République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : **Analyse**

Par : **ABIDALLAH WISSAL**

Titre **:**

Stabilité Des Systèmes Dynamiques Et La Théorie De Bifurcation

Devant le Jury :

Dr.	KACI FATMA	U. Biskra	Président
Dr.	SOLTANI SIHAM	U. Biskra	Encadreuse
Dr.	ADOUANE SAIDA	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 27/06/2022

Dédicace

Je dédie ce travail à:

♡ *Mes chères parents "Ma mère" et "Mon père" pour leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens et leurs encouragements durant tout mes années d'études.*♡

♡ *Mon cher frère : Yaâkoub* ♡

♡ *Mes chères soeurs : Rahima, Mountaha, Chahada* ♡

♡ *Mes amies proches : Moufida, Loubna, Mahdia* ♡

♡ *Tous mes collègues de : promo 2022* ♡

♡ *Tous les enseignants du département de mathématique* ♡

Wissal

Remerciements

Tout d'abord, mes remerciements à Allah, le tout puissant qui ma donné la santé, la patience et la volonté durant toutes ces longues années d'études afin que je puisse arriver à ce niveau.

Je tiens à remercier sincèrement l'encadreuse Dr. Soltani Siham, pour son grand soutien scientifique et moral. Sous la direction du l'aquelle j'ai en le plaisir de travailler ce ses conseils, ses critiques, m'on permis de mener ce travail à son terme.

J'exprime mes sincères remerciements également aux membres de jury:

Dr. Kaci Fatma et Dr. Adouane Saida

qui ont accepté de juger mon travail.

Enfin, je remercie toute ma famille et tous mes amis, qui de près ou loin m'ont supporté et encouragé tout au long de ces années.

Merci..

Notations et symboles

Les différentes notations et symboles utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous:

$\mathbb{R}^n$	:	Espace vectoriel de n dimension.
$\mathbb{R}^p$	:	Espace vectoriel de p dimension.
$\exp$	:	Fonction de exponentielle.
V	:	Fonction de Lyapunov.
C	:	Cycle limite.
T	:	Période.
C^1	:	Ensemble des fonctions continues et dérivables.
$(F \setminus \vartheta)$	:	Restriction de F à ϑ.
PC	:	Problème de cauchy.
$\frac{dx}{dt}$	:	Dérivée temporelle.
$\frac{\partial f}{\partial x}$	:	Dérivée partielle.
$B(x_0, \delta)$	:	Boule de centre x_0 et le rayon δ.
c	:	Paramètre de contrôle.
λ	:	Valeur propre.

$\mathrm{Re}(\lambda)$	:	Partie réelle de λ.
$A \in M_n(\mathbb{R})$	:	Matrice carée réelle.
$\ker(A)$	:	Noyau de A.
DF	:	Matrice jacobienne de F.
$\vert . \vert$	:	Valeur absolue.
$\Vert . \Vert$	:	Norme sur $\mathbb{R}^n$.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques. L'universalité des phénomènes dynamiques intervenant en Physique, en Biologie, en Ecologie, en Economie, et bien d'autres domaines d'applications font de ce formalisme un outil puissant pour entre autres, agréger les connaissances, analyser les comportements dynamiques des systèmes et prédire leurs comportements en fonction des paramètres.

Les systèmes dynamiques ont été développés au **XIXe siècle** par le mathématicien physicien français **Henri Poincaré**. Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes dynamiques est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini, ce concept qui est directement lié à la stabilité, a fait l'objet d'une recherche abondante depuis **la fin du XIXe siècle**, qui été développé par le mathématicien Russe **Aleksandre Lyapunov** a effectuée des recherches sur la stabilité du mouvement dans son mémoire intitulé:**"Problème général de la stabilité du mouvement"**.

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques comporte les systèmes linéaires et non linéaires. Henri Poincaré (**1854-1912**) montra que pour caractériser un système dynamique à plusieurs variables, il n'est pas nécessaire de calculer les solutions détaillées, il suffit en effet de connaitre les points d'équilibres et leurs stabilité. Ce résultat de grande importance simplifie considérablement l'étude des systèmes non linéaires qui pose un problème trés difficile en effet, en raison de leur comportement assez compliqué.

D'autre part du l'étude on trouve que mêmes conditions initiales mènent à des systèmes dynamiques qualitativement différents. Il peut donc existe certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple), ce changement d'état qualitative est dite bifurcation qui a était introduit par Henri Poincaré au **début du XXe siècle** dans ces travaux sur les systèmes différentieles.

Notre mémoire est organisé de la façon suivante:

Chapitre1: le but de ce chapitre est de fournir les principales clés pour étudier le comportement d'un système dynamique, on introduit en bref les notions de base sur les systèmes dynamiques continues et discrets, flot, existence et unicité des solutions, trajectoire, cycle limite...ect.

Chapitre2: Dans ce chapitre on s'intéresse de l'étude qualitative des systèmes dynamiques autonomes linéaires et non linéaires et leur stabilité selon le point d'équilibre en particulier à temps continu.

Chapitre3: ce chapitre a pour but de donner des notions de base sur la théorie de bifurcation, où s'intéresse aux bifurcations locale, on introduit quatre types de bifurcation et présentons leurs diagrammes dans l'éspace de phase.

Enfin, nous clôturerons le travail par une brève conclusion et des références bibliographiques assez diverse qui utilisée pour cette étude.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous rappellons quelques notions de base des systèmes dynamiques. Il concerne par: les définitions relatives aux systèmes dynamiques continues linéaires et non linéaires, flot, existence et unicité du solutions, espace des phases et cycles limites, on finalisons par les solutions périodiques.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1.1 *Un système dynamique est un modéle classique qui permettant décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interactions entre ces variables. Il est définie par un triplet* (X, T, f) *telle que*:

X : *espace d'état ou espace des phases* (X *est de dimension finie*).

T : *un domaine temporel est un l'esemble* ($\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{N}$).

Et d'une application f *de transition d'état*:

$$\begin{array}{rrcl} f: & X \times T & \longrightarrow & X \\ & (x,t) & \longrightarrow & f(x,t) \end{array}$$

Définition 1.1.2 *Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application:*

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définit sur tout $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ telle que:

- $f(.,x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est continue.*
- $f(t,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est continue.*
- $f(0,x) = x$.
- $f(t_1 + t_2, x) = f(t_1, f(t_2, x))$ *pour tout* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.1 *Soit le système différentiel:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) & , \; t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 & , \; x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

Avec, A est une matrice constante, tel que la solution de ce système définie par:

$$x(t) = \exp(tA)\ x_0.$$

Engendre un système dynamique du fait que l'application f :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Qui à tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ associé:

$$f(x,t) = \exp(tA)\ x_0.$$

1.1.1 Systèmes dynamiques continues et discrets

Définition 1.1.3 *Dans le cas où la composante de temps est continue: le système dynamique est dit continue et présenté par un système différentiel ordinaire de la forme:*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x,t) = \begin{pmatrix} F_1(x,t) \\ F_2(x,t) \\ \vdots \\ F_n(x,t) \end{pmatrix}, \text{ où } \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.1.4 *Dans le cas où la composante de temps est discret: le système dynamique est dit discret et présenté par une application (fonction itérative) :*

$$x_{k+1}(t) = F(x_k) \quad , \text{ où } \ x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ ,k = 1,2,3....$$

Avec: $\mathbb{R}^n$ l'espace des phases.

1.1.2 Systèmes dynamiques linéaires

Définition 1.1.5 *Quand on dit un système dynamique linéaire c'est-à-dire on parle sur les systèmes différentieles linéaires, alors on peut définir un système déffirentiel linéaire par l'équation de la forme:*

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t). \tag{1.2}$$

Qui est équivalent au:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1(t) + ... + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1(t) + ... + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Telle que la formule matricielle est:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

• *Où A est une matrice carrée réelle inversible, de plus les a_{ij} sont des fonctions de t.*

• *B est un vecteur dont les éléments sont des fonctions de t.*

Remarque 1.1.1 *Si la fonction F n'est pas sous la forme décrite dans l'équation (1.2), on dit que le système est non linéaire.*

1.1.3 Systèmes dynamiques non linéaires

Définition 1.1.6 *Un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

•Cette définition explique la complexité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

1.1.4 Systèmes autonomes et non autonomes

Définition 1.1.7 *Un système différentiel est dit autonome: si le temps n'apparait pas explicitement dans la fonction F est de la forme:*

$$\dot{x} = F(x).$$

Exemple 1.1.2 *Le système suivant est autonome:*

$$\begin{cases} \dot{x} & = 3\exp(x) - \frac{1}{x} \\ x(\pi) & = e \end{cases}$$

Définition 1.1.8 *Un système différentiel est dit non autonome: si la fonction F dépend explicitement du temps est de la forme:*

$$\dot{x} = F(x, t).$$

Exemple 1.1.3 *Le système suivant est non autonome:*

$$\begin{cases} \dot{x} & = tx \\ x(\pi) & = e \end{cases}$$

Remarque 1.1.2 *Dans ce travail, nous intéressons aux systèmes dynamiques autonomes au temps continus.*

1.2 Existence et unicité du solutions

On considère le système différentiel sous la forme:

$$\dot{x}(t) \quad = \quad F(x(t)) \quad , x \in X \subset \mathbb{R}^n \text{ et } t \in I \subset \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

La continuité de la fonction F est une condition insuffisante pour avoir l'unicité de la solution de (1.3), si F est localement lipschitzienne sur X, alors on a l'unicité de la solution maximale.

Définition 1.2.1 *(F **Localement Lipschitzienne**)*

Une fonction $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite localement lipschitzienne si pour chaque point de X il existe un voisinage ϑ de x, tel que le restriction de F à ϑ $(F \mid \vartheta)$ est lipschitzienne.

Définition 1.2.2 *(**Problème de Cauchy**)*

Le problème de trouver une solution du système (1.3) satisfaisant à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ est appelé problème de cauchy (PC).

Théorème 1.2.1 (Cauchy-Lipschitz)

On Considère le problème de cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & F(x(t)) & , \ t_0, t \in I \subset \mathbb{R} \\ x(t_0) & = & x_0 & , \ x_0, x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.4}$$

Si F est continue et localement lipschitienne sur X, (PC) admet une unique solution maximale sur X.

1.3 Flot

Définition 1.3.1 *On appelle flot sur X dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble d'applications $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ continûment différentiables.*

$$\varphi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$

définie par

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0) = x(t, x_0) \quad \forall x_0 \in X.$$

Où $x(t, x_0)$ est l'unique solution de (1.3) avec condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Théorème 1.3.1 *L'application φ_t est différentiable sur X, le flot $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie les propriétés suivantes*:

$*$ $\varphi_0 = Id$ (*est l'identité de* X).

$*$ $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (*loi de composition*).

$*$ φ_t *est une bijection de* X *et* $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

1.4 Espace des phases

Définition 1.4.1 *L'espace des phases (ou espace d'état) est un espace multidimontionnel abstrait il peut être égale ou plus petit à $\mathbb{R}^n$, dont les coordonées $x_1, ..., x_n$ sont les variables dynamiques du système étudié, qui permettant dinterpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique.*

Définition 1.4.2 ***(Trajectoire)***

On appelle trajectoire d'un point x de X une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans X par

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & X \\ & t & \to & \varphi_t(x) \end{array}$$

Remarque 1.4.1 *Le trajectoire est une solution du système différentiel.*

Définition 1.4.3 ***(Orbite)***

On appelle orbite d'un point x, l'image de la trajectoire issue de x c'est-à-dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défnie par

$$\gamma(x) = \varphi_t(x) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.4.1 Portrait de phase

Définition 1.4.4 *Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique d'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase, tel que à chaque condition initiale correspond un trajectoire différent. L'intérêt d'un portrait de phase par rapport à un diagramme temporel est qu'il permet de visualiser facilement le comportement asymptotique d'un système et d'étudier l'influence des conditions initiales.*

1.4.2 Cycle limite

Définition 1.4.5 *Un cycle limite C est une orbite fermée et isolée, ceci signifie qu'il existe un voisinage ϑ de C dans lequel il n'y a pas d'autres trajectoires fermées, ce pendant il peut exister des orbites non fermées dans ϑ qui s'approchent ou s'éloignent de C est un solution du système.*

1.4.3 Classification des cycles limites

Soit C un cycle limite alors:

a) **C est stable (ou attractif)**: si les trajectoires intérieures et extérieures spirales tendent vers l'orbite fermée C quand $t \to +\infty$.

b) **C est instable (ou répulsif)**: si les trajectoires intérieures et extérieures spirales tendent vers l'orbite fermée C quand $t \to -\infty$.

c) **C est demi-stable**: si les trajectoires spirales intérieures tendent vers l'orbite fermée C quand $t \to +\infty$ et les extérieures tendent vers C quand $t \to -\infty$.

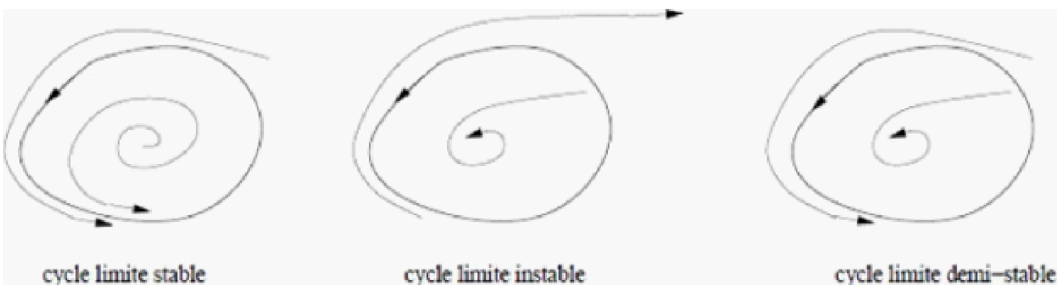

FIG. 1.1 – Cycle limite.

1.5 Solutions périodiques

Les points singuliers ne sont pas les seuls éléments déterminant le comportement qualitatif des solutions d'un système dynamique, mais il existe d'autre types tels que: les solutions périodique.

Définition 1.5.1 *On dit que $x(t)$ la solution du système (1.3) est une solution périodique de période T si est seulement si chacune de ses n composantes*

$(x_i(t))_{1\leq\ i\ \leq n}$ *est périodique de période* T*, et on écrit pour tout* $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t+T) = x(t).$$

Qui est équivalent au système suivant:

$$\begin{cases} x_1(t+T) = x_1(t) \\ x_2(t+T) = x_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n(t+T) = x_n(t) \end{cases}$$

Remarque 1.5.1

1) Si $x(t)$ *a une période* T*, la solution a aussi une période* kT*, et supposons que* T *est la plus petite période.*

2) Les points d'équilibres sont considérès comme des solutions périodiques à une période arbitraire $T \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 1.5.1 *Une solution périodique du système différentiel autonome (1.3) correspond à une orbite fermée dans le plan de phase, et une orbite fermée correspond à une solution périodique.*

Chapitre 2

Stabilité Des Systèmes Dynamiques

Dans ce chapitre nous intéressons de l'étude qualitative des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires et leurs stabilité au temps continu, et les méthodes générales d'étude de cette propriété, et pour faire cette étude il s'agit d'étudier la stabilité des points d'équilibres qui jouent un rôle capital dans l'étude du systèmes.

2.1 Stabilité

Soit le système différentiel autonome:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad , x \in X \subset \mathbb{R}^n \text{ et } t \in I \subset \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

2.1.1 Point d'équilibre

On appelle $x_e \in X$ un point d'équilibre (aussi point singulier, point critique) du système (2.1) si est seulement si:

$$F(x_e) = 0.$$

Exemple 2.1.1 *Les points d'équilibres du l'équation suivante*:

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

sont, $x_{e1} = 1$ *et* $x_{e2} = -1$.

Exemple 2.1.2 *Le point d'équilibre du système suivant*:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - 6x^2 y \end{cases}$$

est l'origine $(0, 0)$.

2.1.2 Stabilité du points d'équilibres

Définition 2.1.1 *La position d'équilibre x_e est **stable** au sens de Lyapunov si*:

$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0$, $\exists\ \delta(t_0, \varepsilon)$ *tel que*, $\forall x_0$ *vérifiant* : $\| x_0 - x_e \| < \delta$ (*ie* : $x_0 \in B(x_e, \delta)$),

la solution de (2.1) *vérifie*:

1) $x(t)$ *est définie pour tout* $t \geqslant t_0$.

2) $\| x(t) - x_e \| < \varepsilon$,$\forall\ t \geqslant t_0$ ($x(t) \in B(x_0, \varepsilon)$).

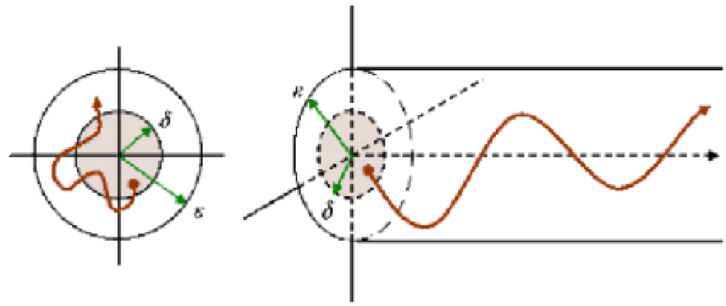

FIG. 2.1 – x_e Stable.

•Quand la définition précédente n'est pas satisfaite on dit que x_e est instable.

Définition 2.1.2 *La position d'équilibre x_e est* ***asymptotiquement stable*** *si:*

1) elle est stable au sens de Lyapunov.

2) $\lim_{t \longrightarrow \infty} \| x(t) - x_e \| = 0.$

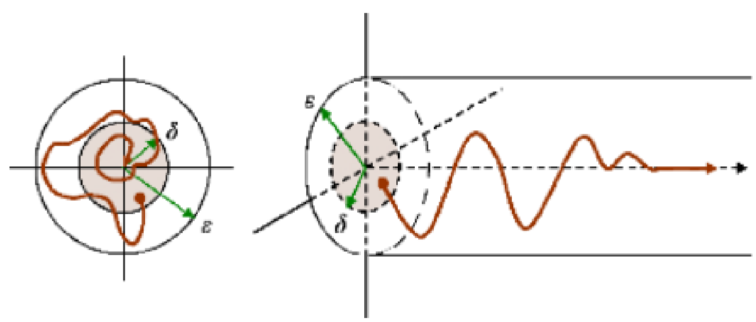

FIG. 2.2 – x_e Asymptotiquement stable.

Remarque 2.1.1

1) x_e est asymptotiquement stable implique que x_e est stable.

2) Une solution est dit stable si les solutions associées à des valeurs voisines de la *donnée initiale (point d'équilibre) reste proche de la solution considérée (solution stable) jusqu'à l'infini.*

2.1.3 Stabilité des systèmes non linéaires

L'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème trés difficile. En effet, en raison de leur comportement assez compliqué, les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. De plus, Lyapunov et autres ont remarqué aprés l'étude les points d'équilibres des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibres des systèmes linaires. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système en ce point.

Remarque 2.1.2 *On va voir la méthode de* ***linéarisation*** *et de* ***Lyapunov.***

Théorème 2.1.1 (Méthode de linéarisation)

Considérons le système différentiel autonome:

$$\frac{dx}{dt} = F(x).$$

Notons la matrice jacobienne de F au point d'équilibre x_e tel que:

$$A = DF(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e}$$

*$*$Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle **strictement négative,** alors le point d'équilibre x_e est **asymptotiquement stable.***

*$*$S'il existe au moins une valeur propre de A à partie réelle **strictement positive**, alors le point d'équilibre x_e est **instable**.*

*$*$Si toutes les valeurs propres de A sont **nulles,** alors on ne peut rien dire sur le système, ainsi on peut pas étudier la stabilité du système(2.1) par la méthode de linéaritation.*

Exemple 2.1.3 *Soit $x_e = (x, y)$ point d'équilibre du système:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x+1) \\ \dot{y} = x(y^3+1) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} (y(x+1) = 0 \wedge x(y^3+1) = 0) &\Leftrightarrow (x = -1 \vee y = 0) \wedge (x = 0 \vee y = -1) \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0) \vee (x - 1 \wedge y = -1) \end{aligned}$$

Les points d'équilibres sont, $x_{e1} = (0, 0)$ et $x_{e2} = (-1, -1)$.

-Pour la stabilité de $x_{e1} = (0, 0)$, on a

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x+1 \\ y^3+1 & 3xy^2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $Df(0, 0)$ sont, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Donc, $x_{e1} = (0, 0)$ est instable (car il existe une valeur propre positive).

-Pour la stabilité de $x_{e2} = (-1, -1)$, *on a*

$$Df(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $Df(-1,-1)$ *sont,* $\lambda_1 = -1$ *et* $\lambda_1 = -3$.

Donc, $x_{e2} = (-1, -1)$ *est asymptotiquement stable (car les deux valeurs propres sont négative).*

Théorème 2.1.2 ***(Méthode de Lyapunov)***

On suppose que x_e *est un point d'équilibre, il existe une fonction* V *de classe* C^1 *définie positive sur un voisinage* U *de* x_e *est dite fonction de Lyapunov de système (2.1) tel que:*

1. $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

2. $V(x_e) = 0$

3. $V(x) > 0, \forall\ x \in U - \{x_e\}$

Alors

i) si $\dot{V}(x) \leq 0$ *dans* $U - \{x_e\}$ *alors:* x_e *est stable.*

ii) si $\dot{V}(x) < 0$ *dans* $U - \{x_e\}$ *alors:* x_e *est asymptotiquement stable.*

iii) si $\dot{V}(x) > 0$ *dans* $U - \{x_e\}$ *alors:* x_e *est instable.*

Remarque 2.1.3 *Les propriétés de stabilité de ce théorème sont dites globales si* $U = \mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1.4 *On utilise la méthode de Lyapunov pour étudier la stbilité de l'origine pour le système suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y(y^2 + x^2) \end{cases} \tag{2.2}$$

Considérons la fonction suivante, $V(x, y) = x^2 + y^2$.

Le point d'équilibre de (2.2) *est* $x_e = (0, 0)$. *D'autre part,*

$$V(x_e) = V(0, 0) = 0 \quad et \quad V(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq x_e = (0, 0).$$

De plus

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \tfrac{d}{dt}(V(x, y)) \\ &= 2x\tfrac{dx}{dt} + 2y\tfrac{dy}{dt} \\ &= 2\left((x^2 + y^2)\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Donc, l'origine est instable.

2.1.4 Stabilité des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire suivant:

$$\dot{x} = Ax. \tag{2.3}$$

Où $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec x_e un point d'équilibre de cette équation.

Remarque 2.1.4

1) Le point $x_e = 0$ *est toujours un équilibre de* (2.3).

2) Chaque élément de $\ker(A)$ *est un équilibre* ($\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$).

Définition 2.1.3

•*Si toutes les valeurs propres* λ *de* A *telle que*: $\text{Re}(\lambda) \leqslant 0$ *alors,* x_e *est* ***stable.***

•*S'il existe une valeure propre* λ *de* A *telle que*: $\text{Re}(\lambda) > 0$ *alors,* x_e *est* ***instable.***

•*Si toutes les valeurs propres* λ *de* A *telle que*: $\text{Re}(\lambda) < 0$ *alors,* x_e *est* ***asymptotiquement stable.***

• *Toutes* $\text{Re}(\lambda) = 0$ *alors,* x_e *est* ***simple.***

Exemple 2.1.5 *Soit le système linéaire suivant*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 5x_1 & -3x_2 & -4x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 & +x_2 & -2x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 & -3x_2 & \end{cases}$$

Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A *sont,* $\lambda_1 = -2$ *et* $\lambda_2 = 4$.

Donc, x_e *est instable (car* $\lambda_2 > 0$ *).*

2.1.5 Classification des pointes d'équilibres

Cette étude sera dans l'éspase de phase de dimension 2, nous introduisons quelques terminologies et discutons qualitativement le comportement des solutions selon le signe des valeurs propres.

$*$**Cas réel**: les valeurs propres sont réelles.

1) Les valeurs propres λ différentes et strictement positives alors: x_e est un noeud instable.

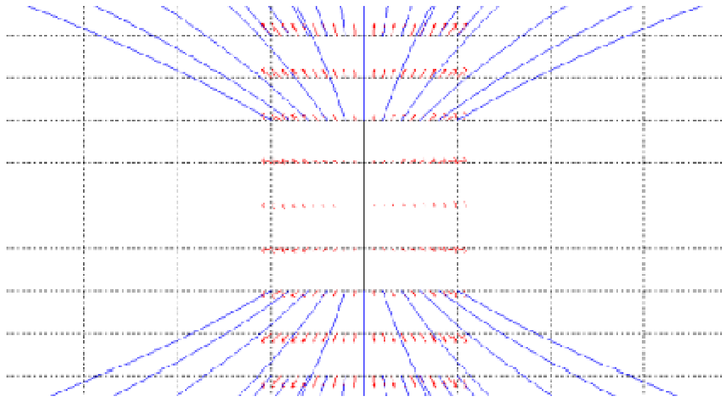

Fig. 2.3 – Noeud instable.

2) Les valeurs propres λ différentes et strictement négatives alors: x_e est un noeud stable.

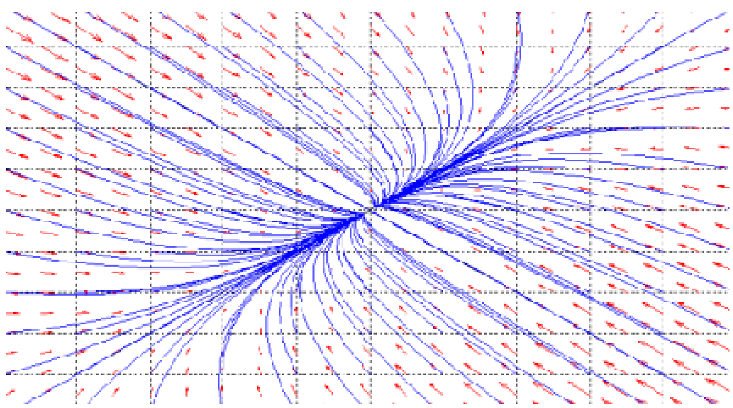

Fig. 2.4 – Noeud stable.

3) les valeurs propres λ sont de signe opposé alors: x_e est un point selle ou col.

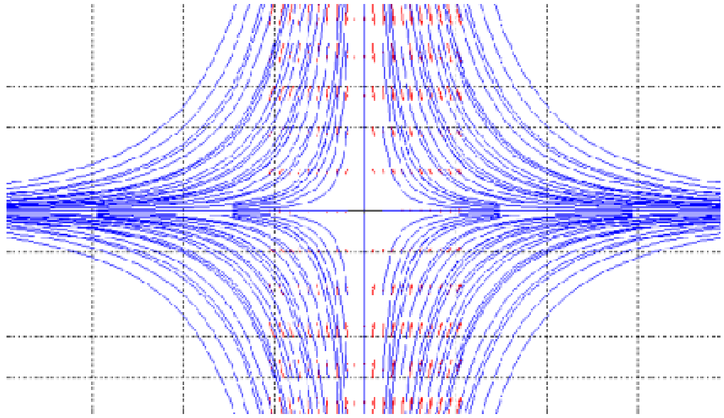

FIG. 2.5 – Point selle.

•Si A est diagonalisable :

1) Si les valeurs propres λ sont identiques et positives alors: x_e est asymptotiquent instable.

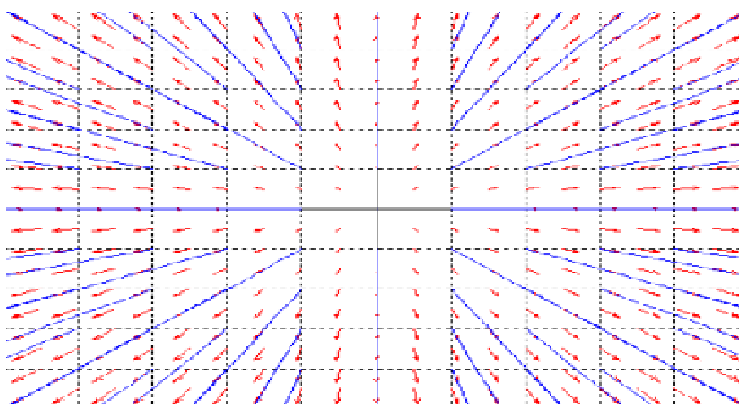

FIG. 2.6 – x_e Asymptotiquent instable.

2) Si les valeurs propres λ sont identiques et négatives alors: x_e est asymptotiquent stable.

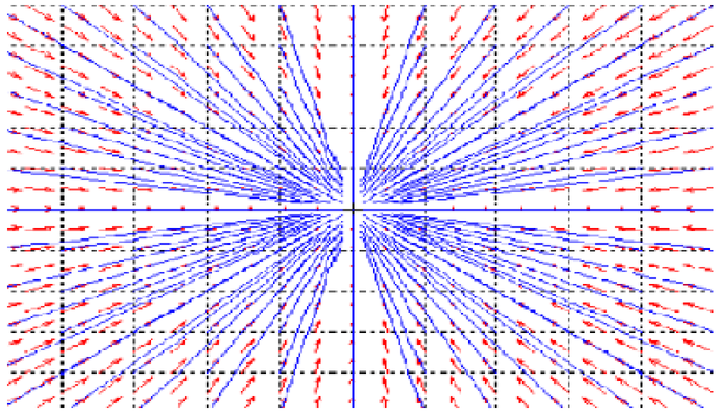

FIG. 2.7 – x_e Asymptotiquent stable.

•Si A n'est pas diagonalisable :

1) Si les valeurs propres λ sont identiques et positives alors: x_e est un noeud dégénéré instable.

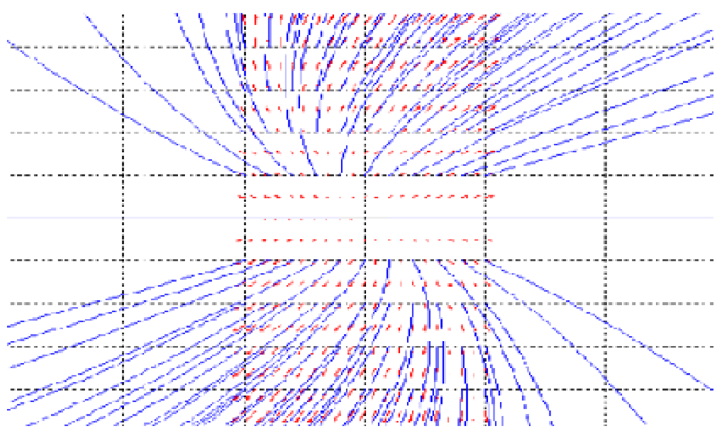

FIG. 2.8 – Noeud dégénéré instable.

2) Les valeurs propres λ différentes et strictement négatives alors: x_e est un noeud dégénéré stable.

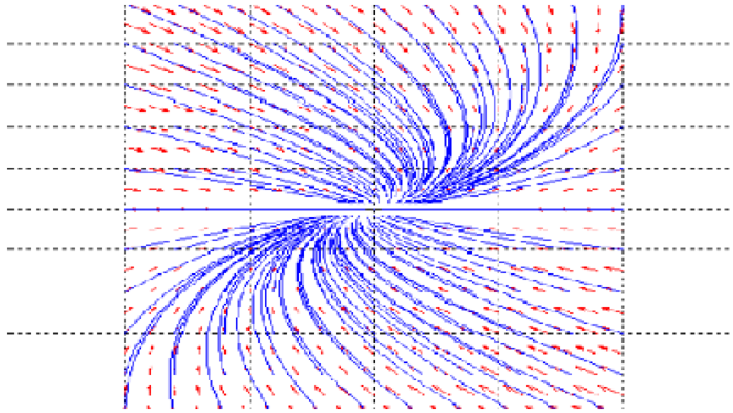

FIG. 2.9 – Noeud dégénéré stable.

$*$**Cas complexe**: les valeurs propres sont complexes.

1) Si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ alors: x_e est un centre

2) Si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ alors: x_e est un foyer stable.

3) Si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ alors: x_e est un foyer instable.

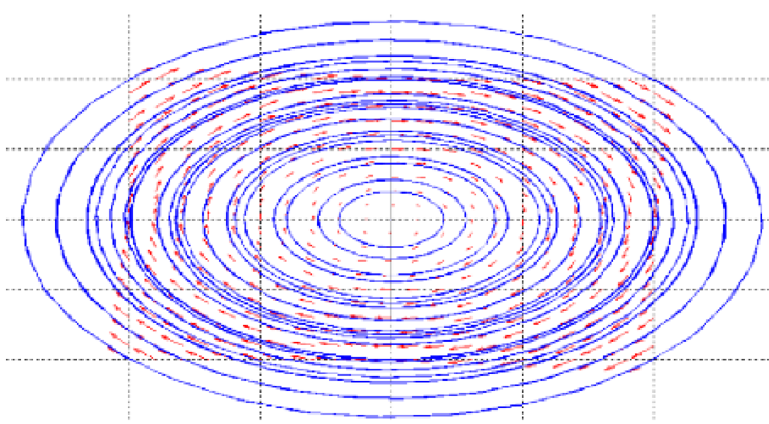

FIG. 2.10 – Centre.

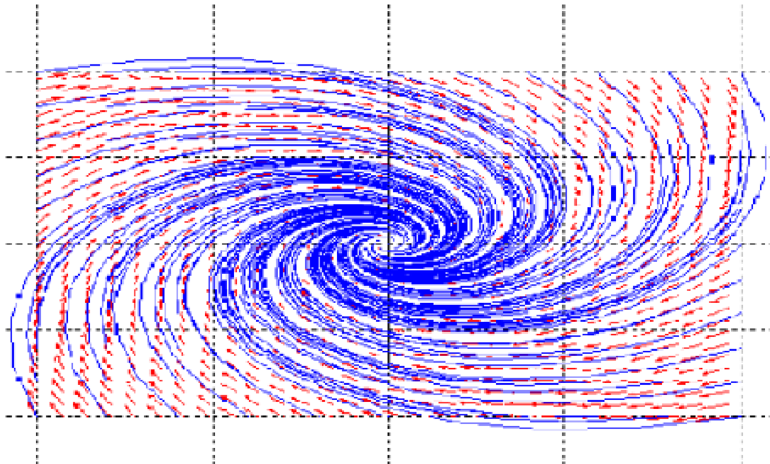

FIG. 2.11 – Foyer stable.

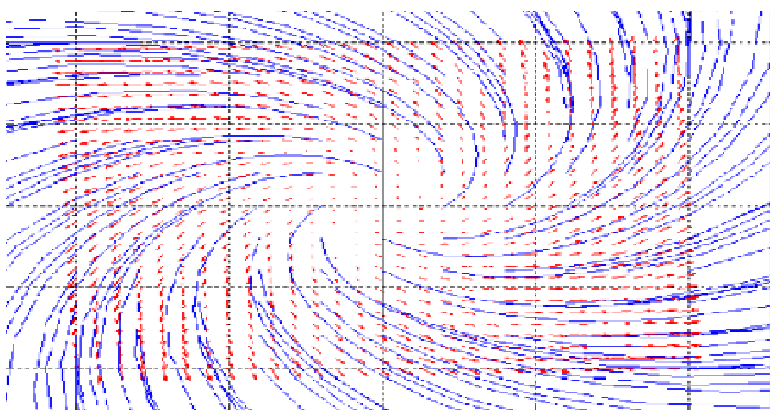

FIG. 2.12 – Foyer instable.

Exemple 2.1.6 *Soit le système suivant*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \end{cases}$$

Le point d'équilibre de ce système est $x_e = (0,0)$.

Les valeurs propres associées sont réelles négatives, $\lambda_1 = -1$ *et* $\lambda_1 = -2$.

Donc, x_e *est noeud stable (les trajectoires tend vers le point d'équilibre).*

Exemple 2.1.7 *Soit le système suivant*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 & +x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{cases}$$

Le point d'équilibre de ce système est $x_e = (0,0)$. *On a*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que: *A n'est pas diagonalisable.*

Les valeurs propres associées sont identiques positives, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Donc, x_e *est noeud dégénéré instable (les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre).*

Exemple 2.1.8 *Soit le système suivant*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 & -2x_2 \end{cases}$$

On trouve le même point d'équilibre $x_e = (0,0)$.

Les valeurs propres associées sont complexes à parties réelles négatives,

$\lambda_1 = -1 + i$ *et* $\lambda_2 = -1 - i$.

Donc, x_e *est foyer stable (spirale attractante).*

Chapitre 3

Théorie De Bifurcation

Ce chapitre a pour but de donner des notions de base sur la théorie de bifurcation et donnerons quelques types de bifurcation de cette théorie. Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres de contrôle. Selon la valeur de ce paramètre, les mêmes conditions initiales mènent à des systèmes dynamiques qualitativement différents. On s'intéresse ici aux changements qualitatifs du portrait de phase d'un système dynamique dépendant de paramètres. De tels changements sont appelés bifurcations, se trouvent bifurcation "locale et globale", sur ce on s'intéresse aux bifurations dites locales, c'est-à-dire relatives à un point d'équilibre d'un système continu.

3.1 Définitions de bifurcation

Soit le système dynamique non linéaire de dimension n :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, c) \quad \text{où} \;\; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } c \in \mathbb{R}^p. \tag{3.1}$$

Avec: c est un paramètre de contrôle, et x_e sa solution.

Remarque 3.1.1 $\mathbb{R}^n$ *espace des phases et* $\mathbb{R}^p$ *espace des paramèters.*

Définition 3.1.1 *On parle de bifurcation lorsque la variation d'un paramètre c provoque la modification radical de comportement du système dynamique étudié (changement du nombre de point d'équilibre ou de la nature des attracteurs).*

Définition 3.1.2 *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution* x_e *du système (3.1) lorsqu'on modifie c et d'une manière plus précise la dispartion ou la chengement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

Définition 3.1.3 *Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du c pour laquelle le système (3.1) n'est pas structurellement stable).*

Remarque 3.1.2 *Le nombre de paramètres qui sont nécessaires de varier pour retrouver une situation structurellement stable partant d'une situation structurellement instable est appelé la codimension du problème.*

3.2 Diagrammme de bifurcation

Définition 3.2.1 *Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation. Aussi il est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

3.2.1 Codimension d'une bifurcation

Définition 3.2.2 *La codimention est la plus petite dimension de l'espace des paramètres, où le nombre de paramètre qui doivent être modifiés pour la bifurcation de se produire. On parle ici seulement de la bifurcation de codimonsion* 1.

3.3 Bifurcation locale

Dans cette section, nous décrivons les bifurcations de codimension un dites locales, il existe quatre types de bifurcation de cette codimension, telle que chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation, sont présentés ci-dessous.

3.4 Types des bifurcations

On va voir quatre types de bifurcation tel que dans chaque cas, on va chercher à:

a) Identifier les points d'équilibres x_e du système.

b) Étudier leur stabilité.

c) Résumer ces informations sur un diagramme de bifurcation.

3.4.1 Bifurcation Noeud-col

Considérons l'équation qui sous la forme:

$$F(x,c) = c - x^2 \qquad , x \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

La bifurcation noeud-col est le cas plus simple de la bifurcation, et nous appelons la fonction (3.2) la forme normale de la bifurcation noeud-col.

Étudions le comportement de cette équation selon le paramètre c.

•Recherche les points d'équilibres de (3.2). On a

$$F(x,c) = 0 \Leftrightarrow x^2 = c.$$

∗Si $c < 0$: l'équation (3.2) n'admet pas une solution alors, il n'éxiste pas un point d'équilibre.

∗Si $c > 0$: on a

$$x^2 = c \Leftrightarrow \begin{cases} x_e &= \sqrt{c} \\ x_e &= -\sqrt{c} \end{cases}$$

Par suit l'équation admet deux points d'équilibres.

•Leurs stabilité, nous avons

$$\frac{dF(x,c)}{dx} = -2x.$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{dF(x,c)}{dx}|_{x_e=\sqrt{c}} &= -2\sqrt{c} < 0 \\ \frac{dF(x,c)}{dx}|_{x_e=-\sqrt{c}} &= 2\sqrt{c} > 0 \end{cases}$$

Par conséquent selon les signes de: $\frac{dF(x,c)}{dx}|_{x_e}$ on voit que:

$$\begin{cases} x_e &= \sqrt{c} \text{ est stable.} \\ x_e &= -\sqrt{c} \text{ est instable.} \end{cases}$$

∗Si $c = 0$ admet un équilibre $x_e = 0$.

Remarque 3.4.1 *Même étude faite lorsque*:

$$F(x,c) = -c - x^2, \quad F(x,c) = c + x^2, \quad F(x,c) = -c + x^2.$$

Remarque 3.4.2 *Dans tous les cas, il y a une transition $c = 0$ entre existence d'aucun point d'équilibre et de deux points d'équilibre dont un est stable et l'autre est instable (dans ce cas le point d'équilibre dite semi-stable).*

Ceci conduit au diagramme de bifurcation noeud-col de figure (3.1).

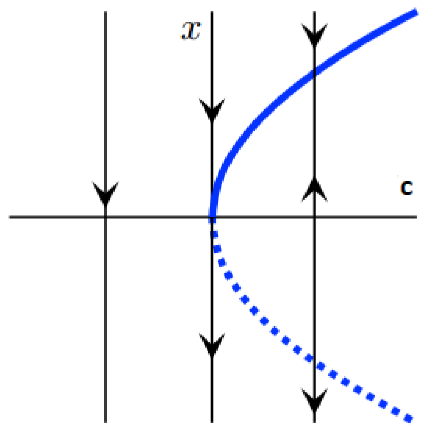

Fig. 3.1 – Diagramme de Bifurcation Noeud-col.

Remarque 3.4.3 *Quelques explications sur la structure des figures*:

$*$*Lignes bleues pleines*: *lieu des points singuliers stables.*

$*$*Lignes bleues pointillées*: *lieu des points singuliers instables.*

$*$*Lignes noires avec flèches*: *orbites et orientation du flot.*

$*$*Surface rouge*: *famille de cycles limites.*

3.4.2 Bifurcation Transcritique

L'équation qui nous intéressons est la suivante:

$$F(x,c) = cx - x^2 \qquad , \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Cette formule dite la forme normale de la bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans un dimension.

L'analyse usuelle donne:

•Recherche les points d'équilibres de (3.3).Ona

$$\begin{aligned} F(x,c) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad cx - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(c-x) = 0 \end{aligned}$$

Alors, $x_e = 0$ ou $x_e = c$.

Par suit l'équation admet deux points d'équilibres.

•Étudions leurs stabilité, nous avons

$$\frac{dF(x,c)}{dx} = c - 2x.$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{dF(x,c)}{dx}|_{x_e=0} & = & c \\ \frac{dF(x,c)}{dx}|_{x_e=c} & = & -c \end{cases}$$

Par conséquent on a

$$x_e = 0 : \begin{cases} \text{stable} & \text{si,} & c < 0 \\ \text{instable} & \text{si,} & c > 0 \end{cases}$$

Et

$$x_e = c : \begin{cases} \text{stable} & \text{si,} \quad c > 0 \\ \text{instable} & \text{si,} \quad c < 0 \end{cases}$$

•Ceci conduit au diagramme de bifurcation transcritique de figure (3.2).

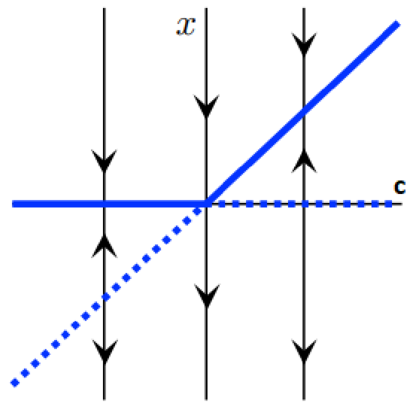

FIG. 3.2 – Diagramme de Bifurcation Transcritique.

3.4.3 Bifurcation Fourche (pitchfork)

Au point de bifurcation fourche la stabilité du point d'équilibre change au profit de la naissance d'une paire de point d'équilibre.

On peut réduire $F(x,c)$ à un polynôme cubique à ces deux cas:

$$F(x,c) = cx - x^3 \quad , \; x \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

$$F(x,c) = cx + x^3 \quad , \; x \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Telle que:

-L'équation (3.4) s'appelle la forme normale de bifurcation fourche **sur-critique.**

-L'équation (3.5) s'appelle la forme normale de bifurcation fourche **sous-critique.**

D'abord, commençons par bifurcation fourche sur-critique.

•Recherche les points d'équilibres de (3.4). On a

$$\begin{aligned} F(x,c)=0 \;\Leftrightarrow\; & \quad cx-x^3 &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow\; & \; x(c-x^2) &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow\; & \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ \text{ou} \\ x^2=c \end{array} \right. \end{aligned}$$

$*$Si $c<0$: (3.4) admet un équilibre $x_e=0$.

$*$Si $c>0$: (3.4) admet trois points d'équilibres, $x_e=0$ ou $x_e=\pm\sqrt{c}$.

•Étudions leurs stabilité, nous avons

$$\frac{dF(x,c)}{dx}=c-3x^2.$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dF(x,c)}{dx}|_{x_e=0} &=& c \\ \frac{dF(x,c)}{dx}|_{x_e=\pm\sqrt{c}} &=& -2c \end{array} \right.$$

Par conséquent on a

$$x_e=0 : \left\{ \begin{array}{ccc} \text{stable} & \text{si,} & c<0 \\ \text{instable} & \text{si,} & c>0 \end{array} \right.$$

Et

$$x_e = \pm\sqrt{c} \text{ est stable} \quad \text{si, } \ c > 0.$$

Passons maintenant à la bifurcation fourche sous-critique, faisons les mêmes calcules on obtient:

•Recherche les points d'équilibres de(3.5). On a

$$\begin{aligned} F(x,c) = 0 \ \Leftrightarrow \quad cx + x^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x(c + x^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 = -c \end{cases} & \end{aligned}$$

$*$Si $c > 0$: (3.5) admet un équilibre $x_e = 0$.

$*$Si $c < 0$: (3.5) admet trois points d'équilibres, $x_e = 0$ ou $x_e = \pm\sqrt{-c}$.

•Étudions leurs stabilité, nous avons

$$\frac{df(x,c)}{dx} = c + 3x^2.$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{df(x,c)}{dx}|_{x_e=0} & = & c \\ \frac{df(x,c)}{dx}|_{x_e=\pm\sqrt{-c}} & = & -2c \end{cases}$$

Par conséquent on a

$$x_e = 0 : \begin{cases} \text{stable} & \text{si,} & c < 0 \\ \text{instable} & \text{si,} & c > 0 \end{cases}$$

Et

$$x_e = \pm\sqrt{-c} \text{ est instable} \quad \text{si,} \;\; c < 0.$$

•Ceci conduit au diagramme de bifurcation transcritique de figure (3.3).

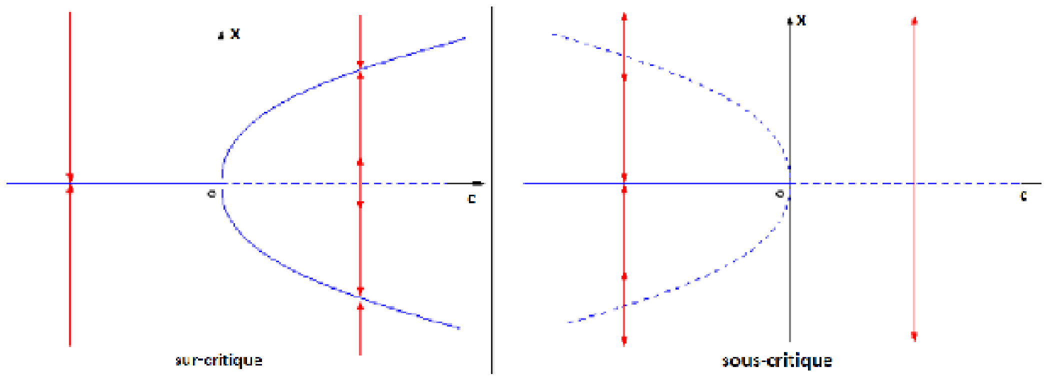

FIG. 3.3 – Diagramme de Bifurcation Fourche.

3.4.4 Bifurcation Hopf

Tandis que toutes les bifurcations que nous avons décrites sont stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes. Cette bifurcation est observée en dimension supérieure ou égale à 2, l'éspase de phase a maintenant deux composantes, et pour $Z \in \mathbb{C}$ la forme normale s'écrit dans le plan complexe comme suit,

$$\frac{dZ}{dt} = cZ - |Z|^2 Z \tag{3.6}$$

On pose: $c = c_r + i\ c_I$ et $Z = X \exp(i\theta)$ on obtient,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= c_r x - x^3 \\ \frac{dx}{dt} &= c_I \end{cases} \tag{3.7}$$

La bifurcation Hopf se produit lorsque le paramètre de bifurcation prend une valeure critique c_0, pour la quelle la matrice jacobienne du système à une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire. Ce qui veut dire qu'au point de bifurcation Hopf, la partie réelle des valeurs propre s'annule, et le type de stabilité de l'équilibre existant change. De plus, à ce moment un cycle limite se crée avec une fréquence angulaire correspondant à la partie imaginaire des valeurs propres (3.4).

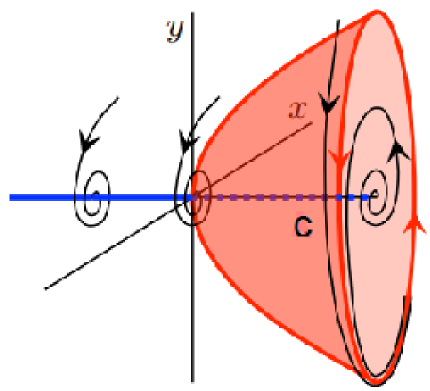

FIG. 3.4 – Diagramme de Bifurcation Hopf.

Conclusion

Le travail développé dans ce mémoire a porté sur la stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcation. Nous avons appris que les systèmes dynamiques présentent un outil mathématique qui permet de modéliser des phénomènes en plusieurs domaines.

Dans le premier chapitre, on introduit notamment les principales clés pour étudier le comportement d'un système dynamique avec un accent particulier sur le temps continu. Le deuxième chapitre, concerne l'étude qualitative de stabilité des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires autonomes continus et pour faire cette étude nous avons utilisé la méthode de linéarisation et Lyapunov. Le troisième chapitre, on a présenté un autre côté d'analyse où un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres qui conduisent à la variation sur l'état qualitatif de système, celle-ci dite 'bifurcation', nous ont permis de comprendre l'évolution du système pour pouvoir contrôler la variation de ses paramètres.

Bibliographie

[1] Demailly, J. P. (2016). Analyse numérique et équations différentielles-4eme Ed. EDP sciences.

[2] Gasri, A. (2018). Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université Constantine1.

[3] Menacer, Tidjani. (26/05/2014). Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université Constantine1.

[4] Meriem, M. A. I. Z. I., & Nouha, M. O. K. R. A. N. I. (2019). Etude de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels polynomiaux de Kolmogorov. Université 8 Mai 1945 Guelma.

[5] Najoua, S. I. A. R. (2016). La stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcations : application au modèle de Goodwin.

[6] Ouahabi, R. (2018). Systèmes dynamiques et chaos. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université Constantine1.

[7] Olivier, Bonnefoy. (2021). Systèmes Dynamiques et instabilités hydrodynamiques. https ://www.emse.fr/~bonnefoy/Public/SD-EMSE.pdf.

[8] VIDAL, A. (18 février 2015). Modèle mathématiques EDO pour la biologie.

Résumé

Le travail abordé dans ce mémoire intéresse l'étude de stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcation.

D'abord, nous avons donné des notions de base sur les systèmes dynamiques. Ensuite, nous nous sommes intéressé à l'étude de stabilité des systèmes dynamiques autonomes linéaires et non linéaires au temps continu.

Enfin, nous avons vu l'influence du paramètre de contrôle sur la stabilité de système dynamique tel que celui-ci provoque de la modification radicale de comportement de système qui s'appelle la bifurcation.

Mots clé :

Systèmes dynamiques, autonome, linéaire, non linéaire, temps continue, paramètre de contrôle, bifurcation.

Abstract

The work discussed in this memoir interested to study of stability of dynamics systems and the theory of bifurcation.

First, we gave basic notions about dynamic systems. Then, we studied the stability of linear and nonlinear autonomous dynamical systems in continuous time.

Finally, we have seen the influence of control parameter on dynamic system stability where this parameter causes radical modification of system behavior which is called bifurcation.

Key words :

Dynamic system, autonomous, linear, nonlinear, continuous time, control parameter, bifurcation.

ملخص

يتعلق العمل الذي تم تناوله في هذه المذكرة بدراسة استقرار الأنظمة الديناميكية ونظرية التشعب.

أولا، اعطينا بعض المفاهيم الاساسية حول الانظمة الديناميكية. بعدها، اهتممنا بدراسة استقرار الأنظمة الديناميكية المستقلة الخطية والغير الخطية في الوقت المستمر.

في الأخير رأينا تأثير إضافة معامل التحكم للنظام الديناميكي، حيث يؤدي إلى التغير الجذري في سلوك النظام وذلك ما يسمى بالتشعب.

الكلمات المفتاحية :

الأنظمة الديناميكية، مستقلة، خطية، غير خطية، وقت مستمر، معامل التحكم، التشعب.