République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : Analyse

Par : BELHADJ Sara

Titre :

LA METHODE DE FAEDO-GALERKIN ET APPLICATIONS

Devant le Jury :

LAADJAL Baya	MCB	U. Biskra	Président
HAMDI Soumia	MAA	U. Biskra	Encadreur
RAHMANI Naceur	MCA	U. Biskra	Examinateur

Soutenu le 28/06/2022

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail accompagné avec amour et respect à :

Á mes trés chers parent et ma grand-mère **Souakir Dalila**.

Á mon cher mari : **Walid.**

Á Mes soeurs : **Yousra**, **Chaima**, **chorouk**.

Á Mes frères : **Noureddine**, **Ahmed**.

Et enfin tout mes proches pour leurs soutiens moral et affectif.

Remerciements

Je tiens à remercier **Dr. HAMDI Soumia** *pour avoir tant encadré cette thèse, pour son encadrement et sa compétence, et pour ses conseils, corrections et orientations.*

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements aux honorables membres du jury, **Dr. LAADJAL Baya** *et* **Dr. RAHMANI Naceur.**

Je voudrais également remercier **mon père** et **ma mère** *pour les soutenir et leurs encouragements à mon égard.*

Enfin,mes remerciement vont aussi à tous les membres du département de mathématique. Je tiens à remercier aussi mes amis et mes collegues et tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin pour achever ce travail.

Notations et symboles

Ω :	Ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
$\overline{\Omega}$:	L'adhérence de Ω.
$D(\Omega)$:	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$:	L'espace des distributions sur Ω.
$L^p(\Omega)$:	L'espace des fonctions puissance p-ièmc sommable sur Ω pour la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$.
$L^\infty(\Omega)$:	L'espace des (classes) fonctions essentielement bornées.
$H^m(\Omega)$:	L'espace de Sobolev d'ordre m.
$H_0^m(\Omega)$:	L'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.
$H^{-m}(\Omega)$:	Espace dual de $H^m(\Omega)$.
X' :	Le dual topologique de l'espace vectoriel normé X
$(.,.)_0$:	Produit scalaire de $L^2(\Omega)$
$\Vert . \Vert_0$:	La norme de $L^2(\Omega)$
$(.,.)_\perp$:	Produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$
$\vert . \vert_\perp$:	La norme de $H_0^1(\Omega)$
$\langle .,. \rangle_*$:	Le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$
∇ :	Le gradient.

Table des matières

Introduction

Alessandro Faedo, mieux connu sons le nom de sandro est né à Chiampo (près de Vicenza, au Nord-Est de l'Italie) le 18 Novembre 1913 et est mort à Pisa le 16 Juin 2001.

L'activité scientifique de Faedo était essentiellement dans le domaine de l'analyse générale et l'analyse numérique. Ses principales contributions concernent cependant le calcul de variation, la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires et la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les contributions mathématiques les plus importantes de Faedo destinées à avoir un impact durable sont dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Ses écrits dans ce domaine se concentrent sur ce qu'il a appelé "l'analyse existencielle et quantitative des Equations aux Dérivées Partielles (E.D.P)", en particulier pour les cas elliptiques et hyperboliques.

L'écrit le plus important de Faedo, publié en 1949 dans "l'Annali della Scuola Normale Superiore di pisa", contient l'analyse et la description d'une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles dépendantes du temps. Plus tard, cette méthode que Faedo a appelé "Méthode des moments", allait devenir universellement connu comme la "Méthode de **Faedo-Galerkin**" .ce qui fait l'objet de notre travail.

De nombreux phénomènes naturels sont modélisés par des équations aux dérivées partielles qui sont des équations dont les solutions sont des fonctions inconnues vérifiant certaines conditions. Ces équations sont largement utilisées dans divers domaines des mathématiques appliquées et de physique. On s'intéresse à établir l'existence et l'unicité de la solution de certains problèmes en utilisant l'approximation de Galerkin. Cette dernière est une méthode générale qui concerne les formulations faibles. Elle possède l'avantage d'être une méthode constructive en ce sens que la solution cherchée est obtenue comme limite d'une suite de "solutions approchées", d'où son double intérêt théorique et numérique.

Notre étude comporte principalement trois chapitres, dans le premier chapitre nous présentons des rappels sur l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans notre travail.

Dans le second chapitre, nous allons présenter la Méthode de **Faedo-Galerkin** et un exemple de l'equation semi-linéaire de lamé en pouvant l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le dernier chapitre, Application de la méthode de **Faedo-Galerkin** sur l'équation de la chaleur.

Chapitre 1

Rappels de notions d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, pour comprendre bien ce que sont la methode **Faedo-Galerkin**, il est important d'être familié avec la théorié des distributions et rappels sur les espaces L^p, les espaces Sobolev, les espaces réflexifs, les espaces séparables et les espaces de Hilbert. Et en particulier, nous donnerons les principaux résultats sur la topologie faible et la topologie faible étoile.

1.1 Espaces métriques, Espaces complets

Définition 1.1.1 (Espaces métriques) *Un espace vectoriel $E \in \mathbb{R}$ est un espace métrique lorsqu'il est muni d'une distance d, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

- définie positivité :

$$\forall x \in E,\ y \in, E\ d(x,y) \geq 0\ et\ (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y),$$

- *symétrie :*

$$\forall x \in E,\ y \in E,\ d(x,y) = d(y,x),$$

- *inégalité triangulaire :*

$$\forall x \in E,\ y \in E,\ z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

ce qui en fait un espace topologique pour la topologie associée à cette distance.

Définition 1.1.2 (Espaces complets) *La convergence d'une suite $\left\{x^k\right\}$ vers x dans cette topologie se traduit par la convergence vers zéro de $d(x^k,x)$.*
Une suite convergente est une suite de cauchy, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 : \forall k \geq k_0,\ k' \geq k_0,\ d((x^k, x^{k'}) \leq \varepsilon$$

Inversement, lorsque dans un espace métrique, toute suite de cauchy converge (la limite est alors unique), on dit que l'espace métrique est complet.

1.2 Espaces normés, espaces de Banach

Définition 1.2.1 *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application, le plus souvent notée $\|.\|$:*

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

ayont les trois propriétés suivantes :

1) a) $\|x\| \geq 0$ *pour tout* $x \in E$ *et* **b)** $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$ *(homogénéité) ;*

3) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|, \forall x, y \in E$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.2 *Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace normé E est suite de Cauchy si :*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N \geq 1) \quad k, l \geq N \Longrightarrow \|x_k - x_l\| \leq \varepsilon.$$

tout suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.2.3 *On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle espace de Banach tout espace normé complet.*

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.3.1 *Un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire est appelé espace de Hilbert.*

Définition 1.3.2 *Soit H un espace vectoriel réel. Un produit scalaire noté $\langle , \rangle$ où $(x; y)$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, c'est-à-dire une application de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$.*
symétrique $[$c'est-à-dire : $(x; y) \in H \times H, \ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle]$,
définie positive $[$c'est-à-dire : $\forall x \in H$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0]$
Rappellons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}, \quad \forall (x, y) \in H \times H.$$

1.4 Topologie faible

1.4.1 Topologie faible $\sigma(E, E')$

Définition 1.4.1 *Soit E un espace normé, E' est son dual topologique. On appelle topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, la topologie la moins ne rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$.*

Définition 1.4.2 *Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de E; on dit $(x_n)_{n\in N}$ converge faiblement vers x dans E, si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$, alors on la note par $x_n \to x$.*

Proposition 1.4.1 *Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de E, alors*

$$\forall f \in E',\ x_n \to x \iff f(x_n) \to f(x).$$

Théorème 1.4.1 *Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite bornée dans un espace de Hilbert E. Alors la suite $(x_n)_{n\in N}$ possède une sous-suite faiblement convergente.*

Théorème 1.4.2 *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert E est bornée.*

Théorème 1.4.3 *Soient $(x_n)_{n\in N}$ une suite qui converge faiblement vers x et $(y_n)_{n\in N}$ une suite qui converge fortement vers y. Alors on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle.$$

1.4.2 Topologie *-faible

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual topologique (muni de la norme duale $\|f\| = \sup_{x\in E,\|x\leq 1\|} (|\langle f, x\rangle|)$), et soit E'' son bidual, c'est-à-dire le dual de

E' muni de la norme :

$$\|\xi\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|$$

On a une injection canonique $J : E \longrightarrow E''$ définie comme suit : $x \in E$.

L'application $f \longrightarrow \langle f, x \rangle$ de E' dans $\mathbb{R}$ constiue une forme linéaire continue sur E',i.e un élément de E'' noté $J_x()$. On a donc :

$$\langle J_x, f \rangle_{E", E'} = \langle f, x \rangle_{E', E} \quad \forall x \in E, \forall f \in E'$$

il est clair que J est linéaire et isométrique i.e $\|J_x\|_{E"} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, En effet,

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle J_x, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|$$

On a $J \in (E) \subset E''$. Ce qui nous permet de définir une nouvelle topologie sur E'.

Définition 1.4.3 *Topologie *-faible notée $^* - \sigma(E, E')$ est la topologie la moins ne rendant continues les formes linéaires dont la base de voisinages de $f_0 \in E'$ pour la topologie *-faible est donnée par*

$$W = \{f \in E', \ |\langle f - f_0, x_j \rangle| < \varepsilon, \ j = 1, ..., m, \ x_j \in E, \ m \in \mathbb{N}\}$$

Proposition 1.4.2 *Soit E un espace de Banach. Si $(f_n)_{n \in N}$ est une suite de E', alors f_n converge vers*

f pour la topologie $^*-$faible si et seulement si $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, pour tout $x \in E$.

1.4.3 Espace réflexifs, espace séparables

Espace réflexifs

Soit E un espace de Banach et $J : E \longrightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E'', définie par $J_x(f) = f(x)$ pour tout $x \in E, f \in E'$.

Définition 1.4.4 *L'espace E est dit réflexif, si $J(E) = E''$.*
D'où le résultat suivant :

Théorème 1.4.4 *Soit E est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Preuve. Voir H. Brezis [7](Théorème III.27, page 50). ■

Espace séparables

Définition 1.4.5 *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble dense et dénombrable.*

Théorème 1.4.5 *Soit E un espace de Banach séparable $\Rightarrow$ toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Preuve. Voir H. Brezis [7] (Corollaire III.26, page 50). ■

1.5 Opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert

Définition 1.5.1 *Soit H un espace de Hilbert, un opérateur linéaire continue T de H dans H est dit compact s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.*

Proposition 1.5.1 *Un opérateur linéaire est compact si et seulement s'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite admettant au moins une sous suite fortement convergente.*

Remarque 1.5.1 *Le résultat de la proposition précédente peut remplacer la définition précédente.*

Théorème 1.5.1 *On suppose que H est un espace de Hilbert séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Preuve. Voir H. Brezis [7] (Théorème VI.11, page 97). ■

Proposition 1.5.2 *Tout opérateur symétrique T défini sur un espace de Hilbert H, à valeurs dans ce même espace H est un opérateur borné et autoadjoint.*

Preuve. Voir K. Yosida [14] (Proposition VIII.3.2, page). ■

1.6 Les espaces L^p

1.6.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.6.1 *Soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue. On désigne par $L^1(\Omega)$l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme*

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On vérifiera ultérieurement que $\|.\|_{L^p}$ *est une norme.*

Définition 1.6.2 *On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \textit{ mesurable et } \exists\ C \textit{ telle que } |f(x)| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega \}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ C;\ \ |f(x)| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega \}.$$

On vérifiera ultérieurement que $\|.\|_{L^\infty}$ *est une norme.*

1.6.2 Espaces $L^p(0,T;X)$

Définition 1.6.3 *Soit* X *un espace de Banach, on désigné par* $L^p(0,T;X)$ *l'espace des (classes des) fonctions* f *mesurables sur* $[0,T]$ *à valeurs dans* X *et telles que :*

$$\|f(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1 \leq p < \infty.$$

Pour $p = \infty$ *:*

$$\|f(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup ess_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X < \infty.$$

1.7 Les espaces de Sobolev

1.7.1 L'espace de Sobolev d'ordre entier

Définition 1.7.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$. L'ensemble :*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega),\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m\right\},$$

où $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ désigne la dérivée d'ordre α au sens des distributions avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. On donne dans cette paragraphe Quelques propriétées des espaces $H^m(\Omega)$.

1.7.2 Quelques propriétées des espaces $H^m(\Omega)$.

On a les propriétées suivantes :

(1) On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2},\ \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

La norme associée étant donnée par :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{H^m(\Omega)}} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}},\ \forall u \in H^m(\Omega).$$

De plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.

(2) Pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$, on a :

$$H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega).$$

(3) Pour tout $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ est un espace séparable.

(4) Pour tout $m \geq 0$, nous désignons par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}.$$

dans $H^m(\Omega)$, et par $H^{-m}(\Omega)$ le duel topologique de $H_0^m(v)$.

(5) Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $H_0^m(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) / \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} = 0,\ \forall j = 0, ..., m-1. \right\},$$

où $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ est la dérivée normal de u suivant la normal extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$.

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x)\, \eta_i,\ \forall x \in \Gamma.$$

1.7.3 Espaces de Sobolev d'ordre non entier

Lorsque s est un fractionnaire positif, l'espace $H^s(\Omega)$ se caractérise par la définition suivante :

Définition 1.7.2 *Soit s un réel, $0 < s < 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par*

$H^s(\Omega)$ l'espace :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \textit{tel que} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy < +\infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)} + \int\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Si s désigne un réel positif de partie entière $[s] = m$, l'espace $H^s(\Omega)$ peut être définit de la manière suivante :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ [s] = m,\ D^\alpha u \in H^{s-m}(\Omega) \right\}.$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$; nous pouvons définir l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ au moyen de la transformation de Fourier.

Théorème 1.7.1 *(Inégalité de Poincaré-Friedrich) soit Ω un ouvert borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante $C > 0$ (dépendante seulement de Ω), telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

La semi-norme

$$u \longrightarrow |u|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme de $u \longrightarrow \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

1.7.4 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Définition 1.7.3 *Soit X un espace de Banach et T un réel strictement positif. Pour $p \in [1, +\infty[$ on note $L^p(0, T, X)$ l'ensemble des classes des fonctions Lebesgue merables définies sur $]0, T[$ et à valeurs dans X ; telles que $t \to \|f(t)\|_X^p$ est intégrable sur $]0, T[$. C'est un espace de Banach pour la norme*

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p}(0; T; X) = \left(\int_0^T \|f\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De la même façon, pour $p = +\infty$, on définit un espace de Banach $L^\infty(0, T; X)$ muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = sup \|f(t)\|_X < +\infty.$$

La proposition suivante nous donnent quelques propriétées importantes des espaces $L^p(0, T, X)$.

Proposition 1.7.1 *Pour $p \in [1, +\infty[$, on a les résultats suivants :*

1. Si X est séparable, alors $L^p(0, T, X)$ est aussi séparable.
2. Si X est réflexif (respectivement de Hilbert), alors $L^p(0, T, X)$ est aussi réflexif (respectivement de Hilbert). On a alors $L^2(0, T, X)$ est un espace de Hilbert tels que
3. Si X et Y désignent deux espaces de Banach, X inclus dans Y, avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0, T, X)$ dans $L^p(0, T, Y)$.
4. Soient p et p' deux exposants conjugués, $p \in [1; +\infty[$.

a) Le duel de $L^p(0, T, X)$ s'identi e à $L^{p'}(0, T, X)$:

b) Si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$; On a l'équivalence algébrique et topologique entre les espaces $L^p(0,T,L^p(\Omega))$ et $L^p(]0,T[\times\Omega)$.

1.7.5 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles.

Soit X un espace de Bancah et T un réel strictement positif.

Définition 1.7.4 *On désigne par $D\prime(0,T,X)$ l'espace des applications linéaires continues de $D(]0,T[)$ (espace des fonctions numériques indé niment di érentiables à support compact dans $]0,T[$) dans X. Un élément de $D\prime(]0,T[,X)$ est appelé une "distribution" et on note pour $f \in D\prime(0,T,X)$ et $\varphi \in D(]0,T[)$*

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle .$$

Comme pour le cas réel, on donne la dé nition de la dérivée d'une distribution.

Définition 1.7.5 *Soit $f \in D'(0,T,X)$ et m un entier positif. La dérivée de f d'ordre est donnée par la formule suivante :*

$$\left\langle \frac{d^m f}{dt^m}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle f, \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right\rangle .$$

1.7.6 Espaces $\mathbf{W}^{1,p}(0,T,X)$.

Définition 1.7.6 *Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach et T un réel strictement positif. On définit l'espace comme suit :*

$$W^{1,p}(0,T,X) = \left\{ u \in L^p(0,T,X),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T,X) \right\}$$

que l'on munit de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T,X)} = \|u\|_{L^p(0,T,X)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^p_{L^p(0,T,X)},$$

ou de la norme équivalente, si p est fini, définit par :

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T,X)} = \left(\|u\|^p_{L^p(0,T,X)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^p_{L^p(0,T,X)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \in [1, +\infty]$*, l'espace* $W^{1,p}(0,T,X)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 1.7.2 *Si* X *est séparable et* $p < +\infty$*, alors l'espace* $W^{1,p}(0,T,X)$ *est séparable.*

Proposition 1.7.3 *Si* $p \in]1, \infty[$ *et* X *est séparable réflexif alors l'espace* $W^{1,p}(0,T,X)$ *est réflexif.*

Proposition 1.7.4 *Pour* $p = 2$*, on note* $H^1(0,T,X) = W^{1,2}(0,T;X)$*, on a alors* $H^1(0,T,X)$ *est de Hilbert.*

1.7.7 Espace $\mathbf{H^1(Q)}$

Définition 1.7.7 *Soit un* Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* T *un réel strictement positif.*

On note Q le cylindre défini par $Q =]0,T[\times \Omega$.

On définit l'espace :

$$H^1(Q) = \left\{u \in L^2(Q),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T,X)\right\}$$

que l'on munit de la norme définit par :

$$\|u\|_{H^1(Q)} = \left(\|u\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.7.2 *L'espace $H^1(Q)$ est de Hilbert pour la norme définit ci-dessus.*

Lemme 1.7.1 *Si*

$$\int_0^T u dt = 0$$

Alors

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq C \int_0^T \|u'\|^2 dt \ \text{ et } \ \int_0^T \|u\|_{L^p(Q)}^p dt \leq C \int_0^T \|u'\|_{L^p(Q)}^p dt$$

pour u dérivable pour tout $t \in [0, T]$, $u \in L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^n)$ et
$u' \in L^2\left(0, T, (H_0^1(\Omega))^n\right) \cap L^p(Q)$.

1.7.8 Formule de Green

Définition 1.7.8 *soit $u \in H^2(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$. Alors on a*

$$\int_\Omega \triangle u.\varphi dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

1.8 Lemme de Granwall

Lemme 1.8.1 *soit $\lambda \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $\lambda(t) \geq 0$. Pour tout $t \in [0, T]$ et soit $\alpha \geq 0$, $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_0^t \lambda(s)\phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors on a :

$$\phi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

1.9 Théorème de Bochner

Une fonction mesurable $g : [0,T] \to V$ est sommable dans $[0,T]$, si et seulement si la fonction réelle $t \to \|f(t)\|_V$ est sommable dans $[0,T]$. De plus,

$$\left\|\int_0^t g(t)dt\right\|_V \leq \int_0^t \|g(t)\|_V \, dt$$

et

$$\left(u, \int_0^t g(t)dt\right)_V = \int_0^t (u, g(t))_V \, dt, \quad \forall u \in V$$

Chapitre 2

La méthode de Faedo-Galerkin

Dans ce chapitre, on présente la méthode de **Faedo-Galerkin** manière succinte et à l'aide d'un exemple parlant d'un problème aux limites hyperbolique semi linéaire pour les équations de lamé.

2.1 Présentaion de la méthode de Faedo-Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode trés générale et trés robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérèt théorique, la méthode de **Faedo-Galerkin** est une méthode approximative parmi d'autres, utlisée pour résoudre (déterminer l'existence et l'unicité des solutions) des équations aux dérivées partielles d'évolution. Le schéma général de la méthode est le suivant :

Étape 1 : Partant d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie V, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous espaces de dimension finie $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V$ tels que $\overline{\cup_{m\geq 1} V_m} = V$, ce qui permet de définir $u_m \in V_m$ solution du problème approché.

Étape 2 : On établit des estimations a priori sur u_m qui traduisent que la suite $(u_m)_{m\geq 1}$ est bornée dans certains espaces normés.

Étape 3 : Une fois en possession des estimations a priori, il faut passer à la limite $m \to \infty$ en utilisant un argument de compacité. Soit alors u la limite obtenue de la suite $(u_m)_{m\geq 1}$.

Étape 4 : On montre que u est une solution du problème de départ.

Étape 5 : On établit l'unicité de la solution si tel est le cas.

On va prendre un exemple pour appliquer cette méthode.

2.2 Notations et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et Γ sa frontière, on supposera qu'elle est assez régulière. On considére le probléme (P) suivant :

$$(P) : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + |u'|^p u' = f & \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & \text{sur } \sum = \Gamma \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où u, f représente le vecteur du déplacement, la densité des forces extérieures respectivement et u_0, u_1 et $p > 0$ sont des données. Où L est opérateur de Lamé défini au moyen des coefficient de Lamé λ et μ ($\lambda + \mu \geq 0$ et $\mu \geq 0$) par :

$$Lu = \mu \triangle u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u, \tag{2.2}$$

Nous allons utiliser les notations suivantes :

$$\begin{gathered} u(x,t) = u; \quad f(x,t) = f; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u'; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u''; \\ \triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}; \quad |u'|^p = \left(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 + ... + u_n'^2\right)^{\frac{p}{2}}. \end{gathered}$$

On est maintenant en mesure de formuler de façon précise le probléme (P), pour l'étudier, on aurra besoin des hyphothèses suivantes :

$$f \in L^2(Q), \ \left(L^2(Q) = L^2\left(0,T;L^2(Q)\right)\right); \tag{2.3}$$

$$u_0 \in V, \ \left(u_0 \in L^\infty(0,T;V)\right); \tag{2.4}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega), \ \left(u_1 \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right), \ p = p+2; \tag{2.5}$$

$$h \in L^2(\Gamma_2 \times (0,T)), \ \left(L^2(\Gamma_2 \times (0,T)) = L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_2)\right)\right). \tag{2.6}$$

2.3 Formulation variationnelle

Lemme 2.3.1 *[8]Sous les hypothèses (2.3)-(2.6), le problème (2.1) est formellement équivalent au problème variationnel suivant :*

$$(p) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ (u_{tt}, v) + a(u,v) + (|u_t|^p u_t, v) = (f,v) + \int_{\Gamma_2} hv d\Gamma, \ \forall v \in V \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega; \end{cases}$$

Où :

$$a(u,v)=\mu\int_{\Omega}\nabla u\nabla v dx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(\operatorname{div}u)(\operatorname{div}v)\,dx,$$
$$v=\left\{v\in H^{1}(\Omega):v=0\ sur\ \Gamma_{1}\right\}.$$

Preuve. En multipliant la première équation de (2.1) par un élément $v\in H^{1}(\Omega)$, on obtient :

$$(u_{tt},v)+(-Lu,v)+(|u_{t}|^{p}u_{t},v)=(f,v). \tag{2.7}$$

En remplaçant (2.2) dans (2.7), on obtient

$$(u_{tt},v)-(\mu\triangle u+(\lambda+\mu)\nabla.\operatorname{div}u,v)+(|u_{t}|^{p}u_{t},v)=(f,v),\ \forall v\in H^{1}(\Omega),$$

ou encore sous la forme

$$(u_{tt},v)-(\mu\int_{\Omega}\triangle uvdx-\left(\lambda+\mu\right)\int_{\Omega}\nabla.\operatorname{div}u.vdx\right)+(|u_{t}|^{p}u_{t},v)=(f,v),\ \forall v\in H^{1}(\Omega),$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$(u_{tt},v)-\mu\int_{\Gamma}(\nabla u.\eta)vd\Gamma+\mu\int_{\Omega}\nabla u\nabla vdx-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma}(\operatorname{div}u.\eta)vd\Gamma$$
$$+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(\operatorname{div}u)(\operatorname{div}v)dx+(|u_{t}|^{p}u_{t},v)=(f,v),\forall v\in H^{1}(\Omega).$$

Comme Γ_1 et Γ_2 est une partition de Γ, alors

$$(u_{tt},v)-\int_{\Gamma_1}(\mu\nabla u.\eta+(\lambda+\mu)(\operatorname{div}u.\eta))vds-\int_{\Gamma_2}(\mu\nabla u.\eta+(\lambda+\mu)\operatorname{div}u.\eta)vds$$
$$+\mu\int_{\Omega}\nabla u\nabla vdx+(\lambda+\mu)\int_{\Omega}(\operatorname{div}u)(\operatorname{div}v)dx+(|u_{t}|^{p}u_{t},v)=(f,v).$$

En posant $v=0$ sur Γ_1 et en utilisant le fait que $(\mu\nabla u.\eta+(\lambda+\mu)\operatorname{div}u.\eta)=h$

sur Γ_2, on obtient :

$$(u_{tt}, v) + \mu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + (\lambda + \mu) \int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v) dx + (|u_t|^p u_t, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hvds, \forall v \in V,$$

D'où la formulation variationnelle :

$$(P) \begin{cases} (u_{tt}, v) + a(u, v) + (|u_t|^p u_t, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hvds, \ \forall v \in V, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \ \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Reste à montrer que toute solution de (P) est une solution de probléme (2.1). Soit u une solution de (P), on a :

$$(u_{tt}, v) + a(u, v) + (|u_t|^p u_t, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hvds, \ \forall v \in V,$$

ou encore :

$$(u_{tt}, v) + \mu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + (\lambda + \mu) \int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v) dx + (|u_t|^p u_t, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hvds, \ \forall v \in V.$$

En utilisant la formule de Green, on trouve :

$$(u_{tt}, v) - \mu \int_\Omega \triangle u v dx - (\lambda + \mu) \int_\Omega \nabla.(\operatorname{div} u v) dx + \int_{\Gamma 1} (\mu \nabla u.\eta + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u.\eta) v ds$$

$$+ \int_{\Gamma_2} (\mu \nabla u.\eta + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u.\eta) v d\Gamma + (|u_t|^p u_t, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hvd\Gamma, \ \forall v \in V.$$

Comme $v \in V$, donc $v = 0$ sur Γ_1, alors :

$$(u_{tt}, v) - \int_{\Omega} (\mu \triangle u dx + (\lambda + \mu) \nabla . \operatorname{div} u) v dx + \int_{\Gamma 2} (\mu \nabla u . \eta + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u . \eta) \, v d\Gamma$$

$$(|u_t|^p \, u_t, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hvd\Gamma, \ \forall v \in V. \tag{2.8}$$

En utilisant le fait que $D(\Omega)$ est dense dans V, alors de (2.8), on tire :

$$(u_{tt}, \varphi) - \int_{\Omega} (\mu \triangle u dx + (\lambda + \mu) \nabla . \operatorname{div} u) \varphi dx + (|u_t|^p \, u_t, \varphi) = (f, \varphi), \ \forall \varphi \in D(\Omega),$$

ou sous forme équivalente :

$$\int_{\Omega} (u_{tt} - Lu + |u_t|^p \, u_t) \, \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega). \tag{2.9}$$

D'après (l'égalité p.p.), nous avons :

$$u_{tt} - Lu + |u_t|^p \, u_t = f \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

D'autre part en remplaçant (2.8) dans (2.9), on obtient :

$$\int_{\Gamma_2} (\mu \nabla u . \eta dx + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u . \eta) v d\Gamma = \int_{\Gamma_2} hvd\Gamma, \forall v \in V.$$

Donc :

$$h = (\mu \nabla u . \eta + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u . \eta) \ \text{ dans } \Gamma_2.$$

Alors, le problème (2.1) est formellement équivalent au problème variationnel (P).

■

Lemme 2.3.2 *[9]Sous les hypothèses (2.3)-(2.6), l'application* $a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$

est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $V \times V$*, et par conséquent* $a(u,u)^{\frac{1}{2}}$ *une semi norme équivalente à la norme de* V*.*

$$a(u,u) \approx \|u\|_V^2 .$$

2.4 Existence

Théorème 2.4.1 *Sous les hypothèses (2.3)-(2.6), il existe au moins une fonction* u *solution de problème (2.1) ayant la régularité suivante :*

$$u \in L^\infty(0,T;V), \tag{2.10}$$

$$u_t \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.11}$$

$$u_{tt} \in L^{p+2}\left(0,T;L^{p+2}(\Omega)\right). \tag{2.12}$$

Lemme 2.4.1 *[9]L'inclusion de* $(V, \|.\|_V)$ *dans* $(L^2(\Omega), |.|_{L2(\Omega)})$ *est continue et* V *est dense dans* $L^2(\Omega)$*. Nous notons par* V' *l'espace de dual de* V*,* V *est identifié avec* $L^2(\Omega)$ *et avec son propre dual, nous pouvons écrire le triple de Gelfand*

$$V \rightarrow_{continue} L^2(\Omega) \rightarrow_{continue} V', \tag{2.13}$$

où

$$\|v\|_{V'} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_V, \forall v \in V.$$

Preuve. On va maintenat démontrer le théorème précédente

Premiére étape : On cherche des solutions approchées.

L'espace V est séparable donc, il existe une suite $w_1, w_2, w_3, ..., w_k$ des fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_i \in V, \forall i; i = 1, 2, ..., k, \\ \quad \forall k, w_1, w_2, ..., w_k \quad \text{sont linéairement indépendants,} \\ \quad V_k = \langle \{w_1, w_2, ..., w_k\} \rangle \quad \text{est dense dans } V. \end{cases}$$

En particulier :

$$u_k(0) = u_{0k}; \quad u_{0k} = \sum_{i=1}^{i=k} g_{ik}(0) w_i \to u_0 \quad , \text{ lorsque } k \to \infty \text{ dans } V. \tag{2.14}$$

$$u'_k(0) = u_{1k}; \quad u_{1k} = \sum_{i=1}^{i=k} g'_{ik}(0) w_i \to u_1 \quad , \text{ lorsque } k \to \infty \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{2.15}$$

On cherche alors $u_k(t) = \sum_{i=1}^{i=k} g_{i,k}(t) w_i(x)$ solution ≪approchée≫ du probléme (P) suivant :

$$(P_k) \begin{cases} (u''_k(t), w_i) + a(u_k(t), w_i) + (|u'(t)|^p u'_k(t), w_i) = (f(t), w_i) \\ \qquad\qquad + \int_{\Gamma_2} h w_i ds, \quad 1 \le i \le k; \\ u_k(0) = u_{0k}; \ u'_k(0) = u_{1k}; \end{cases} \tag{2.16}$$

On obtient un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires du deuxième ordre et comme la famile $\{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ est linéairement indépendantes, alors le système composé de (2.14) (2.15) et (2.16) admet au moins une solution défine sur $[0, T_k]$ et telle que :

$$U_k(t) \in L^2(0, t_k, V_k), \ U'_k(t) \in L^2(0, t_k, V_k), \ U''_k(t) \in L^2(0, t_k, V_k).$$

Les estimations à priori qui suivent montreront que T_k est indépendant de k (i.e.$T_k = T$).

Deuxième étape : Les estimations a priori.

Multiplions (2.16) par $g_{i,k}(t)$ et sommons sur i. On aura

$$\left(u_k''(t), u_k'(t)\right) + a\left(u_k(t), u_k'(t)\right) + \left(\left|u_k'(t)\right|^p u_k'(t), u_k'(t)\right) = \left(f(t), u_k'(t)\right) \quad (2.17)$$

$$+ \int_{\Gamma_2} h(s)\, u_k'(s)\, ds.$$

En utilisant la bilinéairité de $a(.,.)$ on a

$$\begin{aligned} a\left(u_k(t), u_k'(t)\right) &= \frac{d}{dt} a\left(u_k(t), u_k(t)\right) \\ &= a\left(u_k'(t), u_k(t)\right) + a\left(u_k(t), u_k'(t)\right) \\ &= 2a\left(u_k(t), u_k'(t)\right). \end{aligned}$$

Donc, on peut écrire :

$$a\left(u_k(t), u_k'(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a\left(u_k(t), u_k(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_k(t)\right\|^2. \quad (2.18)$$

On a :

$$\begin{aligned} \left(u_k''(t), u_k'(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(u_k'(t), u_k'(t)\right) \\ &= \left(u_k''(t), u_k'(t)\right) + \left(u_k'(t), u_k''(t)\right) \\ &= 2\left(u_k''(t), u_k'(t)\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\left(u_k''(t), u_k'(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u_k'(t), u_k'(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_k'(t)\right|^2. \quad (2.19)$$

On a :

$$\begin{aligned}\left(\left|u_k'(t)\right|^p u_k'(t), u_k'(t)\right) &= \int_\Omega \left|u_k'(t)\right|^p \left|u_k'(t)\right| \left|u_k'(t)\right| dx \\ &= \int_\Omega \left|u_k'(t)\right|^{p+2} dx \\ &= \left\|u_k'(t)\right\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2}\end{aligned} \tag{2.20}$$

En remplaçent (2.18) et (2.20) dans (2.17), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_k'(t)\right|^2 + \left|u_k(t)\right|^2\right] + \left\|u_k'(t)\right\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2} = \left(f(t), u_k'(t)\right) + \int_{\Gamma_2} h(s)\, u_k'(s)\, d\Gamma.$$

Ce qui donne, en valeur absolue :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_k'(t)\right|^2 + \left|u_k(t)\right|^2\right] + \left\|u_k'(t)\right\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2} \le \left|\left(f(t), u_k'(t)\right)\right| + \int_{\Gamma_2} \left|h(s)\right| \left|u_k'(s)\right| d\Gamma.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_k'(t)\right|^2 + \left|u_k(t)\right|^2\right] + \left\|u_k'(t)\right\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2} &\le \left|f(t)\right|_{L^2(\Omega)} \left|u_k'(t)\right|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left|h(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)} \left|u_k'(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)}.\end{aligned}$$

Donc, on intégré entre $(0,T)$, il résulte :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(\left|u_k'(t)\right|^2 + \left|u_k(t)\right|^2\right) + \int_0^t \int_\Omega \left|u_k'(t)\right|^{p+2} dxdt &\le \tfrac{1}{2}\left|u_{1k}(t)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|u_{0k}(t)\right|^2 \\ + \int_0^t \left|f(t)\right|_{L^2(\Omega)} \left|u_k'(t)\right|_{L^2(\Omega)} ds &+ \int_0^t \left|h(s)\right|_{L^2(\Gamma_2)} \left|u_k'(t)\right|_{L^2(\Gamma_2)} ds.\end{aligned} \tag{2.21}$$

En tenant en compte la continuité de la fonction trace :

$$\left|\gamma_2\left(u_k'\right)\right|_{L^2(\Gamma_2)} \le C_1' \left\|u_k\right\|_V,$$

et par conséquent de (2.21) il vient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\left|u_k'(t)\right|^2+\left|u_k(t)\right|^2\right)+\int_0^t\int_\Omega \left|u_k'(t)\right|^{p+2}dxdt\\
&\leq \int_0^t \left|f\left(s\right)\right|_{L^2(\Omega)}\left|u_k'(s)\right|_{L^2(\Omega)}ds+C_1'\int_0^t \left|h\left(s\right)\right|_{L^2(\Gamma_2)}\left|u_k\left(s\right)\right|_V ds\\
&+\frac{1}{2}\left|u_{1k}\right|^2+\frac{1}{2}\left\|u_{0k}\right\|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $|ab|\leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\left|u_k'(t)\right|^2+\left|u_k(t)\right|^2\right)+\int_0^t\int_\Omega \left|u_k'(t)\right|^{p+2}dxdt\\
&\leq \frac{1}{2}(\left|u_{1k}\right|^2+\frac{1}{2}\left\|u_{0k}\right\|^2+\int_0^t \left|f\left(s\right)\right|_{L^2(\Omega)}ds+C_1'\int_0^t \left|h\left(s\right)\right|_{L^2(\Gamma_2)}ds)\\
&+\frac{1}{2}(\int_0^t \left|u_k'(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}ds+\frac{1}{2}(\int_0^t \left\|u_k(s)\right\|_V^2 ds).
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses (2.3) et (2.6), nous avons :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left(\left|u_k'(t)\right|^2+\left|u_k(t)\right|^2\right)+\textstyle\int_0^t\int_\Omega \left|u_k'(t)\right|^{p+2}dxdt\\
&\leq \tfrac{1}{2}C_2'\left(1+\textstyle\int_0^t \left|u_k'(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u_k\left(s\right)\right\|_V^2 ds\right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

où

$$C_2'=Max(\left|u_{1k}\right|^2+\left\|u_{0k}\right\|^2+\int_0^t \left|f\left(s\right)\right|^2_{L^2(\Omega)}ds+C_1'\int_0^t \left|h\left(s\right)\right|^2_{L^2(\Gamma_2)}ds,1).$$

On déduit donc, en particulier de (2.22) que :

$$\left(\left|u_k'(t)\right|^2+\left\|u_k(t)\right\|^2\right)\leq C_2'\left(1+\int_0^t\left(\left|u_k'(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u_k\left(s\right)\right\|_V^2\right)ds\right).$$

On déduit donc

$$\left(|u_k'(t)|^2+\|u_k(t)\|^2\right)\leq C_2'+C_2'\int_0^t\left(|u_k'(s)|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_k\,(s)\|_V^2\right)ds.$$

En appliquant le lemme de Granwall pour

$$\varphi=|u_k'(t)|^2+\|u_k(t)\|^2\ \text{ et } n=C_2' \text{ et } a=C_2',$$

on obtient :

$$|u_k'(t)|^2+\|u_k(t)\|^2\leq C_2'\exp\left(\int_0^t C_2'ds\right)=c_2'\exp\left(t\right)\leq C_3'\ \text{ (indépandent de } k\text{)}\,. \tag{2.23}$$

Et de (2.22), on déduit que :

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega|u_k'(t)|^{p+2}\,dxdt&=\int_0^t|u_k'(t)|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}\,dt\\&\leq C_2'\left(1+\int_0^t\left(|u_k'(s)|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_k\,(s)\|_V^2\right)ds\right)\\&\leq\frac{1}{2}C_2'+\frac{1}{2}C_2'\int_0^t C_3'ds.\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\int_0^t\|u_k'(t)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}\,dt\leq\frac{1}{2}C_2'+\frac{1}{2}C_2'C_3't\leq K''\ \text{(indépandent de } k\text{)}. \tag{2.24}$$

Alors :

$$|u_k'(t)|^2+\|u_k(t)\|^2+\int_0^t\|u_k'(t)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}\,dt\leq K.$$

D'où l'indépendance de T_k par raport à k. De (2.23) et(2.24) on conclut :

$$\left(u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\ \text{ est borné dans } L^\infty\left(0,T;V\right). \tag{2.25}$$

$$(u'_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est borné dans } L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.26}$$

$$(u''_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est borné dans } L^{p+2}\left(0,T;L^{p+2}(\Omega)\right). \tag{2.27}$$

Troisième étape : Passage à la limite.

De (2.25) et (2.26) ; on déduit qu'on peut extraire un sous suite convergente (u_{km}), de (u_m) telle que :

$$\begin{cases} u_{km} \to u \text{ dans } L^{\infty}(0,T;V) \text{ faible étoile.} \\ u'_{km} \to u' \text{ dans } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{cases}$$

De (2.1) ; pour : $X = V$, $Y = L^2(\Omega)$, $p = \infty$ et d'après (2.13), on trouve :

$$L^{\infty}(0,T;V) \to_{Continue} L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.28}$$

De (2.1) ; pour : $X = L^2(\Omega)$, $r = \infty$, $q = 2$, on trouve :

$$L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \to_{Continue} L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.29}$$

alors : de (2.29) (u_k) est bornée dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$.

Comme $L^{\infty}(0,T;V)$ {resp. $L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$} est le dual de $L^1(0,T;V')$ {resp. $L^1(0,T;L^2(\Omega))$}, alors il existe une sous-suite (u_{km}) telle que :

$$\forall g \in L^1(0,T;V') : \lim_{km\to\infty} \int_0^T (u_{km}(t), g(t))dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), g(t))dt.$$

Ce qui implique :

$$u_{km} \rightarrow u \text{ faible étoile dans } L^{\infty}(0,T;V) \text{ et dans} \tag{2.30}$$

$$L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \text{ fort et p.p.}$$

D'après l'injection suivante :

$$L^2(Q) \rightarrow D'(Q). \tag{2.31}$$

On déduit que :

$$u_{km} \rightarrow u \text{ dans } D'(Q) = D'(0,T;D'(\Omega)).$$

Donc :

$$\exists u'_{km} \rightarrow u' \text{ dans } D'(0,T;D'(\Omega)),$$

ce qui implique que :

$$u'_{km} \rightarrow u' \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ et dans } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.32}$$

Alors en particulier (u_k) est bornée dans $H^1(Q)$, mais on sait que l'injection suivante est compacte :

$$H^1(Q) \rightarrow_{compacte} L^2(Q),$$

et d'après la définition de l'injection compacte, on peut supposer que la suite (u_{km}) extraite de (u_k) vérifie (2.30) et (2.32), donc u, u' existent et dans $L^2(Q)$

alors :

$$\begin{cases} u_{km} \to u \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fort et p.p. dans } Q. \\ u'_{km} \to u' \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fort et p.p. dans } Q. \end{cases} \tag{2.33}$$

Maintenat, on a etudions la convergence $(|u'_k|^p\, u'_k)$:

Soit $(u'_k) \in L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))$, alors on a :

$$\begin{aligned} \left\| |u'_k|^p\, u'_k \right\|^{P'}_{L^{p'}(0,T;L^{p+2}(\Omega))} &= \int_0^t \int_\Omega \left| |u'_k|^p\, u'_k \right|^{p'} dxdt \\ &\leq \int_0^t \int_\Omega \left| |u'_k|^{p+1}\, u'_k \right|^{p'} dxdt \\ &\leq \int_0^t \int_\Omega |u'_k|^{p+1}\, dxdt \\ &= \int_0^t \|u'_k\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}\, dt \leq K'' < \infty. \end{aligned}$$

D'où, il vient :

$$\left(|u'_k|^p\, u'_k\right) \in L^{p'}\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right). \tag{2.34}$$

Comme

$$\left(|u'_k|^p\, u'_k\right) \text{ demeure dans un borné de } L^{p'}\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right),$$

alors

$$|u'_{km}|^p\, u'_{km} \to W \text{ dans } L^{p'}\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right) \text{ faible}\,(*)\,. \tag{2.35}$$

Le point essentiel est de démontrer que

$$W = |u'|^p\, u'. \tag{2.36}$$

■

Pour cela on aurra besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.4.2 *Soit Q un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_{km} et g des fonctions de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, telles que :*

$$\|g_{km}\|_{L^q(Q)} \leq C, g_{km} \to g \text{ p.p. dans } Q.$$

Alors

$$g_{km} \to g \text{ dans } L^q(Q) \text{ faible.}$$

Dans notre cas on prend $g_{km} = |u'_{km}|^p u'_{km}$, $q = \frac{p+2}{p+1} = p'$, d'après (2.34), il résulte :

$$\|g_{km}\|_{L^q(Q)} = \left\| |u'_{km}|^p u'_{km} \right\|_{L^q(Q)} = \left\| |u'_{km}|^p u'_{km} \right\|_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(Q)} = \left\| |u'_{km}|^p u'_{km} \right\|_{L^{p'}(Q)} \leq C.$$

et d'après (2.33) $g_{km} = |u'_{km}|^p u'_{km} \to |u'|^p u' = g$ dans $L^q(Q)$ fort et d'après (2.35) on a $g_{km} \to W$ dans $L^\infty\left(0, T; L^{p'}(\Omega)\right)$ faible, d'où $W = g = |u'|^p u'$.
On montre que cette solution vérifie l'équation (2.16) donc quand on pose ;
$m = km$ et on fixe i tel que $km > i$, on a

$$\begin{aligned}(u''_{km}(t), w_i) + a(u_{km}(t), w_i) + |u'_{km}(t)|^p u'mk(t), w_i = (f(t), w_i) \\ + \textstyle\int_{\Gamma_2} h(s).w_i d\Gamma\end{aligned} \tag{2.37}$$

D'après (2.32) :

$$(u'_{km}(t), w_i) \to (u'(t), w_i) \text{ dans } L^\infty(0, T).$$

D'où :

$$(u'_{km}(t), w_i) \to (u'(t), w_i) \text{ dans } D'(0, T).$$

Donc :

$$\left(u''_{km}(t), w_i\right) = \frac{d}{dt}\left(u'_{km}(t), w_i\right) \to \frac{d}{dt}\left(u'(t), w_i\right) = \left(u''(t), w_i\right) \;\; dans\ D'\left(0, T\right).$$

D'après (2.30) :

$$a\left(u_{km}(t), w_i\right) \to a\left(u(t), w_i\right) \;\; dans\ L^{\infty}\left(0, T\right).$$

On déduit donc de (2.37) que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t), w_i\right) + a\left(u(t), w_i\right) + \left(\left|u'\left(t\right)\right|^p u'\left(t\right), w_i\right) = \left(f(t), w_i\right) + \int_{\Gamma_2} h.w_i d\Gamma,$$

comme V_m *est dense dans l'espace séparable* V*, on obtient pour tout* $v \in V$ *:*

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t), v\right) + a\left(u(t), v\right) + \left(\left|u'\left(t\right)\right|^p u'\left(t\right), v\right) = \left(f(t), v\right) + \int_{\Gamma_2} h.v d\Gamma$$

Alors la solution u *satisfait (2.1). Reste à montrer que la solution* u *vérifie les conditions initiales :*

$$u(0) = u_0; \;\; u'(0) = u_1.$$

D'après (2.30) et (2.32) on a :

$$u_{km} \to u \;\; dans\ L^{\infty}\left(0, T; V\right) \;\; et\ dans\ L^{\infty}\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right),$$

$$u_{km} \to u \;\; dans\ L^{\infty}\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right).$$

D'ou (2.4).

Par la même technique on vérifie que $u'(0) = u_1$ *a lieu.*

2.5 Unicité

Théorème 2.5.1 *Sous les hypothèses (2.3)-(2.6) du Théorème (2.1), la solution obtenue dans le théorème (2.1) est unique.*

Preuve. Soient u, v deux solutions de (2.1) ; alors $w = u - v$ vérifie $w \in L^{\infty}(0,T;V)$, $w\prime \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ et

$$w'' - Lw + |u'|^p u' - |v'|^p v' = 0, \text{ dans } Q = \Omega \times (0,T) \, ;$$

$$w = 0, \text{ sur } \Sigma_1, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta_L} = 0, \text{ sur } \Sigma_2, \tag{2.39}$$

$$w(x,0) = 0, \text{ dans } \Omega, \tag{2.40}$$

$$w'(x,0) = 0, \text{ dans } \Omega. \tag{2.41}$$

On a :

$$(w''(t), w'(t)) - (Lw(t), w(t)) = -\left(|u'|^p u' - |v'|^p v', w'(t)\right),$$

ou sous forme équivalente :

$$(w''(t), w'(t)) + a(w(t), w'(t)) = -\left(|u'|^p u' - |v'|^p v', w'(t)\right), \tag{2.42}$$

d'où il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = -\int_{\Omega}\left(|u'|^{p-2} u' - |v'|^{p-2} v'\right)(u' - v')\, dx, \tag{2.43}$$

on va démontrer que :

$$\left(|u'|^{p-2}u' - |v'|^{p-2}v', u' - v'\right) \geq 0. \tag{2.44}$$

D'aprés les équations (2.42) et (2.43), on remarque que :

$$\left(|u'|^{p-2}u' - |v'|^{p-2}v', u' - v'\right) = \int_\Omega \left(|u'|^{p-2}u' - |v'|^{p-2}v'\right)(u' - v')\,dx.$$

Pour cela, on doit vérifier que :

$$|u'|^{p-2}u'(u' - v') \geq \frac{1}{p}\left(|u'|^p - |v'|^p\right). \tag{2.45}$$

On pose $f(t) = |(1-t)u' + tv'|^p = |u' + t(v' - u')|^p$, $p > 1$, alors la fonction f est dérivable et on a :

$$f'(t) = \frac{p}{2}|u' + t(v' - u')|^{p-2} 2.(u' + t(v' - u'))(v' - u')$$

$$= p|u' + t(v' - u')|^{p-2}(u' + t(v' - u'))(v' - u').$$

Aussi f est convexe, car pour $t \in [0,1]$, on a :

$$f(t) = |(1-t)u' + tv'|^p \leq (1-t)|u'|^p + t|v'|^p = |u'|^p + t\left(|v'|^p - |u'|^p\right). \tag{2.46}$$

D'aprés la formule de Taylor on a :

$$f(t) = f(0) + f'(0)(t - 0) + t\epsilon(t), \text{ où } \epsilon(t) \to 0.$$

Ce qui applique :

$$f(t) = |u'|^p + pt\,|u'|^{p-2}\,u'\,(v' - u') + t\epsilon(t). \tag{2.47}$$

D'après (2.46) et (2.47), on déduit que :

$$|u'|^p + pt\,|u'|^{p-2}\,u'\,(v' - u') + t\epsilon(t) \leq |u'|^p + t\left(|v'|^p - |u'|^p\right),$$

donc :

$$p\,|u'|^{p-2}\,u'\,(v' - u') + \epsilon(t) \leq \left(|v'|^p - |u'|^p\right).$$

En faisant tendre $t \to 0$, il vient :

$$|u'|^{p-2}\,u'\,(v' - u') \leq \frac{1}{p}\left(|v'|^p - |u'|^p\right),$$

d'où (2.45), en permuttant les notation

$$|v'|^{p-2}\,v'\,(v' - u') \geq \frac{1}{p}\left(|v'|^p - |u'|^p\right). \tag{2.48}$$

En utilisant (2.45) et (2.48), on trouve :

$$|u'|^{p-2}\,u'\,(u' - v') + |v'|^{p-2}\,v'\,(v' - u') \geq \frac{1}{p}\left(|u'|^p - |v'|^p\right) + \frac{1}{p}\left(|v'|^p - |u'|^p\right) = 0.$$

C'est à dire

$$\int_\Omega \left(|u'|^p\,u' - |v'|^p\,v'\right)(u' - v')\,dx \geq 0.$$

D'où (2.44)

Alors, de l'équation (2.43), on déduit que :

$$\frac{1}{2}(\frac{d}{dt}\left|w'(t)\right|^2+\frac{d}{dt}\left\|w(t)\right\|^2)=\int_\Omega\left(\left|u'\right|^p u'-\left|v'\right|^p v'\right)\left(v'\left(t\right)-u'\left(t\right)\right)dx\leq 0.$$

Par intégration sur $[0,t]$, on trouve :

$$\frac{1}{2}\left(\left|w'(t)\right|^2+\left\|w(t)\right\|^2\right)-\frac{1}{2}\left(\left|w'(0)\right|^2+\left\|w(0)\right\|^2\right)\leq 0.$$

D'après (2.40) et (2.41), il vient :

$$0\leq\frac{1}{2}\left(\left|w'(t)\right|^2+\left\|w(t)\right\|^2\right)\leq 0,$$

ce qui implique l'unicité. ■

Chapitre 3

La méthode de Faedo-Galerkin pour l'équation de la chaleur

L'équation de diffusion de dimension 1 est une équation différentielle partielle linéaire du second ordre on est $u_t - Du_{xx} = f$ où $u = u(x,t)$, x est une variable réelle, t une variable de temps et D une constante positive, appellée coefficient de diffusion thermique. Dans la dimension de l'espace $n > 1$, et lorsque $x \in \mathbb{R}^n$, l'équation de diffusion s'écrit comme suit

$$u_t - D\triangle u = f \tag{3.1}$$

Lorsque $f = 0$ l'équation est dite homogène. Un exemple courant de diffusion est donnée par conduction thermique dans un corps solide. Dans ce chapitre, nous considérons l'équation de la chaleur et la condition de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = f(x,t) & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ u(x,0) = g(x) & \text{dans } \Omega \\ u(\sigma,x) = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \times]0,T[\end{cases} \tag{3.2}$$

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $[0,T]$ est un intervalle de temps fini, $f(x,t)$ fonctions réelles. Nous voulons trouver une formulation faible. Procédons formellement. Comme nous avons fait plusieurs fois, nous multiplions l'équation de diffusion par une fonction lisse $v = v(x)$, où voissinage de borde Ω, et on intégrent sur Ω. Nous trouvons

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, v(x)\, dx - \int_\Omega \triangle u(x,t)\, v(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, v(x) dx$$

En intégrant par partie, selon la formule de Green, le deuxième terme de gauche, on obtient :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, v(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\, \nabla v(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_x = \int_\Omega f(x,t)\, v(x)\, dx$$

Sachant que $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, v(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\, \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, v(x)\, dx \tag{3.3}$$

On définira donc une solution de l'équation (3.1) comme une fonction vérifiant l'égalité (3.3) pour toutes les fonctions v d'une certaine classe. La question importante est donc de choisir les bons espaces danslesquels doivent vivre les fonctions $u(x,t)$, $\partial_t u(x,t)$ et v pour que l'égalité (3.3) ait un sens. L'esquisse de définition

(3.3) fait intervenir des intégrales sur Ω du produit de deux fonctions. Un cas où ces intégrales sont bien d´efinies est le cas où l'une des fonctions est dans l'espace $L^p(\Omega)$ et l'autre est dans l'espace $L^q(\Omega)$, où p et q satisfant la relation $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

3.1 Préliminaires

On montre facilement pour tout $t \in [0,T]$ .Il serait convenable de prendre $u = u(x,t)$ comme une fonction en t à valeur dans un espace de Hilbert V :

$$u : [0,T] \longrightarrow V.$$

Posons $u' = u_t$, le problème (3.2) devient alors :

$$\int_\Omega u'v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(t)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(t)\, v(x)dx \tag{3.4}$$

Les conditions de Dirichlet homogènes ($u(t) = 0$ sur $\partial\Omega$), nous impose à prendre $V = H_0^1(\Omega)$, comme espace de $u(t)$.On muni l'espace Hilbert $V = H_0^1$ du produit scalaire usuel de $H_0^1(\Omega)$ notée

$$(w,v)_1 = (\nabla w, \nabla v)_0$$

La norme associeé

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

Ainsi, la seconde intégrale de (3.3) peut être écrite comme étant

$$\int_\Omega \nabla u(t)\, \nabla v dx = \langle \nabla u(t), \nabla v\rangle_0$$

En regardant la première intégrale, on serait que $u' \in L^2(\Omega)$. ce qui ne pas judicieux compte tenu du choix de $u(t)$ dans$V = H_0^1(\Omega)$.

De plus, on a $\triangle u(t) \in H^{-1}(\Omega)$ et l'équation de diffusion qui devient :

$$u'(t) = \triangle u(t) + f(t) \tag{3.5}$$

On peut donc en déduire que, $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace le micus appropié pour u'. Par coséquent, on peut interpreter la première intégrale de (3.4) comme

$$(u'(t), \nabla v)_*$$

où $\langle ., . \rangle_*$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. L'hypothèse raisonnable sur f est $f \in L^2(\Sigma)$, qui dans les nouvelles notations devient. Également $f \in L^2(0, T; V^*)$ est bien ; $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ De manière cohérente, d'aprés (3.5) on peut en déduire que $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. On peut conclure que $u \in C(0, T; H_0^1(\Omega))$.

On a, $u(0) = g$ aurait un meilleur sens dans $L^2(\Omega)$.

Les argument ci-dessus motivent la définition suivante. Considérons le triplet de Hilbert (V, H, V^*), où $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2$ et $V^* = H^{-1}(\Omega)$.

Lemme 3.1.1 *[13]Soit V l'espace de hilbert défini ci-dessous. L'inégalité de poincaré dans V est pour tout $v \in V$, il existe une constante positive C telle que*

$$V : \|v\|_0 \leq c \|v\|_1$$

De tout ce qui precède et en posant :

$$a(w,v) = (\nabla w, \nabla v)_0$$

Définition 3.1.1 *Une fonction $u \in L^2(0,T;V)$ est appellée solution faible du problème (3.2) si $u' \in L^2(0,T;V^*)$ et :*

1. pour tout $v \in V$,

$$\langle u'(t), v\rangle_* + a(u(t),v) = (f(t),v)_0 \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{3.6}$$

2. $u(0) = g$.

Lemme 3.1.2 *[13]Pour tout $v \in V$, la fonction réelle*

$$w(t) = \langle u'(t), v\rangle_*$$

est une distribution dans $D'(0,T)$ et

$$\langle u'(t), v\rangle_* = \frac{d}{dt}(u(t),v)_0 \qquad \in D'(0,T). \tag{3.7}$$

Preuve. [13]pour tout $\varphi \in D(0,T)$, on a

$$\int_0^T \langle u'(t), v\rangle_* \varphi(t)\,dt = -\int_0^T (u(t),v)_0\, \varphi'(t)\,dt$$

On sait que $u(t) \in V$, par le théorème de Bochner

$$\left(u, \int_0^T f(t)dt\right)_V = \int_0^T (u, f(t))_V\,dt, \quad \forall u \in V$$

et la définition de u, on peut écrire

$$\int_0^T \langle u'(t), v\rangle_* \varphi(t)\,dt = \left\langle \int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt, v\right\rangle_* = \left\langle -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt, v\right\rangle_*$$

En outre, on a $-\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt \in V$. On aura

$$\left\langle -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, v\right\rangle_* = \left(-\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, v\right)_0 = -\int_0^T (u(t), v)_0\varphi'(t)dt$$

Ainsi, $w \in L^1_{loc}(0,T) \subset D'(0,T)$. Le résultat suivant est une conséquence directe, et pour tout $v \in V$, l'equation (3.6) peut être au sens des distributions $D'(0,T)$ écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_0 + a(u(t), v) = (f, v)_0. \tag{3.8}$$

■

Théorème 3.1.1 *[2]Soit $\{x_k\} \subset H$ tel que $x_k \to x$,alors :*

1. *$\{x_k\}$ est borné,*
2. $\|x\| \leq \lim_{k\to\infty} \inf \|x_k\|$.

Théorème 3.1.2 *[13]Soit $u \in L^2(0,T;V)$, avec $u' \in L^2(0,T;V^*)$, alors :*

a) *$u \in C([0,T];H)$ et*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_H \leq \left\{\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;V^*)}\right\}.$$

b) *Si aussi $v \in L^2(0,T;V)$ et $v' \in L^2(0,T;V^*)$, la formule d'intégration par* *parties suivante est vérifiée*

$$\int_s^t \left\{ \langle u'(r), v(r) \rangle_* + \langle u(r), v'(r) \rangle_* \right\} dr = (u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H$$

pour tout $s, t \in [0, T]$.

Proposition 3.1.1 *Soit* $\{u_k\} \subset L^2(0, T; V)$, *est faiblement convergente vers* u. *Suppose que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_k(t)\|_V \leq C$$

avec C *indépendant de* k. *Alors aussi,*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V \leq C.$$

3.2 Principe de la méthode

Etape 1 : Solution approchées.

Dans cette partie, ou choisit une famille de fonctions $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ constituant

$$\text{une base orthogonale dans } V = H_0^1(\Omega).$$

et

$$\text{une base orthogonale dans } H = L^2(\Omega).$$

En particulier, on pourra écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k w_k \text{ où } g_k = (g, w_k)_0,$$

et les séries sont convergentes dans H.

Puis, on construit une suite de sous-espaces de dimension finie,

$$V_n = vect\{w_1, w_2, ..., w_n\}$$

avec evidement

$$V_n \subset V_{n+1}$$

et

$$\overline{\cup V}_n = V$$

pour n fixé, on pose

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) w_k, \quad G_n = \sum_{k=1}^{n} g_k w_k. \tag{3.9}$$

et on résoud le problème approximatif suivant :

Déterminer $u_n \in H_0^1(0, T; V)$ tel que pour $s = 1, ..., n$ on a

$$\begin{cases} (u'(t), w_s)_0 + a(u_n(t), w_s)_0 = (f(t), w_s)_0, \text{ pour tout } t \in [0, T] \\ u_n(0) = G_n \end{cases} \tag{3.10}$$

Pour tout $v \in V_n$ puisque $u_n' \in L^2(0, T, V)$, on a

$$(u_n'(t), v)_0 = \langle u_n'(t), v \rangle_*$$

u_n est appelé approximation de Galerkin de la solution u.

Lemme 3.2.1 *Pour tout n, il existe une unique de problème (3.10). En particulier, puisque $u_n \in H^1(0, T; V_n)$, on a $u_n \in C([0, T]; V_n)$.*

Preuve. Comme $w_1, ..., w_n$ sont mutuellement orthonormés dans $L^2(w)$, on a

$$(u'_n(t), w_s)_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} c'_k(t) w_k, w_s\right)_0 = c'_s(t).$$

Aussi $w_1, ..., w_n$ est un système orthogonal dans V_n, donc

$$a\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(t) w_k, w_s\right) = (\nabla w_s, \nabla w_s)_0 c_s(t) = \|\nabla w_s\|_0^2 c_s(t).$$

Soit

$$F_s(t) = (f(t), w_s), \quad F_n(t) = (F_1(t), ..., F_n(t)).$$

Soit

$$C_n(t) = (C_1(t), ..., C_n(t)), \quad g_n = (g_1, ..., g_n).$$

Si on introduit la matrice diagonale

$$W = daig\left\{\|\nabla w_1\|_0^2, \|\nabla w_2\|_0^2, ..., \|\nabla w_n\|_0^2\right\}.$$

D'ordre n,le probléme (3.10) est équivalent au système suivant de n linéaires découplés équation différentielles ordinaires, à coefficients constant :

$$C'_n(t) = -WC_n(t) + F_n(t) \text{ pour tout } t \in [0, T] \tag{3.11}$$

avec condition initiale

$$C_n(0) = g_n$$

Puisque $F \in L^2(0, T, \mathbb{R}^n)$, il existe une solution unique $C \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$. Depuis

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) w_k$$

on en déduit que $u_n \in H^1(0,T;V_n)$. ■

Remarque 3.2.1 *Nous avons choisi une base $\{w_k\}$ orthonormée en L^2 et orthogonale en H_0^1 car par rapport à cette base, l'opérateur de Laplace devient un opérateur diagonal, comme elle se traduit par le problème approché (3.11). Cependant, la méthode fonctionne avec n'importe quel base comptable pour les deux aspaces. Le problème (3.10) devient*

$$C_n'(t) = -M^{-1}WC_n(t) + M^{-1}F_n(t) \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Où, puisque $w_1,...,w_n$ est une base de V_m, la matrice M est positive, donc non singulière.

$$M = (M_{sk}), M_{sk} = (w_s, w_k)_0, \quad W = (W_{sk}), W_{sk} = (\nabla w_s, \nabla w_k)_0.$$

Ceci est particulièrement important dans la mise en oeuvre numérique de la méthode, ou', dans en générale, les éléments de la base dans V_n ne sont pas orthogonaux entre eux.

Etape 2 : Estimation a priori pour u_n.

Notre but est de montrer que l'on peut extraire de la suite d'approximations de Galerkin $\{u_n\}$ une sous-suite convergeant dans un certain sens vers une solution du problème (3.2). C'est un problème de compacité typique dans les espaces de Hilbert. L'outil clé de la théorème 3.1.1 :

$$\|x\| \leq \lim_{k\to\infty} \inf \|x_k\|. \tag{3.12}$$

Ainsi, ce dont nous avons besoin est de montrer que les normes de Sobolev appropiées de u_m peuvent être estimées par normes appropriées des données, et les estimations sont indépendantes de n. De plus, ces estimations doivent être assez puissants pour passer à la limite comme $n \to \infty$ dans l'approximation équation

$$(u_n', v)_0 + (\nabla u_n, \nabla v)_0 = (f, v)_0 .$$

Dans notre cas nous pourrons controler les normes de u_n dans $L^\infty(0, T; H)$ et $L^2(0, T; V)$, et la norme de u_n' dans $L^2(0, T, V^*.)$, soit les normes

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_0 , \quad \int_\Omega \|u_n(t)\|_1^2 \, dt \text{ et } \int_\Omega \|u_n'(t)\|_*^2 \, dt.$$

Ainsi, soit $u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) w_k$ la solution du problème (3.10).

Théorème 3.2.1 *[2](Estimation de u_n). Pour tout $t \in [0, T]$, est estimé par*

$$\|u_n(t)\|_0^2 + \int_0^1 \|u_n(s)\|_1^2 \, ds \leq \|g\|_0^2 + c^2 \int_0^1 \|f(s)\|_0^2 \, ds. \tag{3.13}$$

Preuve. En multipliant l'équation (3.10) par $c_k(t)$ et en sommant pour $k = 1, ..., n$, on obtient

$$(u_n'(t), u_n(t))_0 + a(u_n(t), u_n(t)) = (f(t), u_n(t))_0 . \tag{3.14}$$

Soit pour tout $t \in [0, T]$. Maintenant, notez que

$$(u_n'(t), u_n(t))_0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_0^2 , \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

et

$$a(u_n(t), u_n(t)) = \|\nabla u_n(t)\|_0^2 = \|u_n(t)\|_0^1 .$$

Des inégalités de Schwarz et Poincaré et de l'inégalité élémentaire

$$\begin{aligned}(f(t), u_n(t))_0 &\leq \|f(t)\|_0 \|u_n(t)\|_0 \\ &\leq C \|f(t)\|_0 \|u_n(t)\|_1 \\ &\leq \frac{c^2}{2} \|f(t)\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u_n(t)\|_1^2 .\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de (3.12) on obtient

$$\frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_0^2 + \|u_n(t)\|_1^2 \leq c^2 \|f(t)\|_0^2 .$$

On intègre maintenant sur $[0, T]$, puisque $u_n(0) = G_n$ et en observant que $\|G_n\|_0^2 \leq \|g\|_0^2$

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \|u_n(s)\|_0^2 ds + \int_0^t \|u_n(s)\|_1^2 ds \leq c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds.$$

$$\|u_n(t)\|_0^2 - \|u_n(0)\|^2 + \int_0^t \|u_n(s)\|_1^2 ds \leq c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds.$$

Par l'orthogonalité de $w_1, ..., w_n$ dans $L^2(\Omega)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\|_0^2 + \int_0^t \|u_n(s)\|_1^2 ds &\leq \|G_n\|_1^2 + c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds \\ &\leq \|g\|_0^2 + c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds\end{aligned} \tag{3.15}$$

qui est (3.13).

Maintenant donnons une estimation de la norme de u' dans $L^2(0, T; V^*)$. ■

Théorème 3.2.2 *[2](Estimation de u_n'). est définie par*

$$\int_0^T \|u_n'(t)\|_0^2 dt \leq 2 \|g\|_0^2 + 4c^2 \int_0^T \|f(t)\|_0^2 dt. \tag{3.16}$$

Preuve. Soit $v \in V$ et écrivons $v = w + z$ ou' $w \in V_n$ et $z \in V_n$ et $z \in V_n^{\perp}$.On a $\|w_1\| \leq \|v_1\|$ Soit $v = w$ dans le probléme (3.10) ; cela donne

$$(u_n'(t), v)_0 = (u_n', w)_0 = -a(u_n(t), w) + (f(t), w)_0 .$$

Depuis

$$|a(u_n(t), w)| \leq \|u_n(t)\|_1 \|w\|_1$$

on en déduit, en utilisant l'inégalités de Chauchy-Schwarz et Poincaré,

$$\begin{aligned} |(u_n'(t), w)_0| &\leq \|u_n(t)\|_1 \|w\|_1 + \|f(t)\|_0 \|w\|_1 \\ &\leq \{\|u_n(t)\|_1 + c\|f(t)\|_0\} \|w\|_1 \\ &\leq \{\|u_n(t)\|_1 + c\|f(t)\|_0\} \|v\|_1 \end{aligned}$$

Alors, par la définition de la norme dans V^*, on peut écrire

$$\|u_n'(t)\|_* \leq \|u_n(t)\|_1 + c\|f(t)\|_0$$

En mettant au carré les deux cotes et en intégrant sur $[0, T]$ on obtient

$$\int_0^t \|u_n'(s)\|_* ds \leq 2\int_0^t \|u_n(s)\|_1 ds + 2c^2 \int_0^t \|f(s)\|_0 ds$$

Utilisation de (3.13) pour estimer $2\int_0^t \|u_n(s)\|_1 ds$, on obtient facilement (3.14).

■

Etape 3 : Passage aux limites

On appelle une approximation de Galerkin de la solution u. On montre que $\{u_n\}$ et $\{u_n'\}$ sont bornées en $L^2(0, T; V)$ et $L^2(0, T; V^*)$, respectivement.

Alors, le théorème de compacité faible 3.1.1 implique qu'une sous-suite $\{u_{mk}\}$ converge faiblement dans $L^2(0,T;V)$ vers un élément u, tandis que $\{u'_{mk}\}$ converge faiblement dans $L^2(0,T;V^*)$ à u'.

Théorème 3.2.1 et 3.2.2 montrent que la suite des approximation de Galerkin $\{u_n\}$ est borné dans $L^\infty(0,T;V)$, donc dans $L^2(0,T;V)$, tandis que $\{u'_n\}$ est borné dans $L^2(0,T;V^*)$.

On utilise maintenant le théorème de compacité 3.1.1 et on en déduit qu'il existe une sous-suite que pour simplifier nous notons encore $\{u_n\}$ tel que comme $n \to \infty$

$$u_n \to u \quad \text{converge dans } L^2(0,T;V)$$

et

$$u'_n \to u' \quad \text{converge dans } L^2(0,T;V^*)$$

Ce u est l'unique solution du problème (3.2). Précisément :

3.3 Existence

Théorème 3.3.1 *[2]Soit $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $g \in L^2(\Omega)$. Alors, u est solution unique du problème (3.2).*

En outre

$$\|u_n(t)\|_0^2 + \int_0^T \|u_n(t)\|_1^2 \, dt \leq \|g\|_0^2 + 2c^2 \int_0^T \|f(t)\|_0^2 \, dt. \tag{3.17}$$

Pour tout $t \in [0,T]$, et

$$\int_0^T \|u'_n(t)\|_1^2 \, dt \leq 2\|g\|_0^2 + 4c^2 \int_0^T \|f(t)\|_0^2 \, dt \tag{3.18}$$

Preuve. Dire que $u_n \to u$, faiblement dans $L^2(0,T;V)$ comme $n \to +\infty$, signifie que

$$\int_0^T (\nabla u_n(t), \nabla v(t))_0 \, dt \to \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v(t))_0 \, dt$$

pour tout $v \in L^2(0,T;V)$. De meme, $u'_n \to u'$, faiblement dans $L^2(0,T;V^*)$, signifie que

$$\int_0^T (u'_n(t), v(t))_0 \, dt = \int_0^T \langle u'_n(t), v(t) \rangle_* \, dt \to \int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle_* \, dt$$

pour tout $v \in L^2(0,T;V)$. Nous voulons utiliser ces propriétés pour passer à la limite comme $n \to +\infty$ en problème (3.10), en gardant à l'esprit que les fonctions de test doivent etre choisies V_n. Réparer $v \in L^2(0,T;V)$; nous pouvons écrire

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) w_k \text{ avec la série convergente en } V, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Soit

$$v_N(t) = \sum_{k=1}^{N} b_k(t) w_k,$$

et garder N fixe, pour le moment. Si $n \geq N$, alors $v_N \in L^2(0,T;V_n)$. En multipliant l'équation (3.10) par $b_k(t)$ et en faisant la somme pour $k = 1, ..., N$, on a

$$(u'_n(t), v_N(t))_0 + (\nabla u_n(t), \nabla v_N(t))_0 = (f(t), v_N(t))_0 .$$

Une intégration sur $(0,T)$ donne

$$\int_0^T \{(u'_n, v_N)_0 + (\nabla u_n, \nabla v_N)_0\} \, dt = \int_0^T (f, v_N)_0 \, dt, \tag{3.19}$$

grace la convergence faiblement de u_n et u'_n dans leurs espaces respectifs, on peut laisser à

$$\int_0^T (u_n', v_N)_0 \, dt = \int_0^T \langle u_n', v_N \rangle_* \, dt \to \int_0^T \langle u', v_N \rangle_* \, dt$$

on obtient

$$\int_0^T \{\langle u', v_N \rangle_* + (\nabla u, \nabla v_N)_0\} \, dt = \int_0^T (f, v_N)_0 \, dt$$

Maintenant, laissez $N \to +\infty$ observant que $v_N \to v$ dans $L^2(0, T; V)$ et en particulier faiblement dans ce espace aussi. On obtient

$$\int_0^T \{\langle u', v \rangle_* + (\nabla u, \nabla v_N)\} \, dt = \int_0^T (f, v)_0 \, dt. \tag{3.20}$$

Alors, (3.20) est valable pour tout $v \in L^2(0, T; V)$. Cela implique

$$\langle u'(t), v \rangle_* + (\nabla u(t), \nabla v)_0 = (f(t), v)_0$$

soit $v \in V$ et pour tout $t \in [0, T]$. donc u satisfies (3.6). D'aprés le théorème 3.1.2, ainsi que $u \in C([0, T]; H)$, il reste à vérifie que $u(t)$ satisfie la condition initiale $u(0) = g$. Soit $v \in C^1([0, T]; V)$ avec $v(T) = 0$. intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^T (u_n', v_N)_0 \, dt = (G_n, v_N(0))_0 - \int_0^T (u_n, v_N')_0 \, dt,$$

pour que, d'aprés (3.19) on trouve

$$-\int_0^T \{(u_n, v_N')_0 + (\nabla u_n, \nabla v_N)_0\}_0 \, dt = -(G_n, v_N(0))_0 + \int_0^T (f, v_N)_0 \, dt.$$

Soit d'abord $n \to +\infty$ puis $N \to +\infty$ on obtient

$$-\int_0^T \{(u, v')_0 + (\nabla u, \nabla v)_0\}_0 \, dt = -(g, v(0))_0 + \int_0^T (f, v)_0 \, dt. \tag{3.21}$$

D'autre part, en intégrant par parties dans la formule (3.18) on trouve

$$-\int_0^T \{(u,v')_0 + (\nabla u, \nabla v)_0\}_0 \, dt = -(u(0), v(0))_0 + \int_0^T (f,v)_0 \, dt. \tag{3.22}$$

En sous-trayant (3.21) de (3.22) on obtient

$$(u(0), v(0))_0 = (g, v(0))_0$$

et l'arbitraire de $v(0)$ force $u(0) = g$. ■

3.4 Unicité

Soit u_1 et u_2 être des solutions faibles d'un même problème. Alors $w = u_1 - u_2$ est un solution faible de l'équation suivant

$$\langle w'(t), v\rangle_* + (\nabla w(t), \nabla v)_0 = 0$$

pour tout $v \in V$ et pour tout $t \in [0,T]$, avec la condition initiale $w(0) = 0$ en choisissant $v = w(t)$ nous avons

$$\langle w'(t), w(t)\rangle_* + (\nabla w(t), \nabla w(t))_0 = 0$$

où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_0^2 = -\|w(t)\|_1^2$$

d'où, puisque $\|w(0)\|_0^2 = 0$ alors

$$\|w(t)\|_0^2 = -\int_0^T \|w(t)\|_1^2 \, dt \leq 0$$

ce qui implique $w(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Cela donne l'unicité de la solution faible.

Bibliographie

[1] Abdesselam, N. (2018). Stabilisation uniforme de quelques problèmes aux limites (Doctoral dissertation, UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA).

[2] Ahmed, H.,& Saïd, S.M. (2017). **Faedo-Galerkin** methode for heat equation. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 13(4). 1195-1207.

[3] AIDI, M. (2014). Etude de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé. Mémoire de Magister. Université Kasdi Merbah-Ouargla.

[4] BOUAKAZ, H., & ABED, C. (2020). Stabilisation de l'équation des ondes semi linéaire avec termes sources et dissipatifs (Doctoral dissertation, Université Mohamed el-Bachir el-Ibrahimi Bordj Bou Arréridj Faculté de Mathématique et Informatique).

[5] Boukhatem, Y. A. M. N. A., & Benabderrahmanne, B. (2009). Méthode de **Faedo-Galerkin** pour un probleme aux limites non linéaires. Anal. Univ. Oradea, fasc. Matematic, 16, 167.

[6] Brézis, H. (1983). Analyse éonctionnelle. théorie et application . Paris, Masson.

[7] Brezis, H., Ciarlet, P. G., & Lions, J. L. (1999). Analyse fonctionnelle : théorie et applications, vol. 91. Dunod Paris.

[8] CHICOUCHE HAMINA, S. A. M. I. R. A. (2020). Problème hyperbolique semi linéaire pour les équations de lamé (Doctoral dissertation, Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département des Mathématiques-Option : EDP et applications).

[9] CHOUCHA, M. (2021). Problème aux limites hyperbolique semi-linéaire pour les équations fortement elliptiques à coefficients variables avec terme source et terme d'amortissemet (Thèse de doctorat, Université de M'sila).

[10] Cohen, G. (2000). Convexité et optimisation.

[11] Li, D. (2013). Cours d'analyse fonctionnelle : avec 200 exercices corrigés. Ellipses.

[12] Lions, J. L. (1968). Problemes aux limites non homogenes et applications.

[13] N'DRI Kouako, C. (2017). La méthode de **Faedo-Galerkin** et application. Mémoire de Master. L'université Nangui Abrogoua.

[14] Yosida, K. (1968). Functional Analysis. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à savoir comment étudier l'existence d'une solution faible d'équation différentielle aux dérivées partielles, nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin, tel que nous présentons la technique de cette méthode et nous donnons l'équation de lame avec conditions sur les données comme un exemple dans le deuxième chapitre.

À la fin de travail nous appliquons la méthode Faedo-Galerkin sur l'équation de la chaleur non homogène avec une condition de Dirichlet.

Mots-clés : Méthode Faedo-Galerkin, Existence, L'équation de la chaleur, Condition de Dirichlet.

Abstract

In this work, we are interested to know how to study the existence of a weak solution to EDP by using the Faed-Galerkin method, where we presented the technique of this method and gave Lamy equation with condition on the data as an example in the second chapter.

In the end of this work, we applied the method to the non-homogeous heat equation with of the Dirichlet condition.

Keywords : Faedo-Galerkin methode, Existence, Heat equation, Dirichlet condition.

ملخص

في هذا العمل نهتم بمعرفة كيف ندرس و جود حل ضعيف لمعادلة تفاضلية ذات مشتقات جزئية, باستخدام طريقة فاودو قلا ركين ,حيث قدمنا تقنية هذه الطريقة و أعطينا معادلة لامي بشروط على المعطيات كمثال في الفصل الثاني.

في نهاية العمل نطبق الطريقة على معادلة الحرارة غير المتجانسة مع وجود شرط Dirichlet.

الكلمة المفتاحية: طريقة فاودو قلا ركين, الوجود, معادلة الحرارة, شرط Dirichlet.