République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option :**Probabilité**.

Par

Firas Radia

Conditions nécéssaires et suffisantes d'optimalités pour les EDSs de type Mckean-Vlasov

---

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	HAFAYED MOKHTAR	UMKB	Président
Dr.	KORICHI FATIHA	UMKB	Encadreur
Dr.	ZOUZOU AKILA	UMKB	Examinatrice

Juin 2022

Dédicace

Tout ma dévotion à mon pére

qui est pour moile plus précieux et le meilleur exemple de chef de famille

qui n'a pas manqué de me guider sur le chemin du bien et du bonheur

a me chére mére quoi que je fasse ou dise je ne peux pas payer tes dettes,

Elle a toujours été ma source de force et ma force et de soutien,

il a toujours été ma force et ma force pour faire dace à divers obtacles

A mon cher et bien _aimé mari qui est mon inspiration et de bonheur,

mes chers frères et soeurs , je suis très fierde toi dans ma vie,

All collègues ont été promus en 2022.

Remerciements

La louange à Allah

Je tiens à remercier directeur de ce mémoire professeur Korichi Fatiha,

pour l'aidequ'il a fournie et les connaissances qu'il a su me transmettre

Je le remercie également pour sa disponibilité et la qualité de ses conseils.

Je remercie le professeur Hafayed Mokhtar qui m'a dirigé

et m'a fourni de precieuse informations.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs,

intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles,

leurs écrits,leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions.

Enfin, je remercie tous mes amis qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien

inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Merci à tous.

Table des matières

Introduction

Les equations deffirentielles stochastiques (EDSs) réprensentent une généralisation des equations deffirentielle classique (EDOs) Celles ci ont été introduites pour la premierére fois en 1946 par K. Itô pour étidier les trajectoires d'un processus de diffusion. Cette notion a été ytaitée de maniere profonde en relation avec la théorie des semi-martingale. Des applications dans tous les domaones de sience de l'ingenieur (féltrage des processus,contrôle optimale, mathématique financiere,gestion des stocks etc.

Le système Mckean-Vlasov, également appelés systèmes stochastique de champ moyen, ont été étudies pour la première fois par Kac[1], [3], dans le cadre de son étude de l'équation de Bilzman pour la densité de particules dans les gaz monatomiques dilués et dans celle du modèle de stochastique pour l'équation de kinetic du plasma.

Les problèmes de contrôles stochastique pour un système de champ moyen, où les coefficients dépendent de la solution ainsi de son espérance . ont été étudies par Hafayed et al[8], [13], [4], [5], [6], Le principe de maximum dans le cas oú les les coefficients dépend de la loi de la solution on eté démontré pour la première fois par Buckdahn et al [2].

Dans cette mémoire notre objectif est d'obtenir les conditions nécéssaires et suffisantes d'optimalités pour un systéme gouverné par une équation différentielle schastique de type Mckean-Vlasov,

nous déffinissons la dynamique du systéme contrôlé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dx^u(t) = f(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \sigma(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dW(t), \\ x^u(0) = x_0, \end{cases}$$

où $W(.)$ est un mouvement Brownien unidimensionel défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{P}_x = \mathbb{P} \circ x^{-1}$ disigne la loi de la variable aléatoire x, les applications : $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times Q_2(\mathbb{R}^d) \times U \to \mathbb{R}$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times Q_2(\mathbb{R}^d) \times U \to \mathbb{R}^{d \times n}$, sont des fonctions déterministes, où $Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ est l'espace de toutes les mesures de probabilité μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ de moment d'ordre deux fini muni d'une distance $\mathbb{W}_2$ (distance de Wassertien) pour tout $\mu, \upsilon \in Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$:

$$\mathbb{W}_2(\mu, \upsilon) = \inf \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y|^2 \rho(dx, dy) \right]^{\frac{1}{2}} ; \right\}.$$
$$\rho \in Q_2(\mathbb{R}^d), \rho(., \mathbb{R}^d) = \mu, \rho(\mathbb{R}^d, .) = \upsilon$$

Le système stochastique de type $Mckean - Vlasov$, (2.1) est très générale, dans le sens où la dépendance des coefficients a la loi de la solution $\mathbb{P}_{x^u(t)}$ pourrait être véritablement non linéaire en tant qu'élément de l'espace des mesures de probabilité

la fonction de coût à minimiser sur la classe du contrôle admissible est également de type. $Mckean - Vlasov$, qui est la forme ;

$$J(u(\cdot)) = \mathbf{E}\left[\int_0^T g(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \psi(x^u(T), \mathbb{P}_{x^u(T)}) \right]$$

où $g : [0,T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times U \to \mathbb{R}; \psi : \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes .

L'objectif du contrôleur est obtient un $u^*(\cdot)$ de processus -adapté qui minimiser la fonction de coût J.

Pour tout contrôle admissible $u^*(\cdot)$ satisfait :

$$J(u^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U} J(u(\cdot))$$

Est appelé contrôle optimal

Ce mémoire est composé en deux chapitres :

Le premier chapitre introductif permettant d'introduire les outils essentiels pour le reste des chapitres. Nous commençons par des généralités sur les processus stochastique, espérance conditionnelles et leurs propriétés ainsi que les mouvements Browniens et martingale stochastique et l'équitation différentielles stochastique.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter le corps principal de ce mémoire. Nous allons étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités vérifiées par un contrôle optimale donné

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous allons rappeler des notions essentielles en théorie des processus stochastiques, nous donnons les outils nécessaires et les notions de base pour le calcul stochastique.

1.1 Processus stochastique

Dans cette section, nous discutons des processus stochastique. Il s'agit de familles des variables aléatoires qui jouent un important rôle dans l'étude des phénomènes aléatoires. Nous passerons en quelques processus aux propriétés particulièrement intéressantes.

Définition 1.1.1 *Soit I un ensemble d'indices non vide. On appelle processus stochastique une famille des variables aléatoires $\{x^u(t);\ t \in I\}$ indexée par I, et définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valeurs dans un espace mesurable $(E,\ f)$, qu'on appelle espace d'états.*

1/ Pour t fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.

2/ Pour ω fixé, $t \in T \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction réelle, appelée trajectoire du processus.

Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus est à temps discret.

Si $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus est à temps continu.

- Dans la suite, nous noterons variable aléatoire par v.a.

Définition 1.1.2 *soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On appelle filtration un collection $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. Donc, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$*

- L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$ sera appelé un espace de probabilité filtré.

- Un processus $\{X_t; t \in I\}$ est dit adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

- La filtration naturelle d'un processus $\{X_t; t \in I\}$ est $\left\{\mathcal{F}_t^X; t \in I\right\}$ telle que

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_i; 0 \leq i \leq t).$$

- Un processus $X = (X_t)_{t\in I}$ est dit à des trajectoires continues (processus continu) si :

$$P(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega)\}) = 1 \ .$$

1.1.1 Processus de Markov

Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit de Markov si pour tout $0 \leq s < t$, et tout filtration borélienne et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a :

$$E\left[f(X_t)\left|\mathcal{F}_s^X\right.\right] = E\left[f(X_t)\left|X_s\right.\right] \quad \text{(presque sûrement)}$$

Avec $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_i; 0 \leq i \leq s)$.

1.1.2 Martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.3 *Un processus stochastique adapté à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est intégrable, M est une :*

sous martingale si : $\forall s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t \left|\mathcal{F}_s\right.) \geq M_s$.

sur martingale si : $\forall s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t \left|\mathcal{F}_s\right.) \leq M_s$

martingale si : $\forall s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t \left|\mathcal{F}_s\right.) = M_s$.

Un mouvement Brownien W_t est une martingale.

Le processus $\{W_t^2 - t\}$ est une martingale.

Théor■me 1.1.1 ***(représentation des martingales)***

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré et $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien.

Soit M_t une martingale $\mathcal{F}_t$-adapté, alors il existe un processus Z_t tel que :

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s.$$

1.1.3 Temps d'arrêt

Définition 1.1.4 *Un temps d'arrêt par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est un v.a* $T : \Omega \to [0, +\infty]$ *telle que :*

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega \,|T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0.$$

Pour tout temps d'arrêt, on définit :

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \,|A \cap \{T \leq t \leq\} \in \mathcal{F}_t \;, \forall t \geq 0\} \;\;.$$

1.1.4 Filtration

Définition 1.1.5 *On appelle filtration* $(F_t)_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega; \mathcal{F})$*, une famille croissante*

de sous tribus de $\mathcal{F}$.i.e .$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$,$\forall s \leq t$

Remarque 1.1.1 *Un espace de probabilité* $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ *muni d'une filtration* $(F_t)_{t\leq T}$ *est satisfait les conditions habituelles si :*

i)Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$:

ii)La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{s\geq t}\mathcal{F}_s$:

La famille croissante de sous tribus $G_t = \sigma(X_s; s \leq t)$ s'appelle la filtration naturelle du processus stochastique X. Mais G_0ne contient pas nécessairement les ensemblesnégligeables (N), c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie,par $F_t = \sigma(N \cup G_t)$.Lorsque nous parlerons de filtration naturelle,il s'agira toujours de lafiltration naturelle augmentée.

Processus adapté

Définition 1.1.6 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\leq T}$ *est adapté par rapport à la filtration*$(F_t)_{t\leq 0}$ *si*

$\forall t \geq 0\,;\, X_t \in F_t$ i.e. X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.

Modification d'un processus, Processus indistinguables

Définition 1.1.7 *Soient* $(X_t)_{t\leq 0}$*et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *deux processus stochastiques définis sur même espace* $(\Omega; \mathcal{F}; P)$

i)X est une modification (ou une version) de Y si pour tout $t \geq 0\,;$ les variables X_t et $Y_t$sont égales :

$$P - p.s.\forall t P(X_t = Y_t) = 1$$

ii) X et Y sont indistinguables si $P-$ $p.s.\,;$ les trajectoires de X et Y sont les mêmes i.e.

$$P(X_t = Y_t; \forall t \geq 0) = 1$$

Définition 1.1.8 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est progressivement mesurable par rapportà* $(F_t)_{t\leq 0}$ *; si l'application* $(s; \varpi) \to X_s(\varpi)$ *de* $[0;t]$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\beta([0;t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\beta(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

On note aussi que si X est processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.

1.1.5 Mouvement Brownien

Définition 1.1.9 *Un mouvement Brownien est un processus stochastique* $(W_t)_{t\geq 0}$ *à trajectoires continues dont les accroissements disjoints sont indépendants,et* $\forall s > 0$, $(W_{t+s} - W_t) \sim N(0, s)$.

Si de plus, $W_0 = 0$, alors $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

Si X_t est de la forme suivant :

$$X_t = X_0 \exp(ut + \sigma W_t),$$

On dit que X_t est une mouvement Brownien *géométrique.*

On peut montrer (Yong et Zhou, 1999)$\lfloor p.$ 30-32$\rceil$ que les trajectoires du mouvement Brownien sont presque sûrement (p.s) nulle part différentiables, c'est à dire que :

$$P(\left\{\omega \in \Omega \left| \lim_{h\to 0} \frac{W_{t+h}(\omega) - W_{t-h}(\omega)}{h} = \infty \right.\right\}) = 1.$$

de plus, la fonction $t \mapsto W_t(\omega)$ n'est pas p.s. à variation bornée.

1.1.6 Théorème de représentation de Riesz

Définition 1.1.10 *Si* f *une forme linéraair dans* H' *(*H' *est une espace de Hilbert) alors il existe* y *unique tel que* $y \in H'$ *vérifiée la représentaion suivant :*

$$f(x) = < y, x > .$$

1.1.7 Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

$$\mathbf{E}[\sup_{t\leq T}|\int_0^t \sigma(s,X_s)dW(s)|^2] \leq K\mathbf{E}[\int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2 ds].$$

1.1.8 Lemme de Gronwall

Soient Φ, α, et ψ des fonctions non négatives, continue définie sur $[a,b]$. Supposons que α est dérivable et à dérivé non négative, si pour tout $t \in [a,b]$

$$\Phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\Phi(s)ds.$$

Alors $\forall t \in [a,b]$:

$$\Phi(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_s^t \psi(s)ds\right).$$

1.1.9 L'intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô)

Il s'agit d'une intégrale de la forme :

$$\int_0^T X_t dW_t. \tag{1.1}$$

Où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité. En ingénierie financière, $(W_t)_{t\geq 0}$ pourrait par exemple représenter l'évolution du prix d'un actif dans le temps et $(X_t)_{t\geq 0}$ la stratégie de transaction sur cet actif d'un investisseur.

L'intégrale (1.1) est alors le gain réalisé à l'horizon T. La manipulation de cette forme d'intégrale est facilitée par l'utilisation de la formule d'Itô, faisant référence à son auteur, le mathématicien Kiyoshi Itô.

1.1.10 Propriétés de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

$$\int_0^T (aX_1 + cX_2)(s)dW(s) = a\int_0^T X_1(s)dW(s) + c\int_0^T X_2(s)dW(s)$$

$$\mathbf{E}[\int_0^T X(s)dW(s)] = 0$$

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T X(s)dW(s)\right)^2\right] = E[\int_0^T X(s)^2 ds](\text{isométrie d'Itô}).$$

$$\mathbf{E}\left[(\int_0^T X_1(s)dW(s))(\int_0^T X_2(s)dW(s))\right] = E[\int_0^T X_1(s)X_2(s)ds]$$

$$\mathbf{E}[\int_0^t X(s)dW(s)\,|\mathcal{F}_u\,] = \int_0^u X(s)dW(s)\ \text{(propriété martingale)}.$$

1.1.11 Processus d'Itô

Rappelons que S^1 désigne l'ensemble des processus intégrables, S^2 est l'ensemble des processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ tels que :

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T X^2(s)ds\right) < \infty.$$

Définition 1.1.11 *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô s'il existe X_0, $Y \in S^1$ et $Z \in S^2$ tels que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_s ds + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Théor■me 1.1.2 *(formule d'Itô)*

Soit f une fonction continument différentiable deux fois et W_t un mouvement Brownien standard. On posse :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

Pour tout t, on a :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) = & \left[f_t(t, X_t) + f(t, X_t)f_x(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma(t, X_t)^2 f_{xx}(t, X_t)\right] dt \\ & + \sigma(t, X_t)f_x(t, X_t)dW_t, \end{aligned}$$

où f_t, f_x et f_{xx} sont les dérivées partielles.

Soit W_t un mouvement Brownien standard, et

$$dX_t = X_t dW_t$$

et on pose $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \ln x.$$

On a donc $f_t(X_t) = 0,\ f_x(X_t) = \frac{1}{X_t}, f_{xx}(X_t) = -\frac{1}{X_t^2}$. D'après la formule d'Itô :

$$d(\ln X_t) = X_0 \exp(-\frac{1}{2}t + W_t).$$

On reconnaît là, un mouvement Brownien géométrique.

1.2 Variation quadratique

Soit M_1 et M_2 deux martingales, et $n \in \mathbb{N} : t_1 < \cdots < t_n = t$, une partition de $[0, t]$ telle que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}| \to 0$, alors on pose :

$$\langle M_1, M_2 \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (M_1(t_i) - M_1(t_{i-1}))(M_2(t_i) - M_2(t_{i-1})),$$

$\langle M_1, M_2 \rangle_t$ s'appelle la covariation quadratique de M_1 et M_2.

On définit ainsi la variation quadratique d'une martingale M_t :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} M_{t_i} - M_{t_{i\text{-}1}},$$

et dans le cas de mouvement Brownien standard $\langle W \rangle_t = t$.

1.3 Équations différentielles stochastiques (EDSs)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX(t) = u(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

Où

X_0 est de $\mathbb{R}^n$.

$W(t)$ est un mouvement Brownien.

$u(t, X(t))$ et $\sigma(t, X(t))$ sont des fonctions continues.

Définition 1.3.2 *Une solution forte de l'EDS (1.2) est un processus* $X = (X(t))_{t\in[0,T]}$ *continu,* $\mathcal{F}_t$*-adapté, et tel que :*

$$\begin{cases} \int_0^t |u(s,X)|^2 + |\sigma(s,X)|^2\, ds < \infty. \\ X \ \textit{vérifie} \quad (1.2). \end{cases}$$

1.3.1 Condition d'existence et d'unicité d'une solution forte

On rappelle que $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurables X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\mathbf{E}(|X|^p) < \infty, \ (p \geq 1).$$

Théorème 1.3.1 *Si les fonctions* $u(t,X(.))$ *et* $\sigma(t,X(.))$ *sont Lipchitziennes, c'est à dire qu'il existe* $M > 0$ *tel que :*

$$\begin{cases} |u(t,x(.)) - u(t,y(.))| \leq M\,|x(.) - y(.)|\,, \\ |\sigma(t,x(.)) - \sigma(t,y(.))| \leq M\,|x(.) - y(.)|\,, \end{cases}$$

et si de plus

$$|u(t,X(.))| + |\sigma(t,X(.))| \in L^2([0,T]\,;\mathbb{R}),$$

Alors pour tout $X_0 \in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$*, il existe une solution fort* X *de (1.2) qui vérifie :*

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^p) \leq L_t(1 + \mathbf{E}(|X_0|^p)), \\ \mathbf{E}(|X_t - X_s|^p) \leq L_t(1 + \mathbf{E}(|X_0|^p))\,|t-s|^{\frac{p}{2}}\,, \end{cases}$$

$\forall s,t \in [0,T]$*,* $L_T \in \mathbb{R}^*_+$*. D'autre part on suppose qu'il existe* $\hat{X}$ *une autre solution de (1.2), et tel que* $\hat{X}_0 \in L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega;\mathbb{R}^n)$

Alors pour tout $T > 0$, il existe $L_T > 0$ tel que :

$$E(\sup_{0 \leq s \leq T} \left| X_s - \hat{X}_s \right|^p) \leq L_t(1 + \mathbf{E}(\left| X_0 - \hat{X}_0 \right|^p)).$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir (Yong et Zhou,1999).

Exemple 1.3.1 *L'équation de Black scholies, voir (Pandry wilson,* 2010*)*$\lfloor$*p. 8-9*$\rceil$.

1.3.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades (ED-SRs)

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades(car la valeur terminale de la fonction inconnue est donnée),sont introduites par Bsmut 1973 dans le cas linéaire et par pardous et peng 1990 dans le cas générale, en abrege EDSR, apparaissent dans de nombreux problèmes en finance.

Selon les auteurs sus-cités, une solution d'un EDSR, est un couble de processus-adabtés (Y,Z)

satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{c} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t' dW(t) \\ Y_t = \xi, \end{array} \right\} \tag{1.3}$$

Où Z' est transposée de Z.

Théor■me 1.3.2 *On suppose que : f est uniformément Lipschitzienne, c'est à* *dire qu'ilexiste* $C > 0$ *tel que :*

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \ \forall(y_1, z_1), \forall(y_2, z_2).$$

$f(., 0, 0)$ *est de caré integrable, c'est à dire :*

$\mathbf{E}(\int_0^T |f(., 0, 0)|^2 \, dt) > \infty.$

$\xi \in L^p_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^d),$ *c-à-d* $\mathbf{E}(|\xi|^2) < \infty.$

alors, il existe une paire de processus adapté (Y, Z) qui satisfait l'EDSR (1.3).

1.4 Classes des contrôles

1.4.1 Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus $u(t)$ où $t \in [0; T]$ mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté à valeur dans un borélien $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^d$.

Notons par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles :

$$\mathcal{U} = \{u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U}, \text{ tel que } u \text{ est mesurable } \mathcal{F}_t - \text{adapté}\}.$$

1.4.2 Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible $\mathcal{U}$.

On dit que le contrôle u^* est optimal si

$$J(u^*) \leq J(u), \ \forall u \in U.$$

1.4.3 Contrôle Feed-back

Soit $u(t)$ un contrôle $\mathcal{F}_t$-adapté, et soit $\mathcal{F}_t^X$ la filtration naturelle engendrée par le processus X.

On dit que $u(t)$ est un contrôle Feed-Back si $u(t)$ est aussi adapté par rapport la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$.

On dit aussi qu'un contrôle u est Feed-Back si et seulement si u dépend de X.

Chapitre 2

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités

Dans ce chapitre, on va établir les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité pour les EDSs de type $Mckean - Vlasov$. La méthode de démonstration basée sur le principe d'optimisation convexe.

2.1 Formulation du problème

Dans ce travail, nous étudions un problème général de contrôle optimal stochastique pour de système gouverné par EDS de type $Mckean - Vlasov$ contrôlée de la forme :

$$\begin{cases} dx^u(t) = f(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \sigma(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dW(t), \\ x^u(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $W(.)$ est un mouvement Brownien unidimensionel défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{P}_x = \mathbb{P} \circ x^{-1}$ disigne la loi de la variable aléatoire x, les applications : $f : [0,T]\times\mathbb{R}^d\times Q_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}$, $\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^d\times Q_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}^{d\times n}$, sont des fonctions déterministes, où $Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ est l'espace de toutes les mesures de probabilité μ sur $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ de moment d'ordre deux fini muni d'une distance $\mathbb{W}_2$ (distance de Wassertien) pour tout $\mu,\upsilon\in Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$:

$$\mathbb{W}_2(\mu,\upsilon)=\inf\left\{\left[\int_{\mathbb{R}^{2d}}|x-y|^2\,\rho(dx,dy)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\rho\in Q_2(\mathbb{R}^d),\rho(.,\mathbb{R}^d)=\mu,\rho(\mathbb{R}^d,.)=\upsilon.$$

Le système stochastique de type $Mckean-Vlasov$ (2.1) est très générale, dans le sens où la dépendance des coefficients a la loi de la solution $\mathbb{P}_{x^u(t)}$ pourrait être véritablement non linéaire en tant qu'élément de l'espace des mesures de probabilité.

Le tout attendu à minimiser la fonction de coût sur la classe du contrôle admissible est égalment de type $Mckean-Vlasov$, qui est a la forme :

$$J(u(\cdot))=\mathbf{E}\left[\int_0^T g(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t))dt+\psi(x^u(T),\mathbb{P}_{x^u(T)})\right]. \tag{2.2}$$

où $g : [0,T]\times\mathbb{R}\times Q_2(\mathbb{R})\times\mathcal{U}\to\mathbb{R};\psi : \mathbb{R}\times Q_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes .

L'objectif du contrôleur est obtient un $u^*(\cdot)$ de processus -adapté qui minimiser la fonction de coût J.

Pour tout contrôle admissible $u^*(\cdot)$ satisfait :

$$J(u^*(\cdot))=\min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}J(u(\cdot))$$

alors un contrôle $u^*(\cdot)$ est appelé contrôle optimale.

Soit $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ l'espace Hilbert de produit intérieur $(x \cdot y)_2 = \mathbf{E}\left[x \cdot y\right]$, où $x, y \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ et la norme :

$$\|x\|_2 = \left[(x \cdot y)_2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On note par $\mathbb{L}^p_{\mathcal{F}}(\left[0.T\right], \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des processus $\mathcal{F}$-adaptés tel que $x(\cdot) \in [0, T]$ et

$$\|x\|_p = \mathbf{E}\left[\int_0^T |x(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nous rappelons maintenant brièvement, l'outille principal utilisé pour prouver le résultat principal.

La différentiable par rapport au mesure de probabilité. l'idée principale est d'identifier un distribution $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$

avec la variable aléatoire $z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ sort que $\mu = \mathbb{P}_z$.

Plus précisément, on suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suffisamment riche au sens que pour chaque $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$.

Il existe un variable aléatoire $z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = \mathbb{P}_z$(par exemple l'espace de probabilité ($[0, 1]$,f($[0, 1]), dx)$, où dx est la mesure de Borel) satisfait cet propriété.

Tou au long de cet travail, nous considérons le problème de contrôle stochastique $Mckean - Vlasov$ du type suivant.

$$\begin{cases} dx^u(t) = f(t, x(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dt + \sigma(t, x(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t))dW(t), \\ x^u(0) = x_0, \end{cases}$$

Soit $T > 0$ un nombre réels strictement positive fixé, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé, satisfaisant les conditions usuelles, dans lequel les mouvements Browniens d-dimensionnels $W(t) = \{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$ et $W(0) = 0$ sont défini.

Nous supposons qu'il existe un sous-σ-champ $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, tel que le mouvement Brownien $W(\cdot)$ est independent de $\mathcal{F}_0$, et $\mathcal{F}_0$ un assez riche,

$$\text{ie. } Q_2(\mathbb{R}^d) = \left\{\mathbb{P}_z;\ z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)\right\}.$$

Par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, on note la filtration engendrée par $W(\cdot)$, complétée est augmentée par $\mathcal{F}_0$.

Pour tout fonction $\tilde{f} : Q_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, on défini la fonction $f : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\tilde{f}(z) = f(\mathbb{P}_z); z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d).$$

Clairement, la fonction $\tilde{f}$ est appelée la portance de f, ne dépend que la loi de z, et indépendant du choix de représentant z.

Définition 2.1.1 *une fonction $f : Q_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ est dérivable en $\mu_0 \in Q_2(\mathbb{R}^d)$, s'il existe $z_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ avec $\mu_0 = \mathbb{P}_{z_0}$,*

telle que sa portance $\tilde{f}$ soit fréchet dérivable en z_0. De plus précisément, il existe une fonction linéaire continue $\mathbf{D}\tilde{f}(z_0) : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z_0 + \xi) - \tilde{f}(z_0) &= \langle \mathbf{D}\tilde{f}(z_0) \cdot \xi \rangle + O(\|\xi\|_2) \\ &= \mathbf{D}_\xi\ f(\mu_0) + O(\|\xi\|_2).\end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit dual en $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$.

Nous appelons $\mathbf{D}_\xi\ f(\mu_0)$ comme Fréchet dérivative de f en μ_0 dans la direction ξ. Alors on obtenu :

$$\mathbf{D}_\xi\ f(\mu_0) = \langle \mathbf{D}\tilde{f}(z_0) \cdot \xi \rangle = \frac{d}{dt}\tilde{f}(z_0 + t\xi)\Big|_{t=0},$$

avec $\mu_0 = \mathbb{P}_{z_0}$

On appliquant le théorème de représentation de Reisz, il existe un variable unique $\Theta_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ telle que :

$$\langle \mathbf{D}\ \tilde{f}(z_0) \cdot \xi \rangle = (\Theta_0 \cdot \xi)_2 = \mathbf{E}\left[(\Theta_0 \cdot \xi)_2\right],$$

où $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$.

Il a été montré (voire les travaux de Buckdahn et al[11]), qu'il existe une fonction de Borel $h\left[\mu_0\right] : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, dépendant uniquement de la loi $\mu_0 = \mathbb{P}_{z_0}$, mais pas de le choix particulier de représentant z_0 tel que :

$$\Theta_0 = h\left[\mu_0\right](z_0).$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} f(\mathbb{P}_z) - f(\mathbb{P}_{z_0}) = (h\left[\mu_0\right](z_0) \cdot z - z_0)_2 + O\left(\|z - z_0\|_2\right), \\ \forall z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

On note

$$\partial_\mu f(\mathbb{P}_{z_0}, x) = h\left[\mu_0\right](x), x \in \mathbb{R}^d.$$

De plus, nous avons les identités suivants :

$$\mathbf{D}\tilde{f}(z_0) = \Theta_0 = h\left[\mu_0\right](z_0) = \partial_\mu f(\mathbb{P}_{z_0}, z_0).$$

Et

$$\mathbf{D}_\xi\ f(\mathbb{P}_{z_0}) = \langle \partial_\mu f(\mathbb{P}_{z_0}, z_0) \cdot \xi \rangle,$$

Où $\xi = z - z_0$.

Remarque 2.1.1 *Pour chaque* $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d), \partial_\mu f(\mathbb{P}_{z_0}) = h\left[\mu_0\right](\cdot)$ *n'est défini que dans un sens* $\mathbb{P}_z(dx)$*, où* $\mu = \mathbb{P}_z$.

Nous rappelons maintenant brièvement une notion important de la théorie du champ-moyen, à savoir la différentiable par rapport au mesures de probabilité.

Dans l'ouvre de Cardalaiguet (voir les travaux de Buckdahn et al[11] pour plus discussion).

Définition 2.1.2 (Espace de fonctions différentiables sur $Q_2(\mathbb{R}^d)$) *On dit que la fonction* $f \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^d))$*, si pour tout* $z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$*, il existe un* $\mathbb{P}_z$*-modification de* $\partial_\mu f(\mathbb{P}_z, \cdot)$ *tel que :*

$$\partial_\mu f : Q_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

est borné et Lipchitz continu, c'est à dire pour un $C > 0$*, il tient que :*

$$\begin{aligned}
&1)\ \ |\partial_\mu f(\mu, x)| \leq C,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^d,\\
&2)\ \ |\partial_\mu f(\mu_1, x_1) - \partial_\mu f(\mu_2, x_2)| \leq C(\mathbb{W}_2(\mu_1, \mu_2) + |x_1 - x_2|),\\
&\ \forall \mu_1, \mu_2 \in Q_2(\mathbb{R}^d),\ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d,
\end{aligned}$$

Nous tenons á souligner que la version de $\partial_\mu f(\mathbb{P}_z, \cdot)$*,* $z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$*, indiqué dans la définition* (1.2) *est unique (voir la remarque* (1.2)*, dans les travaux de Bukdahn et al[11] et les travaux da Cardalaiguet pour plus discussion)*

Maintenant, soit $\mathbb{U}$ une sous-ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{U}$ une classe de processus mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté $u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U}$.

Comme l'objectif de ce travail est d'étudier le contrôle optimal stochastique, nous donnons ici la définition de la contrôle optimale admissible.

Définition 2.1.3 *Un contrôle $u(\cdot)$ est dit admissible si :*

i) $u(\cdot) \in \mathbb{U}$.

ii) $x(\cdot)$ *est l'unique solution de l'équation (2.1).*

iii) $g, \psi \in \mathbb{C}_b^{1.1}(\mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tout les contrôles admissibles.

Tout au longe de ce travail, nous supposons ce qui suite :

L'Hypothése (H1) Les fonctions : $f, \sigma, g : [0,T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont mesurables dans toutes les variables. De plus, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $f(\cdot,\cdot,u), \sigma(\cdot,\cdot,u) \in \mathbb{C}_b^{1.1}(Q_2(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}).\psi(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}_b^{1.1}(Q_2(\mathbb{R}^d), \mathbb{R})$Plus précisément, si $\Gamma(x,\mu) = f(x,\mu,u)$, $\sigma(x,\mu,u)$, $g(x,\mu,u)$, $\psi(x,\mu)$, la fonction Γ satisfaite les propriétés suivantes :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\Gamma(x,\cdot) \in \mathbb{C}_b^{1.1}(Q_2(\mathbb{R}^d))$.

2) Pour $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$ fixé, $\Gamma(\cdot,\mu) \in \mathbb{C}_b^1(\mathbb{R})$.

3) Tout les dérivés $\partial_x\Gamma, \partial_\mu\Gamma,$ pour $\Gamma = f, \sigma, g, \psi$ sont bornés

et Lipschitz continus,

où les constantes Lipschitz sont independantes de $u \in \mathbb{U}$.

4) Les fonctions : $f,$ σ et g sont continuellment différentiables

par rapport á la variable du

contrôle $\mu,$ et toutes leur dérivées $\partial_u f,$ $\partial_u \sigma$ et $\partial_u g$ sont

continues et bornés.

Clairement, dans l'hypothése (H1)et, la dynamique $Mckean - Vlasov$ a une solution fort unique $x^u(t)$, qui donnée par :

$$\begin{aligned} x^u(t) = x_0 &+ \int_0^t f(s, x^u(s), \mathbb{P}_{x^u(s)}, u(s))ds \\ &+ \int_0^t \sigma(s, x^u(s), \mathbb{P}_{x^u(s)}, u(s))dW(s). \end{aligned}$$

(Voir les travaux de Carmona et [9], et Buckahn et [9]).

Puis par l'arguments standards, il facile de montrer que pour tout $n > 0$, il tient que :

$$\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |x^u(s)(t)|^m\right] < k(m).$$

où $k(m)$ est constante dépendent uniquement de m et la fonctionnelle J est bien définie.

Soit $u^*(\cdot) \in \mathbb{U}$ un contrôle optimale et le processus d'état correspondant $x^{u^*}(\cdot)$, et la solution de la dynamique $Mckean - Vlasov$ (2.1) sont noté par $x^*(\cdot) = x^{u^*}(\cdot)$.

2.2 Equation adjointe

Soit $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}}\right)$ une copie de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour toute couble de variables aléatoires $(z, \xi) \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$,

nous laissons $(\hat{z}, \hat{\xi})$ une copie indépendant de (z, ξ) défini sur $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}}\right)$. Nous considérons l'espace de produit de probabilité $\left((\Omega \times \hat{\Omega}, \mathcal{F} \times \hat{\mathcal{F}}, \mathbb{P} \times \hat{\mathbb{P}}\right)$ et réglage $(\hat{z}, \hat{\xi})(\omega, \hat{\omega}) = (z(\hat{\omega}), \xi(\hat{\omega}))$ pour tout $(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \hat{\Omega}$.

Soit $(\hat{u}^*(t), \hat{x}^*(t))$ un copie independant de $(u^*(t), x^*(t))$ de sort que $\mathbb{P}_{x^*(t)} = \hat{\mathbb{P}}_{\hat{x}^*(t)}$.

Nous désignons par $\hat{\mathbf{E}}$ l'espérance sous la mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$. Nous disignons pour $\phi = f, \sigma, g, \psi$ ce qui suite :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\mu(t) &= \partial_\mu \phi(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \hat{x}^*_t). \\ \hat{\phi}^*_\mu(t) &= \partial_\mu \phi(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*_t; x^*(t)). \end{aligned} \tag{C1}$$

Nous définissons l'Hamiltonien habituel au problème du contrôle stochastique de champ-moyen (2.1) et (2.2) comme suite :

$$H((t, x, \mu, u, \Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t})) = \Phi(t) f(t, x, \mu, u) + \mathsf{Q}(\mathsf{t})\sigma(t, x, \mu, u) + g(t, x, \mu, u), \tag{2.3}$$

pour tout $(t, x, \mu, u, \Phi, \mathsf{Q}) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

où $(\Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et donné par l'équation différentielle stochastique arrière de champ (2.4) ci-dessous.

2.2.1 L'équation adjointe impliquée dans le principe du maximum

Nous introduisons l'équation adjointe impliquée dans le principe du maximum stochastique pour notre problème du contrôle,

$$\begin{cases} -\mathsf{d}\Phi(t) = (f_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\Phi(t) + \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu f(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t))\hat{\Phi}(t)\right] \\ +\sigma_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\mathsf{Q}(\mathsf{t}) + \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \sigma(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t))\hat{\mathsf{Q}}(\mathsf{t})\right] \\ \ +g_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t)) + \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu g(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t))\right])dt \\ \ -\mathsf{Q}(\mathsf{t})\mathsf{dW}(\mathsf{t}), \\ \Phi(T) = \psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(t)}) + \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \psi(\hat{x}^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}; x^*(t))\right]. \end{cases} \tag{2.4}$$

(Voir le travail de Buckdahn [3] pour plus discussion sur les équations différentielles stochastique rétrogrades à champ-myen),nous avons :

$\hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \phi(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t))\right] = \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \phi(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); y)\right]_{y=x^*(t)}$pour $\phi = f, \sigma, g, \psi$, si nous dénotons par $\mathcal{H}(t) := H(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t), \Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t}))$, alors l'équation adjointe peut être récrite comme suivante :

$$\begin{cases} -\mathsf{d}\Phi(t) = \left\{\mathcal{H}_x(t) + \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \mathcal{H}(t)\right]\right\} dt - \mathsf{Q}(\mathsf{t})\mathsf{dW}(\mathsf{t}) \\ \Phi(T) = \psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}) + \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \psi(\hat{x}^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}; x^*(t))\right]. \end{cases} \tag{2.5}$$

Clairement, sou l'hypothése (H1), l'équation adjointe (2.4) admet une seule solution forte, et $\mathcal{F}_t$-adapté $(\Phi(.), \mathsf{Q}(.)) \in (\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}))^2$ (Voir letravail de Buckdahn[3]) telle que :

$$E\left[\sup_{s \leq t \leq T} |\Phi(t)|^2 + \int_0^T |\mathsf{Q}(t)|^2 \, dt\right] \leq +\infty.$$

2.3 Conditions nécéssaires pour un contrôle optimal

Dans cette section, nous développons la condition necéssaire d'optimalité sous la forme de principe du maximum stochastique de Pontrayagin pour le contrôle optimal stochastique, où le systéme est gouvernés par une dynamique de $Mckean-Vlasov$ contrôlée non linéaire. La preuve de notre resultat est basée sur le dérivée par raport a la mesure de probabilité est donée dans la *section* 2, avec la formule d'Itô correspondante la méthode de dualité.

Le premier resultat principale de cete travail est énoncé dans le théorème suivante :

Théor■me 2.3.1 *Soit $(u^*(t), x^*(t))$ une solution optimale de problème de contrôle (2.1) et (2.2). Que l'hypothése (H1) soit maintenue. Alors, il existe un paire unique de processus $\mathcal{F}_t$-adapté $(\Phi(.), \mathsf{Q}(.))$ solution de l'équation adjointe (2.4) telle que* *pour tout* $u \in \mathbb{U}$:

$$0 \leq \mathbf{E}\left[\int_0^T H_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t), \Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t}))(u(t) - u^*(t))dt\right] \tag{2.6}$$

Remarque 2.3.1 *Sous l'hypothèses de théorème* (3.1), *il existe un paire unique de processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté* $(\Phi(\cdot), \mathsf{Q}(\cdot))$ *solution de l'équation (2.4) telle que :*

pour tout $u \in \mathbb{U}$,*et* $t \in [0, T]$:

$$0 \leq H_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t), \Phi(t), \mathsf{Q}(\mathsf{t}))(u(t) - u^*(t))dt, \ \mathbb{P}\text{-}p.s$$

Nous avons besoin des résultats suivantes, que nous devons traduire en notre problème de contrôle $Mckean - Vlasov$.

Soit $(u^*(t), x^*(t))$ la solution optimale du problème de contrôle (2.1) et (2.2), notre résultat est prouvé en plusieurs étapes en utilisant le fait que :

$$J(u^\theta(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) \geq 0, \tag{2.7}$$

où $u^\theta(\cdot)$ est le perturbation convexe de $u^*(\cdot)$ telle que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$u^\theta(t) = u^*(t) + \theta\left[u(t) - u^*(t)\right],$$

où $\theta > 0$ est suffisamment petit, et $u(\cdot)$ est un élément arbitraire de $\mathcal{U}$ Nous soulignons que la convexité de $\mathbb{U}$ a pour conséquence que $u^\theta(t) \in \mathcal{U}$.

Soit $x^\theta(\cdot) = x^{u^\theta}(\cdot)$ est la solution de l'équation (2.1) correspondant au contrôle admissible.

Lemme 2.3.1 *Laissez l'hypothése (H1), nous avons obtient :*

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|x^\theta(t)-x^*(t)\right|^2\right]=0.$$

Preuve. À partir d'estimation standard et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|x^\theta(s)-x^*(s)\right|^2\right]\\
&\le \mathbf{E}\left[\left|\int_0^t f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s))-f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s))\right|^2 ds\right]\\
&+\mathbf{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s))-\sigma(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s))\right|^2 ds\right]
\end{aligned}$$

En appliquant les conditions de Lipchitz sur les coefficients f,σ par rapport à x,μ et u, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|x^\theta(s)(t)-x^*(t)\right|^2\right] \qquad (2.8)\\
&\le k_T\mathbf{E}\left[\int_0^t (\left|x^\theta(s)-x^*(s)\right|^2+\left|\mathbb{W}_2(\mathbb{P}_{x^\theta(s)},\mathbb{P}_{x^*(s)})\right|^2)ds\right]\\
&+k_T\theta^2\mathbf{E}\left[\int_0^t (\left|u_s^\theta-u_s^*\right|^2)ds\right]
\end{aligned}$$

Rappelons que pour la métrique 2-Wassarstein, nous avons : avec $\mathbb{P}_{x^\theta(s)}=\mathbb{P}_{\tilde{x}^\theta(s)}$ et $\mathbb{P}_{x^*(s)}=\mathbb{P}_{\tilde{x}^*(s)}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{W}_2(\mathbb{P}_{x^\theta(s)},\mathbb{P}_{x^*(s)})=\inf\{[\mathbf{E}\left|\tilde{x}^\theta(s)-\tilde{x}^*(s)\right|^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.9)\\
&\text{Pour tout } \tilde{x}^\theta(\cdot),\tilde{x}^*(\cdot)\in\mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^d).\\
&\le\left[\mathbf{E}\left|x^\theta(s)-x^*(s)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

À partir de (2.8) et (2.9) nous avons :

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^{\theta}(t)-x^{*}(t)\right|^{2}\right]\leq k_{T}\mathbf{E}\left[\int_{0}^{t}\sup_{\alpha\in[0,s]}\left|x^{\theta}(\alpha)-x^{*}(\alpha)\right|^{2}ds\right]$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, le résultat souhaité suite immédiatement en laissant θ aller à *zéro.* ■

Lemme 2.3.2 *Soit $\phi(t)$ la solution de système $Mckean-Vlasov$ suivant :*

$$\begin{cases} d\phi(t)=(f_{x}(t,x^{*}(t),\mathbb{P}_{x^{*}(t)},u^{*}(t))\phi(t)+\hat{\mathbf{E}}\left[\partial_{\mu}f(t,x^{*}(t),\mathbb{P}_{x^{*}(t)},u^{*}(t);\hat{x}^{*}(t))\hat{\phi}(t)\right] \\ +f_{u}(t,x^{*}(t),\mathbb{P}_{x^{*}(t)},u^{*}(t))(u(t)-u^{*}(t)))dt \\ +(\sigma_{x}(t,x^{*}(t),\mathbb{P}_{x^{*}(t)},u^{*}(t))\phi(t)+\hat{\mathbf{E}}\left[\partial_{\mu}\sigma(t,x^{*}(t),\mathbb{P}_{x^{*}(t)},u^{*}(t);\hat{x}^{*}(t))\hat{\phi}(t)\right] \\ +\sigma_{u}(t,x^{*}(t),\mathbb{P}_{x^{*}(t)},u^{*}(t))(u(t)-u^{*}(t)))dWt, \\ \phi(0)=0. \end{cases} \tag{2.10}$$

ensuite, l'estimation suivant tient :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{x^{\theta}(t)-x^{*}(t)}{\theta}-\phi(t)\right|^{2}\right]=0 \tag{2.11}$$

Preuve. On appliquant l'hypothése (H1), l'équation (2.10) admet une solution unique, nous mettons :

$$\vartheta^{\theta}(t)=\frac{x^{\theta}(t)-x^{*}(t)}{\theta}-\phi(t),\ t\in[0,T]$$

de puis $\mathbf{D}_{\xi}\ f(\mathbb{P}_{z_0})=\langle\mathbf{D}\tilde{f}(z_0)\cdot\xi\rangle=\frac{d}{dt}\tilde{f}(z_0+t\xi)\Big|_{t=0}$, nous avons la forme simple suivante da la développement de Taylor :

$$f(\mathbb{P}_{z_0+\xi})-f(\mathbb{P}_{z_0})=\mathbf{D}_{\xi}f(\mathbb{P}_{z_0})+T(\xi),$$

Où $T(\xi)$ est d'ordre $O(\|\xi\|_2)$ avec $O(\|\xi\|_2) \to 0$ pour $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$,

$$
\begin{aligned}
&\vartheta^\theta(t) = \tfrac{1}{\theta} \int_0^t \left[f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) - f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)) \right] ds \\
&+ \tfrac{1}{\theta} \int_0^t \left[\sigma(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) - \sigma(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)) \right] dW(s) \\
&- \int_0^t (f_x(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s))\phi(s) + \hat{\mathbf{E}} \left[\partial_\mu f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s); \hat{x}^*(s))\hat{\phi}(s) \right] \\
&+ f_u(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u_s^*)(u(s) - u^*(s)))ds \\
&- \int_0^t (\sigma_x(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s))\phi(s) + \hat{\mathbf{E}} \left[\partial_\mu \sigma(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s); \hat{x}^*(s))\hat{\phi}(s) \right] \\
&+ \sigma_u(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s))(u(s) - u^*(s)))dW(s).
\end{aligned}
$$

Nous décomposons $\frac{1}{\theta} \int_0^t \left[f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) - f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)) \right] ds$ dans les parties suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\theta} \int_0^t \left[f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) - f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)) \right] ds \\
&= \tfrac{1}{\theta} \int_0^t \left[f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) - f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) \right] ds \\
&+ \tfrac{1}{\theta} \int_0^t \left[f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) - f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^\theta(s)) \right] ds \\
&+ \tfrac{1}{\theta} \int_0^t \left[f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^\theta(s)) - f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)) \right] ds
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta} \int_0^t \left[f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) - f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) \right] ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \left[f_x(s, x^*(s) + \lambda\theta(\gamma^\theta(s) + \phi(s)), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s))(\gamma^\theta(s) + \phi(s)) \right] d\lambda ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta} \int_0^t \left[f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)) - f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^\theta(s)) \right] ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \hat{\mathbf{E}} \left[\partial_\mu f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\gamma(s)+\phi(s))}, u^\theta(s); \hat{x}^*(s))((\hat{\gamma}(s) + \hat{\phi}(s)) d d\lambda ds \right]
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\int_0^t \left[f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s)) - f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s))\right] ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \left[f_u(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)+\lambda\theta(v(s)-u^*(s))(v(s)-u^*(s))\right] d\lambda ds.
\end{aligned}
$$

La relation analogique est valable pour σ. Par conséquence nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\gamma^\theta(s)\right|^2\right] \\
&\leq k(t)(\mathbf{E}\int_0^t\int_0^1 \left|f_x(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s))\gamma^\theta(s)\right|^2 d\lambda ds \\
&+\mathbf{E}\int_0^t\int_0^1 \hat{\mathbf{E}}\left|\partial_\mu f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\hat\gamma(s)+\hat\phi(s))},u^\theta(s)(s);\hat x^*(s))\hat\gamma^\theta(s)\right|^2 d\lambda ds \\
&+\mathbf{E}\int_0^t\int_0^1 \left|\sigma_x(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{u^\theta(s)},u^\theta(s))\gamma^\theta(s)\right|^2 d\lambda ds \\
&+\mathbf{E}\int_0^t\int_0^1 \hat{\mathbf{E}}\left|\partial_\mu \sigma(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\hat\gamma(s)+\hat\phi(s))},u^\theta(s);\hat x^*(s))\hat\gamma^\theta(s)\right|^2 d\lambda ds \\
&+\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\beta^\theta(s)\right|^2\right]).
\end{aligned}
$$

Où :

$$\begin{aligned}
\beta^\theta(t) &= \int_0^t \int_0^1 [f_x(s, x^*(s) + \lambda\theta(\gamma^\theta(s) + \phi(s)), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^\theta(s)) \\
&- f_x(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s))\phi(s) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu f(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\hat{\gamma}^\theta(s)+\hat{\phi}(s))}, u^\theta(s); \hat{x}^*(s)) \\
&- \partial_\mu f(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s); \hat{x}^*(s)]\hat{\phi}(s) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 f_u(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s) + \lambda\theta(v(t) - u^*(t)) \\
&- f_u(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s))(v(t) - u^*(t)) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 [\sigma_x(s, x^*(s) + \lambda\theta(\gamma^\theta(s) + \phi(s)), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^\theta(s)) \\
&- \sigma_x(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s))]\phi(s) d\lambda dW(s) \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu \sigma(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\hat{\gamma}^\theta(s)+\hat{\phi}(s))}, u^\theta(s); \hat{x}^*(s)) \\
&- \partial_\mu \sigma(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s); \hat{x}^*(s))]\hat{\phi}(s) d\lambda dW(s) \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \sigma_u(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s) + \lambda\theta(v(t) - u^*(t)) \\
&- \sigma_u(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u_s^*)(v_t - u^*(t)) d\lambda dW(s).
\end{aligned}$$

Maintenant, puisque les dérivées de f et σ par rapport à (x, μ, u) sont Lipchitz continues en (x, μ, u), on obtient :

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left|\beta^\theta(s)\right|^2\right] = 0.$$

Puisque les dérivées de f et σ par rapport à (x, μ, u) sont bornées, nous obtenons :

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left|\gamma^\theta(s)\right|^2\right] \leq k(t)\left\{\mathbf{E}\int_0^t \left|\gamma^\theta(s)\right|^2 ds + \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|\beta^\theta(s)\right|^2\right]\right\}.$$

On appliquant le lemme de Gronwall, alors pour tout $t \in [0, T]$

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^{2}\right] \leq k(t)\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\beta^{\theta}(s)\right|^{2}\right]\exp\left\{\int_0^t k(t)ds\right\}.$$

Enfin, mettre $t = T$ et laisser θ aller à 0 :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^{2}\right] = 0.$$

D'où

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbf{E}\left[\left|\frac{x_t^{\theta} - x^*(s)(t)}{\theta} - \phi(t)\right|^{2}\right] = 0.$$

■

Lemme 2.3.3 *Pour tout* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, *on a :*

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq \mathbf{E}\left\{\left[\psi_x(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}) + \hat{\mathbf{E}}(\partial_\mu \psi(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}))\right]\phi(T)\right. \\ &+ \int_0^T \left[g_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\phi(t) + \hat{\mathbf{E}}(\partial_\mu g(t, \hat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \hat{u}^*(t); x^*(t)))\phi(t)\right. \\ &\left.\left.+ g_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))(u(t) - u^*(t))\right] dt\right\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Preuve. De (2.2) et (2.7), on a :

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq J(u^{\theta}(t)) - J(u^*(t)) \\ &= \mathbf{E}\left[\psi(x^{\theta}(T), \mathbb{P}_{x^{\theta}(T)}) - \psi(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)})\right] \\ &+ \mathbf{E}\int_0^T \left[g(t, x^{\theta}(t), \mathbb{P}_{x^{\theta}(t)}, u^{\theta}(t)) - g(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^{\theta}(t))\right] dt \\ &+ \mathbf{E}\left[\int_0^T \left[g(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^{\theta}(t)) - g(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\right] dt\right] \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \tag{2.13}$$

On commencer par :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathbf{E}\left[\psi(x^\theta(T),\mathbb{P}_{x^\theta(T)}) - \psi(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)})\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\psi(x^\theta(T),\mathbb{P}_{x^\theta(T)}) - \psi(x^\theta(T),\mathbb{P}_{x^*(T)}) - \psi(x^\theta(T),\mathbb{P}_{x^*(T)}) + \psi(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)})\right] \\
&= \mathbf{E}\int_0^1 \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu\psi(x^\theta(T),\mathbb{P}_{x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))};x^*(T)\right]\theta(\hat{\gamma}^\theta(T)-\hat{\phi}(T))d\lambda \\
&+\mathbf{E}\int_0^1\left[\psi_x(x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T)),\mathbb{P}_{x^*(T)})\right]\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))d\lambda.
\end{aligned}$$

Par conséquence :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \mathbf{E}\int_0^T\left[g(t,x^\theta(t),\mathbb{P}_{x^\theta(t)},u^\theta(t)) - g(t,x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^\theta(t))\right]dt \\
&= \mathbf{E}\int_0^T\left[g(t,x^\theta(t),\mathbb{P}_{x^\theta(t)},u^\theta(t)) - g(t,x^\theta(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^\theta(t))\right]dt \\
&+\mathbf{E}\int_0^T\left[g(t,x^\theta(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^\theta(t)) - g(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^\theta(t))\right]dt \\
&= \mathbf{E}\int_0^T\int_0^1\hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu g(t,x^\theta(t),\mathbb{P}_{x^*(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(t)+\phi(t))},u^\theta(t))\right]\theta(\hat{\gamma}^\theta(t) \\
&+\hat{\phi}(t))d\lambda dt \\
&+\mathbf{E}\int_0^T\int_0^1 g_x(t,x^*(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(t)+\phi(t)),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^\theta(t))\theta(\gamma^\theta(t) \\
&+\phi(t))d\lambda dt.
\end{aligned}$$

De même pour I_3

$$I_3 = \mathbf{E}\int_0^T[g(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^\theta(t)) - g(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))]dt.$$

Alors, on obtient :

$$I_3 = \mathbf{E}\int_0^T\int_0^1 g_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)+\lambda\theta(v(s)-u^*(t))\theta(v(s)-u^*(t))d\lambda dt.$$

À partir de (2.13), on obtient :

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & \mathbf{E}\int_0^1 \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \psi(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))}; x^*(T)\right] \hat{\phi}(T)d\lambda \\
& + \mathbf{E}\int_0^1 \left[\psi_x(x^*(T) + \lambda\theta(\gamma^\theta(t) + \phi(t)), \mathbb{P}_{x^*(T)}; x^*(T))\right] \hat{\phi}(T)d\lambda \\
& + \mathbf{E}\int_0^T\int_0^1 \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^*(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(t)+\phi(t))}, u^\theta(t))\right] \hat{\phi}(t)d\lambda dt \\
& + \mathbf{E}\int_0^T\int_0^1 (g_x(t, x^*(t) + \lambda\theta(\gamma^\theta(t) + \phi(t)), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t))\phi(t)d\lambda dt \\
& + \mathbf{E}\int_0^T\int_0^1 g_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t) + \lambda\theta(v(t) - u^*(t))(v(t) - u^*(t))d\lambda dt \\
& + A_\theta(t).
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Où :

$$
\begin{aligned}
A_\theta(t) \ &= \mathbf{E}\int_0^1 \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \psi(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))}; x^*(T)\right] \hat{\gamma}^\theta(T)d\lambda \\
& + \mathbf{E}\int_0^1 \left[\psi_x(x^*(T) + \lambda\theta(\gamma^\theta(T) + \phi(T)), \mathbb{P}_{x^*(T)})\right] \gamma^\theta(T)d\lambda \\
& + \mathbf{E}\int_0^T\int_0^1 \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^*(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(t)+\phi(t))}, u^\theta(t))\right] \hat{\gamma}^\theta(t)d\lambda dt \\
& + \mathbf{E}\int_0^T\int_0^1 (g_x(t, x^*(t) + \lambda\theta(\gamma^\theta(T) + \phi(T)), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t))\gamma^\theta(t)d\lambda dt.
\end{aligned}
$$

A partir de (2.11), on voit que $\lim\limits_{\theta\to 0} \mathbf{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} \left|\gamma^\theta(t)\right|^2\right] = 0.$

De plus, puisque les dérivée de ψ et g par rapport à (x, μ, u) sont bornées, on a :

$$
\lim_{\theta\to 0} \mathbf{A}_\theta(t) = 0. \tag{2.15}
$$

Enfin, à partir de (2.11), (2.14) et (2.15), et la continuité de Lipschitz des dérivées avec le fait que $u^\theta(t) \to u^*(t)$ comme $\theta \to 0$, alors (2.12) :ce ci achéve la preuve du **lemme (3).** ■

Preuve. (du théorème (3,1)) E*n appliquant la formule d'Itô à* $\Phi(t)\phi(t)$et en prenant l'espérance, ou $\phi(0) = 0$, alors un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\Phi(T)\phi(T)) = \\ &\ \mathbf{E}\int_0^T \Phi^*(t)d\phi(t) + \mathbf{E}\int_0^T \phi(t)d\Phi^*(t) \\ &\quad + \mathbf{E}\int_0^T \mathsf{Q}^*(t)\{\sigma_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\phi(t) \\ &\quad + \hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu \sigma(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \hat{x}^*(t))\hat{\phi}(t)) \\ &\quad + \sigma_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))(u(t) - u^*(t))\}dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \tag{2.16}$$

Où :

$$\begin{aligned} I_1 \ &= \mathbf{E}\int_0^T \Phi(t)d\phi(t) \\ &\quad +\mathbf{E}\int_0^T \Phi(t)\{f_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\phi(t) \\ &\quad +\hat{\mathbf{E}}(\partial_\mu f(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \hat{x}^*(t))\hat{\phi}(t)) \\ &\quad +f_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))(u(t) - u^*(t))\}dt \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} &I_1 = \mathbf{E}\int_0^T \Phi(t)(f_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\phi(t)dt \\ &+\mathbf{E}\int_0^T \Phi(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu f(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \hat{x}^*(t))\hat{\phi}(t)]dt \\ &+\mathbf{E}\int_0^T \Phi(t)f_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))(u(t) - u^*(t))dt. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \mathbf{E}\int_0^T \phi(t)d\Phi^*(t) \\
&= -\mathbf{E}\int_0^T \phi(t)\{f_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\Phi(t) + \hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu f(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);\hat{x}^*(t))]\hat{\Phi}(t)) \\
&+\sigma_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\mathsf{Q}(t) + \hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu \sigma(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x^*(t))\hat{\mathsf{Q}}(t)] \\
&+g_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)) + \hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu g(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x^*(t))]\}dt \\
&= -\mathbf{E}\int_0^T \phi(t)f_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\Phi(t)dt \\
&-\mathbf{E}\int_0^T \phi(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu f(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x^*(t))\hat{\Phi}(t)]dt \\
&= -\mathbf{E}\int_0^T \phi(t)\sigma_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\mathsf{Q}(t)dt \\
&-\mathbf{E}\int_0^T \phi(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu \sigma(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x^*(t))\hat{\mathsf{Q}}(t)]dt \\
&= -\mathbf{E}\int_0^T \phi(t)g_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))dt \\
&-\mathbf{E}\int_0^T \phi(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu g(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x^*(t))]dt.
\end{aligned}
$$

De même, on peut obtenir,

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \mathbf{E}\int_0^T \mathsf{Q}(t)\sigma_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\phi(t)dt \\
&+\mathbf{E}\int_0^T \mathsf{Q}(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu \sigma(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t);\hat{x}^*(t))\hat{\phi}(t)]dt \\
&+\mathbf{E}\int_0^T \mathsf{Q}(t)\sigma_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t))dt.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

En appliquant le théoréme de fubini et puisque l'espérance $\hat{\mathbf{E}}[\cdot]$ n'agit que sur une variable aléatoire marché avecun"$\hat{\cdot}$", on a

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^T \Phi(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu f(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x(t))\hat{\phi}(t)]dt \\
&= \mathbf{E}\int_0^T \phi(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu f(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x(t))\hat{\Phi}(t)]dt.
\end{aligned}
$$

Et

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^T \mathsf{Q}(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu\sigma(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t);\hat{x}^*(t))\hat{\phi}(t)]dt \\
&=\mathbf{E}\int_0^T \phi(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu\sigma(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t);\hat{x}^*(t))\hat{\mathsf{Q}}(t)]dt.
\end{aligned}$$

D'après 2.16) et (2.18), et le fait que

$$\Phi(T)=\psi_x(x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(T)})+\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu\psi(x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(T)};x^*(t))]$$

On a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\{\psi_x(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)})+\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu\psi(\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(T)};x^*(t))]\phi(T)\} \\
&=\mathbf{E}\textstyle\int_0^T \Phi(t)f_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t))dt \\
&+\mathbf{E}\textstyle\int_0^T \mathsf{Q}^*(t)\sigma_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t))dt \\
&-\mathbf{E}\textstyle\int_0^T \phi(t)\hat{\mathbf{E}}[\partial_\mu g(t,\hat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\hat{u}^*(t);x^*(t))]dt \\
&-\mathbf{E}\textstyle\int_0^T \phi(t)g_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))dt.
\end{aligned}$$

Enfin, en appliquant le lemme(3.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbf{E}\textstyle\int_0^T \Phi(t)f_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t))dt \\
&+\mathbf{E}\textstyle\int_0^T \mathsf{Q}(t)\sigma_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t))dt \\
&+\mathbf{E}\textstyle\int_0^T g_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t))dt \\
&=\mathbf{E}\textstyle\int_0^T H_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t),\Phi(t),\mathsf{Q}(t))(u(t)-u^*(t))dt.
\end{aligned}$$

■

2.4 Conditions suffisantes pour un contrôle optimal

Le but de cette section est de dériver des conditions suffisantes pour un contrôle optimal stochastique pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de type $MCKEAN - VLASOV$, nous prouvons que sous certaines conditions de convexité sur l'Hamiltonien et sur la fonction ψ, les conditions nécessaires deviennent également suffisantes pour l'optimalité.Une fonction $f : \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ est convexe, si pour tout $(x, \mu), (x', \mu') \in \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}^d)$,

$$f(x', \mu') - f(x, \mu) \geq f_x(x, \mu)(x' - x) + \hat{\mathbf{E}} \left[\partial_\mu f(x, \mu)(X' - X) \right],$$

où $\mu = \mathbb{P}_X$ et $\mu' = \mathbb{P}_{X'}$, nous imposons la conditions suivantes :

Hypothése (H2)

Les fonctions $\psi(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et$H(t, \cdot, \cdot, \cdot, \Phi, \mathbf{Q})$:$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\psi(\cdot, \cdot) \text{ est convexe par rapport à } (x, \mu). \tag{2.19}$$

$$H(t, \cdot, \cdot, \cdot, \Phi, \mathbf{Q}) \text{ est convexe par rapport à } (x, \mu, u). \tag{2.20}$$

Théor■me 2.4.1 *Soit $v(\cdot) \in \mathcal{U}$un contrôle admissible, et $x^v(\cdot), (\Phi^v(\cdot), \mathbf{Q}^v(\cdot))$ la solution de (2.1) et (2.5), respectivement, correspondant à $v(\cdot)$.*

Que l'hypothéses (H1) et (H2) soient vérifiées, supposons que le contrôle $v(\cdot)$ vérifie que pour tout $u(\cdot) \in \mathcal{U}$:

$$0 \leq \mathbf{E} \int_0^T H_u(t, x^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, v(t), \Phi^v(t), \mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))(u(t) - v(t))dt. \tag{2.21}$$

Alors, $v(\cdot)$ est un contrôle optimal, qui réalise :

$$J(v(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathbb{U}} J(u(\cdot)). \tag{2.22}$$

Preuve. Pour tout $u(\cdot) \in U_1$ et d'après (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
&J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) \\
&= \mathbf{E}\left[\psi(x^u(T), \mathbb{P}_{x^u(T)}) - \psi(x_T^v, \mathbb{P}_{x_T^v})\right] \\
&+ \int_0^T \left[g(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, u(t)) - g(t, x^v(t), \mathbb{P}_{x^v(t)}, v(t))\right] dt.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.19), on obtient :

$$\begin{aligned}
&J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) \\
&\geq \mathbf{E}\left[(\psi(x^v(T), \mathbb{P}_{x^v(T)}) + \hat{\mathbf{E}}\left[\partial_\mu \psi(\hat{x}^v(T), \mathbb{P}_{x^v(T)}; x^*(t))\right])(x^u(T) - x^v(T))\right] \\
&+ \mathbf{E}\int_0^T \left[g(t, x^u(t), \mathbb{P}_{x^u(t)}, u(t)) - g(t, x_t^v, \mathbb{P}_{x_t^v}, v_t)\right] dt.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Maintenant, on noté par :

$$\begin{aligned}
&x^u(t) - x^v(t) \\
&= \int_0^t \left[f(s, x^u(s), \mathbb{P}_{x^u(s)}, u(s)) - f(s, x^v(s), \mathbb{P}_{x^v(s)}, v(s))\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(s, x^u(s), \mathbb{P}_{x^u(s)}, u(s)) - \sigma(s, x^v(s), \mathbb{P}_{x^v(s)}, v(s))\right] dW(s).
\end{aligned}$$

Et en utilisant la formule d'intégration par partie à $\Phi^v(t)(x^u(t)-x^v(t))$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\Phi^v(T)(x^u(T)-x^v(T))\right] \\
&= \mathbf{E}\int_0^T \Phi^v(t)d(x^u(t)-x^v(t)) + \mathbf{E}\int_0^T (x^u(t)-x^v(t))d\Phi^v(t) \\
&+\mathbf{E}\int_0^T \Phi^v(t)\left[\sigma(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t)) - \sigma(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t))\right]dt \\
&= L_1 + L_2 + L_3,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Où :

$$\begin{aligned}
L_1 &= \mathbf{E}\int_0^T \Phi^v(t)d(x^u(t)-x^v(t)) \\
&= \mathbf{E}\int_0^T \Phi^v(t)\left[f(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t)) - f(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t))\right]dt.
\end{aligned}$$

A partir de (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
L_2 &= \mathbf{E}\int_0^T (x^u(t)-x^v(t))d\Phi^v(t) \\
&= -\mathbf{E}\int_0^T (x^u(t)-x^v(t))\Big[H_x(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})) \\
&\quad +\hat{\mathbf{E}}(\partial_\mu H(t,\hat{x}^v(t),\mathbb{P}_{\hat{x}^v(t)},\hat{v}(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t});\mathsf{x}^*(t)))\Big]dt.
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$L_3 = \mathbf{E}\int_0^T \Phi^v(t)\sigma(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t))dt - \mathbf{E}\int_0^T \Phi^v(t)\sigma\left(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t)\right)dt. \tag{2.25}$$

En combinant (2.24)-(2.25), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\Phi^v(T)(x^u(T)-x^v(T))\right] \\
&=\mathbf{E}\int_0^T(H(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})) \\
&-H(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})))dt \\
&-\mathbf{E}\int_0^T(x^u(t)-x^v(t))\left[H_x(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))\right. \\
&\left.+\hat{\mathbf{E}}(\partial_\mu H(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))\right]dt \\
&-\mathbf{E}\int_0^T g(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t))dt \\
&+\mathbf{E}\int_0^T g(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t))dt.
\end{aligned}\tag{2.26}$$

A partir de (2.23) et (2.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&J(u(\cdot))-J(v(\cdot)) \\
&\geq\mathbf{E}\int_0^T(H(t,x^u(t),\mathbb{P}_{x^u(t)},u(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})) \\
&-H(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t})))dt \\
&-\mathbf{E}\int_0^T(x^u(t)-x^v(t))\left[H_x(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))\right. \\
&\left.+\hat{\mathbf{E}}(\partial_\mu H(t,\hat{x}^v(t),\mathbb{P}_{\hat{x}^v(t)},\hat{v}(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t});x^*(t))\right]dt.
\end{aligned}\tag{2.27}$$

D'après (2.20) et (2.27), on obtient :

$$J(u(\cdot))-J(v(\cdot))\geq\mathbf{E}\int_0^T H(t,x^v(t),\mathbb{P}_{x^v(t)},v(t),\Phi^v(t),\mathsf{Q}^v(\mathsf{t}))(u(t)-v(t))dt.\tag{2.28}$$

Puisque le contrôle $u(\cdot)$ est un élément arbitraire de l'ensemble $\mathcal{U}$, et qu'en combinant

(2.21) et (2.28), on obtient :

$$J(u(\cdot)) - J(v(\cdot)) \geq 0.$$

$$\text{pour tout } u(\cdot) \in \mathcal{U}.$$

Ceci complète la preuve du théorème (4.1). ■

Bibliographie

[1] D. Andersson and B. Djehiche, A maximum principle for sdes of mean-field type, Applied Mathematics & Optimization 63 (2011), no. 3, 341-356.

[2] R. Buckdahn, B. Djehiche, J. Li and S. Peng, Mean-Field backward stochastic differential equations : A limit approach, The Annals of Probability 37 (2009), no. 4, 1524-1565.

[3] F. Chighoub, B. Djehiche and B. Mezerdi, The stochastic maximum principle in optimal control of degenerate diffusions with non-smooth coefficients, Random Operators and Stochastic Equations 17 (2009), no. 1, 37-54.

[4] M.kac.Foundations of kinetic theory.Paper presented at : Proceedings of the third Berkeley Symposium on Mthematical Statistics and Probability ; 1956 ; Berkely,CA.

[5] M. kac. Probability and Related Topies in the Physical Sciences .New York, NY : interscience Publishers ;1958.

[6] M. Hafayed, A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal stochastic control. Commun math stat . 2014 ; 1(4) :417-435.

[7] M. Hafayed, A. Abba, S. Abbas. On partial-information optimal control problem for mean-field stochastic differential equations driven by Teugels martingales measures. Internat J control.2016 ; 89(2) :397-410.

[8] M. Hafayed. H.G Deniz. M. Shahlar. On optimal singular control problem for general Mekean-Vlasov differential equations : Necessary and sufficient optimality conditions, Optimal Contol Applications and Methods, 2018.

[9] M. Hafayed : A Mean-field Necessary and Suffucient Conditions for Optimal Singular Stochastic Control . *Communications in Mathematics and Statistics,* Springer, 417-435 (2014).

[10] M. Hafayed : (2013) A mean-field maximum principle for optimal control of forward-backward stochastic differential equations with poisson jump processes. International Journal of Dynamics and Control, Int. J. Dynam. Control, Springer, 1(4) 300-315.

[11] M. Hafayed, M. Tabet & S. Boukaf : (2015) Mean-field maximum principle for optimal control of forward-backward stochastic systems with jumps and its application to mean-variance portfolio problem, *Communication in Mathematics and Statistics, Springer,* Volume 3, Issue 2, pp 163-186.

[12] I.E.Lakhdari & H. Miloudi & M. Hafayed : (2020) Stochastic maximum principle for partially observed optimal control problems of general McKean-Vlasov differential equations, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Springer*

[13] J. Yong and X. Y. Zhou, Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations,vol. 43, Springer Science & Business Media, 1999.

[14] X. Y. Zhou and D. Li, Continuous-time mean-variance portfolio selection : A stochastic framework, Applied Mathematics and Optimization 42 (2000), no, 1, 19-33.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	*Espace de probabilité.*
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	*Espace de probabilité filtré.*
$W(t)$	*Mouvement Brownien*
EDS	*équation différentielle stochastique.*
$f(\mathbb{R}^d)$	*Tribu Borélienne sur* $\mathbb{R}^d$.
$J(.)$	*La fonction de coût.*
$u^*(t)$	*Contrôle optimal.*
U_1	*Ensemble des contrôles admissibles.*
$\mathbf{E}$	*Espérence par rapport á la probabilité* $\mathbb{P}$
$u^\theta(t)$	*Contrôle perturbé.*
$\mathbb{R}^d$	*Espace réel ecludienne de dimension d.*
$H(t, x, \mu, u, \Phi, \mathsf{Q})$	*Hamiltonien.*
$\langle ., . \rangle$	*Le produit scalaire dans* $\mathbb{R}^d$.
$P - p.s$	*presque surement pour la mesure de probabilité* $\mathbb{P}$