République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Départementde Mathématiques

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : **Probabilitées**

Par : Mme Missaoui Ilhem

Titre :

Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec retards et avec anticipation

Devant le Jury :

Mr.	Chala Adel	Pro	U. Biskra	Président
Mme	Yakhlef Samia	MCA	U. Biskra	Encadreur
Mr.	Mezerdi Mouhamed Al Amin	MCB	U. Biskra	Examinateur

Soutenu Publiquement le 26/06/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents pour leurs sacrifices et leur soutien moral tout le long de mon cursus, ma chère mère qui m'a t conseillée, mon père qui m'a encouragé.

A mes très frères et sœurs à qui je souhaite une grande réussite dans leurs vies.

A toute la famille Missaoui et Ben abbasse.

Tous mes amis.

A tous ceux qui ont contribué, de loin ou de près, à la réalisation de ce projet

$\mathcal{R}$emerciements

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et la patience d'arrivé finir mon mémoire.

Je tiens tout particulièrement à remercier Dr Yakhlef Samia qui a encadré mon travail, qu'il toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de se mémoire, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Un grand merci également pour les membres du jury le Professeur Chala Adel et Dr Mezerdi mouhamed Al Amine qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département de mathématiques sans exceptions qui ont contribué à ma formation, ainsi que tous ce qui m'ont soutenue et m'ont aidée tout le long de cette étude et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail et à tous ceux qui ont montré et disposé à mes questionnements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide.

Résumé du mémoire

Dans ce mémoire, nous proposons .....

Notations et symbols

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\succeq 0}, \mathcal{P})$	:	Espace de probabilité filtré.
$(W_t)_t$	:	Mouvement Brownien.
$L^2(\mathcal{F}_T)$	:	Espace des variables aléatoire carré intégrable$\mathcal{F}_T$-mesurable .
E	:	Espace de Banach.
$EDSR$	:	Equation différentielle stochastique rétrograde.
S^2	:	Espace des processus Y, progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que : $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}(\mid Y_t \mid^2)\right] < \infty$.
M^2	:	Espace des processuss Z, progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que : $\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid Z_t \mid^2 dt\right] < \infty$.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) qui ont plusieurs applications comme par exemple les mathématiques financières d'une part et les équations aux dérivées partielles – EDP d'autre part. De nombreux mathématiciens ont contribué et contribuent toujours à la théorie des EDSR, il est impossible de tous les citer. Néanmoins, signalons les travaux de E. Pardoux et S. Peng [8, 10, 11]et l'article de N. El Karoui, S. Peng et M.-C. Quenez [8].

Les EDSR ont été introduites en 1973 par J.-M. Bismut [3]dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z. Il a fallu attendre le début des années 90 et le travail de E. Pardoux et S. Peng [10]pour avoir le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où f n'est pas linéaire. Depuis de nombreux travaux ont été effectués, la théorie n'a cessé de se développer en raison de ses relations étroites avec les mathématiques financières et les EDP.

Depuis le travail pionnier d'Etienne Pardoux et Shige Peng (1990) sur ce nouveau type d'équations différentielles stochastiques (EDSR), ce sujet a trouvé un grand succès et a attiré beaucoup de chercheurs. Le développement rapide et dynamique du sujet des EDSRs a été notamment stimulé par des nombreuses applications en contrôle stochastique, en théorie des jeux, en théorie des équations aux dérivées partielles (EDPs) mais également en finance. Le souci d'avoir des modèles plus réalistes en finance et de tenir compte de l'influence des évènements passés dans les décisions actuelles des investisseurs et des agents dans le marché a conduit à l'étude des EDSRs avec délai, tandis que l'équation adjointe dans le principe de Pontryagine dans les problèmes de contrôle stochastique, comme par exemple celui d'optimisation de portefeuille, est une EDSR dont le coefficient anticipe l'information sur la solution tout en restant adapté. Dans ce mémoire nous nous intéressons à ces deux types d'EDSRs, celle avec délai et celle avec anticipation et nous y développons leur théorie, nous les étudions dans un cadre brownien.

Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $(\mathbf{W}_t)_{0\leq t\leq T}$, (Y_t, Z_t) $t \in [0, T]$ vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$-dYt = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition finale (c'est pour cela que l'on dit rétrograde) $\mathrm{Y}_T = \zeta$ où ζ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme les EDS, ces équations doivent être comprise au sens intégral i.e.

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t \leq T,$$

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une généralisation des EDSR ci-dessus, où à l'instant s, le coefficient f dépend soit d'informations futures, soit d'informations passées sur le processus de solution. Plus précisément, on considère le EDSR de la forme

$$Y_t = \zeta + \int_t^T E\left[f(s, Y_s, Y_{s+\delta}, Z_s, Z_{s+\delta})/\mathcal{F}_s\right] ds - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t \leq T,$$

où pour $\delta < 0$ l'information sur le passé du processus de résolution (Y, Z) est considéré, et pour $\delta > 0$ l'information future entre dans le coefficient. Nous notons aussi que pour $\delta > 0$ le coefficient au temps s est considéré sous l'espérance conditionnelle connaissant $\mathcal{F}_s$, afin de garantir l'adaptation (plus précisément, ce qui est considéré ici est la projection optionnelle du coefficient processus $(f(s, Y_s, Y_{s+\delta}, Z_s, Z_{s+\delta}))_{s\in[0;T]}$ par rapport à la filtration brownienne $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_s)_{s\in[0;T])}$. On remarque aussi que dans le cas où $\delta < 0$, c'est-à-dire quand la dépendance du coefficient f aux informations passées est étudiée, le processus $(f(s, Y_{s+\delta}, Z_s, Z_{s+\delta}))_{s\in[0;T]}$ est déjà $\mathcal{F}$-adapté, et coïncide dsdP-presque partout avec sa projection optionnelle.

Ce travail est divisé en trois chapitres :

Chapitre 1 : dans un premier temps on se consacre à l'étude générale des EDSR, nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité de Pardoux et Peng puis dans la seconde partie, on étudiera les EDSR_s linéaires ou on donnera une solution explicite de ce type d'équations.

Chapitre 2 : dans ce chapitre nous traitons des équations différentielles stochastiques rétrogrades ou le générateurs est avec retard dans le temps. Dans ce nouveau type d'équations, un générateur à l'instant t peut dépendre sur les valeurs d'une solution dans le passé. Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution dans le cas lipchitzien.

Chapitre 3 : Dans le deuxième chapitre, nous discutons les équations différentielles stochastiques rétrogrades anticipées (EDSR anticipées). Dans ces équations, le générateur inclut non seulement les valeurs des solutions au présent mais aussi au futur. Nous montrons que ces EDSR anticipés ont des solutions uniques.

Chapitre 1

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

L'objective de ce chapitre est de donner une introduction sur les EDSR. On introduit la notion des EDSR$_s$ et on cite le résultat fondamental d'existence et d'unicité de Pardoux et Peng de 1990 [[10]]

1.1 Présentation du problème

On considère sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ où T désigne un temps terminale. On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} dY_t = -f(Y_t),\ t \in [0, T]\,, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si en prend l'exemple le plus simple c'est-à-dire $f \equiv 0$, le candidat naturel est $Y_t = \xi$ mais cette solution n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe.

La seul façon de rendre Y adapté est de le définir comme une espérance conditionnelle $Y_t = \mathbb{E}\left[\xi/\mathcal{F}_t\right]$, pour tout $t \in [0, T]$, mais ce processus n'est pas la solution de se problème malgré qu'elle est adapté et satisfait la condition terminal.

La question qui se pose est : quelle est l'equation satisfaite par ce processus ?

Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien et $\xi \in L^2\left[\Omega, \mathcal{F}_T\right]$, donc Y_t et une matringles de carrée intégrable alors en appliquant le théorème de représentation des martingales browninnes d'Itô, il existe un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi/\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^t Z_s dW_s$$

qui est équivalant :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \ t \in [0, T]$$

On peut écrire l'équation(1.1) sous la forme différentielle

$$\begin{cases} dY_t = Z_t dW_t, 0 \leq t \leq T, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{1.2}$$

On voit donc qu'un second membre inconnu est apparu qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté par conséquent, comme une seconde variable apparait, pour généraliser, on permet à f de dépendre du processus Z, l'équation devient alors :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, 0 \leq t \leq T, \\ Y_t = \xi \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$

l'équation (1.3) est équivalent à :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t < T. \tag{1.4}$$

Notation 1.1.1 *Soit $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien uni-dimensionnel défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ou $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est la filtration naturelle de W. Dans ce chapitre, on considère les notations et les espaces suivants :*

- S^2 : l'espace des processus Y_t, progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\| Y \|_\beta^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} (\exp(\beta t)) \mid Y_t \mid^2)\right] < \infty.$$

- M^2 : l'espace des processus Z, progressivement mesurable dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\| Z \|_\beta^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\beta t) \mid Z_t \mid^2 dt\right] < \infty$$

La question qui se pose maintenant est quelles conditions doivent être satisfaites par le générateur f et la condition terminale ξ pour avoir l'existence et l'unicité de l'équation (1.4), pour répondre à cette question on suppose donc les hypothèses suivantes :

Hypothèse(H.1)

1. $\xi \in L^2 [\Omega, \mathcal{F}_T]$.
2. La condition de Lipschitz : il existe une constante K>0, tel que :

   pour tout $y, y', z, z' \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$.

$$\mid f(t, y, z) - f(t, y', z') \mid \leq K(\mid y - y' \mid + \mid z - z' \mid),$$

3. La condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid f(t,0,0) \mid^2\right] < +\infty.$$

Définition 1.1.1 *Une solution de l'EDSR(1.4) est un couple* $(Y, Z) \in S^2 \times M^2$ *tel que :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Théoréme 1.1.1 *Sous les hypothèses*$(H1)$, *l'EDSR (1.4) a une unique solution* $(Y, Z) \in S^2 \times M^2$.

Proposition 1.1.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$, *positif appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$ *et deux constantes positives* C *et* K *tel que :*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}, \mid f(t, y, z) \mid \leq f_t + C \mid y \mid + K \parallel z \parallel.$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une solution de l'EDSR (1.3) telle que $Z \in M^2$ alors Y appartient à S_c^2.

Preuve. On a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s,$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur f,

$$\mid Y_t \mid \leq \mid Y_0 \mid + \int_0^T (f_s + K \parallel Z_s \parallel)ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \mid \int_0^t Z_s dW_s \mid + C \int_0^t \mid Y_s \mid ds,$$

posons

$$\lambda = \mid Y_0 \mid + \int_0^T (f_s + K \parallel Z_s \parallel) ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \mid \int_0^t Z_s dW_s \mid,$$

par suite on a

$$\mid Y_t \mid \leq \lambda + C \int_0^t \mid Y_s \mid ds.$$

Y étant un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité :

$$\mid Y_t \mid \leq \lambda \exp(Ct),$$

et donc

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mid Y_t \mid \leq \lambda \exp(CT),$$

λ est une variable aléatoire de carré intégrable, puis que par hypothése, Z appartient à M^2 et donc d'après l'inégalité de Doob, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \mid \int_0^t Z_s dW_s \mid^2\right] \leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[\int_0^t \parallel Z_s \parallel^2 ds\right],$$

ce qui signifie que la troisième terme de λ est de carré intégrable. Il en est de même pour $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$ et Y_0 puisqu'il est déterministe donc de carré intégrable. Ceci montre que Y appartient S^2. ■

Lemme 1.1.1 *Supposons que* $Y \in S_c^2(\mathbb{R}^k)$ *et* $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$, *alors*

$$\left\{\int_0^t Y_s . Z_s dW_s, t \in [0, T]\right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. En appliquant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante positive C telle que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \mid \int_0^t Y_s.Z_s dW_s \mid\right] \le C\mathbb{E}\left[(\int_0^T \mid Y_s \mid^2 \| Z_s \|^2 ds)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\le C\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \mid Y_t \mid (\int_0^T \| Z_s \|^2 ds)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et par suite en appliquant l'inégalité :

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{1.5}$$

on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \mid \int_0^t Y_s.Z_s dW_s \mid \le C'(\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \mid Y_t \mid^2\right] + \mathbb{E}\int_0^T \| Z_s \|^2 ds\right]),$$

par hypothèse le deusième membre de cette inégalité est fini, et donc on aura :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \mid \int_0^t Y_s.Z_s dW_s \mid < \infty\right].$$

■

Nous allons maintenant donner l'énoncé du théorème de représentation des martingales browniennes. Dans ce théorème on va montrer que toutes les martingales adaptées à la filtration du mouvement brownien peuvent être représentées à l'aide d'une intégrale stochastique.

Théoréme 1.1.2 ***(de représentation des martingales browniennes)*** *Soit* $(M_t)_{0\le t\le T}$ *une martingale de carré intégrable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$, *alors il* *existe un processus adapté* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty, p.s,$$

et P-p.s, on a :

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s, \forall t \in [0,T].$$

Remarque 1.1.1 *Cette représentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement brownien, il résulte aussi que* U *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable de carré intégrable on peut l'écrire sous la forme :*

$$U = \mathbb{E}[U] + \int_0^T H_s dW_s, p.s,$$

il suffit pour cela construire la martingale $M_t = \mathbb{E}[U/\mathcal{F}_t]$.

1.2 Cas globalement Lipschitzien

1.2.1 Résultat de Pardoux-Peng

Dans cette section, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui sera généralisé plus tards. Ce résultat est dû à Pardoux et S. Peng et est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est nom linéaire. Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler :

Hypothèse (H2)

Il existe une constante K telle que P.p.s,

a. Condition de Lipchitz en (y, z) : pour tout t, y, y', z, z'

$$| f(t, y, z) - f(t, y', z') | \leq K(| y - y' | + \| z - z' \|).$$

b. Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[| \xi |^2 + \int_0^T | f(s, 0, 0) |^2 \, ds\right] < \infty.$$

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème de Pardoux-Peng, on commence par le cas plus simple où f ne dépend ni de y ni de z.

Lemme 1.2.1 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$, *alors l'EDSR suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T F(s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t \leq T, \tag{1.6}$$

possède une unique solution (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. On suppose que l'équation (1.6) possède une solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$. En appliquant l'espérance conditionnelle, il vient que :

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T F(s) ds / \mathcal{F}_t\right]. \tag{1.7}$$

on définit donc Y_t par la formule (1.7), et il reste a définir le processus Z. F étant progressivement mesurable et de carré intégrable, alors :

$$\int_0^T F(s) ds \in S_c^2(\mathbb{R}^k),$$

de plus on :

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T F(s)ds/\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t F(s)ds = M_t - \int_0^t F(s)ds,$$

les hypothèses vérifiées par ξ et F impliquent que M_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable, par le théorème de représentation des martingales browniennes, il existe un unique processus $Z \in M(\mathbb{R}^{K\times d})$

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s,$$

et par suite,

$$Y_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F(s)ds,$$

donc,

$$M_0 = Y_T - \int_0^T Z_s dW_s + \int_0^T F(s)ds = \xi - \int_0^T Z_s dW_s + \int_0^T F(s)ds,$$

finalement, on obtient,

$$Y_t = \xi + \int_0^t F(s)ds - \int_0^t Z_s dW_s,$$

ce qui implique que le couple (Y, Z) est solution de l'EDSR (1.6), et l'unicité découle de la construction. ■

Théoréme 1.2.1 *(Pardoux-Peng) Sous les hypothèses (a) et (b), l'EDSR(1.3) possède une solution unique* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. *L'idée de la démonstration est basé sur un argument de point fixe sur l'espace de Banach* E^2 *des solution* (Y, Z) *ceci en construisant l'application sui-*

vante :

$$\begin{array}{rccc} \psi: & E^2 & \longrightarrow & E^2 \\ & (U,V) & \longmapsto & \psi(U,V) = (Y,Z), \end{array}$$

telle que (Y,Z) *est une solution de* (1.3)*si et seulement si* (Y,Z) *est un point fixe de* ψ*, on a* (Y,Z) *est une solution de l'équation suivante*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0,T].$$

Si on définit le processus $F_s = f(s,U_s,V_s)$*, il est clair que :* $F \in M^2(\mathbb{R}^k)$ *car d'après l'hypothèse 1 on a :*

$$\mid F_s \mid \leq \mid f(s,0,0) + K \mid U_s \mid + K \parallel V_s \parallel,$$

et ces derniers processus sont de carré intégrable, par suite nous pouvons appliquer le lemme 1.2.1 *pour obtenir une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$. (Y,Z)*appartient à* E^2*, car d'aprés la proposition* 1.1.1*,* Y *appartient à* S_c^2*. Il s'en suit que l'application* ψ *est bien définie. Il reste à démontrer que cette application est contractante.*

Considérons (U,V) *et* (U',V') *deux éléments de* E^2 *et notons*

$$(Y,Z) = \psi(U,V) \;\; et \;\; (Y',Z') = \psi(U',V'),$$

possons $y = Y - Y'$ *et* $z = Z - Z'$*, il est clair que*

$$y_T = 0 \quad et \quad dy_t = -(f(t,U_t,V_t) - f(t,U'_t,V'_t))dt + z_t dW_t$$

En appliquant la formule d'Itô à $\exp(\beta t) \mid y_t \mid^2$, *on obtient*

$$\begin{aligned} d(\exp(\beta s) \mid y_s \mid^2) &= \beta \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2 dt - 2\exp(\beta t) y_t . \{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t) dt\} \\ &+2\exp(\beta t) y_t . z_t dW_t + \exp(\beta t) \parallel z_t \parallel^2 dt \end{aligned}$$

par conséquent, en intégrnant de t *à* T,

$$\begin{aligned} \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2 + \int_t^T \exp(\beta s) \parallel z_s \parallel^2 ds &= 2\int_t^T \exp(\beta s) y_s . \{f(s, U_s, V_s) - f(s, U'_s, V'_s)\} ds \\ &- \int_t^T \exp(\beta s) \mid y_s \mid^2 ds - 2\int_t^T \exp(\beta s) y_s . z_s dW_s, \end{aligned}$$

Et d'après l'hypothèse(H2), il vient, notant u *et* v *pour* $U - U'$ *et* $V - V'$ *respectivement*

$$\begin{aligned} \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2 + \int_t^T \exp(\beta s) \parallel z_s \parallel^2 ds &\leq \int_t^T \exp(\beta s)(-\beta \mid y_s \mid^2 + 2K \mid y_s \mid\mid u_s \mid 2K \\ &+2K \mid y_s \mid\parallel v_s \parallel) ds - 2\int_t^T \exp^{\beta s} y_s . z_s dW_s, \end{aligned}$$

Pout tout $\varepsilon > 0$, *on a l'inégalité suivante :*

$$2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2,$$

Et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2 + \int_t^T \exp(\beta s) \parallel z_s \parallel^2 ds &\leq \int_t^T \exp(\beta s)(-\beta + 2K^2/\varepsilon) \mid y_s \mid^2 ds \\ &-2\int_t^T \exp(\beta s) y_s . z_s dW_s \\ &+\varepsilon \int_t^T \exp(\beta s)(\mid u_s \mid^2 + \parallel v_s \parallel^2) ds, \end{aligned}$$

Et prenant $\beta = 2K^2/\varepsilon$, *on a, notant* $\Phi_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T \exp(\beta s)(\mid u_s \mid^2 + \parallel v_s \parallel^2) ds$ *alors*

$$\forall t \in [0,T], \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2 + \int_t^T \exp(\beta s) \parallel z_s \parallel^2 ds \leq \Phi_s - 2\int_t^T \exp(\beta s) y_s . z_s dW_s, \tag{1.8}$$

d'après le lemme (1-1-1), la martingale

$$\left\{ \int_0^t \exp(\beta s) y_s . z_s dW_s \right\}_{t\in[0,T]},$$

est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 puisque $Y, Y' \in S^2$ *et* $Z, Z' \in M^2$. *En prenant l'espérance il vient que pour* $t = 0$ *:*

$$\mathbb{E}\int_0^T \exp(\beta s) \parallel z_s \parallel^2 ds \leq \mathbb{E}(\Phi_\varepsilon). \tag{1.9}$$

Revenant à l'inégalité (1.8), l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy fournit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{T\leq t\leq 0} \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2\right] &\leq \mathbb{E}(\Phi_\varepsilon) + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \exp(2\beta s) \mid y_s \mid^2 \parallel z_s \parallel^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}(\Phi_\varepsilon) + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \exp(\beta t) \mid y_t \mid \left(\int_0^T \exp(\beta s) \parallel z_s \parallel^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

Et en appliquant l'inégalité (1.5), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{T\leq t\leq 0} \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2\right] &\leq \mathbb{E}(\Phi_\varepsilon) + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2\right] \\ &\quad + \tfrac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(2\beta s) \parallel z_s \parallel^2 ds\right], \end{aligned}$$

Prenant en considération l'inégalité (1.9), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \exp(\beta t) \mid y_t \mid^2 + \int_0^T \exp(\beta s) \parallel z_s \parallel^2 ds \leq \left(3 + C^2\right) \mathbb{E}(\Phi_\varepsilon)\right] \leqslant \left(3 + C^2\right) \mathbb{E}[\Phi\varepsilon]$$

et par suite revenant à la définition de Φ_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left(\beta t\right)\mid y_t\mid^2+\int_0^T\exp\left(\beta s\right)\parallel z_s\parallel^2 ds\right]$$
$$\leqslant \theta_\varepsilon\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left(\beta s\right)\mid u_t\mid^2+\int_0^T\exp\left(\beta s\right)\parallel v_s\parallel^2 ds\right]$$

où $\theta_\varepsilon=\varepsilon(3+C^2)(1\vee T)$, *prenant* ε *tel que* $\theta_\varepsilon=\frac{1}{2}$.*Alors l'application* ψ *est une contraction stricte de* E^2 *dans luis même si on le munit de la norme*

$$\parallel(U,V)\parallel_E^2=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left(\beta t\right)\mid U_t\mid^2+\int_0^T\exp\left(\beta s\right)\parallel V_s\parallel^2 ds\right],$$

qui est équivalente a la norme usuelle correspondant au cas $\beta=0$. ψ *possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de L'EDSR* (1.1) *dans* E^2. ■

1.3 Equation Différentielles stochastiques rétrogrades linéaire

Dans cette partie nous allons étudier les EDSR_s linéaire pour la qu'elle nous allons donner une forme explicite. On se place dans le cas $k = 1$, Y est donc réel et Z un vecteur ligne de dimension d.

On considère l'EDSRL suivante :

$$Y_t = \varepsilon + \int_t^T (a_s Y_s + b_s Z_s + c_s) ds - \int_t^T Z_s dw_s, 0 \leq t \leq T, \tag{1.10}$$

où $\{(a_t, b_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ progressivement mesurable et borné,$\{c_t\}_{0 \leq t \leq T} \in M^2(\mathbb{R})$ et ε est une variable aléatoire de $\mathcal{F}_{T^-}$ mesurable est de carré intégrable à valeur réelles.

Proposition 1.3.1 *L'EDSRL(1.10)possède une solution unique $(Y, Z) \in B^2$, de plus Y est donné explicitement par :*

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left[\varepsilon \Gamma_T + \int_t^T c_s \Gamma_s ds / \mathcal{F}_t \right]$$

où

$$\Gamma = \exp(\int_0^t b_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \mid b_s \mid^2 ds + \int_0^t a_s ds)$$

avec Γ solution de l'EDSR :

$$\begin{cases} d\Gamma_t = \Gamma_t (a_t dt + b_t dB_t), t \in]0, T] \\ \Gamma_0 = 1. \end{cases}$$

Preuve. *En posant*

$$f(t,y,z) = a_t y + z_t b_t + c_t,$$

et grâce à la bornitude des processus a, b *et* c *on voit que le générateure de l'EDSRL* (1.10) *est lipshitzien, par suite en appliquant le théorème de Pardoux-peng, il s'en suit que cette équation admet une solution unique* (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$, Y *appartient à* S^2.

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\left\langle \Gamma, Y \right\rangle_t \\ &= -\Gamma_t C_t dt + \Gamma_t Z_t.dw_t + \Gamma_t Y_t b_t.dw_t, \end{aligned}$$

ce qui montre que la processus

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t C_s \Gamma_s ds,$$

est une martingale car $C \in M^2$ *et* Γ, Y *sont dans* S^2.

par suite,

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t C_s \Gamma_s ds = \mathbb{E}\left[\Gamma_T Y_T + \int_0^T C_s \Gamma_s ds / \mathcal{F}_t\right],$$

c'est à dire :

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left[\xi \Gamma_T + \int_t^T C_s \Gamma_s ds / \mathcal{F}_t\right].$$

■

Chapitre 2

Equations différentielles stochastique rétrogrades avec retard

L'objectif de ce chapitre est de donner le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles stochastiques rétrograde avec retard.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité complet, W un MB standard, $F = (\mathcal{F}_t)_{t \succeq 0}$ sa filtration naturelle. Dans ce chapitre on considères les notations et les espaces suivants :

- S^2 : L'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, tels que :

$$\| Y \|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} | Y_t |^2\right] < \infty.$$

- M^2 : L'espace vectoriel formé des processus Z, progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, tels que :

$$\| Z \|_{M^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \mid Z_s \mid^2 ds\right] < \infty.$$

Une équation différentielle stochastique avec retard est une équation de la forme suivante

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Y_{s-\delta}, Z_s, Z_{s-\delta})ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0,T], \\ Y_t = Y_0,\ Z_t = 0,\ t < 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où δ est une constante positive,

$$f\ :\ \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},$$

et la condition terminale ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable.

Pour la preuve, nous utilisons l'argument du point fixe qui est un outil classique pour prouver l'existence et l'unicité de EDSRR on considère les hypothèses suivant pour l'existence et l'unicité de l'EDSRR :

Hypothése(H3)

1. $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ et $f(.,.,.,.,.)$ est mesurable.
2. Condition de Lipschitz pour tout t$\in [0,T]$ et pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $u, \acute{u} \in \mathbb{R}^4$,il existe une constante $K > 0$,

$$\mid f(t,u) - f(t,\acute{u}) \mid \leq K \mid u - \acute{u} \mid .$$

3. Condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid f(t,0) \mid^2 dt\right] < \infty \text{ où } 0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^4.$$

Le théorème suivant donne l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSRR sous l'hypothèse (H3).

Théoréme 2.0.1 *Sous l'hypothèse (H3), il existe* $\acute{\delta} \succ 0$ *tel que* $\delta \in (0, \acute{\delta})$, *l'EDSRR (2.1)admet une unique solution* $(Y, Z) \in S^2 \times M^2$.

Preuve. On définit l'application

$$\begin{array}{llll} \Phi: & (L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2) \times M^2 & \mapsto & (L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2) \times M^2) \\ & ((U_0, U), V) & \longmapsto & \Phi((U_0, U), V), \end{array}$$

tel que

$$\Phi((U_0, U), V) = ((Y_0, Y), Z),$$

où pour

$$U_0 \in L^2(\mathcal{F}_0), \ U = (U_t) \in S^2, \ U_t = U_0, \ t < 0, \text{ et } V_t \in M^2, \ V_t = 0, \ t < 0,$$

et le couple $(Y, Z) \in S^2 \times M^2$ est l' unique solution de l'EDSR

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta} ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T], \\ Y_t = Y_0, \ Z_t = Z_{0,} \ t < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

on remarque que cette solution (Y, Z) existe et elle est unique. On pose

$$h(s) = f(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta}) ds, \ s \in [0, T],$$

et observons que, sous notre hypothèses $h \in M^2$. Si (Y,Z) est une solution de l'équation (2.2) , en prenant l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T h(s)ds/\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T h(s)ds/\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t h(s)ds, t \in [0,T], \end{aligned}$$

puis que $\xi + \int_0^T h(s)\, ds \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathcal{P})$ donc par le théorème de représentation des martingale brownienne il existe $Z \in M^2$

$$\xi + \int_0^T h(s)ds = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T h(s)ds\right] + \int_0^T Z_s dW_s, t \in Z\,[0,T],\ P-_{P.S.}$$

par contre on peut facilement vérifier que le couple $(Y,Z) \in S^2 \times M^2$définit par ces relations est une solution de l'EDSR(3.2) pour $\alpha > 0$ et $((U_0,U), V) \in (L^2(\mathcal{F}_0) \times S^2) \times M^2$ nous définissons la norme

$$\| ((U_0,U), V) \| = \| ((U_0,U), V) \|_\alpha = \left(\mathbb{E}\left[\mid U_0 \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp^{\alpha s}\left(\mid U_s \mid^2 + \mid V_s \mid^2 ds\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons que l'espace $((L^2(\mathcal{F}_0) \times S^2) \times M^2)$ muni de cette norme est un espace de Banach. On va démontrer que pour certain choix $\alpha > 0$ et pour $\delta \in (0, \delta)$ l'application

$$\Phi : \left(\left(L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2\right) \times M^2, \| \,.\, \|\right) \mapsto \left((L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2) \times M^2, \| \,.\, \|\right)$$

est contractante c.à.d., il existe un unique point fixe $((Y_0, Y), Z) \in ((L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2) \times$

M^2) de Φ par conséquent,

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Y_{s-\delta}, Z_s, Z_{s-\delta})ds - \int_t^T Z_s dW_s, \ t \in [0,T], \\ Y_t = Y_0, \ Z_t = Z_0, \ t < 0, \end{cases}$$

En particulier Y est continu et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid Y_t \mid^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[\mid \xi \mid^2\right] + 3T\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid f(s, Y_s, Y_{s-\delta}, Z_s, Z_{s-\delta} \mid^2 dt\right] \\ &\quad -12T\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid Z_t \mid^2 dt\right] < \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, $Y \in S^2$.

Soient $(U_0, U, V), \left(U'_0, U', V'\right) \in (L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2) \times M^2$ et notons par

$$\begin{aligned} \Phi(U_0, U, V) &= (Y_0, Y, Z), \\ \Phi\left(U'_0, U', V'\right) &= \left(Y'_0, Y', Z\right), \\ \left(\bar{U}_0, \bar{U}, V\right) &= (U_0, U, V) - \left(U'_0, U', V'\right), \\ \left(\bar{Y}_0, \bar{Y}, Z\right) &= (Y_0, Y, Z) - \left(Y'_0, Y', Z'\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases} \bar{Y}_t = \int_t^T f(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta}) - f(s, U'_s, U'_{s-\delta}, V'_s, V'_{s-\delta})ds - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s, t \in [0,T], \\ \bar{Y}_t = Y_0 - Y'_0, \ \bar{Z}_t = Z_0 - Z'_0, \ t < 0, \end{cases}$$

Appliquant la formule d'Itô à $\exp(\alpha t) \mid Y_t \mid^2$, on obtient, de l'hypothèse $(H2)$

$$\begin{aligned} d\left(\exp(\alpha t) \mid \bar{Y}_t \mid^2\right) &= \alpha \exp(\alpha t) \mid \bar{Y}_t \mid^2 dt \\ &\quad -2\exp(\alpha t)\bar{Y}_t \left\{f(t, U_t, U_{t-\delta}, V_t, V_{t-\delta}) - f(t, U_t, U'_{t-\delta}, V'_t, V'_{t-\delta}\right\} dt \\ &\quad +2\exp(\alpha t)\bar{Y}_t\bar{Z}_t dW_t + \exp(\alpha t) \mid \bar{Z}_s \mid^2 dt, \end{aligned}$$

Intégrant entre t et T, et en utilisant la condition de Lipschitz ,

$$\begin{aligned}
&\exp^{\alpha t} \mid \bar{Y}_t \mid^2 + \int_t^T \exp^{\alpha s} \left(\alpha \mid \bar{Y}_s \mid^2 + \mid \bar{Z}_s \mid^2\right) ds \\
&= 2 \int_t^T \exp^{\alpha t} \bar{Y}_s \times \{f(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta} - f(s, U_s, U_{s-\delta}, V_s, V_{s-\delta})\} \, ds \\
&-2 \int_t^T \exp^{\alpha t} \bar{Y}_s \bar{Z}_s dW_s \\
&\leq 2K \int_t^T \exp^{\alpha s}(\mid \bar{Y}_s \mid . \mid \bar{U}_s \mid + \mid \bar{Y}_s \mid . \mid \bar{U}_{s-\delta} \mid \\
&+ \mid \bar{Y}_s \mid . \mid \bar{V}_s \mid + \mid \bar{Y}_S \mid . \mid \bar{V}_{s-\delta} \mid) ds \\
&-2 \int_t^T \exp^{\alpha s} \bar{Y}_s \bar{Z}_s dW_{s.}
\end{aligned}$$

En utilisant pour chaque terme l'intégrale de Lebesgue sur le côté droit de l'inégalité ci-dessus et l'estimation

$$2Kab \leq 2\rho K^2 + \frac{1}{2\rho} b^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\exp^{\alpha t} \mid \bar{Y}_t \mid + \int_t^T \exp^{\alpha s} \alpha \mid \bar{Y}_s \mid^2 + \mid \bar{Z}_s \mid^2) ds \\
&\leq \int_t^T \exp(\alpha s) \, (2\rho K^2 \mid \bar{Y}_s \mid^2 + \tfrac{1}{2\rho} \mid \bar{U}_s \mid^2 + 2\rho K^2 \mid \bar{Y}_s \mid^2 + \tfrac{1}{2\rho} \mid \bar{U}_{s-\delta} \mid^2 + 2\rho K^2 \mid \bar{Y}_s \mid^2 \\
&+ \tfrac{1}{2\rho} \mid \bar{V}_s \mid^2 + 2\rho K^2 \mid \bar{Y}_s \mid^2 + \tfrac{1}{2\rho} \mid \bar{V}_{s-\delta} \mid^2 ds) - 2 \int_t^T \exp(\alpha s) \, \bar{Y}_s \bar{Z}_s dW_s \\
&= \int_t^T \exp(\alpha s) \, (8\rho K^{s2} \mid \bar{Y}_s \mid^2 + \tfrac{1}{2\rho}(\mid \bar{U}_s \mid^2 + \mid \bar{U}_{s-\delta} \mid^2 + \mid \bar{V}_S \mid^2 + \mid \bar{V}_{s-\delta} \mid^2)) ds \\
&-2 \int_t^T \exp(\alpha s) \, Y_s . \bar{Z}_s dW_s,
\end{aligned}$$

pour $\rho > 0$, on choisit $\alpha = 1 + 8\rho K^2$ et en prenant l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned}
&\exp^{\alpha t} \mid \bar{Y}_t \mid^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T \exp^{\alpha s}(\mid \bar{Y}_s \mid^2 + \mid \bar{Z}_s \mid^2) ds / \mathcal{F}_t\right] \\
&\leqslant \tfrac{1}{2\rho} \mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\beta s) \left(\mid \bar{U}_s \mid^2 + \mid \bar{U}_{s-\delta} \mid^2 + \mid \bar{V}_s \mid^2 + \mid \bar{V}_{s-\delta} \mid^2 ds / \mathcal{F}_t\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Par changement de variable $c = s - \delta$, nous avons

$$\begin{aligned} &\int_0^T \exp^{\alpha s}(\mid \bar{U}_{s-\delta} \mid^2 + \mid \bar{V}_{s-\delta} \mid^2)ds = \int_{-\delta}^{T-\delta} \exp^{\alpha(c+\delta)}(\mid \bar{U}_c \mid^2 + \mid \bar{V}_c \mid^2)dc \\ &= \exp^{\alpha\delta}(\int_{-\delta}^{0} \exp^{\alpha c}(\mid \bar{U}_c \mid^2 + \delta \mid \bar{V}_c \mid^2)dc + \int_0^{T-\delta} \exp^{\alpha c}(\mid \bar{U}_c \mid^2 + \mid \bar{V}_c \mid^2)dc) \\ &\leq \delta \exp^{\alpha\delta} \mid \bar{U}_0 \mid^2 + \exp^{\alpha\delta} \int_0^T \exp^{\alpha c}(\mid \bar{U}_c \mid^2 + \mid \bar{V}_c \mid^2)dc. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Combinant (2.3)avec(2.4), en prenant $t = 0$ et en prenant l'espérance, on obtient$(0, \delta_\rho)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mid \bar{Y}_0 \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp^{\alpha s}(\mid \bar{Y}_s \mid^2 + \mid \bar{Z}_s \mid^2)ds\right] \leq \; & \tfrac{1}{2\rho}(1 + \exp^{\alpha\delta}) \\ & (\mid \bar{U}_0 \mid^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp^{\alpha s}(\mid \bar{U}_s \mid^2 + \mid \bar{V}_s \mid^2)ds\right]. \end{aligned}$$

Pour tous $\rho > 1$ on choisie δ_ρ telle que

$$\frac{1}{2\rho}(1 + \exp^{(1+8\rho K^2)\delta_\rho}) = 1,$$

et donc pour $\delta \in$par conséquent

$$\frac{1}{2\rho}(1 + \exp^{(1+8\rho K^2)\delta}) < 1$$

Alors l'application

$$\Phi : ((L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2) \times M^2, \| \, . \, \|_\alpha) \mapsto ((L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2) \times M^2, \| \, . \, \|_\alpha)$$

est contractante donc admet un unique point fixe $((Y_0, Y)\,, Z) \in ((L^2(\mathcal{F}_0) \times M^2) \times M^2)$. ■

Application des EDSR avec retard

Si l'on veut trouver une stratégie d'investissement et un portefeuille d'investissement qui répliquer un passif ou atteindre un objectif qui dépend de la stratégie appliquée ou le portefeuille dépend de ses valeurs passées, alors les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec retard (EDSRR) sont le meilleur outil pour résoudre ce problème financier. Des EDSR avec retard peuvent survenir dans des problèmes de gestion de portefeuille, variables brentes, produits en unités de compte et contrat avec participation : "... les avantages sont basés sur le rendement d'un pool spécifique d'actifs détenus par l'assureur... La meilleure estimation doit être basée sur les actifs actuels détenus par l'entreprise. Les modifications futures de l'allocation d'actifs doivent être prises en compte ..." (directive Solvabilité II). Pour plus de détails sur les applications de telles équations, nous nous référons à Delong.[7].

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec anticipation

Après avoir discuté dans le chapitre précédent les $EDSR_s$ avec retard, nous étudions maintenant les $EDSR_s$ où le générateur anticipe les informations sur le processus de solution. Plus précisément, considérons les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec anticipation ($EDSRA_s$) dans le sens où, pour une constante δ positive, a la forme suivante

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T \mathbb{E}\left[f\left(s, Y_s, Y_{s+\delta}, Z_s, Z_{s+\delta}\right)/\mathcal{F}_s\right] ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0,T], \\ Y_t = \xi,\ Z_t = \eta,\ t > T, \end{cases} \tag{3.1}$$

Ce type d'équation a été apparu dans le travail d'ØKsendal, Sulem et Zhang [[9]], des sauts qui sont une mesure de poisson, comme équation adjointe dans la caractérisation du contrôle optimale pour les problème de contrôle stochastique avec retard. l'équation (3.1) peut être aussi écrite sous cette forme

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, \mathbb{E}\left[Z_{s+\delta}\right]/\mathcal{F}_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t \leq T, \\ Y_t = \xi,\ Z_t = \eta, \end{cases}$$

ce cas a été étudié par Øksendal et Sulem [9]. Il y a aussi le type d'anticipation de Peng-Yang [11],

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Y_{s+\delta}, Z_s, Z_{s+\delta})ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T],$$
$$Y_t = \xi,\ Z_t = \eta,$$

Maintenant, pour démontrer l'existence et l'unicité de l'équation (3.1), on suppose :

Hypothèse (H.4)

(i) Les conditions terminale : $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$

(ii) Le générateur $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}$ est prévisible et

a)

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid f(t, 0, 0, 0, 0) \mid^2 dt\right] < \infty.$$

b) Lipschitz dans le sens où il existe une constante $C \succ 0$, tel que

$$\mid f(t, y, \hat{y}, z, z) - f(t, \acute{y}, \acute{\hat{y}}, \hat{z}, \hat{z}) \mid \ \leq \ C(\mid y - \acute{y} \mid + \mid z - \acute{z} \mid + \mid \hat{y} - \acute{\hat{y}} \mid + \mid \hat{z} - \acute{\hat{z}} \mid),$$

pour tout $t \in [0, T]$ et pour $y, \acute{y}, z, \acute{z}, \hat{y}, \acute{\hat{y}}, \hat{z}, \acute{\hat{z}} \in \mathbb{R}$

Le théorème suivant indique l'existence et l'unicité de l'équation (3.1) de la solution d'une $EDSRA$.

Théoréme 3.0.2 *Sous l'hypothèse (H4), l'EDSRA* (3.1) *admet une unique solution* $(Y, Z) \in S^2 \times M^2$.

Preuve. Pour la démonstration, on utilise la même méthode qu'on a utilisé dans le chapitre précédent , qui est la méthode de point fixe, nous définissons l'application

$$\begin{aligned} \Phi: \quad S^2 \times M^2 \quad &\rightarrow \qquad M^2 \times M^2 \\ (U, V) \quad &\mapsto \quad \Phi(U, V) = (Y, Z), \end{aligned}$$

où pour $U \in M^2$, $U_t = \xi$, $t > T$, $V \in M^2$, $V_t = \eta$, $t > T$, $(Y, Z) \in S^2 \times M^2$ est une unique solution de

$$\begin{aligned} &Y_t = \xi + \int_t^T \mathbb{E}\left[f(s, U_s, U_{s+\delta}, V_s, V_{s+\delta})/\mathcal{F}_s\right] ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T], \\ &Y_t = \xi, \ Z_t = \eta, \ t > T, \end{aligned}$$

pour tout $\beta > 0$,

$$\| (Y, Z) \|_\beta^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\beta t) \left(| Y_t |^2 + | Z_t |^2\right) dt\right].$$

Nous allons montrer que l'application

$$\Phi: \left(S^2 \times M^2, \| \,.\, \|_\beta\right) \mapsto \left(S^2 \times M^2, \| \,.\, \|_\beta\right),$$

est contractante, c-à-d, il existe une unique point fixe $(Y, Z) \in (S^2 \times M^2)$ de Φ.

alors,

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_0^T \mathbb{E}\left[f(s, Y_s, Y_{s+\delta}, Z_s, Z_{s+\delta})/\mathcal{F}_s\right] ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T], \\ Y_t = \xi, Z_t = \eta, t > T. \end{cases}$$

il résulte que Y est continue. Selon les estimations standards, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid Y_t \mid^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[\mid \xi \mid^2\right] + 3T\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \mathbb{E}\left[f(t, U_t, U_{t-\delta}, V_t, V_{t-\delta})^2 ds/\mathcal{F}_s\right] \mid^2 ds\right] \\ &\quad +12\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid Z_t \mid^2 dt\right] < \infty \end{aligned}$$

Par conséquent, $Y \in S^2$.

Soient

$$(U, V), (U', V') \in S^2 \times M^2$$

et utilisons les notations

$$\begin{aligned} \Phi(U, V) &:= (Y, Z) \\ \Phi\left(U', V'\right) &:= \left(Y', Z'\right), \\ (\bar{U}, \bar{V}) &= (U, V) - \left(U', V'\right), \\ (\bar{Y}, \bar{Z}) &= (Y, Z) - \left(Y', Z'\right). \end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $\exp(\beta t) \mid Y_t \mid^2$et en prenant l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} d\left(\exp^{\beta t} \mid \bar{Y}_t \mid^2\right) &= \mathbb{E}\left[\beta \exp^{\beta t} \mid \bar{Y}_t \mid^2 dt/\mathcal{F}_t\right] \\ &\quad -\mathbb{E}\left[2 \exp^{\beta t} Y_t \left\{f(t, U_t, U_{t+\delta}, V_t, V_{t+\delta} - (t, U_t, U_{t+\delta}, V_t, V_{t+\delta})\right\} dt/\mathcal{F}_t\right] \\ &\quad +\mathbb{E}\left[\exp^{\beta t} \mid \bar{Z}_s \mid^2 dt/\mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, nous donne

$$\begin{aligned}
&\exp^{\beta t} \mid \bar{Y}_t \mid^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T \exp^{\beta s}\left(\beta \mid \bar{Y}_s \mid^2 + \mid \bar{Z}_s \mid^2\right) ds/\mathcal{F}_t\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp^{\beta s} \mid \bar{Y}_s \mid\right] \\
&\times \mathbb{E}\left[\left[f(s, U_s, U_{s+\delta}, V_s, V_{s+\delta} - f(s, U'_s, U'_{s+\delta}, V'_s, V'_{s+\delta})/\mathcal{F}_s ds)\right]/\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

la condition de Lipschitz de l'Hypothèse (H4), intégrant de 0 à T et prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mid \bar{Y}_0 \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp^{\beta s}(\beta \mid \bar{Y}_s \mid^2 + \mid \bar{Z}_s \mid^2 ds\right] \\
&\leq 2C\mathbb{E}\int_0^T \exp(\beta s) \mid \bar{Y}_s \mid (\mid \bar{U}_s \mid + \mid \bar{V}_s \mid \\
&+ (\mathbb{E}\left[\mid \bar{U}_{s+\delta} \mid^2 /\mathcal{F}_s\right])^{\frac{1}{2}} + (\mathbb{E}\left[\mid \bar{V}_{s_{+\delta}} \mid^2 /\mathcal{F}_s\right])^{\frac{1}{2}})ds \\
&\leq 8\rho C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp^{\beta s} \mid \bar{Y}_s \mid^2 ds\right] + \tfrac{1}{2\rho}\mathbb{E}\int_0^T \exp^{\beta s}(\mid \bar{U}_s \mid^2 + \mid \bar{V}_s \mid^2 \\
&+ \mathbb{E}\left[\mid \bar{U}_{s+\delta} \mid^2 /\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\mid \bar{V}_{s+\delta} \mid^2 /\mathcal{F}_s\right])ds \\
&\leq 8\rho C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp^{\beta s} \mid \bar{Y}_s \mid^2 ds\right] + \tfrac{1}{2p}\mathbb{E}\int_0^T \exp^{\beta s}(\mid \bar{U}_s \mid^2 + \mid \bar{V}_s \mid^2 \\
&+ \mid \bar{U}_s \mid^2 + \mid \bar{V}_s \mid^2 ds.
\end{aligned}$$

On choisit $\beta = 8\rho C^2 + 1$, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp^{\beta t}(\mid \bar{Y}_t \mid^2 + \mid \bar{Z}_t \mid^2 dt\right] \leq \frac{1}{\rho}\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp^{\beta t}(\mid \bar{U}_t \mid^2 + \mid \bar{V}_t \mid^2)dt\right].$$

pour $\rho > 1$, on obtient que

$$\Phi : \left(S^2 \times M^2, \| \,.\, \|_\beta\right) \to \left(S^2 \times M^2, \| \,.\, \|_\beta\right)$$

admet une unique point fixe $(Y, Z) \in (S^2 \times M^2)$. ■

Applications des EDSRA

Les EDSRA apparaissent comme l'équation adjointe, si l'on utilise le principe du maximum pour étudier le contrôle optimal des systèmes avec retard. C'est un modèle naturel de croissance de population, mais aussi dans les finances, où la mémoire des gens joue un rôle dans la dynamique des prix. D'autre part, on peut étudier les EDSR avec une anticipation adaptée du marché de l'information qui est un modèle naturel du prix de l'actif risqué chez un initié marché influencé. Le fait est que si un initié opère sur le marché, connaissant par exemple à partir de l'instant $t = 0$ la valeur terminale L du stock à l'instant $t = T$, alors il a été prouvé (Kyle, Back) que cela influencera le prix de l'actif risqué de telle sorte qu'il devienne un pont brownien se terminant à L au temps $t = T$. Un tel pont brownien peut être représenté par ce type de EDSR, un exemple de consommation optimale à partir d'un flux de trésorerie avec retard a été étudié dans [[8]].

Bibliographie

[1] Agram, N (2016). Cours Delayed and backward stochastic differential equations,
http ://elearning.univ-biskra.dz/moodle2019/pluginfile.php/7828/mod_resource/content/1/

[2] Briand, P. (2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Mars.

[3] J-M. Bismut, Conjugate convex functions in optimal stochastic control. J. Math. Ana. Appl, 44 (1973), 384-404.

[4] Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPLE's. Probab. Theory Related Fields 98 (1994), no. 2, 209-227.

[5] Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. Stochastic partial differential equations and cheir (Charlotte, NC,1991) (B.L.Sowers, eds.),Lecture Notes in Control and Inform. Sci, vol. 176, Springer, Berlin, 1992, pp. 200-217.

[6] B. Delong and P. Imkeller. Backward stochastic differential equation with time delayed generators-Result and counter examples. The Annals of Applied Probability. Vol. 20, No. 4, 1512-1536, 2010.

[7] L. Delong, Applications of Time-Delayed Backward Stochastic Differential Equations to Pricing, Hedging and Portfolio Management, Applications Mathematicae, 39, (2012), 463–488.

[8] N.H Karoui, S. Peng. and M-C. Quenez, Backaward stochastic differential equations in finance, Math. Finance 7 (1997), no. 1, 1-71.

[9] B. ∅ksendal, A. Sulem, and T. Zhang. Optimal control of stochastic delay equations and time-advanced backward stochastic diferential equations. Adv. Appl. Prob., 43 :572{596, 2011.

[10] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems and control Lett. 14, no. 1, 55-61, 1990.

[11] S. Peng and Z. Yang, Anticipated backward stochastic differential equation, The Annals of probability, 37,3, pp. 877-902, 2009.

Résumé

L'objectif de ce travail est de donner une introduction aux équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et leurs extensions aux équations avancées et retardées dans un cadre brownien On a commencé par donner le résultat classique d'existence et d'unicité de Pardoux et Peng ainsi que la solution explicite d’une EDSR linéaire ensuit on a étudié le résultat d’existence et d’unicité des EDSR$_s$ avec retard dans le cas lipchitzien et pour finir on a étudié le résultat d’existence et d’unicité des EDSR$_s$ anticipées.

ABSTRACT

The objective of this work is to give an introduction to backward stochastic differential equations (BSDE) and their extensions to delayed and anticipated equations in a Brownian framework. We started by giving the classical result of existence and uniqueness of Pardoux and Peng as well as the explicit solution of a linear BSDE then we studied the result of existence and uniqueness of BSDEs with delay in the Lipchitzian case and finally we studied the result of existence and uniqueness of the anticipated BSDEs.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو إعطاء مقدمة عن المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية (م ت ع ت) وامتداداتها للمعادلات المتأخرة و المستبقة في إطار براوني. بدأنا بإعطاء النتيجة الكلاسيكية لوجود الحل و وحدانيته ل باردوا و بانغ بالإضافة إلى حل الصريح لـ (م ت ع ت) الخطية ثم درسنا وجود الحل و وحدانيته لـ (م ت ع ت) مع التأخير في حالة لبشيتز وأخيراً درسنا نتيجة وجود الحل و وحدانيته لـ(م ت ع ت) المستبقة.