République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Analyse**.

Par Melle.Khelef Sabrine

Titre :

Sur la contrôlabilité exacte

Devant le Jury :

Mr.	KHELIL Naceur	Pr	U. Biskra	Président
Mr.	BERBICHE Mohamed	Pr	U. Biskra	Encadreur
Mme.	BOUZIANE Nadjette	Dr	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 27/06/2022

Remerciements

Pour ma famille

Pour mon encadreur **Pr.BERBICHE Mohamed**

pour tous ceux qui m'ont aidé

merci

Notations et symbols

$\vert . \vert$	:	une norme dans $L^2(\Omega)$ ou valeur absolue.
$\Vert . \Vert$	:	une norme.
$(.,.)$	:	produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.
$\langle .,. \rangle$	:	crochet de dualité.
H'	:	le dual topologique d'un espace H.
$\Im(U,H)$	:	l'espace vectoriel des applications linéaires continues de U dans H.
$\triangle$	:	le laplacien.
$D\,(A)$	:	le domaine de définition de l'opérateur A.
Γ ou $\partial\Omega$	:	frontière de Ω.
inf	:	borne inférieure.
sup	:	borne supérieure.
max	:	le maximum
div	:	la divergence.
$\dfrac{\partial}{\partial v}$ ou ∂_v	:	la dérivée normale extéreurs.

Table des matières

Notations et symbols **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Notions Préliminaires **3**

1.1 Ensembles convexes 3

1.1.1 Fonctions convexes 4

1.2 Semi-continuité inférieure 4

1.2.1 Espaces de Banach 5

1.2.2 Espaces de Hilbert 5

1.2.3 Les espaces L^p 7

1.2.4 Les espaces $L^p(0, T; V)$ 8

1.2.5 Espace réflexif 8

1.2.6 Espaces de Sobolev 10

1.2.7 Espace de Sobolev d'ordre entier $\mathbf{H}^m$ 10

1.2.8 Théorème de Banach-Steinhaus 13

1.2.9 Formules d'intégration par parties 14

1.2.10 Inégalités 15

1.3 Semi-groupes de classe C_0 15

1.3.1 Problèmes d'évolution non homogènes 16

1.4 Quelques notions de la contrôlabilité 17

2 Intoduction à la contrôlabilité et à l'observabilité exactes 21

2.1 Contrôlabilité des systémes en dimension finie 21

2.2 Critères équivalents via le système d'observabilité 23

2.2.1 Condition de contrôlabilité de Kalman 27

2.3 Contrôlabilité intérieure de l'équation d'onde 27

2.3.1 Existence et unicité 28

2.4 Inégalité de l'observabilité 31

2.5 Equation d'onde 1D et inégalité d'Ingham 34

2.5.1 Observabilité pour l'équation d'onde 1D 35

3 Méthode d'Unicité de Hilbert 38

3.1 Method de l'unicité de Hilbert 39

3.2 Inégalité d'observabilité 43

3.2.1 Condition suffisante sur la partie contrôle de Γ 43

Conclusion 48

Bibliographie 49

Introduction

L'étude de contrôlabilité des équations aux dérivées partielles est un domaine de recherche très actif. Son histoire remonte aux travaux de Kalman lors de l'etude des systemes dynamiques dans le cas de la dimension finie, plusieurs travaux ont été effectue pour développer au cas de la dimension infinie. Ce sujet a connu un développement très important depuis les travaux de David Russell [8] et de Jacques-Louis Lions [6] à la fin des années 70'. Plus précisément, J.L. Lions [6] a introduit que l'on appelle Hilbert Uniqueness Method (la méthode HUM) et ce fut le point de départ d'une période fructueuse sur le sujet. Les années 90' sont marquées par des points forts parmi eux, C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [3] donnent une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité exacte de l'équation des ondes contrôlée sur une partie du bord ou du domaine en utilisant des résultats d'analyse microlocale.

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de très nombreux domaines d'applications dans touts les domaines des sciences et de l'ingénierie.

Le but de ce mémoire est d'étudier la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes controlée, l'outil utilisé pour atteindre ce but est la méthode HUM.

Alors, ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on fait un rappel sur l'essentiels des espaces fonctionnels utilisés, ainsi que des notions sur la théorie de semi-groupe avec quelques théorèmes nécessaires et on considére quelques concepts de la contrôlabilité que on a besoin de savoir.

Dans le deuxième chapitre, on présente les différents types de contrôlabilité, et on va voir le lien entre eux dans le cas de dimension finie et celui du cas infini.

Dans le troisième chapitre on présente la méthode d'unicité de Hilbert pour étudier la contrôlabilité nule et on l'applique à un problème aux limites d'équation d'onde contrôlé au bord, et on termine ce chapitre par une conclusion.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Ensembles convexes

Définition 1.1.1 *Un ensemble C de E est dit convexe si*

$$\forall x, y \in C \ \forall \lambda \in [0,1] : \ \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

On peut dire que C est convexe donc le segment $[x, y]$ est inclus dans C.

Exemple 1.1.1 *(1) Tout espace vectoriel est un ensemble convexe*

(2) L'ensemble vide $\varnothing$, les singletons $\{x\}$ tout entier sont convexes.

(3) Un ensemble est convexe si et seulement si son intersection avec une droite quelconque est convexe .

(4) Les boules d'un espace normé sont convexes.

1.1.1 Fonctions convexes

Définition 1.1.2 *Une fonction $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ est dite convexe si pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est concave si $(-f)$ est convexe .

Proposition 1.1.1 (Inégalité de Jensen) *Une fonction propre f est convexe si et seulement si*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\lambda_i \geq 0$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et tout $x_i \in E$.

1.2 Semi-continuité inférieure

Définition 1.2.1 *Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction . Alors f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point $x \in E$ si*

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x).$$

Une fonction f est semi-continue inférieurement sur E si elle est semi-continue inférieurement en chaque point de E.

Remarque 1.2.1 *On dit que f est s.c.i. en $x_0 \in E$ si $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Proposition 1.2.1 *Si $\{f_i : i \in I\}$ est une famille de fonctions propres semi-continues* *inférieurement sur E, alors $\sup_{i\in I} f_i$ est une fonction semi-continue inférieurement.*

1.2.1 Espaces de Banach

Définition 1.2.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$, notée $x \to \|x\|$, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

(iii)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in E$ *(l'inégalité triangulaire)*.

Un espace vectoriel sur lequel une norme a été spécifiée est appelé espace vectoriel normé.

Une application $x \to \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés (ii) et (iii), mais pas nécessairement la propriété (i), est appelée une semi-norme sur E.

Définition 1.2.3 *On appelle espace de Banach une space normé complet par rapport à la distance de la norme.*

1.2.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.4 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique,définie positive*

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie **l'inégalité deCauchy-Schwarz**

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} \ \forall u, v \in H.$$

Rappelons aussi que

$$\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme associée au produit scalaire

Définition 1.2.5 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u,v) et qui est complet pour la norme associée $\|.\|$.*

Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Théoréme 1.2.1 *Etant donné $\varphi \in H'$ il existe $f \in H$ unique telque*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f,v), \ \forall v \in H.$$

De plus on a

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'} .$$

Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.2.6 *On dit qu'une forme bilinéaire $a\,(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est*

(i) Continue s'il existe une constante C telle que$|a(u,v)| \leq C\,\|u\|\,\|v\|\,, \forall u, v \in H.$

(ii) Coercive s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$a(v,v) \geq c\,\|v\|^2 \ \ , \forall v \in H.$$

Théoréme 1.2.2 ***(Lax-Milgram)****[2] Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle\,, \ \forall v \in H.$$

Théoréme 1.2.3 *Soit K un sous-ensemble convexe fermé sur un espace de Hilbert H et supposons que $J : K \to \mathbb{R}$ est convexe, semi-continu inférieurement et si K est non borné, supposons en outre que J est coercive (c'est-à-dire $J(x) \to \infty$ comme $\|x\| \to \infty$). Alors J atteint un minimum dans K.*

1.2.3 Les espaces L^p

Définition 1.2.7 ***(Espace de Lebesgue)*** *Soit $p \in \mathbb{R}$, $(1 \leq p < \infty)$. On appelle éspace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble des classes de fonctions*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} | \ u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u|^p < \infty \right\}.$$

De plus, pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.2.8 *Pour $p = \infty$, l'espace de Banach $L^\infty(\Omega)$ tel que*

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} | \ \ u \text{ mesurable et } \exists C > 0 \ t.q. \ |u(x)| \leq C \ p.p \}$$

est muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty} \sup ess(u) = \inf \{ C > 0 : |u(x)| \leq C \ p.p \}.$$

Remarque 1.2.2 *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

1.2.4 Les espaces $L^p(0,T;V)$

Définition 1.2.9 *Soit V un espace de Banach, on désigne par $L^p(0,T;V)$ l'espace des fonctions mesurables $u :]0;T[\to V$ tel que*

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \prec \infty \quad pour \quad 1 \leq p < \infty,$$

et pour $p = \infty$ on a

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \sup_{0 \leq t \leq T} ess \, \|u(t)\|_V < \infty.$$

L'espace $L^p(0,T;V)$ est une space de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

Si V est de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_V$, $L^2(0,T;V)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dx.$$

1.2.5 Espace réflexif

Définition 1.2.10 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E'' (à l'aide de l'isomorphisme J).

Théorème decompacité d'Aubin-Lions

On se donne trois espaces de Banach B_0,B, B_1 avec

$$B_0 \subset B \subset B_1; B_i \text{ réflexif}, \; i = 0, 1$$

$$\text{L'injection } B \to B \text{ est compacte.}$$

On définit

$$W = \left\{ v \middle| v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\}$$

où T est fini et où $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$. W muni de la norme

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

est un espace de Banach.

On a alors le résultat suivant :

Théoréme 1.2.4 ([6]) *Sous les hypothèses précédentes et si* $1 < p_i < \infty$*,* $i = 0, 1$ *l'injection de* W *dans* $L^{p_0}(0, T; B_0)$ *est compacte.*

Distributions

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; notons par $D(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact dans Ω.

On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $D(\Omega)$, et on note par $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Définition 1.2.11 ***(Dérivation des distributions)*** *Soit* T *un élément de* $D'(\Omega)$*. Pour tout multi-indice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, on appelle ordre de* α *et on note* $|\alpha|$ *l'entier*

$|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. *La dérivée d'ordre* $|\alpha|$ *de* T *est l'application suivante, notée* $D^\alpha T$

$$D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}, \; u \longmapsto \langle D^\alpha T, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha u \rangle .$$

Remarque 1.2.3 *Si* u *est une fonction de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *on note* $D^\alpha u$ *la dérivée d'ordre de* u

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

1.2.6 Espaces de Sobolev

On rappelle ici les définitions et les résultats qui seront utilisés au cours du mémoire

1.2.7 Espace de Sobolev d'ordre entier $\mathbf{H}^m$

Espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.2.12 *Soit* Ω *un ouvert de* R^n *de frontière* $\partial\Omega$. *On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur* Ω *l'espace*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \; \forall i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Ici la dérivation est au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ *est dans* $H^1(\Omega)$ *s'il existe des fonctions* $v_1, \ldots, v_n$ *dans* $L^2(\Omega)$ *telles que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx, \; \forall \varphi \in D(\Omega), \; \forall i = 1, \ldots, n$$

les fonctions v_i *sont notées* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1}^2 &= \int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \\ &= \int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

La norme de $H^1(\Omega)$ est issue d'un produit scalaire noté $(u,v)_{H^1}$ et défini par

$$\begin{aligned} ((u,v))_{H^1} &= \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx \\ &= (u,v) + (\nabla u, \nabla v). \end{aligned}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.2.13 *Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega),\ u = 0 \ sur\ \Gamma \right\}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_0^2 = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$$

est un Banach

Espace $H^{-1}(\Omega)$ On note par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual topologique de $H_0^1(\Omega)$.

Théoréme 1.2.5 ***(de Rellich)*** *[2] Si Ω est un ouvert borné de classe C^1, alors l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, i.e. tout ensemble borné* *de $H_0^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On écrit*

$$H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \text{ est compacte.}$$

On peut identifier $L^2(\Omega)$ et son dual, alors on a les inclusions

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

Espace $H^m(\Omega)$

Définition 1.2.14 *On définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ où m est un entier strictement positif par*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in N^n, |\alpha| \leq m \right\}.$$

On le munit de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^m}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 . \end{aligned}$$

Espace $W^{m.p}(\Omega)$

Définition 1.2.15 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $m \in N$, on peut définir les espaces de Sobolev*

$$W^{m.p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in N^n, |\alpha| \leq m \},$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m.p}}^{p} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^{p} \, dx, \; 1 \leq p \leq +\infty,$$

$$\|u\|_{W^{m.p}} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\infty} .$$

Ces espaces sont des espaces de Banach.

On note

$$H^{1}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \text{ et } H^{m}(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

1.2.8 Théorème de Banach-Steinhaus

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des opérateurs linéaires et continus de E dans F muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} \|Tx\|$$

Théoréme 1.2.6 ***(Banach-Steinhaus)****Soient E et F deux espaces de Banach.Soit $(Ti)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_{i}x\| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_{i}\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Autrement dit, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|T_i x\| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in E, \forall i \in I.$$

Corollaire 1.2.1 *Soient E et F deux espaces de Banach.Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires et continus de E dans F tels que pour chaque $x \in E$, $T_n x$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite notée Tx. Alors ona*

(a) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$

(b) $T \in \mathcal{L}(E,F)$

(c) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

1.2.9 Formules d'intégration par parties

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine borné de classe C^1

Formule de Green (voir [2])

Proposition 1.2.2 *pour $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, on a*

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\partial_v u d\sigma - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx. \tag{1.1}$$

En particulier, le choix des rendements $v \equiv 1$

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \partial_v u d\sigma. \tag{1.2}$$

Si aussi $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, on permute les rôles de u et v dans (1.1) et avec soustraction, on obtient deuxième **identité de Green**

$$\int_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial}\Omega(v\partial_v u - u\partial_v v)d\sigma. \tag{1.3}$$

1.2.10 Inégalités

Inégalité de Cauchy

$$|ab| \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2$$

ε-Inégalité de Cauchy Qu'on appelle aussi ε-inégalité

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|b|^2,$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et a, b sont des nombres réels arbitraire.

1.3 Semi-groupes de classe C_0

Définition 1.3.1 ([2]) *On appelle un semi-groupe fortement continu (ou C_0-semi-groupe) d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i)$T(0) = I$;

ii)$T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$;

iii)$\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x$, $\forall x \in E$.

Définition 1.3.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$,* *un opérateur A défini sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{ x \in E \middle| \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ existe.} \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

1.3.1 Problèmes d'évolution non homogènes

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H.

On considère

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \text{ si } t \in]0, T[\\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

où $f : [0, T] \to H$.

Définition 1.3.3 (4) *Soit $f \in L^1([0, T]; H)$ et $y_0 \in H$, on appelle solution faible de (1.4) la fonction $y \in C([0, T]; H)$ donnée par*

$$y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t - s)f(s)ds, \ t \in [0, T]. \tag{1.5}$$

On appelle solution classique de (1.4) tout fonction $y \in C([0, T]; H) \cap y \in C^1([0, T]; H)$ tel que $y \in D(A)$ pour tout $t \in [0, T]$, et vérifiant (1.5) dans $[0, T]$.

Remarque 1.3.1 (4) *Par définition, le problème (1.4) admet toujours une unique solution faible.*

Théoréme 1.3.1 *Soit $f \in L^1([0, T]; H)$ et $y_0 \in H$, le problème (1.4) admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule*

(1.5)

1.4 Quelques notions de la contrôlabilité

On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bv(t) \\ y(0) = y_0 \in D(A) \end{cases} \tag{1.6}$$

où $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans un espace de Hilbert H.

Soit U un espace de Hilbert et B est un opérateur dans $\Im(U, H)$, B excite le système pour modifier l'état (chercher un état convenable). On suppose que $v \in L^2([0, T]; U)$.

On ppelle la fonction $y \in H$ l'état du système (1.6) et v est **le contrôle**.

Les espaces U et H sont appelés respectivement espace des contrôles et espace des états.

Contrôlabilité

Le principe de la contrôlabilité est le suivant : étant donnés deux états $y_0 \in H$ et $y_d \in H$ du système (1.6), existe-t-il une fonction v (appelée **contrôle**) permettant de passer de l'état y_0 à l'état y_d en un temps fixé $T > 0$?

Contrôlabilité exacte

Définition 1.4.1 *On dit que le système (1.6) est exactement contrôlable au temps*

$T > 0$, *si pour tout* $y_d \in H$ *il existe* $v \in L^2(0,T;U)$ *tel que* $y_v(T) = y_d$.

$$\forall y_d \in H, \exists v \in L^2(0,T;U) \ t.q. y_v(T) = y_d$$

Contrôlabilité nulle

Définition 1.4.2 *Le système (1.6) est dit exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps* $[0,T]$ *si et seulement s'il est possible de ramener tous les points dans l'espace* H *à l'origine au temps* T *via* ***un contrôle*** v *c-à-d.*

$$\forall y_d \in H, \exists v \in L^2(0,T;U) \ t.q. y_v(T) = 0.$$

Remarque 1.4.1 *La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité nulle,mais la réciproque n'est pas vraie en général.*

Contrôlabilité approchée

Définition 1.4.3 *On dit que les ystème (1.6) est faiblement (approximativement) contrôlable sur* $[0,T]$ *si pour tout* $y_d \in H$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* ***un contrôle*** $v \in L^2(0,T;U)$ *réalisant*

$$\|y_v(T) - y_d\|_H \prec \varepsilon$$

Opérateur de contrôlabilité $\mathbf{L}_T$

On sait que la solution de (1.6) s'écrit

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds.$$

On peut donc, introduire l'opérateur

$$\begin{cases} L_T : L^2([0,T];U) \to H \\ u \longmapsto \int_0^T S(t-s)Bv(s)ds. \end{cases}$$

On remarque que L_T peut aussi être défini comme $L_T v = y(T;0,v)$, c'est-à-dire comme la solution,à l'instant T, du problème correspondant à la donnée initiale 0 et au second membre (**contrôle**) Bv.

Proposition 1.4.1 *i) Le système (1.6) est exactement contrôlable ssi L_T est surjective c.à.d.*

$$\operatorname{Im} L_T = H$$

ii) Le système (1.6) est faiblement contrôlable ssi

$$\overline{\operatorname{Im} L_T} = H$$

Preuve.

i) Le système (1.6) est exactement contrôlable

$$\Longleftrightarrow \forall y_0, y_d \in H, \exists v \in L^2([0,T];U) : y_d = y_v(T) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds.$$

$\Longleftrightarrow$ L_T est surjective ou $\operatorname{Im} L_T = H$

ii) Le système (1.6) est faiblement contrôlable

$$\Longleftrightarrow \forall y_0, y_d \in H, \varepsilon \succ 0, \exists v \in L^2([0,T];U) : \|y_v(T) - y_d\| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall y_0, y_d \in H, \varepsilon \succ 0, \exists v \in L^2([0,T];U) : \|S(t)y_0 + L_T v - y_d\| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall y_0, y_d \in H, \varepsilon \succ 0, \exists v \in L^2([0,T];U) : \|L_T v - (S(t)y_0 - y_d)\| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \overline{\operatorname{Im} L_T} = H.$$

■

Chapitre 2

Intoduction à la contrôlabilité et à l'observabilité exactes

2.1 Contrôlabilité des systémes en dimension finie

On rappelle le systéme contrôlé décrit par le systéme ODE

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t)\ , t \in (0.T), \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Ici A est une matrice réelle $n \times n$, B est une matrice réelle $n \times m$, x : $[0, T] \longrightarrow R^n$ est l'état et $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est la fonction de contrôlé. Clairement $m \leq n$ et certainement on souhaite utiliser le nombre de contrôlés le moins possible, c'est-à-dire $m \prec n$.

La solution de (2.1) est donnée par la formule variationnelle

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \tag{2.2}$$

Définition 2.1.1 ***(contrôlabilité) :*** *On dit que (2.1) est contrôlable en temps $T > 0$, si pour donné x^0, $x^1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists u \in L^2(0,T;R^m)$ tel que $x(t)$ satisfaisant (2.1) satisfait aussi $x(T) = x^1$. Il est Null contrôlable, si $x(t)$ satisfait $x(T) = 0$.*

Proposition 2.1.1 *Pour les systèmes linéaires de dimension finie, la contrôlabilité nulle est équivalente à la contrôlabilité exacte. Pour voir ce premier résoudre, $y' = Ay$ avec $y(T) = x^1$, puis résoudre pour la contrôlabilité nulle de*

$$z' = Az + Bu,$$
$$z(0) = x^0 - y(0),$$
$$z(T) = 0.$$

Alors $x = y + z$ vérifie $x\prime = Ax + Bu$, $x(0) = x^0$, $x(T) = y(T) = x^1$.

Remarque 2.1.1 *Même pour les systèmes de dimension finie, la contrôlabilité n'est pas toujours atteinte.*

Exemple 2.1.1 *On considére le système $x_1' = x_1 + u$, $x_2' = x_2$. C'est-à-dire $x\prime = Ax + Bu$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Clairement, u n'influence pas la trajectoire $x_2(t) = x_2^0 e^t$ et donc il n'est pas contrôlable .

Remarque 2.1.2 *Cela ne veut pas dire que dans un système* 2×2*, il faut toujours deux commandes. Il existe des systèmes* 2×2 *où un seul contrôle suffira pour obtenir la contrôlabilité*

Exemple 2.1.2 *On considére le système* $x_1' = x_2$*,* $x_2' = u - x_1$*, c'est-à-dire*

$$x\prime = Ax + Bu \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manière équivalente, $x_1'' + x_1 = u$ *(oscillateur harmonique). Contrairement à l'équation,* u *agit sur la deuxième équation, où à la fois* x_1 *et* x_2 *sont présents. Par conséquent, on ne peut pas conclure immédiatement à la contrôlabilité exacte ou autrement .*

Mais le système actuel est en fait contrôlable. Pour voir cela, choisissez n'importe quelle fonction z satisfaisant les conditions initiales et finales, à savoir $z(0) = x_1^0$, $z'(0) = x_2^0$, $z(T) = x_1^1$, $z'(T) = x_2^1$.

De nombreuses fonctions de ce type existent. Maintenant $x_1 = z$, $x_2 = z'$, avec le contrôle $u = z" + z$ résoudra le contrôle problème .

2.2 Critères équivalents via le système d'observabilité

On considére le système adjoint

$$\begin{cases} -\phi' = A^*\phi \ , \ t \in (0,T) \\ \phi(T) = \phi_T. \end{cases} \tag{2.3}$$

Où A^* est l'adjoint de A qui vérifie $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\phi_T \in \mathbb{R}^n$.

En multipliant (2.1) par ϕ et (2.3) par x, il vient

$$\begin{aligned}\langle x', \phi\rangle &= \langle Ax, \phi\rangle + \langle Bu, \phi\rangle \\ &= \langle x, A^*\phi\rangle + \langle Bu, \phi\rangle \\ &= -\langle x, \phi'\rangle + \langle Bu, \phi\rangle,\end{aligned}$$

ce qui donne $\frac{d}{dt}\langle x, \phi\rangle = \langle Bu, \phi\rangle$. On intégre par rapport à t, on obtient

$$\langle x(T), \phi_T\rangle - \langle x^0, \phi(0)\rangle = \int_0^T \langle u, B^*\phi\rangle.$$

Donc, on a la proposition suivante.

Proposition 2.2.1 *Le système (2.1) est nul contrôlable, c'est-à-dire $x(T) = 0$ si et seulement si*

$$\int_0^T \langle u, B^*\phi\rangle + \langle x^0, \phi(0)\rangle = 0, \tag{2.4}$$

pour tout $\phi_T \in \mathbb{R}^n$ et ϕ est la solution de(2.3).

On remarque que pour tout ϕ_T, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ l'equation (2.4) est la condition d'optimalité pour les points critiques de la fonctionnelle quadratique $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$J(\phi_T) = \frac{1}{2}\int_0^T |B^*\phi|^2 + \langle x^0, \phi(0)\rangle,$$

où ϕ est la solution correspondant à (2.3).

On suppose que $\hat{\phi}_T$ est un minimiseur par J, c'est-à-dire

$$J(\hat{\phi}_T) = \min J(\phi_T),$$

puis en utilisant le fait que $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{J(\hat{\phi}_T + h\phi_T) - J(\hat{\phi}_T)}{h} = 0$, pour tout $\phi_T \in \mathbb{R}^n$ (premier principe), on voit que

$$\int_0^T \langle B^*\hat{\phi}, B^*\phi \rangle dt + \langle x^0, \phi(0) \rangle = 0.$$

Alors (2.1) implique que $u = B^*\hat{\phi}$ est un contrôle conduisant la système x^0 à 0.

Proposition 2.2.2 *On suppose que J admet un minimiseur $\hat{\phi}_T \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{\phi}$ soit la solution correspondante du système adjoint (2.3) avec des données $\hat{\phi}(T) = \hat{\phi}_T$. Alors $u = B^*\hat{\phi}$ est un contrôle du système (2.1) avec des données initiales x^0.*

Remarque 2.2.1 *C'est la méthode variationnelle pour obtenir un contrôle si J a un minimum . On remarque aussi qu'en faisant varier J, il peut être possible d'obtenir différents types de contrôle.*

Définition 2.2.1 ***(Observabilité) :*** *Le système (2.3) est dit observable en temps $T > 0$ si $\exists c > 0$ tel que*

$$\int_0^T |B^*\phi|^2 \geq c\,|\phi(0)|^2 . \qquad \textit{(Inégalité d'observabilité)} \tag{2.5}$$

pour $\phi_T \in \mathbb{R}^n$ et ϕ est la solution de (2.3). Cela équivaut à

$$\int_0^T |B^*\phi|^2 \geq c\,|\phi(0)|^2 \tag{2.6}$$

L'équivalence découle du fait que l'application qui associe $\phi_T \in \mathbb{R}^n$ au vecteur $\phi(0) \in \mathbb{R}^n$ est un opérateur linéaire borné à inverse borné.

Remarque 2.2.2 *Il nous dit en gros que, si l'on part de $\phi(T) = \phi_T$ qui évolue (inversement) selon l'équation adjointe et observe la quantité $B^*\phi(t)$ $\forall\ 0 < t < T$, alors $\phi(0)$ est déterminé de manière unique. L'inégalité ci-dessus est équivalente à le principe de continuation unique*

$$B^*\phi(t) = 0 \qquad \forall\ t \in [0,T] \Longrightarrow\ \phi_T = 0. \tag{2.7}$$

Clairement, (2.6) implique le principe de continuation unique. Inversment, si (2.7) est vrai, alors

$$|\phi_T|_* = \left(\int_0^T |B^*\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à la norme $|\phi_T|$ dans $\mathbb{R}^n$ (dimension finie), on a (2.6).

Remarque 2.2.3 *En général, dans le cas de dimension infinie, l'"inégalité, d'observabilité n'est pas équivalente au principe de continuation unique. Cela donne différentes notions de contrôlabilité, à savoir exacte et approximative. En effet p.c.u est plus faible que l'inégalité, d'observabilité.*

Théoréme 2.2.1 ([1]) *Le système (2.1) est exactement contrôlabe en temps $T > 0$ si et seulement si (2.3) est observabe dans le temps T.*

Preuve. On suppose que (2.6) est satisfaite. Ceci implique la coercivité de J c'est-à-dire, $\lim\limits_{|\phi_T| \longrightarrow \infty} J(\phi_T) = \infty$. La continuité avec la convexité de J, implique alors l'existence d'un minimiseur et donc la contrôlabilité. Inversement, si (2.1) est contrôlabe et si (2.6) n'est pas vrai, alors $\exists \phi_T^k \subseteq R^n$, $k \geq 1$ tel que $\left|\phi_T^k\right| = 1$, $\forall k$ et $\int_0^T \left|B^*\phi^k\right|^2 \to 0$, lorsque $k \to +\infty$ demandent ce qui implique $\phi_T^k \to \phi_T$ (via d'une sous-suite) et $|\phi_T| = 1$. De plus, $\int_0^T |B^*\phi|^2 = 0$ où ϕ est la solution correspondant à ϕ_T. ■

De la contrôlabilité, on a, $\exists\ u \in L^2(0,T)$ tel que

$$\int_0^T \langle u, B^*\phi_k \rangle = -\langle x^0, \phi_k(0) \rangle, \quad k \geq 1.$$

D'où

$$\langle x^0, \phi_k(0) \rangle = 0 \Longrightarrow \phi(0) = 0$$

Comme a x^0 est arbitraire, on obtient $\phi_T = 0$ ce qui est une contradiction car $|\phi_T| = 1$.

Remarque 2.2.4 *Ainsi le probléme de contrôlabilité exacte se réduit*

(i) un systéme non contrôlé (équation adjointe)

(ii) une observation

(iii) une inégalité d'observabilité .

2.2.1 Condition de contrôlabilité de Kalman

Dans les années 1960, R.E Kalman, a donné un critére équivalent pour les systémes en dimension finie, il dit que le systeme (2.1) est contrôlable si et seulement si Rang $[B, AB, ...A^{n-1}B] = n$.

Bien sûr, ceci n'est pas généralisable aux systémes de dimension infinie, mais on suit le chemin décrit précédemment .

2.3 Contrôlabilité intérieure de l'équation d'onde

On considére le probléme (systéme contrôle)

$$\begin{cases} y" - \Delta y = u\ \chi_\omega \quad \text{dans} \quad (0,T)\times\Omega \\ y = 0 \quad \text{sur} \quad \sum = (0,T)\times\partial\Omega \\ y(0,.) = y^0\ ,\ y'(0,.) = y^1\ . \end{cases} \tag{2.8}$$

Ici $y = y(x,t)$ est l'etat et le control $u = u(x,t)$ agit sur une sous-région $w \in \Omega$, $\Omega \subseteq R^n$ est de classe $C^2, T > 0$ et χ_ω est la fonction caractéristique de w.

2.3.1 Existence et unicité

Théoréme 2.3.1 ([1]) *Pour tout $u \in L^2((0,T)\times\omega)$ et $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $\exists!$ solution faible y telle que $(y, y') \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))$ et est donnée par la formule varitionnelle*

$$(y(t), y'(t)) = S(t)(y^0, y') + \int_0^t S(t-s)(0, u(s)\chi_\omega(s))ds \tag{2.9}$$

Ici $S(t)$ est le groupe d'isométries générées par l'opérateur d'onde $H_0^1\times L^2$. De plus, si $u \in W^{1,1}((0,T); L^2(\omega))$, $(y^0, y^1) \in (H^2\cap H_0^1)\times H_0^1$, alors $(y, y') \in C^1([0,T]; H_0^1\times L^2)\cap C([0,T]; (H^2\cap H_0^1)\times H_0^1)$.

L'équation d'onde est réversible dans le temps. On peut donc résoudre l'équation rétrograde dans le temps avec la condition initiale $y(T,.) = y_T^0$ et $y'(T,.) = y_T^1$ pour $0 \le t \le T$ (adjoint).

Définition 2.3.1 ***(contrôlabilité exacte) :*** *On dit que (2.8) est exactement contrôlable en temps T, si pour toute donnée initiale (y^0, y^1) et donnée finale $(y_T^0, y_T^1) \in H_0^1\times L^2$, il existe un contrôle $u \in L^2((0,T)\times\omega)$ tel que la solution y de (2.8) vérifie aussi $y(T,.) = y_T^0$, $y'(T,.) = y_T^1$.*

Définition 2.3.2 ***(contrôlabilité nulle)*** *Le systéme (2.8) est dit exactement nulle contrôlable si $\exists u \in L^2((0,T) \times \omega)$ telle que la solution y de (2.8) vérifie $y(T) = 0 = y'(T)$.*

Remarque 2.3.1 *En raison de la réversibilité temporelle,il est lacile de voir que la contrôlabilité exacte et nulle contrôlabilité sont équivalentes (Exercice).*

Définition 2.3.3 ***(contrôlabilité approchée)*** *Le systéme est approximativement contrôlable si l'ensemble atteignable $R(T)$ est dense $H_0^1 \times L^2$, où $R(T) = \left\{(y(T), y'(T)) : y \text{ est une solution de (2.8)}, u \in L^2((0,T) \times \omega), (y^0, y^1) \in H_0^1 \times L^2\right\}$.*

Remarque 2.3.2 *Par linéarité l'ensemble atteignable est convexe. Comme $\mathbb{R}^n$ est le seul ensemble dense convexe dans $\mathbb{R}^n$, les contrôlabilités approchée et exacte sont les mêmes dans le cas de dimension finie.*

Approche variationnelle et observabilité

Pour $(\phi_T^0, \phi_T^1) \in L^2 \times H^{-1}(\Omega)$, on considére l'équation rétrograde homogéne

$$\begin{cases} \phi" - \triangle\phi = 0 \text{ dans } (0,T) \times \Omega \\ \phi = 0 \text{ sur } \sum \\ \phi(T) = \phi_T^0, \phi'(T) = \phi_T^1. \end{cases} \tag{2.10}$$

On remarque ici que données (ϕ_T^0, ϕ_T^1) sont beaucoup plus faibles que les données de (2.8), il faut comprendre la solution en utilisant la méthode de transposition et il existe la solution $(\phi, \phi') \in C([0,T]; L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. De plus il vérifie

$$\|\phi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\phi'\|^2_{L^\infty(0,T;H^{-1})} \leq C \left\|(\phi_T^0, \phi_T^1)\right\|_{L^2 \times H^{-1}(\Omega)}.$$

On peut suivre une analyse similaire dans le cas de dimension finie. En Multipliant (2.8) par ϕ, et (2.10) par y, puis on intégre par parties pour obtenir

Proposition 2.3.1 ([7]) *Le contrôle $u \in L^2((0,T)\times\omega)$ conduit les données initiales $(y^0, y^1) \in H_0^1 \times L^2$ vers la données finale $(0,0) = (y(T), y'(T))$ si et seulement si*

$$\int_0^T \int_\omega \phi u = \langle \phi'(0), y^0 \rangle_{H^{-1}\times H_0^1} - \langle \phi(0), y^1 \rangle_{L^2}$$

pour tout $(\phi_T^0, \phi_T^1) \in L^2 \times H^{-1}$ et ϕ est la solution de (2.10).

On note que le membre de droite est le produit de dualité entre $L^2 \times H^{-1}$ et $H_0^1 \times L^2$ donné par

$$\langle (\phi^0, \phi^1), (y^0, y^1) \rangle := \langle \phi^1, y^0 \rangle_{H^{-1}\times H_0^1} - \langle \phi^0, y^1 \rangle_{L^2}$$

Grace à la réversibilité, on peut également affirmer que le systéme (2.8) est null contrôlable si $\exists u \in L^2((0,T)\times\omega)$ tel que

$$\int_0^T \int_\omega \phi u = \langle (\phi^0, \phi^1), (y^0, y^1) \rangle \tag{2.11}$$

où ϕ est la solution de (2.10) avec la condition initiale $\phi(0) = \phi^0$, $\phi'(0) = \phi^1$ au lieu de la condition finale.

L'équation (2.11) est en effet la condition d'optimalité pour la minimisation de la fonctionnelle $J : L^2 \times H^{-1} \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega |\phi|^2 + \langle (\phi^0, \phi^1), (y^0, y^1) \rangle.$$

On suppose que $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$ est un minisiseur de J, alors d'après la premier principe encore, il est facile de voir

$$\int_0^T \int_\omega \phi\hat{\phi} = \langle(\phi^0, \phi^1), (y^0, y^1)\rangle,$$

où $\hat{\phi}$ est la solution de (2.10) avec les conditions initiales $\hat{\phi}(0) = \hat{\phi}^0, \hat{\phi}'(0) = \hat{\phi}^1$. En comparant avec (2.11), on voit que $u = \hat{\phi}\Big|_\omega$ c'est un contrôle qui conduit (y^0, y^1) à $(0, 0)$ en temps T. Ainsi on a une procédure constructive pour obtenir des contrôles.

Donc le problème de la contrôlabilité réduit à l'existence d'un minisiseur de J.

Il s'agit donc de chercher des conditions suffisantes pour l'existence d'un minisiseur. Ce qui suit l'observabilité donne une condition suffisante pour l'existence d'un minisiseur

2.4 Inégalité de l'observabilité

On considére l'équation

$$\begin{cases} \phi\text{''} - \triangle\phi = 0 \text{ dans } (0,T) \times \Omega \\ \phi = 0 \text{ sur } \sum \\ \phi(T) = \phi^0_T, \phi'(0) = \phi^1 \end{cases} \tag{2.12}$$

Définition 2.4.1 ([1]) *L'équation (2.12) est dite observable en temps T si $\exists$ une constante $C > 0$ tel que*

$$\left\|(\phi^0, \phi^1)\right\|_{L^2 \times H^{-1}} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 = C \left\|\phi\right\|_{L^2((0,T)\times\omega)} \tag{2.13}$$

pour tout $(\phi^0, \phi^1) \in L^2 \times H^{-1}$ *et* ϕ *est la solution de (2.12).*

L'inégalité (2.13) indique qu'en observant ϕ dans un sous-ensemble $\omega \subset \Omega$ pour le temps jusqu'à T, on peut complètement (uniquement) déterminer la solution ϕ.de (2.12).

Remarque 2.4.1 *L'inégalité d'observabilité est une condition suffisante pour la contrôlabilité. Car,si (2.13) est vraie, alors la fonctionnelle* J *est coercive ; c'est à dire .*

$$J(\phi^0, \phi^1) \to \infty \ \textit{comme} \ \left\|(\phi^0, \phi^1)\right\|_{L^2 \times H^{-1}} \to \infty.$$

Comme J *est également convexe et continue (la continuité découle de l'estimation* ϕ *en terme des valeurs initiales), il s'ensuit que* J *atteint un minimum. Ceci provient du standard calcul de variations.*

Remarque 2.4.2 *Le contrôle donné par cette méthode variationnelle a une norme minimale en* $L^2((0,T) \times \omega)$ *parmi tous les autres contrôles s'il existe. Pour le voir, soit* $\tilde{u}$ *tout autre contrôle qui conduit le systéme à zéro. Si* $u = \hat{\phi}\Big|_\omega$ *est le contrôle donné par la méthode variationnelle ci-dessus, alors en prenant la fonction de test* $\phi = \hat{\phi}\Big|_\omega$ *et* $u = \hat{\phi}\Big|_\omega$ *dans la condition d'optimalité, on obtient*

$$\left\|\hat{\phi}\right\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} = \langle \hat{\phi}^1, y^0 \rangle_{1,-1} - \langle \hat{\phi}^0, y^1 \rangle_{2,2}.$$

Encore une fois, pour tout autre contrôle $\tilde{u}$*, on a*

$$\int_0^T \int_\omega \hat{\phi}\tilde{u} = \langle \hat{\phi}^1, y^0 \rangle_{1,-1} - \langle \hat{\phi}^0, y^1 \rangle_{2,2}$$

donc

$$\left\|\hat{\phi}\right\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} = \int\int_\omega \hat{\phi}\tilde{u} \leq \left\|\hat{\phi}\right\| \|\tilde{u}\|$$

ce qui implique

$$\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^2((0,T)\times\omega)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^2((0,T)\times\omega)}$$

Remarque 2.4.3 *Dans les sections précédentes, on a réduit le problème de la contrôlabilité à celui d'une inégalité d'observabilité qui nécessite pour la preuve de l'existence d'un minimiseur.*

Cependant, en général, l'inégalité d'observabilité n'a pas besoin d'être vérifiée pour T ou ω arbitraires. Il nécessite que T soit suffisamment grand (comme le diamètre de Ω) et ω doit satisfaire (ou la partie la frontière où les contrôles agissent) certaine condition géométrique. voir C.Bardos, G. Lebean et J. Rauch .

Il est également montré plus loin que la condition géométrique est suffisante même dans le cas des domaines C^3. L'autre méthode utilise des techniques de multiplicateurs pour prouver l'inégalité d'observabilité qui fournit des conditions suffisantes. On mentionne plus sur ces aspects lors de la discussion MUH.

Quelques remarques sur l'équation de la chaleur (cas parabolique) : La contrôlabilité approchée est une notion plus appropriée pour l'équation de la chaleur. Ceci est du à l'effet de lissage de l'équation de la chaleur. Pour $\Omega\backslash\omega \neq \emptyset, \omega \subset \Omega$, on sait que les solutions sont $C^\infty(\Omega\backslash\omega)$.donc si $y^1 \in R(T, y^0)$, l'ensemble atteignable, alors $y(T) = y^1|_{\Omega\backslash\omega}$ est C^∞. Donc si on utilise la notion de contrôlabilité exacte comme $R(T, y^0) = L^2(\Omega)$, alors la contrôlabilité exacte ne sera pas valable pour l'équation de la chaleur car les restrictions $L^2(\Omega)$ des fonctions $\Omega\backslash\omega$ n'ont pas d'être lisses.

2.5 Equation d'onde 1D et inégalité d'Ingham

Théoréme 2.5.1 ([1]) *Soit* $(\lambda_n)_{n\in Z}$ *une suit de nombres réels et* $\gamma > 0$ *telle que*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0,$$

pour tout n et $T > \pi/\gamma$. Alors $\exists C = C(T, \gamma) \succ 0$ tel que pour toute suite finie (a_n),on a

$$\sum |a_n|^2 \leq C \int_{-T}^{T} \left|\sum a_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt \tag{2.14}$$

L'inégalité ci-dessus est fondamentalement une généralisation de l'égalité classique de Parseval pour les suites orthogonal.

Remarque 2.5.1 *Bien sûr l'inégalité inverse est en effet vrai et en fait, il vaut pour tout* $T > 0$. *Mais (2.14) est vrai si si* T *est suffisamment grand.*

Remarque 2.5.2 *Note que* γ *est l'écart minimal entre deux éléments consécutifs. Ce qui suit le théoréme affirme que nous n'avons besoin que de la distance asymptotique* $\gamma_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n|$. *Ce a un effet sur le résultat de contrôlabilité et fournit un* T *optimal.*

Théoréme 2.5.2 *Soient* $\lambda_n, \gamma, \gamma_\infty,$ *comme ci-dessus et* $T > \pi/\gamma_\infty$ *(Notez que* $\gamma_\infty \geq \gamma$ *et danc* $\pi/\gamma_\infty \leq \pi/\gamma$*), alors* $\exists c_1, c_2 > 0$ *tels que pour toute suite finie* (a_n)*, on a*

$$c_1 \sum |a_n|^2 \leq \int_{-T}^{T} \left|\sum a_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt \leq c_2 \sum |a_n|^2 .$$

2.5.1 Observabilité pour l'équation d'onde 1D

On considère le probléme

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} = u\chi_\omega \text{ dans } (t,x) \in I \times I \\ y(t,0) = y(t,1) = 0, t \in (0,T). \\ y(0) = y^0 \ , \ y'(0) = y^1 \end{cases} \tag{2.15}$$

Ici $I = (0,1), \omega = (a,b)$ un intervalle $\subset (0,1)$ où les contrôles sont distribués. L'inégalité d'observabilité

$$\left\|(\phi^0, \phi^1)\right\|^2_{L^2 \times H^{-1}} \leq C \int_0^T \int_a^b |\phi|^2 \, dxdt \tag{2.16}$$

où ϕ est la solution de

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0 \text{ dans } \ (t,x) \in I \times I \\ \phi(t,0) = \phi(t,1) = 0, t \in (0,T). \\ \phi(0) = \phi^0 \quad , \phi'(0) = \phi^1 \end{cases} \tag{2.17}$$

Décomposition spectrale

L'équation ci-dessus peut être écrite sous la forme $\Phi' + A\Phi = 0, \Phi(0) = \Phi^0$, où A est l'opérateur non borné sur $H = L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ avec $D(A) = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ défini par

$$A\Phi = \begin{pmatrix} -z \\ -\partial_x^2 \phi \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ z \end{pmatrix}, \ z = \phi'$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_x^2 & 0 \end{pmatrix}$. L'opérateur de Laplace $-\partial_x^2$ est un opérateur non borné sur H^{-1} de domaine H_0^1 défini par $\langle -\partial_x^2\phi, \psi \rangle = \int \phi_x \psi_x,\ \phi, \psi \in H_0^1(0,1)$. En fait, A est un isomorphisme de $H_0^1 \times L^2 \to (H_0^1 \times L^2)' = L^2 \times H^{-1}$.

·Les valeurs propres et les fonctions propres de A sont données par

$$\lambda_n = sgn(n)(n\pi i), n \in Z^*$$

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_n} \\ -1 \end{pmatrix} \sin(n\pi x)$$

De plus $\{\Phi_n\}$ est une base orthonormée pour $H_0^1 \times L^2$

·Puisque A est un isomorphisme, on obtient aussi $\{\lambda_n \Phi_n\} = \{A\Phi_n\}$ est une base orthonormée pour $L^2 \times H^{-1}$

·$\Phi = \sum a_n \Phi_n \in H_0^1 \times L^2 \iff \sum |a_n|^2 < \infty$ et $\Phi = \sum a_n \Phi_n \in L^2 \times H^{-1} \iff \sum \frac{|a_n|^2}{|\lambda_n|^2} < \infty$.

On suppose que la donnée initiale (ϕ^0, ϕ^1) ait développement de Fourier $\begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \end{pmatrix} = \Phi^0 = \sum a_n \Phi_n \in L^2 \times H^{-1}$, alors la solution $\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}$ est donnée par $\Phi(t) = \sum a_n e^{\lambda_n \mathbf{t}} \Phi_n$.

On voit maintenant ce qu'il faut prouver pour obtenir (2.16), à savoir l'inégalité d'observabilité :

$$L.H.S = \left\|(\phi^0, \phi^1)\right\|^2_{L^2 \times H^{-1}} = \sum_{n \in Z^*} |a_n|^2 \frac{1}{n^2 \pi^2}$$

$$R.H.S = \int_0^T \int_a^b |\phi(t,x)|^2 = \int_a^b \int_0^T \left| \sum a_n e^{\mathbf{in\pi t}} \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right|^2$$

En appliquant l'inégalité d'Ingham pour la séquence $\{n\pi\}$ et $\left\{ \frac{a_n}{n\pi} \sin n\pi x \right\}$ pour obtenir (Notez que $(n+1)\pi - n\pi = \pi := \gamma \succ 0$)

$$\begin{aligned} R.H.S &\geq \int_a^b \sum_{n\in Z^*} \left| \frac{a_n}{n\pi} \sin n\pi x \right|^2 \quad \text{pour } T > \frac{2\pi}{\gamma} = 2 \\ &\geq \sum_{n\in Z^*} \frac{|a_n|^2}{n^2\pi^2} \int_a^b \sin^2 n\pi x dx \end{aligned}$$

(Remarque, nous avons $T > 2\pi/\gamma$ puisque l'intervalle est $(0,T)$ et non $(-T,T)$). Maintenant, si on montre que $C = \inf_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^*} \underbrace{\int_a^b \sin^2 n\pi x}_{=\mathbf{C}_n} \succ 0$, on obtient LHS (2.16)$\geq$ C RHS(2.16).

Pour voir ça,

$$\begin{aligned} C_n &= \int_a^b \sin^2 n\pi x = \int_a^b \frac{1-\cos 2n\pi x}{2} \\ &\geq \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2|n|\pi} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\exists n_0$ tel que $\inf_{n\geq n_0} C_n > 0$ puisque $b_n > 0$, $\forall n$, on obtient $\inf_{\mathbf{n}} C_n > 0$. On a donc l'inégalité d'observabilité pour $T > 2$.

Chapitre 3

Méthode d'Unicité de Hilbert

On considére le problème

$$\begin{cases} y_{tt} - \triangle y = 0 \text{ dans } (0,T) \times \Omega = Q \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \text{ dans } \Omega \\ y = u \quad \text{sur} \quad \sum = (0,T) \times \Gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

Le contrôle agit à travers la frontière Γ (ou il peut aussi être travers une partie de la frontière Γ_0) sur le temps 0 à T. On recherche un contrôle u tel que la solution y vérifie $y(T) = y\prime(T) = 0$ (i.e. on recherche la contrôlabilité nulle).

3.1 Method de l'unicité de Hilbert

On considère le probleme rétrograde donné par

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0 \text{ dans } Q \\ y = u \text{ sur } \sum \\ y(T) = y'(T) = 0 \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

et le problème homogene donné par

$$\left| \begin{array}{l} p'' - \Delta p = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial v} = u \text{ sur } \sum \\ p = 0 \text{ sur } \sum \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Cela motive à chercher un contrôle de la forme $u = \dfrac{\partial p}{\partial v}$ et p vérifie l'équation

$$p'' - \Delta p = 0 \text{ dans } Q$$

$$p = 0 \text{ sur} \sum.$$

Mais quelle serait la condition initiale ?

Ainsi, on commençe avec des valeurs initiales arbitraires $\{\phi^0, \phi^1\}$ et on résoudre le problème

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 \text{ dans } Q \\ \phi = u \text{ sur } \sum \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 \end{cases} \tag{3.4}$$

et ainsi résoudre pour ψ comme

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta\psi = 0 \text{ dans } Q \\ \psi = \dfrac{\partial \phi}{\partial v} \text{ sur } \sum \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

On définit l'application $\Lambda : (\phi^0, \phi^1) \longmapsto (\psi(0), \psi'(0))$. On souhaite a trouver (ϕ^0, ϕ^1) tel que $\psi(0) = y^0$, $\psi'(0) = y^1$ de sorte que la contrôlabilité exacte soit atteinte et par suite le contrôle est donnée par $\dfrac{\partial \phi}{\partial v}$ avec la solution $y = \psi$. Pour démontrer que $\wedge$ est surjective, on a besoin d'espaces appropriés pour définir les solution ϕ et ψ.

Remarque 3.1.1 *La solution ϕ a une énergie finie, c'est-à-dire.*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(|\phi'|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \phi(x,t)|^2 \right) dx < \infty$$

C'est-à-dire $\phi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\phi' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$. En outre, l'énergie est conservée, c'est-à-dire que pour tout t,

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |\phi'|^2 + \int_0^T \left|\nabla \phi^0\right|^2 \right).$$

Difficultés initiales

On mentionne deux des difficultés fondamentales du bien définition de la méthode ci-dessus avant d'en venir à la surjectivité de Λ.

i) pour p.p. t, $\phi(t,.) \in H^1(\Omega)$, et donc $\bigtriangledown\phi(t,.) \in L^2(\Omega)$. Donc, en général $\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\right|_{\sum} = \bigtriangledown\phi.v|_{\sum}$ n'est pas bien défini.

ii) En général, on peut exiger $\phi(t,.) \in H^2(\Omega)$ pour définir $\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\right|_{\sum}$, ce qui en général n'est pas vrai. Cependant, cette difficulté est surmontée en établissant ce que est connue comme une *régularité cachée* pour $\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\right|_{\sum}$. En fait, $\dfrac{\partial\phi}{\partial v} \in L^2(\sum)$.

Théoréme 3.1.1 *([1]) Pour la solution dans l'espace d'énergie du problème (3.4), la quantité* $\partial_v\phi|_{\sum} = \dfrac{\partial\phi}{\partial v}|_{\sum}$ *est dans* $L^2(\sum)$ *et vérifie, pour tout* $T > 0$

$$\|\partial_v\phi\|^2_{L^2(\sum)} \leq C_T\left(\left\|\phi^0\right\|^2_{H^1(\Omega)} + \left\|\phi^1\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.6}$$

La preuve est basé sur *la méthode du multiplicateur* avec des multiplicatrices appropriées.

Plus précisément, on utilise les multiplicateurs de la forme $q_k(x)\dfrac{\partial\phi}{\partial x_k}$, où $q = (q_1...q_n)$ est un champ vectoriel lisse et enfin, on choisit q tel que $q = v$ sur $\sum$.

ii) Le deuxième problème est l'interprétation de la solution ψ avec les données de Dirichlet faibles $\psi = \dfrac{\partial\phi}{\partial v}$ qui n'est que dans $L^2(\sum)$ par le théorème précédent.

La solution doit être interprétée avec une faible limite de donnée L^2. Ceci est fait en utilisant la méthode de transposition (dualité, adjoint).

Soit $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\theta^1 \in L^2(\Omega)$, définissent la solution en énergie finie $\theta \in C([0,T];H_0^1(\Omega) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ du système

$$\left|\begin{array}{ll} \theta_{tt} - \Delta\theta = f & \text{dans } \; Q \\ \theta = 0 & \text{sur } \sum \\ \theta(0) = \theta^0, \; \theta'(0) = \theta^1. & \end{array}\right. \tag{3.7}$$

En multipliant (3.5) par θ et (3.7) par ψ (en supposant qu'il y a ψ une solution régulière) et on intégre par parties, il vient

$$\int_Q f\psi + \left\langle \theta^0, \psi'(0) \right\rangle + \left\langle \theta^1, \psi(0) \right\rangle = -\int_{\sum} \partial_v \theta . \partial_v \phi \tag{3.8}$$

En effet, le dernier terme est bien défini en raison de la régularité cachée.

Définition 3.1.1 ***(Solution de transpoition)*** *On dit que* $\psi \in C([0,T]; L^2(\Omega) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ *est une solution de transpoition de (3.5) si (3.8) est vrai pour tout* $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ *et pour tout* $(\theta^0, \theta^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Remarque 3.1.2 *L'unicité peut être prouvée en utilisant le théorème de représentation de Riesz. En outre* ψ *vérifie l'estimation de continuité :*

$$\|\psi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\psi'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C \left(\left\|\phi^0\right\|_{H_0^1} + \left\|\phi^1\right\|_{L^2} \right)$$

Ainsi, on a $(\psi(0), \psi'(0)) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Maintenant, on définit

$$\Lambda : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

par $\Lambda(\phi^0, \phi^1) = (\psi(0), -\psi'(0))$. On a $\langle \Lambda(\phi^0, \phi^1), (\phi^0, \phi^1) \rangle = \left\| \dfrac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2_{L^2(\sum)}$.
La continuité de Λ par l'estimation (3.6). Pour prouver que la isomorphisme de Λ, on a besoin d'une *inégalité inverse* de (3.6). En d'autres termes, on a besoin d'avoir

$$\left\|(\phi^0, \phi^1)\right\|^2_{H_0^1 \times L^2} \leq C \int_{\sum} |\partial_v \phi|^2 \tag{3.9}$$

Ce n'est rien d'autre que l'inégalité d'observabilité $\partial_v \phi$ à la frontière.

Conclusion : Si (3.9) est vérifiée, alors le problème de contrôlabilité est résolvé.

Pour, étant donné $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, soit $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ on résout $\Lambda(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1) = (y^0, -y^1)$. Maintenant soit $\hat{\phi}$ solution de (3.4) avec $\hat{\phi}(0) = \hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1(0) = \hat{\phi}^1$ et solution de (3.5) pour $\hat{\psi}$ avec $\hat{\psi} = \dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial v}$ sur $\sum$. Alors de le définition $\Lambda(\phi^0, \phi^1) = (\hat{\psi}(0), -\hat{\psi}'(0))$ et donc $\hat{\psi}(0) = y^0, \hat{\psi}'(0) = y^1$.

Donc le problème de contrôlabilité (3.1) est résolu avec $y = \hat{\psi}$ de contrôle $u = \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial v}$.

3.2 Inégalité d'observabilité

Théoréme 3.2.1 *Soit Ω de classe C^2. Alors $\exists T^0 > 0$ tel que pour $T > T_0$, la solution faible ϕ de (3.4) satisfait*

$$(T - T_0) \left\|(\phi^0, \phi^1)\right\|^2_{H_0^1 \times L^2} \leq C \int_{\sum} \left|\frac{\partial \phi}{\partial v}\right|^2 .$$

Il existe $T_0 > 0$ tel que pour $T > T_0$, le problème (3.1) est exactement contrôlable en temps $T > T_0$.

3.2.1 Condition suffisante sur la partie contrôle de Γ

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point fixe quelconque et on définit $m(x) = x - x_0$. On considere une partie de la frontiere définie par

$$\begin{aligned} \Gamma_0 \colon &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot v(x) \geq 0\}, \Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0 \\ \textstyle\sum_0 \colon &= (0, T) \times \Gamma_0, \textstyle\sum_1 = (0, T) \times \Gamma_1 \\ R_0 \colon &= R(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \{m(x)\}, \ \Gamma_0 = 2R(x_0) \end{aligned}$$

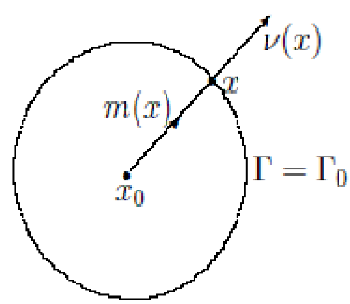
Exemple 3.2.1 *Si Ω est une boule de rayon R, x_0 est le centre, alors $\Gamma_0 =$*

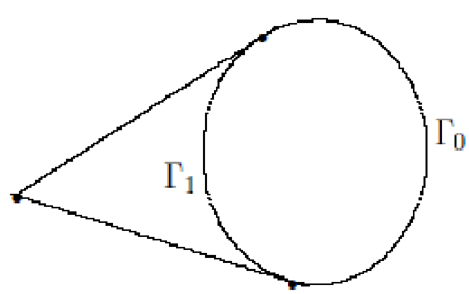
$\Gamma, R_0 = R, T_0 = 2R$. *Par contre, si x_0 est à l'extérieur de la boule Ω, tracez les tangentes au cercle. Alors T_0 est la sont qui se trouve à l'opposé du point x_0.*

En utilisant la même technique de multiplicateurs, on peut trouver.

Théoréme 3.2.2 *([1]) Soit T_0 et Γ_0 comme ci-dessus. Alors, pour $T > T_0$, la solution faible ϕ de (3.4) satisfait*

$$(T - T_0) \left\|(\phi^0, \phi^1)\right\|^2_{H_0^1 \times L^2} \leq C \int_{\sum_0} \left|\frac{\partial \phi}{\partial v}\right|^2$$





Remarque 3.2.1 *1. Le résultat ci-dessus nous donne la possibilité d'exercer un contrôle sur certaines parties de la frontière qui dépend clairement du choix de x_0.*
2. Le temps minimum requis pour la contrôlabilité est supérieur à $T_0 = 2R_0 = 2R(x_0)$. Donc T_0 augment comme R_0 augmente. Donc notre préférence serait de

choisir le plus petit R_0 qui est le rayon du plus petit cercle contenant Ω de centre x_0. Ainsi le bon choix de x_0 semble provenir de Ω. Par exemple, si Ω est une boule, alors le meilleur choix de x_0 est le centre et donc $T_0 = 2R_0 = diamètre(\Omega)$.

Généralisation : La méthode MUH introduite est très général et peut s'appliquer à bien d'autres systèmes. Cela peut également s'applique au même systèmes avec différents espaces de contrôlabilité et différents condition aux limites. Nous esquissons quelques une de ces aspects.

Dans la solution précédente, nous avions obtenu la contrôlabilité dans l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ avec des contrôles dans $L^2(\sum)$. Autrement dit, les trajectoires se déplacent dans l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

On considére maintenant, G comme tout espace de fonctions de Hilbert défini sur $\sum_0$.

Soit F_G le complété de l'espace $D(\Omega) \times D(\Omega)$ par rapport à la norme définie par $\|(\phi^0, \phi^1)\|_{F_G} :\ = \left\| \dfrac{\partial \phi}{\partial v} \right\|_G$.

Rappelons que dans la situation précédent, on a actuelement prouvé que $\left\| \dfrac{\partial \phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\sum_0)}$ est une norme équivalente à $\|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}$. C'est-à-dire $G = L^2(\sum_0)$ et on a établi que $F_G = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ avec l'espce contrôlable $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) = F'_G$.

On introduit ψ la solution du probleme

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta\psi = 0 \text{ dans } Q \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 \\ \psi = \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial v} \text{ sur } \sum_0 \\ 0 \text{ sur } \sum \backslash \sum_0 \end{cases} \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$\left\langle \Lambda(\phi^0, \phi^1), (\phi^0, \phi^1) \right\rangle = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|_G^2$$

Par conséquent $\Lambda : F_G \to F'_G$ est un isomorphisme injectif. Ainsi, pour tout $(y^0, -y^1) \in F'_G$, il existe un contrôle $v \in G'$ tel que $y = \psi$ vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. Donc, on a la contrôlabilité dans l'espase F'_G avec des contrôles dans G'.

Ainsi, le problème crucial est l'identification de F_G et F'_G qui n'est pas évident.

Exemple 3.2.2 *On prend* $\|(\phi^0, \phi^1)\|_{F_1} := \left(\int_{\sum_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|^p \right)^{1/p}$, $p > 1, p = 2$

En général, la caractérisation de F_1 n'est pas connue.

On suppose maintenant que H est un opérateur linéaire défini sur l'espace fonctionnel de $\sum_0$.

De plus, on suppose que le principe de continuation unique s'applique : c'est-à-dire

$$H(\frac{\partial \phi}{\partial v}) = 0 \text{ sur } \textstyle\sum_0 \Longrightarrow \phi = 0 \text{ dans } Q.$$

Dans ce cas, $\|(\phi^0, \phi^1)\|_F = \left\| H(\frac{\partial \phi}{\partial v}) \right\|_G$ définit une norme sur F et on a la contrôlabilité sur l'espace F' par MUH.

Exemple 3.2.3 *Soit* $H = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $G = L^2(\sum_0)$, $\|(\phi^0, \phi^1)\|_F : = \left\| \dfrac{\partial \phi'}{\partial v} \right\|_{L^2(\sum_0)}$.

On peut identifier dans ce cas F, F' comme $F = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ et $F' = H^{-1}(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))'$ avec l'espace de contrôle $(H^1(0,T); L^2(\Gamma_0))'$. On observe que la contrôlabilité est, en effet, atteint dans un espace plus grand que $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, mais les contrôles sont dans un espace plus faible $(H^1(0,T); L^2(\Gamma_0))'$ que $L^2(\sum_0)$.

Remarque 3.2.2 *On peut assi atteindre la contrôlabilité dans un espace plus petit,à savoir $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ avec de meilleurs contrôles (lisses), v tel que $v, \dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\sum_0)$. En fait, $v \in H_0^1(0,T;L^2(\Gamma_0))$.*

Il suffit de travailler avec l'espace $F = L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ pour les valeurs initiales (ϕ^0, ϕ^1) au lieu de $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ comme précedemment. On obtient alors la contrôlabilité dans l'espace $F' = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Puisque $\phi^1 \in L^2(\Omega)$, soit $\chi \in H_0^1(\Omega)$ la solution de $\Delta\chi = \phi^1$ et on définit $\omega(t) = \int_0^t \phi(s)ds + \chi$ qui vérifie

$$\begin{cases} \omega'' - \Delta\omega = 0 \text{ dans } Q \\ \omega(0) = \chi, \omega'(0) = \phi^0 \\ \omega = 0 \text{ sur } \sum. \end{cases}$$

De la régularité cachée, on voit que de $\dfrac{\partial\omega}{\partial v} \in L^2(\sum_0)$. Comme $\phi = \omega'$, on obtient

$$\frac{\partial\phi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\omega}{\partial v} \in H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_0))$$

Ainsi l'application $(\phi^0, \phi^1) \to \frac{\partial\phi}{\partial v}$ est linéaire continue de $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ à $H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_0))$.

Donc en prenant $G = H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_0))$, on obtient le contrôle dans l'espace $G' = H_0^1(0,T;L^2(\sum_0))$.

Conclusion

Enfin, à travers notre présentation et notre analyse des chapitre de ce sujet, on somme parvenu aux résultat suivant la : possibilité d'un contrôle précie de certains systèmes soumi au contrôle et d'une relation entre eux dans les dimension finie et infinie. Avec des conditions suffisantes pour assurer la contrôlabilité nulle en utilisant la méthode HUM

Bibliographie

[1] A.K. Nandakumaran, Introduction to Exact Controllability and Observability ; Variational Approach and Hilbert Uniqueness Method.

[2] Brezis, Haïm. "Analyse fonctionnelle." Théorie et applications (1983).

[3] C. Bardos, G. Lebean and J. Rauch, sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, SIAM J.cont.optim., 30(1992), 1024-1065.

[4] A. E. Ingham, some trigonometric inequalities with applications to the theory of series, Math. Z, 41(1936), 367-369.

[5] J. L. Lions, exact controllability, stabilization and Perturbations for Distributed Systems, SIAM Review, Vol.30, No.1, March(1988), 1-68.

[6] J. L. Lions, Controllability exact, stabilization at perturbations de systéms distributé,Tome 1 and 2 Masson, RMA 829(1988).

[7] A. K. Nandakumaran, Exact controllability of Linear Wave Equations and Hilbert Uniqueness Method, Proceedings, Computational Mathematics, Narosa (2005).

[8] Russell, David L. "Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions." Siam Review 20.4 (1978) : 639-739.

Résumé

Dans ce mémoire, on présente les différents types de contrôlabilité exacte de certains systèmes contrôlés et le lien entre eux en dimension finie et en dimension infinie. Des conditions suffisantes fournies garentissent la contrôlabilité nulle pour l'équation des ondes contrôlé sur une partie de bord en moyennant la méthode HUM.

Mots clés : Contrôlabilité exacte, Observabilité, Méthode MUH.

Abstract

In this reaserch, we present the different types of exact controllability of some controlled systems and the relationship between them, in finite and infinite dimensional cases. Sufficient conditions provided insuring the null controllability for the controlled boundary value problem system of wave equation using HUM method.

Keywords: Exact controllability, Observability, HUM Method

الملخص

في هذه البحث، نقدّم الأنواع المختلفة من إمكانية التحكّم الدقيق لبعض الأنظمة الخاضعة للرقابة و الرابط بينها في الأبعاد المحدودة و البعد اللانهائي. تضمن الشروط الكافية المقدمة عدم امكانية التحكم في معادلة الموجة التي يتم التحكم فيها على جزء من الحافة عن طريق استخدام طريقة HUM.

الكلمات المفاتيح: التحكّم الدقيق, المراقبة, طريقة HUM .