

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Mathématiques Appliquées**”

Option : statistique

Par SABEGH DILOU HIND

Titre :

Sur quelques familles des copules

Devant le Jury :

Mr.	Benatia Fatah	Prof.	U. Biskra	Président
Mme.	Abdelli Jihane	M.C.A	U. Biskra	Rapporteur
Mme.	Benbrika Ghozlane	M.A.A	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

A ma précieuse **mère**, ma vie, source d'amour et de tendresse.

A mon frère "**Fateh**" mon second père , et mon bras droit.

A mes chères soeurs **Samiha, Rahma, Basma** et **Bouchra**.

Et mes chères amies **Sofia, maroua, Lamia** et **Ribiha**.

Remerciements

Avant toute, je remercie Dieu tout-puissant de bénédiction pour arriver à ce jour.

Tout D'abord, je remercie **Dr Abdelli Jihane** pour accepté d'encadré ce mémoire. Je la remercie pour sa gentillesse, sa patience et ses précieux conseils.

Mes remerciements vont également aux member de jury d'avoir accepter de jiger mon travail **Dr Benatia Fatah** et **Dr Benbrika Ghozlene**.

Enfin j'adresse mes plus sincères remerciements à, qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
1 Théorie des copules	3
1.1 Copules bivariées	3
1.1.1 Théoreme de Sklar	5
1.1.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding	6
1.1.3 Densité d'une copule	6
1.1.4 Propriétés des copules	7
1.2 Mesures de dépendance et de concordance	8
1.2.1 Concordance et discordance	8
1.2.2 Mesures de concordance	10
1.2.3 Tau de Kendall et rho de Spearman	11
1.3 Copules associées à une copule	13

1.3.1	Copule de survie	13
1.4	Familles de copules	14
1.4.1	Copules elliptiques	14
1.4.2	Copules Archimédiennes	15
1.4.3	Copule de valeur extrême	17
1.4.4	Copule Farlie-Gumb el-Morgenstern	18
2	Copule de Marshall-Olkin	19
2.1	Généralités sur la distribution de Marshall-Olkin	19
2.1.1	La distribution de Marshall-Olkin Burr	19
2.2	Caractérisation de la copule de Marshall-Olkin	23
2.2.1	Copule de Marshall-Olkin	23
2.2.2	La densité de la copule de Marshall-Olkin	27
2.2.3	Les mesures de concordances associées à cette famille de	
	copules	27
2.3	La distribution exponentielle puissance de Marshall-Olkin	29
2.4	Application de la distribution de Marshall-Olkin semi-Burr dans la	
	modélisation des taux de change	30
	Conclusion	33
	Notations et symbols	34
	Bibliographie	36

Table des figures

2.1	Distribution de MOSB	22
2.2	Sries chronologiques des taux de change quotidien du yuan chinois en dollars amricains	31
2.3	L'histogramme et la courbe de fréquence cumulative de la série observée	32

Introduction.

L'étude de la coupule et de ses applications statistiques est assez récente. L'intérêt de la communauté statistique pour la coupule a eu lieu récemment et l'histoire de la coupule peut être dit pour commencer avec Fréchet.

C'est quoi une coupule? Du point de vue d'une copule sont des fonctions qui joignent ou "couple" fonctions d'une distribution multivariée à leurs fonctions de distribution marginales alternativement, copules.

Copula est un mot latin pour association, d'abord employé dans un sens mathématique ou statistique par Abe Sklar 1959 dans la théorie décrivant les fonctions de distribution unidimensionnelle d'une formation multiculturelle.

La mesure de la dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires est une pratique largement utilisée chez les statisticiens de cette corrélation linéaire liée à Pearson est la plus connue. Mais l'utilisation de cette mesure présente plusieurs inconvénients, et pour éviter ce problème, nous utilisons d'autres mesures de dépendance qui ont été observées sur échantillon, et qui sont les coefficients de corrélation non linéaire telque le tau Kendall et le Rho Spearman. Ces mesures de dépendance peuvent être exprimées explicitement en fonction de la copule.

Malgré le large éventail d'intérêt sur la copule, jusqu'à présent, nous croyons que ce concept est encore à ses débuts et peut vraiment être considéré comme un concept

mathématique puissant qui mérite d'être utilisé dans de nombreuses applications.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres :

Chapitre1 : C'est une introduction mathématique à la copule, il comprend les notions et les théories qui servent de base. Nous présentons les définitions de copules bivarées et en particulier le théorème de Sklar, après nous présentons l'aspect des métriques d'association de la mesure de dépendance en forme de couple telle que le tau de Kendall et rho Spearman. Nous offrons dans ce chapitre quelques exemples des familles des copules les plus courantes.

Chapitre2 : Ce chapitre est consacré à étudier une famille des copules dite la copule de Marshall-Olkin. On a essayé de donner quelques notions et propriétés concernant cette famille.

Chapitre 1

Théorie des copules

Dans ce premier chapitre, nous donnons quelques définitions de base et propriétés qui nous permettent de d'écrire le concept de copule.

1.1 Copules bivariées

Considérons l'intervalle $I = [0, 1]$.

Définition 1.1.1 *Une copule 2-dimensionnelle est une fonction C de $I^2 = [0, 1]^2$ dans I ayant les propriétés suivantes :*

i) La copule C est attachée (grounded), c'est -à-dire :

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0, \quad \forall u, v \in I. \quad (1.1)$$

ii) Les marges sont uniformes, c'est -à-dire :

$$C(u, 1) = u \text{ et } C(1, v) = v, \quad \forall u, v \in I. \quad (1.2)$$

iii) C est une fct 2-croissantes : $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ telle que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (1.3)$$

Exemple 1.1.1 Soit la copule M définie comme suit. On a

$$M(u, v) = \min(u, v).$$

i) $M(u, v) = \min(u, 0) = \min(0, v) = 0.$

ii) $M(u, v) = \min(u, 1) = u \text{ et } M = \min(1, v) = v.$

iii) On a $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, alors

$$\begin{aligned} & C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \\ &= \min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_2) + \min(u_1, v_1) \\ &= u_2 - \min(u_2, v_1) - u_1 + u_1 \\ &= \begin{cases} u_2 - u_2 & \text{si } u_2 \leq v_1. \\ u_2 - v_1 & \text{si } u_2 \geq v_1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } u_2 \leq v_1. \\ u_2 - v_1 \geq 0 & \text{si } u_2 \geq v_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc M est bien évidemment une copule.

1.1.1 Théoreme de Sklar

Définition 1.1.2 *On appelle inverse généralisé de la fonction F la fonction F^{-1} de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} définie par :*

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

Proposition 1.1.1 *Soit X une v a de fonction de répartition F , alors :*

1. *Si U est uniforme dans $[0, 1]$, alors $:F^{-1}(U) \rightarrow F$.*
2. *Si F est continue, alors $:F(X) \rightarrow U_{[0,1]}$.*

Théorème 1.1.1 (Sklar) *Soient F et G les fds marginales, la fd jointe H peut sécrire en terme de fct unique telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (1.4)$$

Preuve. Soit C la distribution de couple aléatoire (U, V) avec $U = F(X)$ et $V = G(Y)$:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(F^{-1}(U) \leq x, G^{-1}(V) \leq y) \\ &= P(U \leq F(x), V \leq G(y)) \\ &= C(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

■

1.1.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding

On va d'abord définir trois copules importantes :

1. Copule minimale : $M = C^+(u, v) = \min(u, v)$.
2. Copule maximale : $W = C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$.
3. Copule produit : $\Pi = C^\perp(u, v) = uv$.

Les copules W et M sont appelées borne inférieure et borne supérieure respectivement de Fréchet-Hoeffding ou copule minimale et maximale.

Tout copule C est bornée comme suit

$$W \leq C(u, v) \leq M.$$

1.1.3 Densité d'une copule

Les copules admettent des densités de probabilités. Si la densité c associée à la copule C existe, alors elle est définie par

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v},$$

où $c : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si la fd jointe H est absolument continue, en utilisant le théorème de Sklar, on peut exprimer la densité d'un couple aléatoire (X, Y) en fonction de la densité de sa copule et de ses marginales f et g par

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y).$$

1.1.4 Propriétés des copules

Toute copule vérifie les propriétés ci-dessous.

a) Continuité : Soit C une copule, $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

b) La symétrie : On dit que C est symétrique si

$$\forall (u, v) \in I^2 : C(u, v) = C(v, u)$$

c) L'ordre : On dit que C_1 est plus petite que C_2 et inversement si

$$\forall (u, v) \in I^2 : C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$$

d) La convexité : Soit $(a, b), (c, d) \in [0, 1]^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on dit que C est convexe si on a

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \leq \lambda C(a, b) + (1 - \lambda)C(c, d)$$

e) Théorème d'invariance : On dit que la copule $C_{X,Y}$ est invariante par transformations strictement croissantes de deux v.a.s continues X et Y de marginales F et G si

$$C_{\alpha(X), \beta(Y)} = C(X, Y).$$

où α, β et sont deux fcts strictement croissantes.

1.2 Mesures de dépendance et de concordance

1.2.1 Concordance et discordance

Soit $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ un échantillon de n observations d'un couple (X, Y) : Il existe $C_n^2 = n!/2(n-2)!$ paires de distributions distinctes de couples (x_i, y_i) et (x_j, y_j) qui sont dites concordantes ou discordantes si :

- **Concordantes** : $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ i.e. $(x_i < x_j$ et $y_i < y_j)$ ou $(x_i > x_j$ et $y_i > y_j)$.
- **Discordantes** : $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ i.e. $(x_i < x_j$ et $y_i > y_j)$ ou $(x_i > x_j$ et $y_i < y_j)$.

Définition 1.2.1 (*Fonction de concordance*) La fonction de concordance est la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance entre deux couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) , elle est donnée par

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

On peut écrire Q en terme de deux copules.

Théorème 1.2.1 Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux couples de variables aléatoires indépendantes de fonctions de répartition conjointes F et \tilde{F} avec des marges communes F_1 et F_2 respectivement. Soient C_1 et C_2 les copules associées aux fonctions de répartition F et \tilde{F} respectivement, On a

$$Q = Q(C_1, C_2) = \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

Preuve. On pose $u = F_1(x)$ et $v = F_2(y)$;

$$\begin{aligned} Q &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - (1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]) \\ &= 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1, \end{aligned}$$

avec

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) + P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2).$$

On a :

$$\begin{aligned} P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) &= P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) dC_1(F_1(x), F_2(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F_1(x), F_2(y)) dC_1(F_1(x), F_2(y)) \\ &= \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \end{aligned}$$

De façon similaire :

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) &= P(X_2 > X_1, Y_2 > Y_1) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P(X_2 > X_1, Y_2 > Y_1) dC_1(F_1(x), F_2(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{F}^-(x, y) dC_1(F_1(x), F_2(y)), (\tilde{F}^- \text{ fonction de survie } \tilde{F}) \\ &= \int \int [1 - F_1(x)F_2(y) + C_2(F_1(x), F_2(y))] dC_1(F_1(x), F_1(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v). \end{aligned}$$

C_1 est la fonction de répartition du couple (U, V) d'une loi uniforme $(0, 1)$, $E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$ donc :

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \end{aligned}$$

Par suite :

$$Q = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

■

1.2.2 Mesures de concordance

Une mesure d'association K entre deux vas X et Y de copule C est une mesure de concordance, si elle vérifie les propriétés suivantes :

- K est définie pour tout couple (X, Y) de va continues.
- $-1 \leq K_{X,-X} \leq K_{X,Y} \leq K_{X,X} = 1$.
- $K_{-X,Y} = K_{X,-Y} = -K_{X,Y}$.
- Si Y est presque sûrement une fonction décroissante de X , alors $K_{X,Y} = K_W = -1$.
- $K_{X,Y} = K_{Y,X}$.
- Si α et β sont des fonctions strictement croissantes, alors $K_{\alpha(X),\beta(Y)} = K_{X,Y}$.
- Si $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$ est une suite de vas dont la copule est C_n , et si $\{C_n\}_{n \geq 1}$ converge vers C lorsque n tend vers l'infini alors K_{C_n} converge vers K_C .
- Si Y est presque sûrement une fonction croissante de X , alors $K_{X,Y} = K_M = 1$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $K_{X,Y} = 0$.
- Si C_1 et C_2 sont deux copules telles que $C_1 < C_2$ alors on a $K_{C_1} < K_{C_2}$.

1.2.3 Tau de Kendall et rho de Spearman

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique. Elles offrent l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires.

Tau de Kendall Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux couples de variables continues i.i.d de fonction jointe F . Le tau de Kendall est donné par :

$$\tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Son expression en terme de la copule associée est la suivante

Définition 1.2.2 Soit (X, Y) un couple de variables continues de copule C . Si les marginales sont identiquement distribuées i.e. $F_1 = F_2 = F$ le tau de Kendall a pour expression :

$$\tau_C = 4 \int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

comme les copules sont uniformément distribuées sur I , alors :

$$\int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) = E[C(u, v)].$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\tau_C = 4E[C(u, v)] - 1.$$

Rho de Spearman Le Rho de Spearman est une autre mesure de concordance très utilisée en pratique.

Définition 1.2.3 (Version échantillon) Soit une série de n observations $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$

d'un couple (X, Y) , On définit le rho de Spearman par

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n D_i^2$$

où :

- $D_i = R_{X_i} - R_{Y_i}$.
- R_{X_i} et R_{Y_i} : rangs des observations de X et Y respectivement.

Définition 1.2.4 Soient (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) trois vecteurs aléatoires indépendants de même loi H . La version population du rho de Spearman est définie comme étant proportionnelle à la différence de la probabilité de concordance et celle de discordance des couples aléatoires $(X_1, Y_1), (X_2, Y_3)$. Elle s'écrit comme suit

$$\rho_{X,Y} := 3([P(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - [P(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]).$$

La distribution de (X_2, Y_3) étant (car les variables X_2 et Y_3 sont indépendantes) alors d'après ce qui précède on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 Soit F une fonction de distribution bivariable continue de marginales F_1 et F_2 . Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire de distribution F . Le rho de Spearman est alors définie comme le coefficient de corrélation linéaire entre les variables $F_1(X_1)$ et $F_2(X_2)$ suivent une loi uniforme sur $I = [0, 1]$, leur espérance vaut $\frac{1}{2}$ et leur variance $\frac{1}{12}$. Ainsi on a :

$$\rho_s = \int \int_{I^2} F_1(x_1)F_2(x_2)dF(x_1, x_2) - 3.$$

ou en utilisant les copules

$$\rho_s = 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 3,$$

alors :

$$\rho_s = \frac{E(U, V) - E(U) - E(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}}.$$

1.3 Copules associées à une copule

Remarque 1.3.1 *Il existe une relation analogue reliant les fonctions de survies marginales à leurs fonction de survie jointe. En effet*

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + C(F(x), G(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)). \end{aligned}$$

1.3.1 Copule de survie

Soit \hat{C} une copule de survie associée à la copule C , elle est définie par

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

On pose

$$\bar{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v).$$

On peut aussi écrire la distribution de survie en fonction de la copule de survie comme ci dessous

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)),$$

ou bien

$$\bar{C}(u, v) = \hat{C}(1 - u, 1 - v).$$

1.4 Familles de copules

Il existe nombreuses familles de copules qui diffèrent dans le détail de la dépendance qu'elles représentent. Une famille en général a plusieurs paramètres qui se rapportent à la force et la forme de la dépendance. Certaines familles de copules sont décrites ci-dessous.

1.4.1 Copules elliptiques

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois de distribution elliptique qui sont symétriques et donc faciles à simuler. Les deux classes les plus utilisées des copules elliptiques sont la copule normal et la copule de Student.

Définition 1.4.1 *On appelle copule elliptique, toute copule qui s'écrit de la forme suivante :*

$$C_p(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,1}^{-1}} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,2}^{-1}} g\left(\frac{x^2 - 2pxy + y^2}{\sqrt{1-p^2}}\right) dx dy = H_P(\Phi_{g,1}^{-1}(u) \Phi_{g,2}^{-1}(v)),$$

avec

- p : coefficient de corrélation qui appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
- $\Phi_{g,1}^{-1}(u), \Phi_{g,2}^{-1}(v)$: fct quantiles des vas X et Y respectivement.
- H_P : distribution jointe des vas X et Y .

Copule normale

La copule normale bivariée est définie de la façon suivante

$$C_p(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-p^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left(\frac{x^2 - 2pxy}{2\sqrt{1-p^2}}\right) dx dy = \Phi_p(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)).$$

où Φ_p : fd jointe de la loi normale et Φ^{-1} : fct quantile de la loi normale $N(0, 1)$.

Copule de Student

La copule de Student est définie de la façon suivante

$$C_{p,v}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-p^2}} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(v)} 1 + \left(\frac{x^2 - 2pxy + y^2}{v(1-p^2)}\right)^{-\left(\frac{v}{2}+1\right)} dx dy = T_{p,v}(T_v^{-1}(u), T_v^{-1}(v))$$

où

$T_{p,v}$: fd jointe de la loi Student à degrés de liberté.

T_v^{-1} : fct inverse de la loi Student standard.

Remarque 1.4.1 *Si le degré de liberté $v \rightarrow \infty$, alors la copule de student converge vers la copule Gaussienne*

1.4.2 Copules Archimédiennes

Les copules archimédiennes offrent une très grande flexibilité au niveau de la structure de dépendance. Parmi les copules appartenant à cette famille notons les copules de Clayton, de Gumbel et de Frank. Elles sont construites à l'aide d'une fonction φ qui est appelée la fonction génératrice de la copule.

Définition 1.4.2 *On appelle copule Archimédienne de générateur φ , la copule*

définie par

$$C(u, v) = 1 - \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

avec $\varphi : I \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue, strictement décroissante vérifiant $\varphi(1) = 0$, on définit l'inverse de φ par $\varphi^{[-1]}$ tel que

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Si $\varphi(0) = \infty$, alors

$$\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}.$$

φ est au moins deux fois continument dérivable telle que $\varphi'(u) < 0$ et $\varphi''(u) > 0$ pour tout $u \in I$.

Copule de Clayton

Elle est définie comme suit

$$\forall \theta \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[: C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{1}{-\theta}}.$$

Son générateur est $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$.

Copule de Gumbel

Elle est définie comme suit

$$\forall \theta \geq 0 : C(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}.$$

Son générateur est $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$.

Copule de Frank

Elle est définie comme suit

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

Son générateur est

$$\varphi_{\theta}(t) = -\ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

Remarque 1.4.2 Une autre caractérisation des copules archimédiennes peut se faire à l'aide de la fct de Kendall

$$K(t) = P(C(U, V) \leq t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}; t \in I.$$

1.4.3 Copule de valeur extrême

Comme leur nom l'indique, les copules de valeurs extrêmes sont issues de la théorie de valeurs extrêmes. Dans cette dernières, on considère les variables aléatoires de maximum suivante :

$$M_{(n,X)} = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i) \text{ et } M_{(n,Y)} = \max_{1 \leq i \leq n} (Y_i)$$

La distribution de probabilité de la variable :

$$M_n = (M_{(n,X)}, M_{(n,Y)}).$$

Définition 1.4.3 Soit n une constante réelle positive. Une copule de valeurs ex-

trême est une copule qui vérifie la relation suivante :

$$C(u^n, v^n) = C^n(u, v) \quad \forall u, v \in I^2,$$

où

$$C^{\frac{1}{n}}(u^n, v^n) = C(u, v) \quad \forall u, v \in I^2, \forall n > 0.$$

Exemple 1.4.1 *On montre que la copule de Gumbel est une copule de valeurs extrêmes, en effet*

$$\begin{aligned} C(u^n, v^n) &= \exp \left\{ -[(-\ln u^n)^\theta + (-\ln v^n)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -[n^\theta ((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -n [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \left(\exp \left\{ -[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \right)^n \\ &= C^n(u, v). \end{aligned}$$

1.4.4 Copule Farlie-Gumb el-Morgenstern

Cette copule a été étudiée par Morgenstern (1956), Gumbel (1958), et par Farlie (1960).

Définition 1.4.4 *La copule Farlie-Gumbel-Morgenstern connue par (F-G-M) est définie pour un paramètre de dépendance $\theta \in [-1, 1]$ comme suit :*

$$C(u, v) = uv + \theta uv\bar{u}\bar{v}.$$

telle que : $\bar{u} = 1 - u$ et $\bar{v} = 1 - v$. La densité de copule F-G-M est donnée par :

$$\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = c(u, v) = 1 + \theta(1 - 2u - 2v + 4uv), \quad \forall u, v \in I^2.$$

Chapitre 2

Copule de Marshall-Olkin

Dans ce chapitre, nous parlerons de Marshall Olkin et des caractéristiques les plus importantes.

2.1 Généralités sur la distribution de Marshall-Olkin

2.1.1 La distribution de Marshall-Olkin Burr

Les familles de distribution peuvent être développées de différentes façons et introduire de nouveaux paramètres, pour plus de flexibilité ou pour construire différents modes, une façon d'ajouter un coefficient à la famille de distribution a été proposée par Marshall et Walkin en (1997) ici, nous suggérons une façon d'introduire deux enseignants dans la famille de distribution ceci peut être vu comme une généralisation à la métho de suggérée par Marshall et Olkin (1997) manière à une fonction de survie F , et la fonction de densité f , la famille de deux-parametre de

la fonction de survie est proposée comme suit :

$$\bar{G}(x) = \left[\frac{\alpha \bar{F}(x)}{1 - \alpha \bar{F}(x)} \right]^\gamma ; -\infty < x < \infty, 0 < \alpha < \infty, 0 < \gamma < \infty. \quad (2.1)$$

Quand $\alpha = 1$ nous obtenons

$$\bar{G}_{1,\gamma}(x) = [\bar{F}(x)]^\gamma$$

Et en particulier quand $\alpha = \gamma = 1$, nous obtenons les fonction :

$$\bar{G}_{1,1}(x) = \bar{F}(x)$$

et

$$g_{\alpha,\gamma}(x) = \gamma \left[\frac{\alpha \bar{F}(x)}{1 - \alpha \bar{F}(x)} \right]^{\gamma-1} \frac{\alpha f(x)}{[1 - \alpha \bar{F}(x)]^2} \quad (2.2)$$

Où \bar{G} et g sont : la fonction de survie, et la fonction de densité de la nouvelle famille de la distribution. La fonction de taux de risque est :

$$r_{\alpha,\gamma}(x) = \frac{g_{\alpha,\gamma}(x)}{\bar{G}(x)} = \frac{\gamma f(x)}{\bar{F}(x) [1 - \alpha \bar{F}(x)]} \quad (2.3)$$

Burr (1942) a fourni 12 familles de distributions qui prennent une gamme de formes et faciles à unir mais la distribution 12 a reçu le plus d'attention dans divers domaines. Parmi ceux qui s'intéressent au type 12 était Rodriguez (1977) qui a introduit la fonction de distribution suivante :

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{1}{1 + x^\beta} \right)^\gamma ; 0 < x < \infty, 0 < \beta < \infty, 0 < \gamma < \infty \quad (2.4)$$

La fonction de densité est unimodale avec le mode à $x = \left(\frac{\beta-1}{\gamma\beta+1} \right)^{\frac{1}{\beta}}$ si $\beta > 1$ et 0

si $\beta < 1$.

Définition 2.1.1 On dit que la variable aléatoire X , de support positif, suit la distribution semi- Pareto notée par $SP(\beta)$, si sa fonction de survie est de la forme :

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{1 + \Psi(x)} \quad (2.5)$$

où $\Psi(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$p\Psi(x) = \left(p^{\frac{1}{\beta}}x\right); \beta > 0, 0 < p < 1 \quad (2.6)$$

La solution de l'équation fonctionnelle est :

$$\Psi(x) = x^\beta h(x)$$

où $h(x)$ est périodique au $\ln x$ avec la périodicité $\left(\frac{-2\pi\beta}{\ln p}\right)$. Par exemple, si $h(x) = e^{\theta \cos(\beta \ln x)}$ il satisfait l'équation fonctionnelle avec $p = e^{2\pi}$ et $\Psi(x)$ monotone croissante avec $0 < \theta < 1$.

Définition 2.1.2 On dit qu'une variable aléatoire X , de support positif, suit la distribution de semi-Burr notée par $SB(\beta, \gamma)$, si sa fonction de survie est de la forme :

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{1}{1 + \Psi(x)}\right)^\gamma; \gamma > 0 \quad (2.7)$$

Où $\Psi(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle [2.6](#)

La distribution de Marshall-Olkin semi-Burr

Si nous remplaçons l'équation [2.5](#) dans l'équation [2.1](#), nous obtenons la distribution Marshall-Olkin semi-Burr ($MOSB(\alpha, \beta, \gamma)$) qui nous donne la fonction de survie

par :

$$\begin{aligned}\bar{G}(x) &= \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Psi(x)} \right)^\gamma ; \alpha, \gamma, \beta > 0 \\ &= \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha} \Psi(x)} \right)^\gamma\end{aligned}\quad (2.8)$$

Où $\Psi(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle [2.6](#) en [2.8](#) notez la distribution semi-Burr de trois paramètres. La fonction de densité de probabilité de $MOSB(\alpha, \beta, \gamma)$ est :

$$g(x) = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Psi(x)} \right)^{\gamma+1} \Psi'(x) ; \alpha, \beta, \gamma > 0 \quad (2.9)$$

Ici, nous étudions le cas particulier où $\Psi(x) = x^\beta h(x)$ où $h(x) = e^{\theta \cos(\beta \ln x)}$

$$g(x) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha} x^\beta e^{\theta \cos(\beta \ln x)}} \right) \frac{\gamma \beta x^{\beta-1} e^{\theta \cos(\beta \ln x)}}{1 + \frac{1}{\alpha} x^\beta e^{\theta \cos(\beta \ln x)}} \quad (2.10)$$

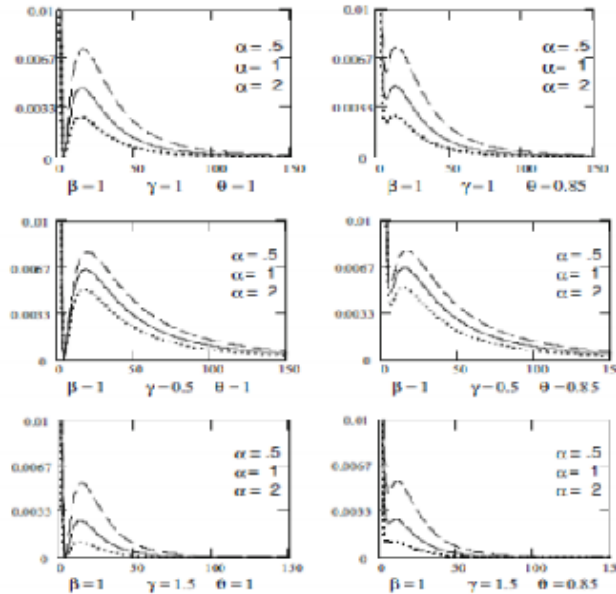


FIG. 2.1 – Distribution de MOSB

est une la distribution de $MOSB(\alpha, \beta, \gamma)$ pour différentes valeurs de α, β, γ et θ .

La distribution de Marshall-Olkin Burr

Définition 2.1.3 *On dit qu'une variable aléatoire X de support positif, suit la distribution de Pareto notée par $p(\beta)$, si sa fonction de survie est de la forme :*

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{1+x^\beta}, \beta > 0 \quad (2.11)$$

Lorsque $\bar{F}(x) = \frac{1}{1+x^\beta}$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &= \left(\frac{\alpha}{\alpha + x^\beta} \right)^\gamma, 0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty, 0 < \gamma < \infty \\ &= \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}x^\beta} \right)^\gamma \end{aligned} \quad (2.12)$$

La distribution avec la fonction de survie [2.12](#) s'appelle la distribution de Marshall-Olkin Burr notée par $MOB(\alpha, \beta, \gamma)$. La fonction correspondante de densité est :

$$g(x) = \frac{\gamma\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + x^\beta} \right)^{\gamma+1} x^{\beta-1} \quad (2.13)$$

2.2 Caractérisation de la copule de Marshall-Olkin

2.2.1 Copule de Marshall-Olkin

En considérant la distribution $MOB(\alpha, \beta, \gamma)$ avec la fonction de survie

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}x^\beta} \right)^{\gamma+1},$$

et la distribution $MOP(\alpha, \beta)$ avec la fonction de survie

$$\bar{G}(y) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}y^\beta}.$$

Lemme 2.2.1 *Soient X et Y deux va telle que : $X \curvearrowright MOB(\alpha, \beta, \gamma)$ et $Y \curvearrowright MOP(\alpha, \beta)$, alors d'après la fonction de survie conjointe de (X, Y) est de la forme :*

$$\bar{H}_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{\alpha}x^\beta)} \int_0^1 \frac{1}{(1 + \frac{1}{\alpha} \max(x^\beta, v^\beta y^\beta))^{\gamma+1}} \beta \gamma v^{\beta\gamma-1} dv.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire qui suit la distribution $MOB(\alpha, \beta, \gamma)$, alors :

$$\bar{F}_X(x) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}x^\beta} \right)^{\gamma+1}; 0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty, 0 < \gamma < \infty, 0 < x < \infty.$$

et soit Y variable aléatoire qui suit la distribution $MOP(\alpha, \beta)$, alors :

$$\bar{G}_Y(y) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}y^\beta}; 0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty, 0 < x < \infty.$$

D'après le lemme (2.2.1) La fonction de survie conjointe de (X, Y) est de la forme

$$\bar{H}(x, y) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{\alpha}x^\beta)} \int_0^1 \frac{1}{(1 + \frac{1}{\alpha} \max(x^\beta, v^\beta y^\beta))^{\gamma+1}} \beta \gamma v^{\beta\gamma-1} dv,$$

alors :

$$\begin{aligned} \overline{H}(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{(1+\frac{1}{\alpha}y^\beta)} \int_0^1 \frac{1}{(1+\frac{1}{\alpha}x^\beta)^{\gamma+1}} \beta \gamma v^{\beta\gamma-1} dv & \text{si } x^\beta > v^\beta y^\beta \\ \frac{1}{(1+\frac{1}{\alpha}y^\beta)} \int_0^1 \frac{1}{(1+\frac{1}{\alpha}v^\beta y^\beta)^{\gamma+1}} \beta \gamma v^{\beta\gamma-1} dv & \text{si } x^\beta < v^\beta y^\beta \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1+\frac{1}{\alpha}y^\beta)} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{\alpha}x^\beta)^{\gamma+1}} & \text{si } x^\beta > v^\beta y^\beta \\ \frac{1}{(1+\frac{1}{\alpha}y^\beta)^{\gamma+1}} & \text{si } x^\beta < v^\beta y^\beta \end{cases} . \end{aligned}$$

Soit :

$$u = F(x) = 1 - \overline{F}(x) \text{ et } v = G(y) \Rightarrow v = 1 - \overline{G}(y),$$

alors

$$u = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}x^\beta} \right)^{\gamma+1} \text{ et } v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}y^\beta}$$

Donc

$$x = \left[\frac{\alpha}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - \alpha \right]^{\frac{1}{\beta}} \text{ et } y = \left[\frac{\alpha}{1-v} - \alpha \right]^{\frac{1}{\beta}} .$$

Et on a :

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \\ &= \overline{H}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) - 1 + u + v. \end{aligned}$$

Lorsque

$$x = \left[\frac{\alpha}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - \alpha \right]^{\frac{1}{\beta}} \text{ et } y = \left[\frac{\alpha}{1-v} - \alpha \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\begin{aligned}
 C(u, v) &= \begin{cases} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\alpha}{1-v} - \alpha\right]^{\frac{1}{\beta}\beta}\right)} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\alpha}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - \alpha\right]^{\frac{1}{\beta}\beta}\right)^{\gamma+1}} - 1 + u + v \\ \text{si } \left[\frac{\alpha}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - \alpha\right]^{\frac{1}{\beta}\beta} > v^\beta \left[\frac{\alpha}{1-v} - \alpha\right]^{\frac{1}{\beta}\beta}, \\ \text{et } \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\alpha}{1-v} - \alpha\right]^{\frac{1}{\beta}\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - 1 + u + v \\ \text{si } \left[\frac{\alpha}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - \alpha\right]^{\frac{1}{\beta}\beta} < v^\beta \left[\frac{\alpha}{1-v} - \alpha\right]^{\frac{1}{\beta}\beta} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{1}{1-v}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{(1-u)}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - 1 + u + v \\ \text{si } \left[\frac{1}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - 1\right] > v^\beta \left[\frac{1}{1-v} - 1\right]. \\ \text{et } \frac{1}{\left(\frac{1}{1-v}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - 1 + u + v \\ \text{si } \left[\frac{1}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - 1\right] < v^\beta \left[\frac{1}{1-v} - 1\right]. \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (1-v)(1-u) - 1 + u + v & \text{si } \left[\frac{1}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - 1\right] > v^\beta \left[\frac{1}{1-v} - 1\right], \\ (1-v)^{\gamma+1} - 1 + u + v & \text{si } \left[\frac{1}{(1-u)^{\frac{1}{\gamma+1}}} - 1\right] < v^\beta \left[\frac{1}{1-v} - 1\right]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$C(u, v) = \begin{cases} uv & \text{si } u > 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1}, \\ (1-v)^{\gamma+1} - 1 + u + v & \text{si } u < 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1}. \end{cases}$$

■

2.2.2 La densité de la copule de Marshall-Olkin

Soit la copule de Marshall-olkin

$$C(u, v) = \begin{cases} uv & \text{si } u > 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \\ (1-v)^{\gamma+1} - 1 + u + v & \text{si } u < 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \end{cases},$$

sa densité

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v},$$

alors :

$$c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \\ 0 & \text{si } u < 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \end{cases}.$$

2.2.3 Les mesures de concordances associées à cette famille de copules

– Le tau de Kendall :

$$\tau = 4 \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

On a :

$$C(u, v) = \begin{cases} uv & \text{si } u > 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \\ (1-v)^{\gamma+1} - 1 + u & \text{si } u < 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \end{cases}$$

Alors

$$dC(u, v) = \begin{cases} 1 dudv & \text{si } u > 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \\ 0 & \text{si } u < 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \end{cases}$$

Donc

$$C(u, v) dC(u, v) = \begin{cases} uvdudv & \text{si } u > 1 - \left(\frac{1-u}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \\ 0 & \text{si } u < 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \int_0^1 \int_w^1 uvdudv - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \left(\int_w^1 uvdu \right) dv - 1; w = 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \\ &= 4 \int_0^1 \left[\frac{u^2 v}{2} \right]_w^1 dv - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \frac{v}{2} dv - 4 \int_0^1 \left[\frac{v}{2} w^2 \right] dv - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \frac{v}{2} dv - 4 \int_0^1 \frac{v}{2} \left[1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \right]^2 dv - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \frac{v}{2} dv - 4 \int_0^1 \frac{v}{2} - 4 \int_0^1 \frac{v}{2} \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{2\gamma+2} dv + 4 \int_0^1 v \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} dv - 1 \\ &= 2 \int_0^1 \left[2 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \right] v \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} dv - 1 \end{aligned}$$

– **Le rho de Spearman :**

$$\rho_{X,Y} = \rho_c = 3Q(C, \pi) = 12 \int \int_{I^2} C(u, v) - 3 = 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3$$

On a :

$$dC(u, v) = \begin{cases} 1dudv & \text{si } u > 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \\ 0 & \text{si } u < 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1}+1-v}\right)^{\gamma+1} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \rho_{X,Y} &= 12 \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3 \\
 &= 12 \int_0^1 \left[\int_w^1 uv du \right] dv - 3; w = 1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1} + 1 - v} \right)^{\gamma+1} \\
 &= 12 \int_0^1 \left[v \frac{u^2}{v} \right]_w^1 dv - 3 \\
 &= 12 \int_0^1 \left[\frac{v}{2} - \frac{v}{2} w^2 \right] dv - 3 \\
 &= 12 \int_0^1 \left[\frac{v}{2} - \frac{v}{2} \left[1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1} + 1 - v} \right)^{\gamma+1} \right]^2 \right] dv - 3 \\
 &= 6 \int_0^1 v dv - 6 \int_0^1 v \left[1 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1} + 1 - v} \right)^{\gamma+1} \right]^2 dv - 3 \\
 &= 6 \int_0^1 v dv - 6 \int_0^1 v dv + 6 \int_0^1 v \left[2 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1} + 1 - v} \right)^{\gamma+1} \right] \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1} + 1 - v} \right)^{\gamma+1} dv - 3 \\
 &= 6 \int_0^1 \left[2 - \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1} + 1 - v} \right)^{\gamma+1} \right] v \left(\frac{1-v}{v^{\beta+1} + 1 - v} \right)^{\gamma+1} dv - 3
 \end{aligned}$$

2.3 La distribution exponentielle puissance de Marshall-Olkin

Marshall Olkin a offert un moyen général d'obtenir de nouvelles familles de distribution, leur fonction de survie

$$\bar{G}(x) = \frac{\theta \bar{F}(x)}{1 - \theta \bar{F}(x)}, \quad -\infty < x < \infty, \theta > 0, \bar{\theta} = 1 - \theta \quad (1)$$

et

$$g(x) = \frac{\theta f(x)}{(1 - \theta \bar{F}(x))^2} \quad (2)$$

par [1] et [2] nous offrons un nouvel ensemble de distributions qui est la distribution de Marshall-Olkin Puissance Exponential Distribution (*MOPE*) avec les paramètres (β, η, θ) et la fonction de survie est donnée par :

$$\bar{G}(x) = \frac{\theta \left(\exp \left(1 - \exp \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right) \right)}{\left(1 - \bar{\theta} \exp \left(1 - \exp \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right) \right)}, x > 0, \beta, \eta, \theta > 0, \bar{\theta} = 1 - \theta$$

et

$$g(x) = \frac{\theta \left(\frac{\beta}{\eta} \right) \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left(1 - \exp \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right)}{\left(1 - (1 - \theta) \exp \left(1 - \exp \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right) \right)^2}$$

Ici nous choisissons la distribution PE avec les paramètres β, η comme distribution de ligne de base avec :

$$F(x) = 1 - \exp \left(1 - \exp \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right)$$

et

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\eta} \right) \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \exp \left(1 - \exp \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right), x > 0, \beta, \eta > 0$$

2.4 Application de la distribution de Marshall-Olkin semi-Burr dans la modélisation des taux de change

Les observations quotidiennes des taux de change entre la Chine et les États-Unis sont prises en compte. La taille est 1024 observations du 2 janvier 1981 au 11

janvier 1985. Les données sont recueillies sur le site Web du Conseil d'administration de Systeme fédérale de réserve Etats-Unis. la figure présenté la trace des séries chronologiques de données :



FIG. 2.2 – Sries chronologiques des taux de change quotidien du yuan chinois en dollars amricains

0,9993 est l'autocorrélation du premier ordre de la série $\{X_n\}$.

L'autocorrélation de premier ordre de différenciation est prise pour rendre la série stationnaire. La série qui en résulte est obtenue par l'équation :

$$Y_n = X_n - r_0 X_{n-1}$$

où r_0 est l'autocorrélation du premier ordre. En soustrayant la moyenne et en divisant par l'écart-type d'obtenir la série normalisée. La série qui en résulte est rendue positive en prenant le module L'autocorrélation de la série qui en résulte est jugée insignifiante Chaque observation dans la série est multipliée par 10. La valeur maximale de la série est trouvée à 66,274 Les observations sont classées

dans les classes à 49 de l'égalité (1, 333) de largeur. L'histogramme est construit avec une valeur moyenne de classes sur le long de l'axe des X et de la fréquence sur le long de l'axe des Y . Le tracé de l'histogramme et la courbe de fréquence cumulative sont présentés dans la figure suivante : Ce dernier ressemble à la forme

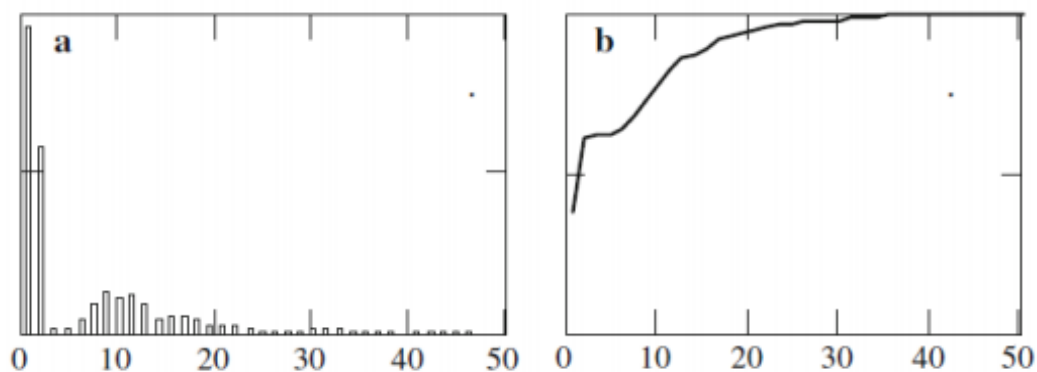


FIG. 2.3 – L'histogramme et la courbe de fréquence cumulative de la série observée

fonctionnelle de distribution du semi-Burr illustrée à la [2.1](#).

Conclusion

La théorie des copule est assez importante, elle est utilisée dans différentes revues telles que l'assurance, la gestion et la finance.

Dans ce travail, on a présentés une introduction sur les copules, ses principales caractéristiques ainsi que quelques mesures de dépendance et de compatibilité. Nous avons indiquer les plus importantes familles de copule, en particulier la copule de Marshall-Olkin.

Notations et symbols

$v.a$	→	Variable aléatoire
I	→	Intervalle $[0, 1]$
C, c	→	copule, densité de la copule
fct	→	Fonction
F^{-1}	→	f.c.t inverse
F, G	→	f.d.s des loi marginales
fd	→	Fonction de distribution
f, g	→	Densité des loi marginales
U, V	→	V.a.s qui la loi uniforme U
H	→	Distribution jointe
h	→	Densité de la distribution jointe
X, Y	→	V.a.s réelles
M	→	Copule minimum.
W	→	Copule maximum.
Π	→	Copule produit.
Q	→	Fonction de concordance.
φ	→	Fonction génératrice de la copule archimédienne.

φ^{-1}	→	Fonction quantile de φ
τ, ρ	→	Tau de Kendall et Rho de Spearman.
\bar{C}	→	Fonction de survie.
\hat{C}	→	Copule de survie.
k	→	Fonction de Kendall.
D_i	→	Différence entre les rangs des observations de X et Y .
R_{X_i}	→	Rang des observations de X .
$E[X]$	→	Espérance mathématique de la v.a X
$Var[X]$	→	Variance mathématique de la va X .

Bibliographie

- [1] Benelmir, I. (2018). Modélisation de la Dépendance par les copules (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider -Biskra).
- [2] Benhamza, H. Estimation des copule à un paramètre.
- [3] Guemmaz, A. (2012). Caractérisation de la copule de Marshall-Olkin et application (doctoral dissertation, A Mohamed Khider-Biskra).
- [4] Guesseuri, Amel. (2019). Sur les copules et application (mémoire master, Université Mohamed Khider Biskra).
- [5] Jose, K., & Paul, A. L. B. I. N. (2018). Marshall Olkin exponential power distribution and its generalization : Theory and Applications. IAPQR Transactions, 43(1).
- [6] Nelsen, R.B. (2006) An introduction to copulas, second edition, springer, New york.

Résumé

Dans ce mémoire, on a parlé de la théorie des Copules, qui sont des fonctions qui combinent les fonctions de distribution multi-variables et des fonctions de distribution marginales.

On a abordé, les points les plus importants et les caractéristiques de Copule et de certaines de ses familles, puis on a présenté une étude qui concerne la famille de Marshall Olkin.

A la fin, on a terminé notre étude par un exemple d'applications.

Abstract

In this work, we talked about the theory of copulas, which are functions that combine multi-variable distribution functions and marginal distribution functions.

The most important points and characteristics of Copule and some of his families were discussed and a study was presented concerning Marshall Olkin's family.

At the end, we finished our study with an example of applications.

ملخص

في هذه المذكرة, تكلمنا عن نظرية الكوبولا وهي الدوال التي تجمع بين دوال التوزيع متعدد المتغيرات و دوال التوزيع الحدية.

نوقشت أهم نقاط و خصائص الكوبولا وبعض عائلاتها, وقدمت دراسة عن عائلة مارشال أولكين .

في النهاية , أنهينا دراستنا بمثال تطبيقي .