République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option :Statistique

Par Mr. LABED Nadhir

Titre :

Sur les trimmed L-moments

Devant le Jury :

Mr.	BRAHIMI Brahim	Pr.	U. Biskra	Président
Mme.	CHINE Amel	M.C.B	U. Biskra	Encadreur
Mlle.	ROUBI Affef	M.A.A	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 26/06/2022

Dédicace

À celle qui m'a transmis la vie, l'amour, le courage, à toi chère
Maman "LABED farida " toutes mes joies, mon amour et ma reconnaissance.
À mon Père " mohamed" pour l'éducation qu'il m'a prodigué avec tous les moyens et au prix de toutes les sacri…ces qu'il a consentis à mon égard et à mes études depuis mon enfance

A mes chers frères, "kays,faras,khalil,baycho,mino,jalal,jalil,hocine".
A ma chère soeur,"wiam"

À tous ma famille

À mes amies.

Remerciements

Je remercié le Dieu pour le courage, la patience et la volonté qui nous ont été utiles tout au long de notre parcours.

Je tiens à remercier l'encadreur "Amel chine" pour la proposition du thème, l'encadrement de ce travail, pour ses précieux conseils et orientations.

Je remercié également les membres du jury Monsieur "Brahimi Brahim" et Madame " Roubi Affef" pour leur approbation de l'examen et de l'évaluation notre travail.

Mes sincères remerciements à tous ceux qui nous ont apporté un soutien de proche ou de loin.

Notations et symbols

$E[X]$	:	espérance mathématique ou moyenne du v.a. X
exp	:	exponentiel
F	:	fonction de répartition
F_n	:	fonction de répartition empirique
$v.a$	:	variable aléatoire
$i : i : d$	:	independantes identiquement distribuées.
$X_{r:n}$	:	r^{ème} statistique d'ordre
λ_r	:	r^{ème}L-moments
ι_r	:	L-moments empirique
$\iota_r^{(t_1,t_2)}$	:	TL-momentsempirique
$\tau_r, \tau_r^{(t_1,t_2)}$	:	Rapports de L-moments et TL-moments
Q	:	la fonction quantile
$TL - moments$	:	trimmed L-moments
f	:	fonction de densité

Table des matières

Liste des tableaux

Introduction

Les méthodes d'estimation standard telle que les moindres carrés, la méthode des moments et le maximum de vraisemblance peuvent être influencées par des valeurs aberrantes. Par exemple, chacune de ces trois méthodes estime la moyenne d'une population normale par la moyenne de l'échantillon X, qui est le seul estimateur sans biais de la variance minimale, mais qui n'est pas robuste aux valeurs aberrantes ou aux écarts par rapport à la normalité. Si l'on craint que les observations extrêmes aient trop d'influence, une méthode d'estimation robuste, créé pour réduire l'influence, peut être utilisée.

Les L-moments ont été largement utilisés dans les statistiques d'inférence au cours des 20 dernières années. Ils ont été inventés par Hosking en (1990) et sont utilisés pour décrire les données de position, d'échelle, d'asymétrie et d'aplatissement. Ils présentent un certain nombre d'avantages théoriques par rapport aux autres types de moments.

EL Amir et Seheult en (2003) ont introduit des variations de L-moment dérivées d'ajustements d'échantillons en supprimant les valeurs extrêmes. Les TL-moments sont des mesures analogues aux L-moments, et leurs présentations aussi basées sur la statistique d'ordre. Ils sont utilisés pour décrire la forme de la distribution et utilisé comme une méthode d'estimation.

– **Chapitre 1 :** Dans le premier chapitre, il est divisé en deux parties. Dans la première partie, nous avons parlé en détail de statistiques des d'ordre, sa définition et ses propriétés. Dans la deuxième partie, nous avons détaillé les définitions des l-moments, ses propriétés, ses capacités, et l'utilisation de ses capacités, en plus de l-skewness et l-kurtosis.

- **Chapitre 2 :** Dans ce chapitre de ce mémoire, on a détaillerer les définitions des TL-moments, leurs propriétés, leurs estimateur l'utilisation de leurs estimateur, ainsi que le calcul de TL-skewness, TL-kurtosis, On termine ce chapitre par l'estimation des paramètres de deux lois : la loi de Cauchy et de pareto ou on a donné premièrement les caractéristiques de ces deux lois puis on a appliqué la méthode d'estimation de L-moment et TL-moments.

Chapitre 1

L-moments

Dans la théorie des L-moments, la statistique d'ordre est essentielle. Différentes recherches sur les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (Sillitto (1969) ; Davide (1968)) ont progressivement introduit le concept de L-moments. L'approche L-moments offre divers avantages grâce à Hosking (1990); David (2003).

On commence ce chapitre par donner des définitions de la statistique d'ordre, ses lois, la défnition de L-moments, ses propriétés de base, un exemple et l'estimateurs desL-moments.

1.1 Statistique d'ordre

Soit $(X_i)_{i \in N}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées définie sur l'espace $(\Omega; \beta)$, d'une densité commune f et d'une fonction de répartition

$$F(x) = p(X_N \leq x), x \in R.$$

Soit S_N l'ensemble des permutation de$\{1.....n\}$.

Définition 1.1.1 *La statistique d'ordre de l'echantillon* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *est le réarrangemnt croissant de* $(X_1, X_2...., X_n)$ *on la note* $(X_{1,n}, ...X_{n,n})$ *on a :*

$$X_{1,n} \leq ..... \leq X_{n,n}.$$

et il existe une permutatoin aléatoire $\sigma_n \in S_N$ *telle que*

$$(X_{1,n}, ...X_{n,n}) = \left(X_{\sigma_{n(1)}}, ...X_{\sigma_{n(n)}}\right).$$

pour $1 \leq i \leq n$, la v.a $X_{i,n}$ est appelée la $i^{-iéme}$statistique d'ordre (ou statistique d'ordre i). En effet, les v.a.r. minimum et maximum du n-échantillon iid correspondent mieux à l'idée que l'on se fait d'une valeur extréme :

$$X_{1,n} = m_n = \min\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) = \min_{1 \leq i \leq n} X_n.$$

$$X_{n,n} = M_n = \max\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) = \max_{i \leq i \leq n} X_n.$$

En fait, on peut se limiter a l'étude du maximum car

$$m_n = -\max\left(-X_1, -X_2, ..., -X_n\right).$$

Il existe différents types de statistiques de rangs, qui nous aident à étudier des variables aléatoires ordonnées. Les variables aléatoires $R(1), R(2)..., R(n)$ donné par les égalités :

$$R(m) = \sum_{k=1}^{n} 1_{(x_m \geq x_k)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} 1_{\left(x_{m > x_k}\right)}.$$

où $m = 1, 2...., n$.sont dits les rangs correspondant à l'échantillon $X_1, X_2, ..., X_N$.

1.1.1 Les anti-ranges

Soient $X_1, X_2, ..., X_N$ un échantillon aléatoire de taille n issu d'une distribution continue et soient $X_{1,n}, .., X_{n,n}$, les n statistiques d'ordre correspondant. La v.a $\Delta(1), \Delta(2), ..., \Delta(n)$,qui satisfont les égalités suivantes :

$$\{\Delta(k) = m\} = \{X_{k,n} = X_m\}.$$

$$m = 1, 2, ..., n \quad k = 1, 2, ..., n.$$

sont dits anti-rangs.

1.1.2 Distributions des statistiques d'ordre

Notons par $F_{i,n}(x)$ la distribution de $X_{i,n}$. l'éxpression de la distribution de $X_{i,n}$ est donnée par :

$$F_{X_{i,n}}(x) = F_{i,n}(x) = P(X_{i,n} \leq x) = \sum_{r=i}^{n} C_n^r [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r}.$$

avec $x \epsilon R$.En utilisant la relation :

$$\sum_{r=i}^{n} C_N^r P^r (1-p)^{n-r} = \int_0^p \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} [1-t]^{n-i} dt.$$

La v.a $Y_i = F(X_{i,n})$ suit une loi bêta de paramétre $(i, n-i+1)$

$$F_{i,n}(x) = P\{X_{i,n} \leq x\} = I_{f(x)}(i, n-i+1).$$

où

$$I_x(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, B(a,b) = \frac{\tau(a)\tau(b)}{\tau(a+b)}, \tau(k) = (k-1)!,$$

désigne la fonction bêta incompléte

$$\begin{aligned} F_{i,n}(x) &= \sum_{r=i}^{n} C_n^r \left[F(x)\right]^r \left[1-F(x)\right]^{n-r} = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} \left[1-t\right]^{n-i} dt \\ &= \int_0^{F(x)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)} t^{i-1} \left[1-t\right]^{n-i} dt = \frac{1}{B(i,n-i+1)} \int_0^{F(x)} t^{i-1} \left[1-t\right]^{n-i} dt \\ &= I_{F(x)}(i, n-i+1). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1

– Nous en déduisons que la fonction de densité :

$$f_{X_{i,n}}(x) = f_{i,n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \left[F(x)\right]^{i-1} \left[1-F(x)\right]^{n-i} f(x).$$

La densité jointe de statistique d'ordre (X$_{1,n}$, , , , $X_{n,n}$)est donne par :

$$f_{(x_{1,n},......x_{n;,n})}\left(x_1, x_2....x_n\right) = n!\pi_{i=1}^{n} f(x_i).$$

avec $x_1 \leq x_2 \leq .... \leq x_n$.

– On peut donc conclure pour la statistique du minimum que la distribution et la densité sont respectivement :

$$F_{1,n}(x) = F_{x_{1,n}}\left(x\right) = 1 - \left[1-F(x)\right]^n.$$

$$f_{1,n}(x) = f_{x_{1,n}}(x) = n\left[1-F\left(x\right)\right]^{n-1} f(x).$$

De même pour la statistique du maximum, on a :

$$F_{n,n}(x) = F_{x_{n,n}}(x) = [F(x)]^n .$$

$$f_{n,n}(x) = f_{x_{n,n}}(x) = n! \, [F(x)]^{n-1} f(x).$$

1.1.3 Densité conjointe de deux statistiques d'ordre

La fonction de distribution conjointe de $(X_{i;n}X_{j;n})$ avec $1 \leq i \leq j \leq n$ et $-\infty < x < y < +\infty$ est donnée par :

$$F_{i,j,n}(x,y) = \sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(x)]^{r-1} f(x) \\ \times [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) [1 - F(y)]^{n-s} .$$

pour $x \geq y$ la fonction de répartition est :

$$F_{i,j,n}(x,y) = F_{(x_{i,n} \leq x_{j,n})}(x,y) = F_{x_{j,n}}(y).$$

la densité conjointe de $(X_{i,n} \leq X_{j,n})$ est donné par :

$$f_{i,j,n}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x)]^{i-1} f(x) [F(y) - F(x)]^{j-i-1} f(y) [1 - F(y)]^{n-j} .$$

la fonction de densité conjointe de $X_{1;n}$ et $X_{n;n}$:

$$f_{1,n}(x,y) = n(n-1)(F(y) - f(x))^{n-2} f(x) f(y), -\infty < x < y < +\infty.$$

1.1.4 Distribution empirique

La fonction de répartition empirique de l'échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est évaluée à l'aide des statistiques d'ordre comme suit :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(x_i \leq x)} = \begin{cases} 0 \quad \text{si x} \leq \ \mathrm{x}_{1;n} \\ \frac{i-1}{n} \ \text{ si } \mathrm{X}_{i-1,n} \leq x \leq X_{i,n} \quad 2 \leq i \leq n. \\ 1 \quad \text{si x} \geq X_{n,n} \end{cases},$$

$$E\left[F_N(x)\right] = F(x),\ var\left[F_n(x)\right] = \frac{F(x)\left(1 - F(x)\right)}{n}.$$

1.1.5 Fonctions quantile et quantile de queue

La fonction quantile de la fonction de distribution F est la fonction inverse généralisée de F défnie par :

$$Q(s) = F^{-}(s) = inf\left\{x \in R : F(x) \geq s\right\}; 0 < s < 1.$$

Dans la théorie des extrèmes, une fonction notée U et appelée fonction quantile de queue, est définie par :

$$U(t) = Q(1 - \frac{1}{t}) = (\frac{1}{\bar{f}})^{-}(t);\ 1 < t < \infty.$$

1.1.6 Fonctions empiriques de quantile et de quantile de queue

La fonction quantile empirique de l'échantillon $(X_1, X_2, ...X_n)$ est défnie par :

$$Q_n(s) = F_n^{-1}(s) = \inf\left\{x \in R : F_n(x) \geq s\right\} \quad 0 < s < 1.$$

La fonction empirique de quantile de queue correspondante est :

$$U_n(t) = Q_n\left(1 - \frac{1}{t}\right) \quad 1 < t < \infty.$$

Où Peut être exprimée comme une fonction simple des statistiques d'ordre relatives à l'échantillon $(X_1; X_2; ......; X_n)$ et nous avons :

$$Q_N(s) = \begin{cases} X_{i,n} & \text{si } \frac{(i-1)}{n} < s < \frac{i}{n} \\ X_{[NP]+1,n} & \text{si } 0<\text{s}<1 \end{cases},$$

Notons que pour $0 < p < 1$; $X_{[np]+1;n}$est le quantile d'échantillon de l'ordre p.

Lemme 1.1.1 *(Transformation quantile) Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de fonction de répartition F. Soit $U_1, ..., U_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme standard Alors*

(a) Pour toute fonction de distribution F, on a :

$$X_{i,n} = F^{-}\left(U_{i,n}\right) \quad i = 1, ...n,$$

(b) Lorsque F est continue, on a

$$F\left(X_{i,n}\right) = U_{i,n} \quad i = 1....n.$$

1.1.7 Moments des statistiques d'ordres

Soit $X_{i,n}$ la i-iéme statistique d'ordre associée l'échantillon, de taille n, de densité de probabilité $f(x)$ et de fonction de répartition $F(x)$ continue avec la fonction de quantile $Q\left(u\right) = F_X^{-1}(u)$.

Définition 1.1.2 *k-iéme moments de la i-iéme statistique d'ordre est définie par :*

$$\mathbf{E}\left(X_{i,n}^{k}\right) = u_{i,n}^{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k} f x_{i,n}\left(x\right) dx = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-1)!}$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k} \left\{F\left(x\right)\right\}^{i-1} \left\{1-F\left(x\right)\right\}^{n-i} f(x) dx,$$

d'une autres facon :

$$\mathbf{E}(X_{i,n}^{k}) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \int_{0}^{1} Q\left(u\right)^{k} u^{i-1} \left(1-u\right)^{n-i} du.$$

1.2 L-Moments : Définitions et propriétés

Soit $X_1, .., X_n$ un échantillon de taille n d'une distribution continue $F_x(x)$ avec la fonction de quantile $Q\left(u\right) = F_x^{-1}(u)$, et soit $X_{1,r} \leq ... \leq X_{r,r}$ les statistiques d'ordres associées a cet échantillon pour $r \geq 1$. alors le r-iéme L-moments λ_r est donné par :

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \begin{pmatrix} r-1 \\ k \end{pmatrix} E(X_{r-k,r}), \forall r \geq 1.$$

telle que $\mathbf{E}(X_{r,k,r})$ présente l'éspérance de la statistique d'ordre.

1.2.1 L-correlation, L-skewness et L-kurtosis

Les proportions des L-moments (ratio L-moments) sont des rapports entre les L-moments et les λ_1 et λ_2 a pour but de défnir les caractéristiques de la distribution elle sont définie par :

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, r \neq 2. \tag{1.1}$$

telle que : le rapport entre le premier L-moments λ_1 et le second L-moments λ_2 présente la mesure de L-variation, défini par :

$$L - cv := \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

L- skewness : C'est le rapport entre le 3-éme L -moments et le second L-moments, c'est la mesure de l'asymétrie donnée par :

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}.$$

L- kurtosis : C'est le rapport entre le 4-éme L-moments et le second L-moments, c'est lamesure de l 'aplatissement donnée par :

$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}.$$

1.2.2 Représentation de L-moment en terme de polynomes orthogonaux

Les L-moments peuvent étre écrite en fonction de polynomes de Legendre déplacé p_r^* qui sont définies par :

$$p_r^*(u) = \sum_{k=0}^{r} p_{r,k}^* u^k = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r+k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} u^k.$$

Alors les λ_r reécrire comme suit :

$$\lambda_r = \int_0^1 Q(u) P_{r-1}^*(u) du, \qquad r = 1, 2..., \tag{1.2}$$

1.2.3 Representation de L-Moments en Terme de Moments de Probabilités Pondérés

Les moments de probabilité pondérés (Probabilité Weighted Moments), notés PWM est

Définition 1.2.1 *Soit X une v.a de distribution continue. Alors les moments de probabilité pondérés $M_{i,j,k}$ est défini par :*

$$M_{i,j,k} = E\left[X^i F^j (1-F)^k\right] = \int_0^1 Q(u)^i u^j (1-u)^k \, du.$$

où : F et $Q(u)$ présentent les fonctions de répartition et de quantile de la variable X. telle que $Q(u) = F_x^{-1}(u); i, j$ et k sont des réels pour des cas particuliers de j et k nous obtenons les quantités suivantes :

1. pour $j = k = 0$ et i entier positif :

$$M_{1,0,0} = E\left[X^i\right] = \int_0^1 Q_x(u)^i du.$$

   qui sont les moments classiques d'ordre i par repport à l'origine.

Pour $j = 0$ et i, k sont des entiers positifs ou $k = 0$ et j, i sont des entiers positifs :

$$M_{1,0,k} = E\left[X^i(1-F)^k\right] = \int_0^1 Q(u)^i(1-u)^k du,$$
$$M_{i,j,0} = E\left[X^I F^j\right] = \int_0^1 Q(u)^i u^j du,$$

Ces deux quantités sont les plus utilisés en pratique et pour calculer les L-moments. La procédure d'estimation basée sur $M_{i;0;k}$ et $M_{i,0,k}$. Les L-moments considérés comme des combinaisons linéaires de PWM $(M_{i,0,k}, M_{i,j,0})$ pour $i = 1$: c'est à dire :

$$\lambda_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^r p^*_{r,j} a_k = \sum_{j=0}^{r} p^*_{r,j} B_j.$$

1.2.4 Représentation de L-moment en terme de covariance et L-statistique

Solon l'orthogonalité de polynôme de legendre et posant $P_0 \approxeq 0$ implique une nouvelle représentation de L-moments en terme de covariance, d'où :

$$\lambda_r = \begin{Bmatrix} E(X), \quad k=1 \\ cov\left(X, P_{r-1}(F(X)\right), \; k \geq 2 \end{Bmatrix},$$

Et les quatres premiers L-moment sont donnés par :

$$\lambda_1 = E(X),$$

$$\lambda_2 = cov(X, 2F(X) - 1),$$

$$\lambda_3 = cov(X, 6F^2(x) - 6F(X) + 1),$$

$$\lambda_4 = cov(X, 20F^3(X) - 30F^2(X) + 12F(X) - 1).$$

Les L-moments aussi peuvent étre écrite en terme de L-statistique,comme suit :

$$\lambda_r = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} W^{(k)}_{i,n} E(X_{i,n}).$$

où

$$W^{(k)}_{i;n} = \sum_{j=0}^{\min\{r-1,k-1\}} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \binom{k-1+j}{j} \binom{n-1}{j}^{-1} \binom{r-1}{j}.$$

1.2.5 Estimation des L-moments

Les L-moments ont été défnies pour une distribution de probabilité, mais généralement (dans la pratique) ils sont estimés à partir d'un échantillon fini. L'estimation par les L-moments est basée sur la même approche que celle des moments classique, c-à-d que :

L-moments empiriques=L-moments théoriques,

Soit $(X_{1,n}, X_{2,n}, ..., X_{n,n})$ un échantillon ordonné, alors les L-moments empiriques peuvent être obtenus à partir de l'estimateur suivant :

$$b_j = \frac{1}{n}\binom{n-1}{j}^{-1}\sum_{i=j+1}^{n}\binom{i-1}{j}X_{(i,n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{(i-1)(i-2).....(i-r)}{(n-1)(n-2)....(n-r)}X_{i,n}.$$

où les coefficients b_j sont les estimateurs sans biais de $PWMB_J$ alors les éstimateurs de L-moments, notés l_r sont exprimés en terme de statistique d'ordre, d'ou les L-moments l_r sont développés par Hosking (1985) dérivé de l'estimation de PWM sous la forme suivant :

$$L_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} P^*_{r,k} b_k, \qquad r = 0, 1, ..., n-1.$$

Distribution	$F(x)$ ou $xF(x)$	L-moments
Uniform	$x = \alpha + (\beta - \alpha)F$	$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\lambda_2 = \frac{1}{6}(\beta-\alpha), \tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$
Expenential	$x = \xi - \alpha \log(1-F)$	$\lambda_1 = \xi + \alpha$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\alpha$, $\tau_3 = \frac{1}{3}$, $\tau_4 = \frac{1}{6}$
Gumbel	$x = \xi - \alpha \log(-\log F)$	$\lambda_1 = \xi + \gamma\alpha, \lambda_2 = \alpha \log 2, \tau_3 = 0.1699, \tau_4 = 0.15$
Logistic	$x = \xi + \alpha \log\{F/(1-F)\}$	$\lambda_1 = \xi$, $\lambda_2 = \alpha$ $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = \frac{1}{6}$
Normal	$F = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = \pi^{-1}\sigma$, $\tau_3 = 0$
Gamma	$F = \beta^{-\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}\exp(-t/\beta)dt/\Gamma(\alpha)$	$\lambda_1 = \alpha\beta, \lambda_2 = \pi^{-1/2}\beta\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})/\Gamma(\alpha)$, $\tau_3 = 6I_{1/3}(\alpha, 2\alpha) - 3$

Tab. 1.1 – L-moments de quelques distributions communes

Exemple 1.2.1 *le tableau (1.1) présente L-momoents de quelques distributions*

Chapitre 2

Trimmed L-moments

Présentées comme des mesures alternatives aux L-moments les Trimmed L-moments sont obtenus en donnant les poids égaux à zéro pour les observations extrêmes de l'échantillon, et ceci aprés avoir augmenté sa taille de $t1 + t2$ valeurs, tout cela pour travailler avec un échantillon toujours de taille n, ces L-moments tronqués ont étés proposés pour la première fois par Elamir et Seheult (2003), la preuve de leur existence et l'unicité a été établis par la suite par Hosking(2007). En conséquence, nous définirons à la fois les TL-moments et les métriques associées telles que l'asymétrie TL et l'aplatissement TL dans ce chapitre. Leur représentation polynomiale de Jacobi et les caractéristiques théoriques de leurs fonctions Ce chapitre se terminera par un exemple et l'estimateur des TL-moments.

2.1 Trimmed L-moments d'une population

Définition 2.1.1 *(Trimmed L-moments d'une population)*

Soit $Z_1, ..., Z_r$ un échantillon de r variables aléatoires (iid) de loi $F(x)$ continue,avec une fonction de quantile $Q_Z(u) = F_Z^{-1}(u)$, et soit $Z_{1:r} \leq .... \leq Z_{r:r}$ les statistiques d'ordres associées à cet échantillon, alors le $r^{éme}$ TL-moments (TL-moments) de la v.a Z noté par $\lambda_r^{(t_1,t_2)}$ est définie comme suit :

$$\lambda_r^{(t_1,t_2)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}E(Z_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}),\ \text{avec } r=1,2,3...et\ \ t_1,t_2\in N. \quad (2.1)$$

d'où la taille de l'échantillon est augmenté de r à $r+t_1+t_2$, telque t_1 la plus petite valeur, et t_2 la plus grande valeur de l'échantillon. Ce qui nous permet d'écrire $\lambda_r^{(t_1,t_2)}$ en terme de la fonction de quantile, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\lambda_r^{(t_1,t_2)} &= \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}\frac{(r_1)!(r+t_1+t_2)!}{rK!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!(t_2+k)!} \\ &\times\int_0^1 Q(u)u^{r+t_1-k-1}(1-u)^{t_2+k}du. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Alors les premiers TL-moments pour$t_1=0$ et $t_2=1$ sont :

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(0,1)} &= 2\int_0^1 Q(u)u(1-u)du,\\ \lambda_2^{(0,1)} &= \frac{3}{2}\int_0^1 Q(u)(4u-3u^2-1)du,\\ \lambda_3^{(0,1)} &= \frac{4}{3}\int_0^1 Q(u)(-10u^3+18u^2-9u+1)du,\\ \lambda_4^{(0,1)} &= \frac{15}{2}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(-35u^4+80u^3-60u^2+16u-1)du.\end{aligned}$$

2.1.1 Cas particuliers des trimmed L-moments

Pour $t_1=t_2=0$, Les $\lambda_r^{(t_1 t_2)}$ réduit aux λ_r (L-moments classiques), sont données par :

$$\lambda_r^{(t)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}E(Z_{r+t-k:r+2t}), pour\ r=1,2,....., \quad (2.3)$$

et en terme de fontion de quantile :

$$\lambda_r^{(t)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}\frac{(r+2t)!}{(r+t-k-1)!(t+k)!}$$
$$\times\int_0^1 Q(u)u^{r+t-k-1}(1-u)^{t+k}du,$$

alors, pour $r = 1, 2, 3, 4$, lorsque $t = 1$, les $\lambda_r^{(t)}$ sont données par :

$$\lambda_1^{(1)} = E(Z_{2:3}) = 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)du,$$
$$\lambda_2^{(1)} = \frac{1}{2}E(Z_{3:4} - Z_{2;4}) = 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)(2u-1)du,$$
$$\lambda_3^{(1)} = \frac{1}{3}E(Z_{4:5} - 2Z_{3;5} + Z_{2;5}) = \frac{20}{3}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(5u^2-5u+1)du,$$
$$\lambda_4^{(1)} = \frac{1}{3}E(Z_{5:6} - 3Z_{4;6} + 3Z_{3;6} - Z_{2;6}) = \frac{15}{2}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(14u^3-21u^2+9u-1)du,$$

avec :$\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(1)}$sont les mesures de population de position, d'échelle, d'assymétrie "skewness" et d'aplatissement "kurtosis" qui sont analogues aux L-moments classiques.

2.1.2 TL-Skewness et TL-kurtosis

Le coefficient de skewness $\beta_1 = \frac{u_3}{u_2^{\frac{3}{2}}}$ et le coefficient de kurtosis $\beta_2 = \frac{u_4}{u_2^2}$ où u_2, u_3,u_4 sont des moments centraux. Car de certaines déficiences de β_1 et β_2 comme leur sensibilité au comportement des extrêmes queues d'une distribution et leur non-existence pour certaines distributions, comme celle de Cauchy distribution.

Les TL-Skewness et TL-Kurtosis sont définis par :

$$\tau_3^{(t_1,t_2)} = \frac{\lambda_3^{(t_1,t_2)}}{\lambda_2^{(t_1,t_2)}}. \tag{2.4}$$

et

$$\tau_4^{(t_1,t_2)} = \frac{\lambda_4^{(t_1,t_2)}}{\lambda_2^{(t_1,t_2)}}. \tag{2.5}$$

2.1.3 Representation de TL-moments en terme de polynôme

Les polynômes de Jacobi sont des polynômes orthogonaux sur $[0,1]$. Elles sont définies par :

$$p_r^{*(t_1,t_2)}(u) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{r+t_1}{j}\binom{r+t_2}{r-j} u^j (1-u)^{r-j},$$

Pour $r = 0, 1, 2, 3$ et $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
p_0^{*(0,1)}(u) &= 1, \\
p_1^{*(0,1)}(u) &= (2-3u), \\
p_2^{*(0,1)}(u) &= 10u^2 - 12u + 3, \\
p_3^{*(0,1)}(u) &= -35u^3 + 60u^2 - 30u + 4,
\end{aligned}$$

Hosking (2007) introduit une nouvelle formulation des TL- moments en termes de $P_r(t_1; t_2)$, qui utilise la fonction quantile $Q(u)$:

$$\begin{aligned}
\lambda_r^{(t_1,t_2)} &= \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{r(r+t_1-1)!(r+t_2-1)!}\int_0^1 Q(u)u^{t_1}(1-u)^{t_2} p_{r-1}^{*(t_2,t_1)}(u)du \\
&= \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{rk!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!(t_2+k)!}\int_0^1 Q(u)u^{r+t_1-k-1}(1-u)^{t_2+k}du
\end{aligned}$$

En utilisant cette représentation, les premiers TL-moments pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ sont définies comme suit :

$$\lambda_1^{(0,1)} = 2\int_0^1 Q(u)(1-u)du,$$
$$\lambda_2^{(0,1)} = \frac{3}{2}\int_0^1 Q(u)(4u-3u^2-1)du,$$
$$\lambda_3^{(0,1)} = \frac{4}{3}\int_0^1 Q(u)(-10u+18u^2-9u+1)du,$$
$$\lambda_4^{(0,1)} = \frac{5}{4}\int_0^1 Q(u)(-35u^4+80u^3-60u^2+16u-1)du.$$

2.1.4 Relation de réccurrence

Les TL- moments, qui sont des fonctions des polynômes de Jacobi, et leurs degrés directs de troncature se traduisent par une relation de récurrence, donc parmi les qualités des polynômes de Jacobi, la propriété de récurrence est employée pour les polynômes de Jacobi déplacés,donnée par :

$$(2r+t_1+t_2-1)(1-u)p_r^{*(t_2,t_1)}(u) = (r+t_2)p_r^{*(t_2-1,t_1)(u)} - (r+1)p_r^{*(t_2-1,t_1)}(u), \quad (2.6)$$
$$(2r+t_1+t_2-1)up_r^{*(t_2,t_1)}(u) = (r+t_1)p_r^{*(t_2,t_1-1)(u)} + (r+1)p_r^{*(t_2,t_1-1)}(u). \quad (2.7)$$

En remplaçant les formules 2.6 et 2.7, nous obtenous les formules suivantes :

$$(2r+t_1+t_2-1)\lambda_r^{(t_1,t_2)} = (r+t_1+t_2)\lambda_r^{(t_1,t_2-1)} - \frac{1}{r}(r+1)(r+t_1)\lambda_r^{(t_1,t_2-1)},$$

$$(2r+t_1+t_2-1)\lambda_r^{(t_1,t_2)} = (r+t_1+t_2)\lambda_r^{(t_1-1,t_2)} - \frac{1}{r}(r+1)(r+t_1)\lambda_r^{(t_1-1,t_2)}.$$

2.1.5 Relation entre les TL-moments et les L-moments

Nous pouvons trouver les relations suivantes entre les L-moments ajustés et les L-moments en utilisant l' équation 1.2 :

$$\begin{aligned}
\lambda_r^{(0,1)} &= \frac{r+1}{2r}(\lambda_r - \lambda_{r+1}), \\
\lambda_r^{(0,2)} &= \frac{(r+1)(r+2)}{2r(2r+1)}\lambda_r - \frac{r+2}{2r}\lambda_{r+1} + \frac{r+2}{2(2r+1)}\lambda_{r+2}, \\
\lambda_r^{(1,1)} &= \frac{(r+1)(r+2)}{2r(2r+1)}(\lambda_r - \lambda_{r+2}),
\end{aligned}$$

2.1.6 Estimation des TL-moments

On s'interesse maintenant aux estimateurs de TL-moment, qui sont des statistiques d'ordre linéaire $X_{1:n} \leq .... \leq X_{n:n}$ de taille n. Ces estimateurs sont données par :

$$\iota_r^{(t_1,t_2)} = \hat{\lambda}^{(t_1,t_2)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k \binom{r-1}{k} \hat{E}(Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}). \tag{2.8}$$

où :

$$\hat{E}(Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}) = \frac{1}{\binom{n}{r+t_1+t_2}} \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{r+t_1-k-1} \binom{n-i}{t_2+k} X_{i:n}.$$

Telle que $\hat{E}([Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}]$ est l'estimateur sans biais de $E\left[X_{r+t-k:r+t+s}\right]$. Donc on obtenus les $\iota_r^{(t_1,t_2)}$ comme le suivant :

$$\iota_r^{(t_1,t_2)} = \frac{1}{r\binom{n}{r+t_1+t_2}} \sum_{i=1+t_1}^{n-t_2} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r+t_1-k-1} \binom{n-i}{t_2+k} X_{i:n}. \tag{2.9}$$

Pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$, les premiers estimateurs de TL-moments sont :

$$\iota_1^{(0,1)} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{0} \binom{n-i}{1} X_{i:n},$$

$$\iota_2^{(0,1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{1}\binom{n-i}{1} - \binom{i-1}{0}\binom{n-i}{2}}{\binom{n}{3}} \right) X_{i:n},$$

$$\iota_3^{(0,1)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{2}\binom{n-i}{1} - 2\binom{i-1}{1}\binom{n-i}{2} + \binom{i-1}{0}\binom{n-i}{3}}{\binom{n}{4}} \right) X_{i:n},$$

$$\iota_4^{(0,1)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{3}\binom{n-i}{1} - 3\binom{i-1}{2}\binom{n-i}{2} + 3\binom{i-1}{1}\binom{n-i}{3} - \binom{i-1}{0}\binom{n-i}{4}}{\binom{n}{5}} \right) X_{i:n},$$

pour$t_1 = t_2 = t$, on présente les estimateurs $\iota_r^{(t)}$ comme le suivant :

$$\iota_r^{(t)} = \frac{1}{r} \sum_{i=t+1}^{n-t} \left(\frac{\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r+t-k-1} \binom{n-i}{t+k}}{\binom{n}{r+2t}} \right) X_{i:n}.$$

En particulier pour $t = 1$; les quatre premiers TL-moments d'échantillon sont :

$$\iota_1^{(1)} = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{i=2}^{n-1} \left[\binom{i-1}{1} \binom{n-i}{1} \right] X_{i:n},$$

$$\iota_2^{(1)} = \frac{1}{2\binom{n}{4}} \sum_{i=2}^{n-1} \left[\binom{i-1}{2} \binom{n-i}{1} - \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{2} \right] X_{i:n},$$

$$\iota_3^{(1)} = \frac{1}{3\binom{n}{5}} \sum_{i=2}^{n-1} \left[\binom{i-1}{3} \binom{n-i}{1} - 2\binom{i-1}{2} \binom{n-i}{2} + \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{3} \right] X_{i:n},$$

$$\iota_4^{(1)} = \frac{1}{4\binom{n}{6}} \sum_{i=2}^{n-1} \left[\binom{i-1}{4} \binom{n-i}{1} - 3\binom{i-1}{3} \binom{n-i}{2} \right.$$
$$\left. + 3\binom{i-1}{1} \binom{n-i}{3} - \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{4} \right] X_{i:n},$$

Et les estimateurs de TL-moments précédents sont trés utiles pour l'estimation des rapports des TL-moments d'une population $\tau_r^{(t_1,t_2)}$,du TL-Skewness $\tau_3^{(t_1,t_2)}$ et du TL-Kurtosis $\tau_4^{(t_1,t_2)}$, ça nous donne les estimateurs des rapports des TL-moments suivants :

$$t_r^{(t_1,t_2)} = \iota_r^{(t_1,t_2)}/\iota_2^{(t_1,t_2)}.$$

$$t_3^{(t_1,t_2)} = \iota_3^{(t_1,t_2)}/\iota_2^{(t_1,t_2)}.$$

$$t_4^{(t_1,t_2)} = \iota_4^{(t_1,t_2)}/\iota_2^{(t_1,t_2)}.$$

Remarque 2.1.1 *On se qui concerne l'estimation des paramètres des distributions de probabilité par la méthode des TL-moments, elle est analogue à celle des L-moments qu'on a mentionnée avant.*

Exemple 2.1.1 *Le 2.1 montre les valeurs de la fonction quantile $Q(u)$, la position TLparamètre λ_1, le paramètre d'échelle TL $\lambda_2^{(1)}$, TL-skewness $\tau_3^{(1)}$ et TL-kurtosis $\tau_4^{(1)}$ pourcertaines distributions courantes*

Distribution	$Q(u)$	TL-moments	Estimateurs
Normale	$u + \sigma\Phi^{-1}(u)$	$\lambda_1^{(1)} = u, \lambda_2^{(1)} = 0,279\sigma,$ $\tau_3^{(1)} = 0, \tau_4^{(1)} = 0,062$	$\hat{U} = L_1^{(1)}, \hat{\sigma} = L_2^{(1)}/0,297$
La loi logistique	$u + \sigma\log(\frac{u}{1-u})$	$\lambda_1^{(1)} = u, \lambda_2^{(1)} = 0,500\sigma,$ $\tau_3^{(1)} = 0, \tau_4^{(1)} = 0,083,$	$\hat{U} = L_1^{(1)}, \hat{\sigma} = 2L_2^{(1)}$
Exponentielle	$-\alpha\log(1-u)$	$\lambda_1^{(1)} = 5\alpha/6, \lambda_2^{(1)} = \alpha/4,$ $\tau_3^{(1)} = 2/9, \tau_4^{(1)} = 1/12$	$\hat{\alpha} = 6L_1^{(1)}/5$

TAB. 2.1 – TL-moments de quelques distributions.

2.2 Exemple sur calcul les lois chauchy et pareto

2.2.1 La distribution de Cauchy

Il y a des lois sans moyenne ni écart–type, parmi ces lois est la loi de Cauchy par fois nommée de (Lorentz en physique). TL-moments peuvent être utilisés pour l'estimation des

paramètres de la loi de Cauchy.

Fonctions de distribution

Définition 2.2.1 *Une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy, dépendant par deux paramètres*

ξ et $\alpha > 0$ est défnie comme suit :

Sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x-\xi}{\alpha}) + \frac{1}{2}.$$

Sa densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\alpha(1 + (\frac{x-\xi}{\alpha})^2)}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\alpha}} \frac{1}{\pi}(\frac{1}{\alpha(1+y^2)})dy \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(y)\Big|_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\pi}[\arctan(\frac{x-\xi}{\alpha}) - \arctan(-\infty)] \\ &= \frac{1}{\pi}[\arctan(\frac{x-\xi}{\alpha}) - (-\frac{\pi}{2})] \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x-\xi}{\alpha}) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

Définition 2.2.2 *la fonction de quantile* $Q(u) = F_x^{-1}(u) = x$ *est défnie par :*

$$Q(u) = \xi + \alpha \tan \pi(u - 0.5).$$

En effet :

ona : $u = F(x)$,alors :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x-\xi}{\alpha}) + \frac{1}{2} \\ u - 0.5 &= \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x-\xi}{\alpha}) \\ \pi(u-0.5) &= \arctan(\frac{x-\xi}{\alpha}) \\ x &= \xi + \alpha \tan \pi(u - 0.5). \end{aligned}$$

Où :

le ξ : Est le paramètre de position.

le α : Est le paramètre d'échelle.

on a les L-moments λ_r de la distribution de Cauchy n'existe pas ($\lambda_1 = \lambda_2 = \infty$).

TL-moments de la loi de Cauchy : On va appliquer la fonction quantile de la loi Cauchy pour trouver les premiers quatres TLmoments $(1,1)$ par (2.3)

Les $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(1)}$sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(1)} &= 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)du = \xi, \\
\lambda_2^{(1)} &= 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)(2u-1)du = 0.698\alpha, \\
\lambda_3^{(1)} &= \frac{20}{3}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(5u^2-5u+1)du = 0, \\
\lambda_3^{(1)} &= \frac{15}{2}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(14u^3-21u^2+9u-1)du = 0.239414\alpha,
\end{aligned}$$

Et on déduit les rapports de TL-moments $(1,1)$:

– TL skewness est donnée par :

$$\tau_3^{(1)} = \frac{\lambda_3^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} = \frac{0}{0.698\alpha} = 0.$$

– TL kurtosis :est donnée par :

$$\tau_4^{(1)} = \frac{\lambda_4^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} = \frac{0.239414\alpha}{0.698\alpha} = 0.343.$$

2.2.2 Distribution de Pareto généralisée

On a choisi la loi de Pareto généralisée centrée.

Définition 2.2.3 *On dira que X suit une loi Pareto généralisée de paramètres $\omega > 0$ et $\theta \in R$, si sa fonction* de répartition est donnée par :

$$F(X) = \begin{Bmatrix} 1-(1-\frac{\theta}{\omega}x)^{\frac{1}{\theta}} \text{ si } \theta \neq 0 \\ 1-\exp(-\frac{x}{\omega}) \quad \text{sinon.} \end{Bmatrix}.$$

Et la fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega}(1-\frac{\theta}{\omega}x)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \text{si } \theta \neq 0 \\ \frac{1}{\omega}\exp(-\frac{x}{\omega}) \quad \text{sinon.} \end{Bmatrix}.$$

Elle est définie par :

$$\begin{Bmatrix} 0 \leq x \quad si\ \theta > 0 \\ 0 \leq x \ \ \leq -\frac{\omega}{\theta} \end{Bmatrix}.$$

La distribution de pareto est définie par deux paramètres et (tels que est appellé index des valeurs extrèmes et le paramètre d'échelle)

Espérance et variance : Si X suit la loi de pareto généralisée, alors :

Pour $\theta \neq 0$: On a

1 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{\omega}{1-\theta}$.

2 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{2\omega^2}{(2\theta-1)(\theta-1)}$.

3 $var(x) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\omega^2}{(1-2\theta)(\theta-1)^2}$.

Pour $\theta = 0$: On a

1 $E(X) = \omega$.

2 $E(X^2) = 2\omega^2$.

3 $var(x) = \omega^2$.

Fonction de quantile : Est définie par :

$$Q(u) = \frac{\omega}{\theta}(1-(1-u)^{\theta}) \text{ si } \theta \neq 0.$$

En effet : on a $u = F(X)$ alors :

$$\begin{aligned} u &= 1 - (1 - \frac{\theta}{\omega}x)^{\frac{1}{\theta}} \\ 1 - u &= (1 - \frac{\theta}{\omega}x)^{\frac{1}{\theta}} \\ (1-u)^{\theta} &= (1 - \frac{\theta}{\omega}x) \\ x &= \frac{\omega}{\theta}(1 - (1-u)^{\theta}). \end{aligned}$$

L-moment de la loi de Pareto généralisée : Les quatres premiers L-moments sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^1 Q(u)du \\ &= \int_0^1 \frac{\omega}{\theta}(1 - (1-u)^{\theta})du \\ &= \frac{\omega}{\theta}(\int_0^1 1du - \int_0^1 (1-u)^{\theta} du) \\ &= \frac{\omega}{\theta}([u]_0^1 - [\frac{(1-u)^{\theta+1}}{\theta+1}]_0^1) \\ &= \frac{\omega}{\theta}(1 + \frac{1}{1+\theta}) \\ &= \frac{\omega(2+\theta)}{\theta(1+\theta)}. \end{aligned}$$

telle que :

$$\lambda_r = \int_0^1 Q(u)p^*_{r-1}(u)du, \quad r = 1, 2...,$$

La même chose pour λ_2, λ_3 et λ_4 alors :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \int_0^1 (2u-1)\frac{\omega}{\theta}(1 - (1-u)^{\theta})du = \frac{\omega}{(1+\theta) + (2+\theta)}, \\ \lambda_3 &= \int_0^1 (6u^2 - 6u + 1)\frac{\omega}{\theta}(1 - (1-u)^{\theta})du = \frac{\omega(\theta-1)}{(1+\theta) + (2+\theta) + (3+\theta)}, \end{aligned}$$

Et on déduit les rapports de L-moments d'aprés (1.1) :

Le L-Skewness : Est calculé comme suit :

$$\begin{aligned}\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} &= \frac{(\omega(\theta-1)/(1+\theta)+(2+\theta)+(3+\theta))}{(\omega/(1+\theta)+(2+\theta))} \\ &= \frac{(\theta-1)}{(3+\theta)}.\end{aligned}$$

Le L Kurtosis : Est calculé comme suit :

$$\begin{aligned}\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} &= \frac{(\omega(\theta-1)(\theta-2)/(1+\theta)+(2+\theta)+(3+\theta)+(4+\theta))}{(\omega/(1+\theta)+(2+\theta))} \\ &= \frac{(\theta-1)(\theta-2)}{(3+\theta)(4+\theta)}.\end{aligned}$$

TL-moment de la loi de Pareto généralisée : Les quatres premier TL-moments $(1,1)$ utilisant les formules (2.1) et (2.2) sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(1)} &= 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)du = \frac{\omega(\theta+5)}{(\theta+2)(\theta+3)}, \\ \lambda_2^{(1)} &= 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)(2u-1)du = \frac{6\omega}{(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4)}, \\ \lambda_3^{(1)} &= \frac{20}{3}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(5u^2-5u+1)du = \frac{20\omega(1-\theta)}{3(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4)(\theta+5)}, \\ \lambda_4^{(1)} &= \frac{15}{2}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(14u^3-21u^2-9u-1)du = \frac{15\omega(\theta-1)(\theta-2)}{2(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4)(\theta+5)(\theta+6)},\end{aligned}$$

Et on déduit les rapports de TL-moments $(1,1)$ par les formules (2.4) et (2.5)

– TL- skewness : Est calculé comme suit :

$$\tau_3^{(1)} = \frac{\lambda_3^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} = \frac{10(1-\theta)}{9(\theta+5)}.$$

– TL kurtosis : Est calculé comme suit :

$$\tau_4^{(1)} = \frac{\lambda_4^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} = \frac{5(\theta-1)(\theta-2)}{4(\theta+5)(\theta+6)}.$$

Conclusion

Certaines propriétés des distributions de probabilité générées à l'aide des L-moments et des TL-moments sont des extensions robustes des L-moments, telles que l'emplacement (niveau), la variabilité, l'asymétrie et l'aplatissement. Comme alternative robuste aux moments classiques des distributions de probabilités, des L-moments propres ont été présentés. Les L-moments et leurs estimations, d'autre part, manquent de certaines des propriétés substantielles observées dans les TL-moments.

Les exemples de TL-moments sont des combinaisons linéaires de statistiques d'ordre d'échantillon qui donnent une quantité prédéfinie de valeurs aberrantes de poids zéro. Les TL-moments de l'échantillon sont des estimations non biaisées des TL-moments associés à la distribution de probabilité. Certains éléments théoriques et pratiques des TL-moments sont encore à l'étude ou le seront dans le futur. L'efficacité des TL-statistiques est déterminée par le choix, par exemple, de celle qui a la plus petite variance (l'efficacité maximale)

Bibliographie

[1] Berkane,H (2022), Cours de 2 ème master, Statistique d'ordre Université Mohamed khider de Biskra.

[2] Christophe Dutang (2015) Theoretical L-moments and TL-moments Using Combinatorial Identities and Finite Operators

[3] Diana Bílková1,2 (2014) Trimmed L-Moments : Analogy of Classical L-Moments. American Journal of Mathematics and Statistics 2014, 4(2) : 80-106

[4] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H., 2001b. Exact covariances of sample L-moments, in revision.

[5] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H., 2003. Trimmed L-moments. Comput. Statist. Data Anal. 43, 299–314.

[6] Hosking, J.R.M., 1990. L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B52, 105–124.

[7] Ibrahim B. Abdul-Moniem (2009) TL-Moments and L-Moments Estimation for the Generalized Pareto Distribution.Applied Mathematical Sciences, 3(1), 43-52

[8] Karvanen, J., 2006. Estimation of quantile mixtures via L-moments and trimmed L-moments. Comput. Statist. Data Anal. 51, 947–959.

[9] Mudholkar, G.S., Hutson, A.D., 1998. LQ-moments : analogs of L-moments. J. Statist. Plann. Inference 71, 191–208

[10] Sillitto, G.P. (1951). Interrelations between certain linear systematic statistics of samples from any continuous population. Biometrika 38, 377-382.

[11] Tereza Šimková1(2018) Statistical Inference Based on L-Moments.In Book of Abstracts (p. 128).

[12] Ummi Nadiah Ahmad, Ani Shabri & Zahrahtul Amani Zakaria (2011).Trimmed Lmoments (1,0) for the generalized Pareto distribution Hydrological Sciences Journal.