexe. Nous étudions un problème général de commande stochastique pour des systèmes gouvernés par une équation différentielle stochastique de type McKean-Vlasov comme suit :

$$\begin{cases} dX^u(t) = f(t, X^u(t), P_{X^u(t)}, u(t))dt + \sigma(t, X^u(t), P_{X^u(t)}, u(t))dW(t), \\ X^u(0) = x_0. \end{cases}$$

Notre problème de contrôle consiste à minimiser un coût fonctionnel de la forme

$$J(u(\cdot)) = E\left[\int_0^T \ell(t, X^u(t), P_{X^u(t)}, u(t))dt + h(X^u(T), P_{X^u(T)})\right],$$

où $W(\cdot)$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien et $P_{X^u(t)} = P \circ [X^u(t)]^{-1}$désigne la loi du hasard variable $X^u$, $T$ un nombre réel strictement positif et $u(\cdot)$ est un contrôle continu-singulier. Les coefficients $f$, $\sigma$, $\ell$, et $h$ reçoivent des fonctions déterministes.

Les équations différentielles stochastiques de type McKean-Vlasov sont les équations différentielles stochastiques d'Itô, où les coefficients de l'équation d'état dépendent de l'état du processus de résolution ainsi que de sa loi de probabilité.

Les problèmes de contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques (EDS) de type McKean-Vlasov ont été étudiés par de nombreux auteurs ; voir, par exemple [1, 3, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Dans ce mémoire, nous établissons des conditions générales pour le problème de contrôle optimal de McKean-Vlasov. La dérivée par rapport aux mesures de probabilité dans l'espace de Wasserstein et la formule d'Itô associée sont appliquées pour dériver nos résultats

Notre problème de optimal est fortement motivé par l'étude récente des jeux à champ moyen et joue un rôle important dans différents domaines de l'économie, de la finance et de la physique, [3, 2].

Notre travail se distingue des précédents par les aspects suivants : Premièrement, nous étudions le système non linéaire contrôlé plus général de type McKean-Vlasov, où les coefficients de l'équation dépendent de l'état du processus de résolution $X^u$ ainsi que de ses mesures de probabilité $P_{X^u(t)}$. Deuxièmement, nous appliquons les dérivées du premier et du second ordre par rapport aux mesures de probabilité pour établir nos conditions d'optimalité nécessaires de type Peng. Troisièmement, nous étudions le problème général de contrôle, où le domaine de contrôle n'est pas supposé être convexe. Quatrièmement, la dérivée du second ordre par rapport aux mesures de probabilité dans l'espace de Wasserstein est appliquée pour établir notre résultat sans conditions de convexité. Notre problème de contrôle McKean-Vlasov apparaît naturellement dans l'analyse probabiliste des problèmes d'optimisation financière. De plus, les approches mathématiques McKean-Vlasov ci-dessus jouent un rôle important dans différents domaines de l'économie, de la finance, de la physique, de la chimie et de la théorie des jeux.

L'objectif principal de ce mémoire est de prouver les conditions nécessaires générales de McKean-Vlasov du contrôle optimal sans l'hypothèse de convexité. Cette étude est basé sur le travail de Guenane et al. [3].

Nous présentons notre travail comme suite : Le premier chapitre, nous faisons un bref rappel sur quelques généralites de calcul stochastique. Le deuxième chapitre dans ce chapitre nous donnons la formulation des dérivées du premier et du second ordre par rapport à la mesure de probabilité et les notations de base. Et dans le dernier chapitre nous donnons la formulation du problème de contrôle et en fin nous démontrons notre résultat principal.

# Chapitre 1

# Rappel sur le calcul stochastique

## 1.1 Généralités.

Dans ce chapitre on dans quelques généralites de calcul stochastique.

**Définition 1.1.1** *(**Processus stochastique**). Soit $T$ un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par $T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}^d$, $B(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $t \in T$, $X_t$ est une variable aléatoire.*

**Définition 1.1.2** *(**Filtration**). Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-'a-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \geq s$.*

**Définition 1.1.3** *(**Processus mesurable**). Un processus $X$ est dit mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

**Définition 1.1.4** *(**Progressivement mesurable**). Un processus $X$ est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$*

*de* $[0,t]\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $B([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ *et* $B(\mathbb{R}^d)$.

**Remarque 1.1.1** *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

**Définition 1.1.5** ***(Processus adapté).*** *Un processus stochastique* $X=(X_t,t\geq 0)$ *est dit adapté par rapport à une flltration* $\mathcal{F}_t$ *(ou bien* $\mathcal{F}_t$*-adapté) si* $X_t$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t$.

### 1.1.1 Mouvement Brownien.

**Définition 1.1.6** ***(Mouvement Brownien ).*** *On appelle un mouvement Brownien standard tout processus stochastique* $W_t$ *à valeurs réelles tel que :*

1. $\mathbb{P}-p.s.$ $t\longmapsto W_t(\omega)$ *est continue.*
2. *Pour* $0\leq s<t$, $W_t-W_s$ *est indépendant de la tribu* $\sigma\{W_u,u\leq s\}$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $t-s$ *.*
3. $W_0=0$, $\mathbb{P}-p.s.$

Pour tout $t>0$, la variable aléatoire $W_t$ suite la loi gaussienne centrée de variance $t$ donc de densité $(2\pi t)^{-1/2}exp\{-x^2/(2t)\}$. On dit qu'un mouvement Brownien (MB dans la suite) part d'un point $x$ si $W_0=x$.

**Remarque 1.1.2** *On dit que* $W$ *est un* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*–MB si* $W$ *est un processus continu, adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, *vérifiant*

$$\forall u\in\mathbb{R},\forall 0\leq s\leq t,\mathbb{E}\left[e^{iu(W_t-W_s)}/\mathcal{F}_s\right]=exp^{-u^2(t-s)/2}.$$

**Proposition 1.1.1** *Soit* $W$ *un* $MB$ *standard.*

1. Pour tout $s>0$, $\{W_t+s-W_s\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W_u,u\leq s\}$.

2. $-W$ est aussi un $MB$ .

3. Pour tout $c > 0$, $\{cW_t/c^2\}_{t\geq 0}$ est un $MB$.

4. Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ est un $MB$.

**Martingales.**

**Définition 1.1.7** ***(Martingale)****. Un processus $X$ à valeurs réelles est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si :*

1. *Pour tout $t \geq 0$, $X_t$ est $\mathcal{F}_t$–mesurable.*

2. *Pour tout $t \geq 0$, $X_t$- est intégrable.*

3. *Pour*

$$0 \leq s \leq t, \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

**Remarque 1.1.3** *Si $W$ est un MB, alors $\left\{W_{t^2} - t\right\}_{t\geq 0}$ et $\left\{exp\left(\sigma W_t - \sigma^2 t/_2\right)\right\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.*

### 1.1.2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit $X$ une variable aléatoire réelle ( v.a.r), (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $G$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left[X \backslash G\right]$ de $X$ quand $G$ est l'unique variable aléatoire telle que :

**a)** $G$-mesurable.

**b)**

$$\int_A \mathbb{E}\left[X \mid G\right] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}; \forall A \in G.$$

### 1.1.3 Propriétés de l'espérance conditionnelle

**a)** Linéarité. Soit $a$ et $b$ deux constantes.

$$\mathbb{E}\left[(aX+bY \mid G)\right] = a\mathbb{E}\left[X \mid G\right] + b\mathbb{E}\left[Y \mid G\right].$$

**b)** Croissance. Soit $X$ et $Y$ deux (v. a) telles que $X \leq Y$. Alors :

$$\mathbb{E}\left[X \mid G\right] \leq \mathbb{E}\left[Y \mid G\right].$$

**c)**

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid G\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

**d)** Si $X$ est $G$-mesurable,

$$\mathbb{E}\left[X \mid G\right] = X.$$

**e)** Si $Y$ est $G$-mesurable,

$$\mathbb{E}\left[XY \mid G\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid G\right].$$

**f)** Si $X$ est indépendante de $G$,

$$\mathbb{E}\left[X \mid G\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

**g)** Si $G$ est la tribu grossiére (composée de l'ensemble vide et de $\Omega$ ),

$$\mathbb{E}\left[X \mid G\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

**h)** Si $G$ et $H$ sont deux tribus telles que $H \subset G$ alors

$$\mathbb{E}\left[X \mid H\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid H\right] \mid G\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid G \mid H\right]\right].$$

On note souvent

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid H\right) \mid G\right]\right] = \mathbb{E}\left[X \mid H \mid G\right].$$

**i)** Si $(X, Y)$ sont indépendantes, et $\Phi$ une fonction borélienne bornée,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X, Y) \mid Y\right] = \left[\mathbb{E}\left[\Phi(X, y)\right]\right]_{y=Y}.$$

Cette derniére égalité signifle que, pour calculer l'espérence conditionelle $\mathbb{E}\left[\Phi(X, Y) \backslash Y\right]$ lorsque les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes, on explicite la fonction $\Psi$ telle que $\Psi(y) = \mathbb{E}\left[\Phi(X, y)\right]$, puis on remplace $y$ par $Y$ pour obtenir la (v.a) $\Psi(Y)$.

## 1.2 Intégrale de Wiener

On note $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions boréliennes $f$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est-à-dire telle que $\int_0^\infty |f(s)|^2 \, ds < 1$.

**Remarque 1.2.1** $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}_+)$ *est un espace de Hilbert pour la norme* $\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty |f|^2 \, ds\right)^{1/2}$,

Pour $f = 1_{]u,v]}$ , on pose $\int_0^\infty f(s) dWs = W(v) - W(u)$. Soit $f$ une fonction en escalier, de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} 1_{]t_{j+1}, ti]}$, on pose

$$\int_0^\infty f(s) dWs = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}(W_{t_i} W_{t_{i-1}}).$$

La variable aléatoire $I(f) = \int_0^\infty f(s) dW_s$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance égale à $\int_0^\infty f_2(s) ds$.

1. $I(f)$ est gaussienne car le processus $W$ est gaussien, aussi $I(f)$ est centrée car $W$ est centré et

$$Var(I(f)) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 Var(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_0^\infty f^{2\prime}(s)ds = \|f\|_2.$$

2. L'intégrale est linéaire :

$$I(f+g) = I(f) + I(g).$$

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions en escalier

$$E(I(f)I(g)) = \int_0^\infty f(s)g(s)ds.$$

**Théor■me 1.2.1** *Soit* $f \in L^2_{loc}$ *et* $M_t = \int_0^t f(s)dW_s$. *Alors*

**a)** Le processus $M$ est une martingale continue et la (v.a) $M_t$ est d'espérance 0 et de variance égale à

$$\int_0^t f^2(s)ds.$$

**b)** Le processus $M$ est un processus gaussien centré de covariance $\int_0^{t\hat{}s} f^2(u)du$, et à accroissements indépendants.

**c)** Le processus

$$(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds, 0 \leq t),$$

est une martingale.

**d)** Si $f$ et $g$ sont dans $\mathbb{L}^2_{loc}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t f(u)dW_u \cdot \int_0^s g(u)dW_u\right] = \int_0^{t\hat{}s} f(u)g(u)du.$$

### 1.2.1 Intégration par parties

**Théor■me 1.2.2** *Si $f$ est une fonction de classe $C^1$, donc*

$$\int_0^t f(s)dW_s = f(t)W_t - \int_0^t \acute{f}(s)W_s ds.$$

**Proposition 1.2.1** *Le processus $X_t e^{-bt}$ est une martingale.*

## 1.3 Intégrales stochastique

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et de déflnir l'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ pour des processus stochastiques $\theta$.

### 1.3.1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus $\theta$ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j$, telles que $0 \leq t_0 \leq t_1 .... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires $\theta_j$ telles que $\theta_j$ soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \, \epsilon ]t_j, t_{j+1}]$, soit

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) 1_{]t_j,t_{j+1}]}(s).$$

On déflnit alors :

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

On a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dW_s\right] = 0 et Var(\int_0^\infty \theta_s dW_s) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

On obtient

$$\int_0^t \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}).$$

**Remarque 1.3.1** *Si $T_j; 0 \leq T_0 \leq T_1 ..... \leq T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, si $\theta_s = \theta_j 1_{]T_j,T_{j+1}]}(s)$ oú $\theta_j$ est une suite de variables aléatoires telles que $\theta_j$ soit $\mathcal{F}_{T_j}$ mesurable, appartienne á $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on déflnit alors :*

$$\int_0^t \theta_s dWs = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (W_{T_{j+1}\wedge t} - W_{T_j \wedge t}).$$

### 1.3.2 Cas général

On définit les processus continus á gauche limités à droite (cáglád ) de carré intégrable appartenant à $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ comme l'ensemble $\Delta$ des processus $\theta$ adaptés cáglád , $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que

$$\|\theta\|^2 \overset{déf}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_t^2 dt\right] < \infty.$$

On dit que $\theta_n$ converge vers $\theta$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si $\|\theta - \theta^n\|^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. L'application $\theta \mapsto \|\theta\|$ déflnie une norme qui fait de $\Delta$ un espace complet. Alors on peut déflnir $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ pour tous les processus $\theta$ de $\Delta$ : on approche $\theta$ par des processus étagés, soit $\theta = \lim\limits_{n\to\infty} \theta_n$, oú $\theta_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}^n 1]t_j, t_{j+1}]$, avec $\tilde{\theta}^n \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R})$. L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ est alors la limite dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des sommes

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}^n (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}),$$

dont l'espérance est 0 et la variance

$$\mathbb{E}[\sum_j \tilde{\theta}^2(t_{j+1}-t_j)].$$

On a alors :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dW_s\right] = 0 et \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dW_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

On note $\int_0^\infty \theta_s dW_s \overset{déf}{=} \int_0^\infty \theta_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dW_s$. Si $\theta$ est étagé

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_i \theta_i (W_{t_i+1\wedge t} - W_{t_i \wedge t}).$$

Plus généralement, si $\tau$ est un temps d'arrêt, le processus $1_{]0;\tau]}(t)$ est adapté et on déflnit :

$$\int_0^{\tau\wedge t} \theta_s dW_s = \int_0^t \theta_s 1_{]0;\tau]}(s) dW_s.$$

## 1.4 Propriétés

On note par $\Gamma$ l'ensemble $\mathbb{L}^2_{loc}(\Omega\times\mathbb{R}^+)$ des processus $\theta$, adaptés, cáglád et vériflant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2(\omega) ds\right] < \infty, \forall t.$$

**1) Linéarité**.

Soit $a$ et $b$ des constantes et $(\theta_i, i=1,2)$ deux processus de $\Gamma$ on a :

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2) dW_s = a\int_0^t \theta_s^1 dW_s + b\int_0^t \theta_s^2 dW_s.$$

**2) Propriétés de martingale**

Soit $M_t = \int_0^t \theta_s dW_s$, où $\theta \in \Gamma$ alors :

**a)** Le processus $M$ est une martingale á trajectoires continues.

**b)** Soit

$$N_t = (\int_0^t \theta_s dW_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

Le processus $(N_t; 0 \leq t)$ est une martingale.

## 1.5 Processus d'Itô

Rappelons que $S^1$ désigne l'ensemble des processus intégrables, $S^2$ est l'ensemble des processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ tels que :

$$E\left(\int_0^t X^2(s)ds\right) < \infty.$$

**Définition 1.5.1** *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô s'il existe $X_0$, $Y \in S^1$ et $Z \in S^2$ tels que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_s ds + \int_0^t Z_s dW_s.$$

### 1.5.1 Propriétés

1. Si $\sigma$ appartient à $S^2$ alors on a :

**a)**

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] + \int_0^t \mathbb{E}[b_s] ds.$$

**b)**

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_0 + \int_0^s b_u du + \mathbb{E}\left[\int_s^t b_u du \mid \mathcal{F}_s\right]$$
$$+ \int_0^s \sigma_u dW_u = X_s + \mathbb{E}\left[\int_s^t b_u du \mid \mathcal{F}_s\right].$$

**2.** Si $b \equiv 0$ et $\sigma \in S^2$ le processus $X$ est une martingale continue. La réciproque est vraie, sous certaines conditions d'intégrabilité et de mesurabilité, toute martingale continue s'écrit comme suit

$$x + \int_0^t \phi_s dW_s,$$

telle que $\phi \in S^2$.

**Théor■me 1.5.1** ***(Formule d'Itô).*** *Soient $(t, x) \to f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en $x$ et une fois différentiable en $t$ et $X$ est un processus d'Itô. Alors on a la formule suivante :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X_s)ds + \int_0^t f_x(s, X_s)dX_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, Xs)d\langle X, X\rangle_s.$$

*où $f_t$, $f_x$ et $f_{xx}$ sont les dérivées partielles.*

**Exemple 1.5.1** *Soit $W_t$ un mouvement Brownien standard, et*

$$dX_t = X_t dW_t$$

*et on pose* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *; tels que :*

$$f(x) = \ln(x).$$

*On a donc*

$$f_t(X_t) = 0, \quad f_x(X_t) = \frac{1}{X_t}, \quad f_{xx}(X_t) = -\frac{1}{X_t^2}.$$

*D'après la formule d'Itô :*

$$\ln(X_t) = \ln(X_0) + \int_0^t 0ds + \int_0^t \frac{1}{X_t}dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{X_t^2}d\langle X, X\rangle_s.$$

$$\ln(X_t) = \ln(X_0) + \int_0^t \frac{1}{X_s}X_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{X_s^2}d\langle XdW, XdW\rangle_s.$$
$$\ln(X_t) = \ln(X_0) + \int_0^t dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t ds.$$
$$\ln(X_t) = \ln(X_0) + W_t - \frac{1}{2}t$$

*Alors*

$$X_t = X_0 \exp(W_t - \frac{1}{2}t).$$

## 1.6 Équations différentielles stochastiques (EDSs)

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilit filtré.

**Définition 1.6.1** *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = u(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

*où*

$X_0$ *est de* $\mathbb{R}^n$.

$W_t$ *est un mouvement Brownien.*

$u(t,X_t)$ *et* $\sigma(t,X_t)$ *sont des fonctions continues.*

**Définition 1.6.2** *Une solution forte de l'EDS 1.1 est un processus* $X=(X_t)_{t\in[0,T]}$ *continu,* $\mathcal{F}_t-$*adapté, et tel que :*

$$\begin{cases} \int_0^t \left(|u(s,X)|^2+|\sigma(s,X)|^2\right) ds<\infty. \\ X \text{ vérifie 1.1.} \end{cases}$$

### 1.6.1 Conditions d'existence et d'unicité d'une solution forte

On rappelle que $\mathbb{L}^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurables $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$E(|X|^p)<\infty, \quad (p\geq 1)$$

**Théor■me 1.6.1** *Si les fonctions* $u(t,X(.))$ *et* $\sigma(t,X(.))$ *sont Lipchitziennes, c'est à dire qu'il existe* $M>0$ *tel que :*

$$\begin{cases} |u(t,x(.))-u(t,y(.))|\leq M\,|x(.)-y(.)|\,, \\ |\sigma(t,x(.))-\sigma(t,y(.))|\leq M\,|x(.)-y(.)|\,, \end{cases}$$

*et si de plus*

$$|u(t,X(.))|+|\sigma(t,X(.))|\in L^2([0,T];\mathbb{R}),$$

*alors pour tout* $X_0 \in \mathbb{L}^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$*, il existe une solution fort* $X$ *de 1.1 qui vérifie :*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T}|X_s|^p\right) \leq L_t\left(1+\mathbb{E}\left(|X_0|^p\right)\right), \\ \mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^p\right) \leq L_t\left(1+\mathbb{E}\left(|X_0|^p\right)\right)|t-s|^{\frac{p}{2}}, \end{cases}$$

$\forall s,t \in [0,T],\ L_T \in \mathbb{R}^*_+$*.D'autre part on suppose qu'il existe* $\widehat{X}$ *une autre solution de 1.1, et tel que* $\widehat{X}_0 \in \mathbb{L}^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega;\mathbb{R}^n)$*.*

*Alors pour tout* $T>0$*, il existe* $L_T>0$ *tel que :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s - \widehat{X}_s\right|^p\right) \leq L_t\left(1+\mathbb{E}\left(\left|X_0 - \widehat{X}_0\right|^p\right)\right),$$

*Pour la démonstration de ce théorème, voir (Yong et Zhou,1999).*

### 1.6.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades (ED-SRs)

les équations différentielles stochastiques rétrogrades (car la valeur terminale de la fonction inconnue est donnée), sont introduites par Bsmut (1973) dans le cas linéaire et par Pardoux et Peng (1990) dan le cas général, en abrégé EDSR, apparaissent dans de nombreux problèmes en finance.

Selon les auteurs sus-cités, une solution d'un EDSR, est un couble de processus adaptés $(Y;Z)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t,Y_t,Z_t)dt + Z'_t dW_t, \\ Y_t = \xi, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $Z'$ est la transposée de $Z$.

**Théor■me 1.6.2** *On suppose que :*

– $f$ *est uniformément Lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe* $C > 0$ *tel que* $\forall (y_1, z_1)$ *et* $\forall (y_2, z_2)$

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$$

– $f(., 0, 0)$ *est de caré integrable, c'est à dire :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t |f(., 0, 0)|^2 \, dt\right) < \infty.$$

– $\xi \in \mathbb{L}^p_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, *c-à-d* $\mathbb{E}(\,|\xi|^2\,) < \infty$.

*alors, il existe une paire de processus adapté* $(Y; Z)$ *qui satisfait l'EDSR 1.2.*

# Chapitre 2

# Différentiabilité par rapport à une mesure de probabilité

## 2.1 Les notations et la différentiabilité par mesure

Nous rappelons maintenant brièvement une notion importante dans les problèmes de contrôle de McKean-Vlasov : La dérivabilité par rapport aux mesures de probabilité, dans l'espace de Wasserstein qui a été introduite par Lions.[13] L'idée principale est d'identifier une distribution $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^n)$ avec une variable aléatoire $X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ pour que $\mu = P_X$ On suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est suffisamment riche en ce sens que pour chaque $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^n)$ , il existe une variable aléatoire $X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ tel que $\mu = P_X$. On suppose qu'il existe un sous-$\sigma$-champ $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}_0$ est suffisamment riche, c'est-à-dire,

$$Q_2(\mathbb{R}^n) \triangleq \left\{ P_X : X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0, \mathbb{R}^n) \right\}. \tag{2.1}$$

Par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, on note la filtration générée par $W(\cdot)$, complété et augmenté par $\mathcal{F}_0$.Ensuite, pour toute fonction $g : Q_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, on définit une fonction $\widetilde{g} : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tel que

$$\widetilde{g}(X) = g(P_X), \quad X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n).$$

Clairement, la fonction $\tilde{g}$, appelé lift de $g$, ne dépend que de la loi de $X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ et est indépendant du choix du représentant $X$ (voir Buckdahn et al [1, 3]).

**Définition 2.1.1** *Une fonction $g : Q_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est dit différentiable en une distribution $\mu_0 \in Q_2(\mathbb{R}^n)$ s'il existe $X_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$, avec $\mu_0 = P_{X_0}$ el que sa portance $\tilde{g}$ soit différentiable de Fréchet en $X_0$. Plus précisément, il existe une fonctionnelle linéaire continue $D\widetilde{g}(X_0) : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X_0 + \zeta) - \tilde{g}(X0) &= \langle D\widetilde{g}(X_0).\zeta\rangle + o(\|\zeta\|_2) \\ &= D_\zeta g(\mu_0) + o(\|\zeta\|_2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

*où $\langle .,. \rangle$ est le produit dual sur $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$.Nous avons appelé $D_\zeta g(\mu_0)$ la dérivée de Fréchet de $g$ en $\mu_0$ dans la direction $\xi$. Dans ce cas, nous avons*

$$\mathcal{D}_\zeta g(\mu_0) = \langle D\widetilde{g}(X_0).\zeta\rangle = \frac{d}{dt}\tilde{g}(X_0 + t\zeta)\mid_{t=0}, \ \textit{avec}\ \mu_0 = P_{X_0}.$$

En appliquant le théorème de représentation de Riesz, il existe une variable aléatoire unique $\Theta_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ tel que $\langle D\widetilde{g}(X_0).\zeta\rangle = (\Theta_0.\zeta)_2 = E[(\Theta_0.\zeta)_2]$ où $\zeta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$. Il a été montré (voir études précédentes, [1], [**?**]) qu'il existe une fonction de Boral $\Phi[\mu_0](.) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dépendant uniquement de la loi $\mu_0 = P_{X_0}$

mais pas du choix particulier du représentant $X_0$ tel que

$$\Theta_0 = \Phi[\mu_0](X_0). \tag{2.3}$$

Ainsi, on peut écrire 2.2 comme

$$g(P_X) - g(P_{X_0}) = (\Phi[\mu_0](X_0).X - X_0)_2 + o(\|X - X_0\|_2),$$
$$\forall X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n).$$

On note

$$\partial_\mu g(P_{X_0}, x) = \Phi[\mu_0](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, on a les identités suivantes :

$$D\widetilde{g}(X_0) = \Theta_0 = \Phi[\mu_0](X_0) = \partial_\mu g(P_{X_0}, X_0) \tag{2.4}$$

et

$$D_\xi g(P_{X_0}) = \langle \partial_\mu g(P_{X_0}, X_0).\zeta \rangle, \tag{2.5}$$

où $\zeta = X - X_0$.

**Remarque 2.1.1** *Pour chaque $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^n)$, $\partial_\mu g(P_X, .) = \Phi[P_X](.)$ n'est défini que dans un $P_X(dx) - a.e$ où $\mu = P_X$.*

Parmi les différentes notions de dérivabilité d'une fonction $g$ définie sur $Q_2(\mathbb{R}^n)$, nous appliquons pour notre problème de contrôle qui est introduit par Lions [13] et révisé dans les notes de Cardaliaguet, [4] nous renvoyons le lecteur à Buckdahn et al [1].

**Définition 2.1.2** *On dit que la fonction $g \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^n))$ si pour tout $X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ il existe un $P_X$-modification de $\partial_\mu g(P_X, .)$ (désigné par $\partial_\mu g$) tel que $\partial_\mu g : Q_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bornée et Lipschitz-continue. C'est-à-dire que pour un certain $C > 0$, il est vrai que*

(1) $|\partial_\mu g(\mu, x)| \leq C, \forall \mu \in Q_2(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(2) $|\partial_\mu g(\mu, x) - \partial_\mu g(\mu', x')| \leq C \left[\mathbb{T}(\mu, \mu') + |x - x'|\right], \forall \mu, \mu' \in Q_2(\mathbb{R}^n), \forall x, x' \in \mathbb{R}^n$.

Notant que si $g \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^n))$ la version de $\partial_\mu g(P_X, .), X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ indiqué dans la Définition 2.1.2 est unique [1] On notera par $\partial_\mu g(t, x, \mu_0)$ la dérivée par rapport à $\mu$ calculée à $\mu_0$ lorsque toutes les autres variables $(t, x)$ sont maintenues fixes.

Dérivées du second ordre par rapport à la loi de probabilité : Nous présentons les dérivées du second ordre par rapport à la mesure de la probabilité.

Soit $g \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^n))$ et considérer la cartographie $(\partial_\mu g(., .)_1, \partial_\mu g(., .)_2, \ldots, \partial_\mu g(., .)_n)^T : Q_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

**Définition 2.1.3** *On dit que la fonction $g \in \mathbb{C}_b^{2,1}(Q_2(\mathbb{R}^n))$ si $g \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^n))$ tel que $\partial_\mu g(., x) : Q_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$*

(1) $\partial_\mu g(., y) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^n)), \forall y \in \mathbb{R}^n$ et $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

(2) $\partial_\mu g(\mu, .) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dérivable pour tout $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^n)$.

(3) Les cartes $\partial_x \partial_\mu g(., .) : Q_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ et $\partial_\mu^2 g(P_{X_0}, y, Z) : Q_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ sont bornés et Lipshitz-continus, où

$$\partial_\mu^2 g(P_{X_0}, y, Z) = \partial_\mu[\partial_\mu g(., y)](P_{X_0}, Z).$$

Développement de Taylor du second ordre : Maintenant, nous donnons un développement de Taylor du second ordre qui joue un rôle essentiel pour établir notre principe du maximum. Soit $g \in \mathbb{C}_b^{2,1}(Q_2(\mathbb{R}^n))$ pour $j \in \{1,2,...,n\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& D\widetilde{g}_j(X_0) - D\widetilde{g}_j(X_0-\xi) \\
& = [\partial_\mu g]_j(P_{X_0}, X_0) - [\partial_\mu g]_j(P_{X_0-\xi}, X_0-\xi) \\
& = [\partial_\mu g]_j(P_{X_0}, X_0) - [\partial_\mu g]_j(P_{X_0-\xi}, Z) \mid_{Z=X_0-\xi} \\
& \quad + [\partial_\mu g]_j(P_{X_0}, Z) \mid_{Z=X_0} - [\partial_\mu g]_j(P_{X_0}, Z) \mid_{Z=X_0-\xi} \\
& = \int_0^1 \left\langle D\widetilde{[\partial_\mu g]}_j(X_0+\theta\xi, Z).\xi \right\rangle d\theta \mid_{Z=X_0} \\
& \quad + (\partial_x[\partial_\mu g]_j(P_{X_0}, X_0), \xi) + o(\|\xi\|_2);
\end{aligned} \tag{2.6}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}
D\widetilde{[\partial_\mu g]}_j(X_0, y) &= \partial_\mu[[\partial_\mu g]_j(.,y)](P_{X_0}, X_0) \\
&= \left[\partial_\mu^2 g\right]_j (P_{X_0}, y, Z) \mid_{Z=X_0} .
\end{aligned}$$

*Dérivées de second ordre de f à une mesure* $\mu_0$. Soit $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$ une copie de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Pour tout couple de variables aléatoires $(Z,\xi) \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$, on laisse $(\widehat{Z}, \widehat{\xi})$ une copie indépendante de $(Z,\xi)$ définie sur $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$.

On considère l'espace de probabilité du produit $(\Omega \times \widehat{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \widehat{\mathcal{F}}, P \otimes \widehat{P})$ et en posant $(\widehat{Z}, \widehat{\xi})(w, \widehat{w}) = (Z(\widehat{w}), \xi(\widehat{w}))$ pour tout $(w, \widehat{w}) \in \Omega \times \widehat{\Omega}$.

Soit $(\widehat{u^*}(t), \widehat{X^*}(t))$ une copie indépendante de $(u^*(t), X^*(t))$ de sorte que $P_{X^*(t)} = \widehat{P}_{\widehat{X^*}(t)}$.

On note $\widehat{E}$ l'attente sous la mesure de probabilité $\widehat{P}$.

**Remarque 2.1.2** *L'attente* $\widehat{E}(.)$ *n'agit que sur des variables aléatoires marquées d'un "$\widehat{...}$", où* $\widehat{E}(X) = \int_{\widehat{\Omega}} X(\widehat{w}) d\widehat{P}(\widehat{w})$.

Maintenant, pour tout $\mu_0 \in Q_2(\mathbb{R}^n)$, dans la direction $\xi$, on définit les dérivées secondes d'une fonction $g$ en $\mu_0$ avec $\mu_0 = P_{X_0}$

$$
\begin{aligned}
D_\xi^2 g(\mu_0) = &\left\langle \left\langle D\widetilde{[\partial_\mu g]}_j(.,y)(P_{X_0}, Z)\mid_{Z=\widehat{X}_0} .\widehat{\xi} \right\rangle \mid_{y=\widehat{X}_0}, \xi \right\rangle \\
&+ \langle (\partial_y \partial_\mu g)(P_{X_0}, X_0)\xi.\xi\rangle, \\
&= E[\widehat{E}[tr(\partial_\mu^2 g(P_{X_0}, X_0, \widehat{X}_0)\widehat{\xi} \otimes \xi)]] \\
&+ E[tr(\partial_y \partial_\mu g(P_{X_0}, X_0)\xi \otimes \xi)],
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

où

$$
\begin{aligned}
&\widehat{E}[tr(\partial_\mu^2 g(P_{X_0}, X_0, \widehat{X}_0)\widehat{\xi} \otimes \xi)] \\
&= \int_{\widehat{\Omega}} tr[\partial_\mu^2 g(P_{X_0}, X_0(w), \widehat{X}_0(\widehat{w}))\widehat{\xi} \otimes \xi(w, \widehat{w})] d\widehat{P}(\widehat{w}),
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&E[\widehat{E}[tr[\partial_\mu^2 g(P_{X_0}, X_0, \widehat{X}_0)\widehat{\xi} \otimes \xi]]] \\
&= \int_{\widehat{\Omega}} \int_{\widehat{\Omega}} tr[\partial_\mu^2 g(P_{X_0}, X_0(w), \widehat{X}_0(\widehat{w}))\widehat{\xi} \otimes \xi(w, \widehat{w})] d(P \otimes \widehat{P})(w, \widehat{w}).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Pour des raisons pratiques, nous utiliserons les notations suivantes tout au long de travail pour $\varphi = f, \sigma, \ell$, et $h$ :

$$
\begin{aligned}
&\delta\varphi(t) = \varphi(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t)) - \varphi(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u(t)); \\
&\varphi_x(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t)); \\
&\widehat{\varphi}_\mu(t) = \partial_\mu \varphi(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t); \widehat{X^*}(t)), \\
&\widehat{\varphi}_\mu^*(t) = \partial_\mu \varphi(t, \widehat{X^*}(t), P_{X^*(t)}, \widehat{u^*}(t); X^*(t));
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

et de même, nous désignons les processus dérivés du second-ordre comme suit :

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx}(t) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t)), \\
\widehat{\varphi}_{\mu\mu}(t) &= \partial^2_\mu \varphi(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t); X^*(t), \widehat{X^*}(t)), \\
\varphi_{x\mu}(t) &= \partial x \partial_\mu \varphi(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t); X^*(t)), \\
\widehat{\varphi}^*_{x\mu}(t) &= \partial x \partial_\mu \varphi(t, \widehat{X^*}(t), P_{X^*(t)}, \widehat{u^*}(t); \widehat{X^*}(t)).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

# Chapitre 3

# Principe du maximum stochastique

## 3.1 Formulation du probléme de contrôle

Formulons le problème de contrôle optimal. Soit $T$ un nombre réel fixe strictement positif et $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[s,T]}, P)$ un espace de probabilité fixe filtré satisfaisant les conditions usuelles dans lesquelles le mouvement brownien unidimensionnel $W(t) = \{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$ et $W(0) = 0$ est défini. Nous étudions un problème général de contrôle stochastique piloté par une équation différentielle stochastique de type McKean-Vlasov de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX^u(t) = f(t, X^u(t), P_{X^u(t)}, u(t)) + \sigma(t, X^u(t), P_{X^u(t)}, u(t))dW(t) \\ X^u(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

Les critères à minimiser sur la classe des contrôles admissibles ont la forme

$$J(u(\cdot)) = E\int_0^t f\left(t, X^u(t), P_{X^u(t)}, u(t)\right) dt + h(X^u(T), P_{X^u(T)}). \tag{3.2}$$

On considère les ensembles suivants :

– $\mathbb{U}$ : est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$

– $\mathcal{U}$ la classe des processus mesurables et adaptés $u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{U}$.

Puisque nous intéressons au contrôle stochastique, nous donnons ici la définition précise d'un contrôle admissible

**Définition 3.1.1** *Un contrôle admissible est une $u(\cdot)$ de processus mesurables à valeurs $\mathbb{U}$, $\mathcal{F}_t$-adaptés, tels que $E\left[\sup_{t\in[0,T]} |u(t)|^2\right] < \infty$.*

On remarque que les critères à minimiser sur la classe des commandes admissibles impliquent la loi de la solution de manière non linéaire.

Tout contrôle admissible $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}([0,T])$ satisfaisant

$$J(u^*(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{V}_1([0,T])} J(u(\cdot)), \tag{3.3}$$

est appelé un contrôle optimal. Les cartes

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times Q_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times Q_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{U} \to \mathbb{M}^{n\times d}(\mathbb{R})$$

$$\ell : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times Q_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$$

$$h : \mathbb{R}^n \times Q_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

sont données des fonctions déterministes, où $Q_2(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Wasserstein des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ avec un second moment fini, soit, $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \mu(dx) < \infty$, muni de la métrique 2-Wasserstein suivante : pour $\mu_1, \mu_2 \in Q_2(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{T}(\mu_1, \mu_2) = \inf \left\{ \left[ \int_{\mathbb{R}^{2n}} |x-y|^2 \rho(dx, dy) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \right\} \tag{3.4}$$

$$\rho \in Q_2(\mathbb{R}^{2n}), \rho(\cdot, \mathbb{R}^n) = \mu_1, \rho(\mathbb{R}^n, \cdot) = \mu_2.$$

**Remarque 3.1.1** *Afin de ne pas trop compliquer la présentation déjà lourde de notation de ce travail, dans ce qui suit, nous supposerons que tous les processus sont unidimensionnels* $(i.e., n = d = m = 1)$.

On définit une métrique $d_1(\cdot, \cdot)$ sur l'espace des contrôles admissibles $\mathcal{V}_1([0, T])$ tel que $(\mathcal{V}_1([0, T]), d_1)$ devient un espace métrique complet. Pour toute $u(\cdot)$ et $v(\cdot) \in \mathcal{U}([0, T])$ nous fixons

$$d(u(\cdot), v(\cdot)) = P \otimes dt \left\{ (w, t) \in \Omega \times [0, T] : u(w, t) \neq v(w, t) \right\}, \tag{3.5}$$

où $P \otimes dt$ est la mesure du produit de $P$ par la mesure de Lebesgue $dt$ sur $[0, T]$. De plus, il a été montré dans le livre de Yong & Zhou [14] pp. $146 - 147$) que $(\mathcal{U}([0, T]), d)$ est un espace métrique complet.

*Hypothèses.* Nous prendrons toujours les hypothèses suivantes dans ce travail.

**Hypothèse (H1).** Les coefficients $f, \sigma, \ell$, et $h$ sont mesurables dans toutes les variables. De plus, pour tout $u(t) \in \mathbb{U}$, $f(\cdot, \cdot, u)$, $\sigma(\cdot, \cdot, u)$, $\ell(\cdot, \cdot, u) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}^d); \mathbb{R})$. Plus précisément, pour chaque $u(t) \in \mathbb{U}$, désignant $\varphi(x, \mu) = f(t, x, \mu, u)$, $\sigma(t, x, \mu, u)$, $f(t, x, \mu, u)$, $h(x, \mu)$, la fonction $\varphi(\cdot, \cdot)$ jouit des propriétés suivantes :

(1) Pour fixé $\mu \in Q_2(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot, \mu)$ continûment dérivable par rapport à $x$.

(2) Pour fixé $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}))$.

(3) Toutes les dérivées $\partial_x \varphi$ et $\partial_\mu \varphi$ : $\varphi = f, \sigma, \ell, h$, sont bornées et Lipschitz-continues, avec des constantes Lipschitz indépendantes de $u(t)$.

**Hypothèse (H2).** Les coefficients $f, \sigma, \ell$, et $h$ satisfont l'hypothèse 3.1. De plus, pour tout $u(t) \in \mathbb{U}$, $f(t, \cdot, \cdot, u)$, $\sigma(t, \cdot, \cdot, u)$, $\ell(t, \cdot, \cdot, u) \in \mathbb{C}_b^{2,1}(\mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}); \mathbb{R})$, $h(\cdot, \cdot) \in \mathbb{C}_b^{2,1}(\mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}); \mathbb{R})$. Plus précisément, pour chaque $u(t) \in \mathbb{U}$, les dérivés de $f, \sigma, \ell$, et $h$, dénoté par une fonction générique $\varphi(t, x, \mu)$, profitez des propriétés suivantes :

(1) $\partial_x \varphi(t, \cdot, \cdot) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}))$.

(2) $\partial_\mu \varphi(t, \cdot, \cdot) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$.

(3) Toutes les dérivées du second ordre de $f, \sigma, \ell$, et $h$ sont bornées et Lipschitz-continues, avec des constantes Lipschitz indépendantes de $u(t)$.

Sous les hypothèses 3.1, pour chaque $u(\cdot) \in \mathcal{U}([0, T])$ , L'équation 3.1 a une unique solution forte $X^u(\cdot)$ donnée par

$$\begin{aligned} X^u(t) = x_0 &+ \int_0^t f(r, X^u(r), P_{X^u(r)}, u(r))dr \\ &+ \int_0^t \sigma(r, X^u(r), P_{X^u(r)}, u(r))dW(r), \end{aligned}$$

tel que $E[\sup_{t \in [0,T]} |X^u(t)|^n] < C_n$, où $C_n$ est une constante dépendant uniquement de $n$ et la fonctionnelle $J(\cdot)$ est bien définie. Notée $X^*(\cdot) = X^{u^*}(\cdot)$.

Enfin, nous définissons pour $t \in [0, T]$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{xx}(t, \varphi, \boldsymbol{z}) &= \frac{1}{2} \partial_{xx} \varphi(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t)) \boldsymbol{z}^2, \\ \mathcal{L}_{y\mu}(t, \widehat{\varphi}, \boldsymbol{z}) &= \frac{1}{2} \partial_y \partial_\mu \varphi(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t); \widehat{X^*}) \boldsymbol{z}^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

*L'Hamiltonien.*Définissons l'hamiltonien associé à notre problème de contrôle.

Pour toute $(t, x, \mu, u, p, q) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$H(t, x, \mu, u, p, q) = f(t, x, \mu, u)p + \sigma(t, x, \mu, u)q - \ell(t, x, \mu, u), \tag{3.7}$$

où $(p(\cdot), q(\cdot))$ est une paire de processus adaptés, solution de l'équation adjointe du premier ordre.

On note

$$H(t) = H(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t), p(t), q(t)). \tag{3.8}$$

Nous définissons

$$\begin{aligned} \delta H(t) &= \delta f(t)p_t + \delta\sigma(t); q_t - \delta\ell(t); \\ H_x(t) &= f_x(t)p(t) + \sigma_x(t)q(t) - \partial_x \ell(t); \\ H_{xx}(t) &= f_{xx}(t)p(t) + \sigma_{xx}(t) \otimes q(t) - \ell_{xx}(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous introduisons les équations adjointes impliquées dans le principe du maximum stochastique pour notre problème de contrôle.

*Équation adjointe du premier-ordre.* Nous considérons l'équation adjointe du premier-ordre, qui est la EDSR linéaire McKean-Vlasov suivante :

$$\begin{cases} -dp(t) = \Big[ f_x(t)p(t) + \widehat{E}[\widehat{f}^*_\mu(t)(t)\widehat{p}(t)] + \sigma_x(t)q(t) + \widehat{E}[\widehat{\sigma}^*_\mu(t)\widehat{q}(t)] - \ell_x(t) \\ -\widehat{E}[\widehat{\ell}^*_\mu(t)(t)] \Big] \, dt - q(t)dW(t), \\ p(T) = h_x(T) + \widehat{E}[\widehat{h}^*_\mu(T)]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Ici, à partir de 2.11, $t \in [0, T]$ , pour $\varphi = f, \sigma, \ell$, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{E}[\partial_\mu \widehat{\varphi^*}(T)] &= \widehat{E}\left[\partial_\mu \varphi(t, \widehat{X}(t), P_{X^*(t)}, \widehat{u}^*(t); \boldsymbol{z})\right]\Big|_{\boldsymbol{z}=X^*(t)} \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} \partial_\mu \varphi(t, \widehat{X}(t, \widehat{w}), P_{X^*(t,w)}, \widehat{u}^*(t, \widehat{w}); X^*(t, w)) d\widehat{P}(\widehat{w}), \end{aligned} \tag{3.11}$$

et le même argument permet de montrer que

$$\begin{aligned} \widehat{E}[\partial_\mu \widehat{h}^*(T)] &= \widehat{E}\left[\partial_\mu h(\widehat{X}(T), P_{X^*(T)}; \boldsymbol{z})\right]\Big|_{\boldsymbol{z}=X^*(t)} \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} \partial_\mu h(\widehat{X}(T, \widehat{w}), P_{X(T,w)}; X^*(T, w)) d\widehat{P}(\widehat{w}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

*Équation adjointe du second-ordre.* Considérez le EDSR linéaire standard suivant :

$$\begin{cases} dP(t) = -\Big\{2\left(b_x(t) + \widehat{E}\left[\widehat{b}_\mu^*(t)\right]\right) P(t) + \left[\sigma_x(t) + \widehat{E}(\widehat{\sigma}_\mu^*(t))\right]^2 P(t) \\ \qquad\qquad +2\left(\sigma_x(t) + \widehat{E}\left[\widehat{\sigma}_\mu^*(t)\right]\right) Q(t) + \left(H_{xx}(t) + \widehat{E}\left[\widehat{H}_{\mu y}^*(t)\right]\right)\Big\} dt \\ \qquad\qquad + Q(t) dW(t), \\ P(T) = -\left(h_{xx}(T) + \widehat{E}\left[\widehat{h}_{\mu y}^*(T)\right]\right). \end{cases} \tag{3.13}$$

Comme pour 3.11 et 3.12, on a

$$\begin{aligned} \widehat{E}\left[\widehat{H}_{\mu y}^*(t)\right] &= \widehat{E}\left[\partial_\mu \partial_y H(t, \widehat{X}(t), P_{X^*(t)}, \widehat{u}^*(t), \widehat{p}(t), \widehat{q}(t); y)\right]\Big|_{y=X^*(t)} \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} \partial_\mu \partial_y H\left(t, \widehat{X}(t, \widehat{w}), P_{X^*(t)}, \widehat{u}^*(t, \widehat{w}), \widehat{p}(t), \widehat{q}(t); X^*(t)\right) d\widehat{P}(\widehat{w}). \end{aligned}$$

(2) Étant donné que les dérivés $f_x, f_\mu, \sigma_x, \sigma_\mu, \ell_x, \ell_\mu, h_x, h_\mu$ sont bornés, par hypothèse $(H1)$-(3), le McKean-Vlasov EDSR 3.10 admet un unique $\mathcal{F}_t$-adaptée

solution $(p(\cdot), q(\cdot))$ qui satisfait l'estimation suivante :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |p(t)|^2 + \int_0^t |q(t)|^2 \, dt\right] < +\infty. \tag{3.14}$$

(3) De la délimitation des dérivées première et seconde des coefficients $f, \sigma, \ell$, et $h$ par rapport à $(x, \mu)$,(voir Hypothèse (H2)), le EDSR linéaire-3.13 a une singulière $\mathcal{F}_t$-adaptée solution $(P(\cdot), Q(\cdot))$ tel que

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |P(t)|^2 + \int_0^t |Q(t)|^2 \, dt\right] < +\infty. \tag{3.15}$$

## 3.2 Principe du maximum stochastique

Le but du principe du maximum stochastique est d'établir les conditions nécessaires à l'optimalité satisfaites par un contrôle optimal. Dans cette section, nous établissons un ensemble de conditions nécessaires générales pour le contrôle optimal, où le système évolue selon les EDS contrôlées de McKean-Vlasov.

Soit $(u^*(\cdot), X^*(\cdot))$ une solution optimale du problème de contrôle de McKean-Vlasov 3.1-3.2. Nous introduisons les équations variationnelles suivantes pour notre problème de contrôle. Soit $Y^{u^\varepsilon}(\cdot)$ et $Z^\varepsilon(\cdot)$ les solutions de 3.21 et 3.17 associées à $u^*(\cdot)$, respectivement.

*Équation variationnelle du premier-ordre* : soit $E_\varepsilon = [0, \varepsilon]$,$t \in [0, T]$

$$\begin{cases} dY^{u^\varepsilon}(t) = \left[f_x(t)Y^{u^\varepsilon}(t) + \widehat{E}\left[\widehat{f}_\mu(t)\widehat{Y}^{u^\varepsilon}(t)\right] + \delta f(t) 1_{E_\varepsilon}(t)\right] dt \\ \qquad\qquad + \left[\sigma_x(t)Y^\varepsilon(t) + \widehat{E}\left[\widehat{\sigma}_\mu(t)\widehat{Y}^{u^\varepsilon}(t)\right] + \delta\sigma(t) 1_{E_\varepsilon}(t)\right] dW(t) \\ Y^{u^\varepsilon}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Ici, le processus $Y^{u^\varepsilon}(\cdot)$ est appelé processus variationnel du premier-ordre, associé à $u^\varepsilon(\cdot)$ qui dépend explicitement du contrôle singulier.

*Équation variationnelle du second ordre* :

$$\begin{cases} dZ^\varepsilon(t) = \Big[f_x(t)Z^\varepsilon(t) + \widehat{E}\Big[\widehat{f}_\mu(t)\widehat{Z}^\varepsilon(t)\Big] + \mathcal{L}_{xx}(t,\ f,\ Y^\varepsilon) + \mathcal{L}_{\mu x}\Big(t,\ \widehat{f},\ \widehat{Y}^\varepsilon\Big)\Big]\,dt \\ \qquad + \Big[\sigma_x(t)Z^\varepsilon(t) + \widehat{E}\Big[\widehat{\sigma}_\mu(t)\widehat{Z}^\varepsilon(t)\Big] + \mathcal{L}_{xx}(t,\ \sigma,\ Y^\varepsilon) + \mathcal{L}_{\mu x}\Big(t,\ \widehat{\sigma},\ \widehat{Y}^\varepsilon\Big)\Big]\,dW(t) \\ \qquad + \Big[\delta f_x(t)Y^\varepsilon(t) + \widehat{E}\Big[\delta\widehat{f}_\mu(t)\widehat{Y}^\varepsilon(t)\Big]\Big]\,1_{E_\varepsilon}(t)dt \\ \qquad + \Big[\delta\sigma_x(t)Y^\varepsilon(t) + \widehat{E}\Big[\delta\widehat{\sigma}_\mu(t)\widehat{Y}^\varepsilon(t)\Big]\Big]\,1_{E_\varepsilon}(t)dW(t), \\ Z^\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Ici, le processus $Z^\varepsilon(\cdot)$ est appelé le processus variationnel du second ordre.

Pour prouver notre résultat principal, nous avons besoin des lemmes techniques suivants :

**Lemme 3.2.1** *Soit* $X^\varepsilon(\cdot) = X^{u^\varepsilon}(\cdot)$ *les solutions de 3.1 correspondant au contrôle* $u^\varepsilon(\cdot)$*.Considérons les hypothèses (H1) et (H2). Ensuite nous avons*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left(\sup_{t\in[0,T]} |X^\varepsilon(t) - X^*(t)|^2\right) = 0.$$

**Preuve.** À partir des estimations standard et de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, nous obtenons

$$\begin{aligned} &E(\sup_{t\in[0,T]} |X^\varepsilon(s) - X^*(s)|^2) \\ &\leq E\int_0^t \left|f(s, X^\varepsilon(s), P_{X^\varepsilon(s)}, u^\varepsilon(s)) - f(s, X^*(s), P_{X^*(s)}, u^*(s))\right|^2 ds \\ &+ E\int_0^t \left|\sigma(s, X^\varepsilon(s), P_{X^\varepsilon(s)}, u^\varepsilon(s)) - \sigma(s, X^*(s), P_{X^*(s)}, u^*(s))\right| ds \end{aligned}$$

en appliquant l'hypothèse (H1) et les conditions de Lipschitz sur les coefficients $f$ et $\sigma$ par rapport à $x, \mu$, avec l'aide de 3.5, $u^\varepsilon(t,w) \neq u^*(t,w)$ on a

$$E(\sup_{0\leq t\leq T} |X^\varepsilon(t) - X^*(t)|^2) \leq C_T E \int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]} |X^\varepsilon(\tau) - X^*(\tau)|^2 \, ds + C_T \varepsilon^2,$$

en appliquant le lemme de Gronwall, le résultat recherché s'ensuit immédiatement en laissant $\varepsilon$ tendre vers zéro. ■

**Lemme 3.2.2** *Soit $X^{u^\varepsilon}(\cdot)$ la solution de 3.1, correspondant à $u^\varepsilon(\cdot)$. Soit $Y^\varepsilon(\cdot)$ la solution de 3.16,correspondant à $u^\varepsilon(\cdot)$, alors l'estimation suivante est vraie :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X^{u^\varepsilon}(t) - X^*(t)\right|^2\right] = 0. \tag{3.18}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X^\varepsilon(t) - X^{u^\varepsilon}(t)\right|^2\right] = 0. \tag{3.19}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X^{u^\varepsilon}(t) - X^*(t) - Y^\varepsilon(t)\right|^2\right] = 0. \tag{3.20}$$

**Preuve.** Soit $Y^\varepsilon(\cdot) = Y^{u^\varepsilon}(\cdot)$ le processus adjoint du premier-ordre correspondant à $u^\varepsilon(\cdot)$ défini par la EDS suivante :

$$\begin{cases} dY^\varepsilon(t) = \left[f_x(t)Y^\varepsilon(t) + \widehat{E}\left[\widehat{f}_\mu(t)\widehat{Y}^\varepsilon(t)\right] + \delta f(t) 1_{E_\varepsilon}(t)\right] dt \\ \qquad\qquad + \left[\sigma_x(t)Y^\varepsilon(t) + \widehat{E}\left[\widehat{\sigma}_\mu(t)\widehat{Y}^\varepsilon(t)\right] + \delta\sigma(t) 1_{E_\varepsilon}(t)\right] dW(t) \\ Y^\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Un calcul simple montre que

$$
\begin{aligned}
&[X^{\varepsilon}(t) - X^{*}(t)] \\
&= \int_0^t \left[ f(s, X^{u^{\varepsilon}}(s), P_{X^{u^{\varepsilon}}(s)}, u^{\varepsilon}(s)) - f(s, X^{*}(s), P_{X^{*}(s)}, u^{*}(s)) \right] ds \\
&+ \int_0^t \left[ \sigma(s, X^{u^{\varepsilon}}(s), P_{X^{u^{\varepsilon}}(s)}, u^{\varepsilon}(s)) - \sigma(s, X^{*}(s), P_{X^{*}(s)}, u^{*}(s)) \right] dW(s)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\left[X^{\varepsilon}(t) - X^{u^{\varepsilon}}(t)\right] \\
&= \int_0^t \left[ f(s, X^{\varepsilon}(s), P_{X^{\varepsilon}(s)}, u^{\varepsilon}(s)) - f(s, X^{u^{\varepsilon}}(s), P_{X^{u^{\varepsilon}}(s)}, u^{\varepsilon}(s)) \right] ds \\
&+ \int_0^t \left[ \sigma(s, X^{\varepsilon}(s), P_{X^{\varepsilon}(s)}, u^{\varepsilon}(s)) - \sigma(s, X^{u^{\varepsilon}}(s), P_{X^{u^{\varepsilon}}(s)}, u^{\varepsilon}(s)) \right] dW(s)
\end{aligned}
$$

La preuve de 3.19 découle directement de hypothèse (H1) et en appliquant le lemme de Gronwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.

Passons maintenant à l'estimation 3.20. Nous fixons $t \in [0, T]$,

$$
\beta^{\varepsilon}(t) = \left[X^{u^{\varepsilon}}(t) - X^{*}(t)\right] - Y^{\varepsilon}(t). \tag{3.22}
$$

Par des arguments standards, on peut prouver que

$$\begin{aligned}
\beta^{\varepsilon}(t) &= \int_0^1 \{(f(r, X^{\varepsilon}(r), P_{X^{\varepsilon}(r)}, u^{\varepsilon}(r)) - f(r, X^{*}(r), P_{X^{*}(r)}, u^{*}(r))) \\
&- \left(f_x(r)Y^{\varepsilon}(r) + \widehat{E}\left[\widehat{f}_{\mu}(r)\widehat{Y}^{\varepsilon}(r)\right] + \delta f(r) 1_{E_{\varepsilon}}(r)\right)\}dr \\
&+ \int_0^t \{(\sigma(r, X^{\varepsilon}(r), P_{X^{\varepsilon}(r)}, u^{\varepsilon}(r)) - \sigma(r, X^{*}(r), P_{X^{*}(r)}, u^{*}(r))) \\
&- \left(\sigma_x(r)Y^{\varepsilon}(r) + \widehat{E}\left[\widehat{\sigma}_{\mu}(r)\widehat{Y}^{\varepsilon}(r)\right] + \delta\sigma(r) 1_{E_{\varepsilon}}(r)\right)\}dW(r) \\
&= \int_0^t \left[a_1^{\varepsilon}(r) + f_x(r)\beta^{\varepsilon}(r) + \widehat{E}\left[\widehat{f}_{\mu}(r)\widehat{\beta}^{\varepsilon}(r)\right]\right] dr \\
&+ \int_0^t \left[a_2^{\varepsilon}(r) + \sigma_x(r)\beta^{\varepsilon}(r) + \widehat{E}\left[\widehat{\sigma}_{\mu}(r)\widehat{\beta}^{\varepsilon}(r)\right]\right] dW(r),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

où

$$\begin{aligned}
a_1^{\varepsilon}(r) &= (f(r, X^{\varepsilon}(r), P_{X^{\varepsilon}(r)}, u^{\varepsilon}(r)) - f(r, X^{*}(r), P_{X^{*}(r)}, u^{*}(r)) \\
&- f_x(r)\left[X^{u^{\varepsilon}}(r) - X^{*}(r)\right] - \widehat{E}\left[\widehat{f}_{\mu}(r)\left(\widehat{X}^{u^{\varepsilon}}(r) - \widehat{X}^{*}(r)\right)\right] \\
&- \delta f(t) 1_{E_{\varepsilon}}(r)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a_2^{\varepsilon}(r) &= (\sigma(r, X^{\varepsilon}(r), P_{X^{\varepsilon}(r)}, u^{\varepsilon}(r)) - \sigma(r, X^{*}(r), P_{X^{*}(r)}, u^{*}(r)) \\
&- \sigma_x(r)\left[X^{u^{\varepsilon}}(r) - X^{*}(r)\right] - \widehat{E}\left[\widehat{\sigma}_{\mu}(r)\left(\widehat{X}^{u^{\varepsilon}}(r) - \widehat{X}^{*}(r)\right)\right] \\
&- \delta\sigma(t) 1_{E_{\varepsilon}}(r).
\end{aligned}$$

Depuis

$$\delta f(t) 1_{E_{\varepsilon}}(r) = f(r, X^{*}(r), P_{X^{*}(r)}, u^{\varepsilon}(r)) - f(r, X^{*}(r), P_{X^{*}(r)}, u^{*}(r))$$

et

$$\delta\sigma(t)1_{E_\varepsilon}(r) = \sigma(r, X^*(r), P_{X^*(r)}, u^\varepsilon(r)) - \sigma(r, X^*(r), P_{X^*(r)}, u^*(r)),$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
&\int_0^t a_1^\varepsilon(r)dr \\
&= \int_0^t \{(f(r, X^\varepsilon(r), P_{X^\varepsilon(r)}, u^\varepsilon(r)) - f(r, X^*(r), P_{X^*(r)}, u^\varepsilon(r)) \\
&- f_x(r)\left[X^{u^\varepsilon}(r) - X^*(r)\right] - \widehat{E}[\widehat{f}_\mu(r)(\widehat{X}^{u^\varepsilon}(r) - \widehat{X}^*(r))]\}dr \\
&= \int_0^t \int_0^1 \{[f_x(r, X^*(r) + \lambda[X^{u^\varepsilon}(r) - X^*(r)], P_{(X^*(r)+\lambda(X^{u^\varepsilon}(r)-X^*(r)))}, u^\varepsilon(r)) - f_x(r)] \\
&\times \left[X^{u^\varepsilon}(r) - X^*(r)\right]\}d\lambda dr \qquad (3.24) \\
&+ \int_0^1 \{\widehat{E}[\widehat{f}_x(r, \widehat{X}^*(r) + \lambda[\widehat{X}^{u^\varepsilon}(r) - \widehat{X}^*(r)], P_{(\widehat{X}^*(r)+\lambda(\widehat{X}^{u^\varepsilon}(r)-\widehat{X}^*(r)))}, u^\varepsilon(r)) - \widehat{f}_x(r)] \\
&\times (\widehat{X}^{u^\varepsilon}(r) - \widehat{X}^*(r))\}d\lambda dr.
\end{aligned}$$

Le même argument permet de montrer que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t a_2^\varepsilon(r)dW(r) \\
&= \int_0^t \{(\sigma(r, X^\varepsilon(r), P_{X^\varepsilon(r)}, u^\varepsilon(r)) - \sigma(r, X^*(r), P_{X^*(r)}, u^\varepsilon(r)) \\
&- \sigma_x(r)\left[X^{u^\varepsilon}(r) - X^*(r)\right] - \widehat{E}[\widehat{\sigma}_\mu(r)(\widehat{X}^{u^\varepsilon}(r) - \widehat{X}^*(r))]\}dW(r) \\
&= \int_0^t \int_0^1 \{[\sigma_x(r, X^*(r) + \lambda[X^{u^\varepsilon}(r) - X^*(r)], P_{(X^*(r)+\lambda(X^{u^\varepsilon}(r)-X^*(r)))}, u^\varepsilon(r)) - \sigma_x(r)] \\
&\times \left[X^{u^\varepsilon}(r) - X^*(r)\right]\}d\lambda dW(r) \qquad (3.25) \\
&+ \int_0^1 \{\widehat{E}[\widehat{\sigma}_x(r, \widehat{X}^*(r) + \lambda[\widehat{X}^{u^\varepsilon}(r) - \widehat{X}^*(r)], P_{(\widehat{X}^*(r)+\lambda(\widehat{X}^{u^\varepsilon}(r)-\widehat{X}^*(r)))}, u^\varepsilon(r)) - \widehat{\sigma}_x(r)] \\
&\times (\widehat{X}^{u^\varepsilon}(r) - \widehat{X}^*(r))\}d\lambda dW(r).
\end{aligned}$$

Enfin, le résultat souhaité 3.20 s'ensuit immédiatement en combinant 3.20, 3.24, 3.25, lemme de Gronwall et l'estimation 3.18. Ceci achève la preuve du lemme 3.2.2. ■

**Proposition 3.2.1** *Soit $Y^{\varepsilon}(t)$ la solution 3.17 associée à $u^{\varepsilon}(\cdot)$. Sous l'hypothèse (H1), l'estimation suivante est vérifiée :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|X^{u^{\varepsilon}}(t)-X^{*}(t)-Y^{\varepsilon}(t)-Z^{\varepsilon}(t)\right|^{2}\right]=0. \tag{3.26}$$

**Preuve.** Depuis $\delta f(t)1_{E_{\varepsilon}}(t)=f^{\varepsilon}(t)-f^{*}(t)$ et $\delta\sigma(t)1_{E_{\varepsilon}}(t)=\sigma^{\varepsilon}(t)-\sigma(t)$ alors un simple calcul montre que

$$\begin{aligned}Y^{\varepsilon}(t)&=\int_{0}^{t}[f_{x}(s)Y^{\varepsilon}(s)+\widehat{E}[\widehat{f}_{\mu}(s)\widehat{Y}^{\varepsilon}(s)]+f^{\varepsilon}(s)-f^{*}(s)]ds\\&+\int_{0}^{t}[\sigma_{x}(s)Y^{\varepsilon}(s)+\widehat{E}[\widehat{\sigma}_{\mu}(s)\widehat{Y}^{\varepsilon}(s)]+\sigma^{\varepsilon}(t)-\sigma(t)]dW(s).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Z^{\varepsilon}(t)&=\int_{0}^{t}[f_{x}^{\varepsilon}(s)-f_{x}(s)]X_{2}^{\varepsilon}(s)+f_{x}(s)X_{2}^{\varepsilon}(s)+\frac{1}{2}f_{xx}(s)X_{1}^{\varepsilon}(s)^{2})]ds\\&+\int_{0}^{t}[\sigma_{x}^{\varepsilon}(s)-\sigma_{x}^{*}(s)]X_{2}^{\varepsilon}(s)+\sigma_{x}^{*}(s)X_{2}^{\varepsilon}(s)+\frac{1}{2}\sigma_{xx}(s)X_{1}^{\varepsilon}(s)^{2})]dW(s).\end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que $X^{u^{\varepsilon}}(t)-X^{*}(t)-Y^{\varepsilon}(t)-Z^{\varepsilon}(t)$ dépend uniquement de la composante continue du contrôle et indépendant du contrôle singulier. Le résultat suit en appliquant la même preuve que dans Buckdahn et al.[1], Proposition 5.1, page 526 Ceci achève la preuve de la proposition 4.1. ■

Le théorème suivant constitue la principale contribution de ce travail :

**Théor■me 3.2.1** *Soit $(u^{*}(\cdot),X^{*}(\cdot))$ une solution optimale du problème de contrôle de McKean-Vlasov 3.1-3.2. Supposons que les hypothèses (H1), et (H2) soient vé-*

*rifiées. Ensuite, il ya deux paires de Processus $F_t$-adaptés $(p(\cdot), q(\cdot))$ et $(P(\cdot), Q(\cdot))$ qui satisfont 3.10 et 3.13, respectivement, tels que pour tout $u(t) \in U_1$, on a*

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & H(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t), p^*(t), q^*(t)) - H(t, x^*(t), P_{X^*(t)}, u(t), p^*(t), q^*(t)) \\ & - \frac{1}{2} P(t)(\sigma(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u(t))) - \sigma(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t)))^2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$P - a.s., \quad a.e. \quad t \in [0, T].$$

**Proof de Théoreme.** Pour dériver notre résultat principal, l'approche que nous utilisons est basée sur la perturbation forte de controle optimal. "spike variation" Cette perturbation est décrite comme suit :

Soit $u^*(\cdot)$ un contrôle optimal et $u(\cdot)$ un élément arbitraire de $\mathcal{F}_t$-variable aléatoire mesurable avec des valeurs dans $\mathbb{U}_1$, que nous considérons désormais comme fixe. Nous définissons un contrôle perturbé $u^\varepsilon(t)$ comme suit. Soit $E_\varepsilon = [0, \varepsilon]$

$$u^\varepsilon(t) = \begin{cases} u(t), t \in E_\varepsilon, \\ u^*(t), t \in E_\varepsilon^c, \end{cases} \tag{3.28}$$

où $\varepsilon$ un suffisamment petit $\varepsilon > 0$.Ensuite, nous dérivons l'inégalité variationnelle (3.27) en plusieurs étapes. A partir de l'optimalité de $u^*(\cdot)$, on a

$$J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) \geq 0. \tag{3.29}$$

Maintenant,

$$J_1^\varepsilon = J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)), \tag{3.30}$$

où $J(u^{\varepsilon}(\cdot)) - J(u^{*}(\cdot)) = J_1^{\varepsilon}$ L'inégalité variationnelle sera dérivée du fait que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(J_1^{\varepsilon}) \geq 0. \tag{3.31}$$

Nous procédons à l'estimation de l'inégalité 3.31. ■

**Lemme 3.2.3** *Soit '$\mathcal{Z}(\cdot)$ est la solution unique de l'EDS suivante :*

$$\begin{cases} d\mathcal{Z}(t) = \left[f_x(t)\mathcal{Z}(t) + \widehat{E}\left[\widehat{f}_\mu(t)\widehat{\mathcal{Z}}(t)\right]\right]dt \\ \qquad\qquad + \left[\sigma_x(t)\mathcal{Z}(t) + \widehat{E}\left[\widehat{\sigma}_\mu(t)\widehat{\mathcal{Z}}(t)\right]\right]dW(t) \\ \mathcal{Z}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.32}$$

**Preuve.** Sous les hypothèses 3.1, l'équation 3.32 admet une unique solution forte $\mathcal{Z}(t)$ donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t) = & \int_0^t \left[f_x(s)\mathcal{Z}(s) + \widehat{E}\left[\widehat{f}_\mu(s)\widehat{\mathcal{Z}}(s)\right]\right]ds \\ & + \int_0^t \left[\sigma_x(s)\mathcal{Z}(s) + \widehat{E}\left[\widehat{\sigma}_\mu(s)\widehat{\mathcal{Z}}(s)\right]\right]dW(s). \end{aligned}$$

Maintenant, il s'ensuit facilement par les mêmes arguments développés dans le lemme 3.2.2, la condition 3.20 implique que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X^{u^{\varepsilon}}(t) - X^{*}(t)}{\varepsilon} - \mathcal{Z}(t)\right|^2\right] = 0. \tag{3.33}$$

Enfin, puisque les dérivées $h_x, h_\mu, \ell_x$, et $\ell_\mu$ sont continues et bornées, le résultat découle de 3.33 et en laissant $\varepsilon$ tendre vers zéro. Ceci compléte la preuve du Lemme 3.2.3. ■

**Lemme 3.2.4** *Soient $\mathcal{Z}(\cdot)$ la solution de 3.32 et $p(\cdot)$ la solution de l'équation*

*3.10.*

$$E(h_x(T)\mathcal{Z}(T)) + E(\widehat{E}(\widehat{h}^*_\mu(T)\mathcal{Z}(T)))$$
$$= -E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\ell_x(t)dt - E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\widehat{E}[\widehat{\ell}^*_\mu(t)(t)]dt. \tag{3.34}$$

**Preuve.** En appliquant la formule d'Itô à $p(t)\mathcal{Z}(t)$ et en prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned} E(p(t)\mathcal{Z}(t)) &= E\int_0^t p(t)d\mathcal{Z}(t) + E\int_0^t \mathcal{Z}(t)dp(t) \\ &+ E\int_0^t q(t)[\sigma_x(t)\mathcal{Z}(t) + \widehat{E}[\widehat{\sigma}_\mu(t)\widehat{\mathcal{Z}}(t)]]dt \\ &= I_1(T) + I_2(T) + I_3(T). \end{aligned} \tag{3.35}$$

De 3.33, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(T) &= E\int_0^t p(t)d\ \mathcal{Z}(t) \\ &= E\int_0^t p(t)[f_x(t)\mathcal{Z}(t) + \widehat{E}[\widehat{f}_\mu(t)\widehat{\mathcal{Z}}(t)]]dt \\ &= E\int_0^t p(t)f_x(t)\mathcal{Z}(t)dt + E\int_0^t p(t)\widehat{E}[\widehat{f}_\mu(t)\widehat{\mathcal{Z}}(t)]dt \end{aligned}$$

En appliquant 3.10, on a

$$\begin{aligned}
I_2(T) &= E\int_0^t \mathcal{Z}(t)dp(t) \\
&= -E\int_0^t \mathcal{Z}(t)[f_x(t)p(t) + \widehat{E}[\widehat{f_\mu^*}(t)(t)\widehat{p}(t)] + \sigma_x(t)q(t) \\
&+ \widehat{E}[\widehat{\sigma}_\mu^*(t)\widehat{q}(t)] - \ell_x(t) - \widehat{E}[\widehat{\ell_\mu^*}(t)(t)]]dt \\
&= -E\int_0^t \mathcal{Z}(t)f_x(t)p(t)dt - E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\widehat{E}[\widehat{f_\mu^*}(t)(t)\widehat{p}(t)]dt \qquad (3.36)\\
&- E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\sigma_x(t)q(t)dt - E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\widehat{E}[\widehat{\sigma}_\mu^*(t)\widehat{q}(t)]dt \\
&- E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\ell_x(t)dt - E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\widehat{E}[\widehat{\ell_\mu^*}(t)(t)]dt.
\end{aligned}$$

Par un calcul simple, on obtient

$$\begin{aligned}
I_3(T) &= E\int_0^t q(t)[\sigma_x(t)\mathcal{Z}(t) + \widehat{E}[\widehat{\sigma}_\mu(t)\widehat{\mathcal{Z}}(t)]]dt \\
&= E\int_0^t q(t)[\sigma_x(t)\mathcal{Z}(t)dt + E\int_0^t q(t)\widehat{E}[\widehat{\sigma}_\mu(t)\widehat{\mathcal{Z}}(t)]]dt. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

En combinant 3.35 à 3.37, avec un calcul direct utilisant le théorème de Fubini, nous obtenons

$$E(p(t)\mathcal{Z}(t)) = -E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\ell_x(t)dt - E\int_0^t \mathcal{Z}(t)\widehat{E}[\widehat{\ell_\mu^*}(t)(t)]dt. \qquad (3.38)$$

Enfin, le résultat découle de 3.38 et 3.10. Ceci achève la preuve du Lemme 3.2.4.

■

On procède à l'estimation du $J_1^\varepsilon$. D'après 3.30, on a

$$\begin{aligned} J_1^\varepsilon &= [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))] \\ &= E\left[h(X^{u^\varepsilon}(T), P_{X^{u^\varepsilon}(T)}) - h(X^*(T), P_{X^*(T)})\right] \\ &+ E\int_0^t \left[\ell(t, X^{u^\varepsilon}(t), P_{X^{u^\varepsilon}(t)}, u^\varepsilon(t)) - \ell(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t))\right] dt. \end{aligned} \tag{3.39}$$

En notant que $J_1^\varepsilon$ est indépendant du composant singulier du contrôle. En appliquant la preuve similaire à celle de Buckdahn et al [1], Équation (6.5) à l'aide de la proposition 3.2.1 et puisque $J(u^*) \leq J(u^\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} J_1^\varepsilon &= J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) \\ &= -E[\int_0^t (H(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u, p^*(t), q^*(t)) \\ &- H(t, x^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t), p^*(t), q^*(t)) \\ &+ \frac{1}{2}P_t(\delta\sigma(t))^2] 1_{E_\varepsilon}(t) dt + o(\varepsilon) \\ &= -E\int_0^t \left(\delta H(t) + \frac{1}{2}P_t(\delta\sigma(t))^2\right) 1_{E_\varepsilon}(t) dt + o(\varepsilon) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

où $o(\varepsilon) = C_\varepsilon \rho(\varepsilon)$ et $\rho(\varepsilon) \to 0$ comme $\varepsilon \to 0$. En laissant $\varepsilon$ tendre vers zéro dans 3.40, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J_1^\varepsilon}{\varepsilon} &= -E\int_0^t \left(\delta H(t) + \frac{1}{2}P_t(\delta\sigma(t))^2\right) dt \\ &= -E\int_0^t [(H(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u(t), p^*(t), q^*(t)) \\ &- H(t, x^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t), p^*(t), q^*(t)) \\ &+ \frac{1}{2}P(t)(\sigma(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u(t))) - \sigma(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t))^2] dt. \end{aligned} \tag{3.41}$$

De 3.31 et 3.41, on obtient

$$\begin{aligned}
0 \leq E \int_0^t & [(H(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t), p^*(t), q^*(t)) \\
& - H(t, x^*(t), P_{X^*(t)}, u(t), p^*(t), q^*(t)) \\
& - \frac{1}{2} P(t)(\sigma(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u(t))) \\
& - \sigma(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t))^2] dt.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Enfin, en appliquant le théorème de différenciation de Lebesgue à 3.41, on déduit de 3.42 que pour tout $u(t) \in \mathbb{U}$, a.e., $t \in [0, T]$, $P$-presque sûrement,

$$\begin{aligned}
& H(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t), p^*(t), q^*(t)) - H(t, x^*(t), P_{X^*(t)}, u(t), p^*(t), q^*(t)) \\
& - \frac{1}{2} P(t)(\sigma(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u(t))) - \sigma(t, X^*(t), P_{X^*(t)}, u^*(t))^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Ceci compléte la preuve du théorème 3.2.1.

# Conclusion

Dans ce mémoire de fin d'étude de master, le principe du maximum stochastique général pour l'équation différentielle stochastique contrôlée non linéaire de type McKean-Vlasov a été prouvé. Ces resultats ont été développés dans Buckdahn et al.[1] "Buckdahn R, Li J, Ma J.A. Stochastic maximum principle for general mean-field system. *Appl Math Optim.* 2016 ;74 :507-534."

# Bibliographie


[1] Buckdahn R, Li J, Ma JA. Stochastic maximum principle for general mean-field system. *Appl Math Optim.* 2016 ;74 :507-534.

[2] Buckdahn R, Djehiche B, Li J.A. : General stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type. *Appl Math Optim.* 2011 ; 64 :197-216.

[3] Guenane, L. Hafayed, M. S. Meherrem, S. Abbas : On optimal solutions of general continuous-singular stochastic control problem of McKean-Vlasov type. Mathematical Methods in the Applied Sciences , Wiley DOI : 10.1002/mma.6392. (2020), V 43, Issue 10, Pages 6498-6516.

[4] Cardaliaguet P. Notes on mean field games (from P.-L. Lions' lectures at Collège de France). https ://www.ceremade.dauphine.fr/cardalia/ ; 2013.

[5] Hafayed M, Abbas S, Abba A. On mean-field partial information maximum principle of optimal control for stochastic systems with Lévy processes. *J Optim Theory Appl.* 2015 ;167 :1051-1069.

[6] Hafayed M, Abba A, Abbas S. On partial-information optimal singular control problem for mean-field stochastic differential equations driven by Teugels martingales measures, Internat. *J Control.* 2016 ;89 :397-410.

[7] Hafayed M. A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal singular stochastic control. *Commun Math Stat.* 2014 ;1 :417-435.

[8] Hafayed M, Boukaf S, Shi Y, Meherrem S. A McKean-Vlasov optimal mixed regular-singular control problem, for nonlinear stochastic systems with Poisson jump processes. *Neurocomputing.* 2016 ;182 :133-144.

[9] Hafayed M, Meherrem S, Eren S, Guoclu DH. On optimal singular control problem for general McKean-Vlasov differential equations : necessary and sufficient optimality conditions. *Optim Control Appl Meth.* 2018 ;39 :1202-1219.

[10] Lakhdari I.E . Miloudi H, Hafayed M : Stochastic maximum principle for partially observed optimal control problems of general McKean-Vlasov differential equations, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Springer (2020), DOI : 10.1007/s41980-020-00426-1.

[11] Hafayed M Meherrem S, On optimal control of mean-field stochastic systems driven by Teugels martingales via derivative with respect to measures, International journal of control, DOI :10.1080/00207179.2018.1489148, Vol 93 (5), pp 1053-1062. (2020)

[12] Meherrem S, Hafayed M, Abbas S : On Peng's type maximum principle for optimal control of mean-field stochastic differential equations with jump processes, International Journal of Modelling, Identification and Control. DOI : 10.1504/IJMIC.2018.10014194. (2019).

[13] Lions P.L, Cours au Collège de France. Théorie des jeux à champ moyens. http ://www.college-de-france.fr/default/EN/all/equ[1]der/ audiovideo.jsp ; 2013.

[14] Yong J, Zhou XY. *Stochastic Controls. Hamiltonian Systems and HJB Equations.* New York : Springer-Verlag ; 1999.