République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Ababsa Mouaki Hana

Titre :

Résolution du problème de Dirichlet en utilisant le calcul stochastique

Membres du Comité d'Examen :

MANSOURI Badereddine	UMKB	Président
LABED Boubakeur	UMKB	Encadreur
BENABBA Fadhila	UMKB	Examinatrice

27 juin 2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A *le personne que la vie ne lui a pas donné pour vivre plus long temps .A une âme que j'ai toujours voulue avec moi, surtout en ce moment Au défunt qui a quitté mon cœur mon cher père* ***Laroussi*** ♡(allah yarhmo)

A *ma mère* **Hayat** ♡

A *mes soeurs,* **Sabrina**♡, **Salsabil**♡,***Nardjes*** ♡, ***Tasnime*** ♡

A *mon frère et mon bras droit* ***Abd Elmadjid*** ♡

A *ma trés cher* **SouSou** ♡,**Fatima**♡, **Djihan**♡,**Nesrine**♡, ***Manal*** ♡, **Rim**♡,**Marwa** ♡,**Zahra** ♡**,Assala** ♡,**Afaf** ♡**Ilhem** ♡

A *toutes mes amies*

A *toutes famille* **Mouaki**♡

A *tous ceux que m'ont en couragé à poursuivre mes études.*

REMERCIEMENTS

♡Je *remercie d'abord et avant tout Dieu qui m'a donné le couragr et la patience pour réaliser ce travail.*

♡Je *remercie mon encadreur* ♡**Mr. Labed Boubakeur**♡ *pour ses conseils et ses orientations*

♡Je *veux exprimer tout mon respect aux membres du jury*

♡**Mr.Mansouri Badereddine**♡*et*♡**Mme.Benabba Fadhila**♡

♡Je *tient aussi à remercier notre chef de département de mathématique* ***Mr.Lakhdari Imade***

♡Je remercie *tout les enseignante dudépartement de mathématique à l'université mohamed kheider.*

♡Je *remercie également tous mes enseignants durant toutes mes années d'études.*

♡Je *remercie également tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail*

.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

Abréviations et Notations **2**

1 Bases de calcul stochastique **3**

1.1 Mouvement Brownien 5

1.2 Intégrale d'Itô 6

1.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique 7

1.2.2 Processus d'Itô 8

1.2.3 Formule d'Itô 8

1.3 Equations différentielles stochastiques 10

1.3.1 Théoréme (Itô) 10

1.3.2 Propriété de Markov 11

1.3.3 Théorème de comparaison 12

2 Le problème de Dirichlet **13**

2.1 Problème classique de Dirichlet et équation de la chaleur 13
2.1.1 Equation de la chaleur 13
2.1.2 Formule de Feynman-Kac 15
2.1.3 Problème classique de Dirichlet 17
2.2 Problème de Dirichlet généralisé 18

3 Résolution du problème de Dirichlet **21**
3.1 Equation de la chaleur et mouvement brownien 21
3.1.1 Problème de Dirichlet 21
3.1.2 Le Problème stochastique de Dirichlet 21
3.2 Problème Elliptique 24
3.2.1 Equations elliptiques avec condition aux limites de Dirichlet 24
3.2.2 EDP Elliptique dans $\mathbb{R}^d$ 27
3.3 Problème Parabolique 27
3.3.1 EDP Paraboliques Directes 30
3.3.2 EDP Parabolique avec conditions de Dirichlet 30

Bibliographie **34**

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de montrer le lien entre les équations aux dérivées partielles de scond ordre avec des des tions aux limites de Dirichlet et vles procesus stochastiques l'idée consiste à exprimer la solution du problème à résoudre comme l'espérance d'une certaine variable aléatoire, fonction d'une trajectoire d'un processus de diffusion.

Cette représentation est la formule de Feynman-kaccondi, nommée d'après le physicien richard Feynman (1918 -

1988) et le mathématicien Marc kac (1914- 1984).

On peut considérer que cette formule est comme une généralisation de la formule de convolution de l'équation de la chaleur, qui représente une solution de l'équation de la chaleur comme une espérance par rapport à une variable aléatoire Gaussienne.

Le mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle les ntions de base de calcul stochastique qu'on a besoin dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre on donne le lien entre le mouvement Brownien et la solution de l'équation de la chaleur.

Dans le troisième chapitre on donne le lien entre les solutions d'équations différentielles stochastiques et les solutions du problème de Drichlet pour des équations aux dérivées partielles linéaires de second ordre dans le cas ellptique et dans le cas parbolique.

Abréviations et Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	: Espace de probabilité
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P\right)$	: Espace de probabilité filtré
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	: Filtration
$\mathbb{E}[X]$	: Espérence mathématique de la variable aléatoire X.
$s \wedge t$	: $\min(s; t)$

EDS	:Equation différentielle stochastique.
MVB	:Mouvement Brownien.
EDP	:Equation aux dérivée partielle

Chapitre 1

Bases de calcul stochastique

Processus stochastiques

Une famille de variables aléatoires $X = (X_t)_{t\,\in T}$ avec X_t indexée par un ensemble T est appellée un processus

stochastique.

– Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.

– *Si* $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires.

– Plus géneralement quand $T \subset \mathbb{Z}$ le processus est dit discret.

Temps d'arrêt

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\}$, on dit que T est un temps d'arrêt si

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+}, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

– Si T est un temps d'arrêt, on appelle tribu des événements antérieurs à T la tribu définie par $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{F} / \forall t \geq 0,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$.

Martingale et martingale locale

Soit $(X_t)_{t\in I}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ −adapté et tel que $E\,|X_t| < \infty$ $\forall t \geq 0$.

– X est appelé martingale si $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ on a

$$E\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) = X_s p.s.$$

– X est appelé sous-martingale si $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ on a

$$E\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) \geq X_s p.s$$

– X est appelé sur-martingale si $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ on a

$$E\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) \leq X_s p.s.$$

Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ une filtration et $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté. On dit que X est $\mathcal{F}_t$-martingale locale s'il existe une suite $\{\tau_n, n \geq 0\}$ de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que $P\left[\tau_n \longrightarrow \infty\right] = 1$ et telle que le processus $X^n : t \longmapsto X_{t \wedge \tau_n}$ est une martingale $\forall n \geq 0$.

Processus de Markov

Un processus de Markov est un processus tel que, étant donné la valeur de X_t, la valeur de X_s pour $s > t$ ne dépend pas des valeurs prises avant t, soient $\{X_u, u < t\}$ s'écrit

$$P(X_t \in]a, b[/ X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2 ....., X_{t_n} = x_n) = P(X_t \in]a, b[/ X_{t_n} = x_n).$$

Pour $t_1 < t_2 < .... < t_n < t$.

On appelle fonction de probabilité de transition la fonction

$$P(x, s; t, A) = P(X_t \in A / X_s = x).$$

Pour $t > s$ et $A \subset \mathbb{R}$.

1.1 Mouvement Brownien

Définition 1.1.1 *On se donne un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P\ )$ *et un processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *défini sur cet espace à valeurs réelles, le processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est une mouvement brownien (standard) si :*

- $B_0 = 0.$
- $\forall 0 \leq s \leq t \leq \infty, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne centrée, de variance$(t-s)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ...... \leq t_n$ les variables $(\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0})$sont indépendantes ou bien sous forme équivalente si $s \leq t$ les variables $B_t - B_s$ est indépendantes.
- Les trajectoires $t \to B_t(w)$ sont continues.

Proposition 1.1.1 $(B_t)_{t\ \in I}$ *un mouvement brownien* $\Longleftrightarrow \begin{cases} (B_t)_{t\geq 0} \text{ est un processus gaussien} \\ E(B_t) = 0 \\ cov(B_s, B_t) = s \wedge t \end{cases}$.

Proposition 1.1.2 B *est un mouvement brownien standard* $\Rightarrow B_t^2 - t$ *est une martingale*

Preuve.

- $B_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t - mesurable$
-

$$\begin{aligned} E\left[\mid B_t^2 - t\ \mid\right] &\leq E\left[B_t^2 - t\ \right] \\ &= E\left[B_t^2\right] - t \\ &= 2t < \infty. \end{aligned}$$

- Si $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} cov(B_t, B_s) &= E\left[(B_t^2 - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 - t/\mathcal{F}_s\right] \\ &= t - s + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s. \end{aligned}$$

■

Donc est un martingale

1.2 Intégrale d'Itô

Définition 1.2.1 *On dit que* $\theta = (\theta_t)_{t\geq 0}$ *est un bon processus s'il est* $(\mathcal{F}_t^B)$ *− adapté càdlàg et* $E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$.

Cas des processus étagés

Soit $(\theta^n)_{n\geq 0}$ un processus étagé défini par

$$\theta^n(s) = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i 1_{]t_i,t_{i+1}[}(s),$$

telle que : $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P}), \forall i = 0, .., p_n$ et t_i est une suite de réels.

On définit $I_t(\theta^n)$ par

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta^n(s) dBs = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

De plus, comme $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ sont indépendantes, la variable aléatoire $I_t(\theta^n)$ est variable gaussienne d'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_t(\theta^n)\right] &= \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{E}\left[\theta_i\right] \mathbb{E}\left[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

et de variance

$$\begin{aligned}Var(I_t(\theta^n)) &= \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{E}\left[\theta_i^2\right] \mathbb{E}\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta^n(s))^2 ds\right].\end{aligned}$$

Cas général

Si θ est un bon processus, alors il existe

$$\{\theta^n, n \geq 0\},$$

une suite de processus étagés tel que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta(s) - \theta^n(s))^2 ds\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow 0}.$$

Et pour tout $t > 0$, il existe une v.a $I_t(\theta)$de carré intégrable telle que :

$$\mathbb{E}\left[|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)|^2\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow 0}.$$

On pose :$I_t(\theta) = \int_0^t \theta(s)dBs, \forall t > 0.$

Alors

$$\mathbb{E}\left[I_t(\theta)\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to+\infty} I_t(\theta^n)\right] = 0.$$

$$\begin{aligned} Var(I_t(\theta) &= Var\left[\lim_{n\to+\infty} I_t(\theta^n)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n} \theta_i^2 E(t_{i+1} - t_i)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta(s))^2 ds\right]. \end{aligned}$$

1.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

- $\theta \to \int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
- Le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est à trajectoires continues.
- Le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est $\mathcal{F}_t^B-$adapté.
- $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ et $Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.

– Si θ et ϕ deux bons processus, telle que $\forall t, u \geq 0$ alors on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)\left(\int_0^u \phi_s dB_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds\right].$$

1.2.2 Processus d'Itô

Définition 1.2.2 *Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Un processus d'ito est un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ qui s'écrit sous la forme*

$$\forall t \leq T, X_t = X_0 + \int\limits_0^t H_s dB_s + \int\limits_0^t V_s ds \ .$$

avec

– $X_0 \ \ \mathcal{F}_0 - mesurable.$

– V, H sont des processus $(F_t)_{t\geq 0}-$adaptés continus.

– $\int\limits_0^t V_s ds$ est à variation finie.

– $\int\limits_0^t H_s dB_s$ est une martingale locale.

1.2.3 Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'ito de la forme $X_t = X_0 + \int\limits_0^t H_s dB_s + \int\limits_0^t V_s ds$.

Théorème 1.2.1 ***(Première formule d'Ito)*** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de class* $\mathbf{C}^2$ *alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X\rangle_s.$$

Si f est à dérivées bornnées le processus

$$f(X_t) - \int_0^t f'(X_s) V_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds,$$

est une martingale.

Cette formule s'écrit sous forme différentielle :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X\rangle_t.$$

On utilise la multiplication suivante

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Théorème 1.2.2 ***(Deuxième formule d'Ito)*** *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ pour rapport à t et de classe $\mathbf{C}^2$ par rapport à x $(f \in C^{1,2})$. Alors*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)d_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Sous la forme différentielle

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)d_t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X\rangle.$$

Théorème 1.2.3 ***(Troisième formule d'Ito)*** *Soient Y_1 et Y_2 deux proccesus d'ito et f une fonction dans $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de class $\mathbf{C}^2$ alors*

$$\begin{aligned} f(Y_1(t), Y_2(t)) = f(Y_1(0), Y_2(0)) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y_1}(Y_1(s), Y_2(s))dY_1(s) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y_2}(Y_1(s), Y_2(s))dY_2(s) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y_1 y_2}(Y_1(s), Y_2(s))d\langle Y_1, Y_2\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(Y_1(s), Y_2(s))d\langle Y_1\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}(Y_1(s), Y_2(s))d\langle Y_2\rangle_s. \end{aligned}$$

– Si f est indépendante de Y_t on retrouve la $1^{éré}$ formule d'ito.

– Si $Y_t = t$,on retrouve la 2^{eme} formule d'ito.

1.3 Equations différentielles stochastiques

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$.Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation qui s'criy sous la forme suivante

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

ou sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = y \end{cases}, \tag{1.1}$$

avec une condition intiale X_0.

Notons $\mathcal{F}$ la filtration naturelle du MVB standard B, une solution de cette EDS est un processus stochastique tel que :

– $\forall t \in \mathbb{R}_+$, X_t est continu et $\mathcal{F}_t-$adapté.

– $\forall t \geq 0$, $\int_0^t (|b(s, X_s)| + |\sigma(s, X_s)^2|)ds < \infty$.

– $p.s$ $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

1.3.1 Théoréme (Itô)

Il existe une solution forte de l'équation (1.1) si les conditions suivantes sont vérifiées :

– $\exists k \in \mathbb{R}_+$, $\forall (x, y)$ et $t \geq 0$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k |x - y| .$$

– $\exists k \in \mathbb{R}_+$, $\forall$ x et $t \geq 0$

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq k(1 + |x|).$$

– $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$.

1.3.2 Propriété de Markov

Soit l'équation (Eq). supposons que (Eq) ait une unique solution forte $\{X_t(x), t \geq 0\}$. Par linéarité de l'intégrale on voit que $\forall s, t \geq 0$

$$X_{s+t}(x) = X_s(x) + \int_s^{s+t} b(u, X_u(x))du + \int_s^{s+t} \sigma(u, X_u(x))dB_u$$

comme la variable $X_s(x)$ est $\mathcal{F}_s^B$-mesurable, elle est indépendante du processus des accroissements $\{B_u - B_s, u \geq s\}$ qui est lui même un brownien B' partant de 0.

On peut donc écrire

$$X_{s+t}(x) = X_s(x) + \int_0^t b(s+u, X_{s+u}(x))du + \int_0^t \sigma(s+u, X_{s+u}(x))dB'_u,$$

et par unicité, ceci entraine

$$X_{s+t}(x) = X_t^s(X_s(x)), \forall t \geq 0$$

où X_t^s est la solution unique de (Eq) par le Brownien B'.

$\forall s, t \geq 0$ et toute fonction borelienne f, on déduit alors de l'indépendance de B' et $\mathcal{F}_s^B$ que

$$\begin{aligned} E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s^B) &= E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{X}_s) \\ &= \phi_t(s, X_s) \end{aligned}$$

où $\phi_t(s, X_s) = E(f(X_t^s(x)))$.

$\Longrightarrow X$ vérifie la propriété de markov inhomogène.

Dans le cas où es coefficients b et σ ne dépendent pas du temps, X vérifie de plus la propriété de Markov homogène

$$\begin{aligned} E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s^B) &= E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{X}_s) \\ &= \phi_t(X_s) \end{aligned}$$

où $\phi_t(s, X_s) = E(f(X_t^s(x)))$.

Théorème 1.3.1 (Propriété de Markov forte) *Soit X l'unique solution forte de (Eq) avec b et σ ne dependent pas du temps. Soit T un temps d'arrêt fini p.s. pour la filtration naturelle du Mouvement brownien porteur. Alors pour tout $t \geq 0$ et toute fonction f mesurable bornée*

$$\begin{aligned} E(f(X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T^B) &= E(f(X_{T+t}) \mid \mathcal{X}_T) \\ &= \phi_t(X_T) \end{aligned}$$

où $\phi_t(x) = E(f(X_t(x)))$.

Dans le cas inhomogène

$$\begin{aligned} E(f(T+t, X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T^B) &= E(f(T+t, X_{T+t}) \mid T, \mathcal{X}_T) \\ &= \phi_t(T, X_T) \end{aligned}$$

où $\phi_t(s, x) = E(f(s+t, X_t^s(x)))$.

1.3.3 Théorème de comparaison

Ce théoréme permet de comparer presque surement deux équations différentielles stochastique uni-dimensionnelles.

Théorème 1.3.2 *Soit B est MVB réel, on considére les deux EDS suivantes*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_1(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_2(Y_s)ds + \int_0^t \sigma(Y_s)dB_s.$$

b_1, b_2 et σ trois fonction globalement lipschitziennes, supposons que $b_1(x) \leq b_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ alors $X_t \leq Y_t$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Chapitre 2

Le problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet consiste à résoudre l'équation de Laplace sur un ouvert D avec des condition aux bords imposés sur (∂D).

2.1 Problème classique de Dirichlet et équation de la chaleur

2.1.1 Equation de la chaleur

Définition 2.1.1 *Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur est :*

$u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to u(t,x) \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u \\ u(0,.) = f \end{cases}, \tag{2.1}$$

avec $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to u(t,x) \in \mathbb{R}$.

On pose que B_t sachant $\mathcal{F}_s$ tel que $t \geq s$, on a $B_t = B_t - B_s + B_s$ on constate qu'il s'agit de la loi gaussienne (conditionnelle), $\mathcal{N}_d(B_s, (t-s)I_d)$ de densité en y, si $B_s = x$ définie par :

$$p(t-s; x, y) = g_{t-s}(y-x),$$

telle que :

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} \exp(-\frac{\| x \|^2}{2t}) \text{ densité de } \mathcal{N}(0,t).$$

C'est à dire que $p(t;x,.)$ est la densité de $\mathcal{N}(x,t)$, $p = p(t;x,y)$ vérifie que

$$p^{-1}\partial_t p = -\frac{d}{2t} + \frac{\| y-x \|^2}{2t^2}, \tag{2.2}$$

et

$$p^{-1}\partial^2_{x_i,x_i} p = -\frac{1}{t} + \frac{(y_i - x_i)^2}{t^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} p^{-1}\Delta_x p &= \sum_{i=1}^{d} p^{-1}\partial^2_{x_i,x_i} p. \\ &= \sum_{i=1}^{d} (-\frac{1}{t} + \frac{(y_i - x_i)^2}{t^2}). \\ &= -\frac{d}{t} + \frac{\| y-x \|^2}{2t^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

D'aprés la comparaison de (2.2) et(2.3)nous trouvons p est solution de l'équation définie par :

$$\partial_t p = \frac{1}{2}\Delta_y p \ , \lim_{t \searrow 0} p(y)dy = \delta_x, \tag{2.4}$$

où δ_x est la mesure de Dirac en 0. Par symétrie la solution de l'équation rétrograde

$$\partial_t p = \frac{1}{2}\Delta_x p \ , \lim_{t \searrow 0} p(x)dx = \delta_y. \tag{2.5}$$

Donc p est la solution du l'équation de la chaleur

Proposition 2.1.1 *La fonction*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x \left[f(B_t) \right],$$

est une solution du l'équation de chaleur (2.1) sur $[0,1/(2c)[\times\mathbb{R}^d$, si la condition initiale f vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\exp(-c\,|x|^2)dx<+\infty.$$

Preuve. On a que $B_0=x$ sous $\mathbb{P}_x$ alors $u(0,x)=\mathbb{E}_x\left[f(B_0)\right].$

D'aprés la définition

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)p(t;x,y)dy,$$

on a donc pour $t\in[0,1/(2c)[$

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x)&=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\partial_t p(t;x,y)dy.\\ \partial^2_{x_i,x_i}u(t,x)&=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\partial^2_{x_i,x_i}p(t;x,y)dy.\\ \Delta u(t,x)&=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\Delta_x p(t;x,y)dy.\end{aligned}$$

Et d'aprés (2.5) on a

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x)&=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\partial_t p(t;x,y)dy.\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\frac{1}{2}\Delta_x p(t;x,y)dy.\\ &=\frac{1}{2}\Delta u(t,x).\end{aligned}$$

Donc u est une solution de (2.1) sur $[0,1/(2c)[$. ∎

2.1.2 Formule de Feynman-Kac

Définition 2.1.2 *Soit l'EDP*

$$\begin{cases}\partial_t u=\frac{1}{2}\Delta u-ku & (t,x)\in\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^d\\ u(0,.)=f\end{cases},\tag{2.6}$$

telle que $k(x)$ réprésente le taux de dissipation de la chaleur en x

Proposition 2.1.2 *Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que f ‘ est à croissance sous-exponentielle et $k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne bornée, alors $u(t,x)$ est la solution unique de l'EDP (2.6) définie par*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x \left[f(B_t) \exp(-\int_0^t k(B_s)ds) \right]. \tag{2.7}$$

Preuve. $B_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$ alors $u(0,x) = \mathbb{E}_x\left[f(B_0)\right] = f(x)$

d'aprés la formule d'Itô, pour tout $s \in]0,t[$ et $t \geq 0$ fixé , $s \longmapsto u(t-s,B_s)\exp(-\int_0^s k(B_r)dr)$ alors

$$\begin{aligned} d\left[u(t-s,B_s)\exp(-\int_0^s k(B_r)dr)\right] &= d(u(t-s,B_s))\exp(-\int_0^s k(B_r)dr) \\ &+ u(t-s,B_s)d(\exp(-\int_0^s k(B_r)dr)) + 0. \end{aligned}$$

D'aprés la formule d'Itô

$$d(u(t-s,B_s)) = -\partial_t u(t-s,B_s)ds + \bigtriangledown u(t-s,B_s)dB_s + \tfrac{1}{2}\Delta u(t-s,B_s)ds$$

et

$$d(\exp(-\textstyle\int_0^s k(B_r)dr)) = -k(B_s)\exp(-\int_0^s k(B_r)dr)ds$$

alors

$$\begin{aligned} & d\left[u(t-s,B_s)\exp(-\int_0^s k(B_r)dr)\right] \\ &= \left[-k(B_s)u(t-s,B_s)ds - -\partial_t u(t-s,B_s)ds + \bigtriangledown u(t-s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\Delta u(t-s,B_s)ds\right] \\ &\times \exp(-\int_0^s k(B_r)dr). \\ &= \bigtriangledown u(t-s,B_s)dB_s \times \exp(-\int_0^s k(B_r)dr). \end{aligned}$$

D'aprés (2.6), en intégrant entre $s = 0$ et $s = t$

$$\begin{aligned}\exp(-\int_0^t k(B_r)dr)u(0, B_t) - u(t, B_0) &= \exp(-\int_0^t k(B_r)dr)f(B_t) - u(t, B_0).\\ &= \int_0^t \exp(-\int_0^s k(B_r)dr) \bigtriangledown u(t-s, B_s)dB_s.\end{aligned}$$

En prenant l'espérance sous $\mathbb{P}_x$

$$E_x\left[\exp(-\int_0^t k(B_r)dr)f(B_t) - u(t, B_0)\right] = 0.$$

On a $B_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$, donc

$$u(t,x) = E_x\left[\exp(-\int_0^t k(B_r)dr)f(B_t)\right],$$

est la formule de Feynman-Kac(2.7). ■

2.1.3 Problème classique de Dirichlet

Définition 2.1.3 *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ tel que D est un ensemble connexe ouvert et $\phi : \partial D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dans ce cas le problème classique de Dirichlet consiste à trouver une fonction u $\in C^2(D)$ telle que :*

- $\Delta u(x) = 0 \;\; \forall x \in D$ tel que $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$
- $\lim_{x \to y, x \in D} u(x) = \phi(y) \;\; \forall y \in D.$

Définition 2.1.4 *On appelle le MVB de dimension d, si $B(t) = (B_1(t), B_2(t), ..., B_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ tel que $B_1(t), B_2(t), ..., B_d(t)$ sont des MVB unidimensionnels indépendants et $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.*

Théorème 2.1.1 *Soit $(B_t^x)_{t\geq 0}$ un MVB dans D.On définit le temps d'arrêt par $\tau = \inf\{t > 0 : B^x(t) \notin D\}$. Alors le problème de Dirichlet classique admet une solution unique définie comme*

$$u(x) = E^x[\phi(\tau)].$$

Remarque 2.1.1 *Pour tous les domaines $D \subset \mathbb{R}^d$ le problème de Dirichlet n'a pas de solution en général.*

Exemple 2.1.1 *On pose $D = \left\{x \ \in \mathbb{R}^d : \parallel x \parallel < r^2\right\} \setminus \{0\}$ est une boule ouverte et $F : \partial D \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad \parallel x \parallel = 1 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

pour tout $d \geq 2$

$$P^x \left\{F(X_\tau) = 0\right\} = 0 \ , \ \ \forall x \ \in D.$$

Car F est constante sur l'ensemble $\left\{x \ \epsilon \mathbb{R}^d : \parallel x \parallel = r\right\}$ alors $P^x \left\{F(X_\tau) = 1\right\} = 1$.

La solution $f : D \to \mathbb{R}$ du problème de Dirichlet vérifie que $f(x) = 0, \forall x \in D$ alors

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq F(0).$$

Donc n'existe pas de solution au problème de Dirichlet.

2.2 Problème de Dirichlet généralisé

Définition 2.2.1 *Soientt $D \subset \mathbb{R}^d$ et $L \subset \mathbf{C}^2(D)$un opérateur différentiel elliptique défini par*

$$L = \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

tel que :

- $b_i(x)$ et $a_{i,j}(x)$ sont des fonctions continues.
- $a(x) := [a_{i,j}(x)]_{i,j=1}^d$est une matrice positive et symétrique.

Exemple 2.2.1 *On a $b_i(x) = 0$, $\forall i$ et $a_{i,j}(x) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \quad si \quad i = j \\ 0 \qquad sinon \end{cases}$.*

Alors $a(x) = I$ est la matrice identité pour tout x, toutes les valeurs propres de I sont 1 et tout $b_i; a_{ij}$ sont continues, donc Δ est elliptique.

Définition 2.2.2 *Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, $\phi : \partial D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $L \subset D$ un opérateur elliptique. Le problème de Dirichlet généralisé est de trouver une fonction $u \in C^2(D)$ telle que :*

- $Lu(x) = 0 \quad \forall x \in D$.
- $\lim\limits_{x \to y} u(x) = \phi(y) \quad \forall y \in \partial D$.

Lemme 2.2.1 *Si I est l'ensemble des points irréguliers de u tel que $u \subset D$ ouvert donc on dit que I est un ensemble polaire.*

Théorème 2.2.1 *Soit ϕ une fonction continue et bornée sur ∂D, on suppose que X_t vérifie la condition de Hunt, il existe $u \in C^2(D)$ telle que :*

- $Lu = 0$, sur D.
- $\lim\limits_{x \to y, x \in D} u(x) = \phi(y)$, $\forall y \in \partial D$.

Alors

$$u(x) = E^x[\phi(X(\tau))].$$

Preuve. Soit $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite telle que : $D_k \subset\subset D$ et $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$,$a_k = k \wedge \tau_{D_k}; k = 1, 2, 3, ...$ et u est $X - harmonique$ alors

$$u(x) = E^x[\phi(X(\tau))] \quad ,\forall x \in D_k, pour\ tout\ k$$

si $k \to \infty$ alors $X_{\tau_k} \to X_{\tau_D}$,

si X_{τ_D} est régulier alors $u(X_{\tau_k}) \to \phi(X_{\tau_D})$.

Donc

$$u(x) = \lim E^x\left[u(X_{\tau_k})\right] = E^x\left[\phi(X_{\tau_D})\right].$$

■

Théorème 2.2.2 *Supposons que L est uniformément elliptique dans D, les valeurs propres de $[a_{i,j}]$ sont bornées à partir de 0 dans D, soit ϕ une fonction continue bornée sur ∂D*

on pose que : $u(x) = E^x[\phi(X(\tau))]$ alors $u \in C^{2+\alpha}(D)$, $\forall \alpha < 1$ et u solution de problème de Dirichlet.

- $Lu = 0$.
- $\lim\limits_{x \to y, x \in D} u(x) = \phi(y) \quad , \forall y \in \partial D.$

Chapitre 3

Résolution du problème de Dirichlet

3.1 Equation de la chaleur et mouvement brownien

3.1.1 Problème de Dirichlet

Soit $\phi \in \mathbb{C}(\partial D)$ une fonction donnée.On veut trouver $u \in \mathbb{C}^2(D)$ telle que :

- $Lu = 0 \quad$ dans D.
- $\lim\limits_{x \to y, x \in D} u(x) = \phi(y) \qquad \forall y \in \partial D \qquad .$

3.1.2 Le Problème stochastique de Dirichlet

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine (ouvert et connexe) et $(X_t)_{t \geq 0}$ une diffusion d'Ito sur D.

Définition 3.1.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et mesurable sur D, si pour tout ensemble ouvert et borné U avec $\overline{U} \subset D$ et*

$$f(x) = E^x[f(X_{\tau u})] \qquad \forall x \in D.$$

Alors on dit que f est $X-$harmonique.

Lemme 3.1.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^2(D)$ alors pour tout $(X_t)_{t\geq 0}$ une diffusion d'Ito sur D*

$$f \text{ est } X - \text{harmonique dans } D \Leftrightarrow \Delta f = 0 \text{ dans } D.$$

Preuve. $\Rightarrow$)

Résultats directement à partir de la formule.

$\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} E^x[f(X_{\tau u})] &= \lim_{k\to\infty} E^x[f(X_{\tau u\wedge k})]. \\ &= f(x) + \lim_{k\to\infty} E^x[\textstyle\int_0^{\tau u\wedge k}(Lf)(X_s)ds]. \\ &= f(x) \qquad \text{car } Lf = \Delta f = 0. \end{aligned}$$

■

Définition 3.1.2 *Soit $\phi : \partial D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et mesurable. Dans ce cas, le probléme stochastique de Dirichlet consiste à trouver une fonction $u \in \mathbb{C}^2(D)$ telle que :*

– u est $X-$harmonique.

– $\lim\limits_{t\uparrow\tau} u(X(t)) = \phi(X(\tau))$.

Théorème 3.1.1 *Il existe une solution unique pour le problème stochastique de Dirichlet, qui est donnée par*

$$u(x) = E^x[\phi(X(\tau))]. \tag{3.1}$$

Lemme 3.1.2 *On a $H \in \bigcap\limits_{t>0} M_t$ telle que M_t et M_∞ la σ-algèbre engendrée par $X_s; s \leq t$ et par $X_s; s \geq 0$ respectivement , alors soit :*

$$\begin{cases} Q^x(H) = 0 \\ \quad or \\ Q^x(H) = 1 \end{cases}.$$

Preuve. D'aprés la propriété de Markov forte, on a

$$E^x\left[\theta_t\eta \mid M_t\right] = E^{X_t}\left[\eta\right]$$

pour tout borné, $M_\infty-$mesurable ;$\eta : \Omega \to \mathbf{R}$ alors

$$\int_H \theta_t\eta dQ^x = \int_H E^{X_t}\left[\eta\right] dQ^x \quad , \forall t$$

on pose que :$\eta = \eta_k = g_1(X_{t_1}).....g_k(X_{t_k})$ telle que g_i est bornée et continue et quand t tend vers 0 donc :

$$\begin{aligned}\int_H \eta dQ^x &= \lim_{t\to 0}\int_H \theta_t\eta dQ^x. \\ &= \lim_{t\to 0}\int_H E^{X_t}\left[\eta\right] dQ^x. \\ &= Q^x(H)E^x\left[\eta\right].\end{aligned}$$

D'aprés la continuité et la convergence bornée. Approchant η par fonction η_k donc

$$\int_H \eta dQ^x = Q^x(H)E^x\left[\eta\right],$$

si on pose $\eta = \chi_H$ alors $Q^x(H) = (Q^x(H))^2$ ■

Corollaire 3.1.1 *Soit $y \in \mathbf{R}^n$*

$$\begin{cases} Q^y\left[\tau_D = 0\right] = 0 \\ \qquad or \\ Q^y\left[\tau_D = 0\right] = 1 \end{cases}.$$

Définition 3.1.3 *On dit le point $y \in \partial D$ régulier pour D si $Q^y\left[\tau_D = 0\right] = 1$ sinon y n'est pas régulier.*

3.2 Problème Elliptique

3.2.1 Equations elliptiques avec condition aux limites de Dirichlet

Soit l'opérateur différentiel définie par :

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i,i=1}^{d}(gg*)_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

et l'EDP linéaire elliptique

$$\begin{cases} Au(x) + c(x)u(x) + h(x) = 0 & x \in D \\ u(x) = \chi(x) & x \in \partial D \end{cases} . \tag{3.2}$$

On a $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times k}$, $c : D \to \mathbb{R}_-$, $h : D \to \mathbb{R}$ et $\kappa : \partial D \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telle que :

D est un domaine borné, ∂D est une frontiére de classe $\mathbf{C}^1$ et τ_x est le temps d'arret défini par

$$\tau_x = \inf\left\{t \geq 0, X_t^x \notin \bar{D}\right\}.$$

Théorème 3.2.1 *Soit* $u \in \mathbf{C}^2(D) \cap \mathbf{C}(\overline{D})$ *est une solution de* (3.2) *et*

$$\sup_{x\in D} \mathbb{E}\tau_x < \infty \ . \tag{3.3}$$

Alors la formule de Feynman-Kac est définie par :

$$u(x) = \mathbb{E}\left[\chi(X_{\tau_x}^x)\exp(\int_0^{\tau_0} c(X_s^x)ds) + \int_0^{\tau_x} h(X_s^x)\exp(\int_0^s c(X_r^x)dr)ds\right]. \tag{3.4}$$

Preuve. (3.2) et la formule d'Ito donnent

$$u(x) = \mathbb{E}\left[u(X_{t\wedge\tau_x}^x)\exp(\int_0^{t\wedge\tau_x} c(X_s^x)ds) + \int_0^{t\wedge\tau_x} h(X_s^x)\exp(\int_0^s c(X_r^x)dr)ds\right].$$

On arrive an résultat quand t tend vers l'infini et en profitant de l'hypothése sur τ_x. ■

Remarque 3.2.1 *Lorsqu'il existe* $v \in \mathbb{R}^d$ *avec* $|v| = 1$ *telle que* $\inf_{x \in D} |g * (x)v| > 0$ *alors(3.3) est vérifiée.*

On suppose que les coefficients sont comme ci-dessus et telle que :

$$\Lambda = \{x \in \partial D\,; \mathbb{P}(\tau_x > 0) = 0\} \text{ est fermé} \tag{3.5}$$

donc nous réécrivons l'EDP elliptique comme :

$$\begin{cases} \Phi(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 & x \in D \\ u(x) = \chi(x) & x \in \partial D \end{cases}.$$

Soit $\Phi : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d \times d} \to \mathbb{R}$ et $c < 0$ alors Φ définie par

$$\Phi(x, r, p, X) = -\frac{1}{2}\mathbf{Tr}\left[(gg*)(x)X\right] - \langle f(x), p\rangle - c(x)r - h(x). \tag{3.6}$$

Théorème 3.2.2 *La fonction* $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *définie par (3.4) c'est l'unique solution de (3.2) telle que la condition (3.5) est vérifié.*

Preuve. On pose $\varphi \in C^2(D)$ et $x \in \bar{D}$ si $x \epsilon \Lambda$ .Alors $\tau_x = 0$ donc la formule du Feynman-Kac est $u(x) = \chi(x)$.

Pour montrer que $\Phi(x, \varphi(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq 0$ on utilise la demonstration par l'absurde, supposons

que $x \in \bar{D} \diagdown \Lambda$ et que $\Phi(x, \varphi(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) > 0, \forall\, \varepsilon > 0$.

On a l'ensemble

$$B_{D,\varepsilon}(x) = \overline{D} \cap \{y; |y - x| \leq \varepsilon\},$$

on suppose que pour $\varepsilon > 0$ avec Λ est fermé

$$B_{D,\varepsilon}(x) \cap \Lambda \neq \phi.$$

$$u(y) - \varphi(y) \leq 0 = u(x) - \varphi(x), \forall y \epsilon B_{D,\varepsilon}(x).$$

$$\Phi(x, \varphi(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \geq \varepsilon, \forall y \epsilon B_{D,\varepsilon}(x).$$

Soit θ_x le temps d'arret défini par

$$\theta_x := \inf \{t > 0; X_t^x \notin B_{D,\varepsilon}(x)\} \wedge \varepsilon.$$

D'aprés la propriété de Markov forte on a :

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\kappa(X_{\tau_x}^x) \exp(\int_0^{\tau_x} c(X_s^x)ds) + \int_0^{\tau_x} h(X_s^x) \exp(\int_0^s c(X_r^x)dr)ds \mid \mathcal{F}_{\theta_x})\right]. \\ &= \mathbb{E}\left[u(X_{\theta_x}^x) \exp(\int_0^{\theta_x} c(X_s^x)ds) + \int_0^{\theta_x} h(X_s^x) \exp(\int_0^s c(X_r^x)dr)ds\right]. \end{aligned}$$

D'aprés la formule d'Ito

$$\varphi(x) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_{\theta_x}^x) \exp(\int_0^{\theta_x} c(X_s^x)ds) + \int_0^{\theta_x} [A\varphi + c\varphi] (X_s^x) \exp(\int_0^s c(X_r^x)dr)ds\right],$$

d'aprés la définition du θ_x ,on a

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x) - u(x). \\ &= \mathbb{E}(\left[\varphi(X_{\theta_x}^x) - u(X_{\theta_x}^x)\right] \exp(\int_0^{\theta_x} c(X_s^x)ds)) - \mathbb{E}\int_0^{\theta_x} [A\varphi + c\varphi + h] (X_s^x) \exp(\int_0^s c(X_r^x)dr)ds. \\ &\geq \varepsilon\mathbb{E}\int_0^{\theta_x} \exp(\int_0^s c(X_r^x)dr)ds. \\ &\geq \varepsilon\mathbb{E}\left[\theta_x \exp(-c\theta_x)\right]. \\ &> 0. \end{aligned}$$

Donc on une contradiction. ■

3.2.2 EDP Elliptique dans $\mathbb{R}^d$

Soit Φ est l'EDP linéaire elliptique en $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$\Phi(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^d \quad . \tag{3.7}$$

Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times k}$, $c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions continues satisfaisant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} (|h(x)| + |c(x)|) < \infty, \tag{3.8}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} c(x) \leq -\bar{c} < 0, \tag{3.9}$$

dans ces conditions, la fonction suivante est bien définie telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$u(x) = \int_0^t E\left[h(X_t^x)\exp(\int_0^t c(X_s^x)ds)\right] dt. \tag{3.10}$$

Théorème 3.2.3 *D'après (3.8) et (3.9), u donnée par (3.10) est une solution unique de (3.7) telle que $u \in \mathbb{R}^d$.*

3.3 Problème Parabolique

Définition 3.3.1 *Soient c, $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\kappa : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des applications continues telle que :$T > 0$ et C, $p > 0$ (sont des constantes)*

$$|c(t, x)| \leq C, |h(t, x)| + |\kappa(x)| \leq C(1 + |x|^p) \qquad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \quad . \tag{3.11}$$

Le processus $\{X_s^{t,x}\}$ est une solution de l'EDS

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x & 0 \leq s \leq t \\ X_s^{t,x} = x + \int_t^s f(r, X_r^{t,x})dr + \int_t^s g(r, X_r^{t,x})dBr & s > t \end{cases},$$

pour tous $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ on définit

$$u(t,x) = E\left[\kappa(X_T^{t,x})\exp(\int_t^T c(s, X_s^{t,x})ds) + \int_t^T h(s, X_s^{t,x})\exp(\int_t^s c(r, X_r^{t,x})dr)ds\right]. \tag{3.12}$$

Définition 3.3.2 *L'EDP parabolique dans $\mathbb{R}^d$ est définie par*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Au(t,x) + cu(t,x) + h(t,x) = 0 & (t,x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^d \\ u(T,x) = \kappa(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}, \tag{3.13}$$

telle que

$$\begin{aligned}(A\varphi)(t,x) &= \frac{1}{2}\mathbf{Tr}\left[g(t,x)g^*(t,x)\varphi''_{;xx}(x)\right] + \langle f(t,x), \varphi'_x(x)\rangle. \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}(gg*)_{i,j}(t,x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d f_i(t,x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x).\end{aligned}$$

Proposition 3.3.1 *Soit $u \in \mathbb{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ une solution de (3.13) telle que pour M, $q > 0$:*

$$|u(t,x)| \leq M(1 + |x|^q) \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \qquad .$$

Remarque 3.3.1 *$u(t,x)$ satisfait la formule de Feymann-Kac(3.12) si de plus les hypothéses ci-dessus, (3.11) sont satisfaites.*

Preuve. Par la formule d'ito sur $[t, T \wedge \theta_n]$ avec

$$\begin{aligned} V_s &= (s, \exp(\int_t^s c(r, X_r^{t,x})dr)). \\ X_s^{t,x} &= x + \int_t^s f(r, X_r^{t,x})dr + \int_t^s g(r, X_r^{t,x})dBr \end{aligned}$$

et

$$\theta = \inf \left\{ s \geq t : \left| X_s^{t,x} - x \right| \geq n \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} u(T \wedge \theta_n, X_{T\wedge\theta_n}^{t,x}) \exp(\int_t^{T\wedge\theta_n} c(r, X_r^{t,x}) dr) = u(t,x) + \int_t^{T\wedge\theta_n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + Au + cu \right] \\ \times c(r, X_r^{t,x}) \exp(\int_t^r c(s, X_s^{t,x}) ds) dr \\ + \int_t^{T\wedge\theta_n} \exp(\int_t^r c(s, X_s^{t,x}) ds) \\ \times \langle \bigtriangledown_x u(r, X_r^{t,x}, g(r, X_r^{t,x}) dBr \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant que u est une solution de (3.13), la formule de Feyman-Kac (3.12) quand (n) tend vers l'infini. ■

Définition 3.3.3 *On écrit l'EDP(3.13) comme*

$$\begin{cases} \frac{-\partial u}{\partial t}(t,x) + \Phi(t,x,u(t,x), Du(t,x), D^2u(t,x)) = 0 \\ u(T,x) = \kappa(x) \end{cases},$$

telle que : $\Phi : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S^d \to \mathbb{R}$ est défini par

$$\Phi(t,x,r,p,X) = \frac{-1}{2} \mathbf{Tr} \left[g(t,x) g*(t,x) X \right] - \langle f(t,x), p \rangle - c(t,x) r - h(t,x).$$

S^d l'ensemble des matrices $d \times d$ symétriques, $c(t,x) \leq 0$.

Proposition 3.3.2 $v(t,x) = u(t,x) \exp \lambda t$ *résout l'EDP*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + Av(t,x) + (c(t,x) - \lambda) v(t,x) + h(t,x) \exp \lambda t = 0 & (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^d \\ v(T,x) = \kappa(x) \exp \lambda t & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}.$$

3.3.1 EDP Paraboliques Directes

Théorème 3.3.1 *Soit $v(t,x)$ une fonction continue définie par*

$$v(t,x)=E\left[\kappa(X_t^x)\exp(\int_0^t c(X_s^x)ds)+\int_0^t h(X_s^t)\exp(\int_0^s c(s,X_r^x)dr)ds\right] \qquad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d \quad . \tag{3.14}$$

Qui croit polynomialement vers l'infini. Alors v est la solution unique de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+Av(t,x)+cv(t,x)+h(t,x)=0 & (t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^d \\ v(0,x)=\kappa(x) & x\in\mathbb{R}^d \end{cases} .$$

Preuve. $\forall T>0$,on a $v(t,x)$ telle que $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$ donné par la formule (3.14), on peut réecrire $v(t,x)$

de cette facon :

$$v(t,x)=E\left[\kappa(X_T^{T-t,x})\exp(\int_{T-t}^T c(X_s^{T-t,x})ds)+\int_{T-t}^T h(X_s^{T-t,x})\exp(\int_{T-t}^s c(X_r^{T-t,x})dr)ds\right].$$

On pose maintenant : $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $u(t,x)=v(T-t,x)$,alors

$$u(t,x)=E\left[\kappa(X_T^{t,x})\exp(\int_t^T c(X_s^{t,x})ds)+\int_t^T h(X_s^{t,x})\exp(\int_t^s c(X_r^{t,x})dr)ds\right], \tag{3.15}$$

u est la solution de (3.13)et v est la solution de (3.14) ■

3.3.2 EDP Parabolique avec conditions de Dirichlet

Soit $\mathbb{D}$ un sous-ensemble ouvert et borné telle que $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^d$ avec condition aux limites de Dirichlet . Le processus $\{X_s^{t,x};s\geq t\}$ défini par

$$\begin{cases} X_s^{t,x}=x & 0\leq s\leq t \\ X_s^{t,x}=x+\int_t^s f(r,X_r^{t,x})dr+\int_t^s g(r,X_r^{t,x})dBr & s>t \end{cases} ,$$

pour $(t,x) \in [0,T] \times \overline{D}$, on définit le temps d'arrêt

$$\tau_{t,x} = \inf \left\{ s \geq t : X_s^{t,x} \notin \ \overline{D} \right\}.$$

Soit l'ensemble Λ défini par

$$\Lambda = \{(t,x) \in [0,T] \times \partial D : \mathbb{P}(\tau_{t,x} > t) = 0\}. \tag{3.16}$$

Lemme 3.3.1

$$\forall \ (t,x) \in [0,T] \times \partial D \qquad \mathbb{P}(\tau_{t,x} > t) \in \{0,1\} \quad .$$

Preuve. Soit $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ la filtration du mouvement brownien

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x & 0 \leq s \leq t \\ X_s^{t,x} = x + \int_t^s f(r, X_r^{t,x})dr + \int_t^s g(r, X_r^{t,x})dBr & s > t \end{cases}.$$

$$\forall \ n \geq 1 \qquad \{\tau_x = 0\} = \bigcap_{k \geq n} \left\{ \tau_x \leq \tfrac{1}{k} \right\} \in \mathcal{F}_{\frac{1}{n}} \qquad ,$$

nous avons obtenu ce résultat de la continuité de la filtration $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$. La continuité de la filtration$\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$.

Implique que $\{\tau_x = 0\} \in \mathcal{F}_0$. $\blacksquare$

Définition 3.3.4 *Soit l'EDP parabolique*

$$\begin{cases} \frac{-\partial u}{\partial t}(t,x) + \Phi(t,x,u(t,x), D^2u(t,x)) = 0 & (t,x) \in [0,T] \times D \\ u(T,x) = \kappa(x) & x \in D \\ u(t,x) = \chi(t,x) & (t,x) \in [0,T] \times \partial D \end{cases}. \tag{3.17}$$

La formule de Feynman-kac est définie par

$$u(t,x) = E\left[\begin{array}{c} (\kappa(X_T^{t,x})1_{\{T\leq\tau_{t,x}\}} + \chi(\tau_{t,x}, X_{\tau_{t,x}}^{t,x})1_{\{\tau_{t,x}<T\}})\exp(\int_t^{T\wedge\tau_{t,x}} c(s,X_s^{t,x})ds) \\ +\int_t^{T\wedge\tau_{t,x}} h(s,X_s^{t,x})\exp(\int_t^s c(s,X_r^{t,x})dr)ds \end{array}\right], \tag{3.18}$$

est une solution de (3.17)

Proposition 3.3.3 *L'application $(t,x)\to\tau_{t,x}$ est continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ si la condition (3.16) vérifiée.*

Preuve. Soit $\{(t_n,x_n), n\in\mathbb{N}\}$une suite dans $[0,T]\times\mathbb{D}$ telle que

$(t_n,x_n)\to(t,x)$ et $n\to\infty$.

Montrons que :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\tau_{t_n,x_n}\leq\tau_{t,x}. \tag{3.19}$$

On suppose que(3.19) est fausse

$$\mathbb{P}(\tau_{t,x}<\lim_{n\to\infty}\sup\tau_{t_n,x_n}\leq\tau_{t,x})>0. \tag{3.20}$$

$\forall\varepsilon>0, \tau_{t,x}^{\varepsilon}=\inf\{s\geq t\ ; d(X_s^{t,x},D)\geq\varepsilon\}$. D'aprés(3.20)

$$\mathbb{P}(\tau_{t,x}^{\varepsilon}<\lim_{n\to\infty}\sup\tau_{t_n,x_n}\leq\tau_{t,x})\leq T)>0,$$

car $X^{t_n,x_n}\to X^{t,x}$ uniformement sur $[t,T]$

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}\sup\tau_{t_n,x_n}^{\frac{\varepsilon}{2}}\leq\tau_{t,x}^{\varepsilon}<\lim_{n\to\infty}\sup\tau_{t_n,x_n}\leq T)>0,$$

puis prouvons que

$$\lim_{n\to\infty}\inf\tau_{t_n,x_n}\geq\tau_{t,x}. \tag{3.21}$$

On suppose que(3.16) est vérifiée, il suffit de prouver que (3.21) p.s sur

$\Omega_M=\{\tau_{t,x}\leq M\}, \forall\omega\in\Omega_M$

il existe un $n(\omega)$ telle que $n\geq n(\omega)$,

implique $\tau_{t_n,x_n}\leq M+1$.

X^{t_n,x_n} converge vers $X^{t,x}$ sur l'intervalle $[0, M+1]$.

D'aprés $X^{t,x}$ on obtient que l'ensemble :

$$\overline{\{(\tau_{t_n,x_n} \ , X^{t_n,x_n}_{\tau_{t_n x_n}}); n \ \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\Lambda} = \Lambda.$$

■

Théorème 3.3.2 *Soit* A,c *et* h *des coefficients continus sur* $[0,T]\times\overline{D}$, $\kappa \in C(\overline{D})$, $\chi \in C([0,T]\times\overline{D})$ *avec*

$$\kappa(x) = \chi(t,x) \qquad x \in \partial D \quad ,$$

alors $u(t,x)$ est une fonction continue donnée par(3.18), telle que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \overline{D}$ est la solution unique de *(3.17)* .

Bibliographie

[1] J.-C. Breton. (2021). Calcul stochastique. Université de Rennes1.

[2] M. Deaconu. (2021). Equations diff´erentielles stochastiques : Résolution numérique et applications. Université de Lorraine.

[3] J.- P. Fouque.(1996). Relations entre probabilités et équations aux dérivées partielles. Techniques de l'ingénieur.

[4] M. Jeanblanc. (2006). Cours de calcul stochastique. Université d'Every.

[5] L.-F. Guilhoto.Numerically Solving The Dirichlet Problem Using Stochastic Calculus. Mémoire de Master. Université de Chicago.

[6] B. Oksendal.(2000).Stochastic Differential Equations.University of Oslo. Springer

[7] E. Pardoux ; A Rascanu. (2016).Stochastic Differential Equations, Backward SDEs, Partial Differential Equation. Springer.

Résumé

Dans ce mémoire de master, on donne l’interprétation probabiliste pour les solutions du problème de Dirichlet classique pour l’équation de la chaleur et l’équation de Laplace ainsi que pour le problème de Dirichlet généralisé pour les équations aux dérivées partielles linéaires de second ordre de type elliptique et parabolique.

Abstract

In this master’s thesis, we give the probabilistic interpretation for the solutions of the classical Dirichlet problem for the heat equation and the Laplace equation as well as for the generalized Dirichlet problem for the linear partial differential equations of second order of elliptical and parabolic type.

ملخص

في هذه مذكرة الماستر نقدم التفسير الاحتمالي لحلول مسالة دريكليه Dirichlet الكلاسيكية لمعادلة الحرارة و معادلة لابلاس و كذلك لمسالة دريكليه Dirichlet المعممة للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الدرجة الثانية من النوع الناقصية و المكافئة.