

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de
Master en “**Mathématiques Appliquées**”

Option : Analyse

Par :

Barhoum Hadda

Titre :

Projection sur les espaces des vecteurs propres

Devant le Jury :

Mr. BERBICHE MOHAMED	Pr	U. Biskra	Président
Mr. REZKI IBRAHIM	MAA	U. Biskra	Rapporteur
Mr. GUIDAD DERRADJI	MCB	U. Biskra	Examineur

Soutenu Publiquement le : 27/06/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A celui qui m'a indiqué la bonne voie en me rappelant que la volonté fait les
grands

A mon père Logbi

A celle qui a attendue avec patience le fruit de son éducation

A ma mère Noura

Le meilleur de toutes les mamans Ma profonde gratitude et raison de ma vie,
symbole de sacrifice pour moi et de courage.

A tous ceux qui me sont chère :

À mes sœurs **Meriem, Selsabil, Narimane**, mon frère **Mohamed**

Je vous adore

A mes grands-parents paternels : Medjani Hadda, Barhoum Mohamed, et
grands-parents maternels Barhoum Djamila et Guedouari Taher dieux les bénisse

A tout la famille Barhoum

A mes professeurs de l'université « Mohamed Khider-Biskra ». *A* tous mes ami(e)s,
Fella Ben Zetta, *Tous* mes collègues de la spécialité analyse mathématique,
promo 2022

Toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de ce travail.

A tous ceux qui aiment ce pays.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le Dieu tout puissant de avoir donné la force, le courage, la patience, la volonté pour terminer ce travail.

Je remercie ma famille pour leurs aides durant mon étude et leurs soutiens.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Encadreur Monsieur "**IBRAHIM REZKI**". Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants, intervenants et toute les personnes qui, par leur paroles, leurs écrits, leurs conseils et leur critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie également les enseignants département de mathématiques : **Mr. Necir Abdelhakim, Mr. Chemcham Madani, Mr. Lazhar Tamer, Mr. Guidad Derradji et Mr. Menacer Tidjani.**

Je remercie les enseignants de lycée Si-Elhaousse spécifiquement **Belhadj Lahcen, Amrane Nadjette et Amrane Samia.**

Enfin, je remercie toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de cet modeste étude : **Fulla, B., Aymen, L., Amira, T., Ouanasa, S., Rbaiha, B., Wisal, Selma, K., et Sara, B.**

Notations et Symboles

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

A^H	La matrice Hermitienne de la matrice A .
A^\top	Transposée de la matrice A .
A^\perp	L'orthogonal de la matrice A .
L_j	Polynômes de Lagrange.
I_n	La matrice identité de taille $n \times n$.
λ_i	La valeur propre.
$\text{Re}(\cdot)$	La partie réelle.
$\text{Tr}(A)$	La trace de la matrice A .
0_n	La matrice nulle d'ordre n .
$\text{Im}(A)$	Image d'une matrice A .
$\ker(A)$	Noyau d'une matrice A .
E_{λ_i}	Sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .
A^+	Pseudo-inverse de la matrice A .
id_E	L'identité de l'espace vectoriel E .
\mathcal{E}_n	Vecteur de la base canonique de l'espace \mathbb{R}^n .
$\dim(E)$	Dimension d'un espace vectoriel E .
$\mathbb{R}[X]$	L'espace des polynômes à valeurs réelle.

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$	L'ensemble des matrices de m colonnes et n lignes.
$S_A(\lambda)$	L'ensemble des valeurs propres de la matrice A (spectre de A).
$\Gamma_{\mathbb{K}}(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$	L'ensemble des solutions du problème des moindres carrés linéaires.
$\mathbf{rg}(A)$	Le rang de la matrice A .
$\det(A)$	Le déterminant de la matrice A .
$\mathcal{L}(E)$	L'espace des endomorphismes de E .
$\deg(L_j)$	Degré de polynôme L_j .
$Proj_{\text{Im}(A)}(b)$	La projection de b sur $\text{Im}(A)$.
$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$	Le corps des nombres réels. (ou le corps des nombres complexes.)
$[P]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$	matrice de passage de la base $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_p)$ à la base $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$.
$diag(A_1, A_2, \dots, A_n)$	Matrice diagonale (en bloc) $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}$
$a_{i,j}$	(i, j) – ème entrée d'une matrice A .
$A_{i,j}$	Sous-matrice d'une matrice A telle que ses éléments $a_{i,j}, i \in I, j \in J$
ε	Un très petit nombre proche de zéro est positif.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Notations Et Symbols	iii
Table des matières	v
Table des figures	viii
Introduction	1
1 Endomorphismes	2
1.1 Définitions	2
1.2 Image et Noyau	3
1.3 Polynômes annulateurs	6
1.4 Polynômes Caractéristiques	6
1.5 Polynôme Minimal	7
1.6 Valeurs Propres et Vecteurs Propres et Sous-Espaces Propres associés	7
1.6.1 Valeurs Propres	7

1.6.2	Vecteurs Propres	8
1.6.3	Sous-Espaces Propres associés aux Valeurs Propres	8
1.7	Espaces orthogonaux	11
1.8	Fonctions Matricielles	12
1.8.1	Formule de Sylvester	13
1.9	Problème des moindres carrés	15
2	Projecteurs (Projections)	16
2.1	Projecteurs	16
2.2	Matrices Normales	18
2.3	Pseudo-Inverse d'une matrice	21
2.4	Solution d'un système linéaire : $AX = b$	23
2.5	Sous Espace Propres (Image et Noyau)	25
3	Application Numérique	27
3.1	Problèmes de projection	27
3.2	Problème bien et mal-posé (Hadamard)	28
3.3	Interprétation géométrique de problème des Moindres Carrés	30
3.4	Problème des moindres Carrés Linéaires	33
3.4.1	Formulation matricielle	33
3.4.2	Idée intuitive de l'approche algébrique	37
3.5	Application dans MATLAB	42
	Conclusion	47
	Bibliographie	48

Annexe A : Logiciel *R*

52

Table des figures

3.1	Illustration géométrique des moindres carrés (cas $n = 1$ et $m = 2$). . .	31
3.2	Problème De Moindres Carrés	34
3.3	Plus proche à b s'obtient par une projection orthogonale de b dans l'espace engendré par les colonnes de A	36
3.4	La projection orthogonal de b sur $\text{Im}(A)$	37
3.5	Projection de b sur $\text{Im}(A)$	38
3.6	Exemple de Trouver la solution par la restauration d'image dans matlab	46
3.7	Langage MATLAB	53

Introduction

L'idée d'utiliser une projection pour résoudre les systèmes d'équations linéaires n'est pas nouvelle [25, **N.Gastinel. (1966)**],[5, **A.S.Householder.(1960)**], les méthodes de projection sont cependant à l'heure actuelle de plus en plus utilisées pour les systèmes de grande taille [26, **O.Axelsson. (1977)**], [12, **F.Chatelin,W.L.Mtranker. (1982)**], [33, **S.Kantel, J.Stein. (1974)**], [9, **D.Ryan, G.Trapp. (1973)**], [6, **A.Settart, K.Aztz. (1973)**],[11, **E.L.Wachspress. (1966)**].

Ce travail porte sur la méthode de résolution des problèmes **mal-posés linéaire** (**Méthode de projection sur le sous - espace propres**).

1. **Premier chapitre** : Consacré à l'introduction des endomorphismes des espaces vectoriels $\mathfrak{L}(E)$ et leurs propriétés - polynôme caractéristique annulateur et polynômes minimales- valeurs propres - vecteurs propres - sous-espaces propres.
2. **Deuxième chapitre** : Est réservé aux projecteurs (projections) des endomorphismes. Définitions et propriétés - Méthodes de projection sur sous - espaces propres.
3. **Troisième chapitre** : Comporte un exemple d'application de la méthode de projection sur les sous espaces propres concernant le problème de **moindre carrés linéaires** (méthode de résolution) .

Application :Exemple de traitement d'image (Recherche de la solution par la méthode itérative) Trouver la (restauration d'image par **MATLAB**).

Chapitre 1

Endomorphismes

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 (Corps) $(\mathbb{K}, +, \times)$, On appelle corps réel ou complexe l'ensemble non vide \mathbb{K} muni des opérations $+, \times$ usuels tel que :

$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :

- $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
- $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
- $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = \mu \cdot (\lambda \cdot x)$.
- $1 \cdot x = x$ où 1 est l'élément neutre pour la multiplication de \mathbb{K} .

Définition 1.1.2 (Espace vectoriel) On appelle espace vectoriel E sur un corps \mathbb{K} , l'ensemble vérifiant :

$(E, +)$ est une groupe abélien, c'est-à-dire :

- $\forall (x, y; z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité).
- $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$ (commutativité).
- $\exists e \in E, \forall x \in E, x + e = x$ (élément neutre).

– $\forall x \in E, \exists x^* \in E, x + x^* = e$ (symétrique).

Définition 1.1.3 (Homomorphisme) *On appelle application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F toute application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Définition 1.1.4 (Endomorphisme [24, M.Romagny. (2011-2012), p 3]) *On appelle endomorphisme de E toute application linéaire*

$$f : E \longrightarrow E.$$

Exemple 1.1.1 *L'application de dérivation de $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme P fait correspondre son polynôme dérivé P' est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longrightarrow f(P) = P' \end{aligned}$$

$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},$

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

1.2 Image et Noyau

Définition 1.2.1 (Image [35, V.Guedj. (2010), p 11]) *Soit $f : E \longrightarrow F$ application linéaire on appelle **image** de f , Le sous-espace vectoriel $f(E)$ et se note :*

$$\text{Im}(f) : \text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

En d'autres termes, pour tout $y \in F : \{y \in \text{Im}(f) \iff \text{il existe } x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$

Exemple 1.2.1 Pour $E = \mathbb{R}^3$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y - 2z, 3y - z).$$

Mais $f(e_1) = (1, -1, 0)$ et $f(e_2) = (1, 2, 3)$ sont indépendants donc $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\text{Im}(f)$ tel que :

$$\text{Im}(f) = \text{vect} \left\{ (1, -1, 0)^\top, (1, 2, 3)^\top \right\}.$$

Remarque 1.2.1 On appelle **rang** de f , on le note $\text{rg}(f)$ la dimension de l'image de f

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Définition 1.2.2 (Noyau [35, V.Guedj. (2010), p 11]) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, linéaire on appelle **noyau** ($\ker(f)$) de f , Le sous-espace vectoriel $f^{-1}(\{0_F\})$, on le note $\ker(f)$ s'écrit :

$$\ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

Donc pour tout $x \in E$,

$$\{x \in \ker(f) \iff f(x) = 0_F\}.$$

Exemple 1.2.2 D'après (1.2.1) :

$$f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y \\ y = y \\ z = 3y \end{cases} \Rightarrow \ker(f) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Théorème 1.2.1 ([35, V.Guedj. (2010), p 12]) *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire avec E de dimension finie. Alors $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont de dimensions finies, et on a :*

$$\dim E = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

Théorème 1.2.2 (Théorème du rang) *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire (E étant nécessairement de dimension finie), alors :*

$$\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim E.$$

Proposition 1.2.1 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soient f_1, \dots, f_p les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors :*

$$\ker(f_1 \cdot \dots \cdot f_p)(A) = \ker(f_1(A)) \oplus \dots \oplus \ker(f_p(A))$$

Proposition 1.2.2 (Somme des sous-espaces supplémentaires) *Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les deux assertions suivantes sont équivalentes [35, V.Guedj. (2010), p 12].*

- i) pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique couple $(y; z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
- ii) E est égal à la somme $F + G$ des sous-espaces F et G et $F \cap G = \{0\}$.

On dit que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E lorsqu'ils satisfaisant ces propriétés.

On dit aussi que E est la somme directe des sous-espaces F et G et on écrit :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}.$$

1.3 Polynômes annulateurs

Définition 1.3.1 (Polynôme annulateur) Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

On appelle polynôme annulateur de f tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$, c'est-à-dire un élément de $\ker(P) \neq \{0\}$:

$$\begin{aligned} P : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathfrak{L}(E) \\ f &\longrightarrow P(f) = 0 \end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 Soit P un endomorphisme sa matrice dans la base canonique de E , $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, le polynôme $P(X) = X(1 - X)$ est un polynôme annulateur de A car $P(A) = A^2 - A = 0$.

Proposition 1.3.1 Si de plus, le polynôme $f_1 \cdot \dots \cdot f_p$ est annulateur de A , on a :

$$\mathbb{K}^n = \ker(f_1(A)) \oplus \dots \oplus \ker(f_p(A)).$$

1.4 Polynômes Caractéristiques

Définition 1.4.1 (Polynôme Caractéristique [24, M.Romagny. (2011-2012), p 3])

Soit $f : E \longrightarrow F$ un endomorphisme et A sa matrice dans une base quelconque, on appelle **polynôme caractéristique** de f le polynôme χ_f (resp. χ_A) le polynôme défini par :

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \text{id}_E) \text{ (resp. } \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n))$$

est un polynôme de degré n et à n racines.

Exemple 1.4.1 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de E , et A sa matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 3)$.

1.5 Polynôme Minimal

Définition 1.5.1 (Polynôme Minimal) Soit $f : E \longrightarrow F$ un endomorphisme de E et A sa matrice dans la base canonique, on appelle **polynôme minimal** de f (resp. de A) et on le note μ_f (resp μ_A) le polynôme le plus petit degré (le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs).

Remarque 1.5.1 Le polynôme minimal de f (resp de A) est unique et divise tout polynôme annulateur de A .

Exemple 1.5.1 D'après l'exemple (1.4.1) on a :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 3),$$

Le polynôme minimal de A est $\mu_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 3)$.

1.6 Valeurs Propres et Vecteurs Propres et Sous-Espaces Propres associés

1.6.1 Valeurs Propres

Définition 1.6.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Soit A sa matrice dans base quelconque de E , on appelle **valeur propre** de f (resp de A), toute racines du **polynôme caractéristique** χ_f (resp χ_A).

Exemple 1.6.1 D'après l'exemple (1.4.1) on a : $\lambda_1 = 1$ (racine double), $\lambda_2 = -3$ (racine simple), λ_1, λ_2 sont des valeurs propres de A .

1.6.2 Vecteurs Propres

Définition 1.6.2 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul, f un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

- Soit $v \in E$, v est un **vecteur propre** de f associé à λ si et seulement si :
 $\{v \neq 0_E \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} / f(v) = \lambda v.\}$.
- Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, V est un **vecteur propre** de A associé à λ si et seulement si :
 $\{V \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} / AV = \lambda V.\}$.

Exemple 1.6.2 L'exemple (1.4.1) on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = -3 \Rightarrow v_0 = \begin{pmatrix} -0.4082 \\ -0.4082 \\ 0.8165 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ -0.7071 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1.6.3 Sous-Espaces Propres associés aux Valeurs Propres

Définition 1.6.3 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul de dimension finie, f un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, λ une valeur propre éventuelle de f . **Le sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ est : $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \text{id}_E) = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$ (ou plus simplement $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id}_E)$).
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, λ une valeur propre éventuelle de A . **Le sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ est : $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AV = \lambda V\}$ (ou plus simplement $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$).

Exemple 1.6.3 Voir l'exemple (1.4.1), donc les sous espaces propres associés à les valeurs propres λ_{-3} , λ_1 , sont :

$$E_{-3}(A) = \ker(A + 3I_3) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -0.4082 \\ -0.4082 \\ 0.8165 \end{pmatrix} \right\}, E_1(A) = \ker(A - I_3) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ -0.7071 \end{pmatrix} \right\}$$

Définition 1.6.4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} , et soit

$P \in \mathfrak{L}(E)$, soit λ dans \mathbb{K} et soit $E_\lambda = \ker(P - \lambda \text{id}_E)$. Si $E_\lambda \neq \{0\}$, on dit que λ est une valeur propre de P . Dans ce cas, E_λ est appelé l'espace propre associé à la valeur propre λ , et les éléments non nuls de E_λ sont appelés des vecteurs propres associés à λ .

Théorème 1.6.1 Soient $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$ et (G, \mathcal{G}) des espaces de dimensions finies sur le corps \mathbb{K} munis de base quelconque. Si $P_1 \in \mathfrak{L}(E, F)$ et si $P_2 \in \mathfrak{L}(F, G)$ alors la matrice représentative de l'application linéaire composée de P_1 et P_2 est :

$$[P_1 \circ P_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = [P_1]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} [P_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \quad (1.1)$$

Proposition 1.6.1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ puis f un endomorphisme de E . On suppose que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de f . Alors, la somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$ est directe.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des **valeurs propres** deux à deux distinctes de A . Alors, la somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A)$ est directe.

Théorème 1.6.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $P \in \mathfrak{L}(E)$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de P . Alors les espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe. En particulier, $\text{card}(Sp(P)) \leq \dim(E)$*

Preuve. Nous introduisons :

- Polynômes de Lagrange.
- Polynômes minimaux d'un endomorphisme

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des éléments distincts du corps \mathbb{K} les p polynômes de Lagrange L_1, \dots, L_p associés sont définis par :

$$L_j(X) = \frac{\prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)}$$

Ils ont trois propriétés remarquables : $\deg(L_j) = p - 1$, $L_j(\lambda_j) = 1$ et, pour $i \neq j$, $L_j(\lambda_i) = 0$. Ils sont utilisés en analyse numérique pour résoudre le problème suivant : étant donné $(P_1, \dots, P_p) \in \mathbb{K}^p$ trouver l'unique polynôme Q de degré $p - 1$ tel que pour tout j on ait $Q(\lambda_j) = P_j$.

Réponse : c'est $Q = P_1 L_1 + \dots + P_p L_p$: évident Q convient et est unique, et on définissons maintenant les polynômes minimaux des endomorphismes. Si $P \in E$, on définit la suite : $(P^k)_{k \geq 0}$ d'éléments de $\mathfrak{L}(E)$ par la récurrence suivante : $P^0 = id_E$, $P^{k+1} = P \circ P^k$.

On a de l'associativité de la composition des fonctions on trouve $P^{k+1} = P^k \circ P$ et plus généralement $P^{k+1} = P \circ P^k$. Si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base quelconque, alors (1.1) implique que si $A = [P]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ alors :

$$[P^k]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = A^k.$$

Si $Q(X) = c_0 + c_1X + \dots + c_nX_n$ est un polynôme dont les coefficients c_j sont dans \mathbb{K} on définit alors l'endomorphisme $Q(P)$ par $Q(P) = c_0id_E + c_1P + c_2P^2 + \dots + c_nP^n$

De même donc, si $A = [P]_e^e$ alors $[Q(P)]_e^e = Q(A) = c_0I_q + c_1A + c_2A^2 + \dots + c_nA^n$.

1.7 Espaces orthogonaux

Pour retrouver les équations normales nous allons rappeler quelques résultats sur les espaces euclidiens.

Définition 1.7.1 *On rappelle la définition du produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n :*

$$x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = x^\top y = y^\top x.$$

Cette définition généralise le produit scalaire usuel sur R^2 ou R^3 .

Définition 1.7.2 *On appelle que (x_1, x_2, \dots, x_k) est une famille orthonormée de K vecteurs de l'espace euclidien E si :*

$$\|x_i\|_2 = 1, \forall i = \overline{1 : k}, \quad \langle x_i, x_j \rangle = 0, \forall i, j = \overline{1 : k}, \text{ et } i \neq j.$$

Proposition 1.7.1 *Soit (x_1, x_2, \dots, x_k) une famille de k vecteurs non-nuls et orthogonaux deux à deux :*

$$x_i \neq 0, \forall i = \overline{1 : k}, \quad \langle x_i, x_j \rangle = 0, \forall i, j = \overline{1 : k}, \text{ et } i \neq j.$$

Corollaire 1.7.1 *Toute famille orthonormée est libre.*

Définition 1.7.3 *Soit S un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , on appelle orthogonal de S le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n noté S^\perp définit par $x \in S \iff \forall y \in S, \langle x, y \rangle = 0$.*

Proposition 1.7.2 *Soit S un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , S^\perp l'orthogonal de S alors : $S \cap S^\perp = \{0\}$, $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$.*

Pour montrer la somme directe, on utilise la procédure d'orthonormalisation de Schmidt pour montrer que tout sous-espace vectoriel S admet une base orthogonale \mathfrak{B} . On rappelle qu'une famille libre, par exemple \mathfrak{B} , de E peut être complétée par une famille \mathfrak{C} telle que $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ soit une base de E (théorème de la base incomplète). On continue alors le processus d'orthonormalisation de Schmidt sur \mathfrak{C} et on obtient ainsi une base orthogonale de la forme $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}'$. Alors il est clair, par construction, que \mathfrak{B}' engendre un sous espace vectoriel qui est S^\perp .

Proposition 1.7.3 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, on a $\text{Im}(A)^\perp = \ker(A^\top)$.

$$\begin{aligned} X \in (\text{Im}(A))^\perp &\iff X^\top y = 0, \quad \forall y \in \text{Im}(A), \\ &\iff X^\top (Az) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \\ \text{Preuve.} & \\ &\iff (A^\top X)^\top z = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \\ &\stackrel{?}{\iff} A^\top X = 0. \end{aligned}$$

On démontre le dernier point. Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on démontre que :

$$- b^\top z = 0, \forall z \in \mathbb{R}^n \iff b = 0$$

L'implication(\Leftarrow) est évidente puisque l'on multiplie 0 par le vecteur z .

Supposons maintenant que : $b^\top z = 0, \forall z \in \mathbb{R}^n$, alors cette égalité était vraie pour tout z l'est en particulier pour $z = b$, ce qui donne : $b^\top b = \|b\|_2^2 = 0$,

Or la norme d'un vecteur est nul si et seulement si ce vecteur est nul, ce qui donne : $b = 0$ (ou, on démontre que : $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$).

1.8 Fonctions Matricielles

Dans cette section, nous considérons maintenant que nous devons interpréter des expressions comme e^A , $\sin(A)$ et $\log(A)$, quand $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Nous commençons par regarder à des fonctions polynomiales ou à une matrice, et pour garder les choses simples, nous traiterons d'abord le cas où notre matrice est dans la

forme de Jordan. [3, **A.J.Laub. (1948), p-p 106-107**]

1.8.1 Formule de Sylvester

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mu_A(\lambda)$ le polynôme minimale, tel que

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{m_n}.$$

Alors : $\forall f$, on définit $f(A)$:

$$f(A) = \sum_{i=1:n} \left(\sum_{k=0:m_i-1} \frac{1}{k!} D^k f(\lambda_i) Z_{\lambda_i}^k \right), \quad (1.2)$$

ou Z_{λ}^k sont des composantes matricielles (matrices propres) et λ_i sont les racines de polynôme minimal, tel que :

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{i=1:n} \left(\sum_{k=0:m_i-1} \frac{1}{k!} D^k f(\lambda_i) Z_{\lambda_i}^k \right) \\ &= f(\lambda_1) Z_{\lambda_1} + f^1(\lambda_1) Z_{\lambda_1}^1 + \frac{1}{2!} f^2(\lambda_1) Z_{\lambda_1}^2 + \dots + \frac{1}{(m_1-1)!} D^{m_1-1} f(\lambda_1) Z_{\lambda_1}^{m_1-1} + \\ &\quad f(\lambda_2) Z_{\lambda_2} + f^1(\lambda_2) Z_{\lambda_2}^1 + \frac{1}{2!} f^2(\lambda_2) Z_{\lambda_2}^2 + \dots + \frac{1}{(m_2-1)!} D^{m_2-1} f(\lambda_2) Z_{\lambda_2}^{m_2-1} + \dots \\ &\quad + f(\lambda_n) Z_{\lambda_n} + f^1(\lambda_n) Z_{\lambda_n}^1 + \frac{1}{2!} f^2(\lambda_n) Z_{\lambda_n}^2 + \dots + \frac{1}{(m_n-1)!} D^{m_n-1} f(\lambda_n) Z_{\lambda_n}^{m_n-1}. \end{aligned}$$

Théorème 1.8.1 ([3, **A.J.Laub. (1948), p-p 106-107**]) *Soit f est un polynôme et J est la forme de Jordan $J_k(\lambda)$, alors $f(J)$ est une matrice triangulaire supérieure qui est constantes sur les diagonales. Les entrées sur la diagonale principale sont $f(\lambda)$, les entrées sur le $k^{\text{ième}}$ sur-diagonale (c'est-à-dire dans les positions $(i, i+k)$) sont $\frac{D^k f(\lambda)}{k!}$ ($D = \frac{d}{d\lambda}$).*

Preuve. On désigne par N la matrice $k \times k$ avec en positions $(i, 1+1)$ et 0 ailleurs, $J = \lambda I + N$, donc par le théorème binomial :

$$J^n = (\lambda I + N)^n = \sum_{i=0:n} \frac{1}{i!} (D^i \lambda^n) N^i,$$

En d'autres termes, si $f(x) = x^n$ nous avons la formule :

$$f(J) = \sum_{i=0:n} \frac{1}{i!} (D^i f(\lambda)) N^i,$$

Autrement dit, N^i est 0 sauf pour les 1 sur le sur-diagonale. Donc on particulier, N^i est la matrice nulle si i dépasse $k - 1$.

Si f est un polynôme et A est la matrice diagonale en bloc $diag \{A_1, \dots, A_n\}$, puis $f(A) = diag \{f(A_1), \dots, f(A_n)\}$.

Par conséquent, si A est une matrice sous forme canonique, $f(J)$ est de forme diagonale avec tout vecteur, d'après le (1.8.1). Il s'ensuit que $f(J)$ peut être écrit sous la forme :

$$f(J) = \sum_{k=0:n} \frac{1}{k!} D^k f(\lambda) Z_\lambda^k,$$

où Z_λ^k est une somme de dyades $E_i E_j^\top$ et additionné sur toutes les paires de telle sorte que l'entrée en position (i, j) est $\frac{D^k f(\lambda)}{k!}$. La somme est reprise sur l'ensemble des valeurs propres λ et tous les entiers k inférieurs à la taille de la plus grande de cas correspondant à λ .

telles que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de P . Alors les sous espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$, et (si le polynôme a des racines simples) $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$, $k \leq n$ et $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$ distinctes, la formule de **Sylvester** (1.2) :

$$f(A) = \sum_{i=1:k} f(\lambda_i) Z_i = f(\lambda_1) Z_1 + f(\lambda_2) Z_2 + \dots + f(\lambda_k) Z_k,$$

$$\text{Tel que } V_i V_j^\top = Z_\lambda = Z_i = \frac{(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \dots (A - \lambda_{i-1} I_n)(A - \lambda_{i+1} I_n) \dots (A - \lambda_n I_n)}{(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)},$$

Z_i est un projecteur sur E_{λ_i} : $Z_i^2 = Z_i$ mais $Z_i Z_j = 0, i \neq j, Z_i Z_i = Z_i$ et Z_i est une matrice propre composante a la valeur propre λ_i tel que :

$$A Z_i = \lambda_i Z_i, \quad i = \overline{1:r}, \quad A = \sum_{i=1:k} \lambda_i Z_i.$$

1.9 Problème des moindres carrés

Définition 1.9.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés ($m < n$). On appelle problème des moindres carrés le problème

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \|b - AX\|_2^2.$$

On notera X^* la solution de ce problème. On montrera dans la suite qu'elle existe, et qu'elle est unique sous l'hypothèse fondamentale suivante :

Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Ou, de façon équivalente : $\text{rang}(A) = n$.

Un cas particulier est le cas $m = n$ et A inversible, alors X^* est la solution unique de $AX = b$.

Chapitre 2

Projecteurs (Projections)

2.1 Projecteurs

Définition 2.1.1 (Projecteur [3, A.J.Laub. (1948)]) On appelle projecteur tout endomorphisme d'un espace vectorielle E de dimension finie, P sa matrice dans une base \mathcal{B} telle que $P^2 = P$.

- Puisque P satisfait l'équation $X^2 = X$, le polynôme minimal de P , soit :

$$f(X) = X, f(X) = X - 1 \text{ ou } f(X) = X^2 - X.$$

Dans les deux premiers cas P est la matrice nulle ou la matrice identité, donc le seule cas possible, comme polynôme minimal de P est $\mu_P(X) = X^2 - X$.

Dans cet cas, le polynôme caractéristique doit être $f(X) = (X - 1)^r X^{n-r}$ où r représente le rang de P et n l'ordre de P .

- Puisque μ_P (Polynôme minimal de P) à des racines simples, donc il existe une base de vecteurs propres de P .

Soit $\{V_1, \dots, V_n\}$. Cette base, telle que $\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$ l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ et $\{V_1, \dots, V_r\}$ associés à la valeur propre $\lambda_2 = 1$.

- Soit T la matrice définie par :

$$T = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_r \end{pmatrix} \text{ et } T^{-1} = \begin{pmatrix} W_1^\top \\ \vdots \\ W_r^\top \end{pmatrix},$$

$$\text{Alors } W_j^\top V_j = \begin{cases} 1 & , i = j. \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Remarque 2.1.1 (Projecteurs Orthogonaux) *Un projecteur orthogonal a un sous-espace de direction orthogonal à son sous-espace de projection. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un projecteur soit orthogonal est de satisfaire la condition de hermitienne (symétrie), soit*

$$P^H = P \quad (P^\top = P).$$

Remarque 2.1.2 (Projecteurs Obliques) *si P non Hermitienne ($P^H \neq P$) (la projection sera oblique ou non orthogonale)*

Remarque 2.1.3 *On rappelle la formule de **Sylvester** (1.8.1) pour la matrice P telle que :*

$$f(P) = f(\lambda_1)Z_1 + f(\lambda_2)Z_2 = f(0)Z_1 + f(1)Z_2, \text{ pour toute fonction } f \quad (2.1)$$

$$\text{où } Z_2 = \sum_{i=1:r} V_i V_i^\top \text{ et } Z_1 = \sum_{i=r+1:n} V_i V_i^\top, P = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2,$$

$$\begin{cases} AZ_1 = \lambda_1 Z_1, Z_1 = V_1 V_1^\top \\ AZ_2 = \lambda_2 Z_2, Z_2 = V_2 V_2^\top \end{cases} \quad (1.8.1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow V_1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow V_2, \\ \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad E_{\lambda_1 = \ker(P)} \quad E_{\lambda_2 = \text{Im}(P)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} = \ker(P) \oplus \text{Im}(P).$$

On réalise la relation (2.1) pour $f(x) = x$ et $f(x) = 1$, donc on trouve :

$$\begin{cases} 0Z_1 + Z_2 = P \\ Z_1 + Z_2 = I_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_2 = P = \sum_{i=\overline{1:r}} V_i V_i^\top \text{ est l'image de } P \text{ (Im}(P)) \\ Z_1 = I_n - P = \sum_{i=r+1:n} V_i V_i^\top \text{ est le noyau de } P \text{ (ker}(P)) \end{cases}$$

Puisque $I_n = \sum_{i=\overline{1:n}} V_i W_i^\top$, soit X un vecteur arbitraire on a :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=\overline{1:n}} (W_i^\top X) V_i \\ &= \sum_{i=\overline{1:r}} (W_i^\top X) V_i + \sum_{i=r+1:n} (W_i^\top X) V_i \\ &= PX + (I_n - P)X, \end{aligned}$$

donc P est un opérateur linéaire qui correspond à tout vecteur propre X , dans le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, aussi $(I_n - P)$ est un projecteur, qui correspond à tout vecteur propre X le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$.

2.2 Matrices Normales

Définition 2.2.1 ([3, A.J.Laub. (1948), p-p 167-168]) *une matrice A est dite normale si $AA^H = A^H A$, A est unitaire si $AA^H = A^H A = I_n$, et A est **Hermitienne** si $A^H = A$.*

Définition 2.2.2 ([3, A.J.Laub. (1948), p-p 167-168])

- On appelle matrice orthogonale, toute matrice unitaire, a valeur réels.
- On appelle matrice A symétrique si A est Hermitienne a valeur réels.

Théorème 2.2.1 ([3, A.J.Laub. (1948), p-p 167-168]) *si A est une matrice normale, alors il existe une matrice unitaire U telle que :*

$$U^H A U = D \text{ (diagonale).}$$

Théorème 2.2.2 ([3, A.J.Laub. (1948), p-p 167-168]) *Soit P une matrice Normale ($PP^H = P^H P$) et soit $\{V_1, \dots, V_n\}$ une base de vecteurs propres de P telle*

que : $P = \sum_i V_i V_i^H$.

P est Hermitienne si et seulement si $\text{Im}(P) \perp \text{ker}(P)$.

Preuve. (\Leftrightarrow)

Soit PY et $(I_n - P)X$ deux vecteurs de $\text{Im}(P)$ et $\text{ker}(P)$ respectivement $\forall X, Y \in E$,

on a :

$$\begin{aligned} \langle (I_n - P)X, PY \rangle &= \langle X, (I_n - P)^H PY \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$(I_n - P)^H P = 0$$

alors :

$$\begin{aligned} (I_n - P)^H P &= P - P^H P = 0 \\ \implies P &= P^H P = P^H \end{aligned}$$

alors : P est symétrique.

(\Rightarrow) $P^H = P, \forall X, Y \in E$:

$$\begin{aligned} \langle (I_n - P)X, PY \rangle &= \langle X, (I_n - P)^H PY \rangle \\ &= \langle X, (P - P^H P) Y \rangle = 0 \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(P) \perp \text{ker}(P)$.

Exemple 2.2.1 Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

On peut vérifier que la matrice P est un projecteur ($P^2 = P$). Son rang est sa trace qui est 2, et les vecteurs $(1, -1, 0, 0)^T$ et $(0, 0, 1, 2)^T$ constituent une base pour son espace nul. Aussi $(1, 0, -1, 0)^T$ et $(0, 1, 0, 1)^T$ sont une base pour l'espace propre pour

$\lambda = 1$. Les sous espaces propres $\ker(P)$ et $\text{Im}(P)$ ne sont pas orthogonaux, la matrice A n'est pas hermitienne.

On a $P^2 = P$, donc P est un projecteur et $\text{rg}(P) = \text{Tr}(P) = 2$.

$$\text{On a } \text{Im}(P) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \ker(P) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

P est un projecteur, qui projette sur $\text{Im}(P)$ parallèlement au sous espace $\ker(P)$, on remarque que $\text{Im}(P)$ et $\ker(P)$ ne sont pas orthogonaux, car P n'est pas symétrique $P^\top \neq P$ (P non Hermitienne $P^H \neq P$).

Exemple 2.2.2 La matrice de projection orthogonal dans le sous espace engendré par $(1, 0, -1, 0)^\top$ et $(0, 1, 0, 1)^\top$, tel que $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)^\top$, $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)^\top$

$$\text{Soit } P = \sum_{i=1:2} V_i V_i^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $P^2 = P$ et $P^\top = P$ donc $\text{Im}(P)$ et $\ker(P)$ sont orthogonaux, car P est symétrique ($P^\top = P$).

Exemple 2.2.3 ([3, A.J.Laub. (1948), p 168]) Soit $A_{m \times n}$ une matrice ($m > n$) de $\text{rg}(A) = n$.

Prouver que $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ est un projecteur orthogonal ?

On quel espace projeté P ?

On quel espace projeté $(I - P)$?

$$\begin{aligned} P^2 &= A(A^\top A)^{-1}A^\top A(A^\top A)^{-1}A^\top \\ &= A(A^\top A)^{-1}A^\top \\ &= P, \end{aligned}$$

donc $P^2 = P \implies P$ est un projecteur.

$$\begin{aligned} P^H &= \left[A (A^\top A)^{-1} A^\top \right]^H \\ &= A (A^\top A)^{-1} A^\top \\ &= P, \end{aligned}$$

d'où $P^H = P \implies P$ est une matrice hermitienne.

$P = A (A^\top A)^{-1} A^\top$ est un projecteur orthogonal, projeté sur $\text{Im}(P)$ et $(I_n - P)$ projeté sur $\text{ker}(P)$.

2.3 Pseudo-Inverse d'une matrice

Définition 2.3.1 (Pseudo-inverse [3, A.J.Laub. (1948), p 169]) Soit A une matrice de taille $m \times n$, on appelle **Pseudo-inverse** de la matrice A , la matrice unique notée A^+ définie par les propriétés :

- (1) $AA^+A = A$ et $A^+AA^+ = A^+$.
- (2) A^+A et AA^+ sont des matrices Hermitiennes :
 - Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $(A^+A)^H = A^+A$ et $(AA^+)^H = AA^+$.
 - Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $(A^+A)^\top = A^+A$ et $(AA^+)^\top = AA^+$.

Théorème 2.3.1 Toute matrice A de taille $m \times n$ admet un **Pseudo-inverse** unique A^+ de taille $n \times m$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1- $AA^+A = A$ et $A^+AA^+ = A^+$.
- 2- A^+A et AA^+ sont des matrices Hermitiennes.

Preuve. On a : si $A = 0$ (matrice nulle), on prend $A^+ = 0$, si non, on suppose que $\text{rg}(A) = r$, on décompose A par $A = BC$ ou (B est une matrice $m \times r$, C est une matrice $r \times n$).

Les matrices $B^H B$ et CC^H sont de rang r et sont inversibles.

On pose : $A^+ = C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H$,

$$\left\{ \begin{array}{l} A^+A = B (B^H B)^{-1} B^H \\ \text{et} \\ AA^+ = C^H (CC^H)^{-1} C, \end{array} \right.$$

sont Hermitiennes,

$$\left\{ \begin{array}{l} AA^+A = A \\ \text{et} \\ A^+AA^+ = A^+, \end{array} \right.$$

On a :

$$\begin{aligned} AA^+A &= BCC^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H BC \\ &= BC \\ &= A. \end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned} A^+AA^+ &= C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H BCC^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H \\ &= C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H \\ &= A^+. \end{aligned}$$

Unicité de Pseudo-inverse : Soient X et Y deux **Pseudo-inverses** de A : $X \neq Y$.

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} XAX = X \text{ et } AXA = A. \\ YAY = Y \text{ et } AY A = A. \end{array} \right.$$

On a :

$$\begin{aligned} XAY &= XAXAY, & (\text{car : } X = XAX \text{ d'après(2.3.1)}) \\ &= XX^H A^H Y^H A^H, & (\text{car : } AX = (AX)^H \text{ et } AY = (AY)^H \text{ d'après (2.3.1)}) \\ &= XX^H A^H, & (\text{car : } A^H Y^H A^H = A^H)* \\ &= XAX, & (\text{car : on prend le transposé dans (2.3.1), } AX = (AX)^H) \\ &= X, \end{aligned}$$

De même manière pour : $XAY = Y$, on a $XAY = XAY$, donc $\boxed{X = Y}$, et alors l'unicité de la matrice (pseudo-inverse) de A .

On conclut que, toute matrice A admet une matrice **Pseudo-inverse** et unique.

Propriétés 2.3.1

1. Si A est inversible alors $A^+ = A^{-1}$.
2. Si A est de rang maximal alors on prend ($B = I$ ou $C = I$) on trouve :

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$$

- Si $\text{rg}(A) = n$ (nombre de colonnes), (le cas d'un système linéaire sous-déterminé $AX = b$).
- Si $\text{rg}(A) = m$ (nombre de lignes), on a $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$, ($C = I$) (le cas d'un système linéaire surdéterminé).

2.4 Solution d'un système linéaire : $AX = b$

On a le problème de moindre carrés $AX = b \implies X = A^+b$.

Si $AX - b \neq 0$, on peut minimiser $(AX - b)$, dans cette cas on appelle X la solution du problème de moindre carrés ($AX = b$).

Théorème 2.4.1 *Le vecteur A^+b est la solution minimale (solution du problème de moindre carrés) du problème $AX = b$.*

1. Si $\text{rg}(A)$ est maximal = nombre de lignes de A alors A^+b est la solution minimale de $AX = b$.
2. Si $\text{rg}(A)$ est maximal = nombre de colonnes de A alors A^+b est la solution unique du problème de moindre carrés.

Lemme 2.4.1 *Soient U et V deux vecteurs **orthogonaux** alors*

$$\|U + V\| \geq \|U\|,$$

si U et V ne sont pas orthogonaux alors :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \|U + \varepsilon V\| \leq \|U\|$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \|U + \varepsilon V\|^2 &= (U + \varepsilon V)^H (U + \varepsilon V) \\ &= \|U\|^2 + \varepsilon^2 \|V\|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}(U^H V), \end{aligned}$$

1. Si $U^H V = 0$, car $(U \perp V)$, alors

$$\|U + V\| \geq \|U\| \quad , \quad \|V\|^2 \geq 0.$$

Si non :

$$\text{Soit } C = 2 \operatorname{Re}(U^H V),$$

$$\implies \|U + \varepsilon V\|^2 = \|U\|^2 + \varepsilon (C + \varepsilon \|V\|^2).$$

2. Si ε et C sont de différents signes et $\varepsilon \ll 0$, alors $(C + \varepsilon \|V\|^2)$ à le même signes que C .

$$\text{Donc, } \|U + \varepsilon V\| \leq \|U\|.$$

Théorème 2.4.2 ([3, A.J.Laub. (1948), p 170]) *Le reste $R = AX - b$ est minimal si $A^H R = 0$.*

En d'autre terme, X est une solution du problème de moindre carrés $AX = b$,

Si et seulement si, X est solution du problème $(A^H A) X = A^H b$.

Preuve. On suppose que X_0 produit le reste $R_0 = AX_0 - b$ tq, $\|R_0\|$ est minimal, et soit $(X_0 + \varepsilon W)$ produit le reste $R_0 + \varepsilon AW$ tq $\|R_0 + \varepsilon AW\|$ est minimal.

Donc d'après le lemme précédent la solution est minimale pour chaque ε .

Si R_0 et AW sont orthogonaux, alors pour que R_0 est minimal.

$$(AW)^H R_0 = 0 = W^H A^H R_0, \forall W, \text{ donc } \boxed{A^H R_0 = 0}.$$

$$\text{Par suite } (A^H A) X_0 = A^H B.$$

On considère le système $AX = V$ et soit $A = BC$ une factorisation quelconque de A .

Soit X un vecteur tel que $\|AX - b\|$ est minimal, donc on a $A^H AX = A^H V$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow C^H B^H BCX &= C^H B^H V \\ \Rightarrow CC^H B^H BCX &= CC^H B^H V \\ \Rightarrow (CC^H)^{-1} CC^H B^H BCX &= (CC^H)^{-1} CC^H B^H V \\ \Rightarrow B^H BCX &= B^H V, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} CX &= (BB^H)^{-1} B^H V \\ &= V_0 \\ \Rightarrow X_0 &= C^H (CC^H)^{-1} V_0. \end{aligned}$$

Donc toute solution a la forme $X_0 + Y$, $\forall Y$ telle que $CY = 0$.

Mais si $CY = 0 \implies X_0$ et Y sont orthogonaux, on calcule $X^H Y_0$ telle que $Y^H C^H = 0$.

Par suite X_0 est la solution minimale de $CX = V_0$, ou : $X_0 = C^+ B^+ V = A^+ V$, d'où $A^+ V$ est la solution minimale du problème de moindre carré $AX = V$.

2.5 Sous Espace Propres (Image et Noyau)

Théorème 2.5.1 ([32, S.Gugger, J.Howard. (2018), p 14]) *Pour tout endomorphisme P de E tel que $P \circ P = P$, les sous-espaces $\text{Im}(P)$ et $\text{ker}(P)$ sont supplémentaires, et P est le projecteur qui projet sur $\text{Im}(P)$, parallèlement au $\text{ker}(P)$.*

Preuve. Notons $F = \text{Im}(P)$ et $G = \text{ker}(P)$ on a :

– $F \cap G \subset \{0\}$: si $Y \in F \cap G$, alors Y est de la forme $P(X)$, et on a :

$$0 = P(Y) = P \circ P(X) = P(X) = Y.$$

– $E \subset F + G$: pour tout vecteur X de E , soient $Y = P(X)$ et $Z = X - P(X)$.

Alors, $X = Y + Z$, $Y \in F$

et $Z \in G$ (car $P(X - P(X)) = P(X) - P \circ P(X) = 0$).

Donc $F \oplus G = E$, $P(X)$ est bien le projeté de X sur F parallèlement à G .

Propriétés 2.5.1 (Projecteurs [32, S.Gugger, J.Howard. (2018), p-p 12-13])

La propriété (2.1.1) est appelée idempotence.

Un projecteur est donc un endomorphisme idempotent, et soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $P \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E .

On suppose dans la suite : $P \neq id_E$ et $P \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. **a.** Les seules valeurs propres possibles de P sont 0 et 1.
 - b.** $S_P(P) = \{0, 1\}$.
2. **a.** $\ker(P) = \text{Im}(id_E - P)$.
 - b.** $\ker(id_E - P) = \text{Im}(P)$.
 - c.** P est diagonalisable.
3. **a.** $\text{Im}(P) \cap \ker(P) = \{0_E\}$, et $E = \text{Im}(P) \oplus \ker(P)$.
 - b.** $\forall X \in E$ se décompose de manière unique sous la forme : $X = x_1 + x_2$.
où $x_1 \in \text{Im}(P)$ et $x_2 \in \ker(P)$.
4. Soit $P \in \mathcal{L}(E)$ alors P est un projecteur si et seulement si pour tout $X \in E$ on a $X - P(X) \in \ker(P)$.
5. $P \in \mathcal{L}(E)$ et $F = \text{Im}(P)$, $G = \ker(P)$ Le projecteur sur G parallèlement à F est $id_E - P$.

Chapitre 3

Application Numérique

3.1 Problèmes de projection

Proposition 3.1.1 *Etant donnés S un sous-espace vectoriel de E et $y \in E$, le problème :*

$$\min_{z \in S} \|z - y\|_2,$$

admet une solution unique $\hat{y} \in S$ projection orthogonale de y sur S .

Preuve. Soit z un élément quelconque de S , alors :

$$\begin{aligned} \|z - y\|_2^2 &= \|z - \hat{y} - (y - \hat{y})\|_2^2, \\ &= \|z - \hat{y}\|_2^2 + \|y - \hat{y}\|_2^2 - 2 \langle z - \hat{y}, y - \hat{y} \rangle, \\ &= \|z - \hat{y}\|_2^2 + \|y - \hat{y}\|_2^2, \end{aligned}$$

puisque $(z - \hat{y}) \in S$ et $(y - \hat{y}) \in S^\perp$, Alors :

$$\|z - y\|_2^2 > \|y - \hat{y}\|_2^2, \forall z \neq \hat{y}, \forall z \in S,$$

Ce qui montre que :

$$\min_{z \in S} \|z - y\|_2 = \|y - \hat{y}\|.$$

Corollaire 3.1.1 Soit $y \in \mathbb{R}^n$ alors il existe un unique $\hat{y} \in S$ tel que : $y - \hat{y} \in S^\perp$, le vecteur \hat{y} étant appelé projection orthogonale (ou projeté orthogonal) de y sur S . Ce projeté orthogonal \hat{y} est caractérisé par :

$$\hat{y} \in S \text{ et } \forall y \in S, \langle \hat{y}, s \rangle = \langle y, s \rangle, \quad \forall s \in S. \quad (3.4)$$

Preuve. d'après le théorème précédent, tout vecteur y s'écrit de manière unique sous la forme : $y = \hat{y} + z$, où $\hat{y} \in S$ et $z \in S^\perp$.

3.2 Problème bien et mal-posé (Hadamard)

Soit $A \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur, \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux espaces normés Le problème ([23, M.Kern. (2016), p10])

$$AX = b$$

Est dite bien posée si :

- La solution X existe pour tout b de \mathcal{Y} (la surjectivité de A).
- Elle est unique (injectivité de A).
- Il dépend continûment de la donnée b :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ tel que } |b - b'|_{\mathcal{Y}} < \delta \implies |X - X'|_{\mathcal{X}} < \varepsilon, \text{ avec } AX' = b'.$$

Sinon, on dit que le problème est mal posée (la stabilité de la solution si A^{-1} est continue $\Leftrightarrow \text{Im}(A)$ est fermé).

La solution ne dépend pas des données.

Exemple 3.2.1 ([23, M.Kern. (2016), p 11]) Considérons une fonction $f \in C^1([0, 1])$, et $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x).$$

Alors

$$f'_n(x) = f'(x) + n \cos(n^2x).$$

De simples calculs montrent que

$$\|f - f_n\|_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

alors que

$$\|f' - f'_n\|_n = n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O(n).$$

Ainsi, la différence entre f' et f'_n peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre f et f_n est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu, au moins avec ce choix des normes.

L'instabilité de la solution est typique des problèmes mal-posés. Une petite perturbation sur les données (ici f) peut avoir une influence arbitrairement grande sur le résultat (ici f').

Exemple 3.2.2 Considérons l'équation linéaire suivante :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

avec la solution, $X = [0, 5 \ 0, 5 \ 0, 5]^\top$. Supposons qu'il y ait une petite perturbation dans le troisième élément des données, telle que $\delta = [0 \ 0 \ 10^{-2}]^\top$, alors la solution du système perturbé devient $X = [0, 5 \ 0, 5 \ 500, 5]^\top$.

Comme le problème est presque mal-posé, une petite perturbation dans les données entraîne un écart important dans la solution. Pour éviter une telle instabilité, on peut résoudre

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

au lieu de l'éq (3.1). Dans le nouveau problème, l'observation exacte donne $X = [0, 5 \ 0, 5 \ 0, 005]^\top$, tandis que la perturbation du troisième élément des données données par $\delta = [0 \ 0 \ 10^{-2}]^\top$ fournit $X = [0, 5 \ 0, 5 \ 5, 005]^\top$. Bien que la solution ne soit pas exactement égale à la solution originale, le nouveau système est robuste aux petites perturbations des données données. Le choix d'une contrepartie mieux posée pour le problème mal posé donné est très important.

3.3 Interprétation géométrique de problème des Moindres Carrés

Etablissons d'une manière différente les équations normales tout en interprétant géométriquement la solution.

La solution de problème du Moindre Carrés consiste à minimiser la distance euclidienne entre les données, vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, et $\text{Im}(A)$ sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m .

La solution optimale $X^* \in \mathbb{R}^n$ est alors tel que AX^* est le projeté orthogonal de $b \in \mathbb{R}^m$ sur $\text{Im}(A)$.

Montrons donc ce résultat à savoir : $\|AX - b\|_2$, minimal si et seulement si :

$$(AX - b) \perp \text{Im}(A).$$

Cela est équivalent d'écrire que : "le résidu $R = (AX - b) \in \text{Im}(A)^\perp$ ".

Notons X^* la solution optimale. On a :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX - b\|_2^2 = \|AX^* - b\|_2^2 + \|AX - AX^*\|_2^2 \geq \|AX^* - b\|_2^2$$

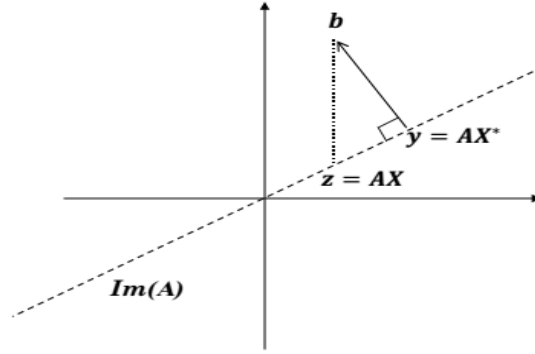


FIG. 3.1 – Illustration géométrique des moindres carrés (cas $n = 1$ et $m = 2$).

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
 R \in \text{Im}(A)^\perp &\iff \forall y \in \text{Im}(A), R^\top y = 0 \\
 &\iff \forall z \in \mathbb{R}^n, R^\top (Az) = 0 \\
 &\iff \forall z \in \mathbb{R}^n, z^\top A^\top R = 0 \\
 &\iff A^\top R = 0 \\
 &\iff R \in \ker(A^\top),
 \end{aligned}$$

Ce qui nous conduit donc aux équations normales :

$$A^\top (AX^* - b) = 0.$$

Proposition 3.3.1 ([23, M.Kern. (2016), p 43]) *On a :*

$$A^\top AX^* = A^\top \widehat{b}. \quad (3.3)$$

1. L'équation (3.3) admet une solution si et seulement si $\widehat{b} \in \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A)^\perp$.
2. Si $\widehat{b} \in \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A)^\perp$, l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (3.3) est un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n .

Preuve.

1. Soit $X \in E$ une solution de (3.3), On a donc :

$$AX - \widehat{b} \in \ker(A^\perp) = \left(\overline{\text{Im}(A)}\right)^\perp = (\text{Im}(A))^\perp,$$

$$\text{Donc } \widehat{b} = AX + (\widehat{b} - AX) \in \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A)^\perp.$$

Inversement,

Soit $\widehat{b} = b_1 + b_2$, avec $b_1 \in \text{Im}(A)$, $b_2 \in \text{Im}(A)^\perp$. Il existe donc $X^* \in E$, tel que $AX^* = b_1$.

Évidemment $A^\perp AX = A^\perp b_1$. Mais, toujours par ce que $(\text{Im}(A))^\perp = \ker(A^\perp)$, $A^\perp b_2 = 0$, c'est-à-dire que $A^\perp \widehat{b} = A^\perp b_1 = A^\perp AX$, et \widehat{b} est une solution de (3.3).

2. L'ensemble des solutions est non-vidé d'après le point (1). C'est un espace affine, c'est donc en particulier un convexe, et il est fermé puisque c'est l'image réciproque de $\{A^\perp \widehat{b}\}$ par l'opérateur continu $A^\perp A$.

Ceci prouve que $\Gamma_{\mathbb{R}} = X_0 + \ker(A)$, où X_0 est une solution quelconque de (3.3).

Corollaire 3.3.1 ([23, M.Kern. (2016), p 44]) *Si $b \in \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A)^\perp$, le problème (1.9) admet une solution unique de norme minimale.*

Preuve. Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (1.9). La recherche d'une solution de norme minimale de ce problème des moindres carrés revient à résoudre le problème suivant :

$$\min_{X \in \mathcal{S}} \|X\|_2, \mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|AX - b\|_2 \text{ minimale}\},$$

c'est-à-dire à projeter l'origine sur l'ensemble S , d'après la (3.3.1), S est un convexe fermé non-vidé de \mathbb{R}^n . Le théorème de projection implique que S possède un élément de norme minimale, qui est la solution cherchée. Nous noterons X^* cette solution particulière.

3.4 Problème des moindres Carrés Linéaires

3.4.1 Formulation matricielle

On suppose que l'on a à résoudre un système linéaire $AX = b$ ($A \in \mathcal{M}_{m,n}$), avec un second membre $b \in \mathcal{M}_{m,1}$ non nul et on suppose que le nombre d'équations est supérieur strictement au nombre d'inconnues ($m > n$). Dans la plupart des cas, ce système n'admet pas des solutions. On cherche alors une approximation de la solution qui réduise la différence $Ax - b$. Un des choix possible est de minimiser la norme euclidienne de cette différence. Dans tout ce chapitre, nous n'utiliserons que la norme euclidienne.

Nous considérons ici un système d'équations linéaires $AX = b$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$, ou le nombre n d'inconnus et celui m d'équations sont différents.

On distingue deux cas :

- Si ($m < n$) on a un problème sous-déterminé ou le nombre d'inconnues est plus grand que celui des équations. En générale, un tel système une infinité de solutions.
- Si ($m > n$) on a un problème surdéterminé ou le nombre d'inconnus est plus petit que celui des équations. En générale, un système surdéterminé n'admet pas de solutions.

La méthode des moindres carrés consiste à recherche parmi les $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, celui ou ceux qui minimisent la quantité

$$f(X) = \|b - AX\|_2 = \|R\|_2,$$

Appelée fonction résidu, la valeur de cet infimum (on verra que c'est un minimum)

$$\mathcal{R} = \min_{X \in \mathbb{C}^n} \|b - AX\|_2,$$

est appelé le résidu minimal et tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui le réalise, c'est à dire pour le quel $f(X) = \mathcal{R}$, est appelé solution au sens des moindres carrés du système $AX = b$.

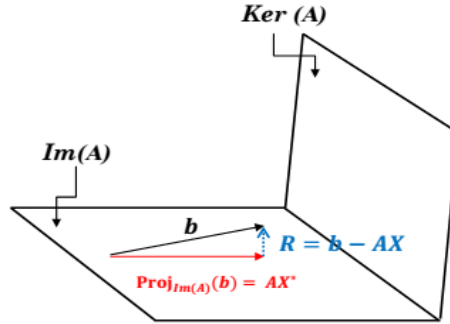


FIG. 3.2 – Problème De Moindres Carrés

Théorème 3.4.1 ([23, M.Kern. (2016), p 45]) Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

1. Le problème des moindres carrés : $\min_{X \in \mathbb{C}^n} \|b - AX\|_2^2$. Possède au moins une solution.
2. Ces solutions sont caractérisées par : $A^H AX = A^H b$. Appelée équations normales.
3. Si X et X' sont deux solutions alors $AX = AX'$. La solution est donc unique si la matrice A est de rang n .
4. La solution de norme minimale $\min_{A^H AX = A^H b} \|X\|_2^2$, est donnée par $X = A^+ b$.

Preuve. On a :

$$\min_{Y \in \text{Im}(A)} \|Y - b\|_2^2$$

Possède une solutions $Y^* \in \text{Im}(A)$, qui est la projection orthogonale de b sur $\text{Im}(A)$

$Y^* \in \text{Im}(A)$ et $\langle Y^* - b, Y \rangle = 0$, pour tout $Y \in \text{Im}(A)$.

L'ensemble des solutions du problème des moindres carrés est égal à $\Gamma_{\mathbb{C}} = \{X \in \mathbb{C}^m : AX = Y\}$

Ceci prouve l'existence d'une solution telle que $AX = AX^* = Y^*$ pour deux telles solutions soit $X^* \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ de sorte que $AX^* = Y^*$, l'équation qui caractérise Y^* peut aussi s'écrire

$$\langle AX^* - b, AX \rangle = 0, \text{ pour tout } X \in \mathbb{C}^m,$$

C'est à dire

$$\langle A^H (AX^* - b), X \rangle = 0, \text{ pour tout } X \in \mathbb{C}^m,$$

Ou encore

$$A^H (AX^* - b) = 0$$

Qui est l'équation normale du problème.

L'ensemble des solutions $\Gamma_{\mathbb{C}}$ est l'image réciproque de la projection orthogonale de b sur $\text{Im}(A)$ parallèlement au $\ker(A)$. Si X^* est l'une d'entre-elles alors $\Gamma_{\mathbb{C}} = X + \ker(A)$. La solution X de norme minimale est la projection orthogonale de 0 sur $\Gamma_{\mathbb{C}}$ donc $X \in (\ker(A))^{\perp}$ et ceci prouve que $X = A^+b$.

Remarque 3.4.1 ([21, M.Gilli. (2006), p-p 113-115]) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ on a $(A^H = A^T)$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$,

Un problème fondamental en sciences consiste à adapter un modèle à des observations qui sont entachées d'erreurs. Nous intéresserons ici au cas où le nombre d'observations est supérieur aux nombres de paramètres. Ceci nous conduisons à résoudre suivant le choix du modèle, des systèmes linéaires surdéterminés.

La “**la solution optimale**” d'un système surdéterminé peut être définie de plusieurs façons. Étant donné les observations b , les variables indépendantes X et le modèle

$f(X, \beta)$ avec β le vecteur de paramètres, la solution retenue correspond à la solution du problème de minimisation :

$$\min_{\beta} \|f(X, \beta) - b\|_2^2, \quad (3.1)$$

Dans le cas linéaire le modèle s'écrit $AX \approx b$ avec b les observations, A les variables indépendantes et X le vecteur de paramètres. Le vecteur des résidus est dans ce cas :

$$R = b - AX,$$

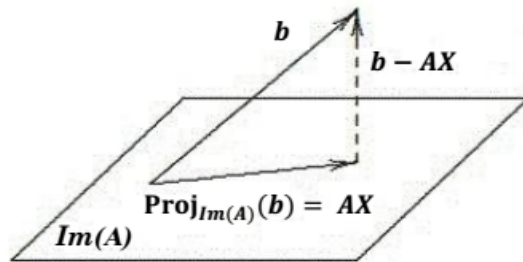


FIG. 3.3 – Plus proche à b s'obtient par une projection orthogonale de b dans l'espace engendré par les colonnes de A .

ou $AX = b$, $X \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, pas de solution. :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b \Leftrightarrow x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b,$$

b n'appartient pas à l'image de la matrice A ($Im(A)$) et X^* tel que AX^* soit aussi proche de b que possible.

On va minimiser $\left\| b - \underbrace{AX}_{AX^*=V} \right\|_2^2$ c'est-à-dire on recherche X^* telle que $AX = b$ pas de solution $\leadsto AX^* = Proj_{Im(A)}(b)$ et $\|R\|_2^2 = \|b - Proj_{Im(A)}(b)\|_2^2$.

$$\|b - AX\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} b_1 - v_1 \\ b_2 - v_2 \\ \vdots \\ b_m - v_m \end{bmatrix} \right\|_2^2 = (b_1 - v_1)^2 + (b_2 - v_2)^2 + \dots + (b_m - v_m)^2.$$

X^* estimations des **Moindres Carrés** et AX^* est la projection orthogonale de b sur $\text{Im}(A)$.

$$AX^* = \text{Proj}_{\text{Im}(A)}(b) = V$$

$$\Rightarrow AX^* - b = \text{Proj}_{\text{Im}(A)}(b) - b.$$

$$AX^* - b \in (\text{Im}(A))^\perp \Leftrightarrow AX^* - b \in \ker(A^\top)$$

$$\Leftrightarrow A^\top(AX^* - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow A^\top AX^* - A^\top b = 0$$

$$\Leftrightarrow A^\top AX^* = A^\top b,$$

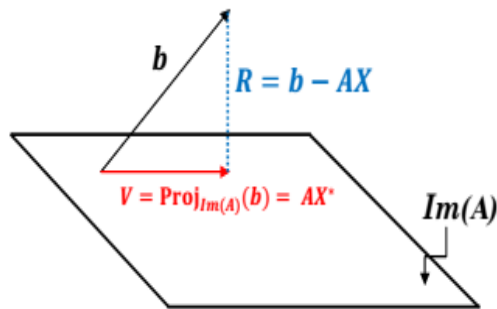


FIG. 3.4 – La projection orthogonal de b sur $\text{Im}(A)$

3.4.2 Idée intuitive de l'approche algébrique

Soit

$$\text{Im}(A) = \{Y \in \mathbb{R}^m \mid \exists X \in \mathbb{R}^n, Y = AX\},$$

Alors le problème des moindres carrés :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \|b - AX\|_2 \quad (\text{xx})$$

Signifie que l'on cherche dans l'image de A l'élément le plus "proche" de b . Il se formule, donc comme un problème de projection orthogonale de b sur le sous-espace vectoriel $\text{Im}(A)$ (voir (3.5)). Si on appelle X^* la solution de ce problème (xx) et le résidu $R = b - AX^*$ soit orthogonal à $\text{Im}(A)$ et on écrit : $b - AX = 0 \Leftrightarrow$ l'équation $AX = b$ n'admet pas de solution car $b \notin \text{Im}(A)$ donc $\nexists X \in \mathbb{R}^n$, telle que $AX = b$ donc on recherche b telle que $AX = b \curvearrowright AX^* = \text{Proj}_{\text{Im}(A)}(b)$ et

$$\|R\|_2^2 = \|b - \text{Proj}_{\text{Im}(A)}(b)\|_2^2.$$

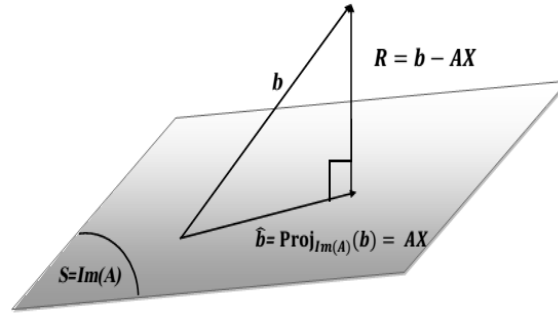


FIG. 3.5 – Projection de b sur $\text{Im}(A)$

Corollaire 3.4.1 ([17, J.Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel. (2022), p-p 8-9])

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés, le problème :

trouver $X^* \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\|AX^* - b\|_2 \leq \|AX - b\|_2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n,$$

est équivalent à : trouver $X^* \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$A^\top AX^* = A^\top b.$$

Preuve.

– On notera \widehat{b} la projection orthogonale de b sur $\text{Im}(A)$, on a donc par définition.

$$\widehat{b} \in \text{Im}(A), b - \widehat{b} \in \text{Im}(A)^\perp.$$

– On utilise la proposition (3.1.1) avec $E = \mathbb{R}^m$, $S = \text{Im}(A)$, $y = b$,

$$\begin{aligned} \|AX^* - b\|_2 \leq \|AX - b\|_2, \forall X \in \mathbb{R}^n &\Leftrightarrow \|AX^* - b\|_2 \leq \|z - b\|_2, \forall z \in \text{Im}(A) \\ &\Leftrightarrow AX^* = \widehat{b}. \end{aligned}$$

– Montrons que : $AX^* = \widehat{b} \Leftrightarrow A^\top AX^* = A^\top \widehat{b}$.

L'implication (direct) est évidente.

Montrons l'implication réciproque :

$$\begin{aligned} A^\top AX^* = A^\top \widehat{b} &\Leftrightarrow A^\top (AX^* - \widehat{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (AX^* - \widehat{b}) \in \ker(A^\top) = \text{Im}(A)^\perp \text{ (d'après (1.7.3))}, \end{aligned}$$

or $\widehat{b} \in \text{Im}(A)$, donc $(AX^* - \widehat{b}) \in \text{Im}(A)$, alors

$$(AX^* - \widehat{b}) \in \text{Im}(A) \cap \text{Im}(A)^\perp \Rightarrow AX^* - \widehat{b} = 0 \Rightarrow AX^* = \widehat{b}.$$

D'où l'équivalence.

– Montrons maintenant que :

$$A^\top AX^* = A^\top \widehat{b} \Leftrightarrow A^\top AX^* = A^\top b, \quad (3.4)$$

Par définition de \widehat{b} , on a $b - \widehat{b} \in \text{Im}(A)^\perp = \ker(A^\top)$, donc $A^\top (b - \widehat{b}) = 0$ donc :

$$A^\top b = A^\top \widehat{b},$$

Ce qui termine de démontrer cette dernière équivalence.

On retrouve donc par un raisonnement faisant intervenir les projections que les équations normales sont des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le problème de minimisation. \square

Exemple 3.4.1 On a une système d'équations linéaire.

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}^X = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}^b$$

en fait comme on dit que c'est trois droites n'est pas d'intersections commune ça veut dire qu'il n'ya pas de solution à cette équation ($AX = b$) c'est que on a on s'est pas arrêté on a dit qu'on allait chercher un X^* qui minimisent l'erreur dans la résolution d'équations donc ce qu'on avait dit c'est que si on peut pas du fait qu'on a une équation ($AX = b$) qu'il n'y a pas de solution qu'est ça veut dire qu'il n'y a pas de solution, ça veut dire que $b \notin \text{Im}(A)$ à ce moment-là on qu'on pouvait chercher une solution on va dire solution optimale à cette équation ($AX = b$).

On a $AX - b = 0 \Leftrightarrow AX = b$ n'admet pas de solution car $b \notin \text{Im}(A)$ donc $\nexists X \in \mathbb{R}^n$, telle que $AX = b$ donc on recherche X telle que :

$$AX = b \curvearrowright AX^* = Proj_{\text{Im}(A)}(b) \text{ et } \|R\|_2^2 = \|b - Proj_{\text{Im}(A)}(b)\|_2^2$$

$$A^\top AX^* = A^\top b,$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}^{A^\top} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^A X^* = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}^{A^\top} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}^b \Leftrightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}}^{A^\top A} \overbrace{\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}}^{X^*} = \overbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}}^{A^\top b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 9 \\ 1 & 6 & 4 \end{array} \right] \\ L_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \end{array} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 9 \end{array} \right] \\ L_1 \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 9 \end{array} \right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_3 = L_1 - L_2 \times 6 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -35 & -15 \end{array} \right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_4 = \frac{L_3}{-35} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-15}{-35} \end{array} \right] \\ L_5 = L_1 - L_4 \times 6 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array} \right] \end{cases}$$

$X^* = \begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ c'est la solution du problème des **moindres Carrés** Linéaires.

C'est le résultat qui minimisent l'erreur dans la solution de l'équation ($AX = b$) c'est qu'on a dit que ça minimise les erreurs.

On va calculer $AX^* - b = \begin{bmatrix} \frac{17}{7} - 2 \\ \frac{16}{7} - 1 \\ \frac{13}{7} - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} \\ \frac{-15}{7} \end{bmatrix}$, donc ça c'est l'erreur que je fais

quand je dis la solution la plus proche c'est la solution optimale est la solution la plus proche qui minimisent l'erreur,

$$\|b - AX^*\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ \frac{15}{7} \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{315}{49}.$$

$\Rightarrow \|b - AX^*\|_2 = \sqrt{\frac{315}{49}} = 2.5355$, c'est l'erreur des **moindres Carrés**.

Exemple 3.4.2 Soient $(1, 2), (2, 1), (0, 1), (-1, 0)$ trois points et $y = f(x) = a_1x + a_2$ tel que

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b = 0 \\ f(0) = 0 + b = 1 \\ f(2) = 2a + b = 1 \\ f(1) = a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}^A \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_X = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^b \end{matrix},$$

$AX = b$ pas de solution.

$$A^T AX^* = A^T b$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{A^T} \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}^A X^* = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{A^T} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^b \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}^{A^T A} \overbrace{\begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{bmatrix}}^{X^*} = \overbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}}^{A^T b} \end{matrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a_1^* + 2a_2^* = 4 \\ 2a_1^* + 4a_2^* = 4 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{bmatrix}}^{X^*} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \text{ c'est la solution du problème des } \mathbf{moindres Carrés Linéaires}.$$

$y = a_1^*X + a_2^* = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ est la droite qui à cette équation qui va minimiser l'erreur et est une droite qui passe par tous les points donc ça va être le résultat de la solution cherchée du problème des **moindres Carrés**.

3.5 Application dans MATLAB

```
%Programme Matlab%  
x=imread('cameraman.tif');  
x=imresize(x, [256 256]);  
x1=double(x);  
sigma=25;  
epsilon=normrnd(0,1,256,256);  
y1=x1+sigma*epsilon;  
y=round(y1);  
y=uint8(y);  
%subplot(1,2,1);  
%imshow(x);x  
%subplot(1,2,2);  
%imshow(y);  
%pause
```

```
y2=double(y);
I1=bitget(y2,1);
I2=bitget(y2,2);
I3=bitget(y2,3);
I4=bitget(y2,4);
I5=bitget(y2,5);
I6=bitget(y2,6);
I7=bitget(y2,7);
I8=bitget(y2,8);
%subplot(2,4,1);
%imshow(I1);
%subplot(2,4,2);
%imshow(I2);
%subplot(2,4,3);
%imshow(I3);
%subplot(2,4,4);
%imshow(I4);
%subplot(2,4,5);
%imshow(I5);
%subplot(2,4,6);
%imshow(I6);
%subplot(2,4,7);
%imshow(I7);
%subplot(2,4,8);
```

```

%imshow(I8);

%pause

II1=double(I1);

II2=double(I2);

II3=double(I3);

II4=double(I4);

II5=double(I5);

II6=double(I6);

II7=double(I7);

II8=double(I8);

[thr1,sorh1,keepapp1] = ddencmp('den','wv',II1);

ID1 = wdencmp('gbl',II1,'sym4',2,thr1,sorh1,keepapp1);

[thr2,sorh2,keepapp2] = ddencmp('den','wv',II2);

ID2 = wdencmp('gbl',II2,'sym4',2,thr2,sorh2,keepapp2);

[thr3,sorh3,keepapp3] = ddencmp('den','wv',II3);

ID3 = wdencmp('gbl',II3,'sym4',2,thr3,sorh3,keepapp3);

[thr4,sorh4,keepapp4] = ddencmp('den','wv',II4);

ID4 = wdencmp('gbl',II4,'sym4',2,thr4,sorh4,keepapp4);

[thr5,sorh5,keepapp5] = ddencmp('den','wv',II5);

ID5 = wdencmp('gbl',II5,'sym4',2,thr5,sorh5,keepapp5);

[thr6,sorh6,keepapp6] = ddencmp('den','wv',II6);

ID6 = wdencmp('gbl',II6,'sym4',2,thr6,sorh6,keepapp6);

[thr7,sorh7,keepapp7] = ddencmp('den','wv',II7);

ID7 = wdencmp('gbl',II7,'sym4',2,thr7,sorh7,keepapp7);

```

```

[thr8,sorh8,keepapp8] = ddencmp('den','wv',II8);
ID8 = wdencmp('gbl',II8,'sym4',2,thr8,sorh8,keepapp8);
for i=1 :256;
    for j=1 :256;
        yd(i,j)=ID1(i,j)+ID2(i,j)*2+ID3(i,j)*(2^2)+ID4(i,j)*(2^3)+ID5(i,j)*(2^4)
                +ID6(i,j)*(2^5)+ID7(i,j)*(2^6)+ID8(i,j)*(2^7);
    end
end
yd1=uint8(yd);
[thr0,sorh0,keepapp0] = ddencmp('den','wv',y1);
yd0 = wdencmp('gbl',y1,'sym4',2,thr0,sorh0,keepapp0);
yd0=uint8(yd0);
[thr9,sorh9,keepapp9] = ddencmp('den','wv',yd);
yd2 = wdencmp('gbl',yd,'sym4',2,thr9,sorh9,keepapp9);
yd3=uint8(yd2);
[thr10,sorh10,keepapp10] = ddencmp('den','wv',yd2);
yd4 = wdencmp('gbl',yd2,'sym4',2,thr10,sorh10,keepapp10);
yd5=uint8(yd4);
[thr11,sorh11,keepapp11] = ddencmp('den','wv',yd4);
yd6 = wdencmp('gbl',yd4,'sym4',2,thr11,sorh11,keepapp11);
yd7=uint8(yd6);
subplot(1,4,1);
imshow(x);
subplot(1,4,2);

```

```
imshow(y);  
subplot(1,4,3);  
imshow(yd7);  
subplot(1,4,4);  
imshow(yd0);  
psnr1=PS(x,yd1);  
psnr0=PS(x,yd0);
```



FIG. 3.6 – Exemple de Trouver la solution par la restauration d'image dans **matlab**

Conclusion

Nous avons essayé de donner une définition aux problème de projection sur le sous espaces des vecteurs propres (**problème mal - posés linéaire**).

- La méthode de résolution d'un problème de moindre carrés (méthode de projection sur les sous - espaces des vecteurs propres).

Nous espérons que ce travail contribue à éclairai quelques méthode d'analyse numérique concernant la résolution des **problèmes mal - posés linéaire**.

Bibliographie

- [1] A.Quarteroni, R.Sacco, F.Saleri. (2008), **Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications**, Dipartimento di Matematica Politecnico di Milano, Milano, Italia, p 10.
- [2] Å Bjrck. (1996), **Numerical Methods for Least Squares Problems**, Philadelphia, SIAM.
- [3] A.J.Laub. (1948), **Matrix Analysis for Scientists et engineers**.
- [4] A.K.Cline. (1973), **An elimination method for the solution of linear least squares problems**, SIAM.J.Numerique analysis, p-p 283-285.
- [5] A.S.Householder, F.L.Bauer.(1960), **On certain iterative methods for solving linear Systems**, Numerische Mathematik.
- [6] A.Settart, K.Aztz. (1973), **A generalization of the additive correction methods for the iterative solution of matrix equations**, SIAM.J.Numer.Anal.
- [7] B. Landreau, D. Schaub, **Notes de Cours d'algèbre Linéaire.Universit d'Angers**,Département de Math ematiques, p 1.
- [8] B.Vallette, V.Dotsenko, S.Shadrin. (2015), **L'algèbre Linéaire Pour Tous**, Laboratoire J.A.Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, France.(math.univ-paris13.fr).

- [9] D.Ryan, G.Trapp. (1973), **Partitioning methods for accelerating Gauss-Seidel iterations**, Springer Proceedings of West Virginia Academy of Science.
- [10] E.Zenou. (2013), **Introduction à MATLAB**, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace Formation Supaero, p 4. (<http://www.isae.fr>, oatao.univ-toulouse.fr).
- [11] E.L.Wachspress. (1966), **Itérative solution of elliptic Systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [12] F.Chatelin,W.L.Mtranker. (1982), **Linear Algebra and its applications, Accélération by aggregation of successive approximation methods**.
- [13] G.Letac. (1982), **Advances in Applied Probability : Cours d'algèbre linéaire**, 2 ème année, Laboratoire de Statistique et Probabilités. Université Paul Sabatier, Toulouse, France. ([cambridge.org](http://www.cambridge.org)).
- [14] J.Beuneu - Rairo. (1983), **Analyse numérique : Méthodes de projection-minimisation pour les problèmes linéaires**, p-p 221-222.
- [15] J.Fresnel. (1997), **Algebre des matrices**, Hermann, Paris.(fntic.univ-ouargla.dz).
- [16] J.Grifone. (2011), **Algèbre linéaire**, Cépaduès éditions, Toulouse.
- [17] J.Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel. (2022), **Projections et moindres carrés**, Polytechnique Montréal, p-p 7-9
- [18] LN.Trefethen, D.Bau III. (1997), **Numerical linear algebra**, p 50.
- [19] M.Bierlaire. (2006), **Problème des moindres carrés**, EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC. (books.google.com).
- [20] M.Gilli. (2006), **Méthodes Numériques**, Département d'économétrie Université de Genève. (unige.ch).

- [21] M.Houimdi. (2021), **Algèbre linéaire, Algèbre bilinéaire - cours et exercices corrigés**, Université Cadi Ayyad Faculté es sciences-Semlalia, p-p 397-400. (topmath.free.fr).
- [22] M.Kern. (2016), **Problèmes inverses : aspects numériques**, école Supérieure D'ingénieurs Léonard De Vinci, p-p 41-44. (books.google.com).
- [23] M.Romagny. (2011-2012), **Réduction des endomorphismes**, M1 Maths éducation et Formation UPMC.
- [24] M.Rumin. (2014), **Quelques applications de l'algèbre linéaire**, Notes de cours Math S2 année,p 10
- [25] N.Gastinel. (1966), **Analyse numérique linéaire**, Hermann, Paris.
- [26] O.Axelsson. (1977), **Solution of linear Systems of equations : iterative methods**, Sparse Matrix Techniques, Springer-Verlag,.
- [27] P.Malbos. (2021), **Analyse matricielle et algèbre linéaire appliquée**, p-p 2-3. (hal.archives-ouvertes.fr)
- [28] P.Haïssinsky. (1973), **Inventiones mathematicae**, 2015 - Springer Proceedings of West Virginia Academy of Science, Université de Paul Sabatier, 45, p-p 2-3.
- [29] RT.Behrens, LL.Scharf. (1994), **Signal Processing Applications of Oblique Projection Operators**, IEEE Transactions on signal Processing, (ieeexplore.ieee.org), p p1413-1424.
- [30] S.Balac. (1999), **Débuter avec matlab**, Centre de Mathématiques INSA de Lyon - Université de Bretagne Occidentale, Département de Mathématiques. (www.mathswork.com), (<http://emmanuelgenet.free.fr>).
- [31] S.Kayalar, HL.Weinert. (1989),. **Mathematics of Control (Signals and Systems : Oblique Projections)**, p-p 33-45.

- [32] S.Gugger, J.Howard. (2018), **Maths PT : Exercices Incontournables**, Dunod,, p-p 12-13. (URL[https ://www.fast](https://www.fast)).
- [33] S.Kantel, J.Stein. (1974), **Least-square acceleration of iterative methods for linear equations**, Journal of optimization theory and applications.
- [34] V.Guedj. (2010), **Préparation à l’Agrégation Interne : Quelques aspects des systèmes dynamiques**, p 15. (perso.univ-rennes1.fr).
- [35] Y.Tillé. (2008), **Résumé du Cours d’économétrie**, p 2. (unine.ch).

AnnexeA :Logiciel Matlab

Qu'est-ce-que le Langage MATLAB ?

- Le langage Matlab est un langage de programmation interactif de calcul scientifique et d'environnement mathématique utilisés pour le traitement de données. et de résolution numérique de nombreux problèmes mathématiques ou appliquée. En autre, le matlab dispose de potentialités graphiques importantes.[10, **E.Zenou. (2013), p 14**]

- Matlab est utilisées comme abréviation de **MATrix LABoratory** a été écrit à l'origine pour faciliter la gestion de la programmation matricielle avancée par les projets **LINPACK** et **EISPACK** qui, ensemble, fournissent une programmation de résolution matricielle de pointe. avant de tout le matlab c'est un logiciel (payant) proposant une interface graphique vers un éditeur de code en matlab, et un outil de débbugging pour exécuter des programmes en code pas à pas. ou bien définiée comme programme de calcul matriciel.Language matlab a été créé par deux personnes le premier **Cliff Muller** et le second **Jack Little** et le fondateur de Mthworks et est le co-auteur de la mise en page Matlab.Jack est titulaire d'un baccalauréat en génie électrique et en informatique de l'université MIT en 1978 et d'un diplôme de MSEE de l'université de stanford en 1980. Falaise Muller il est professeur de mathématiques et d'informatique depuis plus de vingt ans à l'université du Michingan, à l'université de stanford et à l'université du Vouveau-Mexique. Il a passé cinq ans chez deux fabricants de matériel, l'organisation Intel Hepercube et Ardent Computer, avant de

rejoindre Mathworks., la société mère de Matlab. Il est également l'auteur du premier logiciel MATLAB. [30, **S.Balac. (1999), p 5**]

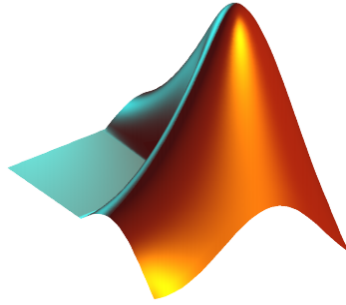


FIG. 3.7 – Langage MATLAB

المخلص

يتعامل عملنا مع طريقة الإسقاط على الفضاءات الفرعية للتشابه في الفضاء المتجه، يحتوي الفصل الأول على تعريفات عامة وخصائص تتعلق بمسافات الأشكال الداخلية - إلغاء كثيرات الحدود - كثيرات الحدود المميزة والحد الأدنى، ثم تعريف إسقاط التشابه المميز لها (الحد الأدنى متعدد الحدود - الأقطار، القيم الذاتية، التعددية الجبرية، المتجهات الذاتية، التعددية الهندسية، الفضاءات المتجانسة المرتبطة، العلاقة بين التعددية الجبرية والهندسية، أبعاد الفضاءات الفرعية). و أخيرا أخذنا مثالاً لمشكلة الإسقاط (مشكلة غير مطروحة).

- إسقاط المتجه b على $Im(A)$ بالتوازي مع $Ker(A)$ ، بحيث A متماثل، أو $Im(A) \perp Ker(A)$ و في الأخير عرضنا مثالاً لمعالجة الصور (استعادة الصورة) على **matlab**، ثم يأتي حل لمشكلة طرحها طريقة الإسقاط (الإسقاط على فضاء المتجهات الذاتية).

الكلمات المفتاحية :

طريقة الإسقاط - التشابه المميز - المتجهات الذاتية - الفضاءات المتجانسة - الفراغات الفرعية .

Résumé

Notre travail porte sur la méthode de projection sur les sous-espaces propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Le premier chapitre contient, définitions générales et propriétés concernant les espaces des endomorphismes - polynômes annulateurs - Caractéristique et polynômes minimal, puis la définition d'un endomorphisme projection leur caractéristique ((polynômes minimal - diagonalité, valeurs propres, multiplicité algébrique, vecteurs propres, multiplicité géométrique, sous-espaces propres associés, relation entre multiplicité algébrique et géométrique, dimension des sous-espaces propres.)

Finalement on a pris un exemple de problème de projection (problème mal-posé).

La projection du vecteur b sur $Im(A)$ Parallèlement à $Ker(A)$ telle que A symétrique, ou $Im(A) \perp Ker(A)$

Enfin on a exposé un exemple de traitement d'image (Restauration d'image) sur **matlab**, puis arrive une solution d'un problème mal-posé par la méthode de projection (projection sur l'espace des vecteurs propres).

Les mots clés :

La méthode de projection - projection leur caractéristique - vecteurs propres - espaces propres associés - espaces propres.

Abstract

Our work concerns the method of projection on the eigensubspaces of an endomorphism of a vector space. The first chapter contains, general definitions and properties concerning the spaces of endomorphisms - canceling polynomials - Characteristic and minimal polynomials, then the definition of an endomorphism projection their characteristic (minimal polynomials - diagonality, eigenvalues, algebraic multiplicity, eigenvectors, geometric multiplicity, associated eigensubspaces, relation between algebraic and geometric multiplicity, dimension of eigensubspaces.

Finally we took an example of a projection problem ill-posed problem).

-The projection of the vector b onto $Im(A)$ Parallel to $Ker(A)$ such as A symmetric, or $Im(A) \perp Ker(A)$

- Finally we exposed an example of image processing (Image Restoration) on matlab, then comes a solution of a problem ill-posed by the projection method (projection onto the space of eigenvectors).

Keywords:

method of projection - projection their characteristic - eigenvectors - associated eigenspaces - eigensubspaces.