République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : probabilité

Par Mr. KARBO Abdelhadi

Titre :

Le lien entre Les EDSRs et les martingales BMO

Devant le Jury :

Mme	LABED Saloua	Dr	U. Biskra	Président
Mme	GATT Rafika	Dr	U. Biskra	Rapporteur
Mr.	ABBA Abedelmajid	Dr	U. Biskra	Examinateur

Soutenu Publiquement le 26/06/2022

Dédicace

AL HAMD A ALLAH qui nous a aidés à accomplir cette humble travail .

Je donne mon travail à la source de soutien et de force "mes parents", merci pour tout le soutien et l'amour que vous m'avez donnés depuis mon enfance, et j'espère que vous m'accompagnerez toujours de vos bénédictions.

Merci beaucoup, mes frères et sœurs, pour votre aide et votre soutien.

Merci beaucoup à toute ma famille.

Merci beaucoup à tous mes amis.

Remerciements

Je voudrais exprimer ma sincère gratitude à ma conseillère "Dr.GATT Rafika" pour son precieux conseil et son aide aussi sa grande patience durant toute la periode du travail. Et je remercies égalment aux membres du Jury "Dr.LABED Saloua" et "Dr.ABBA Abdelmajid" qui ont acceptéd d'évaluer et de juger mon travail, Je tiens également à remercier tous mes professeurs pour leur aide et leur soutien pendant toutes mes périodes d'études à l'université.

Notations et symbols

$EDSR$	Équations différentielles stochastiques rétrogrades.
$v.a$	Variable aléatoire.
$E[X]$	Espérance de la v.aX par rapport à une probabilite $\mathbb{P}$fixée initialement.
$E[X/F]$	Espérance conditionnelle de X sachant F.
$\mathbb{R}^m$	Espace réel euclidien de dimension m.
$\mathbb{R}^{m\times d}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $m \times d$
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	fltration.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
$(\Omega, \mathcal{F}, p)$	Espace de probabilité.
$p.s$	Presque sûrement.
$P.p.s$	La notation presque sûrement pour la mesure de prpbabilité P
$\xi(M)$	l'exponentielle stochastique d'une martingale locale continue M.
$\mathcal{R}^p$	l'espace de tous les processus adaptés en continu Y.
$\mathcal{H}^p$	l'espace Banach de continu$\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$martingales locales adaptées.
(R_P)	condition l'inégalité inverse Hölder.
(A_p)	condition Muckenhoupt.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires introduit en 1973 dans les travaux de J.Bismut [2] quand il étudiait l'équation adjointe associée au principe de maximum stochastique dans le contrôle optimal. Toutefois, Le premier résultat général concernant les $EDSRs$ est dû à E. Pardoux et à S. Peng [12] en 1990 qui ont introduit un nouveau formule :

$$\begin{cases} dY_t & = f\left(t, Y_t, Z_t\right) - Z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T. \\ Y_T & = \xi. \end{cases}$$

où ξ est la valeur terminale et le coefficient f est le générateur de l' $EDSR$ qui est une fonction non linéaire et satisfait la condition globale de Lipschitz par rapport aux variables d'état. La solution de cette équation est un couple de processus $(Y; Z)$. En effet, comme la condition terminale est donnée à l'instant terminal T, la présence du processus Z via le théorème de représentation martingale, assure que Y est adapté au regard du filtration générée par le mouvement brownien $(W_t)_{t\in[0,T]}$.

Dès les années 1990, il y a eu un intérêt croissant pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Ces équations ont un large éventail d'applications dans le contrôle stochastique et la théorie financière des équations différentielles ...

Dans ce travail, nous intéréssons à certains résulats sur les BMO martingale .

La théorie des BMO martingale est largement utilisée pour étudier l'équations différentielles stochastique rétrograde($EDSR$). Certaines propriétés de BMO martingales déjà utilisé par Bismut[2] quand il à discuté de l'existence et l'unicité d'une solution de certaines équations stochastiques rétograde de Riccati, en choisissant l'espace de BMO pour la partie martingale du processus de solution. Dans le travail de Delbaen et al [5] ont été établis en relation avec le problème de couverture des sinistres éventuels et des $EDSR$ linéaires. La plupart de ces conditions de BMO martingales et les inégalités inverse de Hölder se produisent naturellement dans les $EDSR$ avec des générateurs quadratiques. Lorsque le générateur d'une $EDSR$ a croissance quadratique puis la partie martingale de toute solution bornée du $EDSR$ est une BMO martingale. Plus tard, les normes de BMO ont été utilisés pour prouver l'existence, l'unicité et la stabilité des résultats des $EDSRs$.

Le but de ce mémoire est de faire le contraire : On va utilisé les téchniques des $EDSRs$ pour prouver des résultats sur les martingale BMO.

ce mémoire se composé de tros chapitres

Chapitre 1 : Le but de chapitre 1 est de Définir la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades, et de préciser la terminologie utilisée dans ce context. Nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité.

Chapitre 2 : Dans le chapitre 2 a l'aide les propriétés des $EDSR$, on trouve l'équivalence bien connue entre les propriétés de BMO, Muckenhoupt et conditions Hölder inverses.

Chapitre 3 : finalement dans le chapitre 3 on parle à la transformation de Girsanov pour les martingales BMO et les EDSRs et on trouve quelques dominations pour les normes de BMO.

Chapitre 1

Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Le but de ce chapitre est de définir les notions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades, EDSRs en abrégé et de préciser la terminologie utilisée dans ce context. Nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité.de la solution.

1.1 Vocabulaire et notations

1.1.1 Présentation du problème

Depuis l'article de J.M .Bismut Formellement, les EDSRs sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne la condition terminale. Cité en référence [2] ,la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) a connu un grand développement, surtout ces dernières années, grâce notamment à ses diverses applications dans plusieurs domaines.

Dans le cas déterministe, il y'a équivalence entre la donnée d'une condition terminale et la donnée d'une condition initiale par inversion du temps, c'est comme dans le cas, par exemple, d'une équation différentielle ordinaire. Dans le cas stochastique, les choses sont fondamentalement différentes lorsqu'on cherche des solutions qui restent adaptés par rapport à une filtration donnée. En effet, en inversant simplement le temps, on perd la propriété de non anticipation de la solution c'est pour cela qu'on a introduit les EDSR.

Pour comprendre bien qu'est ce que une EDSR il faut formuler d'une façon correcte la notion de solution adaptée à une EDSR.

Dans ce paragraphe, on va donner, en résumé, un petit aperçu sur les EDSR, le théorème d'existence et d'unicité de la solution.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t) \quad , \quad t \in [0,T] \quad \text{avec} \ , \quad Y_T = \xi,$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$.

Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas détrministe. La meilleure approximation - disons dans L^2- adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Si on utilise la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théoréme de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \quad i.e. \quad -dY_t = Z_t dW_t, \qquad avec, Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Donc, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z. Alors l'équation devient :

$$-dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dW_t. \qquad avec, Y_T = \xi.$$

Notation 1.1.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité complet et* W *un MB d-dimensionnel sur cet espace. On notera* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *la filtration naturelle du MB* W*. On travaillera avec deux espaces de processus :*

- on notera avant tout $S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *l'espace vectoriel formé des processus* Y*, progressivement mesurables, à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$*, tels que :*

$$||Y||^2_{S^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $S^2_c\left(\mathbb{R}^k\right)$ *le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus non distinguées seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notation pour les espaces quotients.*

- ensuite $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *celui formé par les processus* Z*, progressivement mesurables, à valeurs dans* $\mathbb{R}^{k\times d}$*, tels que :*

$$||Z||^2_{M^2} := \mathbb{E}\left[\int_0^T ||Z_t||^2 dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $||z||^2 = trace\,(zz^*)$. $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *désigne l'ensemble des classes d'équivalence de* $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

$\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$ *seront souvent omis ; les espaces* S^2, S_c^2 *et* M^2 *sont des espaces de Banach pour les normes définies en dessus. Nous désignerons* B^2 *l'espace de Banach* $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)\times M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tell que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\le t\le T}$ soit progressivement mesurable. On prenant également une variable aléatoire ξ , mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte, le but c'est de résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante :

$$-dY_t = f(t,Y_t,Z_t)\,dt - Z_t dW_t, \qquad 0\le t\le T, \qquad Y_T=\xi,$$

ou,de façon même, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)\,dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0\le t\le T, \tag{1.1}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR 1.1.

Définition 1.1.1 *Une solution de l'EDSR* 1.1 *est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\le t\le T}$ *vérifiant :*

1- Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$ *;*

2- $\mathbb{P}-p.s. \int_0^T \{|f(r, Y_r, Z_r)| + ||Z_r||^2\} dr < \infty$ *;*

3- $\mathbb{P}-p.s.$*, on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Remarque : Il est important de garder les deux points suivants : premiérement, les intégrales de l'équation 1.1 étant bien définies et Y est une semi-martingale continue ; puis, comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur générateur f, le processus Y appartient à S^2.

Proposition 1.1.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ *positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$ *et une constante positive* λ *tels que*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \qquad |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda(|y| + ||z||).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR* 1.1 *telle que* $Z \in M^2$ *alors* Y *appartient à* S_c^2*.*

preuve. Le résultat se dérouler principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a, $\forall t \in [0, T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)\, dr + \int_0^t Z_r dW_r,$$

et par suite, utilisant l'hypothése sur f,

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda ||Z_r||)\, dr + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_r dW_r| + \lambda \int_0^t |Y_r| dr.$$

Posons

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda ||Z_r||)\, dr + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_r dW_r|.$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable.Comme Y est un processus continue - cf. remarque précédente, le lemme de Gronwall donne l'inégalité $\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \leq \zeta e^{\lambda T}$ qui montre que Y appartient à S^2. ■

Le résultat est encore valable lorsque $||f_{.}||_1$ est une variable aléatoire de carré intégrable.

On termine par un résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprise.

Lemme 1.1.1 *Soient* $Y \in S^2(\mathbb{R}^k)$ *et* $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. *Alors* $\left\{\int_0^t Y_s \cdot Z_s dW_s, t \in [0,T]\right\}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

preuve. Les inégalités BDG donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Y_r \cdot Z_r dW_r|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 ||Z_r||^2 dr\right)^{1/2}\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \left(\int_0^T ||Z_r||^2 dr\right)^{1/2}\right], \end{aligned}$$

et par suite, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Y_r \cdot Z_r dW_r|\right] \leq C' \left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T ||Z_r||^2 dr\right]\right).$$

Or cette derniére quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. ■

1.2 Le cas Lipschitz

1.2.1 Le résultat de Paradoux-Peng.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat est dû à E. PARDOUX et S. PENG[12] ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire.

C'est la liste des hypothéses sous lesquelles nous allons travailler.

(L) Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}-p.s.$,

1. condintion de Lipschitz en (y,z) : pour tout t, y, y', z, z',

$$|f(t,y,z)-f(t,y',z')| \leq \lambda(|y-y'|+||z-z'||);$$

2-condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2+\int_0^T |f(r,0,0)|^2 dr\right]<\infty.$$

Nous commençons par un cas trés simple. Celui où f ne dépend ni de y ni de z *i.e.* on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trover une solution de l'EDSR

$$Y_t=\xi+\int_t^T F_r dr-\int_t^T Z_r dW_r, \quad 0\leq t\leq T. \tag{1.2}$$

Lemme 1.2.1 *Soient* $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}\in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *. L'EDSR*1.2 *possède* *une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

preuve. Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$.

Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'aprés le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr := M_t - \int_0^t \mathcal{F}_r dr.$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t \mathcal{F}_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr\right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiante $Z \in M^2$. ■

Nous montrons à présent le théorème de Pardoux et Peng.

Théoréme 1.2.1 *PARDOUX-PENG[12] Sous l'hypothèse* (L), *l'EDSR*(1.1) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

preuve. Nous utilisions un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2 en construisant une application Ψ de B^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de l'EDSR 1.1 si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.
Pour (U, V) élément de B^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans B^2. En effet, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$|F_r| \leq |f(r, 0, 0)| + \lambda |U_r| + \lambda ||V_r||,$$

Et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le lemme 1.2.1 pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.(Y, Z) apparient à B^2 : l'intégralité de Z est obtenue par construction et,d'après la Proposition 1.1.1,Y appartient à S_c^2.
L'application Ψ de B^2 dans lui-même est donc bien définie.
Soient (U, V) et $(U\prime, V\prime)$ deux éléments de B^2 et $(Y, Z) = \Psi(U, V), (Y\prime, Z\prime) = \Psi(U\prime, V\prime)$. Notons $y = Y - Y\prime$ et $z = Z - Z\prime$. On a, $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\left\{ f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t') \right\} dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ pour obtenir :

$$d\left(e^{\alpha t}|y_t|^2\right) = \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t \cdot \{f(t,U_t,V_t) - f(t,U'_t,V'_t)\}\, dt + 2e^{\alpha t} y_t \cdot z_t dW_t + e^{\alpha t}||z_t||^2 dt.$$

Par conséquent, intégrant entre t et T , on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr \quad &= \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha|y_r|^2 + 2y_r \cdot \{f(r,U_r,V_r) - f(r,U'_r,V'_r)\}\right) dr \\ &\quad - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r, \end{aligned}$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U-U'$ et $V-V'$ respectivement,

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha t}\left(-\alpha|y_r|^2 + 2\lambda|y_r|\,|u_r| + 2\lambda|y_r|\,||v_r||\right) dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr \quad &\leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha + 2\lambda^2/\varepsilon\right)|y_r|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r . z_r dW_r \\ &\quad + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}\left(|u_r|^2 + ||v_r||^2\right) dr, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$, on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T e^{\alpha r}\left(|u_r|^2 + ||v_r||^2\right) dr$,

$$\forall t \in [0,T], \qquad e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z||^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r. \tag{1.3}$$

D'après le lemme 1.1.1, la martingale locale $\left\{\int_0^t e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r\right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y , Y' appartiennent à S^2 et Z , Z' appartiennent à M^2 .

En particulier, prenant l'espérance - ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente -, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{1.4}$$

Revenant à l'inégalité 1.3, les inégalités BDG fournissent - avec C universelle -,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r}|y_r|^2||z_r||^2 dr\right)^{1/2}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r}|y_r|^2||z_r||^2 dr\right)^{1/2}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\ \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t/2}|y_t|\left(\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right)^{1/2}\right],
\end{aligned}$$

puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right].$$

Prenant en considération l'inégalité (1.4), on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right] \leq \left(3 + C^2\right)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right] \leq \varepsilon\left(3 + C^2\right)(1\vee T)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||v_r||^2 dr\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3 + C^2\right)(1\vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme

$$||(U,V)||_\alpha = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|U_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||V_r||^2 dr\right]^{1/2},$$

qui en fait un espace de Banach - cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR 1.1 dans B^2.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la Proposition 1.1.1 implique qu'un telle solution appartient à B^2. ■

1.2.2 EDSR linéaires.

Dans ce paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus on moins explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; Y est donc réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 1.2.1 *Soit* $\left\{(a_t.b_t)\right\}_{t\in[0,T]}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *, progressinement mesurable et borné. Soient* $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ *un élément de* $M^2(\mathbb{R})$ *et* ξ *une variable aléatoire,* $\mathcal{F}_T$*-mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.*
L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\}\, dr - \int_t^T Z_r dW_r,$$

posséde une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T]\,,\ Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr | \mathcal{F}_t),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$*,*

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t b_r.dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r d_r\right\}.$$

Preuve. Commençons par remarquer que le processus Γ vérifie :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t \cdot dW_t),\ \Gamma_0 = 1.$$

D'autre parte, comme b est borné, l'inégalité de Doob montre que Γ appartient à S^2.

De plus, les hypothéses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z) à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser $f(t, y, z) = a_t y + z b_t + c_t$ et de vérifier que (L) est satisfaite,Y appartient à S^2 par la Proposition 1.1.1.

La formule d'intégration par parties donne

$$d\Gamma_t Y_t = \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\left\langle \Gamma, Y\right\rangle_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t b_t \cdot dW_t,$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \displaystyle\int_0^t c_r \Gamma_r dr$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $c \in M^2$et Γ,Y sont dans S^2.

Par suit,

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr = \mathbb{E}(\lneqq_T Y_T + \int_0^T c_r \Gamma_r dr | F_t),$$

ce qui donne la formule annoncée.

Ce travail a été assisté par :Briand, Philippe[3]. ■

Chapitre 2

Le lien entre Les EDSRs et les martingales BMO

Le but de ce chapitre est de prouver certains résultats sur BMO martingales utilisant les techniques des $EDSRs$:

À l'aide des propriétés des $EDSR$, nous prouvons également l'équivalence bien connue entre les propriétés de BMO, Muckenhoupt et la condition inverse de Hölder.($DoleanseDade$ et $Meyer$[7], $Kazamaki$[11]).

2.1 Preliminaires

Soit $T > 0$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré complet sur lequel un mouvement brownien standard unidimensionnel $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ est défini de telle sorte que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est le filtration naturelle générée par $W(\cdot)$, augmentée par tous les ensembles $P-$ null en $\mathcal{F}$.

Définition 2.1.1 *Soit $p \in [1, \infty)$. L'espace $\mathcal{R}^p$ est l'espace de tous les processus* *adaptés en continu* Y *tel que*

$$||Y||_{\mathcal{R}^p} := ||Y_T^*||_{L^p} \qquad \textit{avec } Y_T^* := \max_{0\leq t\leq T} |Y_t| \tag{2.1}$$

est fini. $\mathcal{H}^p$ *est l'espace Banach de continu* $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}-$ *martingales locales adaptées de telle sorte que*

$$||Y||_{\mathcal{H}^p} := || \langle Y\rangle_T^{1/2} ||_{L^p} \tag{2.2}$$

est fini. $\langle Y\rangle$ *désigne le processus de variation quadratique d'un semi-martingale, et* $\langle X, Y\rangle$ *désigne le processus de covariance entre les deux semi-martingales* X *et* Y*. soit* M *une martingale continue. Définir*

$$a\,(M) := sup\{a \geq 0 : \sup_{\tau} ||E[exp(a|M_\infty - M_\tau|)|\mathcal{F}_\tau]||_{L^\infty} < \infty\} \tag{2.3}$$

et

$$b\,(M) := sup\{b \geq 0 : \sup_{\tau} ||E[exp(\frac{1}{2}b^2\,(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_\tau))|\mathcal{F}_\tau]||_{L^\infty} < \infty\} \tag{2.4}$$

Dans les deux expressions, τ *est un temps d'arrêt arbitraire. Soit* $Y = (Y_t)_{0\leq t\leq T}$ *un martingale uniformément intégrable. Alors* Y *est dit à appartenir à BMO s'il y a une constante* $C > 0$ *telle que pour chaque temps d'arrêt* τ

$$E[|Y_T - Y_\tau|^p|\mathcal{F}_\tau] \leq C \qquad P - a.s. \tag{2.5}$$

Cette définition est indépendante de p*. Habituellement, nous définissons* $||Y||_{BMO}$

comme la plus petite constante c *de sorte que pour tout temps d'arrêt* τ,

$$E[|Y_T - Y_\tau|^2|\mathcal{F}_\tau] \leq c^2 \qquad P - a.s. \tag{2.6}$$

Définition 2.1.2 *Le processus non nul* L *est pensé satisfaire l'inégalité inverse de Hölder sous* P, *dénotée par* $R_p(P)$, *où* $p \in [1, +\infty]$, *s'il y a une constante* $C > 0$ *de sorte que pour chaque temps d'arrêt* τ, *nous avons*

$$E\left[|\frac{L_T}{L_\tau}|^p|F_\tau\right] \leq C. \tag{2.7}$$

Pour $p = +\infty$ *nous exigeons que* $\frac{L_T}{L_\tau}$ *soit essentiellement limité par* C *(voir Kazamaki [[11], Définition* 3.1.]).

Lemme 2.1.1 *(Inégalité Kunita-Watanabe)Soient* X *et* Y *deux semi-martingales, et que* H *et* K *être deux processus mesurables. Ensuite, nous avons presque sûrement*

$$\int_0^\infty |H_s||K_s||d\,[X,Y]_s\,| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d\,[X,X]_s\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d\,[Y,Y]_s\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

Plus généralement, pour $p \in [1, \infty)$, *nous avons*

$$\int_0^\infty |H_s||K_s||d\,[X,Y]_s\,| \leq \left(\int_0^\infty H_s^p d\,[X,X]_s\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty K_s^q d\,[Y,Y]_s\right)^{1/q} \tag{2.9}$$

avec$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Lemme 2.1.2 *Soit* X *une martingale locale continue.Ensuite, nous avons*

$$||X||_{\mathcal{H}^1} \leq \sup\left\{E\left[\langle X,Y\rangle_\infty\right] : ||Y||_{BMO} \leq 1\right\},$$

et

$$||X||_{BMO} \leq \sup \left\{ E\left[\langle X, Y \rangle_\infty \right] : ||Y||_{\mathcal{H}^1} \leq 1 \right\}. \tag{2.10}$$

De l'inégalité de Fefferman, nous pouvons montrer le lemme suivant.

Lemme 2.1.3 *Soit $p \in [1, \infty)$. Supposons que $X \in \mathcal{R}^p$ et $M \in BMO$. Ensuite, $X \circ M \in \mathcal{H}^p$.En outre, nous avons l'estimation suivante*

$$||X \circ M||_{\mathcal{H}^p} \leq \sqrt{2}||X||_{\mathcal{R}^p}||M||_{BMO}$$

pour $p \in (1, \infty)$ et

$$||X \circ M||_{\mathcal{H}^1} \leq ||X||_{\mathcal{R}^1}||M||_{BMO} \tag{2.11}$$

(*correspondant au cas de $p = 1$*).

Preuve du lemma. (i) Le cas $p \in (1, \infty)$. Prenez n'importe quel $N \in \mathcal{H}^q$. Nous avons

$$\begin{aligned} E\left[\left| \langle X \circ M, N \rangle_\infty \right|\right] &\leq E\left[\left| \langle X \circ N, M \rangle_\infty \right|\right] \\ &\leq \sqrt{2}||X \circ N||_{\mathcal{H}^1}||M||_{BMO} \quad \text{(en utilisant l'inégalité de Fefferman)} \\ &\leq \sqrt{2}||X||_{\mathcal{R}^p}||N||_{\mathcal{H}^q}||M||_{BMO} \quad \text{(en utilisant l'inégalité de Hölder)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

(ii) Le cas $p = 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty X_s^2 d\langle M\rangle_s &\leq X_\infty^* \int_0^\infty |X_s| d\langle M\rangle_s \\
&\leq X_\infty^* \int_0^\infty X_s^* d\langle M\rangle_s \\
&\leq X_\infty^* \left(X_\infty^* \langle M\rangle_\infty - \int_0^\infty \langle M\rangle_s dM_s^* \right) \\
&\leq X_\infty^* \left(\int_0^\infty (\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_s) dX_s^* \right). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^\infty X_s^2 d\langle M\rangle_s \right)^{1/2} \right] &\leq E\left[\left(X_\infty^* \int_0^\infty (\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_s) dX_s^* \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \{E[X_\infty^*]\}^{1/2} \left\{ E\left[\int_0^\infty (\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t) dX_t^* \right] \right\}^{1/2} \\
&\leq ||X||_{\mathcal{R}^1}^{1/2} \left\{ E\left[\int_0^\infty E[(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t) |\mathcal{F}_t] dX_t^* \right] \right\}^{1/2} \\
&\leq ||X||_{\mathcal{R}^1}^{1/2} ||M||_{BMO} \{E[X_\infty^*]\}^{1/2} \leq ||X||_{\mathcal{R}^1} ||M||_{BMO}
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

La preuve est faite. ■

Pour le cas de $X \in \mathcal{H}^p(\subset \mathcal{R}^p)$, la première assertion dans lemme 2.1.3 est incluse dans Bañuelos et Bennett [[1], théorème 1.1(i), page 1227]. Le lemme suivant est évident de la définition de la norme de BMO, voir Bañuelos et Bennett [[1], théorème 1.1(ii), page 1227].

Lemme 2.1.4 *Si $X \in \mathcal{R}^\infty$ et $M \in BMO$, alors $X \circ M \in BMO$ et $||X \circ M||_{BMO} \leq ||X||_{\mathcal{R}^\infty} \, ||M||_{BMO}$.*

Laissez $p \in [1, \infty)$. Supposons que $X \in \mathcal{H}^p$ et $M \in BMO$. Ensuite,$\langle X, M \rangle_\infty \in L^p$. En outre, nous avons l'estimation suivante

$$|| \langle X, M \rangle_\infty ||_{L^p} \leq \sqrt{2}p||X||_{\mathcal{H}^p}||M||_{BMO} \tag{2.15}$$

La première affirmation dans lemme 2.1.4 peut être trouvée dans Bañuelos et Bennett [[1], Théorème 1.1(iii), page 1227]. Pour la commodité du lecteur, nous donnons une preuve complète.

Preuve du lemma. Pour le cas $p = 1$, en notant que

$$| \langle X, M \rangle_\infty | \leq \int_0^\infty |d \langle X, M \rangle |, \tag{2.16}$$

il est immédiat de l'inégalité de Fefferman pour obtenir les résultats souhaités. Dans ce qui suit, nous considérons le cas $p \in (1, \infty)$. Ensuite, $q \in (1, \infty)$. Prendre n'importe quel $\xi \in L^q$. On ecrit $Y_t := E[\xi|\mathcal{F}_t]$ pour $t \in [0, \infty]$. Nous avons $Y_\infty = \xi$ et

$$\begin{aligned} E[\langle X, M \rangle_\infty \xi] &= E\left[\int_0^\infty Y_s d\langle X, M \rangle_s\right] = E\left[\int_0^\infty d\langle X, Y \circ M \rangle_s\right] \\ &\leq ||X||_{H^p}||Y \circ M||_{\mathcal{H}^q}. \\ &\text{(En utilisant à la fois l'inégalité de Kunita-Watanabe et l'inégalité de Hõlder).} \\ &\leq \sqrt{2}||X||_{\mathcal{H}^p}||M||_{BMO}||Y||_{\mathcal{R}^q} \quad \text{(en utilisant lemme2.1.3)} \\ &\leq \sqrt{2}p||X||_{\mathcal{H}^p}||\xi||_{L^q}||M||_{BMO}. \quad \text{(en utilisant l'inégalité de Doob)} \end{aligned}$$

■

Définition 2.1.3 *On dit qu'une variable aléatoire intégrable ξ se trouve à BMO si la martingale locale $\{E[\xi|\mathcal{F}_t], t \in [0, T]\} \in BMO$.*

Lemme 2.1.5 *Laissez $X \in BMO$ et $M \in BMO$. Ensuite, $\langle X, M \rangle_\infty \in BMO$.*

De plus $|| \langle X, M \rangle_\infty ||_{BMO} \leq \sqrt{2}||X||_{BMO}||M||_{BMO}$

Preuve. Prenez $Y \in \mathcal{H}^1$. Nous avons

$$\begin{aligned} |E[Y \langle X, M \rangle]| &= |E\left[\int_0^\infty Y_s d\langle X, M \rangle_s\right]| \\ &= |E[\langle Y \circ X, M \rangle]| \leq \sqrt{2}||Y \circ X||_{\mathcal{H}^1}||M||_{BMO} \text{ (Inégalité de Fefferman)} \\ &\leq \sqrt{2}||Y||_{\mathcal{H}^1}||X||_{BMO}||M||_{BMO} \quad \text{(lemme2.1.3)} \end{aligned} \tag{2.17}$$

En utilisant le Lemme 2.1.2, nous avons les résultats souhaités. ■

L'inégalité fondamentale suivante de Burkhölder-Davis-Gundy (abrégée BDG) sera fréquemment utilisé dans notre document : pour tout $p \in (0, \infty)$, il y a deux universel positif constantes c_p et C_p de telle sorte que pour toute martingale locale continue M avec $M_0 = 0$, nous avons

$$C_p^{-p} E\left[\langle M \rangle_T^{p/2}\right] \leq E[(M_T^*)^p] \leq c_p^{-p} E \left[\langle M \rangle_T^{p/2}\right], \tag{2.18}$$

ou sous une forme différente,

$$C_p^{-1}||M||_{\mathcal{H}^p} \leq ||M||_{\mathcal{R}^p} \leq c_p^{-1}||M||_{\mathcal{H}^p} \tag{2.19}$$

Voir Yor [[15], page 100]. La définition suivante est fondée sur celle d'Emery [8][9] (voir aussi Protter [[13], page 248]).

Définition 2.1.4 *Laisser $M \in BMO$ et $\varepsilon > 0$. Une séquence finie de temps d'arrêt $0 = T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_k$ est dit à $\varepsilon-$tranche M si $M = M^{T_k}$ et $|(M - M^{T_i})^{T_i+1}|_{BMO} \leq \varepsilon$, pour $i = 0, 1, ..., k-1$. Si une telle séquence de temps d'arrêt existe, nous disons que M est $\varepsilon-$glissable à BMO.*

Définition 2.1.5 *M est appelé tranchable à BMO si pour $\forall \varepsilon > 0$, M est $\varepsilon-$tranchable* *à BMO, i.e., c'est-à-dire qu'il y a un entier positif N et une séquence croissante finie de temps d'arrêt $\{T_i, i = 1, 2, ..., N.\}$ avec $T_0 = 0$ et $T_{N+1} = \infty$ de sorte que*

$$^{Tn}M^{T_{n+1}} := M^{T_{n+1}} M^{T_n}$$

satisfait

$$||^{T_n}M^{T_{n+1}}||_{BMO} \leq \varepsilon. \tag{2.20}$$

Cela équivaut au résultat de $M \in \overline{\mathcal{H}^{\infty}}^{BMO}$ selon Schachermayer [14].

2.2 Les relation des conditions inverse de Hölder et Muckenhoupt avec les $EDSR$

Nous commençons par un espace de probabilité (Ω, F, P) , un horizon fini $0 < T < \infty$ et une filtration $F = (F_t)_{0 \leq t \leq T}$ satisfaisant aux conditions habituelles de droite-continuité et intégralité.

nous souvenons des définitions de BMO martingales, les conditions inverse de Hölder et de Muckenhoupt $(voir, p.ex., Doleanse - DadeetMeyer[7], ouKazamaki[11].)$

Définition 2.2.1 *Une Martingale continue, uniformément intégrable (M_t, F_t) avec $M_0 = 0$ est dit de classe BMO si*

$$||M||_{BMO} = \sup_{\tau} ||E\left[\langle M\rangle_T - \langle M\rangle_\tau |F_\tau\right]^{1/2}||_\infty < \infty.$$

Où le suprémem est pris sur tous les temps d'arrêt $\tau \in [0, T]$ et $\langle M\rangle$ est la caractéristique carrée de M.

Dénoter par $\xi(M)$ l'exponentielle stochastique d'une martingale locale continue

M :

$$\xi_t(M) = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right\}$$

Tout au long de ce travail, nous supposerons que M est une martingale locale continue avec $\langle M\rangle_T < \infty$ $P-a.s.$ Cela implique que $\xi_T(M) > 0$ $P-a.s.$ et laisser

$$\xi_{\tau,T}(M) = \xi_T(M)/\xi_\tau(M).$$

Définition 2.2.2 *Soit $1 < p < \infty$. $\xi(M)$ est dit satisfaire condition (R_P) si l'inégalité inverse Hölder*

$$E\left[\{\xi_{\tau,T}(M)\}^p \,|\mathcal{F}_\tau\right] \leq C_p$$

est valable pour chaque temps d'arrêt τ, avec une constante $C_p > 0$ dépendant uniquement de p.

Remarque 2.2.1 *: Si $\xi(M)$ est une martingale uniformément intégrable alors par l'inégalité de Jensen nous avons aussi :*

$$E\left[\{\xi_{\tau,T}(M)\}^p \,|\mathcal{F}_\tau\right] \geq 1$$

Une condition dual à (R_p) est la condition Muckenhoupt (A_p)

Définition 2.2.3 *$\xi(M)$ satisfait la condition (A_p) pour $1 < p < \infty$ s'il y a une constante $D_p > 0$ telles que pour chaque temps d'arrêt $\tau \in [0, T]$*

$$E\left[\{\xi_{\tau,T}(M)\}^{-\frac{1}{p-1}} \,|\mathcal{F}_\tau\right] \leq D_p$$

Remarque 2.2.2 *Noter que, puisque $\xi(M)$ est une sur-martingale, l'inégalité de*

Jensen implique l'inégalité inverse

$$E\left[\{\xi_{\tau,T}(M)\}^{-\frac{1}{p-1}}|\mathcal{F}_\tau\right] \geq \{E[\xi_{\tau,T}(M)|\mathcal{F}_\tau]\}^{-\frac{1}{p-1}} \geq 1$$

Nous ne considérerons que les $EDSR$ linéaires du type :

$$\begin{cases} Y_t & = Y_0 - \int_0^t [\alpha Y_s + \beta\psi_s]\, d\langle M\rangle_s + \int_0^t \psi_s dM_s + N_{t,}, \\ Y_T & = 1; \end{cases}$$

où α et β sont des constantes. Une solution d'un $EDSR$ tel que nous définissons comme un triple (Y, ψ, N), avec $\langle N, M\rangle = 0$, de l'espace $S^\infty\times$ $BMO(P)\times$ $H^2(P)$ équipé avec les normes suivantes

$$||Y||_\infty = ||Y_T^*||_{L^\infty}, \qquad \text{où } Y_T^* = \sup_{t\in[0,T]} |Y_t|,$$

$$||\psi.M||_{BMO(P)} = \sup_\tau ||E\left[\int_\tau^T \psi_s^2 d\langle M\rangle_s |\mathcal{F}_\tau\right]^{1/2}||,$$

$$||N||_{H^2} = E^{\frac{1}{2}}[N]_T\,.$$

Noter que, puisque la martingale M est supposée être continue, seule le dernier terme de cette équation peut avoir les sauts, $i, e.$, $\Delta Y = \Delta N$. Dans l'ordre pour éviter la définition des normes de BMO pour les martingales continues à droite, nous utilisent les normes H^2 pour les pièces orthogonales martingale. C'est suffisant pour nos objectifs, puisque les générateurs d'équations à l'étude ne dépend des parties orthogonales martingale. Parfois, nous appelons Y seul la solution de $EDSR$, en gardant à l'esprit que $\psi.M + N$ est la partie martingale de Y .

Lemme 2.2.1 *soit M une martingale locale continue.*

a) $\xi(M)$ satisfait (R_p) s'il existe une solution bornée et positive de $EDSR$

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2} Y_s + p\psi_s\right] d\langle M\rangle_s + \int_0^t \psi_s dM_s + N_t, \\ Y_T = 1 \end{cases} \tag{2.21}$$

b) $\xi(M)$ satisfait (A_P) s'il existe une solution bornée et positive de l'équation

$$\begin{cases} X_t = X_0 - \int_0^t \left[\frac{p}{2(P-1)^2} X_s - \frac{1}{P-1}\varphi_s\right] d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_s dM_s + L_{t,} \\ X_T = 1 \end{cases} \tag{2.22}$$

Preuve. a) Laissez d'abord montrer que si $\xi(M)$ satisfait (R_p), alors le processus

$$Y_t = E\left[\{\xi_{t,T}(M)\}^p \,|\mathcal{F}_t\right]$$

est une solution de $EDSR\,(2.21)$. Il est évident que Y est un processus positif borné et que $Y_t\,\{\xi_t\,(M)\}^p$ est une martingale uniformément intégrable. Par conséquent, depuis $\xi_t(M) > 0$, le processus Y sera un semi-martingale. Soit $Y_t = Y_0 + A_t + m_t$ la décomposition canonique de Y, où m est une martingale localement carré intégrable et A un processus prévisible de variation finie. Utilisation de la décomposition Galtchouk-Kunita-Watanabe pour m, on a

$$Y_t = Y_0 + A_t + \int_0^t \psi_s dM_s + N_{t,} \tag{2.23}$$

où N est une martingale locale orthogonale à M. Maintenant en utilisant la formule d'Ito que nous avons

$$Y_t \{\xi_t(M)\}^p = Y_0 + \int_0^t \left[\tfrac{p(p-1)}{2} Y_s + p\psi_s\right] \{\varepsilon_s(M)\}^p \, d\langle M\rangle_s + \\ + \int_0^t \{\xi_s(M)\}^p \, dA_s + \tilde{m}_{t,} \tag{2.24}$$

où $\tilde{m}$ est une martingale locale. Puisque $Y_t \{\xi_t(M)\}^p$ est une martingale, égalisant la partie de la variation finie à zéro, nous obtenons que

$$A_t = -\int_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2} Y_s + p\psi_s\right] d\langle M\rangle_{s,}$$

ce qui implique que

$$Y_t = E\left[\{\xi_{t,T}(M)\}^p \,|\mathcal{F}_t\right]$$

est une solution d'équation (2.21) Maintenant.

Laissez l'équation (2.21) admet une solution positive bornée Y_t. En utilisant le formule d'Ito pour le processus $Y_t \{\xi_t(M)\}^p$ nous obtenons que $Y_t \{\xi_t(M)\}^p$ soit une local martingale. C'est donc une sur-martingale, comme une martingale locale positive. Par conséquent, de l'inégalité sur-martingale et la condition terminal $Y_T = 1$ nous obtenons que

$$E\left[\{\xi_{t,T}(M)\}^p \,|\mathcal{F}_t\right] \le Y_t.$$

Parce que Y est borné, ceci implique que $\xi(M)$satisfait à la condition (R_p)

b) La preuve est similaire à la preuve de la partie a), il suffit de remplacer p par $-\frac{1}{p-1}$. Soit $\xi(M)$ une martingale uniformément intégrable. Dénote par $\tilde{P}$ un nouveau mesuré de probabilité définie par $d\tilde{P} = \xi_T(M)dP$ et laisser

$$\tilde{M} = \langle M\rangle - M$$

■

Nous allons maintenant donner une nouvelle preuve de l'équivalence bien connue ($Doleanse - Dade\ et\ Meyer$ [7], $Kazamaki$[11]) entre la propriété de BMO, les conditions de muckenhoupt et l'inverse de Hölder.

L'objectif principal de cette section est de prouver :

Théoréme 2.2.1 *Soit $\xi(M)$ une martingale uniformément intégrable. Puis les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\tilde{M} \in BMO(\tilde{P})$.

ii) $\xi\ (M)$ *satisfait à la condition* (R_p) *pour certains* $p > 1$.

iii) $M \in BMO(P)$.

iv) $\xi(M)$ *satisfait à la condition* (Ap) *pour certains* $p > 1$.

Preuve. Par souci de simplicité, dans toutes les preuves données ici, nous supposerons sans perte de généralité que toutes les intégrales stochastiques sont martingales, sinon on peut utiliser les arguments de localisation.

$i) \Longrightarrow ii)$

Laisser $\tilde{M} \in BMO(\tilde{P})$. Selon le lemme 2.2.1, cela suffit de montrer que l'équation (2.21) admet une solution positive bornée pour certains $p > 1$. Réécrivons l'équation (2.21) en matière de $\tilde{P}$ -martingale $\tilde{M}$:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \displaystyle\int_0^t \left[\tfrac{p-(p-1)}{2} Y_s + (p-1)\psi_s\right] d\left\langle M\right\rangle_s - \int_0^t \psi_s d\tilde{M}_s + N_t, \\ Y_T = 1. \end{cases}$$

Puisque $\langle N, M\rangle = 0$, N est un $\tilde{P}$ local - martingale orthogonale à M . Définir la fonction $H\ : S^\infty \times BMO(\tilde{P}) \times H^2(\tilde{P})$ en lui-même, telle que : $(y, \psi, n) \in S^\infty \times$

$BMO(\tilde{P}) \times H^2(\tilde{P})$ sur la solution (Y, Ψ, N) du $EDSR\,(2.21)\,, i.e.$

$$Y_t = E^{\tilde{P}}\left[1 + \int_t^T \left[\frac{p(p-1)}{2} y_s + (p-1)\psi_s\right] d\left\langle M\right\rangle_s |\mathcal{F}_t\right]$$

et

$$-\int_0^t \Psi_s d\tilde{M}_S + N_t = E^{\tilde{p}}\left[1 + \int_0^T \left[\frac{p(p-1)}{2} y_s + (p-1)\psi_s\right] d\left\langle M\right\rangle_s |\mathcal{F}_t\right].$$

Nous montrerons qu'il existe $p > 1$ tel que cette fonction est une contraction. Laisser

$$\delta Y = Y^1 - Y^2,$$
$$\delta y = y^1 - y^2,$$
$$\delta \Psi = \Psi^1 - \Psi^2,$$
$$\delta \psi = \psi^1 - \psi^2,$$
$$\delta N = N^1 - N^2.$$

Il est évident que $\delta Y_T = 0$ et

$$\delta Y_t = \delta Y_0 - \int_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2}\delta y_s + (p-1)\delta\psi_s\right] d\left\langle M\right\rangle_S - \int_0^t \delta\Psi_s d\tilde{M}_s + \delta N_t.$$

Selon la formule d'Itô, appliquée pour $(\delta Y_\tau)^2 - (\delta Y_T)^2$ et en prenant des attentes conditionnelles, nous avons

$$\begin{aligned}
&(\delta Y_\tau)^2 + E^{\tilde{P}}\left[\int_\tau^T (\delta\Psi_s)^2 d\left\langle M\right\rangle_s |\mathcal{F}_\tau\right] + E^{\tilde{p}}\left[\left[\delta N\right]_T - \left[\delta N\right]_\tau |\mathcal{F}_\tau\right] \\
&= E^{\tilde{p}}\left[\int_\tau^T p(p-1)\delta Y_s \delta y_s d\left\langle M\right\rangle_s |\mathcal{F}_\tau\right] + E^{\tilde{p}}\left[\int_\tau^T 2(p-1)\delta Y_s \delta\psi_s d\left\langle M\right\rangle_s |\mathcal{F}_\tau\right]
\end{aligned}$$

et en utilisant les inégalités élémentaires que nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(\delta Y_\tau)^2 + E^{\tilde{p}}\left[\int_\tau^T (\delta\Psi_s)^2\, d\langle M\rangle_s \,|\mathcal{F}_\tau\right] + E^{\tilde{p}}\left[[\delta N]_T - [\delta N]_\tau \,|\mathcal{F}_\tau\right] \\
&\leq \tfrac{p(p-1)}{2}||\tilde{M}||^2_{BMO(\tilde{P})}.||\delta Y||^2_\infty + \tfrac{p(p-1)}{2}||\tilde{M}||^2_{BMO(\tilde{P})}.||\delta y||^2_\infty + \\
&+(p-1)||\tilde{M}||^2_{BMO(\tilde{P})}.||\delta Y||^2_\infty + (p-1)||\int \delta\psi d\tilde{M}||^2_{BMO(\tilde{P})}.
\end{aligned}$$

Parce que le côté droit de l'inégalité ne dépend pas de τ, nous allons avoir

$$\begin{aligned}
&\left(1 - p\,(p-1)\,||\tilde{M}||^2_{BMO(\tilde{P})} - 2\,(p-1)\,||\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)}\right)||\delta Y||^2_\infty \\
&+||\int \delta\Psi d\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)} + ||\delta N||^2_{L^2\left(\tilde{P}\right)} \\
&\leq p(p-1)||\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)}||\delta y||^2_\infty + 2(p-1)||\int \delta\psi d\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Depuis

$$1 - (p-1)(p+2)||\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)} < 1$$

pour p suffisament proche de 1, on peut faire la constante de $||\delta Y||^2_\infty$ à gauche de (2.25)positif et on obtient finalement l'inégalité

$$\begin{aligned}
&||\delta Y||^2_\infty + ||\int \delta\Psi d\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)} + ||\delta N||^2_{H^2\left(\tilde{P}\right)} \\
&\leq \alpha\,(p)\,.||\delta y||^2_\infty + \beta\,(p)\,.||\int \delta\psi d\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

où

$$\alpha\,(p) = \frac{p\,(p-1)\,||\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)}}{1 - (p-1)\,(p+2)\,||\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)}}$$

et

$$\beta\,(p) = \frac{2\,(p-1)}{1 - (p-1)\,(p+2)\,||\tilde{M}||^2_{BMO\left(\tilde{P}\right)}}$$

Il est facile de voir que :

$$lim_{p\downarrow 1}\alpha(p) = lim_{p\downarrow 1}\beta(p) = 0.$$

Donc, si nous prenons p^* tel que $\alpha(p^*) < 1$ et $\beta(p*) < 1$ on obtient que la fonction H est une contraction et il existe une solution unique (Y, Ψ, N) de (2.21) dans $S^\infty \times BMO(\tilde{P}) \times H^2(\tilde{P})$. Puisque $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ sont des fonctions décroissantes de $p \in (1, \infty)$, les normes $||Y||_\infty$ et $||\Psi.\tilde{M}||_{BMO(\tilde{P})}$sont uniformément délimités, en tant que fonctions de p; pour $p \in [1, p^*]$. Par conséquent, pour tout $p \in [1, p^*]$ nous avons

$$Y_t = E^{\tilde{p}}\left[1 + \int_t^T \left[\frac{p\,(p-1)}{2} Y_s + (p-1)\,\Psi_s\right] d\left\langle M\right\rangle_s |\mathcal{F}_t\right] \tag{2.27}$$

et

$$\begin{aligned} Y_t \geq 1 - \tfrac{p(p-1)}{2}||Y||_\infty ||\tilde{M}||_{BMO\left(\tilde{P}\right)} - \tfrac{p-1}{2}||\tilde{M}||_{BMO\left(\tilde{P}\right)} \\ -\tfrac{p-1}{2}||\Psi.\tilde{M}||_{BMO\left(\tilde{P}\right)} \geq 0. \end{aligned}$$

Pour certains p suffisamment proche de 1. Par conséquent, il existe une limite positive solution de l'équation (2.21) pour certains $p > 1$, ce qui implique que $\xi(M)$ satisfait le R_P condition, selon le lemme 2.2.1.

$ii) \Longrightarrow iii)$

Soit $\xi(M)$ une martingale uniformément intégrable et satisfasse la condition (R_P) pour certains $p > 1$. Puis le processus

$$Y_t = E\left[\left\{\varepsilon_{t,T}\left(M\right)\right\}^p |\mathcal{F}_t\right]$$

est une solution de l'équation 2.21 et satisfait l'inégalité :

$$1 \leq Y_t \leq C_p$$

En utilisant la formule d'Itô pour $e^{-\beta Y_T} - e^{-\beta Y_\tau}$et en prenant l'éspérane conditionnelle, nous avons

$$\begin{aligned}
e^{-\beta} - e^{-\beta Y_\tau} \quad &= \beta \tfrac{p(p-1)}{2} E\left[\int_\tau^T Y_s e^{-\beta Y_s} d\left\langle M\right\rangle_s | \mathcal{F}_\tau\right] \\
&+E\left[\int_\tau^T e^{-\beta Y_s}\left(\tfrac{\beta^2}{2}\psi_s^2 + \beta p \psi_s\right) d\left\langle M\right\rangle_s | \mathcal{F}_\tau\right] \\
&+\tfrac{\beta^2}{2} E\left[\int_\tau^T e^{-\beta Y_s} d\left\langle N^c\right\rangle_s | \mathcal{F}_\tau\right] \\
&+E\left[\textstyle\sum_{\tau < s \leq T}\left(e^{-\beta Y_s} - e^{-\beta Y_{s-}} + \beta e^{-\beta Y_{s-}} \Delta Y_s\right) | \mathcal{F}_\tau\right].
\end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{\beta^2}{2}\psi_s^2 + \beta p \psi_s \geq -\frac{p^2}{2}, e^{-\beta Y_s} - e^{-\beta Y_{s-}} + \beta e^{-\beta Y_{s-}} \Delta Y_s \geq 0,$$

et $Y_t \geq 1$, on pose $\beta > \frac{p}{p-1}$ nous obtenons l'inégalité

$$\frac{p}{2}\left(\beta\left(p-1\right) - p\right) e^{-\beta C_p} E\left[\left\langle M\right\rangle_T - \left\langle M\right\rangle_\tau | \mathcal{F}_\tau\right] \leq e^{-\beta} - e^{-\beta C_p},$$

ce qui implique que

$$||M||^2_{BMO(P)} \leq \frac{2\left(e^{\beta(C_p-1)} - 1\right)}{p\left(\beta\left(p-1\right) - p\right)}$$

pour tout $\beta > \frac{p}{p-1}$

$iii) \Longrightarrow iv)$

Si M est une $BMO(P)$ martingale, alors d'après le lemme 2.2.1 il suffit de montrer que l'équation 2.22 admet une solution positive bornée pour certains $p > 1$, ce qui peut être prouvé de manière similaire à l'implication $i) \Longrightarrow ii)$. Par de la même façon qu'on peut montrer que la fonction H :

$$X_t = E\left[1 + \int_t^T \left[\frac{p}{2(p-1)^2}x_s - \frac{1}{p-1}\varphi_s\right] d\langle M\rangle_s |\mathcal{F}_t\right],$$

où $-\int_0^t \Phi_s dM_s + L_t$ est la partie martingale de X, l'inégalité 2.26 est vérifiée avec

$$\alpha(p) = \frac{p||M||^2_{BMO(P)}}{(p-1)^2 - (3p-2)||M||^2_{BMO(P)}},$$

$$\beta(p) = \frac{2(p-1)}{(p-1)^2 - (3p-2)||M||^2_{BMO(P)}},$$

où

$$lim_{p\longrightarrow\infty}\alpha(p) = limp_{p\longrightarrow\infty}\beta(p) = 0.$$

Donc si nous prenons p assez grand nous obtenir que la fonction H est une contraction.

$iv) \Longrightarrow i)$

La preuve est semblable à la preuve de l'implication $ii) \Longrightarrow iii)$. En particulier, pour la norme BMO de $\tilde{M}$, les inégalités suivantes s'appliquent :

$$||\tilde{M}||^2_{BMO(\tilde{P})} \leq \frac{2(p-1)^2}{p(\beta-p)}\left(e^{\beta(D_p-1)} - 1\right)$$

pour tout $\beta > p$, où D_p est une constante de la définition 2.2.3. ■

Chapitre 3

La transformation de Girsanov pour les martingales BMO et les EDSRs

Il est bien connu que si M est une martingale BMO, alors la fonction

$$\phi : L(P) \ni X \to \tilde{X} = \langle X, M \rangle - X \in L(\tilde{P})$$

est un isomorphisme de $BMO(P)$ dans $BMO(\tilde{P})$, tel que

$d\tilde{P} = \varepsilon_T(M)dP.E.g.$,il a été prouvé par Kazamaki [7][8] que l'inégalité

$$||\tilde{X}||_{BMO(\tilde{P})} \leq C_K \left(\tilde{M}\right) .||X||_{BMO(P)}$$

est valide pour tous les $X \in BMO(P)$, où la constante $C_K\left(\tilde{M}\right) > 0$ est indépendante de X mais dépend de la martingale M. Utilisation des propriétés d'une $EDSR$ nous prouvons cette inégalité avec une constante $C(\tilde{M})$ que nous exprimons comme une fonction linéaire de la norme $BMO(\tilde{P})$ de $\tilde{M} = \langle M \rangle - M$ et qui est moins que $C_K(\tilde{M})$ pour toutes les valeurs de cette norme.

Soit M une P -martingale locale continue tel que $\xi(M)$ est une martingale uniformément intégrable et laisser $d\tilde{P} = \xi_T(M)dP$. À chaque martingale local continue X nous associons le processus $\tilde{X} = \langle X, M \rangle - X$, qui est un $\tilde{P}$-martingale local selon le théorème de Girsanov. Nous dénotons cette carte par $\varphi : \mathcal{L}(P) \longrightarrow \mathcal{L}(\tilde{P})$,où $\mathcal{L}(P)$ et $\mathcal{L}(\tilde{P})$ sont des classes de P et $\tilde{P}$ locales martingales.

Considérons le processus

$$Y_t = E^{\tilde{P}}\left[\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t \left| \mathcal{F}_t \right.\right] = E\left[\xi_{t,T}(M)\left(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t\right)\left| \mathcal{F}_t \right.\right]. \tag{3.1}$$

Puisque $\left\langle \tilde{X} \right\rangle = \langle X \rangle$ sous chaque mesure de probabilité, il n'est évident que

$$||Y||_\infty = ||\tilde{X}||^2_{BMO(\tilde{P})}.$$

Laisser $M \in BMO(P)$ d'après le Théorème (2.2.1) la condition (R_p) est satisfaite pour certains $p > 1$. La condition (R_p) et l'inégalité d'énergie conditionnelle ($Kazamaki$ [11], $page$ 29) signifie que pour tout $X \in BMO(\tilde{P})$, le processus Y est borné, C'est-à-dire,φ fait correspondre $BMO(P)$ à $BMO(\tilde{P})$. De plus, comme le prouve Kazamaki [10][11], $BMO(P)$ et $BMO(\tilde{P})$ sont isomorphiques telle que la fonction ϕ et pour tout $X \in BMO(P)$ l'inégalité

$$||\tilde{X}||^2_{BMO(\tilde{P})} \leq C_K^2\left(\tilde{M}\right).||X||^2_{BMO(P)} \tag{3.2}$$

est valide, où

$$C_K^2\left(\tilde{M}\right) = 2p.2^{1/p}\sup_\tau ||E^{\tilde{P}}\left[\left\{\xi_{\tau,T}\left(\tilde{M}\right)\right\}^{-\frac{1}{p-1}}|F_\tau\right]||_\infty^{(p-1)/p} \tag{3.3}$$

et p est tel quel

$$||\tilde{M}||_{BMO(\tilde{P})} < \sqrt{2}\left(\sqrt{p}-1\right). \tag{3.4}$$

Notez que l'inégalité similaire tient pour la fonction inverse ϕ^{-1}. Maintenant, nous donnons une preuve inverse de cette affirmation, qui améliore également la constante de l'inégalité 3.2.

Théoréme 3.0.2 *Si $M \in BMO(P)$, alors $\phi : X \longrightarrow \tilde{X}$ est un isomorphisme de $BMO(P)$ sur $BMO(\tilde{P})$. En particulier, l'inégalité*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}||M||_{BMO(P)}\right)}||X||_{BMO(P)} &\leq ||\tilde{X}||_{BMO(\tilde{P})} \\ &\leq \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}||\tilde{M}||_{BMO(\tilde{P})}\right)||X||_{BMO(P).} \end{aligned} \tag{3.5}$$

est valide pour tout $X \in BMO(P)$.

Preuve. comme pour lemme 2.2.1, on peut montrer que pour n'importe quel $X \in BMO(P)$ le processus Y (défini par 3.1) est une solution bornée positive du $EDSR$

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \langle X \rangle_t - \int_0^t \varphi_s d\left\langle M \right\rangle_s + \int_0^t \varphi_s dM_s + L_t, \\ Y_T = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Application de la formule d'Ito pour $(Y_\tau+\varepsilon)^p - (Y_T+\varepsilon)^p$ où $0<p<1$, $\varepsilon>0$ et en prenant l'éspérance conditionnelles que nous obtenons

$$(Y_\tau+\varepsilon)^p-\varepsilon^p = E\left[\int_\tau^T p\,(Y_s+\varepsilon)^{p-1}\,d\left\langle X\right\rangle_s|\mathcal{F}_\tau\right]+\frac{p\,(1-p)}{2}E\left[\int_\tau^T (Y_s+\varepsilon)^{p-2}\,d\left\langle L^c\right\rangle_s|\mathcal{F}_\tau\right] \tag{3.7}$$

$$+\,E\left[\int_\tau^T\left(\frac{p\,(1-p)}{2}\,(Y_s+\varepsilon)^{p-2}\,\varphi_s^2+p\,(Y_s+\varepsilon)^{p-1}\,\varphi_s\right)d\left\langle M\right\rangle_s|\mathcal{F}_\tau\right]$$
$$-\,E\left[\sum_{\tau<s\leq T}\left((Y_s+\varepsilon)^p-(Y_{s-}+\varepsilon)^p-p\,(Y_{s-}+\varepsilon)^{p-1}\,\Delta Y_s\right)|\mathcal{F}_\tau\right].$$

Puisque $f(x)=x^p$ est concave pour $p\in(0,1)$, le dernier terme dans (3.7) est positif. Par conséquent, en utilisant l'inégalité

$$\frac{p\,(1-P)}{2}\,(Y_s+\varepsilon)^{p-2}\,\varphi_s^2+p\,(Y_s+\varepsilon)^{p-1}\,\varphi_s+\frac{p}{2\,(1-p)}\,(Y_s+\varepsilon)^p\geq 0$$

de (3.7) nous obtenons

$$(Y_\tau+\varepsilon)^p-\varepsilon^p \geq E\left[\int_\tau^T p\,(Y_s+\varepsilon)^{p-1}\,d\left\langle X\right\rangle_s|F_\tau\right] \tag{3.8}$$
$$-\,\frac{p}{2\,(1-p)}E\left[\int_\tau^T (Y_s+\varepsilon)^p\,d\left\langle M\right\rangle_s|F_\tau\right].$$

Depuis $0<p<1$

$$p\,(||Y||_\infty+\varepsilon)^{p-1}\,E\left[\left\langle X\right\rangle_T-\left\langle X\right\rangle_\tau|F_\tau\right]\leq E\left[\int_\tau^T p(Y_s+\varepsilon)^{p-1}d\left\langle X\right\rangle_s|F_\tau\right],$$

de (3.8) nous avons

$$p\,(||Y||_\infty+\varepsilon)^{p-1}\,E\left[\left\langle X\right\rangle_T-\left\langle X\right\rangle_\tau|\mathcal{F}_\tau\right]\leq (Y_\tau+\varepsilon)^p-\varepsilon^p+\frac{p}{2(1-p)}E\left[\int_\tau^T(Y_s+\varepsilon)^pd\left\langle M\right\rangle_s|\mathcal{F}_\tau\right]$$

et prendre des normes dans les deux côtés de la dernière inégalité que nous obtenons

$$p\,(||Y||_\infty+\varepsilon)^{p-1}.||X||^2_{BMO(P)}\leq(||Y||_\infty+\varepsilon)^p-\varepsilon^p+\frac{p}{2(1-p)}\,(||Y||_\infty+\varepsilon)^p\,.||M||^2_{BMO(P)}.$$

En prenant la limite qu'en $\varepsilon\longrightarrow 0$ nous aurons cela pour tout $p\in(0,1)$

$$||X||^2_{BMO(P)}\leq\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2(1-p)}||M||^2_{BMO(P)}\right).||Y||_\infty.$$

donc

$$\begin{aligned}||X||^2_{BMO(P)}&\leq min_{p\in(0,1)}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2(1-p)}||M||^2_{BMO(P)}\right).||Y||_\infty \qquad (3.9)\\&=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}||M||_{BMO(\tilde{P})}\right)^2.||Y||_\infty,\end{aligned}$$

puisque le minimum de la fonction $f(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{2(1-p)}||M||^2{}_{BMO(\tilde{P})}$ est atteint pour

$$p^*=\sqrt{2}/(\sqrt{2}+||\tilde{M}||_{BMO(\tilde{P})})\text{ et }\ f(p^*)=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}||M||_{BMO(\tilde{P})}\right)^2.$$

$$p^*=\sqrt{2}/(\sqrt{2}+||\tilde{M}||_{BMO(\tilde{P})})$$

et

$$f(p^*)=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}||M||_{BMO(\tilde{P})}\right)^2$$

Ainsi, à partir de (3.9)

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}||M||_{BMO(P)}\right)}||X||_{BMO(P)}\leq||\tilde{X}||_{BMO(\tilde{P})}.$$

Maintenant nous pouvons utiliser l'inégalité (3.9) pour la transformation de Girsanov de $\tilde{X}$. Depuis $dP/d\tilde{P} = \xi_T^{-1}(M) = \xi_T(\tilde{M})dP, \tilde{M}, \tilde{X} \in BMO(\tilde{P})$ et

$$\varphi\left(\tilde{X}\right) = \tilde{X} - \left\langle \tilde{X}, \tilde{M} \right\rangle = X,$$

de (3.9) nous obtenons l'inégalité inverse :

$$||\tilde{X}||_{BMO\left(\tilde{P}\right)} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}||\tilde{M}||_{BMO(P)}\right)||X||_{BMO(P)}. \tag{3.10}$$

■

Comparons la constante

$$C(\tilde{M}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}||\tilde{M}||_{BMO(\tilde{P})}$$

de 3.5 avec la constante correspondant $C_K(\tilde{M})$ de 2.19 ($Kazamaki$ [11]) .

depuis

$$E^{\tilde{P}}\left[\left\{\xi_{\tau,T}(\tilde{M})\right\}^{-\frac{1}{p-1}}|\mathcal{F}_\tau\right] \geq 1,$$

la constante $C_K(\tilde{M})$ est supérieure à$\sqrt{2p}$, où p est tel que :

$$||\tilde{M}||_{BMO(\tilde{P})} < \sqrt{2}(\sqrt{p} - 1).$$

Depuis la dernière inégalité est équivalente à la inégalité $p > \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}||\tilde{M}||_{BMO(\tilde{P})}\right)^2$, nous obtenons qu'au moins

$$C^2\left(\tilde{M}\right) \leq \frac{1}{2}C_K^2\left(\tilde{M}\right).$$

Bibliographie

[1] R. Bañuelos and A. G. Bennetet, Paraproducts and Commutators of martingale transforms, Proc. American Mathematical Society, 103 (1988), 1226–1234.

[2] J. M. Bismut, ”Controle des systemes lineaires quadratiques : applications de l’integrale stochastique,” Seminaire de Probabilites XII (eds. : C. Dellacherie, P. A. Meyer, and M. Weil), Lecture Notes in Mathematics 649, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, pp. 180-264, 1978.

[3] Briand P. Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Mars. 2001 Mar.

[4] Chikvinidze B, Mania M. New proofs of some results on BMO martingales using BSDEs. arXiv preprint arXiv :1205.1249. 2012 May 6.

[5] F. Delbaen, P. Monat, W. Schachermayer, M. Schweizer and C. Stricker, ”Weighted norm inequalities and hedging in incomplete markets,” Finance and Stochastics , Vol. 1, pp. 181-227, 1997.

[6] Delbaen, Freddy, and Shanjian Tang. "Harmonic analysis of stochastic equations and backward stochastic differential equations." Probability Theory and Related Fields 146.1 (2010) : 291-336

[7] C. Doleans-Dade and P. A. Meyer, ”Inegalites de normes avec poids,” Universite de Strasbourg Seminaire de Probabilites , XIII, pp. 313-331, 1979.

[8] M. Emery, Stabilit´e des solutions des équations différenielles stochastiques ; applications aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete,41 (1978), 241–262.

[9] M. Emery, Equations différenielles stochastiques lipschitziennes : étude de la stabilité.Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes in Mathematics 721, 281–293, Springervelag, Berlin, 1979.

[10] N. Kazamaki, "On transforming the class of BMO-martingales by a change of law," Tohoku Mathematical Journal , Vol. 31, pp. 117-125, 1979.

[11] N. Kazamaki, Continuous Exponential Martingales and BMO , vol. 1579 of Lecture Notes in Mathematics , Springer, Berlin-Heidelberg, 1994.

[12] Pardoux, Etienne, and Shige Peng. "Adapted solution of a backward stochastic differential equation." Systems & Control Letters 14.1 (1990) : 55–61.

[13] P. Protter, Stochastic Integration and Differential Equations, Second Edition, SpringerVerlag, New York, 2004.

[14] W. Schachermayer, "A characterization of the closure of H∞ in BMO," Seminaire de Probabilites XXX, Lecture Notes in Mathematics 1626, Springer,

Berlin, pp. 344-356, 1996.

[15] M. Yor, Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque, I :théorèmes géneraux, In : Grossissements de filtrations : exemples et applications (eds. :Th. Jeulin and M. Yor), 110-146, Lecture Notes in Mathematics 1118, Springer-Verlag,Berlin Heidelberg, 1985.