République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

*Université Mohamed Khider, Biskra*

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Analyse

**Par Mr. Fellah Elhaouas**

**Titre :**

# Sur les systèmes d'èquations intègrales linèaires de Fredholm

Devant le Jury :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mr. | Menacer Tidjani | UMKB | U. Biskra | Président |
| Mr. | Laiadi Abdelkader | UMKB | U. Biskra | Encadreur |
| Mme. | Guidad Derradji | UMKB | U. Biskra | Examinatrice |

**Soutenu Publiquement le 28/06/2022**

# Dédicace

Je dédie cet humble acte :

À

toute famille paysanne en général et à la famille en particulier en son nom et en son lieu.

À

tous les proches et amis.

À

tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé de près ou de loin, merci de votre soutien

et de votre encouragement et de votre présence pour moi.

# $\mathcal{R}$emerciements

HAMDE l ALLAH pour sa bénédiction sur nous.

Je voudrais remercier mon Maître d'Iyaz Abdulkader pour ses remerciements particuliers pour ses conseils, ses conseils et son assistance à tout moment.

Je remercie les membres du comité de supervision d'avoir discuté de ce travail et de leurs remarques et conseils. Je tiens également à remercier tous les présidents et les professeurs de la Section des mathématiques pour leurs précieux efforts.

# Table des matières

# Introduction

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé. Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique. Cependant, le but de ce travail est de chercher des solutions approximatives pour des systèmes d'équations intégrales, en utilisant deux méthodes ( méthode de calcul direct et décomposition adomienne).

La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de la solution et surtout d'exhiber des méthodes d'approximation efficaces.

L'analyse numérique, qui étudie la réalisabilté de ces méthodes, principalement l'analyse de la vitesse de convergence et l'estimation de l'erreur.

Notre mémoire est composé de trois chapitres .

**Le premier chapitre** contient quelques notions préliminaires sur des équations intégrales de fredholm et des équations intégrales de voltérra et aussi les autres genre d'équations intégrales.

Dans **le deuxième chapitre,** on présente quelques méthodes pour résoudre les équations intégrales de Fredholm de premièr et le deuxième espèce, ainsi que des équations homogènes et non homogènes avec des exemples illustratifs.

**Le troisième chapitre** est consacré essentiellement à présenter deux méthodes de résolution numérique des systèmes d'équations intégrales, cependant nous y développons certaines idées primordiales et les illustrerons avec quelques exemples.

# Chapitre 1

# Généralités sur les équations intégrales

## 1.1 Notions fondamentales et définitions :

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $L^2([a;b])$des fonctions continues de l'intervalle $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$\langle \varphi; v \rangle = \int_a^b \varphi(x) v(x) dx;$$

et de la norme de convergence uniforme :

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|$$

### 1.1.1 Opérateurs intégrals linéaires :

Soit $K : C[a;b] \times C[a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur intégral ou opérateur à noyau linéaire sur $C[a;b]$ définit par la formule suivante :

$$A : u \in C[a;b] \to Au \in C[a;b]$$
$$(Au)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt$$

où la fonction $K(x;t)$ s'appelle le noyau de l'opérateur intégral $A$.

### 1.1.2 Opérateurs compacts :

**Théorème 1.1.1** Soit $A$ un opérateur borné de $C[a;b]$ dans $C[a;b]$, à image $A(x)$ de dimension finie. Alors $A$ est compact.

**Théorème 1.1.2** L'opérateur intégral défini en (1.1.1) est compact sur $(C[a;b]; \|.\|_\infty)$.

### 1.1.3 Equations aux Opérateurs Compacts :

**Définition 1.1.1** *L'équation définit par :*

$$A\varphi = f$$

*est dite une équation de première espèce .*

*Si l'équation est définit par :*

$$\varphi - A\varphi = f.$$

*Cette équation est dite une équation de deuxième espèce où $f$ est une fonction donnée et $\varphi$ la fonction inconnue [5].*

*Si $f = 0$, l'équation est une équation homogène .*

*Sinon cette équation est dite équation non-homogène .*

## 1.2 Les équations intégrales

**Définition 1.2.1** *Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration $\int$ : La forme générale d'une équation intégrale est :*

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x;t)u(t)dt \tag{1.1}$$

*Où $\alpha(x); f(x); K(x;t)$ sont des fonctions données, la fonction $u(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer, $\lambda$ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro et $\Omega$ un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie. La fonction $K(x;t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.[1]*

### 1.2.1 Equations intégrales linéaires

#### Equation intégrale de Fredholm

Une équation de la forme (1.1)dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

**i)** Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x;t)u(t)dt = 0 \tag{1.2}$$

Elle est dite de première espèce.

**ii)** Si $\alpha(x) = c = const \neq 0$, l'équation s'écrit

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x;t)u(t)dt$$

Elle est dite de seconde espèce.

**iii)** Si $\alpha(x) \neq 0$ donc la formule (1.2) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

**iv)** Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x;t)u(t)dt$$

Elle est dite homogène.

**Remarque 1.2.1** *Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.1) est dite non homogène.*

### Équations intégrales de Volterra

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégration est variable, c'est-à-dire

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x;t)u(t)dt \tag{1.3}$$

**i)** Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x;t)u(t)dt = 0$$

Elle est dite de première espèce.

Si $\alpha(x) = c = const \neq 0$, l'équation s'écrit

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x;t)u(t)dt$$

Elle est dite de seconde espèce.

**iii)** Si $\alpha(x) \neq 0$ donc la formule (1.3) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

**iv)** Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x;t)u(t)dt$$

Elle est dite homogène .

**Remarque 1.2.2** *Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.3) est dite non homogène.*

**Remarque 1.2.3** *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyou $K$ vérifie la condition*

$$K(x;t) = 0 \text{ pout tout } x < t$$

**Équation intégrale de Fredholm-Volterra**

**Définition 1.2.2** *On appelle équation intégrale de Fredholm-Volterra une équation de la forme*

$$\alpha(x)u(x;t)+\lambda \int_a^b K(x,y)u(y,t)dy+\lambda \int_0^t F(t,s)u(x,s)ds = f(x,t), t \in [0;T], T < \infty \tag{1.4}$$

*La fonction $\alpha$ détermine le type de l'équation intégrale.*

**Singularité de type Volterra et Fredholm**

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^x M(x;t)K(x;t)u(t)dt; a \leq x < \infty. \tag{1.5}$$

où $K(x;t)$ est faiblement singulier, en générale, $K(x;t)$ est donné par

$$K(x,t) = \left\{ \begin{array}{c} |x-t|^{-\alpha}, 0 < x < 1 \\ \log|x-t| \end{array} \right\}$$

Alors

(i) L'équation (1.5) est de Volterra.

(ii) Si $x = b$ ; l'équation (1.5) est de Fredholm.

(iii) Le cas où $K(x;t) = |x-t|^{-\alpha}$ ; $0 < a < 1$ s'appelle singularité algébriques.

(iv) Le cas où $K(x;t) = \log|x-t|$, s'appelle singularité logarithmiques.

### 1.2.2 Équations intégrales non-linéaires

Si l'exposant de la fonction inconnue $u(x)$ à l'intérieur du signe intégral est une, l'équation intégrale est appelé linéaire. Si la fonction inconnue $u(x)$ a un exposant autre qu'un, ou si l'équation contient une fonction non linéaire de $u(x)$, par exemple $e^x$ ; $\sinh u$ ; $\cos u$ ; $\ln(1+u)$ ; l'équation intégrale est appelé non linéaire. Pour expliquer ce concept, nous considérons les équations :

$$u(x) = 1 - \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$
$$u(x) = 2 + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$
$$u(x) = 1 + \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt$$

et

$$u(x) = 1 + \int_0^1 xte^{u(t)}dt$$

Les deux premiers exemples sont équations intégrales linéaires de Fredholm et Volterra respectivement, mais les derniers sont l'équation intégrale de Volterra non linéaire et l'équation intégrale de Fredholm non linéaire respectivement.

La forme de l'équation intégrale non linéaire est

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x;t;u(t))dt$$

## 1.3 Classification des équations intégrales

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrirent leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

1) Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral .

2) La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégra-

tion. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégration sont indéfinies.

3) L'adjective singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrant est non borné sur l'intervalle donné, évidement, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

## 1.4 Noyaux particuliers

1. Si le noyau $K(x;t)$ d'une équation intégrale s'écrit sous la forme

$$K(x;t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)$$

   où les fonctions $\alpha_i(x)$ pour $i = 1; ....; n$ sont linéairement indépendantes, alors il est dit noyau séparable ou dégénéré. Par exemple, les noyaux $x - t; xt; x^2 - t^2$ et $xt^2 + tx^2$ sont s´eparables.

2. Si le noyau $K(x;t)$ est une fonction à valeurs complexes telle que

$$K(x,t) = \overline{K(t,x)}$$

   alors il est dit symétrique ou hermitien. Une équation intégrale à noyau symétrique est dite aussi symétrique. Par exemple, sur le carré $a \leq x, t \leq b$ , les noyaux $x + t, x^2 + t^2$ et $i(x - t)$ sont symétriques, tandis que $i(x + t)$ ne l'est pas.

3. Si $K(x;t) = K(x - t)$, alors l'équation intégrale est dite équation intégrale à noyau de convolution.

4. Si le noyau $K(x;t)$ est de la forme

$$K(x;t) = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt < \infty$$

a un valeur fini, alors ce type de noyau est dit noyau régulier.

5. Si le noyau $K(x;t)$ est de la forme

$$K(x;t) = h(x,t) \, |x-t|^{-m}$$

où $h(x;t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$,$a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq b$ avec $h(x;t) \neq 0$, et $m$ est une constante telle que $0 < m < 1$, alors l'équation intégrale est dite équation intégrale faiblement singulière.

6. Si le noyau $K(x;t)$ est de la forme

$$K(x,t) = \frac{h(x,t)}{x-t}$$

avec $h(x;t)$ est une fonction différentiable avec $h(x;t) \neq 0$, alors l'équation intégrale est dite singulière à noyau de Cauchy où l'intégrale

$$\int_a^b \frac{h(x,t)}{x-t} u(x) dt,$$

est prise au sens de la valeur principale de Cauchy. Ainsi,

$$v.p. \int_a^b \frac{u(t)}{x-t} dt = \lim_{\zeta \to 0} \left\{ \int_a^{x-\zeta} \frac{u(t)}{x-t} dt + \int_{x+\zeta}^b \frac{u(t)}{x-t} dt \right\}$$

## 1.5 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Fredholm

Contraction de l'opérateur :

Soit l'opérateur

$$\varphi - A\varphi = f.$$

L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de 'Neumann'pourvu que l'opérateur $A$ soit une contraction $\|A\| < 1$.

### 1.5.1 Série de Neumann

**Théorème 1.5.1** Soit $A$ un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach $X$ dans lui même, avec $\|A\| < 1$ et soit $I$ l'opérateur identique sur $X$. Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

**Théorème 1.5.1** *de plus*

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

**Preuve.** Comme $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

dans l'espace de Banach $L(X)$, par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

avec $\|S\| = (1 - \|A\|)^{-1}$, de plus S est l'inverse de IA, En effet, en utilisant les notations $A^0 = I$ , $A^k = AA^{k-1}$ on peut voir que :

$$(I - A)\, S = (I - A) \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A^k = \lim_{n \to \infty} \left(I - A^{n+1}\right) = I$$

aussi

$$S\,(I - A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A^k\,(I - A) = \lim_{n \to \infty} \left(I - A^{n+1}\right) = I,$$

puisque $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$, lorsque $n \to \infty$ ■

**Théorème 1.5.2** Sous les hypothèses du théorème (1.5.1), la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f, n = 0, 1, 2, ...,$$

**Théorème 1.5.2** *où '$\varphi_0$ est arbitraire dans $X$, converge vers l'unique solution $\varphi$' de l'équation $\varphi - A\varphi = f$' pour toute $f \in X$.*

***Preuve.*** *Il est aisé de voir que :*

$$\varphi_n = A^n\varphi_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f, n = 1, 2, ....$$

*d'où*

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = (I - A)^{-1} f.$$

■

**Corollaire 1.5.1** *Soit $K$ un noyau continu vérifiant :*

$$\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,t)|\, dt \prec 1$$

*alors, l'équation intégrale de seconde espèce :*

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), x \in [a,b]$$

*admet une unique solution $\varphi \in C([a,b])$ pour toute $f \in C([a,b])$. De plus, la méthode des approximations successives*

$$\varphi(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)dt + f(x), n = 1, 2, ....$$

*converge uniformément vers cette solution pour tout $\varphi_0$ arbitraire dans $C([a;b])$ .*

**Corollaire 1.5.2** *Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire compact sur un espace normé $X$.*

*Si l'équation homogène*

$$\varphi - A\varphi = 0$$

*admet uniquement la solution triviale $\varphi = 0$, alors pour toute $f \in X$, l'équation inhomogène*

$$\varphi - A\varphi = f.$$

*Admet une solution unique $\varphi \in X$, dépendante de $f$.*

## 1.6 Alternative de Fredholm

Pour les équations intégrales de Fredholm on a les théorèmes suivants :

**Théorème 1.6.1** L'équation linéaire non homogène de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.6}$$

**Théorème 1.6.1** *admet une solution unique quelle que soit* $f(x)$ $(f \in L^2(a;b))$, *ou bien l'équation homogène correspondant*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.7}$$

*A au moins une solution non triviale, i.e. non identiquement nulle.*

**Remarque 1.6.1** *Dans la pratique, l'alternative de Fredholm est plus important .Au lieu de démontrer que l'équation intégrale donnée (1.6) a une solution, on démontre parfois plus facilement que l'équation homogène correspondant (1.7) n'ont pas d'autres solution que les solutions triviales. Il en résulte, en vertu de l'alternative, que l'équation (1.6) admet bien une solution.*

# Chapitre 2

# Equation intégrales linéaires de Fredholm

## 2.1 Équations intégrales de Fredholm du deuxième espèce

Nous étudierons d'abord les équations intégrales de Fredholm du deuxième type données par

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.1}$$

La fonction inconnue $u(x)$, qui sera déterminée, se produit à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral.Le noyau $K(x,t)$ et la fonction $f(x)$ sont des fonctions à valeur réelle, et $\lambda$ est un paramètre.Dans ce qui suit, nous présenterons les méthodes, nouvelles et traditionnelles, qui seront utilisées pour gérer les équations intégratives de Fredholm (2.1)

### 2.1.1 La méthode de décomposition adomienne

La méthode de décomposition adomienne (MDA) a été introduite et développée par George Adomian méthode sera brièvement décrit.[6]

La méthode de décomposition adomienne consiste à décomposer la fonction inconnue $u(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composants définis par la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{2.2}$$

ou de manière équivalente

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots \tag{2.3}$$

où les composants $u_n(x), n \geq 0$ seront déterminés de façon récurrente. Le méthode de décomposition adomienne se préoccupe de trouver les composants $u_0, u_1, u_2, ..$individuellement. la détermination de ces composants peuvent être obtenus facilement grâce à une relation de récurrence qui implique habituellement des intégrales simples qui peuvent être facilement évalués.

Pour établir la relation de récurrence, nous substituons (2.2) dans l'équation intégrale de Fredholm (2.1) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt, \tag{2.4}$$

ou de manière équivalente

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+... = f(x)+\lambda \int_a^b k(x,t) \left[ u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + ... \right] dt \tag{2.5}$$

Le premier terme $u_0(x)$ est identifié par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral. Cela signifie que les composants $u_j(x), j \geq 0$ de la fonction inconnue $u(x)$ sont entièrement déterminés par la relation de la récurrence

$$u_0(x) = f(x), u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u_n(t)dt, \tag{2.6}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_1(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt, \\ u_2(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt, \\ u_3(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t)u_2(t)dt, \end{aligned} \tag{2.7}$$

et ainsi de suite pour les autres composantes.

D'après de (2.7), les composants $u_0(x)$, $u_1(x), u_2(x), u_3(x), ....$ sont complètement déterminés. En conséquence, la solution $u(x)$ de l'intégrale de Fredholm l'équation (2.1) est facilement obtenue sous forme de série en utilisant l'hypothèse de la série (2.2).

Il est clair que la méthode de décomposition convertit l'équation intégrale dans une détermination élégante des composants. Il était formellement montré que si une solution exacte existe pour le problème, alors la série obtenue converge très rapidement vers cette solution exacte. La convergence concept de la série de décomposition a été soigneusement étudié par de nombreux des chercheurs pour confirmer la convergence rapide des séries résultantes. Toutefois, pour les problèmes concrets, lorsqu'une solution sous forme fermée n'est pas possible, un nombre tronqué de termes est généralement utilisé à des fins numériques. Plus composants que nous utilisons la plus grande précision que nous obtenons.

**Exemple 2.1.1** *Résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$u(x) = e^x - x + x \int_0^1 tu(t)dt. \tag{2.8}$$

*La méthode de décomposition adomienne suppose que la solution $u(x)$ écrit sous forme de série donnée dans (2.2). Nous substituons la série de décomposition (2.2) dans les deux côtés de (2.8) donne*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + x \int_0^1 t \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt.$$

*ou de façon équivalente*

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ... = e^x - x + x \int_0^1 t \left[u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + ...\right] dt$$

*Nous identifions le premier terme $u_0(x)$ par tous les termes qui ne sont pas inclus dans le signe intégral. Par conséquent, nous obtenons la relation de récurrence suivante*

$$u_0(x) = e^x - x, u_{k+1}(x) = x \int_0^1 tu_k(t)dt, k \geq 0.$$

*Alors, nous obtenons*

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= e^x - x, \\
u_1(x) &= x \int_0^1 t u_0(t) dt = x \int_0^1 t(e^t - t) dt = \frac{2}{3} x, \\
u_2(x) &= x \int_0^1 t u_1(t) dt = x \int_0^1 \frac{2}{3} t^2 dt = \frac{2}{9} x, \\
u_3(x) &= x \int_0^1 t u_2(t) dt = x \int_0^1 \frac{2}{9} t^2 dt = \frac{2}{27} x, \\
u_4(x) &= x \int_0^1 t u_3(t) dt = x \int_0^1 \frac{2}{27} t^2 dt = \frac{2}{81} x,
\end{aligned}
$$

*et ainsi de suite. L'utilisation (2.2) donne la solution sous forme série*

$$u(x) = e^x - x + \frac{2}{3} x (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...) \tag{2.9}$$

*Notons que la série géométrique infinie à droite* $a_1 = 1$, *et la rapport* $r = \frac{1}{3}$. *La somme des séries infinies est donc donnée par*

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}. \tag{2.10}$$

*La solution de série (2.9) converge vers la solution de forme fermée*

$$u(x) = e^x \tag{2.11}$$

### 2.1.2 La méthode de calcul direct

Dans cette section, la méthode de calcul direct sera appliquée pour résoudre les équations intégrales de Fredholm. La méthode approche les équations intégrales de Fredholm d'une manière directe et donne la solution sous une forme exacte et n'est pas une forme de série. Il est important de noter que cette méthode sera appliquée pour les noyaux dégénérés ou séparables de la forme

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t). \tag{2.12}$$

Les exemples de noyaux séparables sont $x - t, xt, x^2 - t^2, xt^2 + x^2t$, etc.

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1. Nous substituons d'abord (2.12) dans l'équation intégrale de Fredholm de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt. \tag{2.13}$$

2. Cette substitution donne

$$u(x) = f(x)+g_1(x)\int_a^b h_1(t)u(t)dt+g_2(x)\int_a^b h_1(t)u(t)dt+...+g_n(x)\int_a^b h_n(t)u(t)dt. \tag{2.14}$$

3. Chaque intégrale à droite dépend uniquement de la variable $t$ avec limites constantes d'intégration pour $t$. Cela signifie que chaque intégrale est équivalente à une constante. Sur cette notion, l'équation (2.14) devient

$$u(x) = f(x) + \lambda\alpha_1 g_1(x) + \lambda\alpha_2 g_2(x) + \cdots + \lambda\alpha_n g_n(x), \tag{2.15}$$

où

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n. \tag{2.16}$$

4. La substitution (2.15) en (2.16) donne un système de $n$ équations algébriques

qui peut être résolu pour déterminer les constantes $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$. En utilisant des valeurs numériques de $\alpha_i$ dans (2.15), la solution $u(x)$ de l'équations intégrales de Fredholm (2.13) est facilement obtenue.

**Exemple 2.1.2** *Résoudre l'équation intégrale de Fredholm en utilisant la méthode de calcul direct*

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t u(t)dt. \tag{2.17}$$

*Le noyau $k(x,t) = x^2 t$ est séparable. Par conséquent, nous réécrivons (2.17) comme*

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t u(t)dt. \tag{2.18}$$

*L'intégrale du côté droit est équivalente à une constante parce qu'elle dépend uniquement sur les fonctions de la variable $t$ avec des limites d'intégration constantes. Par conséquent, l'équation (2.18) peut être réécrite comme*

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2, \tag{2.19}$$

*où*

$$\alpha = \int_0^1 t u(t)dt. \tag{2.20}$$

*Pour déterminer $\alpha$, on remplace (2.19) par (2.20) on obtient*

$$\alpha = \int_0^1 t\left(3t + 3t^2 + \frac{1}{2}\alpha t^2\right)dt. \tag{2.21}$$

*Par intégration du côté droit (2.21)*

$$\alpha = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha \tag{2.22}$$

*qui donne*

$$\alpha = 2. \tag{2.23}$$

*Donc la solution exacte est donnée par*

$$u(x) = 3x + 4x^2, \tag{2.24}$$

## 2.2 Équation intégrale homogène de Fredholm

Substitution de $f(x) = 0$ dans l'équation intégrale de Fredholm du second type (2.1)

l'équation intégrale homogène de Fredholm du second type est donnée par

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.25}$$

Dans cette section, nous concentrerons notre étude sur l'équation intégrale homogène de Fredholm (2.25) pour le noyau séparable $K(x,t)$ uniquement. L'objectif principal de l'étude de l'équation homogène de Fredholm est de trouver une solution non triviale, car la solution triviale $u(x) = 0$ est une solution de cette équation. De plus, la méthode de décomposition adomienne n'est pas applicable ici car elle dépend principalement de l'attribution d'une valeur non nulle pour le premier terme $u_0(x)$ et dans ce genre d'équations $f(x) = 0$. Sur cette notion, la méthode de calcul direct sera utilisée ici pour gérer ce type d'équations.

### 2.2.1 La méthode de calcul direct

La méthode de calcul direct a déjà été utilisée dans ce chapitre. Cette méthode remplace les équations intégrales homogènes de Fredholm par une seule équation algèbrique ou par un système d'équations algébriques simultanées en fonction du nombre de termes du noyau séparable $K(x,t)$. De plus, la méthode de calcul direct traite les équations intégrales de Fredholm de manière directe et donne la solution sous une forme exacte, mais pas sous une forme de série comme la méthode adomienne ou la méthode des approximations successives. Il est important de souligner que cette méthode sera appliquée pour les noyaux dégénérés ou séparables de la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) h_k(t). \tag{2.26}$$

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1. On substitue d'abord (2.26) dans l'intégrale homogène de Fredholm l'équation de la forme : (2.25)
2. Cette substitution donne

$$u(x) = \lambda g_1(x) \int_a^b h_1(t)u(t)dt + \lambda g_2(x) \int_a^b h_2(t)u(t)dt + .... + \lambda g_n(x) \int_a^b h_n(t)u(t)dt \tag{2.27}$$

3. Chaque intégrale du côté droit ne dépend que de la variable $t$ avec des limites constantes d'intégration pour $t$. Cela signifie que chaque intégrale est équivalente à une constante. Alors, l'équation (2.27) devient

$$u(x) = \lambda \alpha_1 g_1(x) + \lambda \alpha_2 g_2(x) + .... + \lambda \alpha_n g_n(x), \tag{2.28}$$

où

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n. \tag{2.29}$$

4. La substitution de (2.28) en (2.29) donne un système de $n$ équations algébriques simultanées qui peuvent être résolues pour déterminer les constantes $\alpha_i$,$1 \leq i \leq n$.

   En utilisant les valeurs numériques obtenues de $\alpha_i$ en (2.28), la solution $u(x)$ de l'équation intégrale homogène de Fredholm (2.25) définit immédiatement.

**Exemple 2.2.1** *Résoudre l'équation intégrale homogène de Fredholm en utilisant la méthode de calcul direct*

$$u(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin t u(t)dt. \tag{2.30}$$

*Cette équation peut être réécrite comme suit :*

$$u(x) = \alpha\lambda \cos x \tag{2.31}$$

*où*

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t u(t)dt. \tag{2.32}$$

*La substitution (2.31) en (2.32) donne*

$$\alpha = \alpha\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt,$$

*qui donne*

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha\lambda.$$

*Rappelons que $\alpha = 0$ donne la solution triviale. Pour $\alpha \neq 0$, on constate que la* *valeur propre $\lambda$ est donnée par*

$$\lambda = 2.$$

*Cela donne la fonction propre $u(x)$ par*

$$u(x) = A\cos x,$$

*où $A$ est une constante arbitraire non nulle, avec $A = 2\alpha$.*

## 2.3 Équations intégrales de Fredholm du premier espèce

Dans cette section, Nous étudions les équations intégrales de Fredholm de la première espèce donnée par

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, x \in D, \tag{2.33}$$

où $D$ est un ensemble fermé et borné ( nombres réels) et $f(x)$ est donnée. Le noyau $K(x,t)$ et la fonction $f(x)$ sont des fonctions à valeur réelle, et $\lambda$ est un paramètre. Cependant, le paramètre $\lambda$ joue un rôle important dans le cas singuliers.

La fonction de données $f(x)$ doit contenir des composants qui sont appariés par les $x$ composants correspondants du noyau $K(x,t)$, l'équation intégrale de Fredholm du premier type est considérée comme un problème mal posé.

Hadamard a postulé les trois propriétés suivantes :

1. Existence d'une solution.

2. Unicité d'une solution.

3. Dépendance continue de la solution $u(x)$ sur les données $f(x)$. Ceci signifie que de petites erreurs dans les données $f(x)$ doivent provoquer de petites erreurs dans la solution $u(x)$.

Un problème est appelé un problème bien posé s'il satisfait aux trois propriétés précédentes. Les problèmes qui ne sont pas bien posés sont appelés mal posés des problèmes (les problèmes inverses).

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour traiter les équations intégrales de Fredholm du premier type. Les ondelettes Legendre, la méthode Galerkin et la méthode de collocation. Les méthodes que nous avons utilisées jusqu'à présent dans ce texte ne peuvent pas traiter ce genre d'équations indépendamment si elles sont exprimées sous sa forme standard (2.33).

Cependant, dans ce texte, nous allons d'abord appliquer la méthode de régularisation qui a reçu un intérêt considérable, en particulier dans la résolution des équations intégrales de premier type.

Dans ce qui suit, nous présenterons un bref résumé de la méthode de régularisation qui sera utilisé pour traiter les équations intégrales de Fredholm de la première espèce.[7]

### 2.3.1 La méthode de régularisation

La méthode de régularisation a été établie indépendamment par Phillips et Tikhonov. La méthode de régularisation consiste à remplacer le problème mal posé par un problème bien posé. La méthode de régularisation transforme l'équation intégrale linéaire de Fredholm du premier type (2.33) à l'approximation de l'équation intégrale de Fredholm

$$\mu u_\mu(x) = f(x) - \int_a^b K(x,t)u_\mu(t)dt, x \in D \tag{2.34}$$

où $\mu$ est un petit paramètre positif. Il est clair que (2.34) est une équation intégrale de Fredholm du second type qui peut être réécrite

$$u_\mu(x) = \frac{1}{\mu}f(x) - \frac{1}{\mu}\int_a^b K(x,t)u_\mu(t)dt, x \in D \tag{2.35}$$

Il a été prouvé que la solution $u_\mu$ de l'équation (2.35) converge vers la solution $u(x)$ de (2.33) comme $\mu \to 0$ d'après la proposition suivante :

**Proposition 2.3.1** *Supposons que l'opérateur intégral de (2.33) est continu et coercitif dans lespace de Hilbert où $f(x)$, $u(x)$, et $u_\mu(x)$ sont définis, puis :*

1. $|u_\mu|$est limité indépendamment de $\mu$, et
2. $|u_\mu(x) - u(x)| \to 0$ quand $\mu \to 0$.

La solution exacte $u(x)$ de (2.33) peut ainsi être obtenu par

$$u(x) = \lim_{\mu \to 0} u_\mu(x).$$

En utilisant la méthode de régularisation et la méthode de calcul direct pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm du premier espèce

$$\frac{1}{4}e^x = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-t}u(t)dt. \tag{2.36}$$

**Exemple 2.3.1** *En utilisant la méthode de régularisation, l'équation (2.36) peut* *être transformée à*

$$u_\mu(x) = \frac{1}{4\mu}e^x - \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-t}u_\mu(t)dt. \tag{2.37}$$

*L'équation intégrale de Fredholm résultante du second type peut être résoudre par la méthode de calcul direct. L'équation (2.37) s'écrit comme*

$$u_\mu(x) = \left(\frac{1}{4\mu} - \frac{\alpha}{\mu}\right)e^x, \tag{2.38}$$

*où*

$$\alpha = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-t}u_\mu(t)dt. \tag{2.39}$$

*Pour déterminer $\alpha$, nous substituons (2.38) dans (2.39), on obtient*

$$\alpha = \frac{1}{1+4\mu}.$$

*Cela donne*

$$u_\mu(x) = \frac{e^x}{1+4\mu}.$$

*La solution exacte $u(x)$ de (2.36) peut être obtenue par*

$$u(x) = \lim_{\mu\to 0} u_\mu(x) = e^x.$$

# Chapitre 3

# Systèmes d'équations intégrales de Fredholm

Dans ce chapitre, nous étudierons les systèmes d'équations intégrales de Fredholm du second espèce donnés par

$$
\begin{aligned}
u(x) &= f_1(x) + \int_a^b \Big(K_1(x,t)u(t) + \widetilde{K}_1(x,t)v(t) + ...\Big)\,dt, \\
v(x) &= f_2(x) + \int_a^b \Big(K_2(x,t)u(t) + \widetilde{K}_2(x,t)v(t) + ...\Big)\,dt, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Les fonctions inconnues $u(x), v(x), ...$ qui sera déterminé. Les noyaux $K_i(x,t)$ et $\widetilde{K}_i(x,t)$ et la fonction $f_i(x)$ sont des fonctions à valeur réelle. Dans ce qui suit, nous présenterons deux méthodes ( la méthode de décomposition adomienne et la méthode de calcul direct). Rappelons que ces méthodes ont été présentées dans le chapitre 2 et [9]

## 3.1 La méthode de décomposition adomienne

La méthode de décomposition adomienne , présentée précédemment, se décompose chaque solution comme une somme infinie de composants où ces composants sont déterminée de façon récurrente. Cette méthode peut être utilisée sous forme standard.

**Exemple 3.1.1** *On utilise la méthode de la décomposition adomienne pour résoudre le système d'équations intégrales de Fredholm suivant*

$$u(x) = sinx - 2 - 2x - \pi x + \int_0^{\pi} ((1+xt)u(t) + (1-xt)v(t))dt, \tag{3.2}$$
$$v(x) = cosx - 2 - 2x + \pi x + \int_0^{\pi} ((1-xt)u(t) - (1+xt)v(t))dt.$$

*Cette méthode permet que les linéaires termes $u(x)$ et $v(x)$ sont décomposées par les séries infinies*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \tag{3.3}$$

*où $u_n(x)$ et $v_n(x)$, $n \geq 0$ sont les composants de $u(x)$ et $v(x)$ qui être élégamment déterminé de manière récursive.*
*on substitue (3.3) dans (3.2) donc*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = sinx - 2 - 2x - \pi x + \int_0^{\pi} \left((1+xt)\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (1-xt)\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\right) dt,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = cosx - 2 - 2x + \pi x + \int_0^{\pi} \left((1-xt)\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) - (1+xt)\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\right) dt.$$

*Alors nous obtenions les relations récursives*

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= sinx - 2, \\
v_0(x) &= cosx - 2, \\
u_1(x) &= -2x - \pi x + \int_0^{\pi} ((1+xt)u_0(t) + (1-xt)v_0(t))dt, \\
v_1(x) &= -2x + \pi x + \int_0^{\pi} ((1-xt)u_0(t) - (1+xt)v_0(t))dt, \\
u_{k+1}(x) &= \int_0^{\pi} ((1-xt)u_k(t) - (1+xt)v_k(t))dt, k \geq 1, \\
v_{k+1}(x) &= \int_0^{\pi} ((1-xt)u_k(t) - (1+xt)v_k(t))dt, k \geq 1.
\end{aligned}$$

*Cela donne*

$$u_0(x) = sinx - 2, u_1(x) = 2 - 4\pi,$$

*et*

$$v_0(x) = cosx - 2, v_1(x) = 2 + 2\pi^2 x.$$

*Donc la solutions exacte*

$$(u(x), v(x)) = (sinx, cosx).$$

**Exemple 3.1.2** *On utilise la méthode de décomposition adomienne pour résoudre le système suivant*

$$u(x) = x - \frac{4}{3} + \int_{-1}^{1}(v(t) + w(t))dt,$$
$$v(x) = x + x2 - \frac{2}{3} + \int_{-1}^{1}(w(t) + u(t))dt,$$
$$w(x) = x^2 + x^3 - \frac{2}{3} + \int_{-1}^{1}(w(t) + u(t))dt.$$

*En utilisant la méthode de décomposition modifiée, nous trouvons les relations récursives*

$$u_0(x) = x,$$
$$v_0(x) = x + x^2,$$
$$w_0(x) = x^2 + x^3,$$
$$u_1(x) = -\frac{4}{3} + \int_{-1}^{1}(v_0(t) + w_0(t))dt = 0,$$
$$v_1(x) = -\frac{2}{3} + \int_{-1}^{1}(w_0(t) + u_0(t))dt = 0,$$
$$w_1(x) = -\frac{2}{3} + \int_{-1}^{1}(u_0(t) + v_0(t))dt = 0,$$
$$u_{k+1}(x) = 0, v_{k+1} = 0, w_{k+1} = 0, k \geq 1.$$

*La solutions exacte est donnée par*

$$(u(x), v(x), w(x)) = (x, x + x^2, x^2 + x^3).$$

## 3.2 La méthode de calcul direct

Dans cette section, nous utiliserons la méthode de calcul direct. Nous appliquons cette méthode pour résoudre les systèmes d'équations intégrales de Fredholm du deuxième espèce. on utilise cette méthode où les noyaux dégénérés ou séparables écrivent sous la forme

$$K_1(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t), K_2(x,t) = \sum_{k=1}^{n} r_k(x)s_k(t) \tag{3.4}$$

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1. Nous substituons d'abord (3.4) dans le système des équations intégrales de Fredholm de la forme

$$\begin{aligned} u(x) &= f_1(x) + \int_a^b \Big(K_1(x,t)u(t) + \widetilde{K}_1(x,t)v(t)\Big)\,dt, \\ v(x) &= f_2(x) + \int_a^b \Big(K_2(x,t)u(t) + \widetilde{K}_2(x,t)v(t)\Big)\,dt. \end{aligned} \tag{3.5}$$

2. Cette substitution donne

$$\begin{aligned} u(x) &= f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \int_a^b h_k(t)u(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{g}_k(x) \int_a^b \widetilde{h}_k(t)v(t)dt, \\ v(x) &= f_2(x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(x) \int_a^b s_k(t)u(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{r}_k(x) \int_a^b \widetilde{s}_k(t)v(t)dt, \end{aligned} \tag{3.6}$$

3. Chaque intégrale à droite dépend uniquement de la variable $t$ avec limites constantes d'intégration pour $t$. Cela signifie que chaque intégrale est équi-

valente à une constante. l'équation (3.6) devient

$$u(x) = f_1(x) + \alpha_1 g_1(x) + ... + \alpha_n g_n(x) + \beta_1 \widetilde{g}_1(x) + ... + \beta_n \widetilde{g}_n(x),$$
$$v(x) = f_2(x) + \gamma_1 r_1(x) + ... + \gamma_n r_n(x) + \delta_1 \widetilde{r}_1(x) + ... + \delta_n \widetilde{r}_n(x), \tag{3.7}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \int_a^b h_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n, \\ \beta_i &= \int_a^b \widetilde{h}_i(t)v(t)dt, 1 \leq i \leq n, \\ \gamma_i &= \int_a^b s_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n, \\ \delta_i &= \int_a^b \widetilde{s}_i(t)v(t)dt, 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

4. La substitution (3.7) dans (3.8) donne un système de $n$ équations algébriques qui peuvent être résolues pour déterminer les constantes $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, et $\delta_i$. En utilisant les valeurs numériques obtenues de ces constantes dans (3.7), la solution $(u(x), v(x))$ du système d'équations intégrales de Fredholm (3.5) définit immédiatement.

**Exemple 3.2.1** *Résoudre le système d'équations intégrales de Fredholm suivant en utilisant la méthode de calcul direct*

$$u(x) = sinx + cosx - 4x + \int_0^\pi (xu(t) + xv(t))dt,$$
$$v(x) = sinx - cosx + \int_0^\pi (u(t) - v(t))dt.$$

*Ce système peut être réécrit comme*

$$u(x) = sinx + cosx + (\alpha - 4)x, \tag{3.9}$$
$$v(x) = sinx - cosx + \beta,$$

*où*

$$\alpha = \int_0^{\pi} (u(t) + v(t))dt, \beta = \int_0^{\pi} (u(t) - v(t))dt. \tag{3.10}$$

*Pour déterminer $\alpha$ et $\beta$, nous substituons (3.9) dans (3.10), on trouve*

$$\alpha = (4 - 2\pi^2) + \frac{\pi^2}{2}\alpha + \pi\beta, \beta = -2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\alpha - \pi\beta.$$

*Par résolution ce système donne*

$$\alpha = 4, \beta = 0. \tag{3.11}$$

*Donc la solutions exacte*

$$(u(x), v(x)) = (\sin x + \cos x, \sin x - \cos x).$$

**Exemple 3.2.2** *Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de calcul direct*

$$u(x) = \frac{2}{3} + \sec^2 x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (v(t) - w(t))dt,$$
$$v(x) = \frac{10}{3} - \sec^2 x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (w(t) - u(t))dt,$$
$$w(x) = -1 - \sec^4 x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (u(t) - v(t))dt,$$

*Ce système peut être réécrit comme suit :*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2}{3} + \sec^2 x + \beta - \gamma \\ v(x) &= \frac{10}{3} - \sec^2 x + \gamma - \alpha \\ w(x) &= -1 - \sec^4 x + \alpha - \beta \end{aligned} \tag{3.12}$$

*où*

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(t)dt, \beta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} v(t)dt, \gamma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} w(t)dt, \tag{3.13}$$

*Pour déterminer $\alpha$,$\beta$ et $\gamma$, nous substituons (3.12) dans (3.13) et en résolvant le système qui en donne*

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 1, \beta = \frac{\pi}{4} + 1, \gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{3}.$$

*Alors la solution exacte*

$$(u(x), v(x), w(x)) = \left(3 + \sec^2 x, 1 - \sec^2 x, -1 - \sec^4 x\right)$$

# Bibliographie


[1] M. Krasnov, A. Kissélev et G. Makarenko, Équations Intégrales . Edition Mir Moscou. Traduction Française Editions Mir 1977.

[2] Szilárd András, Contribution to the theory of Fredholm-Volterra integral équations, (Thèse de doctorat), 2004.

[3] Rahmoune Azedine, Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales (thése de doctorat), 2011.

[4] C . Corduneanu, Integral Equations and Applications . University Press, Cambridge 1991.

[5] R. Kress, Linear Integral Equations, Springer, Berlin, 1999.

[6] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method, Kluwer, Boston, 1994.

[7] D.L. Phillips, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J. Assoc. Comput. Mach, 9 (1962)

[8] A. M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, HEP and Springer, Beijing and Berlin, 2009.

[9] A. M. Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations (Methods and Applications). Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.