République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

TELLI Abdelouahab

Titre :

Sur le problème de contrôle optimal pariellement observé et application

Membres du Comité d'Examen :

Pr. CHALA Adel. *Université de Biskra*,________________ **Président**

Dr. LAKHDARI Imad Eddine. *Université de Biskra*,________ **Encadreur**

Dr. TABET Moufida. *Université de Biskra*,______________ **Examinateur**

2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, qui m'ont donné beaucoup de soutien durant mon cursus.

Je dédie aussi ce travail, avec beaucoup de joie et d'estime, à mes chèrs fréres : **Ahmed** et **Ameur**.

Et à mes chères sœurs **Zineb** et **Saliha** .

A mon petit nièce **Wael**.

Et pour tous ceux qui m'ont encouragé de près ou de loin.

Et à tous mes amies.

Abdelouahab Telli

Remerciements

Je tiens premiérement à me prosterner, remerciant <<**Allah**>> le tout puissant de m'avoir donné la force et la volonté pour terminer ce travail.

Deuxiémement, je remercie mon encadreur de mémoire Monsieur <<**Imad-Eddine Lakhdari** >>. Je le remercie pour les encouragements, la motivation et les précieux conseils qu'il a fournis pour mener à bien ce travail.

Je remercie vivement les membres du jury **CHALA ADEL** et **TABET MOUFIDA** pour leur présence et pour l'évaluation de ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous les personnes qui nous ont encouragés pendant la réalisation de ce travail, famille, collége, amis, sans exception

Notations et symbols

Ω	:	Un ensemble fondamentale.
$\mathbb{P}$	:	Une mesure de probabilité sur Ω
L^2	:	Ensemble des fonctions mesurables de carré intégrables.
$p.s.$	:	presque sûrement.
$\mathbb{E}[X]$	:	Espérance mathématique ou moyenne du v.a. X.
$\mathcal{F}$	:	La tribu (ou σ-algèbre) sur Ω, ie une très grande famille de sous-ensembles.
$B(\mathbb{R}^d)$	:	tribu borélienne.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité filtré complée.
$\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$	:	Filtration canonique de processus stochastique.
$W = (W_t)_{t\geq 0}$	:	Mouvement Brownien.
C^1	:	Ensemble de fonction dérivable et dont la dérivée premiére continue.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$
$J(u)$	:	La fonction de coût ‡ minimiser.
$\top$	:	Transposée

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Notations et symbols **iii**

Table des matières **iv**

Introduction **1**

1 Rappelle sur le culcul stochastique **4**

1.1 Processus stochastiques 4

1.2 Mouvement Brownien 6

1.3 Martingales 6

1.4 Processus d'Itô 8

1.5 Equations différentielles stochastiques 10

2 Principe du maximum stochastique **12**

2.1 Formulation du problème 12

2.2 Conditions nécessaires d'optimalité 17

3 Application. **30**

3.1 Problème de contrôle linéaire quadratique partiellement observé avec sauts. 30

Conclusion **33**

Bibliographie **34**

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal partiellement observé ont reçu beaucoup d'attention oú ils sont devenus un outil puissant dans de nombreux domaines, tels que les mathématiques financière, le contrôle optimal, etc...

Dans la réalité, des nombreuses situations, l'information complète elle n'est pas toujours disponible pour les contrôleurs, mais celle partielle avec le bruit. Ce type de problème a été étudier par plusieur auteur, voir par exemple Lakhdari et al. [1], Miloudi et al. [2], Wang et Wu [3], et Wang et al. [4].

L'objectif de ce travail est de faire une étude détaillée sur le principe du maximum stochastique pour les problèmes de contrôle partiellement observé avec sauts où le domaine de contrôle est supposé convexe. Cette étude est basé sur le travail de Miloudi et al. [2].

La dynamique du système contrôlé prend le type suivant :

$$\begin{cases} dx^v(t) = \mathfrak{f}(t, x^v(t), v(t))dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))dW(t) \\ +c(t, x^v(t), v(t))d\tilde{W}(t) + \displaystyle\int_\Theta g(t, x^v(t_-), v(t), \theta)\tilde{N}(d\theta, dt) \\ x^v(0) = x_0, t \in [0, T], \end{cases}$$

où les coefficients

$$\mathfrak{f} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$

$$c : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$

$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$

sont des fonctions déterministes données.

L'observation est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dY(t) = h(t, x^v(t), v(t))dt + d\tilde{W}(t) \\ Y(0) = 0, \end{cases}$$

où $h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^r$, et $\tilde{W}(\cdot)$ est un processus stochastique dépendant du contrôle $v(\cdot)$.

Le coût fonctionnel à minimiser sur la classe des contrôles admissibles est également sous la forme

$$J(v(\cdot)) = \mathbb{E}^v \left[\int_0^T l(t, x^v(t), v(t))dt + \psi(x^v(T)) \right].$$

où $l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, ψ:$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\mathbb{E}^V$ représente l'espérance mathématique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^v)$.

Nous présentons notre travail de la manière suivante :

▶ Dans le premier chapitre, on donne un bref rappel sur la théorie du calcul stochastique qui nous permet d'étudier le principe du maximum stochastique pour les problèmes de contrôle optimal pariellement observé avec sauts.

▶ Le deuxième chapitre contient l'essentielle de notre travail, nous prouvons les conditions nécessaires pour notre problème de contrôle avec sauts. Plus précisément, nous utilisons le théorème de Girsanov ainsi que la technique variationnelle standard pour transformer notre problème de contrôle optimal en problème complètement observé.

▶ Dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe du maximum stochastique au problème de contrôle optimal linéaire-quadratique.

Chapitre 1

Rappelle sur le culcul stochastique

Ce chapitre a pour but de donner des définitions basés et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.

1.1 Processus stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace porobabilisé filtré.

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique)*** *Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, un famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, soit une v.a.*

Remarque 1.1.1 *Les fonctions $t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont appelées les trajectoires du processus stochastique X_t.*

Définition 1.1.2 *(Filtration) On appelle filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$; une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}; \forall s \leq t$.*

Remarque 1.1.2 *Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est satisfait les conditions habitulles si :*

i) Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$

ii) La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{s \succ t} \mathcal{F}_s \ \forall t$.

La famille croissante de sous tribus $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, s'appelle **la filtration naturelle** de processus stochastique X. Mais $\mathcal{G}_t$ ne contient pas néssairement les ensemble négligeable $(\mathcal{N})$, c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(N \cup \mathcal{G}_t)$. lorsque nous parlenors de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.

Définition 1.1.3 ***(Processus adapté)*** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit adapté (par rapport à $\mathcal{F}_t$) si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.4 ***(Processus mesurable)*** *Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Définition 1.1.5 ***(Temps d'arrêt)*** *Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. τ est un $\mathbb{F}$–temps d'arrêt si, pour tout $t \in T$:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \colon \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Si τ est un temps d'arrêt, la tribu $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty,\ A \cap \{\tau \leq t\},\ \forall t \in T\}$ s'appelle tribu des évènements antérieurs à τ.

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 *Un processus* $W : \Omega \to [0, T]$ *est un mouvement brownien (MB) standard,si*:

(i) $W_0 = 0$, $\mathbb{P}.p.s.$

(ii) $\forall s \leq t$, $W_{s,t} := W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

(iii) *Pour tout* $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n \leq T$, *les variables* $W_{t_1}, W_{t_1,t_2}, \cdots, W_{t_{n-1},t_n}$ *sont indépendantes.*

De plus, on appelle W *un* $\mathbb{F}$*-mouvement brownien si* $W \in L^0(F_t)$ *et pour tout* $0 \leq s < t \leq T$, *la variable* $W_{s,t}$ *est indépendante de la tribu du passé avant* s, *soit* $\sigma(W_u, u \leq s)$.

Remarque 1.2.1

1. *La définition reste vraie pour* $T = [0, \infty[$.

2. *On appelle* $W = \left(W^1, \cdots, W^d\right)^\top$ *un mouvement brownien d-dimentionnel si* $W^1, \cdots, W^d$ *sont des mouvements browniens independants.*

3. *Nous rappelons aussi que l'augmentation habituelle de la filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *d'un mouvement brownien* W *est* $\mathcal{F}_t^W = (\sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}))_{t\in\mathbb{T}}$. *De plus,* W *reste un mouvement brownien par rapport à sa filtration augmentée. Par abus de language, l'augmentation de la filtration naturelle de* W *est encore appelée filtration naturelle de* W *ou filtration brownienne.*

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *On dit que* $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}} \in L^0(\mathbb{F})$ *est une* $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$*-martingale, ou simplement martingale si*:

$(i)\, \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$ $, \forall t \in \mathbb{T}$.

(ii) $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$, *pour tout* $0 \leq s \leq t$.

(iii) $(M_T)_{t\in T}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté (i.e* M_t *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable).*

Remarque 1.3.1

1. *M est une sous-martingale (resp sur-martingale) s'il vérifie (i) et si de plus* $\forall 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s$ *(resp* $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$*).*

2. *M est une martingale s'il est à la fois une sous-martingale et sur-martingale.*

3. *Si M est une martingale, alors* $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ *pour tout* $t \in T$.

Proposition 1.3.1 *Si W est un MB, alors W, $(W_t^2 - t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $\left\{\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right\}_{t\in\mathbb{T}}$ sont des martingales. Réciproquement, si X est un processus continu tel que X et $(X_t^2 - t)_{t\geq 0}$ sont des martingales, X est un mouvement Brownien.*

Définition 1.3.2 ***(Martingale locale)*** *Un processus M adapté càglàd (continu à gauche limité à droite) est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}$.p.s et, $(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ est une martingale pour tout n.*

Une martingale locale positive est une surmartingale. Une martingale locale uniformément intégrable (u.i) est une martingale.

Définition 1.3.3 ***(Semimartingale)*** *Une semimartingale est un processus càdlàg adapté X admettant une décomposition de la forme :*

$$X = X_0 + M + A \tag{1.1}$$

où M est une martingale locale càdlàg nulle en 0 et A est un processus adapté à variation finie et nul en 0. Une semimartingale continue est une semimartingale *telle que dans la décomposition (1.1), M et A sont continus. Une telle décomposition où M et A sont continus, est unique.*

1.4 Processus d'Itô

Définition 1.4.1 *Un processus $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs réelles est un processus d'Itô si $\mathbb{P}.p.s$*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \tag{1.2}$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable ; b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}.p.s$:

$$\int_0^T |b_s| \, ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |\sigma_s|^2 \, ds < \infty,$$

c'est-à-dire $b \in L^1_{loc}(\mathbb{F})$ et $\sigma \in L^2_{loc}(\mathbb{F})$.

Le coefficient b est le drift ou la dérivée, σ est le coefficient de diffusion.

Si X et Y sont deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_1(s) \, ds + \int_0^t \sigma_1(s) \, dW_s, \quad \text{et} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t b_2(s) \, ds + \int_0^t \sigma_2(s) \, dW_s,$$

Proposition 1.4.1 ***(Intégration par parties)****Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

on pose

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \sigma_1(s)\,\sigma_2(s)\,ds, \quad et \quad dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Théoreme 1.4.1 ***(Formule d'Itô)*** *Soient $b \in L^1_{loc}(\mathbb{F})\,,\sigma \in L^2_{loc}(\mathbb{F})\,,$ et X un processus d'Itô définit comme dans (1.2), on note $\langle X\rangle_t := \int_0^t |\sigma_s|^2\,ds.$*
Soit $f \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})\,,$ alors

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= \partial_t f(t,X_t)\,dt + \partial_x f(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,X_t)\,d\langle X\rangle_t \\ &= \left[\partial_t f + \partial_x f b_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\,|\sigma_t|^2\right](t,X_t)\,dt + \partial_x f(t,X_t)\,\sigma_t dW_t. \end{aligned}$$

Ou bien sous la forme intégrale

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \left[\partial_t f + \partial_x f b_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\,|\sigma_t|^2\right](s,Xs)\,ds + \int_0^t \partial_x f(s,X_s)\,\sigma_s dW_s.$$

Nous finissons ce paragraphe en étendant la formule précédente au cas d'un mouvement brownien d–dimensionnel.

Théoreme 1.4.2 *Soient $W = \left(W^1,\cdots,W^d\right)^\top$ un MB d–dimensionnel,*

$$b^i \in L^1_{loc}(\mathbb{F})\,,\sigma^{i,j} \in L^2_{loc}(\mathbb{F})\,,1\le i\le n, 1\le j\le d.$$

On note $b = (b^1,\cdots,b^n)^\top$ et $\sigma := (\sigma^{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le d}$ qui prennent des valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n\times d}$ respectivement. Soit $X = (X^1,\cdots,X^n)$ un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$dX_t^i := b_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{i,j} dW_t^j, \quad i = 1,\cdots,n; \quad ou\ équivalent\,; \quad dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t.$$

On note

$$\langle X\rangle_t := \int_0^t \sigma_s\sigma_s^\top ds, \quad \textit{une matrice qui prend valeurs dans } \mathbb{S}^n.$$

Si $f : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *appartient à* $C^{1,2}$ *alors*

$$\begin{aligned} df\left(t,X_t\right) &= \partial_t f\left(t,X_t\right)dt + \partial_x f\left(t,X_t\right)dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\left(t,X_t\right) : d\langle X\rangle_t \\ &= \left[\partial_t f + \partial_x f b_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f : \left(\sigma_t\sigma_t^\top\right)\right]\left(t,X_t\right)dt + \partial_x f\left(t,X_t\right)\sigma_t dW_t. \\ &= \left[\partial_t f + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f b_t^i + \sum_{i,i=1}^n\sum_{k=1}^d \frac{1}{2}\partial_{x_i x_j} f \sigma_t^{i,k}\sigma_t^{j,k}\right]\left(t,X_t\right)dt + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^d \partial_{x_i} f\left(t,X_t\right)\sigma_t^{i,j}dW_t^j. \end{aligned}$$

On utilise les conventions : $\partial_x f = \left(\partial_{x_1} f, \cdots, \partial_{x_n} f\right)$ *est un vecteur ligne et* $\partial_{xx} f$ *est une matrice qui prend des valeur dans* $\mathbb{R}^n$.

1.5 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.5.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s,X_s\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s,X_s\right)dW_s, \tag{1.3}$$

ou sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t,X_t\right)dt + \sigma\left(t,X_t\right)dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Où X *est n-dimentionnel,* $x \in L^0\left(\mathcal{F}_0, \mathbb{R}^n\right),$ *et les fonctions*

$$b\colon\ [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \sigma\colon\ [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$$

sont $\mathbb{F}$-mesurables par rapport à (t, ω, x).

Le coefficient b s'appelle le drift et la matrice $\sigma\sigma^\top$ s'appelle la matrice de diffusion. L'inconnu est le processus X. Le problème est, comme une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.

Définition 1.5.2 *On dit que $X \in L^0(\mathbb{F}, \mathbb{R}^n)$ est une solution de l'EDS (1.3) si*
(i) $\mathbb{P}$*.p.s,* $\int_0^t \left[|b(s, X_s)| \, ds + \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 \right] ds,$
(ii) *X vérifie (1.3) c'est-à-dire :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) \, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \, dW_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \mathbb{P}.p.s.$$

On note

$$S^2(\mathbb{F}) := \left\{ X \in L^0(\mathbb{F}) : X \text{ est continue, } p.s \text{ et } \|X\|_{\infty,2}^2 := \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] < \infty \right\},$$

Théoreme 1.5.1 ***(Existence et unicité)*** *Si b et σ sont des fonctions continues, telles qu'il existe $L < +\infty$, avec*

1. $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L |x - y|$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq L(1 + |x|)$.
3. $\mathbb{E}\left(|x|^2\right) < \infty$.

Alors, pour tout $T \geq 0$, l'équation (1.3) possède une unique solution dans l'intervalle $[0, T]$. De plus cette solution $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T} \in S^2(\mathbb{F}, \mathbb{R}^n)$

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique

2.1 Formulation du problème

Soit T un temps terminal fixe et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré complet. Soient $W(\cdot)$, $Y(\cdot)$ deux mouvements browniens standards unidimensionnels indépendants. Soit $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien à n dimensions, $\mathbb{R}^{n\times d}$ l'ensemble des matrices $n \times d$. Soit $k(\cdot)$ un processus stastionnaire en point de $\mathcal{F}_t-$Poisson avec la mesure charactéristique $m(d\theta)$. On désigne par $N(d\theta, dt)$ la mesure de comptage ou mesure de poisson induite par $k(\cdot)$, définie sur $\Theta \times \mathbb{R}_+$, où Θ est un sous-ensemble fixe non vide de $\mathbb{R}$ avec sont Borel $\sigma - champ$ $\mathcal{B}(\Theta)$ et $\tilde{N}(d\theta, dt) = N(d\theta, dt) - m(d\theta)dt$.

$\int_\Theta (1 \wedge |\Theta|^2) m(d\theta) < \infty$ et $m(\Theta) < +\infty$. Soient $\mathcal{F}_t^W, \mathcal{F}_t^Y$ et $\mathcal{F}_t^N$ la filtration par rapport à $W(\cdot), Y(\cdot)$ et $N(\cdot)$, respectivement.

On suppose que :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_t^Y \vee \mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ désigne la totalité des ensembles $\mathbb{P}$-nuls. On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (resp. $|\cdot|$) le produit scalaire (resp, norm), $\mathbb{E}$ est l'espérance sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

De plus, on note par

(1) $\mathbb{L}^2(r, s; \mathbb{R}^n)$ est l'espace de fonction déterministe $B(\cdot)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\int_r^s |B(t)|^2 dt < +\infty.$$

(2) $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{R}^n)$ est l'espace de variable aléatoire ϕ $\mathcal{F}_t-$measurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathbb{E}|\phi|^2 < +\infty.$$

(3) $\mathbb{L}^2(r, s; \mathbb{R}^n)$ est l'espace de processus $\psi(\cdot)$ $\mathcal{F}_t-$adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathbb{E}\int_r^s |\psi(t)|^2 dt < +\infty.$$

(4) $\mathbb{M}^2([0, T]; \mathbb{R})$ est l'espace de processus $g(\cdot)$ $\mathcal{F}_t-$measurable adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_\Theta |g(t, \theta)|^2 m\,(d\theta)\,dt < +\infty$$

Soit U un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^K$. Un contrôle v est un processus $\mathcal{F}_t^Y-$ adapté avec des valeurs dans U satisfait $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|v_t|^n < \infty, n = 2, 3, 4\ldots$ On note par $\mathcal{U}_{ad}([0, T])$ l'ensemble des variables de contrôle admissibles.

Pour un processus de contrôle donné $v(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}([0, T])$, la dynamique du système contrôlé prend le type suivant :

$$\begin{cases} dx^v(t) = \mathfrak{f}(t, x^v(t), v(t))dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))dW(t) \\ +c(t, x^v(t), v(t))d\tilde{W}(t) + \displaystyle\int_\Theta g(t, x^v(t_-), v(t), \theta)\tilde{N}(d\theta, dt) \\ x^v(0) = x_0, t \in [0, T], \end{cases} \tag{2.1}$$

où les coefficients

$$\mathfrak{f} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$

$$c : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$

$$g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$

sont des fonctions déterministes données.

Supposons que les processus d'état $x^v(\cdot)$ ne peuvent pas observé directement, mais les contrôleurs peuvent observer un processus $Y(\cdot)$,qui est régi par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dY(t) = h(t, x^v(t), v(t))dt + d\tilde{W}(t) \\ Y(0) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^r$, et $W(\cdot)$ est un processus stochastique dépendant du contrôle $v(\cdot)$.

Remarque 2.1.1 *Notez que si le terme de diffusion $c \neq 0$ dans l'équation (2.1), alors il existe le bruit corrélé $\tilde{W}(\cdot)$ entre l'état et l'observation.*

Considérons la fonction de coût :

$$J(v(\cdot)) = \mathbb{E}^v \left[\int_0^T l(t, x^v(t), v(t))dt + \psi(x^v(T)) \right]. \tag{2.3}$$

Ici

$$l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}, \psi{:}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

où $\mathbb{E}^v$ représente l'espérance mathématique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^v)$.

On suppose les hypothèses suivantes :

(**H1**) : Les fonctions $\mathfrak{f}, \sigma, c, l : [0,T] \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables dans toutes les variables, de plus : $\mathfrak{f}(t,\cdot,v), \sigma(t,\cdot,v), c(t,\cdot,v), l(t,\cdot,v), g(t,\cdot,v,\theta) \in C_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\psi(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$,$\forall v \in U$.

(**H2**) : On pose $\varphi(x) = \mathfrak{f}(t,x,v), \sigma(t,x,v), c(t,x,v), l(t,x,v), g(t,x,v,\theta), \psi(x)$, la fonction $\varphi(\cdot)$ vérifie les propriétés suivantes.

(i) Pour fixe $x \in \mathbb{R}$ et la fonction $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}_b^1$.

(ii) Tous les dérivées φ_x et $\varphi = \mathfrak{f}, \sigma, c, l, \psi$ sont bornées et continues, avec des constantes indépendantes de $v \in U$. De plus, il existe une constante $C(T, m(\Theta)) > 0$ indépendant de v et Θ telle que :

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\partial_x g(t,x,u,\theta)| \leq C.$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} |g_x(t,x,u,\theta) - g_x(t,x',u,\theta)| \leq C[|x - x^{'}|],$$

(iii) La fonction h us continûment dérivable en x et continue en v, ses dérivées et h sont toutes uniformément bornées.

Clairement, sous les hypothèses (**H1**) et (**H2**), pour tout $v(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])$ l'EDS

(2.1) admet une solution unique $x^v(t)$ donnée par

$$x^v(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^v(s), v(s))ds + \sigma(s, x^v(s), v(s))dW(s)$$
$$+c(s, x^v(s), v(s))d\tilde{W}(s) + \int_0^t \int_\Theta g(s, x^v(s_-), v(s), \theta)\tilde{N}(d\theta, ds).$$

Nous définissons $d\mathbb{P}^v = \rho^v(t)d\mathbb{P}$ avec

$$\rho^v(t) = \exp\left\{\int_0^t h(s, x^v(s), v(s))dY(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |h(s, x^v(s), v(s))|^2 ds\right\},$$

où $\rho^v(\cdot)$ est la solution unique $\mathcal{F}_t^Y-$adaptée de l'équation différentielle stochastique linéaire :

$$\begin{cases} d\rho^v = \rho^v(t)h(t, x^v(t), v(t))dY(t), \\ \rho^v(0) = 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

D'après la formule d'It'ô, on peut prouver que

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\rho_t^v|^m < \infty, m = 2, 3, \ldots$$

Par conséquent, d'après le théorème de Girsanov et l'hypothèse (**H1**) **et** (**H2**), $W(\cdot), \tilde{W}(\cdot)$ sont deux mouvement brownien standard de deux dimensions définies sur le nouvel espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^v)$,

Notre problème de contrôle optimal partiellement observé devient le problème de minimisation suivant : minimiser la fonction de coût dans (2.3), pour $v(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])$ sous réserve à (2.1)-(2.2) telle que :

$$J(u(\cdot)) = \inf_{v(.)\in\mathcal{U}_{ad}([0,T])} J(v(\cdot)). \tag{2.5}$$

Nous pouvons réécrire la fonction de coût (2.3) comme :

$$J(v(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \rho^v(t) l(t, x^v(t), v(t)) dt + \rho^v(T)\psi(x^v(T))\right]. \tag{2.6}$$

Donc le problème d'optimisation d'origine équivaut à minimiser (2.6), pour $v(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])$, sous réserve à (2.1)-(2.4). L'objectif principal de ce travail est de prouver le principe du maximum stochastique, également appelé conditions nécessaires d'optimalité pour le contrôle optimal partiellement observé.

2.2 Conditions nécessaires d'optimalité

Dans cette section, nous prouvons les conditions nécessaires d'optimalité à notre problème de contrôle optimal partiellement observé pour les équations différentielles stochastiques avec sauts. La preuve est basée sur le théorème de Girsanov et sur l'introduction des équations variationnelles avec quelques estimations de leurs solutions.

Nous définissons la fonction Hamiltonienne H associé à notre problème par :

$$\begin{aligned} H(t, x, \mu, v, \Phi, Q, \bar{Q}, K, R) &= l(t, x, \mu, v) + \mathfrak{f}(t, x, \mu, v)\Phi + \sigma(t, x, \mu, v)Q \\ &\quad + c(t, x, \mu, v)\bar{Q} + h(t, x, v)K + \int_\Theta h(t, x, \mu, v, \theta)R(\theta)m(d\theta). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Soit $(u(\cdot), x(\cdot))$ la solution optimale du problème de contrôle (2.1)-(2.5), pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et $v(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])$, on définit le contrôl variationnel par $v^\varepsilon(\cdot) = u(\cdot) + \varepsilon v(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])$. On note par $x^\varepsilon(\cdot), x(\cdot), \rho^\varepsilon(\cdot), \rho(\cdot)$ les trajectoires associé à (2.1) et (2.4) correspondent respectivement à $v^\varepsilon(\cdot)$ et $u(\cdot)$.

Pour simplifier, nous introduisons la notation abrégée

$$\varphi(t) = \varphi(t, x(t), u(t),$$
$$\varphi^{\varepsilon}(t) = \varphi(t, x^{\varepsilon}(t), v^{\varepsilon}(t)),$$

et

$$g(t,\theta) = g(t, x(t_{-}), u(t), \theta),\ \ h(t) = h(t, x(t), u(t)),$$

$$g^{\varepsilon}(t,\theta) = g(t, x^{\varepsilon}(t_{-}), v^{\varepsilon}(t), \theta),\ \ h^{\varepsilon}(t) = h(t, x^{\varepsilon}(t), v^{\varepsilon}(t)),$$

Maintenant, nous introduisons les équations variationnelles suivantes :

$$\begin{cases} d\phi(t) = [\mathfrak{f}_x(t)\phi(t)]dt + [\sigma_x(t)\phi(t)]dW(t) \\ \qquad\qquad + [c_x(t)\phi(t)]d\tilde{W}(t) + \displaystyle\int_{\Theta} [g(t,\theta)\phi(t)]\, N(d\theta, dt) \\ \phi(0) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

et

$$\begin{cases} d\rho_1(t) = [\rho_1(t)h(t) + \rho(t)h_x(t)\phi(t) + \rho(t)h_v(t)v(t)]dY(t), \\ \rho_1(0) = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

Sous l'hypothèse **(H1)** et **(H2)**, l'équation (2.8) et (2.9) admet une unique solution adaptée $\phi(\cdot)$ et $\rho_1(\cdot)$, respectivement.

Nous introduisons l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} -dy(t) = l(t)dt - z(t)dW(t) - K(t)d\tilde{W} \\ -\displaystyle\int_{\Theta} R(t,\theta)\tilde{N}(d\theta, dt), \\ y(T) = \psi(x(T)), \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{cases} -d\Phi(t) = [\mathfrak{f}_x(t)\Phi(t) + \sigma_x(t)Q(t) + c_x(t)\bar{Q}(t) \\ +l_x(t) + \int_\Theta [g_x(t,\theta)R(t,\theta)] \times m(d\theta) + h_x(t)K(t)]dt \\ -Q(t)dW(t) - \bar{Q}(t)d\tilde{W}(t) - \int_\Theta R(t,\theta)\tilde{N}(d\theta,dt), \\ \Phi(t) = \psi_x(x(T)). \end{cases} \tag{2.11}$$

Clairement, sous les Hypothèses (**H1**) et (**H2**), il est facile de prouver que l'EDSR (2.10) et (2.11) admet une solution forte unique, donnée par

$$\begin{aligned} y(T) = \psi(x(T)) - \int_t^T l(s)ds + \int_t^T z(s)dW(s) \\ + \int_t^T K(s)d\tilde{W}(s) + \int_t^T \int_\Theta R(s,\theta)\tilde{N}(d\theta,ds). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \psi_x(x(T)) &- \int_t^T [\mathfrak{f}_x(s)\Phi(s) + \sigma_x(s)Q(s) + c_x(s)\bar{Q}(s) + l_x(s) \\ &+ \int_\Theta [g_x(s,\theta)R(s,\theta)] \times m(d\theta) + h_x(s)K(s)]ds \\ &+ \int_t^T Q(s)dW(s) + \int_t^T \bar{Q}(s)d\tilde{W}(s) + \int_t^T \int_\Theta R(s,\theta)\tilde{N}(d\theta,ds), \end{aligned}$$

Maintenant, le résultat principale de ce mémoire est énoncé dans le théorème suivant.

Théoreme 2.2.1 *Soit $(u(\cdot), x(\cdot))$ la solution optimale du problème de contrôle (2.1) et (2.5). Sous* (**H1**) *et* (**H2**)*. Alors il existe $(\Phi(\cdot), Q(\cdot), Q(\cdot), K(\cdot), R(\cdot,\theta))$ solution de (2.11), telle que, $\forall v \in U$, on a*

$$\mathbb{E}^u[H_v(t, x(t), u(t), \Phi(t), Q(t), \bar{Q}(t), K(t), R(t,\theta))(v(t) - u(t)|\mathcal{F}_t^Y] \geq 0,$$

où la fonction Hamiltonienne H est définie par (2.7).

Afin de prouver notre résultat principal dans (Théoréme 2.2.1), nous présentons quelques résultats auxiliaires.

Lemme 2.2.1 *Supposons que (***H1***) et (***H2***) sont vérifies, alors on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0<t<T}|x^{\varepsilon}(t)-x(t)|^2\right]=0.$$

Preuve. En application des estimations standards, l'inégalité de Boukholder-Davis-Gundu on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0<t<T}|x^{\varepsilon}(t)-x(t)|^2\right] &\leq \mathbb{E}\int_0^t|\mathfrak{f}^{\varepsilon}(s)-\mathfrak{f}(s)|^2ds+\mathbb{E}\int_0^t|\sigma^{\varepsilon}(s)-\sigma(s)|^2ds\\ &+\mathbb{E}\int_0^t|c^{\varepsilon}(s)-c(s)|^2ds+\mathbb{E}\int_0^t\int_{\Theta}|g^{\varepsilon}(s,\theta)-g(s,\theta)|^2m(d\theta)ds.\end{aligned}$$

D'après les conditions de Lipschitz sur les coefficients $\mathfrak{f},\sigma$,c et g par rapport à x et u,on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0<t<T}|x^{\varepsilon}(t)-x(t)|^2\right] &\leq C_T\mathbb{E}\int_0^t[|x^{\varepsilon}(t)-x(t)|^2]ds\\ &+C_T\varepsilon^2\mathbb{E}\int_0^t|v(s)|^2ds\end{aligned}\tag{2.12}$$

D'après (2.12), on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0<t<T}|x^{\varepsilon}(t)-x(t)|^2\right]\leq C_T\mathbb{E}\int_0^t\sup_{r\in[0,s]}|x^{\varepsilon}(r)-x(r)|^2ds+M_{_{T\varepsilon^2}}.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, le résultat souhaité suit immédiatement lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ ■

Lemme 2.2.2 *On suppose que (**H1**) et (**H2**) soient vérifies, alors on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<t<T} \mathbb{E}|\frac{x^{\varepsilon}(t) - x(t)}{\varepsilon} - \phi(t)|^2 = 0. \tag{2.13}$$

Preuve. Nous mettons

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \frac{x^{\varepsilon}(t) - x(t)}{\varepsilon} - \phi(t), t \in [0, T],$$

Pour simplifier, nous utilisons les notations suivantes pour $\varphi = f, \sigma, c, l$ et g :

$$\varphi_x^{\lambda,\varepsilon}(t) = \varphi_x(t, x^{\lambda,\varepsilon}, v^{\varepsilon}(t)),$$

$$g_x^{\lambda,\varepsilon}(t,\theta) = g_x(t, x^{\lambda,\varepsilon}, v^{\varepsilon}(t), \theta),$$

et

$$\begin{aligned}
x^{\lambda,\varepsilon}(s) &= x(s) + \lambda\varepsilon(\eta^{\varepsilon}(s) + \phi(s)), \\
\hat{x}^{\lambda,\varepsilon}(s) &= x(s) + \lambda\varepsilon(\hat{\eta}^{\varepsilon}(s) + \hat{\phi}(s)), \\
v^{\lambda,\varepsilon}(s) &= u(s) + \lambda\varepsilon v(s).
\end{aligned}$$

Pour $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
\eta^{\varepsilon}(t) = &\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\mathfrak{f}^{\varepsilon}(s) - \mathfrak{f}(s)]ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma(s)]dW(s) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \int_{\Theta} [g^{\varepsilon}(s,\theta) - g(s,\theta)]\tilde{N}(d\theta, ds) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [c^{\varepsilon}(s) - c(s)]d\tilde{W}(s) \\
&- \int_0^t [\mathfrak{f}_x(s)\phi(s) + \mathfrak{f}_v(s)v(s)]ds - \int_0^t [\sigma_x(s)\phi(s) + \sigma_v(s)v(s)]dW(s) \\
&- \int_0^t [c_x(s)\phi(s) + c_v(s)v(s)]d\tilde{W}(s) - \int_0^t \int_{\Theta} [\mathfrak{g}_x(s,\theta)\phi(s) + \mathfrak{g}_v(s,\theta)v(s)]\tilde{N}(d\theta, ds).
\end{aligned}$$

Nous décomposons $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 [\mathfrak{f}^\varepsilon(s) - \mathfrak{f}(s)]ds$ dans les trois parties suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\mathfrak{f}^\varepsilon(s) - \mathfrak{f}(s)]ds = & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\mathfrak{f}^\varepsilon(s) - \mathfrak{f}(s, x(s), v^\varepsilon(s)]ds \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\mathfrak{f}(s, x(s), v^\varepsilon(s)) - \mathfrak{f}(s, x(s), v^\varepsilon(s)]ds \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\mathfrak{f}(s, x(s), v^\varepsilon(s)) - \mathfrak{f}(s)]ds.\end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\mathfrak{f}^\varepsilon(s) - \mathfrak{f}(s, x(s), v^\varepsilon(s)]ds \\ &\quad = \int_0^t \int_0^1 [f_x^{\lambda,\varepsilon}(s)(\eta^\varepsilon(s) + \phi(s)]d\lambda ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t [\mathfrak{f}(s, x(s), v^\varepsilon(s) - \mathfrak{f}(s)]ds \\ &\quad = \int_0^t \int_0^1 [\mathfrak{f}_v(s, x(s), v^{\lambda,\varepsilon}(s))v(s)]d\lambda ds.\end{aligned}$$

En appliquant la même décomposons pour σ, c et g, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |\eta^\varepsilon(s)|^2\right] = & C(t)\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 |\mathfrak{f}_x^{\lambda,\varepsilon}(s)\eta^\varepsilon(s)|^2 d\lambda ds\right. \\ & + \int_0^t \int_0^1 |\sigma_x^{\lambda,\varepsilon}(s)\eta^\varepsilon(s)|^2 d\lambda ds + \int_0^t \int_0^1 |c_x^{\lambda,\varepsilon}(s)\eta^\varepsilon(s)|^2 d\lambda ds \\ & + \int_0^t \int_\Theta \int_0^1 |g^{\lambda,\varepsilon}(s,\theta)\eta^\varepsilon(s)|^2 d\lambda m(d\theta)ds + C(t)\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |\gamma^\varepsilon(s)|^2\right],\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma^\varepsilon(t) &= \int_0^t\int_0^1 [\mathfrak{f}_x^{\lambda,\varepsilon}(s) - f_x(s)]\phi(s)d\lambda ds + \int_0^t\int_0^1 [\mathfrak{f}_v(s,x(s),v^{\lambda,\varepsilon}(s)) - \mathfrak{f}_v(s)]v(s)d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1 [\sigma_x^{\lambda,\varepsilon}(s) - \sigma_x(s)]\phi(s)d\lambda dW(s) \\
&+ \int_0^t\int_0^1 [\sigma_v(s,x(s),v^{\lambda,\varepsilon}(s)) - \sigma_v(s)]v(s)d\lambda dW(s) \\
&+ \int_0^t\int_0^1 [c_x^{\lambda,\varepsilon}(s) - c_x(s)]\phi(s)d\lambda d\tilde{W}(s) \\
&+ \int_0^t\int_0^1 [c_v(s,x(s),v^{\lambda,\varepsilon}(s)) - c_v(s)]v(s)d\lambda d\tilde{W}(s) \\
&+ \int_0^t\int_\Theta\int_0^1 [g_x^{\lambda,\varepsilon}(s,\theta) - g_x(s,\theta)]\phi(s_-)d\lambda\tilde{N}(d\theta,ds) \\
&+ \int_0^t\int_\Theta\int_0^1 [g_v(s,x(s),v^{\lambda,\varepsilon}(s),\theta) - g_v(s,\theta)]v(s)d\lambda\tilde{N}(d\theta,ds).
\end{aligned}$$

Maintenant les dérivés de $\mathfrak{f},\sigma,c$ et g par rapport à (x,v) sont Lipschitz continues dans (x,v), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\gamma^\varepsilon(s)|^2\right] = 0.$$

Puisque les dérivés de $\mathfrak{f},\sigma,c$ et γ sont bornés par rapport à (x,v), on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\eta^\varepsilon(s)|^2\right] \leq C(t)\left\{\int_0^t |\eta^\varepsilon(s)|^2 ds + \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\gamma^\varepsilon(s)|^2\right]\right\}.$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient $\forall t\in[0,T]$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\eta^\varepsilon(s)|^2\right] \leq C(t)\left\{\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\gamma^\varepsilon(s)|^2\right]\exp\left\{\int_0^t C(s)ds\right\}\right\}.$$

Enfin on pose $t=T$ et $\varepsilon\to 0$, la preuve de (lemme 2.2.2) on obtient le résultat souhaité. ∎

Maintenant, nous introduisons le lemme suivant qui joue un rôle important dans le calcul de l'inégalité variationnelle pour la fonction de coût (2.6) sujet à (2.1) et

(2.4).

Lemme 2.2.3 *Soit* (**H1**) *vérifie, alors on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0<t<T}\mathbb{E}|\frac{\rho^{\varepsilon}(t)-\rho(t)}{\varepsilon}-\rho_1(t)|^2=0. \tag{2.14}$$

Preuve. D'après la définition de $\rho(\cdot)$ et $\rho_1(\cdot)$,on obtient

$$\begin{aligned}\rho(t)+\varepsilon\rho_1(t) &= 1+\int_0^t\rho(s)h(s)dY(s)+\varepsilon\int_0^t[\rho_1(s)h(s)+\rho(s)h_x(s)\phi(s)\\ &+\rho(s)h_v(s)v(s)]dY(s)\\ &=1+\varepsilon\int_0^t\rho_1(s)h(s)dY(s)+\int_0^t\rho_1(s)h(s,x(s)+\varepsilon\phi(s),u(s)+\varepsilon v(s))dY(s)\\ &-\varepsilon\int_0^t\rho(s)[A^{\varepsilon}(s)]dY(s).\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}A^{\varepsilon}(s)&=\int_0^1[h_x(s,x(s)+\lambda\varepsilon\phi(s),u(s)+\lambda\varepsilon v(s))-h_x(s)d\lambda\phi(s)\\ &+\int_0^1[h_v(s,x(s)+\lambda\varepsilon\phi(s),u(s)+\lambda\varepsilon v(s))-h_v(s)d\lambda v(s).\end{aligned}$$

On a

$$
\begin{aligned}
\rho^\varepsilon(t)-\rho(t)-\varepsilon\rho_1(t) &= \int_0^t \rho^\varepsilon(s)h^\varepsilon(s)dY(s)-\varepsilon\int_0^t \rho_1(s)h(s)dY(s)\\
&- \int_0^t \rho(s)h(s,x(s)+\varepsilon\phi(s),u(s)+\varepsilon v(s))dY(s)\\
&+\varepsilon\int_0^t \rho(s)[A^\varepsilon(s)]dY(s)\\
&= \int_0^t (\rho^\varepsilon(s)-\rho(s)-\varepsilon\rho_1(s))h^\varepsilon(s)dY(s)\\
&+ \int_0^t (\rho(s)+\varepsilon\rho_1(s))[h^\varepsilon(s)-h(s,x(s)+\varepsilon\phi(s),u(s)+\varepsilon v(s))dY(s)\\
&+\varepsilon\int_0^t \rho_1(s)h(s,x(s)\\
&+\varepsilon\phi(s),u(s)+\varepsilon v(s))dY(s)-\varepsilon\int_0^t \rho_1(s)h(s)dY(s)\\
&+\varepsilon\int_0^t \rho(s)[A^\varepsilon(s)]dY(s)\\
&= \int_0^t (\rho^\varepsilon(s)-\rho(s)-\varepsilon\rho_1(s))h^\varepsilon(s)dY(s)\\
&+ \int_0^t (\rho(s)+\varepsilon\rho_1(s))[B_1^\varepsilon(s)]dY(s)\\
&+\varepsilon\int_0^t \rho_1(s))[B_2^\varepsilon(s)]dY(s)+\varepsilon\int_0^t \rho(s)[A^\varepsilon(s)]dY(s),
\end{aligned}
$$

où

$$B_1^\varepsilon(s)=h^\varepsilon(s)-h(s,x(s)+\varepsilon\phi(s),u(s)+\varepsilon v(s)),$$

$$B_2^\varepsilon(s)=h(s,x(s)+\varepsilon\phi(s),u(s)+\varepsilon v(s))-h(s).$$

Noter que

$$B_1^\varepsilon(s)=\int_0^1 [h_x(s,x(s)+\varepsilon\phi(s)+\lambda(x^\varepsilon(s)-x(s)-\varepsilon\phi(s),v^\varepsilon(s))]d\lambda(x^\varepsilon(s)-x(s)-\varepsilon\phi(s)).$$

D'après le lemme2.2.1, nous savons que

$$\mathbb{E}\int_0^t |(\rho(s)+\varepsilon\rho_1(s))B_1^\varepsilon(s)|^2 ds \leq C_\varepsilon \varepsilon^2, \tag{2.15}$$

C_ε désigne une constante non négative telle que : $C_\varepsilon \to 0$ comme $\varepsilon \to 0$. ■

De plus, il est facile de voir que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[\varepsilon \int_0^t \rho(s)[A^\varepsilon(s)]dY(s)\right]^2 \leq C_\varepsilon \varepsilon^2. \tag{2.16}$$

Et

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[\varepsilon \int_0^t \rho_1(s)[B_2^\varepsilon(s)]dY(s)\right]^2 \leq C_\varepsilon \varepsilon^2. \tag{2.17}$$

On utilisant (2.15), (2.16), et (2.17) on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\rho^\varepsilon(t)-\rho(t)-\varepsilon\rho_1(t)|^2 \\
&\leq \left[C\int_0^t \mathbb{E}|(\rho^\varepsilon(s)-\rho(s)-\varepsilon\rho_1(s)|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^t |(\rho(s)+\varepsilon\rho_1(s))B_1^\varepsilon(s)|^2 ds\right. \\
&\left.+\sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\left(\varepsilon\int_0^t \rho(s)A^\varepsilon(s)dY(s)\right)^2 + \sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}\left(\varepsilon\int_0^t \rho_1(s)B_2^\varepsilon(s)dY(s)\right)^2\right] \\
&\leq C\int_0^t |(\rho^\varepsilon(s)-\rho(s)-\varepsilon\rho_1(s)|^2 ds + C_\varepsilon\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Enfin, d'après l'inégalité de Grownball, la preuve de (lemme 2.2.3) est complete.

Lemme 2.2.4 *Soit* (**H1**) *vérifie, alors on a*

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}\int_0^T &[\rho_1(t)l'(t)+\rho(t)l_x(t)\phi(t) \\
&+\mathbb{E}[\rho_1(T)\psi\left(x(T)\right)]+\mathbb{E}[\rho(T)\psi_x\left(x(T)\right)\phi(t)].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Preuve. *On Utilisant le développement de Taylor, lemmes 2.2.2 et 2.2.3, on* *trouve*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\mathbb{E}\left[\rho^{\varepsilon}(T)\psi(x^{\varepsilon}(T)-\rho(T)\psi(x(T)\right]$$
$$=\mathbb{E}\left[\rho_1(T)\psi(x(T)+\rho(T)\psi(x(T))\phi(T)\right],$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\mathbb{E}\int_0^T[\rho^{\varepsilon}(t)l'^{\varepsilon}(t)-\rho(t)l(t)]=\mathbb{E}\int_0^T[\rho_1(t)l'(t)+\rho(t)l_x(t)\phi(t)+\rho(t)l_v(t)v(t).$$

Ensuite, par le fait que

$$\varepsilon^{-1}[J(v^{\varepsilon}(t))-J(u(t))]\geq 0,$$

on désigne la conclusion souhaitée. ■

Noter que :

$$\begin{cases} d\tilde{\rho}(t)=\{h_x(t)\phi(t)+h_v(t)v(t)\}d\tilde{W}(t),\\ \tilde{\rho}(0)=0.\end{cases}\tag{2.19}$$

Où $\tilde{\rho}(t)=\rho^{-1}(t)\rho_1(t)$.

En appliquant la formule d'Ito, à $\Phi(t)\phi(t), y(t)\tilde{\rho}(t)$ et en prenant l'esperance respectivement, où $\phi(0)=0, \tilde{\rho}(0)=0$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^u[\Phi(T)\phi(T)] &= \mathbb{E}^u\int_0^T\Phi(t)d\phi(t)+\mathbb{E}^u\int_0^T\phi(t)d\Phi(t)\\ &+\mathbb{E}^u\int_0^T Q(t)[\sigma_x(t)\phi(t)+\sigma_v(t)v(t)]dt+\mathbb{E}^u\int_0^T\bar{Q}(t)[c_x(t)\phi(t)+c_v(t)v(t)]dt\\ &+\mathbb{E}^u\int_0^T\int_{\Theta}R(t,\theta)[g_x(t,\theta)\phi(t)+g_v(t,\theta)v(t)]m(d\theta)dt \qquad (2.20)\\ &=\mathbb{I}_1+\mathbb{I}_2+\mathbb{I}_3+\mathbb{I}_4.\end{aligned}$$

Tout d'abord, notez que

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1 &= \mathbb{E}^u \int_0^T \Phi(t) d\phi(t) = \mathbb{E}^u \int_0^T \Phi(t)[\mathfrak{f}_x(t)\phi(t) + \mathfrak{f}_v(t)v(t)]dt \\ &= \mathbb{E}^u \int_0^T \Phi(t)\mathfrak{f}_x(t)\phi(t)dt + \mathbb{E}^u \int_0^T \Phi(t)\mathfrak{f}_v(t)v(t)dt.\end{aligned}$$

Nous procédons à l'estimation de $\mathbb{I}_2$, à partir de l'équation 2.11, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_2 &= \mathbb{E}^u \int_0^T \phi(t) d\Phi(t) \\ &= -\mathbb{E}^u \int_0^T \phi(t)[\mathfrak{f}_x(t)\Phi(t) + \sigma_x(t)Q(t) + c_x(t)\bar{Q}(t) + l_x(t) \\ &\quad + \int_\Theta [R(t,\theta)g_x(t,\theta)+]m(d\theta) + h_x(t)K(t)]dt,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_2 &= -\mathbb{E}^u \int_0^T \phi(t)\mathfrak{f}_x(t)\Phi(t)dt - \int_0^T \phi(t)\mathbb{E}^u[\partial_\mu \hat{\mathfrak{f}}(t)\hat{\Phi}(t)] \\ &- \mathbb{E}^u \int_0^T \phi(t)\sigma_x(t)Q(t)dt - \mathbb{E}^u \int_0^T \phi(t)c_x(t)\bar{Q}(t)dt \\ &- \mathbb{E}^u \int_0^T \phi(t)l_x(t)dt - \mathbb{E}^u \int_0^T \int_\Theta \phi(t)R(t,\theta)g_x(t,\theta)m(d\theta)dt \\ &- \mathbb{E}^u \int_0^T \phi(t)h_x(t)K(t)]dt.\end{aligned}$$

De même, on peut obtenir :

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_3 &= \mathbb{E}^u \int_0^T Q(t)[\sigma_x(t)\phi(t) + \sigma_v(t)v(t)]dt \\ &+ \mathbb{E}^u \int_0^T \bar{Q}(t)[c_x(t)\phi(t)] + c_v(t)v(t)]dt,\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{I}_4 = \mathbb{E}^u \int_0^T \int_\Theta R(t,\theta)[g_x(t,\theta)\phi(t) + g_v(t,\theta)v(t)]m(d\theta)dt.$$

En appliquant la formule d'Itô à $y(t)\tilde{\rho}(t)$ et en prenant l'esperance ,on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^u[y(T)\tilde{\rho}(T)] \\
&\quad = \mathbb{E}^u \textstyle\int_0^T y(t)d\tilde{\rho}(t) + \mathbb{E}^u \int_0^T \tilde{\rho}(t)dy(t) \\
&\quad\quad + \mathbb{E}^u \textstyle\int_0^T K(t)[h_x(t)\phi(t) + h_v(t)v(t)]dt \\
&\quad = \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_2 + \mathbb{J}_3,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

où

$$\mathbb{J}_1 = \mathbb{E}^u \int_0^T y(t)d\tilde{\rho}(t),$$

$$\mathbb{J}_2 = \mathbb{E}^u \int_0^T \tilde{\rho}(t)dy(t) = -\mathbb{E}^u \int_0^T \tilde{\rho}(t)l(t)dt,$$

et

$$\mathbb{J}_3 = \mathbb{E}^u \int_0^T K(t)[h_x(t)\phi(t) + h_v(t)v(t)]dt,$$

Enfin, en remplaçant (2.20), (2.21) dans (2.18), cela achève la preuve de Théorème 2.2.1.

Chapitre 3

Application.

3.1 Problème de contrôle linéaire quadratique partiellement observé avec sauts.

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de contrôle optimal partiellement observé pour le problème de contrôle linéaire quadratique avec diffusion par sauts. Le système stochastique est décrit par un ensemble des équations différentielles stochastiques linéaires et le coût est décrit par une fonction quadratique.

Considérez le système de contrôle observé partiel suivant :

$$\begin{cases} dx^v(t) = \mathfrak{f}(t, x^v(t), v(t))dt + \sigma(t, x^v(t), v(t))dW(t) \\ +c(t, x^v(t), v(t))d\tilde{W}(t) + \int_\Theta g(t, x^v(t_-), v(t), \theta)\tilde{N}(d\theta, dt) \\ x^v(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{f}(t, x^v(t), v(t)) &= A(t)x(t) + C(t)v(t), \\
\sigma(t, x^v(t), v(t)) &= D(t), \\
c(t, x^v(t), v(t)) &= 0, \\
g(t, x^v(t_-), v(t), \theta) &= F(t), \\
h(t, x^v(t), v(t)) &= G(t),
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{cases}
dY(t) = G(t)dt + d\tilde{W}(t), \\
Y(0) = 0.
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

La fonction de coût quadratique donnée par :

$$
J(v(\cdot)) = \mathbb{E}^u \left[\int_0^T L(t)v^2(t)dt + M_T x^2(T) \right]. \tag{3.3}
$$

Ici, les coefficients $A(\cdot), C(\cdot), D(\cdot), F(\cdot), G(\cdot), L(\cdot)$ sont des fonctions continues bornées et $M_T \geq 0$. Pour tout $v \in \mathcal{U}_{ad}([0,T)]$, l'équation (3.1) et (3.2) admet des solution unique respectivement.

Notre objectif est de trouver explicitement un contrôle optimal qui minimise la fonction de coût $J(v(\cdot))$, sachant que (3.1) et (3.2) sont vérifiés.

Maintenant, nous commençons à chercher l'expression explicite du contrôle optimal.

Commençons par écrire la fonction Hamiltonienne H **:**

$$
\begin{aligned}
H(t, x, v, \Phi, Q, \bar{Q}, R(\cdot)) &= [A(t)x(t) + C(t)v(t)]\Phi(t) \\
&\quad + D(t)Q(t) + G(t)K(t) + L(t)v^2(t) + \int_\Theta F(t)R(t,\theta)m(d\theta),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

où $x(\cdot)$ est la trajectoire optimale, solution de l'équation (3.1) correspondant au contrôle optimal $u(\cdot)$.

D'après le Théorème 2.2.1, le contrôle optimal $u(\cdot)$ satisfait l'expression suivante :

$$u(t) = -\frac{1}{2}L^{-1}(t)C(t)\mathbb{E}\left[\Phi(t)|\mathcal{F}_t^Y\right], \tag{3.5}$$

où $(\Phi(\cdot), Q(\cdot), \bar{Q}(\cdot), R(\cdot,\cdot))$ est la solution de l'EDSR suivante :

$$\begin{aligned} -d\Phi(t) &= [A(t)\Phi(t)]\,dt - Q(t)dW(t) \\ &\quad - \bar{Q}(t)d\tilde{W}(t) - \int_\Theta R(t,\theta)d\tilde{N}(d\theta, dt), \\ \Phi(T) &= 2M_T x(T). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Conclusion

*D*ans ce travail, nous avons étudié les conditions nécessaires d'optimalité pour un problème de contrôle optimal stochastique partiellement observé, où le système contrôlé est régie par des équations différentielles avec sauts. Le domaine de contrôle est supposé convexe. En transformant le problème d'observation partielle a un problème comlètement observé. Finallement, un problème de contrôle linéaire-quadratique partiellement observé avec des sauts a été résolu explicitement.

Bibliographie

[1] Lakhdari, I. E., Miloudi, H., & Hafayed, M. (2021). Stochastic maximum principle for partially observed optimal control problems of general McKean–Vlasov differential equations. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 47(4), 1021-1043.

[2] Miloudi, H., Meherrem, S., Eddine Lakhdari, I., & Hafayed, M. (2021). Necessary conditions for partially observed optimal control of general McKean–Vlasov stochastic differential equations with jumps. International Journal of Control, 1-12.

[3] Wang, G. C., & Wu, Z. (2009). General maximum principles for partially observed risk-sensitive optimal control problems and applications to finance. Journal of Optimization Theory and Applications, 141(3), 677-700.

[4] Wang, G., Wu, Z., & Zhang, C. (2014, July). Maximum principles for partially observed mean-field stochastic systems with application to financial engineering. In Proceedings of the 33rd Chinese control conference (pp. 5357-5362). IEEE.