

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Mathématiques Appliquées**”

Option : **Statistique**

Par

BAADACHE Rebiha

Titre :

Estimation des paramètres de copule par la méthode
maximum de vraisemblance

Devant le Jury :

Pr. **MERAGHNI Djamel** UMKB Président

Dr. **ABDELLI Jihane** UMKB Encadreur

Dr. **CHINE Amel** UMKB Examinatrice

26/06/2022

Dédicace

*Avec mes sentiments de gratitude les plus profonds, Je dédie ce modeste travail :
A la noble personne de ma vie, qui a travers tous j'apprendre bien la vie heureuse,
mon cher Papa « **Lahcen** », qui se montrer patient, compréhensif et encourageant.*

*Mon adorable Maman « **Laamria** » qui n'a jamais cessé de ménager ses efforts
pour que j'atteigne ce niveau.*

A mes chers frères et soeurs : Noura, Oum el khair, Amel, Rabeh, Amine, Narimane, Dina, Rahma, et les enfants de mes soeurs : Yousef, Abd el moumene, Mouhamed, Abd allah, Rassil, Rattil, abd el rahmane, Iyad.

À mes collègues et mes amies pour les sympathiques moments qu'on a passé ensemble : Rania, Ikram, Soumia, Hiba, Chahra, Amira, Sana, Salma, Rayane, Zainab, Hadda.

« à tous qui me connus »

Remerciements

*Au début et avant tout, je rends grâce à **Dieu ALLAH** le tout puissant qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour achever ce travail.*

*Tout d'abord, je remercie **Dr. Abdelli Jihane** pour avoir proposée, accepté d'encadré ce mémoire. Je la remercie pour sa gentillesse, sa patience, sa simplicité et ses précieux conseils.*

Mes remerciements vont également aux membres de jury d'avoir accepté de juger mon travail : **Pr. MERAGHNI Djamel** et **Dr. CHINE Amel**.

Je remercie mes collègues et mes amies pour les sympathiques moments qu'on a passé ensemble.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
1 Théorie des copules	3
1.1 Notion de copule et ses propriétés	3
1.1.1 Définition d'une copule bivariée	4
1.1.2 Théorème de Sklar	5
1.1.3 Bornes de Fréchet-Hoeffding	6
1.1.4 Propriétés des copules	6
1.2 Densité d'une copule	8
1.3 Exemple de copules usuelles	8
1.3.1 Copule d'indépendance	8

1.3.2 Copule Gaussienne	9
1.3.3 Copule de Student	9
1.3.4 Copules Archimédiennes	10
1.3.5 Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern	11
1.3.6 Copules de valeurs extrêmes	12
1.4 Les mesures de dépendance	12
1.4.1 Coefficient de corrélation de Pearson	12
1.4.2 Le coefficient de corrélation de Kendall et le rho de Spearman	13
2 Estimation paramétrique des copules et application	16
2.1 Méthode du maximum de vraisemblance	16
2.1.1 Maximum de vraisemblance pour les copules Archimédiennes	19
2.1.2 Estimation maximum de vraisemblance de quelques copules	21
2.1.3 Estimation du maximum de vraisemblance simulée	23
2.2 Méthode des moments	25
2.2.1 Estimateur basé sur le tau de Kendall	26
2.2.2 Estimateur basé sur le rho de Spearman	27
2.3 Application	28
Conclusion	33
Bibliographie	34
Annexe : Abréviations et Notations	37

Table des figures

1.1	Densité de copules Clayton, Frank, Gumbel et Joe.	11
2.1	Graphiques des générateurs d'Archimède répertoriés dans le tableau 2.1	25
2.2	Nuage de points de la copule Farlie–Gumbel–Morgenstern, première ligne $\theta = -1$, deuxième ligne $\theta = -0.5$, troisième ligne $\theta = 0.5$, et quatrième ligne $\theta = 1$.	30
2.3	Nuage de points de la copule Gumbel, première ligne $\theta = 2$, deuxième ligne $\theta = 5$, troisième ligne $\theta = 10$, et quatrième ligne $\theta = 20$.	32

Liste des tableaux

1.1	Générateurs des principales copules Archimédiennes	11
2.1	Familles d'Archimède avec générateurs à un paramètre couramment utilisés et transformées inverses de Laplace-Stieltjes.	24
2.2	Estimation des paramètres de copule Farlie–Gumbel–Morgenstern.	29
2.3	Estimation des paramètres de copule Gumbel.	31

Introduction

La copule est un outil relativement innovant pour modéliser la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires. La connaissance de cet outil probabiliste est essentielle à l'appréhension de nombreux domaines d'applications.

Le concept de copule a été introduit par Sklar en 1959 pour résoudre un problème de probabilité énoncé par Maurice Fréchet. À l'époque, Sklar et Schweizer travaillent sur les travaux de Menger concernant les espaces métriques aléatoires (Probabilistic Metric Space ou PMS), qui sont une généralisation de l'espace métrique usuel introduit par Fréchet en 1906. Même si les copules occupent une place importante dans l'oeuvre de Sklar et Schweizer, elles ne sont pas l'objet central de leurs recherches. L'utilisation des copules par Sklar et Schweizer est assez originale, elles interviennent pour résoudre certains problèmes et ne font pas l'objet véritablement d'études appropriées.

Pendant de nombreuses années, les copules sont peu (ou pas) utilisées en statistiques. Il y a les travaux sur la dépendance de Kimeldorf et Sampson dans les années 1975 ou encore les recherches de Paul Deheuvels à la fin des années 1970, mais l'intérêt pour la recherche dans ce domaine s'est plutôt développé durant les années 80 et 90. Par exemple, les copules Archimédiennes apparaissent dans Genest & MacKay [1986] et Marshall & Olkin [1988] et ensuite dans Joe [1997]. Elles sont également devenues des outils employés couramment dans plusieurs do-

maines. On cite par exemple les travaux de Li [2000], Cherubini & Luciano [2002], et Bennet & Kennedy [2004]. Aussi les copules sont de plus en plus utilisées pour modéliser les distributions multidimensionnelles avec des marges continues en hydrologie (Salvadori, De Michele, Kottegoda, et Rosso [2007]), en sciences actuarielles (Frees et Valdez [1998]) ou en finance (Cherubini, Vecchiato, et Luciano [2004]; Mc-Neil, Frey, et Embrechts [2005]). [\[18\]](#)

Dans ce travail, on s'intéresse à l'estimation des paramètres de copule par la méthode maximum de vraisemblance.

Ce mémoire est constitué de 2 chapitre :

Chapitre1 : Le premier chapitre est une introduction mathématique sur les copules. Nous présentons les définitions de base des associations bivariées associées à cette théorie, en particulier la théorie de Sklar et Bornes de Frechet-Hoeffding. Ensuite, nous donnons quelques exemples de copules usuelles tels que les copules Archimédiennes et les copules de valeurs extrêmes...etc. Enfin, nous étudions les mesures de dépendance de tau de Kendall et rho de Spearman.

Chapitre2 : Le deuxième chapitre est une évaluation paramétrique des associations, où nous parlons de deux méthodes, La première méthode est la méthode du maximum de vraisemblance dans laquelle on étudie la probabilité maximum des masses d'Archimède, la deuxième méthode est la méthode des moments, on étudie l'estimateur basé sur l'esprit de tau Kendall et rho de Spearman, avec l'application sur estimation des paramètres de la copule de Farlie - Gumbel - Morgenstern et la copule de Gumbel.

Chapitre 1

Théorie des copules

L'étude des copules et de leurs applications en statistique est un phénomène assez moderne. Dans ce chapitre, nous présentons la notion de copule, définitions et propriétés, ainsi que les plus célèbres familles des copules.

1.1 Notion de copule et ses propriétés

Définition 1.1.1 *Soit (X, Y) un couple de v.a.s, la loi du couple est caractérisée par la fd bivariée H définie comme ceci*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]. \quad (1.1)$$

On appelle lois marginales, les lois de X et de Y prises séparément. On peut exprimer les fds de ces lois marginales en fonction de H . Par exemple, pour X on obtient

$$F(x) := P[X \leq x] = \lim_{y \rightarrow +\infty} H(x, y).$$

On rappelle que les vas X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = F(x)G(y),$$

où G est la fd de Y .

Soit la fonction $F^{-1}(t)$ définie par

$$F^{-1}(t) := \inf \{x \in \mathbb{R}^2 / F(x) \geq t\}; \text{ pour } t \in [0, 1],$$

la fonction quantile qui est l'inverse de la fd F .[\[2\]](#)

1.1.1 Définition d'une copule bivariée

Définition 1.1.2 *Une copule à 2-dimensions est une 2-sous-copule C dont le domaine est I^2 . De manière équivalente, une copule est une fonction C de I^2 dans I avec les propriétés :*

1. Pour chaque u, v dans I ,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v), \tag{1.2}$$

et

$$C(u, 1) = u \text{ et } C(1, v) = v. \tag{1.3}$$

2. Pour tout u_1, u_2, v_1, v_2 dans I tel que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \tag{1.4}$$

Exemple 1.1.1 La fonction $M(u, v) = \min(u, v)$, $\forall u, v \in I$, définit une copule.

En effet :

- $\forall u, v \in I, \min(u, 0) = \min(0, v) = 0 \Rightarrow M$ vérifie (1.2) ;
- $\forall u, v \in I, \min(u, 1) = u$ et $\min(1, v) = v \Rightarrow M$ vérifie (1.3) ;
- de même, $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$,

$\min(u_2, v_1) \leq \min(u_2, v_2)$ et $\min(u_1, v_2) \leq \min(u_1, v_1) \Rightarrow M$ vérifie (1.4).

Par conséquent, M est une copule.

1.1.2 Théorème de Sklar

Théorème 1.1.1 (Sklar 1959.) Soit F une fonction de répartition conjointe avec des marges F_1 et F_2 . Alors, il existe une copule C telle que pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (1.5)$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= P(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), F_2(X_2) \leq F_2(x_2)) \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1.1 Soit F une fonction de répartition conjointe avec les marges F_1, F_2 . Soient F_1^{-1}, F_2^{-1} les fonctions inverses de F_1, F_2 c'est-à-dire :

$$F_j^{-1}(u) = \inf\{x; F_j(x) \geq u\}, \quad u \in (0, 1).$$

Alors pour tout $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, on a :

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)).$$

Cette extraction sera utile pour l'estimation de la copule. [\[20\]](#)

1.1.3 Bornes de Fréchet-Hoeffding

Définissons tout d'abord deux bornes :

1. **Borne inférieure de Fréchet :**

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0).$$

2. **Borne supérieure de Fréchet :**

$$M(u, v) = \min(u, v).$$

Théorème 1.1.2 *Soit une copule C quelconque, telle que : $\forall u, v \in [0, 1]$,*

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v). \tag{1.6}$$

1.1.4 Propriétés des copules

Soit C_1 et C_2 deux copules, on a les propriétés :

– **Ordre :**

On dit que $C_1 < C_2$ si :

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v), \quad \text{pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2.$$

– Concavité :

Une copule est dite concave si on a :

$$C(\alpha a + (1 - \alpha)c, \alpha b + (1 - \alpha)d) \geq \alpha C(a, b) + (1 - \alpha)C(c, d),$$

pour tout α, a, b, c, d dans $[0, 1]$.

– Convexité :

Elle est dite convexe si on a :

$$C(\alpha a + (1 - \alpha)c, \alpha b + (1 - \alpha)d) \leq \alpha C(a, b) + (1 - \alpha)C(c, d),$$

pour tout α, b, c, d dans $[0, 1]$.

– Dérivées partielles :

pour tout $u, v \in [0, 1]$,

$$0 \leq \partial_u C(u, v) \leq 1 \text{ et } 0 \leq \partial_v C(u, v) \leq 1.$$

– Continuité uniforme :

Une copule C est uniformément continue sur son domaine, pour tout u, v dans $[0, 1]^2$,

$$|C(u) - C(v)| \leq \sum_{i=1}^n |v_k - u_k|.$$

1.2 Densité d'une copule

Définition 1.2.1 *Si la densité c associée à la copule C existe, alors est définie par :*

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}. \quad (1.7)$$

Nous pouvons exprimer la densité d'un couple aléatoire (X_1, X_2) en fonction de la densité de sa copule et de ses fonctions de répartition marginales $F_1(x_1), F_2(x_2)$ par :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2).$$

1.3 Exemple de copules usuelles

1.3.1 Copule d'indépendance

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, nous avons :

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y). \quad (1.8)$$

Ainsi, le théorème suivant illustrera la copule d'indépendance.

Théorème 1.3.1 *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues. X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si la copule*

$$C_{X_1, X_2}(u, v) = uv.$$

1.3.2 Copule Gaussienne

Une copule C est dite gaussienne de paramètre $\rho \in]-1, 1[$, si pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, nous avons :

$$C(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)). \quad (1.9)$$

Nous pouvons donc écrire la copule gaussienne sous la forme :

$$C(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left(-\frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt.$$

1.3.3 Copule de Student

Soient $\rho \in [-1, 1]$ le coefficient de corrélation de Pearson, T^{-1} l'inverse d'une fonction de répartition de Student centrée réduite univariée,

$$T_{\rho, \kappa}(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{\kappa(1-\rho^2)}\right)^{-(\kappa+2)/2} ds dt,$$

la distribution de la loi de Student de dimension 2 où $\kappa \geq 0$ représente le nombre de degrés de liberté. Alors, pour $(u, v) \in [-1, 1]^2$,

$$\begin{aligned} C(u, v) &= T_{\rho, \kappa}(T^{-1}(u), T^{-1}(v)) \\ &= \int_{-\infty}^{T^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{\kappa(1-\rho^2)}\right)^{-(\kappa+2)/2} ds dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pour obtenir la densité de la copule de Student, il suffit d'utiliser la définition de

la densité de copule :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (T^{-1}(u), T^{-1}(v))$$

$$= \frac{\kappa}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\Gamma(\kappa/2)^2}{\Gamma((\kappa+1)/2)^2} \frac{\left(1 + \frac{s^2+t^2-2\rho st}{\kappa(1-\rho)}\right)^{-(\kappa+2)/2}}{\left(1 + \frac{u^2}{\kappa}\right) \left(1 + \frac{v^2}{\kappa}\right)^{-(\kappa+2)/2}},$$

où Γ représente la fonction gamma, $f(u, v)$ la densité jointe d'une loi de Student et $f(u)$, $f(v)$ les densités marginales.

1.3.4 Copules Archimédiennes

Une copule est dite Archimédienne si elle est définie par :

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (1.11)$$

Cette copule possède les propriétés suivantes :

1. Symétrie :

$$C(u, v) = C(v, u), \forall (u, v) \in [0, 1]^2.$$

2. Associativité :

$$C(C(u, v), z) = C(u, C(v, z)), \forall (u, v, z) \in [0, 1]^3.$$

3. Densité :

$$c(u, v) = -\frac{\varphi''(C(u, v))\varphi'(u)\varphi'(v)}{(\varphi'(C(u, v)))^3}.$$

4. Invariance par homogénéité : Pour tout $\alpha > 0$, $\alpha\varphi$ est aussi un générateur de la copule C .

Le tableau suivant regroupe quelques types de copules archimédiennes. [21]

Copule	$\varphi_\alpha(t)$	$C_\alpha(u, v)$
Clayton	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$	$[\max(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1, 0)]^{-1/\alpha}$, $\alpha \in [-1, +\infty[\setminus \{0\}$
Frank	$-\ln\left(\frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1}\right)$	$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1 + (\exp(-u\alpha) - 1)(\exp(-v\alpha) - 1)}{\exp(-\alpha) - 1}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Gumbel	$(-\ln t)^\alpha$	$\exp\left(-((-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha)^{1/\alpha}\right)$, $\alpha \in [1, +\infty[$
Joe	$-\ln(1 - (1 - t)^\alpha)$	$1 - [(1 - u)^\alpha + (1 - v)^\alpha - (1 - u)^\alpha(1 - v)^\alpha]^{1/\alpha}$, $\alpha \in [1, +\infty[$

TAB. 1.1 – Générateurs des principales copules Archimédiennes

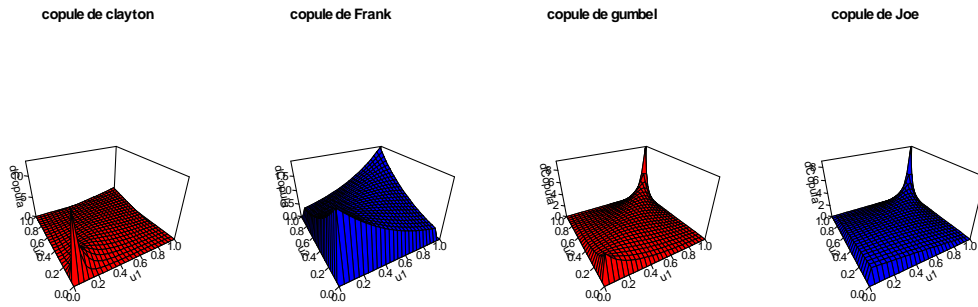


FIG. 1.1 – Densité de copules Clayton, Frank, Gumbel et Joe.

1.3.5 Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern

La copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern est définie par :

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \quad \theta \in [-1, 1], \quad (1.12)$$

et sa copule densité associée est :

$$c_\theta(u, v) = 1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v).$$

1.3.6 Copules de valeurs extrêmes

Définition 1.3.1 *Soit k une constante réelle positive. Une copule de valeurs extrêmes est une copule qui vérifie la relation suivante :*

$$C(u^k, v^k) = C^k(u, v). \quad (1.13)$$

Exemple 1.3.1 *La copule de Gumbel est une copule de valeurs extrêmes. En effet, pour une constante k réelle positive, on a*

$$\begin{aligned} C(u^k, v^k) &= e^{-[(-\ln(u^k))^\theta + (-\ln(v^k))^\theta]^{1/\theta}} = e^{-[k^\theta [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}} \\ &= e^{-k[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}} = \left(e^{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}} \right)^k = C^k(u, v). \end{aligned}$$

1.4 Les mesures de dépendance

Il existe de nombreuses approches pour décrire et mesurer la dépendance entre variables aléatoires conjointement distribuées. Souvent, on utilise le coefficient de corrélation linéaire de Pearson décrit en bas.

1.4.1 Coefficient de corrélation de Pearson

Définition 1.4.1 *La covariance entre X et Y :*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

et la corrélation entre X et Y :

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

On a la propriété : $-1 \leq Cor(X, Y) \leq 1$.

La valeur du coefficient de corrélation de Pearson mesure le type de liaison linéaire entre X et Y .

- Si $Cor(X, Y) > 0$ il y a une liaison linéaire positive entre X et Y .
- Si $Cor(X, Y) < 0$ il y a une liaison linéaire négative entre X et Y .
- Si $Cor(X, Y) = 0$ il n'y a pas de liaison linéaire entre X et Y .

1.4.2 Le coefficient de corrélation de Kendall et le rho de Spearman

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui lui apprécie la corrélation entre les valeurs des observations.

Notion de la concordance

Définition 1.4.2 Soient (x_i, y_i) et (x_j, y_j) , deux couples d'observations d'un vecteur de variables aléatoires (X, Y) .

Alors (x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont dites,

1. **Concordantes** si

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0 \Leftrightarrow ((x_i < x_j) \wedge (y_i < y_j))$$

$$\text{ou } ((x_i > x_j) \wedge (y_i > y_j)).$$

2. **Discordantes** si

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \Leftrightarrow ((x_i < x_j) \wedge (y_i > y_j))$$

$$\text{ou } ((x_i > x_j) \wedge (y_i < y_j)).$$

Définition 1.4.3 On définit la fonction de concordance entre ces deux couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) par :

$$\mathbb{Q} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Tau de Kendall

Définition 1.4.4 Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués de même fonction de répartition jointe H . Le tau de Kendall est défini par :

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Théorème 1.4.1 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire continu de copule C , et C est associée à la fonction de répartition jointe $H(x, y) = C(F(x), G(y))$, alors [\[10\]](#)

$$\tau = 4 \int \int_{\{[0,1] \times [0,1]\}} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (1.14)$$

Un estimateur du tau de Kendall se construit à partir d'un échantillon $\{(x_1, y_1), \dots, (x_T, y_T)\}$ de (X, Y) de la façon suivante :

$$\hat{\tau} = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{j=2}^T \sum_{i=1}^{j-1} \text{sign} \{(x_j - x_i)(y_j - y_i)\}, \quad (1.15)$$

où

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$

Rho de Spearman

Définition 1.4.5 Soient (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) trois vecteurs indépendantes des variables aléatoires continues X et Y et ayant la même fonction de répartition jointe H et les mêmes fonctions de répartition marginales F et G . Le rho de Spearman est défini par

$$\rho = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]).$$

Théorème 1.4.2 Si C désigne la copule des variables X et Y , le rho de Spearman est :

$$\rho = 12 \int \int_{\{[0,1] \times [0,1]\}} C(u, v) dC(u, v) - 3. \quad (1.16)$$

Un estimateur du rho de Spearman se construit à partir d'un échantillon $\{(x_1, y_1), \dots, (x_T, y_T)\}$ de (X, Y) de la façon suivante :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^T (S_i - \bar{S})^2}}, \quad (1.17)$$

où R_i est le rang de x_i , S_i celui de y_i et $\bar{Z} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Z_i$. [\[4\]](#)

Chapitre 2

Estimation paramétrique des copules et application

Lorsqu'il s'agit de l'estimation paramétrique des copules, on impose un modèle paramétrique pour la copule et pour les distributions marginales. Pour estimer ces paramètres, il existe différentes méthodes. Dans cette section, nous étudierons la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments.

2.1 Méthode du maximum de vraisemblance

L'estimation du maximum de vraisemblance est une méthode de maximisation directe pour estimer simultanément les paramètres marginaux et de copule. Cette méthode de maximisation directe est une méthode courante pour estimer l'estimateur de copule. L'estimateur du maximum de vraisemblance est également l'estimateur le plus efficace pour le paramètre de dépendance de la copule

Définition 2.1.1 *Soit deux vecteurs de variables aléatoires X et Y . Les fonctions de distribution marginales sont $F_X(x; \alpha_1)$ et $G_Y(y; \alpha_2)$ respectivement avec α_1 et*

α_2 est un vecteur de paramètres. Nous supposons que les fonctions de densité marginales existent et seront notées $f_X(x; \alpha_1)$ et $g_Y(y; \alpha_2)$. Nous supposons aussi que la fonction de copule C appartient à une famille paramétrique, et sera notée $C(., ., \beta)$ où β est un vecteur de paramètre. Le vecteur de paramètre à estimer est $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta)'$. La distribution conjointe peut être écrite comme suit :

$$C(u, v; \theta) = C_\theta [F_X(x; \alpha_1), G_Y(y; \alpha_2); \beta] = H(x, y; \theta) \quad (2.1)$$

La fonction de densité conjointe est :

$$\begin{aligned} h(x, y; \theta) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x, y; \theta) \\ &= \frac{\partial^2 C(F_X(x; \alpha_1), G_Y(y; \alpha_2); \beta)}{\partial F_X(x; \alpha_1) \partial G_Y(y; \alpha_2)} \frac{\partial F_X(x; \alpha_1)}{\partial x} \frac{\partial G_Y(y; \alpha_2)}{\partial y}, \end{aligned}$$

alors

$$h(x, y; \theta) = c(F_X(x; \alpha_1), G_Y(y; \alpha_2); \beta) f_X(x; \alpha_1) g_Y(y; \alpha_2), \quad (2.2)$$

où

$$c(F_X(x; \alpha_1), G_Y(y; \alpha_2); \beta) = c(u, v; \theta) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v; \theta), \quad (2.3)$$

avec c est la densité associée à C .

Les étapes impliquées dans l'estimation de MV sont décrites comme suit :

Étape 1 : Trouvez la fonction de vraisemblance de l'équation 2.2. Le forme de vraisemblance de la fonction de vraisemblance avec les variables aléatoires $\{(x_i)\}_{i=1}^n$ et $\{(y_i)\}_{i=1}^n$ s'écrivent comme suit :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n c[F_X(x_i, \alpha_1), G_Y(y_i, \alpha_2); \beta] f_X(x_i, \alpha_1) g_Y(y_i, \alpha_2), \quad (2.4)$$

Étape 2 : Trouvez la fonction log-vraisemblance de l'équation [2.4](#). La forme log-vraisemblance est :

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c [F_X(x_i, \alpha_1), G_Y(y_i, \alpha_2); \beta] + \left[\sum_{i=1}^n \log f_X(x_i, \alpha_1) + \sum_{i=1}^n \log g_Y(y_i, \alpha_2) \right]. \quad (2.5)$$

Étape 3 : Maximiser la fonction de log-vraisemblance de la copule complète (Eq.[2.5](#)) avec une expression comme ci-dessous

$$\hat{\theta}^{MV} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta). \quad (2.6)$$

où Θ est l'espace des paramètres.

$\hat{\theta}^{MV}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance si

$$l(\hat{\theta}^{MV}) \geq l(\theta), \forall \theta \in \Theta$$

On peut montrer que $\hat{\theta}^{MV}$ a la propriété de normalité asymptotique et on a :

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}^{MV} - \theta_0) \longrightarrow \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta_0)).$$

avec $I(\theta_0)$ la matrice d'information de Fisher.

Remarque 2.1.1 Appliquée à [\(1.5\)](#), l'expression de la log-vraisemblance devient

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c [F_1(x_1^t; \alpha_1), F_2(x_2^t; \alpha_2); \beta] + \left[\sum_{i=1}^n \log f_1(x_1^t; \alpha_1) + \sum_{i=1}^n \log f_2(x_2^t; \alpha_2) \right].$$

Si nous supposons des marges uniformes, nous avons :

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c [u_1^t, u_2^t].$$

2.1.1 Maximum de vraisemblance pour les copules Archimédiennes

Définition 2.1.2 Une copule Archimédienne C admet une densité c si et seulement si $\psi^{(d-1)}$ existe et est absolument continue sur $(0, \infty)$. Dans ce cas, C est donné par

$$C(u) = \psi^{(d)}(t(u)) \prod_{j=1}^d (\psi^{-1})'(u_j), \quad (2.7)$$

où

$$t(u) = \sum_{j=1}^d \psi^{-1}(u_j).$$

Notez que pour calculer la log-densité, il est pratique d'écrire c comme

$$c(u) = (-1)^d \psi^{(d)}(t(u)) \prod_{j=1}^d -(\psi^{-1})'(u_j).$$

L'expression de la vraisemblance pour la copule Archimédienne de générateur ψ est donnée par :

$$L(\theta, u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^d c_{\theta}(u_i) \quad \text{et} \quad l(\theta, u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n l(\theta; u_i),$$

où

$$l(\theta; u_i) = \log c_{\theta}(u_i) = \log \left((-1)^d \psi_{\theta}^{(d)}(t_{\theta}(u)) \right) + \sum_{j=1}^d \log(-(\psi^{-1})'(u_j)).$$

Ici, l'indice θ de $t(u)$ est utilisé pour souligner la dépendance de $t(u)$ sur θ . L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(u_1, \dots, u_n)$ peut donc être trouvé

en résolvant l'optimisation problème [13]

$$\hat{\theta}_n = \arg \sup_{\theta \in \Theta} l(\theta, u_1, \dots, u_n).$$

Exemple 2.1.1 (Copule Gaussienne multivariée) Soit R une matrice symétrique définie positive avec $\text{diag}(R) = (1, 1, \dots, 1)$, R la distribution normale multivariée standardisée avec matrice de corrélation R . [6] La copule gaussienne multivariée C est donné comme suit :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; R) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

avec densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} X' R^{-1} X\right) = c(\Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots, \Phi(x_n)) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_j^2\right) \right).$$

Nous concluons que :

$$c(\Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots, \Phi(x_n)) = \frac{\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \right) \exp\left(-\frac{1}{2} X' R^{-1} X\right)}{\prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_j^2\right) \right)}.$$

Soit $u_j = \Phi(x_j)$, $x_j = \Phi^{-1}(u_j)$ et on peut réécrire comme suit :

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta'(R^{-1} - I)\zeta\right),$$

où $\zeta = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n))'$. l'expression de la fonction log-vraisemblance est :

$$l(\theta) = -\frac{T}{2} \log |R| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \zeta_t'(R^{-1} - I)\zeta_t.$$

θ est l'ensemble de tous les paramètres R et $\zeta_t = (\Phi^{-1}(u_{1t}), \Phi^{-1}(u_{2t}), \dots, \Phi^{-1}(u_{nt}))'$.

L'estimateur du maximum de vraisemblance de R est donné par :

$$\hat{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_t' \zeta_t.$$

2.1.2 Estimation maximum de vraisemblance de quelques copules

– La copule de Gumbel-Barnett est définie par :

$$C(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp(-\theta \log(1 - u) \log(1 - v)) \quad , 0 \leq \theta \leq 1.$$

La fonction de densité est :

$$c(u, v) = \exp(-\theta \log(1 - u) \log(1 - v)) [(\theta \log(1 - v) - 1)(\theta \log(1 - u) - 1) - \theta],$$

La fonctions de vraisemblance est :

$$L(u, v; \theta) = \prod_{i=1}^n \exp(-\theta \log(1 - u_i) \log(1 - v_i)) ((\theta \log(1 - u_i) - 1)(\theta \log(1 - v_i) - 1) - \theta),$$

La fonction log de vraisemblance est :

$$l(u, v; \theta) = -\sum_{i=1}^n \theta \log(1 - u_i) \log(1 - v_i) + \sum_{i=1}^n \log((\theta \log(1 - u_i) - 1)(\theta \log(1 - v_i) - 1) - \theta). \quad (2.8)$$

Etant donné qu'il n'existe pas de méthode fermée pour obtenir le maximum de l'équation (2.8), il est nécessaire d'utiliser des algorithmes numériques pour approximer la solution. [23]

– Copules Farlie-Gumbel-Morgenstern est définie par :

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \quad \theta \in [-1, 1].$$

La fonction de densité est :

$$c(u, v) = (1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v)),$$

La fonction de vraisemblance est :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n (1 + \theta(1 - 2u_i)(1 - 2v_i)),$$

La fonction log de vraisemblance est :

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log(1 + \theta(1 - 2u_i)(1 - 2v_i)).$$

– La copule de Clayton est définie par :

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad \theta \in [-1, +\infty[\setminus \{0\}.$$

La fonction de densité est :

$$c(u, v) = (\theta + 1)(uv)^{-\theta-1}(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

La fonction de vraisemblance est :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta + 1)(u_i v_i)^{-\theta-1}(u_i^{-\theta} + v_i^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

La fonction log de vraisemblance est :

$$l(\theta) = n \log(\theta + 1) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \log(uv) - \left(\frac{1}{\theta} + 2\right) \sum_{i=1}^n (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2}.$$

– La copule de Frank est définie par :

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)} \right), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La fonction de densité est :

$$c(u, v) = \frac{\theta (1 - \exp(-\theta)) \exp(-\theta(u + v))}{[(1 - \exp(-\theta)) - (\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)]^2},$$

La fonction de vraisemblance est :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \theta (1 - \exp(-\theta)) \exp(-\theta(u + v)) \\ &\quad \times [(1 - \exp(-\theta)) - (\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)]^{-2}, \end{aligned}$$

La fonction log de vraisemblance est :

$$\begin{aligned} l(\theta) &= n (\log(\theta) + \log(1 - \exp(-\theta))) - \theta \sum_{i=1}^n (u + v) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \log [1 - \exp(-\theta) - (\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)]. \end{aligned}$$

2.1.3 Estimation du maximum de vraisemblance simulée

Définition 2.1.3 *Si les dérivées du générateur d'Archimède sont inconnues, on peut s'attendre à ce que y soit une approximation de la densité de la copule générée. De cette manière, les dérivées d'ordre supérieur peuvent être remplacées par une seule intégrale, où la transformée de Laplace-Stieltjes de F également connue sous*

le nom de transformée de Laplace de la distribution, [14] est définie comme :

$$\mathcal{LS}[F](t) = \int_0^{\infty} \exp(-xt) dF(x) = \psi(t).$$

Si $\psi \in \Psi_{\infty}$ alors,

$$(-1)^d \psi^{(d)}(t) = \int_0^{\infty} x^d \exp(-xt) dF(x) = \mathbb{E}[V^d \exp(-Vt)], \quad t \in [0, +\infty[,$$

où V a une fonction de distribution F . Une approximation de $(-1)^d \psi^{(d)}(t)$ est donc donnée par

$$(-1)^d \psi^{(d)}(t) \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m V_k^d \exp(-V_k t), \quad t \in [0, +\infty[,$$

où $V_k \sim F$ et $k \in \{1, \dots, m\}$, alors

$$F = \mathcal{LS}^{-1}[\psi].$$

Comprend le tableau suivant, les transformées inverses de Laplace-Stieltjes F pour les familles à paramètre unique :

Famille	$\psi(t)$	F
Clayton	$(1 - \theta) / (\exp(t) - \theta)$	$\Gamma\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$
Frank	$-\log(1 - (1 - \exp(-\theta)) \exp(-t)) / \theta$	$(1 - \exp(-\theta))^k / k\theta$
Gumbel	$\exp(-t^{1/\theta})$	$S\left(\frac{1}{\theta}, 1, \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)\right)^{\theta}, \mathbf{1}(\theta = 1), 1\right)$
Joe	$1 - (1 - \exp^{-t})^{1/\theta}$	$(-1)^{k+1} \binom{1/\theta}{k}$

TAB. 2.1 – Familles d'Archimède avec générateurs à un paramètre couramment utilisés et transformées inverses de Laplace-Stieltjes.

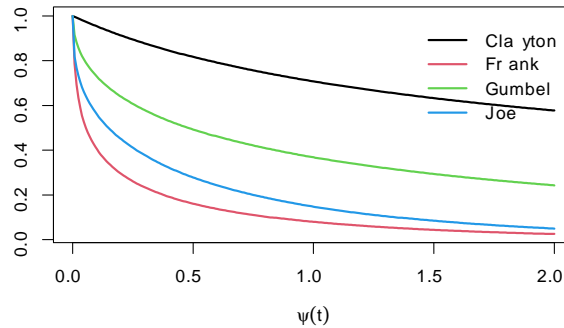


FIG. 2.1 – Graphiques des générateurs d’Archimède répertoriés dans le tableau 2.1

2.2 Méthode des moments

Cette méthode est notamment utilisée pour les mesures de dépendance et sont des transpositions directes des estimateurs par la méthode des moments bien connus utilisés dans de nombreux domaines de la statistique. Les moments des variables aléatoires sont remplacés par des moments de la copule tels que le tau de Kendall ou le rho de Spearman.

Définition 2.2.1 *Cette méthode consiste à estimer les paramètres θ des lois marginales et le paramètre α de la copule par la méthode des moments. Résoudre le système à d équations et d inconnues*

$$\begin{cases} \bar{X}_n = f(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ S_n^2 = g(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ \mu_{3,n} = h(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ \vdots \end{cases}$$

où d désigne la dimension de θ , f , g et h sont les expressions des moments (or-

dinaires) d'ordre 1, 2 et 3 en fonction du paramètre θ . Répéter cette étape pour toutes les marginales. [1]

L'estimation des paramètres de copule via la méthode des moments basés sur tau de Kendall et rho de Spearman est présentée ci-dessous.

2.2.1 Estimateur basé sur le tau de Kendall

Pour de nombreuses familles de copules, il existe une relation biunivoque entre τ et θ de Kendall. Étant donné que τ peut être estimé de manière cohérente à partir de l'échantillon, une autre stratégie d'estimation de θ peut être basée sur la méthode des moments.

Définition 2.2.2 *La relation générale entre le tau de Kendall et le générateur de la copule d'Archimède peut être exprimée comme suit :*

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} du$$

Définition 2.2.3 *On a g_τ la fonction définie par*

$$\tau = g_\tau(\theta).$$

où τ sont définis en (1.14).

L'estimateur par la méthode des moments $\hat{\theta}$ de θ est défini par :

$$\hat{\theta}^{TK} = g_\tau^{-1}(\hat{\tau}).$$

et $\hat{\tau}$ sont définis en (1.15).

1. Le tau de Kendall de la copule de Gumbel est $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$ avec $\theta \in [1, +\infty[$.

L'estimateur par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}}.$$

2. Le tau de Kendall de la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern est $\tau = \frac{2\theta}{9}$ avec $\theta \in [-1, 1]$. L'estimateur par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta} = \frac{9\hat{\tau}}{2}.$$

3. Le tau de Kendall de la copule de Clayton est $\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$ avec $\theta \in [-1, +\infty[\setminus \{0\}$. L'estimateur par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta} = \frac{2\hat{\tau}}{(1 - \hat{\tau})}.$$

2.2.2 Estimateur basé sur le rho de Spearman

nous pouvons construire un estimateur basé sur le moment de θ utilisant le rho de Spearman à condition qu'il existe une relation un à un entre le rho de Spearman et θ . Cette relation bijective entre ρ et le paramètre de copule est satisfait pour de nombreuses familles de copules.

Définition 2.2.4 on a g_ρ la fonction définie par

$$\rho = g_\rho(\theta).$$

où ρ sont définis en (1.16).

L'estimateur par la méthode des moments $\hat{\theta}$ de θ est défini par

$$\hat{\theta}^{RS} = g_{\rho}^{-1}(\hat{\rho}).$$

et $\hat{\rho}$ sont définis en (1.17).

Le rho de Spearman de la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern est

$$\rho = \frac{\theta}{3}$$

avec $\theta \in [-1, 1]$.

L'estimateur par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta} = 3\hat{\rho}.$$

2.3 Application

Cette partie est consacré à l'application. On a estimé les paramètres des copules Farlie-Gumbel-Morgenstern et la copule de Gumbel par la méthode maximum de vraisemblance et la méthode des moments, on a utilisé le logiciel R.

Et enfin, on a tracé les nuages de points des copules choisies.

Copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern

On rappelle que la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern s'écrit sous la forme

$$C_{\theta}(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \quad \theta \in [-1, 1].$$

Code R

```
d <- 2

theta <- 1

fgm.cop <- fgmCopula(theta, dim = d)

n <- 100

x <- rCopula(n, fgm.cop )

u <- pobs(x)

fit.ml <- fitCopula(fgm.cop , x, method="ml")

summary(fit.ml)

fit.tau <- fitCopula(fgm.cop , u, method="itau")

summary(fit.tau)

fit.rho <- fitCopula(fgm.cop , u, method="irho")

summary(fit.rho)
```

n	Estimateurs	$\theta = -1$	$\theta = -0.5$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$
100	$\hat{\theta}^{MV}$	-0.6908	-0.1657	0.7130	0.6089
	$\hat{\theta}^{TK}$	-0.6345	-0.0854	0.7309	0.6818
	$\hat{\theta}^{RS}$	-0.6310	-0.118	0.7316	0.6815
500	$\hat{\theta}^{MV}$	-0.9665	-0.4047	0.5349	0.9915
	$\hat{\theta}^{TK}$	-0.8699	-0.4161	0.5889	0.8937
	$\hat{\theta}^{RS}$	-0.8706	-0.4142	0.5814	0.8999
1000	$\hat{\theta}^{MV}$	-0.8929	-0.4327	0.5983	0.9793
	$\hat{\theta}^{TK}$	-0.8968	-0.4554	0.6017	0.9539
	$\hat{\theta}^{RS}$	-0.8976	-0.4496	0.6013	0.9554

TAB. 2.2 – Estimation des paramètres de copule Farlie–Gumbel–Morgenstern.

La figure (2.2) ci-dessous représentent Nuage de points de la copule Farlie–Gumbel–Morgenstern.

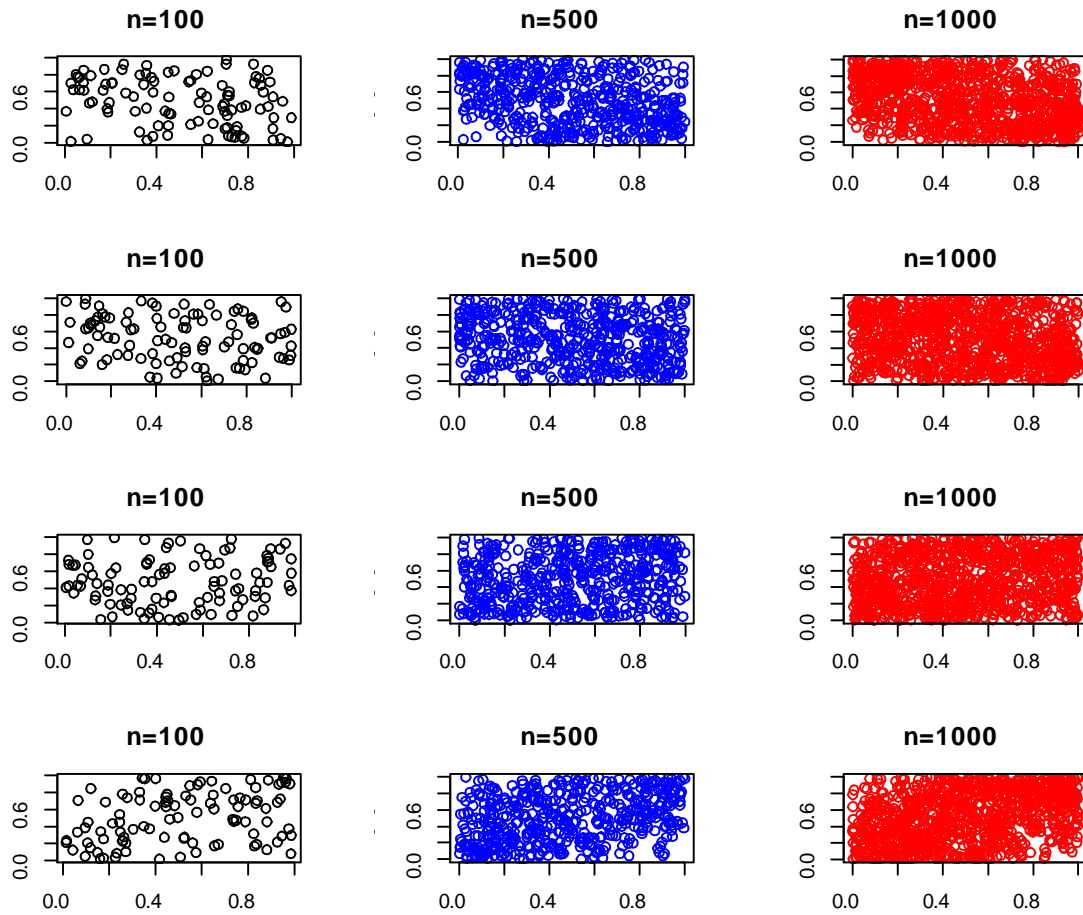


FIG. 2.2 – Nuage de points de la copule Farlie–Gumbel–Morgenstern, première ligne $\theta = -1$, deuxième ligne $\theta = -0.5$, troisième ligne $\theta = 0.5$,et quatrième ligne $\theta = 1$.

Commentaire

Ces modèles de fonction de copule sont des structures de dépendance linéaire faible

Copule de Gumbel

On rappelle que la copule de Gumbel s'écrit sous la forme

$$C_{\theta}(u, v) = \exp \left(- \left((-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right)^{1/\theta} \right), \quad \forall \theta \geq 1.$$

Code R

```
d <- 2

theta <- 20

gumbel.cop <- gumbelCopula(theta, dim = d)

n <- 1000

x <- rCopula(n, gumbel.cop )

u <- pobs(x)

fit.ml <- fitCopula(gumbel.cop , x, method="ml")

summary(fit.ml)

fit.tau <- fitCopula(gumbel.cop , u, method="itau")

summary(fit.tau)

fit.rho <- fitCopula(gumbel.cop , u, method="irho")

summary(fit.rho)
```

n	Estimateurs	$\theta = 2$	$\theta = 5$	$\theta = 10$	$\theta = 20$
100	$\hat{\theta}^{MV}$	2.124	4.687	9.782	20.61
	$\hat{\theta}^{TK}$	2.056	4.098	10.95	23.35
	$\hat{\theta}^{RS}$	2.002	4.143	9.926	19.83
500	$\hat{\theta}^{MV}$	1.961	4.671	9.787	19.40
	$\hat{\theta}^{TK}$	1.962	4.705	10.04	20.89
	$\hat{\theta}^{RS}$	1.972	4.651	10.26	20.75
1000	$\hat{\theta}^{MV}$	2.027	5.172	10.16	20.33
	$\hat{\theta}^{TK}$	2.002	5.133	10.14	20.73
	$\hat{\theta}^{RS}$	2.006	5.067	10.09	20.25

TAB. 2.3 – Estimation des paramètres de copule Gumbel.

La figure (2.3) ci-dessous représentent Nuage de points de la copule Gumbel.

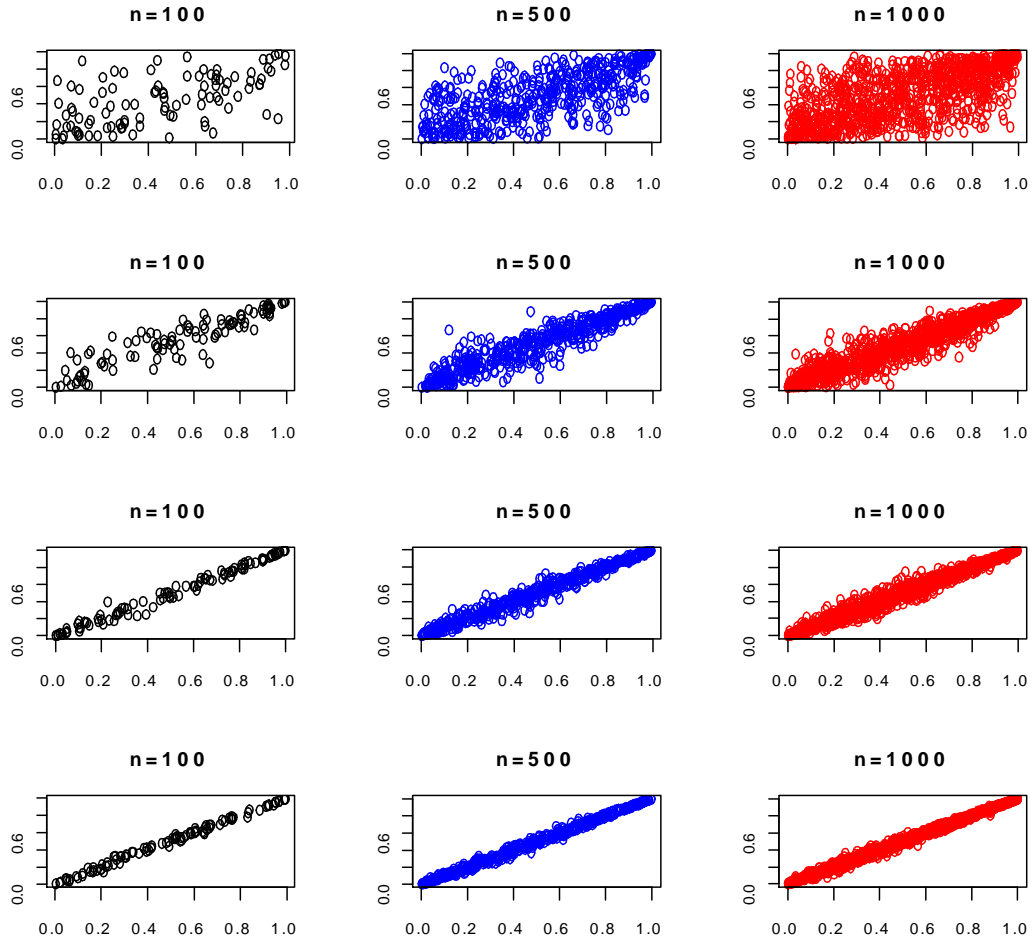


FIG. 2.3 – Nuage de points de la copule Gumbel, première ligne $\theta = 2$, deuxième ligne $\theta = 5$, troisième ligne $\theta = 10$,et quatrième ligne $\theta = 20$.

Commentaire

La copule de Gumbel est utile pour modéliser des structures de données avec une forte dépendance dans la queue supérieure et une faible dépendance dans la queue inférieure où l'on s'attend à ce que les données supérieures montrent une forte corrélation et les données inférieures montrent une faible corrélation.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié la notion de copule et ses propriétés. On a présenté quelques familles de copules usuelles et les plus utilisées par exemple, la copule Gaussienne et la famille des copules Archimédiennes avec une étude des mesures de dépendance. Ensuite, on a présenté l'estimation des paramètres de copule par la méthode de maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Ce qui permet de bien modéliser la structure de dépendance de certaines données. Enfin, une simulation des différentes méthodes d'estimations des paramètres des copules pour différentes tailles d'échantillon.

Bibliographie

- [1] Anne-lise, C., Christophe, D., Véronique, L. M., & Triet, N. (2008). Copule de Gumbel.
- [2] BENELMIR, I. (2018). Modélisation de la Dépendance par les Copules (Doctoral dissertation, UNIVERSITÉ MOHAMED KHEIDER-BISKRA).
- [3] Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G., & Roncalli, T. (2000). Copulas for finance-a reading guide and some applications. Available at SSRN 1032533.
- [4] Cadoux, D., & Loizeau, J. M. (2004). Copules et dépendances : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie. Bulletin Français d'Actuariat, 6(12), 173-208.
- [5] Chabot, M. (2013). Concepts de dépendance et copules. CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke), 4, 48-71.
- [6] Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W. (2004). Copula methods in finance. John Wiley & Sons.
- [7] Cours de tests paramétriques (2018-2019). Chapitre V : Coefficients de corrélation et tests.
- [8] Cyrille, O. G. (2014). Estimation du risque financier par l'approche de Peaks Over Threshold (POT) et de la théorie des copules.

- [9] Dumas, A. (2019). Nouvelles extensions de la loi exponentielle bivariée de Raftery (Doctoral dissertation, Université du Québec à Trois-Rivières).
- [10] Fontaine, C. (2016). Utilisation de copules paramétriques en présence de données observationnelles : cadre théorique et modélisations (Doctoral dissertation, Université Montpellier).
- [11] Grebennikov, I. (2014). Moment-based estimation of dependence parameters in copula models for discrete data.
- [12] Hofert, M. (2008). Sampling archimedean copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(12), 5163-5174.
- [13] Hofert, M., Mächler, M., & McNeil, A. J. (2011). Likelihood inference for Archimedean copulas. arXiv preprint arXiv :1108.6032.
- [14] Hofert, M., Mächler, M., & McNeil, A. J. (2013). Archimedean copulas in high dimensions : Estimators and numerical challenges motivated by financial applications. *Journal de la Société Française de Statistique*, 154(1), 25-63.
- [15] Hofert, M., Kojadinovic, I., Mächler, M., & Yan, J. (2018). Elements of copula modeling with R. Springer International Publishing.
- [16] Hofert, M., Kojadinovic, I., Maechler, M., & Yan, J. (2020). copula : Multivariate dependence with copulas. R package version 1.0-1.
- [17] Idiou, N., Benatia, F., & Mesbah, M. Copules et modèles avec variable de fragilité pour des données de survie multivariée.
- [18] Kadi, N. (2014). Estimation non-paramétrique de la distribution et densité de copules.
- [19] Lokoman, R. M., & Yusof, F. (2019). PARAMETRIC ESTIMATION METHODS FOR BIVARIATE COPULA IN RAINFALL APPLICATION. *Journal Teknologi*, 81(1).

- [20] Mahfoud, A. (2017). Calcul de la vraisemblance d'une copule basée sur les rangs (Doctoral dissertation, Université du Québec à Montréal).
- [21] Nelsen, R. B., 2006. An Introduction to copula. Springer Verlag, New York.
- [22] Tovar Cuevas, J. R., Portilla Yela, J., & Achcar, J. A. (2019). A method to select bivariate copula functions. *Revista Colombiana de Estadística*, 42(1), 61-80.
- [23] Yela, J. P., & Cuevas, J. R. T. (2018). Estimating the Gumbel-Barnett copula parameter of dependence. *Revista Colombiana de Estadística*, 41(1), 53-73.
- [24] Zari, T. (2010). Contribution à l'étude du processus empirique de copule (Doctoral dissertation, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI).

Annexe : Abréviations et Notations

c	Densité de la copule.
C	Distribution de la copule.
f, g	Densités des lois marginales.
F, G	fd des lois marginales.
f_d	Fonction de distribution.
h	Densité de distribution jointe.
H	Distribution jointe.
I	Intervalle $[0,1]$.
$P(A)$	Probabilité d'un évènement A.
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
ρ	Rho de Spearman.
τ	Tau de Kendall.
X, Y	Vas réelles.
Π, W, M	Copules produit, maximum et minimum.
$\hat{\theta}^{MV}$	Estimateur de θ par la méthode de Maximum de vraisemblance.
$\hat{\theta}^{TK}$	Estimateur de θ par l'inversion de tau de Kendall.
$\hat{\theta}^{RS}$	Estimateur de θ par l'inversion de rho de Spearman.

Résumé:

Les copules sont devenues en quelques années un outil important, pour modéliser les risques multivariés (entre autres). Elles permettent de coupler les lois marginales afin d'obtenir une loi multivariée. L'objectif de ce travail est d'étudier l'estimation des paramètres de copule par quelques méthodes : la méthode maximum de vraisemblance et la méthode des moments.

Mots clés : Copule, Estimation paramétrique, Théorème de Sklar, La méthode maximum de vraisemblance, La méthode des moments ,Tau de Kendall, Rho de Spearman.

Abstract:

The copulas have become in a few years an important tool, to model the multivariate risks (among others). They make it possible to couple the marginal laws in order to obtain a multivariate law. The objective of this work is to study the estimation of copula parameters by several methods: the maximum likelihood method and the method of moments.

Keywords: Copula, Parametric estimation, Sklar's theorem, Maximum likelihood method, Method of moments, Kendall's Tau, Spearman's Rho.

المخلص:

أصبحت الكوبولات في غضون سنوات قليلة أداة مهمة لنمذجة المخاطر متعددة المتغيرات (من بين أمور أخرى). إنها تجعل من الممكن إقران القوانين الهامشية من أجل الحصول على قانون متعدد المتغيرات. الهدف من هذا العمل هو دراسة تقدير معاملات الكوبولا بعدة طرق: طريقة الاحتمالية القصوى وطريقة اللحظات.

الكلمات المفتاحية: دالة الارتباط ، تقدير حدودي ، نظرية سكلار ، طريقة الاحتمالية القصوى ، طريقة العزوم ، تاو كيندال ، رو سبيرمان.