République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Probabilités

Par

Khelalfa Amira

Titre

Le liens entre le principe du maximum et la programmation dynamique

---

Devant le Jury :

Pr	**KALFALLAH NABIL**	U. Biskra	**Président**
Pr	**CHIGHOUB FARID**	U. Biskra	**Rapporteur**
Dr	**LABED SALOUA**	U. Biskra	**Examinatrice**

28-06-2022

Dédicace

Mon dieu, la nuit n'est pas bonne sans vos remerciements, est la journée n'est bonne que par votre obéissance

Tout d'abord, mon honorable famille, cela a commencé avec mes parents, que dieu les préserve et conservez les pour moi, et pour chacun frères, en particulier mon frère Nader.

Et aussi pour mon cher professeur Chighoub Farid.

Et pour chacun de la famille de mon grand-père, il a commencé avec mon grand-père bien-aimé Mahmoud Ounis, ma grand-mère Toufaha, et pour chacun de mes tantes en particulier ma tante Mariamma et son frères.

Aussi pour chacun de mes amis qui m'ont soutenue et soutenu, Fériel ghazala, Alia, Abir, Amani, Malika, Fulla.

Et mon collègues qui m'ont aidé tout au long de mon université ans, et pour le propriétair de la bibliothèque étudiante, oncle Saaid.

Enfin, pour tous le monde.

$\mathcal{R}$emerciements

Dieu soit loué, qui m'a guidé sur le chemin de la lumière et m'a accordé fierté, volonté et patience pour attendre mon objectif.

Salutations de remerciements à mon estimé professeur Chighoub Farid, qui m'a supervisé avec ses sages conseils, ses opinions judicieuses et ses encouragements continus, il ma gratitude et ma gratitude.

Je remercie également les membres du jury : Pr.Khalfallah Nabil et Dr.Labed Saloua pour accepté d'évaluer et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens à remercier tout particulièrement le professeur Hafayed Moukhtar pour tous ses efforts et son soutien dans mon travail.

Et a tous ceux qui m'ont apporté une aide précieuse, des conseils et des conseils qui m'ont aidé et soutenu, que dieu les récompense et mon nom avec chaque récompense.

Je ne manquerais pas d'exprimes ma gratitude à ma chère amie Sarah Zerdani, qui m'a aide à chaque instant et m'a soutenue à chaque pas.

Je tiens également à remercier chacun des professeurs du Département Mathématiques de l'Université Mouhamed Khidar.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions un problème d'un contrôle optimal stochastique pour des systèmes stochastiques gouvernés par des équations différentielles stochastique progressif-rétrogrades. Notre objectif principal dans ce travail est d'établir les calcules stochastiques et les propriétés d'existence et d'unicité, et s'intéresse à la relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique pour les problèmes de contrôle optimal récursif stochastique.

Sous certaines conditions de dérivabilité, des relations entre les processus adjoints, la fonction de Hamilton généralisée et la fonction de valeur sont données. Comme une applications, on s'interesse par le problème linéaire quadratique récursive du portefeuille d'utilités dans l'ingénierie financière.

Notations et symbols

$\mathbb{P}-p.s.$	:	Presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$S^2(\mathbb{R}^k)$	:	l'espace vectoriel fermé des processus Y, progressivement mesurables.
$S_c^2(\mathbb{R}^k)$	:	le sous-espace fermé par les processus continus.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$	:	la filtration naturelle du mouvement brawnien W.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	:	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	:	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$	:	Espace de fonction de carré intégrable.
MB	:	Mouvement brawnien.
BDG	:	Inégalités Burkholder–Davis–Gundy.
EDSR	:	équation différentielle stochastique rétrograde.
m	:	mesure de Lebesgue.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
HJB	:	Hamilton-Jacobi-Bellman.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. Les causes possibles d'un tel comportement peuvent être variées : erreur de modélisation, fluctuation au cours du temps des paramètres de l'équation, présence de bruit d'observation.

Dans ces situations, les approches probabilistes trouvent naturellement leur place et il peut alors être intéressant d'incorporer des termes aléatoires dans les équations différentielles afin de prendre en compte les incertitudes précédentes. Cependant, l'introduction de ces termes aléatoires conduit à une intégration des équations qui ne correspondent pas, en général, à une adaptation immédiate de la théorie classique des équations différentielles.

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème a posé problème aux mathématiciens et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques relativement un mouvement Brownien. On construira cette intégrale et on donnera sens à l'expression $\int_0^t \sigma(t,w)\,dW_t$, ou $\sigma(s,w)$ est un processus stochastique muni de propriétés de régularité suffisantes. A partir de la théorie de l'intégration, on construit la théorie des EDS. Et donc prend la forme suivante.

$$X_t = a + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s.$$

La théorie d'optimisation dynamique déterministe introduit depuis 1940 . L'introduction de l'aspect aléatoire offre une modélisation mathématique plus réaliste de la situation. Nous considérons ici seulement les problèmes d'optimisation stochastique. Les objectifs de la théorie sont : (i) L'obtention des conditions nécessaires (ou nécessaires et suffisantes pour le ou les extrema (ou minima)). (ii) L'étude de la structure et des propriétés des équations exprimant ces conditions.

On étudie les problèmes de contrôle stochastique dans lesquels la variable de contrôle agit sur l'état du système, ces problèmes d'optimisation sont abordés par la méthode de la programmation dynamique qui permet d'obtenir une caractérisation analytique de la fonction valeur du problème d'optimisation comme solution d'un équation aux dérivées partielles dite de Hamilton-Jacobi-Bellman.

L'objectif de ce travail est de présenter la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs) et le contrôle optimal d'un système progressive-rétrograde.

Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien, $(Y_t, Z_t)_{t\in[0;T]}$, vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$-dY_t = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dW_t,\ 0 \le t \le T.$$

avec la condition finale $Y_T = \zeta$ est un variable aléatoire de carré intégrable. Comme les EDS, ces équations doivent être comprise au sens intégral

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s,\ 0 \leq t \leq T.$$

Ce travail est divisé en trois parties : dans la première, on se consacre à l'étude générale des EDSR alors commençons par des rappels et compléments sur le calcul stochastique.

Dans le seconde partie, on l'introduit la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades, EDSR en abrégé, et de préciser la terminologie employée dans ce contexte. et rappelons le théorème d'existence et d'unicité sur les équations différentielles stochastiques (EDS en abrégé), puis nous nous intéresserons au flot stochastique engendré par une EDS. Nous finirons par la propriété de Markov.

Dans la troisième partie on parle de principe de maximum et la programmation dynamique pour les problèmes de contrôle optimal récursifs stochastiques et la relation entre eux.

Chapitre 1

Initiation sur le calcul stochastique

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement les définitions de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite du chapitre.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Soit T un ensemble, on appelle processus stochastique indexé par T à valeur dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right)$, pour tout $t \in T$, X_T est une variable alèatoire.*

Remarque 1.1.1 *1) Si $T = \mathbb{R}_+$ ou $T = [0, a]$ les processus est à temps continue.*

2) Si $T = \mathbb{N}$ les processus à temps discret.

3) Si $T = \mathbb{R}^d$ on a champs alèatoire.

4) Pour $t \in T$ fixé, $w \in \Omega \longmapsto X_t(w)$ est une variable alèatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

5) Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \in T \longmapsto X_t(w)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire des processus.

On dit que le processus est à trajectoire continue (ou est continue) si l'application $t \longmapsto X_t(w)$ est continue pour presque tout w.

Définition 1.1.2 *Une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille croissante de sous-tribu de $\mathcal{F}$, ie : pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, on définie alors $\mathcal{F}_\infty = \sigma \left\{ \underset{t}{\cup} \mathcal{F}_t \right\}$ ainsi que, pour tout t, $\mathcal{F}_{t^+} = \underset{\varepsilon \succ 0}{\cap} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.*

1) L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ s'appelle espace filtré.

2) Une filtration est P complète pour une mesure de probabilité P si $\mathcal{F}_0$ contient tout les évènementes de mesure nulle, ie : $N\{N \in \mathcal{F},\ P(N) = 0\} \subset \mathcal{F}$.

3) On dit un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ satisfaite les conditions habituelles si

a) Les ensembles négligables sont continue dans $\mathcal{F}_0$ ie $N \in \mathcal{F}_0$.

b) La filtration est continue à droite ie : $\mathcal{F}_t = \underset{s<t}{\cap} \mathcal{F}_{s \vee t}$.

Définition 1.1.3 *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable.*

Remarque 1.1.2 *Si $N \subset \mathcal{F}_0$, et si X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$alors tout les modification de X est adapté aussi.*

Définition 1.1.4 *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, w) \longmapsto X_s(w)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*

Proposition 1.1.1 *1) Un processus X est $\mathcal{F}$ adapté tel que toutes les trajectoires sont continue à gauche (ou à droite) est progréssivement mesurable.*

2) Un processus progréssivement mesurable est mesurable et $\mathcal{F}$ adapté.

3) Le processus X_t est $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ progressivement mesurable si $t \in [0;T]$, l'application $(s,w) \longrightarrow X(s,w)$ est $\mathcal{B}[0;t] \times \mathcal{F}_t$ mesurable.

4) Soit X_t mesurable et $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ adapté. Alors $\exists\ \bar{X}_t$ processus progressivement mesurable stochastiquement est $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ adapté équivalent à X_t, et X_t est continu à gauche ou à droite, alors X_t lui-mème est $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ progressivement mesurable.

Définition 1.1.5 *Un Mouvement Brawnien standard est un processus stochastique à valeur réelle tel que*

1) $t \longmapsto W_t(w)$ est continue $\mathbb{P}-p.s.$

2) Pour tout $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ est independant de la tribu $\sigma\{W_u,\ u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t-s$.

3) $W_0 = 0$, $\mathbb{P}-ps$.

Pour tout $t < 0$, les variables alèatoires W_t suite la loi gaussienne centrée de variance t donc de dencité $((2\pi t)^{-1/2} \times \exp(-x^2/2t))$, on dit qu'une mouvement brownien petit d'un point x si $W_0 = x$.

Remarque 1.1.3 *On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ MB un processus continue adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ vérifient*

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall 0 < s < t,\ \mathbb{E}(e^{iu(w_t - w_s)} \mid \mathcal{F}_s) = \exp(-u^2(t-s)/2).$$

Proposition 1.1.2 *Soit W un MB standard*

1) Pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t>0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W_u, u < s\}$.

2) $-W_t$ est un MB aussi.

3) Pour tout $c > 0$, $\left\{cW_{t/c^2}, t > 0\right\}$ est un MB.

4) Le processus définie par $X_0 = 0$ et $X_t = tX_{1/t}$ est un MB.

Définition 1.1.6 *Un processus X à valeur réelle est une surmartingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ si*

1) $\forall t > 0$, X_t est un $\mathcal{F}_t$ mesurable.

2) $\forall t > 0$, X_t est integrable $\mathbb{E}(X_t) < \infty$.

3) $\forall t > 0$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

Le processus X_t est une martingale si et seulement s'il est à la foit une sous martingale et surmartingale.

Proposition 1.1.3 *Soit X_t est une $\mathcal{F}_t$ martingale*

1) $\forall t > 0$, $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$.

2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe mesurable si $\varphi(X_t)$ est integrable alors $\varphi(X_t)$ est une sous martingale.

Théorème 1.1.1 ***(Représentation des martingales browniennes)***

Soit M une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\in[0,T]}$. Alors il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$, tel que $\mathbb{P}-p.s.$ $\forall t \in [0,T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.$$

1.2 Integrale stochastique et formule d'Itô

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace de probabilité filtrée et soit $W = (W_t,\ t > 0)$ un $\mathcal{F}_t$ MB standard nous donnée un sens à $\int_0^t H_s dW_s$ pour une classe de processus adapté.

Définition 1.2.1 *Un processus $H = \{H_t,\ t > 0\}$ est élèmentaire si*

$$H_t(w) = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi_i(w) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}[}(t)$$

où $p \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p$, et pour tout i, φ_i est une variable alèatoire bornée et $\mathcal{F}_t$ mesurable.

Si H est un processus élémentaire, on peut définir

$$\int_0^t H_s dW_s = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Proposition 1.2.1 *Soit H et K des processus élémentaire alors*
1) $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s dW_s\right] = 0.$
2) $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty H_s dW_s\right)\left(\int_0^\infty K_s dW_s)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s K_s ds\right].$
en particulier

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 ds\right].$$

Proposition 1.2.2 *Soit $H \in \mathcal{M}^2$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^T H_s dW_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right].$$

et si τ est un temps d'arrêt

$$\int_0^\tau H_s dW_s = \int_0^T \mathbf{1}_{s \leq \tau} H_s dW_s,\ \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 1.2.2 *On appelle un processus d'Itô tout processus $(X_t,\, t \geq 0)$ tel que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t V_s ds,\ t \geq 0.$$

où X_0 *est* $\mathcal{F}_0$ *mesurable,* H *est un processus adapté tel que* $\forall t,\ \int_0^t H_s^2 ds < \infty$, $\mathbb{P}-p.s.$ *et* V *est un processus adapté tel que* $\forall t,\ \int_0^t |V_s|\, ds < \infty$, $\mathbb{P}-p.s.$ *étant donnée un processus d'Itô* X*, on peut définir un processus continue adapté croissant* $\langle X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,\ t \geq 0.$

Théorème 1.2.1 ***(première formule d'Itô)***

Soient $\{Y_t, t \geq 0\}$ *un processus d'Itô réel et* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *de classe* $C^2(\mathbb{R})$*, et on a alors*

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t f^{'}(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(Y_s)d\langle Y\rangle_s .$$

ou de formule différentielle

$$df(Y_t) = f^{'}(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}f^{''}(Y_s)d\langle Y\rangle_s .$$

Théorème 1.2.2 ***(deuxième formule d'Itô)***

Soient $\{Y_t, t \geq 0\}$ *un processus d'Itô réel et* $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$*, telle que* $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$*. Alors*

$$f(t, Y_t) = f(0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, Y_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, Y_s)dYs + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, Y_s)d\langle Y\rangle_s .$$

on peut écrire cette formule sous forme différentielle

$$df(t, Y_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, Y_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, Y_t)d\langle Y\rangle_t .$$

Théorème 1.2.3 ***(throisième formule d'Itô)***

Soient X *et* Y *deux processus d'Itô et* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *à dérivée bornée* *on a*

$$
\begin{aligned}
& f(X_t, Y_t) \\
& = f(X_0, Y_0) + \int_0^t f'_x(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t f'_y(X_s, Y_s) dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'_{xx}(X_s, Y_s) d\left\langle X\right\rangle_s \\
& + \frac{1}{2}\int_0^t f'_{yy}(X_s, Y_s) d\left\langle Y\right\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'_{xy}(X_s, Y_s) d\left\langle X, Y\right\rangle_s .
\end{aligned}
$$

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion de l'EDSR en abrégé, et de préciser la terminologie employée dans ce contexte. Nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité

2.1 Équations différentielles stochastiques et EDSRs

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et variable aléatoire ζ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$.

Définition 2.1.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation diffé-*

rentielle écrire ce forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \\ X_0 = \zeta. \end{cases}$$

on écrire cette formule sous forme intégrale

$$X_t = \zeta + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

avec b *et* σ *sont deux applications borèlliennes et* ζ *est une variable aléatoir* $\mathcal{F}_0$ *mesurable.*

Définition 2.1.2 *La solution de l'EDS est un processus continue et* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté, qui vérifier les conditions suivants* $\mathbb{P}-p.s.$

1) $\int_0^t (|b(s, X_s)|ds < \infty,$ *et* $\int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty.$

2) $X_t = \zeta + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$

3) $X_0 = \zeta.$

Définition 2.1.3 *Une équation différentielle stochastique rétrograde est une équation de la forme*

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s,\ 0 < t < T.$$

ou sous forme condensées

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t. \\ Y_T = \zeta. \end{cases}$$

où f *est une fonction générateur de l'EDSRs,* ζ *la condition terminale,* Z_t *est un* *processus stochastique de carré intégrable avec Y_t est $\mathcal{F}_t$ adapté.*

Définition 2.1.4 *La solution d'EDSRs est le couple de processus $\{Y_t, Z_t\}_{0<t<T}$ qui vérifier les conditions suivants*

1) Y et Z sont progréssivements mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$ et dans $\mathbb{R}^{k\times d}$.

2) $\displaystyle\int_0^T \{|f(s, Y_s, Z_s)| - ||Z_s||^2\}\, ds < \infty$, $\mathbb{P}-p.s.$

3) On a $Y_t = \zeta + \int_t^T f(s; Y_s; Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s$. $0 < t < T$, $\mathbb{P}-p.s.$

2.2 Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un MB d–dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB W. On travaillera avec deux espaces de processus.

$S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel fermé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que

$$||Y||_{S^2}^k := \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2] < \infty.$$

$S_c^2(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace fermé par les processus continus.

$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui fermé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que

$$||Z||_{\mathcal{M}^2}^2 := E\left[\int_0^T ||Z_s||^2 ds\right] < \infty.$$

Soit f une application aléatoire définie sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. Soit ζ une variable aléatoire, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t,\ 0 \leq t \leq T, \\ Y_T = \zeta. \end{cases}$$

ou forme intégrale

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s,\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ζ la condition terminale. Sans plus tarder précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR (2.1).

1. Les intégrales de l'équation (2.1) étant bien définies.
2. Y est une semi-martingale continue.
3. Y_0 est une quantité déterministe.

Théorème 2.2.1 ***(Inégalités Burkholder-Davis–Gundy)*** *Soit $p > 0$ un réel. $\exists$ c_p, C_p et X une martingale locale continue, nulle en 0*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\underset{t\geq 0}{sup}|X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right].$$

si $T > 0$

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\underset{0<t<T}{sup}|X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right].$$

Lemme 2.2.1 (**lemme De Gronwall**)

Soit f une fonction positive intégrable telle que $\forall t \in [0, T]$

$$h(t) = \beta + \int_0^t \alpha f(s)ds.$$

avec $\alpha \geq 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$*, alors* $h(t) \leq \beta \exp(\alpha t)$, $\forall t \in [0, T]$.

Proposition 2.2.1 *On pose que il existe* $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ *un processus positif et une constante* $\lambda > 0$ *tels que*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}, \ |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda(|y| + ||z||).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *est une solution de l'EDS (2.1) telle que* $Z \in \mathcal{M}^2$ *alors* $Y \in S_c^2$.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a pour tout $t \in [0, T]$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s, Y_s, Z_s) dr - \int_0^t Z_s dW_s, \ 0 \leq t \leq T.$$

utilisant l'hypothèse sur f

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (f_s + \lambda ||Z_s||) ds + sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^T Z_s dW_s \right| + \lambda \int_0^T |Y_s| ds.$$

posons

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^T (f_s + \lambda ||Z_s||) ds + sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^T Z_s dW_s \right|.$$

Par hypothèse $Z \in \mathcal{M}_2$ et donc via l'inégalité de Doob le troisième terme est de carré intégrable il en est de même pour $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$ et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme Y est un processus continue, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité $sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \zeta \exp(\lambda T)$ qui montre que $Y \in S^2$. ■

Lemme 2.2.2 *Soient* $Y \in S^2(\mathbb{R}^k)$ *et* $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k \times d})$*. Alors* $\int_0^t Y_s Z_s dW_s$, $t \in [0, T]$ *est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités **BDG** donnent

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t Y_s Z_s dWs\right]$$
$$\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_s|^2||Z_s||^2 ds\right)^{1/2}\right] \leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\left(\int_0^T ||Z_s||^2 ds\right)^{1/2}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right] \leq C'\left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T ||Z_s||^2 ds\right)\right).$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse, d'où le résultat. ■

2.2.1 Résultat d'existence et d'unicité

(L) il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}-p.s.$

1) Condition de Lipschitz en (y,z), pour tout t, y, y_0, z, z_0

$$|f(t,y,z) - f(t,y_0,z_0)| \leq \lambda(|y-y_0| + ||z-z_0||).$$

2) Condition d'intégrabilité

$$E\left[|\zeta|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|^2 dr\right] < \infty.$$

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne depond pas ni y ni z, on se donne ζ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \zeta + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s,\ 0\leq t\leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.3 *Soient $\zeta \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR (2.2) pos-*

sède une unique solution (Y, Z) *telle que* $Z \in \mathcal{M}^2$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in \mathcal{M}^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\zeta + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right).$$

d'après le théorème de **Fubini**, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable on a $\forall t \in [0, T]$

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\zeta + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds := M_t - \int_0^t F_s ds.$$

M est une martingale brownienne, via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus Z appartenant à $\mathcal{M}^2$ tel que

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s ds - \int_0^t F_s ds.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \zeta$

$$\begin{aligned} Y_t - \zeta &= M_0 + \int_0^t Z_s ds - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s ds - \int_0^T F_s ds\right). \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s ds. \end{aligned}$$

l'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in \mathcal{M}^2$. ■

Proposition 2.2.2 *Soit* (Y, Z) *la solution de l'EDSR (2.1) et soit* τ *est un temps d'arrêt majoré par* T*, on suppose outre l'hypothèse* ***(L)****, que* ζ *est* $\mathcal{F}_\tau$ *mesurable* *et que* $f(t,y,z) = 0$ *dès que* $t \geq \tau$. *Alors* $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ *et* $Z_t = 0$ *si* $t \geq \tau$.

Preuve. On a

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dWs,\ 0 \leq t \leq T,\ \mathbb{P} - p.s.$$

et pour $t = \tau$, et $f(t,y,z) = 0$ dès que $t \geq \tau$

$$Y_t = \zeta + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_\tau^T Z_s dWs = \zeta - \int_\tau^T Z_s dWs.$$

Donc $Y_\tau = E(\zeta \mid \mathcal{F}_\tau) = \zeta$ et par suite $\int_\tau^T Z_s dWs = 0$ alors

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_s dWs\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T \|Z_s\|^2 ds\right)\right] = 0.$$

Finalement que $Z_s \mathbf{1}_{s\geq\tau} = 0$

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_\tau^T Z_s dWs = Y_t + 0 - 0.$$

donc on a la résultat. ■

2.3 Théorème de comparaison

Le théorème de comparaison permet de comparer les solutions de deux EDSR dans $\mathbb{R}$ dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs.

Proposition 2.3.1 *Soit* $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, *progressivement mesurable et borné. Soient* $\{c_t\}$,$t \in [0,T]$, *un élément de* $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ *et* ζ *une variable aléatoire,* $\mathcal{F}_T$ *mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \zeta + \int_t^T \{a_s Y_s + Z_s b_s + c_s\} ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

possède une unique solution qui vérifie

$$\forall t \in [0,T],\ Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}(\zeta \Gamma_T + \int_0^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t).$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$

$$\Gamma_t = exp\left\{ \int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s ds \right\}.$$

Preuve. Soit Γ un processes que vérifie

$$\begin{cases} d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t dW_t). \\ \Gamma_0 = 1. \end{cases}$$

et soit b borné, et d'apres l'inégalité de Doob on a $\Gamma \in \mathcal{S}^2$, et par le proposition d'existence d'une unique solution $(Y;Z)$ à L'EDSR linéare on pose

$$f(t;Y;Z) = a_t Y + Z b_t + c_t$$

et de vérifier que **(L)** est satisfaite avec $Y \in \mathcal{S}^2$. La formule d'intégration par partie est donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\left\langle \Gamma, Y \right\rangle_t. \\ &= -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + (\Gamma_t Y_t).dW_t. \end{aligned}$$

et car $c \in \mathcal{M}^2$ et $Y, \Gamma \in \mathcal{S}^2$ le processus $\Gamma_t Y_t + \displaystyle\int_0^t c_s \Gamma_s ds$ est une martingale alors

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_s \Gamma_s ds = \mathbb{E}\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_T\right)$$

donc on a la résultat. ■

Théorème 2.3.1 ***(Théorème de comparaison)*** *Supposons que $k = 1$ et que (ζ, f), (ζ', f') vérifient l'hypothèse* ***(L)****. On note (Y, Z) et (Y', Z') les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que $\mathbb{P} - p.s.$ $\zeta \leq \zeta'$ et que $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$ (m mesure de Lebesgue). Alors*

$$\mathbb{P} - p.s. \ \forall t \in [0, T], \ Y_t \leq Y'_t.$$

Si de plus, $Y_0 = Y'_0$, alors $\mathbb{P} - p.s.$ $Y_t = Y'_t$, $0 \leq t \leq T$ et $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$ En particulier, dès que $P(\zeta < \zeta) > 0$ ou $f(t, Y_t, Z_t) < f'(t, Y_t, Z_t)$ sur un ensemble de $m \otimes \mathbb{P}$ mesure strictement positive alors $Y_0 < Y'_0$.

2.3.1 Le résultat classique d'Itô

Définition 2.3.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un MB d–dimensionnel et une variable aléatoire Z, de carré intégrable indépendante du MB W. avec la filtration $\mathcal{F}_t$, pour tout t on a $\mathcal{F}_t = \sigma\{\sigma\{Z, W_s, \ s \leq t\} \cup \mathcal{N}\}$. Soit T un réel strictement positif. On considère deux fonctions $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d}$ qui sont mesurables. On résoudre l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \\ X_0 = \zeta. \end{cases}$$

ou forme intégrale

$$X_t = \zeta + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.3}$$

Remarque 2.3.1 *Une solution (forte) de l'EDS (2.3), X est un processus continue tel que*

1) X est progressivement mesurable.

2) On a $\mathbb{P}-p.s.$

$$\int_0^T \{|b(s, X_s)| + ||\sigma(s, X_s)||^2\}ds < \infty,\ ||\sigma|| = trace(\sigma\sigma^*).$$

3) $\mathbb{P}-p.s.$

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,\ 0 \leq t \leq T.$$

Théorème 2.3.2 ***(Existence et unicité)*** *Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ l'EDS (2.1) possède une unique solution si*

1) Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|.$$

2) Croissance linéaire

$$|b(t, x)| + ||\sigma(t, x)|| \leq K(1 + |x|).$$

3) $\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$.

Chapitre 3

La relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique

Dans ce chapitre on a voir la relation entre le prancipe du maximum et la programmation dynamique pour les problèmes de contrôle optimale stochastique récursive. Sous certaines conditions de dérivabilité, les relation entre les processus adjoints, la fonction de Hamilton généralisée et la fonction de valeur sont données.

3.1 Énoncé du problème et préliminaires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité complet équipé d'un mouvement brownien standard d-domontional $\{W_t\}_{t\geq 0}$ pour $t > 0$ la filtration $\{\mathcal{F}_s^t\}_{s\geq t}$ définie comme

$$\mathcal{F}_s^t = \sigma\{W_r - W_t,\ t \leq r \leq s\} \vee \mathcal{N}.$$

où $\mathcal{N}$ contient tous les p ensembles nuls dans $\mathcal{F}$ et $\sigma_1 \vee \sigma_2$ désigne le champ σ généré par $\sigma_1 \cup \sigma_2$ en particulier, si $t = 0$ on a $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s^t$.

Soit $T > 0$ et $U \subset \mathbb{R}^k$ un ensemble convexe non vide, pour $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$ on considére $X^{t,x;u}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ donnée par l' EDS contrôlée suivante

$$\begin{cases} dX^{t,x;u}(s) = b(s, X^{t,x;u}(s), u(s))ds + \sigma(s, X^{t,x;u}(s), u(s))dW(s), \ \ s \in [t, T]\,. \\ X^{t,x;u}(s) = x. \end{cases} \tag{3.1}$$

et $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ sont des fonctions mesurables.

Soit $t \in [0, T)$, on note $\mathcal{U}[t, T]$ l'ensemble de $\{\mathcal{F}_s^t\}_{s\geq t}$ adapté. pour $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$ et $x \in \mathbb{R}^n$ donnés, un processus $X^{t,x;u}(\cdot)$ de valeur dans $\mathbb{R}^n$ est appelé une solution de (3.1) s'il s'agit d'un processus $\mathcal{F}_s^t$ adapté tel que (3.1) soit vérifié. On appelle $\mathcal{U}[t, T]$ espace des controles admissibles.

Nous nous référons à tel $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$ comme un contrôle admissible et $(X^{t,x;u}(\cdot), u(\cdot))$ comme une paire admissible, nous supposons ce qui suit

(H1) Les coefficient b, σ sont uniformement continue dans (s, x, u), et il existe un constant $C > 0$ pour tout $s \in [0; T]\,, \ x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \ u, \hat{u} \in U$

$$|b(s, x, u) - b(s, \hat{x}, \hat{u})| + |\sigma(s, x, u) - \sigma(s, \hat{x}, \hat{u})| \leq C(|x - \hat{x}| + |u - \hat{u}|). \tag{3.2}$$

$$|b(s, x, u)| + |\sigma(t, x, u)| \leq C(1 + |x|). \tag{3.3}$$

Remarque 3.1.1 *1)D'après la condition (3.2),les coefficients b et σ sont lipschitzienne en x et u.*

2)D'après la condition (3.3),les coefficients b et σ sont a croissance lineaire.

$$\frac{|b(s,x,u)| + |\sigma(t,x,u)|}{(1+|x|).} \leq C.$$

pour $\forall u(\cdot) \in \mathcal{U}[t,T]$ sous **(H1)**, l'EDS (3.1) admet une unique solution X par la théorie classique d'équation déffirentielle stochastique. (Théoreme de Point fixe ou Théoreme Iterative de Picarre).

Ensuite, nous introduisons l'EDSR contrôlé suivant couplé au EDS (3.1) contrôlé $\forall s \in [t,T]$

$$\begin{cases} dY^{t,x;u}(s) & = -f(s, X^{t,x;u}(s), Y^{t,x;u}(s), Z^{t,x;u}(s), u(s))ds + Z^{t,x;u}(s)dW(s). \\ Y^{t,x;u}(T) & = \phi(X^{t,x;u}(T)). \end{cases} \tag{3.4}$$

Soit $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables données, on pose

(H2) Soit f, ϕ deux fonctions uniformement continue dans (s,x,y,z,u) et il existe un constant $C > 0$ pour $\forall s \in [0,T]$, $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $y, \hat{y} \in \mathbb{R}$, $z, \hat{z} \in \mathbb{R}^d$, $u, \hat{u} \in U$

$$|f(s,x,y,z,u) - f(s,\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{u})| \leq C(|x-\hat{x}| + |y-\hat{y}| + |z-\hat{z}| + |u-\hat{u}|). \tag{3.5}$$

$$|f(s,x,0,0,u)| + |\phi(x)| \leq C(1+|x|).$$

$$|\phi(x) - \phi(\hat{x})| \leq C\,|x-\hat{x}|\,.$$

Alors pour tout $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t,T]$ et la solution unique donnée $X^{t,x;u}(\cdot)$ à (3.1) sous **(H2)**, EDSR admet une solution unique $(Y^{t,x;u}(\cdot), Z^{t,x;u}(\cdot))$ par la théorie classique EDSR.

Étant donné $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t,T]$ on introduit la fonctionnelle de coût

$$J(t,x;u(\cdot)) := -Y^{t,x;u}(s)|_{s=t}, \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Notre problème de contrôle optimal stochastique de récursive est le suivant

Problème 3.1.1 ***(PCOSR)*** *Pour $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ pour minimiser (3.6) telle que $X^{t,x;u}(\cdot)$ la solution de (3.1) et $(Y^{t,x;u}(\cdot), Z^{t,x;u}(\cdot))$ solution de (3.4) sur $\mathcal{U}[t,T]$. On définit la fonction valeur*

$$\begin{cases} V(t,x) := \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}[t,T]} J(t,x;u(\cdot)), \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \\ V(T,x) := -\phi(x), \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Pour tout $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}[t,T]$ atteint l'infimum ci-dessus est appelé en contrôle optimal, et les solutions correspondantes $\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(\cdot)$ à (3.1) et $(\bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(\cdot))$ à (3.4) sont collées à l'état optimal. Pour simplifier, nous nous référons à $(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ comme le quatuor optimal.

Remarque 3.1.2 *comme b,σ, f, ϕ sont des fonction déterministes, notons que sous **(H1)** et **(H2)**, la fonction de valeur ci-dessus existent. Notre définition (3.7) est donc significative.*

*On introduit l'équation **HJB** généralisée suivante, $\forall t \in [0,T]$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$*

$$-V_s(t,x) + \sup_{u\in U} G(t,x,-V(t,x),-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x),u) = 0, \ V(T,x) = -\phi(x). \tag{3.8}$$

Où la fonction de Hamiltonienne généralisée $G : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \times U \longrightarrow$

$\mathbb{R}$ *est définie comme*

$$G(t,x,r,p,A,u) := \frac{1}{2} tr\left\{\sigma(t,x,u)^{\intercal} A\sigma(t,x,u)\right\} \qquad (3.9)$$
$$+ \langle p, b(t,x,u)\rangle + f(t,x,r,\sigma(t,x,u)^{\intercal}p,u).$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.1.1 ***(Théorème de vérification stochastique)*** *Soit* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$***,*** *supposons que* $V \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$ *une solution de (3.8) alors*

$$V(t,x) \leq J(t,x;u(\cdot)),\ \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}\left[t,T\right],\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \qquad (3.10)$$

De plus, le contrôle $(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ *est optimal pour le problème* ***(PCOSR)*** *si et seulement si* $\forall s \in [t,T], \mathbb{P} - p.s.$

$$G(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), -V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s))$$
$$= \max G(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), -V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), u)$$
$$\forall s \in [t,T], \mathbb{P} - p.s. \quad dt - p.p$$

Preuve. Pour tout $u(\cdot) \in \mathcal{U}\left[t,T\right]$ d'état correspondant $X^{t,x;u}(\cdot)$, appliquer la formule de d'Itô $V(s, X^{t,x;u}(\cdot))$, on obtient alors

$$V(t,X)$$
$$= -\mathbb{E}(\phi(X^{t,x;u}(T)) - \mathbb{E}\int_t^T \{V_s(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) + \left\langle V(s, X^{t,x;u}(s)), b(s, X^{t,x;u}(s), u(s)\right\rangle$$
$$+ \frac{1}{2} tr(\sigma(s, X^{t,x;u}(s), u(s))^{\intercal} \times V_{xx}(s, X^{t,x;u}(s)) \times \sigma(s, X^{t,x;u}(s), u(s))\}ds$$

$$= -\mathbb{E}(\phi(X^{t,x;u}(T)) - \mathbb{E}\int_t^T \{V_s(s, X^{t,x;u}(s)) + G(s, X^{t,x;u}(s),$$

$$- V(s, X^{t,x;u}(s)), V_x(s, X^{t,x;u}(s)), -V_{xx}(s, X^{t,x;u}(s)), u(s))$$

$$- f(s, X^{t,x;u}(s), -V(s, X^{t,x;u}(s)), -\sigma(s, X^{t,x;u}(s)), u(s))^{\intercal} \times V_x(s, X^{t,x;u}(s)), u(s))\}ds.$$

$$= J(t, x, u(.))$$

$$+ \mathbb{E}\int_t^T \{-V_s(s, X_s^{t,x;u}) + G(s, X^{t,x;u}(s), -V(s, X^{t,x;u}(s)), -V_x(s, X^{t,x;u}(s)),$$

$$- V_{xx}(s, X^{t,x;u}(s)), u(s))\}ds$$

$$\leq J(t, x, u(\cdot)) + \mathbb{E}\int_t^T \{-V_s(s, X^{t,x;u}(s))$$

$$+ \max_{u\in\mathcal{U}} G(s, X^{t,x;u}(s), -V(s, X^{t,x;u}(s)), -V_x(s, X^{t,x;u}(s)), -V_{xx}(s, X^{t,x;u}(s)), u)\}ds$$

$$= J(t, x, u(\cdot)).$$

Donc (3.10) tient ensuite en appliquant l'inégalité ci-dessus à $(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$, on a

$$V(t, X) = J(t, X, \bar{u}(\cdot)) + \mathbb{E}\int_t^T \{-V_s(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) + G(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), -V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)),$$

$$- V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \bar{u}(s))\}ds.$$

le résultat recherché découle immédiatement du fait que

$$- V_s(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) + G(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), -V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))$$

$$- V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) - V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \bar{u}(s)) \leq 0.$$

qui est due à l'équation **HJB** généralisée (3.8). ■

3.2 Le principe de maximum en contrôle optimal stochastique

En pratique pour énoncer le principe du maximum, nous considérons les EDS (3.1) et EDSR (3.4) contrôlés comme suit $s \in [t, T]$

$$\begin{cases} dX^{t,x;u}(s) = b(s, X^{t,x;u}(s), u(s))ds + \sigma(s, X^{t,x;u}(s), u(s))dW(s). \\ -dY^{t,x;u}(s) = f(s, X^{t,x;u}(s), Y^{t,x;u}(s), Z^{t,x;u}(s), u(s))ds - Z^{t,x;u}(s)dW(s). \\ X^{t,x;u}(t) = x, Y^{t,x;u}(T) = \phi(X^{t,x;u}(T)). \end{cases}$$

Ce type de système de contrôle a été étudié par [11] où un principe maximal a été obtenu. afin de mentionner son résultat, nous avons besoin de l'hypothèse suivante

(H3) Les coefficients b, σ, ϕ sont continûment différentiables en (x, u) et f est continûment différentiable en (x, y, z, u). de plus ,$b_x, \sigma_x, f_x, f_y, f_z, b_u, \sigma_u, f_u$ sont bornés et $\exists\ C > 0$ telle que

$$|\phi_x(x)| \leq C(1 + |x|).$$

Soit $(\left(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)\right)$ un quatuor optimal pour tout $s \in [0, T]$, on note

$$\bar{b}(s) := b\left(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)\right), \bar{\sigma}(s) := b\left(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)\right).$$
$$\bar{f}(s) := \left(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)\right).$$

et des notations similaires sont utilisées pour toutes leurs dérivées. On introduit l'équation adjoint qui est une équation différentielle stochastique progressive-rétrograde

$$-dp(s) = \left[\bar{b}_x(s)^\intercal p(s) - \bar{f}_x(s)^\intercal q(s) + \bar{\sigma}_x(s)k(s)\right] ds - k(s)dW(s). \tag{3.11}$$
$$dq(s) = \bar{f}_y(s)^\intercal q(s)ds + \bar{f}_z(s)^\intercal q(s)dW(s), \; s \in [t,T].$$
$$p(T) = -\phi_x(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(T))^\intercal q(T), \; q(t) = 1.$$

et la fonction d'Hamilton $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, est définie $dt - p.s.\ \mathbb{P} - p.p.$

$$H(t,x,y,z,u,p,q,k) := \langle p, b\,(t,x,u)\rangle - \langle q, f\,(t,x,y,z,u)\rangle + tr\left[\sigma\,(t,x,u)^\intercal\, k\right].$$

Sous **(H1)-(H3)**, l'équation rétrograde dans (3.11) admet une solution unique advious $p(\cdot)$, puis l'équation progressive dans (3.11) admet une solution unique $(q(\cdot), k(\cdot))$.

Lemme 3.2.1 ***Principe du maximum (conditions nécessaires)***

*Soit **(H1)-(H3)** et $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ fixé. Supposons que $\bar{u}(\cdot)$ est un contrôle optimal pour le problème **(PCOSR)** et $(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(\cdot))$ est l'état optimal correspondant. Soit $(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot))$ les processus adjoints. alors $\forall u \in U$*

$$\left\langle H_u\left(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s), p(s), q(s), k(s), u - \bar{u}(s)\right)\right\rangle \geq 0. \tag{3.12}$$

Lemme 3.2.2 ***Principe du maximum (conditions suffisant)***

*Soit **(H1),(H2)** supposons que $\bar{u}(\cdot)$ est un contrôle admissible et $(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(\cdot))$ est l'etat correspodant avec $Y(T) = M_T^\intercal X(T)$, $M_T \in \mathbb{R}^n$ et soit $(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot))$ les processus adjoints on pose que la fonction Hamilton H est convexe en (x,y,z,u) alors $\bar{u}$ est un contrôle optimal pour le problème **(PCOSR)** s'il satisfait.*

Preuve. On a $\forall u \in \mathcal{U}[t,T]$ et $(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(\cdot))$, pour tout $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} J(t,x,\bar{u}(t)) - J(t,x,u(t)) &= Y^{t,x;u}(t) - \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(t) \\ &= \mathbb{E}\left[Y^{t,x;u}(t) - \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(t)\right]. \end{aligned}$$

par formule d'Itô à $\langle \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s) - Y^{t,x;u}(s), q(s)\rangle + \langle \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s) - X^{t,x;u}(s), p(s)\rangle$ pour $s \in [0,T]$ et notons que $\bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(T) - Y^{t,x;u}(T) = M_T^\intercal(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(T) - X^{t,x;u}(T))$ et $p(T) = -M_T q(T)$ on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(t) - Y^{t,x;u}(t)\right] q(T) - \mathbb{E}\left[\bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(t) - Y^{t,x;u}(t)\right] q(t) \\ &+ \mathbb{E}\left\langle \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(T) - X^{t,x;u}(t), p(T)\right\rangle - \mathbb{E}\left\langle \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(t) - X^{t,x;u}(t), p(t)\right\rangle. \\ &= \mathbb{E}\left[\bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(t) - Y^{t,x;u}(t)\right]. \\ &= \mathbb{E}\int_t^T \{\left\langle \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s) - Y^{t,x;u}(s), \bar{f}_y(s)^\intercal q(s)\right\rangle + \left\langle \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s) - Z^{t,x;u}(s), \bar{f}_y(s)^\intercal q(s)\right\rangle \\ &- \left\langle \bar{f}(s) - f(s, X^{t,x;u}(s), Y^{t,x;u}(s), Z^{t,x;u}(s), u(s)), q(s)\right\rangle \\ &+ \left\langle \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s) - X^{t,x;u}(s), -\bar{b}_x(s)^\intercal p(s) + \bar{f}_x(s)^\intercal q(s) - \bar{\sigma}_x(s)k(s)\right\rangle \\ &+ \left\langle \bar{b}(s) - b(s, X^{t,x;u}(s), u(s)), p(s)\right\rangle \\ &+ tr\left[\left(\bar{\sigma}(s) - \sigma(s, X^{t,x;u}(s), u(s))\right)^\intercal k(s)\right]\}ds. \\ &= \mathbb{E}\int_t^T \{H(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)), p(s), q(s), k(s)) \\ &- H(s, X^{t,x;u}(s), Y^{t,x;u}(s), Z^{t,x;u}(s), u(s)), p(s), q(s), k(s)) \\ &- \left\langle H(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)), p(s), q(s), k(s))\right\rangle \\ &- \langle H_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)), p(s), q(s), k(s)), \\ &\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s) - X^{t,x;u}(s)\rangle \end{aligned}$$

$$- \langle H_y(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)), p(s), q(s), k(s)),$$
$$\bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s) - Y^{t,x;u}(s)\rangle$$
$$- \langle H_z(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)), p(s), q(s), k(s)),$$
$$\bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s) - Z^{t,x;u}(s)\rangle\}ds.$$

comme H est convexe en (x, y, z, u) donc par la condition de maximum (3.12)

$$\begin{aligned} &J(t, x, \bar{u}(t)) - J(t, x, u(t)) \\ &\leq \mathbb{E}\int_t^T \langle H_u(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s), \bar{u}(s)), p(s), q(s), k(s)), \bar{u}(s) - u(s)\rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

■

3.3 Relation entre le principe du maximum et la programmation dynamique

Théorème 3.3.1 *Soit **(H1)-(H2)** pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ fixé. Supposons que $\bar{u}(\cdot)$ est un contrôle optimal pour le problème **(PCOSR)** et $(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(\cdot), \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(\cdot))$ et soit $(p(\cdot), q(\cdot), k(\cdot))$ les processus adjoint. Si $V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ on a $s \in [t, T]$*

$$\begin{aligned} &V_s(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) \\ &= G(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), -V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \bar{u}(s)). \\ &= \max_{u \in U} G(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), -V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), u). \\ &dt - p.p \quad et \ \mathbb{P} - p.s. \end{aligned} \tag{3.13}$$

De plus si $V \in C^{1,3}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ *et* V_{sx} *sont continus alors* $\forall s \in [t,T]$, $\mathbb{P} - p.s.$

$$\begin{aligned} p(s) &= V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal q(s). \qquad (3.14)\\ k(s) &= \{V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal \bar{\sigma}(s) + V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal \\ &\quad \times f_z(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), -V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal \bar{\sigma}(s), \bar{u}(s))\} q(s). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &q(s) \qquad (3.15)\\ &= \exp\{\int_t^s [f_y(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r), -V(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r)), -V_x(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r), \bar{u}(s))\bar{\sigma}(r), \bar{u}(r))\\ &- \frac{1}{2}|f_z(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r), -V(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r)), -V_x(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r))\bar{\sigma}(r), \bar{u}(r))|^2]dr\\ &+ \int_t^s f_z(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r), -V(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r)), -V_x(r, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(r))\bar{\sigma}(r), \bar{u}(r)) dW(r)\}. \end{aligned}$$

Preuve. Évidemment (3.15) peut être obtenu en résolvent le premier EDS en (3.11) directement maintenant démontrons (3.14), pout tout $t \in [0,T]$, on a alors $\forall s \in [t,T]$, $\mathbb{P} - p.s.$

$$V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) = -\bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s) = \mathbb{E}\left[\int_s^T \bar{f}(r)dr + \phi(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(T) \mid \mathcal{F}_s^t\right].$$

définir une $\mathcal{F}_s^t$ martingale de carré intégrable

$$m(s) := -\mathbb{E}\left[\int_s^T \bar{f}(r)dr + \phi(\bar{X}_T^{t,x;\bar{u}}) \mid \mathcal{F}_s^t\right], s \in [t,T].$$

Alors d'aprés la théorème de representation de martingale il existe un unique

$M \in L^2_{\mathcal{F}}([t,T] \times \mathbb{R}^d$ satisfait

$$m(s) = m(t) + \int_t^s M(r)dW(r),$$

où $t \in [0,T)$ fixé on a

$$V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) = -\int_s^T \bar{f}(r)dr - \int_t^s M(r)dW(r) + V(T, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(T)).$$

Par contre en appliquant la formule d'Itô à $V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))$ on obtient

$$\begin{aligned} dV(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) = \{ & V_s(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) + \langle V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \bar{b}(s) \rangle \\ & + \frac{1}{2} tr(\bar{\sigma}(s)^{\intercal} V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) \bar{\sigma}(s)) \} ds \\ & + V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^{\intercal} \bar{\sigma}(s) dW(s). \end{aligned}$$

en comparant les deux égalité ci-dessus on conclons que $\forall s \in [t,T]$

$$V_s(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) + \langle V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \bar{b}(s) \rangle + \frac{1}{2} tr(\bar{\sigma}(s)^{\intercal} V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) \bar{\sigma}(s)) = \bar{f}(s)$$

$$V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^{\intercal} \bar{\sigma}(s) = M(s).$$

cependant par l'unicitéde la solution EDSR nous avant

$$\begin{aligned} \bar{Y}^{t,x;\bar{u}}(s) &= -V_s(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)). \\ \bar{Z}^{t,x;\bar{u}}(s) &= -V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^{\intercal} \bar{\sigma}(s), s \in [t,T]. \end{aligned}$$

Puisque $V \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, il satisfait l'équation **HJB** généralisée (3.8) ce qui implique (3.13). Aussi par (3.8) on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
0 &= -V_s(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) \\
&+ G(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), -V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \\
&- V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \bar{u}(s)). \\
&\geq -V_s(s,x) + G(s, x, -V(s,x), -V_x(s,x), -V_{xx}(s,x), \bar{u}(s)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $V \in C^{1,3}([0,T] \times \mathbb{R}^n$ et V_{sx} sont continus alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\{-V_s(s,x) + G(s, x, -V(s,x), -V_x(s,x), -V_{xx}(s,x), \bar{u}(s))\}|_{x=\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)} = 0.$$

pour tout $s \in [t,T]$

$$\begin{aligned}
0 &= -V_{sx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) - V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{b}(s) \\
&- \bar{b}(s)^\intercal V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) - \frac{1}{2} tr(\bar{\sigma}(s)^\intercal V_{xxx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s)) \\
&- \bar{\sigma}(s)^\intercal V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s) + f_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \\
&- V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s)) - f_y(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \\
&- V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s)) \times V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) \\
&- f_z(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s)) \\
&\times [V_{xx}(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s) + V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}_x(s)].
\end{aligned}$$

où

$$tr(\bar{\sigma}^\intercal V_{xxx}\bar{\sigma}) := (tr(\bar{\sigma}^\intercal((V_x)^1)_{xx})\bar{\sigma}), .., (tr(\bar{\sigma}^\intercal((V_x)^n)_{xx})\bar{\sigma})^\intercal.$$

avec $((V_x)^1, ...(V_x)^n)^\intercal = V_x$ d'autre part on utilise la formule d'Itô à $V_x(s, \bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))$

on à

$$
\begin{aligned}
& dV_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) \\
& = -\{\bar{b}_x(s)^\intercal V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) + \bar{\sigma}_x(s)^\intercal \times V_{xx}(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s) \\
& - f_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s)) \\
& + f_y(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s)) \\
& \times V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)) + f_z(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \\
& - V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s)) \times [V_{xx}(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s) \\
& + V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}_x(s)]\}ds + V_{xx}(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal \bar{\sigma}(s)dW(s).
\end{aligned}
$$

on pose que $V_x(T,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(T)) = -\phi_x(\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(T))$ on utilise la formule d'Itô à $V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal q(s)$ on trouve

$$
\begin{aligned}
& dV_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal q(s) \\
& = \{-\bar{b}_x(s)^\intercal V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))q(s) + f_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \\
& - V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s))^\intercal q(s) - \bar{\sigma}_x(s)^\intercal \times [V_{xx}(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal \bar{\sigma}(s) \\
& + V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal \times f_z(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), \\
& - V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s)]q(s)\}ds + \{V_{xx}(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal \bar{\sigma}(s) + V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))^\intercal \\
& \times f_z(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s), V(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s)), -V_x(s,\bar{X}^{t,x;\bar{u}}(s))\bar{\sigma}(s), \bar{u}(s))\} \times q(s)dW(s).
\end{aligned}
$$

Donc par l'unicité de solution de l'equation adjoint (3.11) on trouve (3.14). ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons discuté un contrôle optimal des systhème stochastique progressif-rétrograd, avec Programmation dynamique (H.J.B) de problèmes de contrôle optimal stochastique récursif. Et donner les relations entre le principe de maximum stochastique et la fonction de Hamiltonian généralisée et la fonction de valeur

Bibliographie

[1] A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications I*, Probab. Math. Stat., vol. 28, Academic Press, New York, 1975.

[2] Briand, P. (2001). *Equations différentielles stochastiques rétrogrades.* Mars.

[3] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance,second ed.*, Ellipses Édition Marketing, Paris, 1997.

[4] E. Pardoux and S. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*,Systems Control Lett. **14** (1990), no. 1, 55–61.

[5] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). *Eléments de calcul stochastique.* IRBID, septembre.

[6] Jeanblanc, M. (2006). *Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY.* Lecture Notes, University of évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[7] J.M.Yong and X.Y Zhou, *Stocastic controls :Hamiltonian systems and HJB Equations, springer-Verlag* ,New York NY,USA,1999.

[8] J. Shi and Z. Yu, *Relationship between maximum principle and dynamic programming for stochastic resursive optimal control problems and application, Mathematical Problems in Engineering, Volume* 2013, ID 285241,2013.

[9] H. Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Stud. Adv.Math., vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[10] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, 2^{nd} ed, Grad. Texts in Math., vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991.

[11] S. Peng, *Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, SIAM J. Control Optim. **30** (1992), no. 2, 284–304.