République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option :**Probabilités**

Par

Badi Nour El houda

Titre

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les problèmes de contrôle optimale stochastique

Membres du Comité le Jury :

Dr	**LAKHDARI IMAD EDDINE**	U. Biskra	Président
Dr	**GHOUL ABDELHAK**	U. Biskra	Encadreur
Dr	**BEROUIS NASSIMA**	U. Biskra	Examinateur

Soutenu Publiquement le :28/06/2022

Dédicace

Je dédie cette mèmoire :

À la source de ma patience, Ma chère Mère.

À mes soeurs.

À mes frères.

À mes chères amies.

À tous ceux qui ètaient à côtès de moi et qui m'ont soutenu dans ma carrière universitaire.

A moi nour elhouda.

$\mathcal{R}$emerciements

Mes premiers remerciements à Dieu tout-puissant pour la volontè et la patience qu'il ma données pour achever mon humble travail.

Mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à ma mère.

Je tiens à remercier mon encadrant **Dr GHOUL Abdelhak**, pour ces conseils, sa grande disponibilitè et sa gènèrositè avec la quelle il ma fait partager ses travaux, ses idèes et ses intuitions.

Mes vifs remerciements vont ègalement aux membres du Jury.

Je remercie touts les enseignants du département de Mathèmatiques.

Je remercie ègalement tous ceux qui ont partage avec moi les moments difficiles.

Notations

$\mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$: Espace de $n \times d$ matrice réelle.

$\mathcal{M}_{n\times d}^{d}(\mathbb{R})$: Espace linéaire des vecteurs $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_d)$, $\mathcal{M}_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$\rightsquigarrow$:Suit la loi.

$p.s$: Presque partout.

$\mathbb{P}.p.s$: Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

EDS : Equations différentielles stochastiques.

EDSR : Equations différentielles stochastiques rétrogrades.

EDSP : Equations différentielles stochastiques progréssive.

M.B : mouvement brownien.

M.B.S : mouvement brownien standard.

U : L'ensemble des contrôle admissible

u : Contrôle admissible.

u^{θ} : Contrôle perturbation.

$j(.)$: Fonction de coût.

$H(t, u_t, x_t, y_t, z_t, p_t, q_t, r_t)$: Hamiltonien.

$F(t) = F(t, x_t, u_t) \quad , F^{\theta}(t) = F(t, x_t, u_t^{\theta})$;for $F = b, b_x$,

$F(t) = F(t, x_t) \quad ;\text{for } F = \sigma, \sigma_x,$

$F(t) = F(t, x_t, y_t, z_t, u_t) \quad , F^\theta(t) = F(t, x_t, y_t, z_t, u_t^\theta) \quad ;\text{for } F = f, f_x, f_y, f_z,$

$F(t) = F(t, x_t, y_t, u_t) \quad , F^\theta(t) = F(t, x_t, y_t, u_t^\theta) \quad ;\text{for } F = l, l_x, l_y.$

$\|Y\|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$

$S_c^2(\mathbb{R}^k)$:le sous-espace formé par les processus continus.

$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: le sous-espace formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que :$\|Z\|_{M^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty$

Si $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z\|^2 =$trace (Z, Z^*)

$M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: désigne l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Les espaces S^2, S_c^2, M^2 sont des espaces de Banach .

On désigne β^2 l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k)$ $\times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Table des matières

Introduction

On considére un probléme de contrôle stochastique, où le domaine de contrôle est non convexe et le systéme est régi par une équation différentielle stochastique progréssive et rétrograd (EDSPR) de type :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t\right) dW_t, \\ x\left(0\right) = x_0, \\ dy_t = f\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right) + z_t dW_t, \\ y\left(T\right) = \gamma\left(x_T\right) = \xi, \end{cases}$$

telle que : b, σ, f,et γ sont des fonctions données et $W = \left(W_t\right)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard définit sur un éspace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$ satisfaisant aux conditions usuelles, la variable de contrôle u est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté avec des valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^k$.

Le but du probléme de contrôle est de choisir u de maniére à minimiser une fonction, avec des valeurs initiales et terminales du type :

$$J\left(u\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T\right) + h\left(y_0\right) + \int_0^T l\left(t, x_t, y_t, u_t\right) dt\right]$$

où g, h, l, sont des fonctions données.

Les problèmes de contrôle stochastique pour les systèmes forward-backward ont étudié par de nombreux auteurs dont Peng [8], Xu [11], El-Karoui et tout [3], Wu [10], Dokuchaev et Zhou [2], Peng et Wu [9]. Les travaux qui est basées sur le principe de la programmation dynamique la a été étudiée par Fuhram et Tessetore [4]. Nous notons que dans Peng [8] et Wu [10], a été étudié le principe du maximum stochastique les systemes d'équation différentielle forward-backward , mais avec contrainte d'état convexe et condition terminale restreinte.

D'une manière classique de dériver les conditions nécessaires d'optimalité, où le domaine de contrôle est non convexe,. Plus précisément, si u est optimal conrole et v est arbitraire, alors nous définissons la perturbation forte comme suit :

$$u^{\theta} = \begin{cases} v & \text{si } t \in [\tau, \tau + \theta], \\ u_t & \text{si non,} \end{cases}$$

avec θ positive.

Ensuite, nous dérivons l'équation variationnelle de l'équation d'état , et l'inégalité variationnelle du fait que :

$$0 \leq J\left(u^{\theta}\right) - J(u).$$

De l'inégalité variationnelle, on déduit les conditions nécessaires d'optimalité en introduisant trois équations adjointes, qui sont respectivement associées aux l'équation Forward (EDS), l'équation Bakward (EDSR) et la valeur terminale de EDSR.

Après ce résultat, nous étudions quand les conditions nécessaires d'optimalité dérivées devient suffisant. Nous prouvons que sous des hypothèse supplémentaire, les conditions nécessaires sont suffisants.

Ce problème peut avoir des applications sur le marché financier et il peut être adapté au problème de la minimisation d'un investissement initial et de la maximisation d'un richesse finale.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre ,on va énumérer tous les outils mathématiques qui vont nous permettre de mieux comprendre le problème qui est le Principe du maximum dans le cas non convex .nous donnons des rappelles sur le calcule stochastique et des notions de base

Dans la deuxième chapitre, nous formulons le problème et donnons les différentes hypothèses utilisées ;puis nous déduisons l'équations et inégalité variationnelles, nous énonce le principe du maximum sous forme globale on introduisons les équations adjointes et en déduire notre premier résultat principal qui est les conditions nécessaires d'optimalité et le deuxième résultat principal ces conditions suffisantes d'optimalité .

Chapitre 1

Généralites sur le calcul stochastique

Le calcul stochastique est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continus remplaçant les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes.

Le but de ce chapitre est consacré à donner des définitions de base et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ est un espace de probabilité

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique)***

Soit T un ensemble. On appelle ***processus stochastique*** *sur un espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega,\ \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t soit* *une variable aléatoire.*

On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \to X_t(w)$ sont continues pour presque tout w.

Définition 1.1.2 ***(processus mesurable)*** *Un processus X est dit mesurable si l'application suivante :*

$$\left([0,+\infty[\times \Omega, B\left([0,+\infty[\right) \otimes \mathcal{F}_t\right) \to \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$
$$(t,w) \to X_t\left(w\right).$$

est mesurable.

Définition 1.1.3 ***(Processus adapté)*** *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit adapté (par rapport à $\mathcal{F}$) si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.4 ***(processus à trajectoire continue)*** *Le processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est dit à trajectoire continue si pour tout $w \in \Omega$ la fonction $t \to X_t\left(w\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*

Définition 1.1.5 ***(càdlàg et càglàd)***

1. *Un processus est dit càdlàg (continue à droite, pourvu de limite à gauche) si ses trajectoire sont continue à droite et pourvu de limite à gauche.*
2. *Un processus est dit càglàd (continue à gauche pourvu de limite à droite) si ses trajectoire sont continue à gauche et pourvu de limite à droite.*

Définition 1.1.6 ***(filtration)*** *Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sous-tribu de $\mathcal{F}$, c'est à dire :*

$$\forall 0 \leq s \leq t < \infty \ , \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

Et nous appelons $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *est un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.7 ***(processus progressivement mesurable)*** *On dit que* $X(t)$ *est progressivement mesurable par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *si* $\forall t \geq 0, \forall A \in B(R)$,

$$\{(s,w)/0 \leq s \leq t; X_s(w) \in A\} \in B([0,t]) \otimes \mathcal{F}_s,$$

c'est à dire que l'application

$$([0,t] \times \Omega, B([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t : (s,w) \rightarrow X_s(w),$$

est mesurable.

Définition 1.1.8 ***(Temps d'arrêt)*** *Une variable* T :$\Omega \rightarrow \{\infty\}$ *est un temps d'arrêt par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Où bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

1.1.1 Martingales

Définition 1.1.9 ***(Martingales)*** *Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est dit martingale si :*

i) Pour tout $t \geq 0, M_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté.*

ii) Pour tout $t \geq 0, M_t$ *est intégrable i.e* $\mathbb{E}(|M_t|)<\infty$.

iii) Pour tout $s \leq t, \mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$.

On définit de maniére similaire **sur -martingale** si (iii) est remplacé par :

$$\mathbb{E}\left(M_t/\mathcal{F}_s\right) \leq M_s,$$

et **sous-martingale** si (iii) est remplacé par : $\mathbb{E}\left(M_t/\mathcal{F}_s\right) \geq M_s$.

Définition 1.1.10 *(**Martingale locale**) Un processus M adapté càglàd est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts $\{T_n\}_{n\geq 1}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ $\mathbb{P}$.p.s, et le processus arrêté $\left(M^{T_n}\right)$ est une martingale pour tout n.*

Toute martingale càd-làg est une martingale locale mais la réciproque n'est pas vraie

Définition 1.1.11 *(**Semi martingale**) Une semi martingale est un processus càdlàg adapté X admettant une décomposition de la forme :*

$$X = X_0 + M + A,$$

où M est une martingale locale càdlàg nulle en 0 et A est un processus adapté à variation finie et nul en 0. Une semi martingale continue est une semi martingale telle que M et A sont continus, est unique.

Théorème 1.1.1 *(**Convergence des martingales**)*

1. *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ une sur-martingale càdlàg bornée dans L^1 (en particulier si elle est positive) Alors X_t converge p.s. quand $t \to +\infty$.*
2. *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ une martingale càdlàg. Alors $(X_t)_{t\in T}$ est uniformément intégrable si et seulement si X_t converge p.s. et dans L^1 quand $t \to +\infty$ vers*

une variable aléatoire $X_{+\infty}$.Dans ce cas, $X_{+\infty}$ ferme X à droite, i.e.$X_t = \mathbb{E}\left[X_{+\infty}/\mathcal{F}_t\right]$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.1.12 ***(Variation quadratique, crochet)***

1. *Soient $M = (M_t)_{t\in T}$ et $N = (N_t)_{t\in T}$ deux martingales locales dont l'une des deux est localement bornée (par exemple continue). Alors il existe un unique processus prévisible à variation finie, noté $< M, N >$, nul en 0, tel que $MN- < M, N >$ Soit une martingale locale. Cette martingale locale est continue si M et N le sont. De plus, pour tout $t \in T$, si $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq ... \leq t_{k_n}^n = t$ est une subdivision de $[0, t]$de pas tendant vers 0, on a :*

$$< M, N >_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)\left(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}\right),$$

   au sens de la convergence en probabilité. Le processus $< M, N >$ est appelé crochet (oblique) de M et N. On dira de plus que M et N sont orthogonales si $<M, N >= 0$ ce qui signifie que le produit MN est une martingale locale.

2. *Lorsque $M = N$, le processus $< M, M >$, noté parfois $< M >$ et appelé la variation quadratique de M ou le processus croissant de M, est croissant.De plus, on a la relation de "polarisation" :*

$$< M, N >= \frac{1}{2}\left(< M + N, M + N > - \langle M, M\rangle - \langle N, N\rangle\right).$$

1.2 Mouvement brownien

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.2.1 *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique,on dit que B est un*

$(M.B.S)$ si :

1. $B_0 = 0.$
2. *pour tout* $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < .... < t_n \leq T$ *les variables*
   $(B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_{n-1}} - B_{t_n})$ *sont indépendentes.*
3. $\forall 0 \leq s \leq t, B_t - B_s \rightsquigarrow N\left(0; t-s\right).$

Proposition 1.2.1 *Soit $B = \left(B_t\right)_{t\geq 0}$ un processus stochastique telle que toutes ses trajectoires sont continues et $B_0 = 0$ .Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *Le processus B est un $(M.B.S)$.*
2. *Le processus B est un processus gaussien avec :*

$$\begin{cases} Esperance\ m\left(t\right) = 0, \\ Covariance\ \Gamma\left(s,t\right) = \min\left\{s,t\right\}. \end{cases}$$

Proposition 1.2.2 *Soit $X_t = \left(X_t\right)_{t\geq 0}$ un processus stochastique et $B_t$et un M.B alors :*

1. *Pour tout $t \geq 0$ et $s \geq 0$,et $X_t = \left\{B_{t+s} - B_t\right\}$,alors (X_t) est un M.B.*
2. *Pour tout $t \geq 0$,et $X_t = -B_t$,alors (X_t) est un M.B.*
3. *Pour tout $t \geq 0$,et $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$,alors (X_t) est un M.B.*
4. *Pour tout $t \geq 0$, et soit $(c > 0)$et $X_t = \frac{1}{c}B_{c^2 t}$,alors (X_t) est un M.B.*

1.3 Intégrale stochastique

Définition 1.3.1 *(**Intégrale stochastique**) L'intégrale stochastique est un intégrale de la forme :*

$$\int_a^b X_s(w)\, dB_s(w),$$

où a et $b \in \mathbb{R}_+, (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.

L'intégrale stochastique est vérifier les propriétés suivantes :

1. **Linéarité :**Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux "bon processus" on donc :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^t (\alpha X_s(w) + \beta Y_s(w))\, dB_s(w) = \alpha \int_0^t X_s(w)\, dB_s(w) + \beta \int_0^t Y_s(w)\, dB_s(w)$$

2. **Centrage** :Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ "bon processus" on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s(w)\, dB_s(w)\right] = 0.$$

3. **Appartenance a** $\mathbb{L}^2$:Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$"bon processus" on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (X_s(w)\, dB_s(w))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2(w)\, ds\right].$$

4. **Variation quadratique** : La variation quadratique de intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t X_s(w)\, dB_s(w) \right\rangle = \int_0^t X_s^2 ds.$$

5. **Isométrie** :Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux "bon processus" on donc :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s(w)\,dB_s(w)\int_0^t Y_s(w)\,dB_s(w)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge s} X_s(w)\,Y_s(w)\,ds\right].$$

1.3.1 processus d'Itô

Définition 1.3.2 *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ défini sur $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ est appelé processus d'Itô s'il est de la forme :*

$$X_t = X_0+\int_0^t b(s)\,ds+\int_0^t \sigma(s)\,dB_s,\qquad \forall t\geq 0.$$

où $b(s)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté tq :

$$\int_0^t |b(s)|\,ds<\infty\qquad \forall t\geq 0.$$

et $\sigma(s)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté tq :

$$\int_0^t \sigma^2(s)\,ds<\infty\qquad \forall t\geq 0.$$

le processus $b(s)$ s'appelle la dérivée (ou drift) et $\sigma(s)$ s'appelle le coefficient de diffusion ou volatilité.

1.3.2 Formule d'Itô

Théorème 1.3.1 *Soit*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dB_s, \forall t \geq 0.$$

X_t et un processus d'Itô ,et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de clacce $\mathbb{C}^2$ alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f\prime(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f\prime\prime(X_s)\, d\langle X\rangle_s .$$

où

$$\int_0^t f\prime(X_s)\, dX_s = \int_0^t f\prime(X_s)\, b(s)\, ds + \int_0^t f\prime(X_s)\, \sigma(s)\, dB_s.$$

Plus généralement,si $f : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to f(t,x) \in \mathbb{R}$ et de classe $\mathbb{C}^{1,2}$ (continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en x) alors

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s)\, dX_s + \int_0^t f_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s .$$

1.4 Equation différentielle stochastique (EDS)

Définition 1.4.1 *Une equation différentielle stochastique est un equation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s, \forall t \geq 0. \tag{1.1}$$

Ou sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = b\,(t, X_t)\,dt + \sigma\,(t, X_t)\,dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Où $\{B_t, t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien.*

L'inconnu est le processus X*. Le probléme est, comme une équation différentielle ordinaire,de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.*

1.4.1 Existence et unicité

Théorème 1.4.1 *On dit que (1.1)posséde une unique solution dans l'intervalle*$[0, T]$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$*,s'il existe* $K{<}\infty$*,avec*

1. $|b\,(t, x) - b\,(t, y)| + |\sigma\,(t, x) - \sigma\,(t, y)| \leq K\,|x - y|$.
2. $|b\,(t, x) + \sigma\,(t, x)| \leq K\,(1 + |x|)$.
3. $\mathbb{E}\left(|X|^2\right) {<}\infty$.

1.5 Equations différentielles stochastiques rétrogrades(EDSR)

Considérons un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{-Y_t}{dt} = f(Y_t), \quad t \in [0, T] \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

En imposant que pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation - disons dans L_2 adaptée - est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s$$

ce qui implique que

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s \quad i.e. \qquad -dY_t = -Z_t dB_t \quad \text{avec,} \qquad Y_T = \xi$$

On voit donc apparaitre sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté. Par conséquent, comme une seconde variable, apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à g de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad avec, \quad Y_T = \xi$$

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet, B un mouvement brownien d-dimensionnel sur cet espace. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement brownien B.
- On note $S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

– On donne une application aléatoire g définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable.

– On considère une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Le problème est de résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) suivante :

$$-dY_t = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad 0\leq t\leq T \qquad\qquad \textit{avec}, \quad Y_T=\xi,$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_{r..} \qquad\qquad 0\leq t\leq T. \tag{1.2}$$

La fonction g s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale.

Définition 1.5.1 *Une solution de l'EDSR (1.2) est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement ;
2. $P-p.s.$ $\int_0^T \{|g(r,Y_r,Z_r)| + \|Z_r\|^2\}dr < \infty$;
3. $P-p.s$, on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_{.} \qquad\qquad 0\leq t\leq T.$$

Remarque 1.5.1 *les intégrales de l'équation ((1.2) étant bien définies et comme* *le processus Y est progressivement mesurable,il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.*

Lemme 1.5.1 *(**Lemme de Fatou**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a réélle positive, alors :*

$$\int \lim_{n\to\infty} \inf X_n dY \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int X_n dY.$$

Théorème 1.5.1 *(**Inégalité de doob**) Si $(X_t)_{t\geq 1}$ est une martingale continue, alors :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|\right] \leq 4 \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[|X_T|^2\right].$$

Lemme 1.5.2 *(**Lemme de Gronwall**) Soit $T \geq 0$ et g une fonction positive mesurable bornée telle que :*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\, ds, \quad \forall t \leq T,$$

où a et b sont des constantes positives. Alors :

$$g(t) \leq a \exp(bt), \quad \forall t \leq T.$$

Définition 1.5.2 *(**Fonction convexe**) On dit qu'une fonction J définie sur un ensemble convexe non vide $K \in V$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convexe sur K si et seulement si :*

$$J(\theta u + (1-\theta) v) \leq \theta J(u) + (1-\theta) J(v), \quad \forall u, v \in K, \forall \theta \in [0,1]. \tag{1.3}$$

De plus J est dit strictement convexe si l'inégalité (1.3) est stricte lorsque $u \neq v$ et $\theta \in]0,1[$.

On dit que la fonction J est concave lorsque la la fonction $-J$ est convexe.

Chapitre 2

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour des systémes FBSDE (cas non convexe)

2.1 Formulation du problème

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filrté satisfaisant aux conditions usuelles sur l'aquelle un d-dimentielle mouvement brownien $W = (W_t)_{t\geq 0}$. On suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est le $P-$augmentation de la fitration naturelle du W.

Soit T un nombre réel strictement positif fixe et U un sous-ensemble non vide et non convexe de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.1.1 (Contrôle admissible) *Un contrôle admissible u est un processus progressivement mesurable par apport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et avec des* *valeurs en U telles que :*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left|u_t\right|^2<\infty.$$

pour tout $u\in U$,on note U l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Considérons le système FBSDE suivant :

$$\begin{cases} dx_t=b\left(t,x_t,u_t\right)dt+\sigma\left(t,x_t\right)dW_t,\\ x\left(0\right)=x_0,\\ dy_t=f\left(t,x_t,y_t,z_t,u_t\right)dt+z_tdW_t,\\ y\left(T\right)=\gamma\left(x_T\right)=\xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\rightarrow\mathbb{R}^n.$$

$$\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^n\rightarrow M_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right).$$

$$f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times M_{m\times d}\left(\mathbb{R}\right)\times U\rightarrow\mathbb{R}^m.$$

$$\gamma:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m.$$

Nous définissons le critère à minimiser comme suit :

$$J\left(u\right)=\mathbb{E}\left[g\left(x_T\right)+h\left(y_0\right)+\int_0^T l\left(t,x_t,y_t,u_t\right)dt\right], \tag{2.2}$$

où

$$g:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}.$$

$$h:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}.$$

$$l:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times U\rightarrow\mathbb{R}.$$

Remarque 2.1.1 *L'equation (2.1) admet un solution unique .*

Preuve. voir Hu et Peng [5] ■

Le probléme du contrôle est de minimiser la fonctionnelle J sur U, un contrôle $u \in U$ est appelé optimal s'il résout :

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

Un contrôle qui résout ce problème est dit optimal.

Notre objectif est d'établir un conditions nécessaires d'optimalité, satisfaites par un contrôle optimal donné, sous la forme de principe du maximum stochastique.

Exemple 2.1.1 *Considérons un marché financier, où y_0 est l'investissement initial et x_T la richesse finale, et posons :*

$$I(u) = \mathbb{E}[h(y_0)] = \inf_{v \in U} I(v),$$

$$F(u) = \mathbb{E}[g(x_T)] = \max_{v \in U} F(v),$$

$$\tilde{F}(u) = -F(u),$$

$$R(u) = \mathbb{E}\int_0^T l(t, x_t, y_t, u_t)\, dt = \inf_{v \in U} R(v).$$

Ensuit

$$J(u) = I(u) + \tilde{F}(u) + R(u).$$

Le contrôle optimal u minimise le coût initial I et maximise le gain final F.

Les l'hypothèse

(H1) $b, \sigma, f, g, h, l, \gamma$ sont continuement différentiable par rapport à $(x, y; z, v)$ les dérivées bornées par $C(1 + |x| + |y| + |z| + |v|)$ et sont délimités,telle que C une constante positive.

Remarque 2.1.2 *Sous l'hypothèse (**H1**) et pour tout $u \in U$, l'équation (2.1) admet une solution unique et la fonctionnelle J est bien définie de U dans $\mathbb{R}$.*

2.2 Équations variationnelles et inégalité variationnelle

Pour dériver une condition nécessaire d'optimalité, supposons que $u \in U$ soit une condition optimale contrôler et désigner par (x_t, y_t, z_t) la solution de 2.1 correspondant à u,on definit un contrôle u par la perturbation suivante :

$$u^\theta = \begin{cases} v & \text{si } t \in [\tau, \tau + \theta], \\ u_t & \text{si non,} \end{cases} \tag{2.3}$$

où $0 \leq \tau < T$ et $\theta > 0$ est suffisamment petit et v est un élément quelconque de U est un $\mathcal{F}_t$-mesurable tel que :

$$\sup_{w \in \Omega} |v(w)| < \infty.$$

Le contrôle u^θ est admissible et soit $\left(x_t^\theta, y_t^\theta, z_t^\theta\right)$ la solution de (2.1) associée à u^θ. Puisque u est optimal, l'inégalité variationnelle sera dérivée du fait que :

$$0 \leq J\left(u^\theta\right) - J(u). \tag{2.4}$$

Introduisez les équations variationnelles suivante :

$$\begin{cases} dx_t^1 = \left[b_x(t)\,x_t^1 + b^\theta(t) - b(t)\right]dt + \sigma_x(t)\,x_t^1 dW_t, \\ x_0^1 = 0. \\ dy_t^1 = \left[f_x(t)\,x_t^1 + f_y(t)\,y_t^1 + f_z(t)\,z_t^1 + f^\theta(t) - f(t)\right]dt + z_t^1 dW_t, \\ y_T^1 = \gamma_x(x_T)\,x_T^1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pour dériver l'inégalité variationnelle de (2.4) et, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 *Sous l'hypothèse (**H1**) on a*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left|x_t^1\right|^2 \le C\theta^2, \tag{2.6}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left|y_t^1\right|^2 \le C\theta^2, \tag{2.7}$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left|z_t^1\right|^2 dt\right) \le C\theta^2. \tag{2.8}$$

Preuve. *par l'équation (2.5) et en utilisant l'inégalité de Holder on obient*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|x_t^1\right|^2 &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left[b_x(s)\,x_s^1 + b^\theta(s) - b(s)\right]ds + \int_0^t \sigma_x(s)\,x_s^1 dW_s\right)^2 \\ &\le 3\left[\mathbb{E}\left(\int_0^t b_x(s)\,x_s^1 ds\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \left[b^\theta(s) - b(s)\right]ds\right)^2 + \mathbb{E}\int_0^t \left(\sigma_t(s)\,x_s^1\right)^2 ds\right] \\ &\le 6C^2T\mathbb{E}\int_0^t \left(x_s^1\right)^2 ds + 3\mathbb{E}\left(\int_0^t \left[b^\theta(s) - b(s)\right]ds\right)^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

On applique l'inégalité de Gronwall

$$\mathbb{E}\left|x_t^1\right|^2 \le C\theta^2, \quad \text{for } t \in [0.T]. \tag{2.10}$$

Cela prouve (2.6). Prouvons maintenant (2.7) et (2.8).

Et par la deuxième équation variationnelle on a :

$$
\begin{aligned}
& -y_t^1-\int_t^T z_s^1 dW_s \\
& = -\gamma_x\left(x_T\right) x_T^1+\int_t^T\left[f_x(s) x_s^1+f_y(s) y_s^1+f_z(s) z_s^1+f^\theta(s)-f(s)\right] ds,
\end{aligned}
$$

et en utilisant le fait que

$$
\mathbb{E}\left(y_t^1 \int_t^T z_s^1 dW_s\right)=0,
$$

on a :

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left|y_t^1\right|^2+\mathbb{E} \int_t^T\left(z_s^1\right)^2 ds \qquad (2.11)\\
& =\mathbb{E}\left(-\gamma_x\left(x_T\right) x_T^1+\int_t^T\left[f_x(s) x_s^1+f_y(s) y_s^1+f_z(s) z_s^1+\left(f^\theta(s)-f(s)\right)\right] ds\right)^2 \\
& \leq 5 C^2 \mathbb{E}\left(x_T^1\right)^2+5 C^2 T \mathbb{E} \int_t^T\left(x_s^1\right)^2 ds+5 C^2 T \mathbb{E} \int_t^T\left(y_s^1\right)^2 ds \\
& +5 C^2(T-t) \mathbb{E} \int_t^T\left(z_s^1\right)^2 ds+5 \mathbb{E}\left(\int_t^T\left(f^\theta(s)-f(s)\right) ds\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|y_t^1\right|^2+\frac{1}{2} \mathbb{E} \int_t^T z_s^1 ds \leq & \, 5 C^2 \mathbb{E}\left(x_T^1\right)^2+5 C^2 T \mathbb{E} \int_0^T\left(x_s^1\right)^2 ds \\
& +5 C^2 T \mathbb{E} \int_t^T\left(y_s^1\right)^2 ds \\
& +5 \mathbb{E}\left(\int_t^T\left(f^\theta(t)-f(t)\right) dt\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Avec $\varepsilon=\frac{1}{10 C^2}$, $t \in[T-\varepsilon, T]$.

On applique l'inégalité de Gronwall,

$$\mathbb{E}\left|y_t^1\right|^2 \leq C\theta^2, \quad t \in [T-\varepsilon, T], \tag{2.12}$$
$$\mathbb{E}\int_t^T z_s^1 ds \leq C\theta^2, \quad t \in [T-\varepsilon, T],$$

de même nous avons

$$\begin{aligned} &-y_t^1 - \int_t^{T-\varepsilon} z_s^1 dW_s \\ &= -\gamma_x\left(x_{T-\varepsilon}\right) x_{T-\varepsilon}^1 + \int_t^{T-\varepsilon} \left[f_x(s)\, x_s^1 + f_y(s)\, y_s^1 + f_z(s)\, z_s^1 + f^\theta(s) - f(s)\right] ds. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|y_t^1\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^{T-\varepsilon}\left(z_s^1\right)^2 ds \leq\ & 5\mathbb{E}\left|y_{T-\varepsilon}^1\right|^2 + 5C^2T\mathbb{E}\int_t^{T-\varepsilon}\left(x_s^1\right)^2 ds \\ &+ 5C^2T\mathbb{E}\int_t^{T-\varepsilon}\left(y_s^1\right)^2 ds \\ &+ 5C^2\left(T-\varepsilon-t\right)\mathbb{E}\int_t^{T-\varepsilon}\left(z_s^1\right)^2 ds \\ &+ 5\mathbb{E}\left(\int_t^{T-\varepsilon}\left(f^\theta(s) - f(s)\right) ds\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\left|y_t^1\right|^2 \leq C\theta^2, \quad t \in [T-2\varepsilon, T]\ , \tag{2.13}$$
$$\mathbb{E}\int_t^{T-\varepsilon} z_s^1 ds \leq C\theta^2, \quad t \in [T-2\varepsilon, T].$$

Après un nombre fini d'itérations,on obtient : (2.9) et (2.10). ■

Lemme 2.2.2 *Sous l'hypothèse du lemme* 2.2.1, *on a les estimations suivantes :*

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t - x_t^1\right|^2 \le C\theta^2, \tag{2.14}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t - y_t^1\right|^2 \le C\theta^2, \tag{2.15}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_t^\theta - z_t - z_t^1\right|^2 dt\right] \le C\theta^2. \tag{2.16}$$

Preuve. *Pour prouver (2.14), on voit que :*

$$\begin{aligned}
&\int_0^t b\left(s, x_s + x_s^1, u_s^\theta\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s + x_s^1\right) dW_s \qquad (2.17)\\
&= \int_0^t \left[b\left(s, x_s, u_s^\theta\right) + \int_0^1 b_x\left(s, x_s + \lambda x_s^1, u_s^\theta\right) d\lambda x_s^1\right] ds\\
&+ \int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s\right) + \int_0^1 \sigma_x\left(s, x_s + \lambda x_s^1\right) d\lambda x_s^1\right] dW_s\\
&= \int_0^t b\left(s, x_s, u_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s\right) dW_s + \int_0^t \left[b_x x_s^1 - b^\theta\left(s\right) - b\left(s\right)\right] ds\\
&+ \int_0^t \sigma_x x_s^1 dW_s + \int_0^t A_1 ds + \int_0^t A_2 dW_s\\
&= x_t - x_0 + x_t^1 + \int_0^t A_1 ds + \int_0^t A_2 dW_s,
\end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 \left[b_x\left(, x_s + \lambda x_s^1, u_s^\theta\right) - b_x\left(s, x_s, u_s\right)\right] d\lambda x_s^1,\\
A_2 &= \int_0^1 \left[\sigma_x\left(s, x_s + \lambda x_s^1\right) - \sigma\left(s, x_s\right)\right] d\lambda x_s^1.
\end{aligned}$$

A partire du lemme 2.2.1 *ona*

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t A_1 ds\right)^2 + \left(\int_0^t A_2 dW_s\right)^2\right\} = 0\left(\theta^2\right). \tag{2.18}$$

Depuis

$$x_t^\theta - x_0 = \int_0^t b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s\right) dW_s,$$

on a :

$$\begin{aligned} x_t^\theta - x_t - x_t^1 = & \int_0^t C(s)\left(x_s^\theta - x_s - x_s^1\right) ds \\ & + \int_0^t D(s)\left(x_s^\theta - x_s - x_s^1\right) dW_s \\ & + \int_0^t A_1 ds + \int_0^t A_2 dW_s, \end{aligned} \tag{2.19}$$

telle que :

$$\begin{aligned} C(s) &= \int_0^1 b_x\left(s, x_s + \lambda\left(x_s^\theta - x_s - x_s^1\right), u_s^\theta\right) d\lambda, \\ D(s) &= \int_0^1 \sigma_x\left(s, x_s + \lambda\left(x_s^\theta - x_s - x_s^1\right), u_s^\theta\right) d\lambda. \end{aligned} \tag{2.20}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall et (2.18) , (2.19) on obtenons (2.14). Nous montrons ensuite (2.15) et (2.16). On peut facilement vérifier que :

$$\begin{aligned} & \int_t^T f\left(s, x_s + x_s^1, y_s + y_s^1, z_s + z_s^1, u_s^\theta\right) ds + \int_t^T \left(z_s + z_s^1\right) dW_s \\ & = \gamma\left(x_T\right) + \gamma_x\left(x_T\right) x_T^1 - y_t - y_t^1 + \int_t^T G ds, \end{aligned} \tag{2.21}$$

telle que :

$$\begin{aligned} G = & \int_0^1 \left(f_x\left(s, x_s + \lambda x_s^1, y_s + \lambda y_s^1, z_s + \lambda z_s^1, u_s^\theta\right) - f_x(s)\right) d\lambda x_s^1 \\ & + \int_0^1 (f_y\left(s, x_s + \lambda x_s^1, y_s + \lambda y_s^1, z_s + \lambda z_s^1, u_s^\theta\right) - f_y(s)) d\lambda y_s^1 \\ & + \int_0^1 \left(f_z\left(s, x_s + \lambda x_s^1, y_s + \lambda y_s^1, z_s + \lambda z_s^1, u_s^\theta\right) - f_z(s)\right) d\lambda z_s^1. \end{aligned}$$

Donc nous avons :

$$\begin{aligned}
-\left(y_t^\theta - y_t - y_t^1\right) &= -\left(\gamma\left(x_T^\theta\right) - \gamma\left(x_T\right)\right) + \gamma_x\left(x_T\right) x_T^1 \\
&+ \int_t^T \left[f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta\right) - f\left(s, x_s + x_s^1, y_s + y_s^1, z_s + z_s^1, u_s^\theta\right)\right] ds \\
&+ \int_t^T \left(z_s^\theta - z_s + z_s^1\right) dW_s + \int_t^T G ds.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t - y_t^1\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left|z_s^\theta - z_s + z_s^1\right|^2 ds \\
&= \mathbb{E}\Big\{-\left(\gamma\left(x_T^\theta\right) - \gamma\left(x_T + x_T^1\right)\right) \\
&- \int_0^1 \left[\gamma_x\left(x_T + \lambda x_T^1\right) - \gamma_x\left(x_T\right)\right] d\lambda x_T^1 + \int_t^T G ds \\
&+ \int_t^T \left[f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta\right) - f\left(s, x_s + x_s^1, y_s + y_s^1, z_s + z_s^1, u_t^\theta\right)\right] ds\Big\}^2.
\end{aligned}$$

De lemme 2.2.1 *et (2.14) nous remarquons que :*

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathbb{E}\left(\int_t^T G^\theta ds\right)^2 = 0\left(\theta^2\right),$$

$$\mathbb{E}\left[\gamma\left(x_T^\theta\right) - \gamma\left(x_T + x_T^1\right)\right]^2 = 0\left(\theta^2\right).$$

En appliquant la méthode itérative utilisée dans le lemme 2.2.1 *on obtenons (2.15) et (2.16).* ■

Lemme 2.2.3 *Sous les hypothèses du lemme* 2.2.2*, on a*

$$\begin{aligned}
o(\theta) &\le \mathbb{E}\left[g_x\left(x_T\right) x_T^1 + h_y\left(y_0\right) y_0^1\right] \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \left[l_x(t) x_t^1 + l_y(t) y_t^1\right] dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \left[l^\theta(t) + l(t)\right] dt.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Preuve. On a de (2.4) :

$$0 \leq \mathbb{E}\left[g\left(x_T^\theta\right) - g\left(x_T\right)\right] + \mathbb{E}\left[h\left(y_0^\theta\right) - h\left(y_0\right)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left[l\left(t, x_t^\theta, y_t^\theta, u_t^\theta\right) - l\left(t, x_t, y_t, u_t\right)\right] dt. \tag{2.24}$$

Ainsi du lemme (2.2.2)

$$\begin{aligned} o(\theta) &\leq \mathbb{E}\left[g\left(x_T + x_t^1\right) - g\left(x_T\right)\right] + \mathbb{E}\left[h\left(y_0 + y_0^1\right) - h\left(y_0\right)\right] \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[l\left(t, x_t + x_t^1, y_t + y_t^1, u_t\right) - l\left(t, x_t, y_t, u_t\right)\right] \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[l\left(t, x_t + x_t^1, y_t + y_t^1, u_t^\theta\right) - l\left(t, x_t + x_t^1, y_t + y_t^1, u_t\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[g_x\left(x_T\right) x_t^1 + h_y\left(y_0\right) y_0^1\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left[l_x\left(t\right) x_t^1 + l_y\left(t\right) y_t^1 + l^\theta\left(t\right) - l\left(t\right)\right] dt. \end{aligned} \tag{2.25}$$

■

2.3 Équations adjointes et conditions nécessaires d'optimalité

Dans cette section, nous dérivons l'inégalité variationnelle de (2.22). A cette fin, introduisez les trois équations adjointes suivantes :

$$\begin{cases} dp_t = \left[-l_x\left(t\right) - b_x\left(t\right) p_t - \sigma_x\left(t\right) P_t\right] dt + P_t dW_t, \\ p_T = g_x\left(x_T\right), \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\begin{cases} dq_t = \left[l_y\left(t\right) - f_y\left(t\right) q_t\right] dt - f_z\left(t\right) q_t dW_t, \\ q_0 = h_Y\left(y_0\right), \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} dr_t = \left[-b_x(t)\,r_t - \sigma_x(t)\,R_t - f_x(t)\,q_t\right]dt + R_t dW_t, \\ r_T = -\gamma_x(x_T)\,q_T, \end{cases} \tag{2.28}$$

telle que :

$$\begin{aligned} (p, P) &\in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^n\right) \times L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^{n\times d}\right), \\ q &\in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^m\right), \\ (r, R) &\in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^n\right) \times L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^{n\times d}\right). \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô respectivement à $(p_t x_t^1)$, $(q_t y_t^1)$ et $(r_t x_t^1)$ et en prenant l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left[p_T x_T^1\right] = p_0 x_0^1 + \mathbb{E}\int_0^T \left[b^\theta(t) - b(t)\right] p_t dt, \tag{2.29}$$

$$\mathbb{E}\left[q_0 y_0^1\right] = \mathbb{E}\left[q_T y_T^1\right] - \mathbb{E}\int_0^T \left[l_y(t)\,y_t^1 + f_x(t)\,x_t^1 q_t + \left(f^\theta(t) - f(t)\right) q_t\right] dt, \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[r_T x_T^1\right] = \mathbb{E}\left[r_0 x_0^1\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left[l_x(t)\,x_t^1 - f_x(t)\,x_t^1 q_t + \left(b^\theta(t) - b(t)\right) r_t\right] dt. \tag{2.31}$$

On remarque que : $x_0^1 = 0$, $y_T^1 = \gamma_x(x_T)x_T^1$, $p_T = g_x(x_T)$, $q_0 = h_Y(y_0)$

et $r_T = -\gamma_x(x_T)q_T$

puis, (2.29), (2.30) et (2.31)deviennent

$$\mathbb{E}\left[g_x(x_T)\,x_T^1\right] = \mathbb{E}\int_0^T \left[b^\theta(t) - b(t)\right] p_t dt,$$

$$\mathbb{E}\left[h_y\left(y_0\right)y_0^1\right]=-\mathbb{E}\int_0^T\left[l_x\left(t\right)x_t^1+l_y\left(t\right)y_t^1+\left(b^{\theta}\left(t\right)-b\left(t\right)\right)r_t+\left(f^{\theta}\left(t\right)-f\left(t\right)\right)q_t\right]dt.$$

Enfin, on peut réécrire (2.23) comme

$$o\left(\theta\right)\leq\mathbb{E}\int_0^T\left[H\left(t,u_t,x_t,y_t,z_t,p_t,q_t,r_t\right)-H\left(t,u_t^{\theta},x_t,y_t,z_t,p_t,q_t,r_t\right)\right]dt,\quad(2.32)$$

où l'hamiltonien H est défini à partir de $[0,T]\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times M_{n\times d}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$H\left(t,u_t,x_t,y_t,z_t,p_t,q_t,r_t\right)=-l\left(t\right)-b\left(t\right)\left(p_t-r_t\right)+f\left(t\right)q_t.\quad(2.33)$$

De cette inégalité variationnelle ci-dessus, nous pouvons facilement déduire les conditions nécessaires d'optimalité

Théorème 2.3.1 *(**Les conditions nécessaires d'optimalité**) Soit u un contrôle optimal minimisant la fonctionnelle J sur U et (x_t,y_t,z_t) désigne la valeur optimale correspondante trajectoire il existe trois processus uniques adaptés*
$p\in L_{\mathcal{F}}^2\left([0,T];\mathbb{R}^n\right)$, $q\in L_{\mathcal{F}}^2\left([0,T];\mathbb{R}^m\right)$ et $r\in L_{\mathcal{F}}^2\left([0,T];\mathbb{R}^n\right)$,
qui sont respectivement solutions des équations différentielles stochastiques (2.26),(2.27) et (2.28) ,tel que :

$$H\left(\tau,u_\tau,x_\tau,y_\tau,z_\tau,p_\tau,q_\tau,r_\tau\right)=\max_{v\in U}H\left(\tau,v,x_\tau,y_\tau,z_\tau,p_\tau,q_\tau,r_\tau\right)\quad(2.34)$$

Preuve. *À partir de l'inégalité variationnelle (2.32) et de la définition de u^{θ}, nous* *avons*

$$o(\theta) \leq \mathbb{E} \int_{\tau}^{\tau+\theta} \left[H(t, u_t, x_t, y_t, z_t, p_t, q_t, r_t) - H(t, v, x_t, y_t, z_t, p_t, q_t, r_t) \right] dt,$$

donc

$$0 \leq \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \mathbb{E} \int_{\tau}^{\tau+\theta} \left[H(t, u_t, x_t, y_t, z_t, p_t, q_t, r_t) - H(t, v, x_t, y_t, z_t, p_t, q_t, r_t) \right] dt.$$

Enfin, on obtient :

$$0 \leq H(\tau, u_\tau, x_\tau, y_\tau, z_\tau, p_\tau, q_\tau, r_\tau) - H(\tau, v, x_\tau, y_\tau, z_\tau, p_\tau, q_\tau, r_\tau) \qquad \forall v \in U.$$

La preuve est terminée. ■

2.4 Conditions suffisantes d'optimalité

Dans cette section, nous étudions quand la condition nécessaire d'optimalité 2.34 devient suffisant. On suppose que U est convexe et on rappelle les hypothèses (H1) et les système d'équations adjoints (2.26),(2.27),(2.28)

Théorème 2.4.1 ***(Les conditions suffisantes d'optimalité)*** *: Supposons que pour tout* $v \in U$ *et pour tout* $t \in [0, T]$

1. *Les fonctions* g, h *et*

$$x_t^v \to \varphi(x_t^v) = q_t \gamma(x_t^v) \in \mathbb{R},$$

sont convexes

2. *Les fonctions :*

$$x_t^v \to \varphi(x_t^v) = \sigma(t, x_t^v)(R_t - P_t) \in \mathbb{R},$$
$$(x_t^v, y_t^v, z_t^v) \to H(t, v_t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, p_t, q_t, r_t).$$

Sont concave

Alors u est un contrôle optimal du problème $\{(2.1),(2.2)\}$ s'il satisfait (2.34)

Preuve. *On pose quelques simplifications. pour tout $v \in U$.*

$$F^v(t) = F(t, v_t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, p_t, q_t, r_t) \quad ; forF = H, H_x, H_y, H_z.$$
$$F^v(t) = F(t, x_t^v, v_t) \quad ; forF = b, b_x.$$
$$F^v(t) = F(t, x_t^v) \quad ; forF = \sigma, \sigma_x.$$
$$F^v(t) = F(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t) \quad ; forF = f, f_x, f_y, f_z.$$
$$F^v(t) = F(t, x_t^v, y_t^v, v_t) \quad ; forF = l, l_x, l_y.$$

Soit u un contrôle admissible arbitraire (candidat à être optimal). Pour tout contrôle admissible v,on a

$$J(u) - J(v) = \mathbb{E}\left[g(x_T^u) - g(x_T^v)\right] + \mathbb{E}\left[h(y_0^u) - h(y_0^v)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left[l^u(t) - l^v(t)\right] dt.$$

Comme g et h sont convexes, on a

$$J(u) - J(v) \leq \mathbb{E}\left[g_x(x_T^u)(x_T^u - x_T^v)\right] + \mathbb{E}\left[h_y(y_0^u)(y_0^u - y_0^v)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left[l^u(t) - l^v(t)\right] dt.$$

Nous remarquons que $p_T = g_x\left(x_T^u\right)$ *et* $q_0 = h_y\left(y_0^u\right)$*, ensuite nous avons*

$$J(u) - J(v) \leq \mathbb{E}\left[p_T\left(x_T^u - x_T^v\right)\right] + \mathbb{E}\left[q_0\left(y_0^u - y_0^v\right)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left[l^u(t) - l^v(t)\right] dt.$$

En appliquant la formule d'Ito respectivement à $p_t\left(x_t^u - x_t^v\right)$ *e tq*$_t\left(y_t^u - y_t^v\right)$*, et en prenant attente, on obtient*

$$\begin{aligned} J(u) - J(v) \leq \mathbb{E}\int_0^T &- \left[\left(l_x^u(t) + b_x^u(t)\,p_t\right)\left(x_t^u - x_t^v\right) + \left(l_y^u(t) + f_y^u(t)\right) q_t\left(y_t^u - y_t^v\right)\right] dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[f_z^u(t)\,q_t\left(z_t^u - z_t^v\right) + \left(b^u(t) + b^v(t)\right) p_t + \left(\sigma^u(t) - \sigma^v(t)\right) P_t\right] dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\left(-f^u(t) + f^v(t)\right) q_t + l^u(t) - l^v(t)\right] dt + \mathbb{E}\left[q_T\left(y_T^u - y_T^v\right)\right]. \end{aligned}$$

De la définition et de la convexité de la fonction φ*, on a :*

$$\begin{aligned} q_T\left(y_T^u - y_T^v\right) &= q_T\left[\gamma\left(x_T^u\right) - \gamma\left(x_T^v\right)\right] \\ &= \varphi\left(x_T^u\right) - \varphi\left(x_T^v\right) \\ &\leq \varphi\left(x_T^u\right)\left(x_T^u - x_T^v\right) \\ &= \gamma\left(x_T^u\right) q_T\left(x_T^u - x_T^v\right). \end{aligned}$$

On remarque que :

$$r_T = -\gamma_x\left(x_T^u\right) q_T,$$

ensuite

$$q_T\left(y_T^u - y_T^v\right) \leq -r_T\left(x_T^u - x_T^v\right).$$

En appliquant la formule d'Ito à $r_t\left(x_t^u - x_t^v\right)$ *et prenons l'espérance, nous avons*

$$\begin{aligned} J(u) - J(v) \leq \mathbb{E}\int_0^T & \left[H^v(t) - H^u(t) + H_x^u(t)\left(x_t^u - x_t^v\right) + H_y^u(t)\left(y_t^u - y_t^v\right) + H_z^u(t)\left(z_t^u - z_t^v\right)\right] dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\sigma_x^u(t)\left(x_t^u - x_t^v\right) - \sigma^u(t) + \sigma^v(t)\right]\left(R_t - P_t\right) dt \end{aligned}$$

De la définition et de la concavité de la fonction ψ, *nous avons*

$$\left[\sigma_x^u(t)\left(x_t^u - x_t^v\right) - \sigma^u(t) + \sigma^v(t)\right]\left(R_t - P_t\right) = \psi\left(x_t^u\right)\left(x_t^u - x_t^v\right) - \psi\left(x_t^u\right) + \psi\left(x_t^v\right) \leq 0.$$

Ensuite

$$J(u) - J(v) \leq \mathbb{E}\int_0^T \left[H^v(t) - H^u(t) + H_x^u(t)\left(x_t^u - x_t^v\right) + H_y^u(t)\left(y_t^u - y_t^v\right) + H_z^u\left(z_t^u - z_t^v\right)\right] dt.$$

En utilisant les gradients généralisés de Clark de $H^u(t)$, *il découle de la condition nécessaire d'optimalité (2.34) et de la concavité de* H *en* (x, y, z), *ce*

$$H^v(t) - H^u(t) \leq H_x^u(t)\left(x_t^v - x_t^u\right) + H_y^u(t)\left(y_t^v - y_t^u\right) + H_z^u(t)\left(z_t^v - z_t^u\right).$$

Ou équivalent

$$0 \geq H^v(t) - H^u(t) + H_x^u(t)\left(x_t^u - x_t^v\right) + H_y^u(t)\left(y_t^u - y_t^v\right) + H_z^u(t)\left(z_t^u - z_t^v\right).$$

Cela implique que

$$J(u) - J(v) \leq 0.$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire Nous considérons un problème de contrôle stochastique où le domaine de contrôle n'a pas besoin d'être convexe, le système est régi par une équation différentielle stochastique EDS-EDSR non linéaire avec non constante condition terminale. Le cout à minimiser se présente sous la forme générale, avec les coûts initiaux et terminaux.

Nous dérivons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en introduisant trois équations adjointes.

Ce problème peut avoir des applications sur le marché financier et il peut être adapté au problème de la minimisation d'un investissement initial et la maximisation d'un richesse finale

Bibliographie

[1] BAHLALI. S et LABED. B. Necessary and sufficient conditions of optimality for optimal control problem with initial and terminal costs. Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 14, No. 3, pp. 291–301 (2006).

[2] Dokuchaev. N. , Zhou. X. Y. Stochastic controls with terminal contingent conditions, Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 238, 143–165 (1999).

[3] El-Karoui. N, et tout. Backward stochastic differential equations in finance, Math. finance 7,(1997).

[4] Fuhram. M, Tessetore. G. Existence of optimal stochastic controls and global solutions of forward-backward stochastic differential equations, SIAM Jour.Cont. Optim., 43, 3,813-830(2004).813–830 (2004).

[5] Hu. Y, Peng. S. Solution of forward-backward stochastic differential equations, Probab.Theory Rel. Fields, 103, 273–283 (1995).

[6] Huyên. P. Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (2000).

[7] Monique. J. Cours de Calcul stochastique. DESS IM EVRY option Finance, Septembre 2002.

[8] Peng. S. Backward stochastic differential equations and application to optimal control, Appl. Math. Optim. 27, 125–144 (1993).

[9] Peng. S, Wu. Z. Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control. SIAM J. Control Optim., 37, 3, 825–843 (1999).

[10] Wu. Z. Maximum Principle for Optimal Control Problem of Fully Coupled Forward-Backward Stochastic Systems, Systems Sci. Math. Sci. 11, 3, 249–259 (1998).

[11] Xu. W. Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 37, 172–185 (1995).

Résumé

Dans ce mémoire nous donnons des rappelles sur le calcule stochastique et des notions de base, puis nous considérons le problème de contrôle stochastique où le domaine de contrôle n'est pas convexe, le système est régi par un équation différentielle stochastique Forward-Bakward non linéaire avec non constante condition terminale. Les critères à minimiser se présentent sous la forme générale, avec les coûts initiaux et terminaux. Nous introduisons des processus adjoints et nous dérivons les conditions nécessaires d'optimalité.

Mots clés : **équation différentielle stochastique progressive et rétrograde, principe du maximum stochastique, contrôle optimal, équation adjointe, équation variation.**

Abstract

In this thesis we give reminders on the stochastic calculus and basic notions, then we consider the stochastic control problem where the control domain has not convex, the system is governed by a nonlinear forward-Backward stochastic differential equation with non-constant terminal condition. The criteria to be minimized are presented in the general form, with the initial and terminal costs. We introduce adjoint processus and derive the necessary optimality conditions.

Key words: **forward and backward stochastic differential equation, stochastic maximum principal, optimal control, adjoint equation, variational equation.**

ملخص

في هذه الأطروحة نعطي تذكيرا بحساب التفاضل و التكامل العشوائي و المفاهيم الأساسية، ثم ناخذ في الإعتبار مشكلة التحكم العشوائي حيث لم يكن مجال التحكم محدبا، ويحكم النظام العشوائي معادلة تفاضلية عشوائية الى الامام و الخلف غير خطية مع حالة نهائية غير ثابتة. يتم تقديم المعايير التي سيتم تصغيرها في النموذج العام، مع التكاليف الاولية و النهائية. نقدم عمليات مساعدة و نشتق الشروط الازمة لتحقيق الامثل.

الكلمات المفتاحية: المعادلة التفاضلية العشوائية للامام والخلف، القيمة الاساسية القصوى العشوائية ، التحكم الامثل، المعادلة المساعدة والمعادلة المتغيرة.