

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
*Université Mohamed Khider, Biskra*  
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Mathématiques Appliquées**”

Option : **Analyse**

Par Mr : **Belkais Naili**

**Titre :**

**Stabilité et bifurcation d'un système algébro-  
différentiel bioéconomique**

Devant le Jury :

<b>Dr Laiadi Abed Elkader</b>	U. Biskra	Président
<b>Pr Menacer Tidjani</b>	U. Biskra	Encadreur
<b>Dr Ghedjemis Fatiha</b>	U. Biskra	Examinatrice

**Soutenu Publiquement le 26/06/2022**

## *Dédicace*

Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** qui m'a donné la force et la patience  
d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur "**Tidjani Menacer**", pour  
ses précieux  
conseils et son aide durant toute la période du travail.

À mes très chers parents ma mère "**Naili zohra**" et mon père "**Naili  
Abdelbaki**"

Et à ma chère grand-mère "**Bokhemis Dalloula**", que Dieu lui fasse  
miséricorde

Mes sœurs et frères "**Hoda, Sondos, Rahil, loai, Salah** "

Toute la famille <<**Bokhemis et Laribi et Naili**>> surtout <<**Bokhemis Abd  
Eslem**>>

Tous mes collègues de ma promotion de **Master 2 Mathématiques 2022**

Tous mes amis

# Remerciements

Avant tout, je remercie infiniment Dieu, le tout puissant, le tout miséricordieux

de

m'avoir donné la santé et la volonté pour réaliser ce mémoire.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements et ma gratitude à tous **mes professeurs** du Département de Mathématiques de l'**Université Mohamed Khider de Biskra**, en particulier mon professeur et directeur dans mon travail achevé **Tidjani Menacer**.

J'exprime également mes remerciements aux membres du jury, Monsieur **Laiadi Abed Elkader**, et Madame **Ghedjemis Fatiha**.

♡Je remercie particulièrement **mon père** qui a toujours été ma source de courage♡

# Notations et symbols

Notation	:	Signification
EAD	:	Equation Algébro-Différentielle
EDO	:	Equation Différentielle Ordinaire
$Det$	:	Déterminant
$v$	:	profit économique
$\bar{x}$	:	point d'équilibre
$\dot{x}$	:	$\frac{dx}{dt}$

# Table des matières

<b>Dédicace</b>	i
<b>Remerciements</b>	ii
<b>Notations et symbols</b>	iii
<b>Table des matières</b>	iii
<b>Table des figures</b>	vii
<b>Liste des tableaux</b>	viii
<b>Introduction</b>	1
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques</b>	<b>3</b>
1.1 Système dynamique . . . . .	3
1.1.1 Systèmes dynamiques continus . . . . .	4
1.1.2 Systèmes dynamiques discrets . . . . .	4
1.2 flot ou système dynamique . . . . .	5
1.3 Espace de phase . . . . .	8

1.4	Orbite et portrait de phase	8
1.5	Attracteurs	8
1.6	Points d'équilibre	8
1.6.1	Notion de point d'équilibre (ou point fixe)	8
1.7	Cycles limites	11
1.7.1	Classification des cycles limites	11
1.8	La théorie des bifurcations	11
<b>2</b>	<b>Équations algébro-différentielles</b>	<b>14</b>
2.1	Équations algébro-différentielles	14
2.2	Formes des équations algébro-différentielles	16
2.2.1	Équations algébro-différentielles linéaires	16
2.2.2	Équations algébro-différentielles non linéaires	16
2.2.3	Équations algébro-différentielles implicites	16
2.2.4	Équations algébro-différentielles semi-explicites	16
<b>3</b>	<b>Stabilité et bifurcation d'un système algébro-différentiel bioéco-</b>	
	<b>nomique</b>	<b>19</b>
3.1	Configuration du formulaire	19
3.2	Analyse mathématique	22
3.2.1	Existence et unicité	22
3.2.2	Positivité et délimitation	23
3.3	Nombre d'équilibres	24
3.4	Analyse dynamique	28

3.4.1	Analyse de stabilité locale	28
3.5	Analyse bifurcation de Hopf	31
3.6	Exemple numérique	33
3.6.1	Nombre des équilibres intérieurs	34
3.6.2	Stabilité locale des équilibres intérieurs :	34
3.6.3	Bifurcation de Hopf par l'équilibre interne	35
	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

# Table des figures

2.1 Pendule	18
3.1 Nombre des équilibres intérieurs du système (3.4) par rapport au profit économique $v$ , pour $0 < v \leq 5$	35
3.2 Les coordonnées biologiques $X_e, Y_e$ des 2 équilibres intérieurs $X_{e_1}$ et $X_{e_2}$	35
3.3 Représentation de la trace $Tr$ et le déterminant $Det$ de la matrice Jacobienne $A$ aux deux équilibres intérieurs $X_{e_1}$ et $X_{e_2}$ pour $v \in I_v$	36
3.4 Représentation des discriminants de $X_{e_1}$ et $X_{e_2}$ et la trace $Tr(A(X_{e_1}))$	36
3.5 Évolution temporelle des proies $x$ , et le portrait de phase du système (3.4) pour $v = 0.955 < v_1^*$	37
3.6 Évolution temporelle des espèces $x, y$	38
3.7 Évolution temporelle des espèces $x, y$	38



# Liste des tableaux

3.1 Évaluation des coefficients p et q	.....	33
--	-------	----

# Introduction

L'étude de l'histoire mathématique, comme nous le savons, a vu des développements et des changements dans de nombreuses questions et théories. [2] Parmi les théories qui ont attiré les scientifiques étaient les équations algèbro-différentielles où la première rencontre de l'EAD était en 1987, dans lequel un accent particulier a été mis sur les domaines d'application dans les circuits électriques mécaniques qui a finalement lancé un torrent de recherche en mathématiques appliquées et les sciences de l'ingénierie. puis l'EAD<sub>S</sub> est devenue un sujet brûlant de 1989 à 1996, attirant de plus en plus de chercheurs. Afin d'en savoir plus sur l'EAD, nous avons abordé dans ce mémoire son concept et certains de ses types et l'application de ses caractéristiques dans un exemple lié à notre réal.

Ce mémoire est organisé comme suit, sous le titre “**Stabilité et bifurcation d'un système algèbro-différentiel bioéconomique**”, où nous l'avons divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, quelques notions de bases et résultats généraux sur les systèmes dynamiques ont été introduits, ainsi que l'analyse de la stabilité et des ramifications. Le but de ce chapitre est de donner une base théorique pour notre sujet de mémoire. Dans le deuxième chapitre, nous avons évoqué le concept et certains types d'équations différentielles algébriques qui étaient à la base de cette note. Dans le dernier chapitre, nous avons étudié un système d'algèbro différentielle qui représente les aspects économiques et biologiques. Nous avons

appliqué les bases et idées des chapitres précédents pour comprendre le comportement du modèle, compris la stabilité et la bifurcation des points d'équilibre. Ensuite, nous avons vérifié l'efficacité des résultats obtenus sur les aspects économiques et biologiques. Enfin, nous avons fait une conclusion générale, dans laquelle nous avons mentionné quelques points de vue et suggéré quelques améliorations pour la recherche.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, nous introduisons des concepts de système dynamique et de quelques généralités à ce sujet.

### 1.1 Système dynamique

**Définition 1.1.1** *Un système dynamique est un modèle utilisé pour décrire l'évolution au cours du temps d'un groupe des choses en interaction, il est défini par triplet  $(x, T, \varphi)$  consistant de l'espace d'état  $x$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état  $\varphi : x \times T \rightarrow x$ , qui permet de définir, à partir d'un vecteur des conditions initiales, l'état du système à tout instant.*

Il existe deux grandes catégories de systèmes dynamiques : les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret.

### 1.1.1 Systèmes dynamiques continus

En général les systèmes dynamiques en temps continu peuvent être décrits mathématiquement par **une équation différentielle** de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- $\frac{dx(t)}{dt} = \left( \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)^t$ .
- $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^t \in D \subset \mathbb{R}^n$ .

Si la fonction  $f$  est une fonction de l'état  $x(t)$  et de la variable du temps  $t$  i.e :

$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$  on dit que le système dynamique est **non autonome**.

### 1.1.2 Systèmes dynamiques discrets

Nous pouvons écrire des systèmes dynamiques en temps discret mathématiquement par **un système d'équations aux différences finies** autrement dit par une récurrence.

On appelle système dynamique **discret autonome** d'ordre 1 l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t), t \in \mathbb{N} \\ x_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (1.2)$$

où :

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  : Valeur initiale.

- $x_t \in D \subset \mathbb{R}^n$  : Vecteur des états du système.

De (1.2) on obtient :

- $x_1 = f(x_0)$ .
- $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ .

En général :  $x_t = f^t(x_0)$  où  $f^t = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{t \text{ fois}}$ .

- $f(x_0)$  est appelée première itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .
- $f^2(x_0) = f(f(x_0))$  est appelée seconde itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .
- $f^t$  est appelée  $t^{\text{ième}}$  itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .

Donc, le triplet  $(D, \mathbb{N}, \varphi)$  définit un système dynamique **discret autonome**, où  $\varphi$  est donné par :  $\varphi(x_0, t) = f^t(x_0)$ .

## 1.2 flot ou système dynamique

**Définition 1.2.1** [6] *Le processus d'évolution temporelle peut être décrit comme un flot du champ de vecteur. Mathématiquement, le flot est défini par :*

$$\varphi_t(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

Où  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  est une fonction vectorielle régulière dépend de  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  de  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  et satisfait l'équation :

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = f(\varphi_t(x)), \tag{1.3}$$

Le flot  $\varphi_t(x)$  satisfait les propriétés suivantes :

(a)  $\varphi_0 = Id$ .

(b)  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ .

On donne souvent une condition initiale

$$x(0) = x_0 \in U, \tag{1.4}$$

au quel cas on cherche une solution  $\varphi(t, x_0)$  telle que

$$\varphi(0, x_0) = x_0, \tag{1.5}$$

**Exemple 1.2.1** [8] *Considérons l'équation différentielle*

$$\begin{cases} x' = -z \\ z' = x \end{cases} \tag{1.6}$$

Si  $(x, z) = (x(t), z(t))$  est une solution, alors

$$(x^2 + z^2)' = 2xx' + 2zz' = -2xz + 2zx = 0,$$

Donc, il existe un constant  $r \geq 0$  telle que

$$x^2(t) + z^2(t) = r^2,$$

Soient

$$x(t) = r \cos \theta(t) \text{ et } z(t) = r \sin \theta(t),$$

Où  $\theta$  est une fonction différentiable, il résulte de l'identité  $x' = -z$  que

$$-r\theta'(t) \sin \theta(t) = -r \sin \theta(t),$$

Donc,  $\theta'(t) = 1$  et il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $\theta(t) = t + c$ . pour

$$(x_0, z_0) = (r \cos c, r \sin c) \in \mathbb{R}^2,$$

On obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos(t+c) \\ r \sin(t+c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \cdot r \cos c - \sin t \cdot r \sin c \\ \sin t \cdot r \cos c + \cos t \cdot r \sin c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

est une matrice de rotation pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ . Puisque  $R(0) = Id$ , donc, la famille des applications  $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont définies par

$$\varphi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

est un flot.

On note que l'identité  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$  est équivalente à l'identité entre matrices de rotation

$$R(t+s) = R(t)R(s).$$



## 1.3 Espace de phase

Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état, qui ont la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé l'espace de phase où chaque point définit un état et le point associé à cet état décrit une trajectoire. [9]

## 1.4 Orbite et portrait de phase

La fonction régulière  $\varphi(., x_0) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  définit une courbe de solutions **trajectoire**, ou **orbite** du système continu (1.1) basé sur  $x_0$ .

L'ensemble de toutes les trajectoires qualitatives du système est appelé **portrait de phase**.

## 1.5 Attracteurs

**Définition 1.5.1** [6] *Zone d'espace de phase où, convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipative, est appelé "attracteur". les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution durable des systèmes dynamiques.*

## 1.6 Points d'équilibre

### 1.6.1 Notion de point d'équilibre (ou point fixe)

S'il est possible que la trajectoire d'un système corresponde, à partir d'un certain moment, uniquement à un point, un tel point est appelé point d'équilibre. Nous

allons voir que les problèmes de stabilité ont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibre.

**Définition 1.6.1**

On dit que  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  est un point d'équilibre ou point critique de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x)$$

Si

$$f(\bar{x}) = 0$$

**Exemple 1.6.1** *considérons le système discret suivant*

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha x_1(t) + x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + \beta x_2(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

un point d'équilibre de (1.7) est un vecteur  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , solution du système

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha x_1(t) + x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + \beta x_2(t) \end{cases}$$

ce qui donne deux points d'équilibre

$$\bar{x} = (0, 0) \text{ et } \bar{x} = ((1 - \alpha)(1 - \beta)^2, (1 - \alpha)(1 - \beta))$$

Nous allons intéresser, dans un premier temps, au cas des systèmes autonomes.

### Stabilité du point d'équilibre

1.  $\bar{x}$  est dit **stable** si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que,

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \eta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t > 0 \quad (1.8)$$

Dans le cas contraire il est dit **instable**.

2.  $\bar{x}$  est dit asymptotiquement **stable** s'il est stable et si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \quad (1.9)$$

3.  $\bar{x}$  est dit **marginalelement stable** s'il est stable mais non asymptotiquement stable.

4.  $\bar{x}$  est dit **exponentiellement stable** s'il existe deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x_0 - \bar{x}\| \quad (1.10)$$

**Exemple 1.6.2** [4] considérons le système régi par l'équation

$$\dot{x}(t) = a \left[ 1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t) \text{ où } a > 0, c > 0 \quad (1.11)$$

Les points d'équilibre de ce système sont les solutions de l'équation algébrique

$$a \left[ 1 - \frac{\bar{x}}{c} \right] \bar{x} = 0$$

Donc, il existe deux points d'équilibre  $\bar{x}_1 = 0$ ,  $\bar{x}_2 = c$ .

Telle que :

1. le point  $\bar{x}_1 = 0$  est **instable**.
2. le point  $\bar{x}_2 = c$  est **asymptotiquement stable**.

## 1.7 Cycles limites

Un cycle limite est une trajectoire fermée, solution du système .

**Définition 1.7.1** [10] *Un système  $\dot{x} = f(x)$  possède un **cycle limite**  $C$ , s'il existe un intervalle de temps  $[t_0; t_0 + T[$  et un point de départ  $x_0 \in C$ , tel que en désignant par  $\varphi(t)$  la solution de système avec condition initiale  $x(t_0) = x_0 = \varphi(t_0)$  on ait :*

- $\varphi(t) \in C, \forall t \in [t_0; t_0 + T[$ ,
- $\varphi(T) = x_0$ ,

### 1.7.1 Classification des cycles limites

#### Définition 1.7.2

Un cycle limite  $C$  est dit :

- 1- **Stable** : toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle convergent vers  $C$ .
- 2- **Instable** : toutes les trajectoires divergent de  $C$ .
- 3- **Semi-stable** : si certaines trajectoires convergent vers  $C$ .

## 1.8 La théorie des bifurcations

L'objectif de la théorie de la bifurcation du champ vectoriel est décrire les modifications du portrait de phase du champs de vecteurs.

Soit :

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \tag{1.12}$$

Où

$f$  est supposée  $C^2$  en  $x$ .  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  quand on modifie la valeur du paramètre  $\lambda$ . et  $\bar{x}$  la solution de (1.12).

**Définition 1.8.1** *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $\bar{x}$  lorsqu'on modifie  $\lambda$ , et d'une méthode plus précise la disparition ou le modification de stabilité et de nouvelles solutions émergent.*

Dans un système les bifurcations se ramènent à quatre types de bifurcations générique que nous allons présenter sur quatre cas simples monodimensionnels.

### **Bifurcation nœud-col**

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre est le polynôme quadratique

$$f(x, \lambda) = \lambda - x^2, \tag{1.13}$$

La fonction (1.13) s'appelle **la forme normale** de la bifurcation nœud-col. on a alors  $f(x, \lambda) = \lambda - x^2$ .

### **Bifurcation transcritique**

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points d'équilibres (les points stables deviennent instable et vice versa ) lorsque  $\lambda$  franchit 0.

représenté principalement par cette équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^2, \tag{1.14}$$

### **Bifurcation fourche (Pitchfork)**

Au point de jonction se trouve la stabilité d'un point modification à la naissance d'une paire de point d'équilibre.

L'équation générique d'une bifurcation fourche (sur-critique) est :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^3,$$

Et pour sous-critique est :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + x^3,$$

### **Bifurcation de Hopf**

La bifurcation de Hopf se produira lorsque le paramètre de contrôle  $\lambda$  prend une valeur critique  $\lambda_0$ , la matrice jacobienne du système contient une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

**Définition 1.8.2** *Soit*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \tag{1.15}$$

Un système dynamique non linéaire de dimension  $n$  et de paramètre de contrôle  $\lambda$ . Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $\bar{x}$  de système (1.15) lorsqu'on modifie  $\lambda$ , d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

# Chapitre 2

## Équations algébro-différentielles

Les équations algébro-différentielles [EAD](#) ont suscité un grand intérêt en [1987](#) et ont contribué à la création de nombreux concepts mathématiques.

### 2.1 Équations algébro-différentielles

**Définition 2.1.1** [\[5\]](#) Une équations algébro-différentielle est une équation de la forme :

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{2.1}$$

où  $f : I \times V_x \times V_{\dot{x}} \rightarrow C_m$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle compact,  $V_x, V_{\dot{x}} \subset C^n$  sont des ouverts, et  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Une solution de l'équation [\(2.1\)](#) est une fonction dérivable  $x$  vérifiant.

$$f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \text{ pour tout } t \in I$$

**Exemple 2.1.1** [6] Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - 2x_2 - 2 = 0, \\ \frac{1}{2}\dot{x}_1x_3 + \dot{x}_2 = 0, \\ x_1 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 1 = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

La matrice jacobienne associée à ce système est

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x_3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Évidemment,  $Det(\partial f/\partial \dot{x}) = 0$ , donc le jacobien est une matrice singulière quelque soit la valeur de  $x_3$ , dans ce cas là, le système donné est une équation algébro différentielle. On résoudre pour  $\dot{x}_1$  à partir de la première équation  $\dot{x}_1 - 2x_2 - 2 = 0$ , on obtient  $\dot{x}_1 = 2x_2 + 2$ , et on résoudre  $\dot{x}_2$  à partir de la deuxième équation  $\frac{1}{2}\dot{x}_1x_3 + \dot{x}_2 = 0$ , on obtient  $\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_3\dot{x}_1 = -x_2x_3 - x_3$ . On remplace dans la troisième équation  $x_1 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 1 = 0$ , On trouve  $x_1 - 2x_3 - x_1x_3 - 1 = 0$ . Donc, le système équivalent au système (2.2) peut être écrit come suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + 2, \\ \dot{x}_2 = x_3(-x_2 - 1), \\ 0 = x_1 - 2x_2 - x_3(1 + x_2) - 1, \end{cases}$$

Cette EAD contient deux équations différentielles et une équation algébrique.



## 2.2 Formes des équations algébro-différentielles

### 2.2.1 Équations algébro-différentielles linéaires

Le cas le plus simple pour une EAD est aussi le cas **linéaire** et il se présente sous la forme :

$$E\dot{x} = Ax + f(t),$$

avec  $E$  et  $A$  deux matrices à coefficients constants, et  $E$  non inversible.

### 2.2.2 Équations algébro-différentielles non linéaires

Les équations algébro-différentielles non linéaires sont décrits comme un système implicite des équations différentielles et d'autres algébriques sous la forme de l'équation (2.1) où  $f$  est supposée non linéaire.

### 2.2.3 Équations algébro-différentielles implicites

Équations différentielles implicite compulsives sont donnés dans leur image publique par (2.1) par lequel jacobienne devrait être  $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$  individualisé le long d'une solution particulière de ces EAD. [6]

**Exemple 2.2.1** Le système (2.2) est une équation algébro-différentielle implicite.

### 2.2.4 Équations algébro-différentielles semi-explicites

La forme la plus simple de problème est celle où nous pouvons écrire le système dans la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z), \\ 0 = g(t, x, z), \end{cases} \quad (2.3)$$

et  $g_z$  (le dérivé partielle  $\partial g/\partial z$ ) a un inverse borné dans un voisinage de la solution. En supposant que nous avons un ensemble de valeurs initiales cohérentes  $(x_0, z_0)$ , il découle du théorème de fonction inverse que  $z$  peut être trouvé en fonction de  $x$ . Ainsi, l'existence locale, l'unicité et la régularité de la solution découle de la théorie des EAD<sub>s</sub>. [\[1\]](#)

**Exemple 2.2.2** [\[3\]](#) *Un exemple simple d'EAD provient de la modélisation du mouvement d'un pendule en coordonnées cartésiennes. On suppose que le pendule ait une longueur 1 et les coordonnées de la petite boule de masse 1 à la fin de la tige sont  $(x_1, x_2)$ . Les équations du mouvement de Newton sont de la forme :*

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\lambda x_1, \\ \ddot{x}_2 = -\lambda x_2 - g. \end{cases} \quad (2.4)$$

Tel que  $g$  est la constante de gravité mise à l'échelle, et  $\lambda(t)$  est la fonction inconnue qui exprime le multiplicateur de Lagrange. La contrainte de position est

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

qui exprime la condition que la tige ait une longueur fixe égale à 1. Un système d'EAD de la forme [\(2.3\)](#) avec quatre équations différentielles et une équation algébrique est donné par :

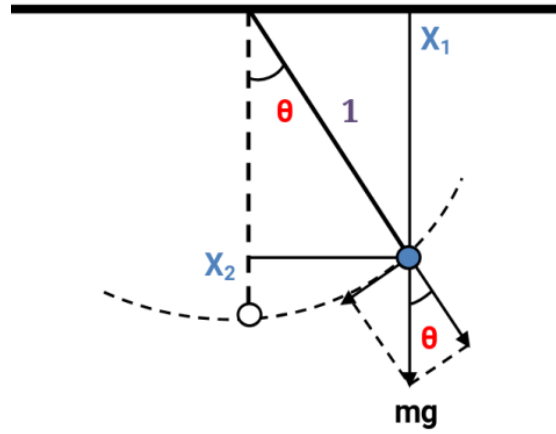


FIG. 2.1 – Pendule

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = -\lambda x_1, \\ \dot{x}_4 = -\lambda x_2 - g, \\ 1 = x_1^2 + x_2^2. \end{array} \right.$$

# Chapitre 3

## Stabilité et bifurcation d'un système algébro-différentiel bioéconomique

### 3.1 Configuration du formulaire

Aujourd'hui, le manque de nourriture et la destruction de l'environnement écologique représentent un problème à double tranchant pour l'humanité. Par conséquent, l'étude et la conception de modèles bio-économiques est un processus d'une grande importance en termes de diversité environnementale afin de réaliser des bénéfices à afin d'assurer la prospérité des nations, le scientifique **Gordon** a présenté une théorie économique sur les ressources ayant des caractéristiques communes en étudiant l'impact du processus de récolte. sur l'environnement d'un point de vue écologique. Il a proposé l'équation suivante :

$$\text{Revenu Économique Net (REN)} = \text{Revenue Total (RT)} - \text{Coût Total(CT)} \quad (3.1)$$

Plusieurs chercheurs ont, par la suite, étudié ce type de dynamique en [[6, 7, 10]], Les auteurs ont étudié le comportement dynamique d'une classe d'écosystème (proie prédateur) composée de plusieurs équations différentielles et d'une équation algébrique, les résultats sont intéressants.

Dans ce chapitre, nous visons à concevoir un modèle qui combine les aspects économiques et d'autres aspects biologiques de la gestion des ressources. Le modèle est conçu comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{ax^2y}{d+x^2}, \\ \dot{y} = sy(1 - \frac{y}{N}) + \frac{bx^2y}{d+x^2}, \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans notre modèle, nous supposons qu'il existe une limite supérieure du ratio de prédation  $\frac{ax^2y}{d+x^2}$ . On remarque que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{d+x^2} = a$$

Tel que :

- Les proies ayant la densité  $x$  et les prédateurs ayant la densité  $y$  du modèle
- $\dot{x} = dx/dt, \dot{y} = dy/dt$ .
- $r$  et  $s$  sont des constantes positives représentant les taux de croissance intrinsèque des populations de proies et de prédateurs, respectivement.
- $K$  et  $N$  sont des constantes positives représentant la capacité de charge des deux espèces,  $d$  et  $a$  sont des constantes positives représentant la demi-capture de saturation et l'efficacité maximale de la prédation, respectivement.
- $b$  est une constante positive qui représente le coefficient de conversion.

Nous savons également que le facteur d'effort de récolte joue un rôle important dans la construction d'une mathématique bio-économique utile, pour cette raison, et compte tenu de (3.1), le système sera élargi (3.2) à travers l'équation algébrique

qui décrit le **profit économique**  $v$  par rapport à l'**effort de récolte** sur les prédateurs : [\[10\]](#)

$$E(t)(py(t) - c) = v, \quad (3.3)$$

Où  $0 \leq E(t) \leq E_{max}$  et  $y(t) \geq 0$  représentent l'**effort de récolte** et la **densité du prédateur**, respectivement,  $p$  représente le **prix d'unité de la population récoltée** et  $c$  est le **coût de l'effort** de récolte, le revenu total est  $TR = pE(t)y(t)$  et le **coût total** est  $TC = cE(t)$ .

À travers [\(3.2\)](#) et [\(3.3\)](#), nous avons établi un modèle algébro-différentiel composé de deux équations différentielles et une équation algébrique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{ax^2y}{d+x^2}, \\ \dot{y} = sy(1 - \frac{y}{N}) + \frac{bx^2y}{d+x^2} - Ey, \\ 0 = E(py - c) - v, \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce système est une **EAD** semi-explicite de la forme

$$\begin{cases} \dot{Z} = f(Z, E), \\ 0 = h(Z, E), \end{cases} \quad (3.5)$$

Là,  $Z = (x, y)^T$  représente la variable différentielle et  $E$  dénote la variable algébrique.

Les fonctions  $f$  et  $h$  sont régulières et sont données par :

$$f(Z, E) = \begin{pmatrix} f_1(Z, E) \\ f_2(Z, E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r(1 - \frac{x}{K}) - \frac{axy}{d+x^2}) \\ y(s(1 - \frac{y}{N}) + \frac{bx^2}{d+x^2} - E) \end{pmatrix},$$

$$h(Z, E) = E(py - c) - v.$$

## 3.2 Analyse mathématique

Pour des considérations biologiques, nous intéresserons qu'à la dynamique de ce modèle dans l'octant positif  $\mathbb{R}_+^3$ . Ainsi, nous considérons les conditions initiales suivantes qui sont biologiquement significatives :

$$x(0) = x_0 \geq 0, \quad y(0) = y_0 \geq 0, \quad E(0) = E_0 = \frac{v}{py_0 - c}, \quad py_0 - c > 0. \quad (3.6)$$

### 3.2.1 Existence et unicité

**Proposition 3.2.1** *Le système (3.4) équipé par les conditions initiales (3.6) admet une solution maximale unique  $X = (Z, E)^T = (x(t), y(t), E(t))^T$  dans un sous-ensemble ouvert  $U$  de*

$$\Omega = \{f(x, y, E)^T \in \mathbb{R}_+^3 / py - c > 0\}$$

défini sur un intervalle maximal  $[0, T[$ .

**Preuve.** Soit  $X = (x, y, E)^T \in U$  alors, d'après l'équation algébrique  $h(x, y, E) = 0$  on obtient  $E = \frac{v}{py - c}$ , on remplace dans la deuxième équation différentielle de (3.4), l'EAD est transformé en l'EDO suivant qui admet la même solution par rapport aux variables différentielles  $Z = (x, y)^T$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ax^2y}{d+x^2} \\ \dot{y} = sy\left(1 - \frac{y}{N}\right) + \frac{bx^2y}{d+x^2} - \frac{vy}{py-c}, \end{cases} \quad (3.7)$$

■

Sa forme vectorielle est  $\dot{Z} = F(Z)$ , où

$$F(Z) = \begin{pmatrix} x(r(1 - \frac{x}{K}) - \frac{axy}{d+x^2}) \\ y(s(1 - \frac{y}{N}) + \frac{bx^2}{d+x^2} - \frac{v}{py-c}) \end{pmatrix}$$

Ouvrtement  $F \in C^1(U')$ , où  $U'$  est un sous-ensemble ouvert de

$$\Omega' = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}_+^2 / py - c > 0\}.$$

Ainsi, l'existence locale et l'unicité de la solution maximale ont été confirmées  $(x, y)^T$  de (3.7) pour tout  $(x_0, y_0) \in U'$  et c'est après avoir appliqué le théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'EDO. Donc, la présence locale et le caractère unique de la solution ont été clairs et confirmés de (3.4) est explicite. [7]

### 3.2.2 Positivité et délimitation

En ce qui concerne la positivité de la solution système (3.4), nous proposons la proposition suivante :

**Proposition 3.2.2** *Toute solution régulière de (3.4) définie sur l'intervalle maximal  $[0, T[$  avec les conditions initiales positives (3.6), alors elle reste positive pour toute  $t \in [0, T[$ .*

$$py(t) - c \neq 0. \tag{3.8}$$



### 3.3 Nombre d'équilibres

Dans cette section, nous visons à examiner les points d'équilibre positifs et à étudier leur stabilité. Un point d'équilibre du système (3.4) est une solution des équations suivantes :

$$\begin{cases} f_1(Z, E) = 0, \\ f_2(Z, E) = 0, \\ h(Z, E) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Par l'analyse des racines de (3.9), il s'ensuit que

- 1- Si  $v = 0$ , il y a au moins trois points d'équilibre sur les bornes de contact positif  $X_{e_1} = (0, 0, 0)$ ,  $X_{e_2} = (K, 0, 0)$ ,  $X_{e_3} = (0, N, 0)$ , Il y a aussi au plus cinq autres soldes sur les extrémités de contact positif  $X_{e_i} = (x_i^*, y_i^*, 0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , où  $x_i^*$  sont les racines de l'équation :

$$r\left(1 - \frac{x}{K}\right)\frac{d+x^2}{ax} - N\left(1 + \frac{bx^2}{s(d+x^2)}\right) = 0,$$

Ou de façon équivalente, l'équation du 5<sup>ème</sup> degré suivante :

$$x^5 - Kx^4 + (2d + NabK/(rs) + NaK/r)x^3 - 2dKx^2 + (d^2 + NadK/r)x - d^2K = 0,$$

qui satisfait  $0 < x_i^* < K$ , et

$$y_i^* = \frac{r}{Kax_i^*}(K - x_i^*)(d + (x_i^*)^2), \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

- 2- si  $v > 0$ , les bornes à cadran positif présentent au maximum deux points d'équilibre :  $X_{e_i} = (0, y_i^*, \frac{v}{py_i^* - c})$ ,  $i = 1, 2$ , où  $y_i^*$  sont les racines de l'équation

quadratique suivante :

$$psy^2 - s(Np + c)y + N(cs + v) = 0,$$

qui satisfait  $y_i^* > \frac{c}{p}$ , huit points d'équilibre intérieurs au maximum :

$$X_{e_i} = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \frac{v}{p\bar{y}_i - c}), \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

Où

$$\bar{y}_i = \frac{r}{Ka\bar{x}_i}(K - \bar{x}_i)(d + \bar{x}_i^2) > \frac{c}{p},$$

et  $\bar{x}_i$  comme solution à l'équation :

$$s\left(1 - r\left(1 - \frac{x}{K}\right)\frac{d + x^2}{Nax}\right) + \frac{bx^2}{d + x^2} - \frac{v}{p\left(r\left(1 - \frac{x}{K}\right)\frac{d + x^2}{ax}\right) - c} = 0,$$

Ou par un moyen équivalent :

$$\begin{cases} P(x) = \sum_{i=0}^8 p_i x^i = 0, \\ Q(x) = \sum_{i=0}^3 q_i x^i > 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

Où  $p_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 8$  sont indiqués par :

$$p_0 = d^3 K^2 pr^2 s,$$

$$p_1 = -(acd^2 K^2 rs + ad^2 K^2 Nprs + 2d^3 Kpr^2 s),$$

$$p_2 = a^2 cdK^2 Ns + acd^2 Krs + ad^2 KNprs + d^3 pr^2 s + 3d^2 K^2 pr^2 s + a^2 dK^2 Nv,$$

$$p_3 = -(abdK^2 Npr + 2acdK^2 rs + 2adK^2 Nprs + 6d^2 Kpr^2 s),$$

$$p_4 = a^2 bcK^2 N + abdKNpr + a^2 cK^2 Ns + 2acdKrs + 2adKNprs + 3d^2 pr^2 s \\ + 3dK^2 pr^2 s + a^2 K^2 Nv,$$

$$p_5 = -(abK^2 Npr + acK^2 rs + aK^2 Nprs + 6dKpr^2 s),$$

$$p_6 = abKNpr + acKrs + aKNprs + 3dpr^2 s + K^2 pr^2 s,$$

$$p_7 = -2Kpr^2 s,$$

$$p_8 = pr^2 s,$$

et  $q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  sont fournis par

$$q_0 = dKpr,$$

$$q_1 = -(acK + dpr),$$

$$q_2 = Kpr,$$

$$q_3 = -pr.$$

Comme il existe trois changements de signe dans l'ensemble des coefficients  $q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , alors, selon la règle des signes de Descartes, c'est soit la racine positive  $\bar{x}_1$ , ce que représente trois racines positives  $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \bar{x}_3$  de  $Q(x)$ .

Laissez  $p_0, p_1, \dots, p_l$  la suite des polynômes générés par l'algorithme Euclidien démarré avec  $p_0 = p, p_1 = p'$ . Le nombre exact d'équilibres intérieurs de (3.4) est

donné par la proposition suivante :

**Proposition 3.3.1** *Le nombre des équilibres intérieurs de (3.4) est identique à  $m$*

$$m = \lambda(0) - \lambda(\bar{x}_1), \text{ si } Q(x) \text{ a une racine,} \quad (3.11)$$

Ou

$$m = \lambda(0) - \lambda(\bar{x}_1) + \lambda(\bar{x}_2) - \lambda(\bar{x}_3), \text{ si } Q(x) \text{ a trois racines,} \quad (3.12)$$

Où  $\lambda(x)$  indique le nombre de modifications de panneau dans la suite  $\{P_i(x)\}$ .

**Preuve.** Le nombre des l'équilibres intérieurs de (3.4) est égal au nombre de solutions positives de (3.10). Alors, on a ■

- \* Si  $Q(x)$  reconnaît une racine, alors pour n'importe quel  $x > 0$ , nous avons  $Q(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]0, \bar{x}_1[$ ,  $P(x) = 0$  admet des solutions précisément  $\lambda(0) - \lambda(\bar{x}_1)$  entre l'intervalle  $]0, \bar{x}_1[$ . par conséquent,  $P(x) = 0$  accepte exactement  $m = \lambda(0) - \lambda(\bar{x}_1)$  solutions positives satisfont  $Q(x) > 0$ .
- \* Si  $Q(x)$  reconnaît trois racines, donc pour n'importe quel des  $x > 0$ , nous avons  $Q(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]0, \bar{x}_1[ \cup ]\bar{x}_2, \bar{x}_3[$ , au final,  $p(x) = 0$  admet des solutions précisément  $\lambda(0) - \lambda(\bar{x}_1)$  dans l'intervalle  $]0, \bar{x}_1[$  et des solutions  $\lambda(\bar{x}_3) - \lambda(\bar{x}_2)$  dans l'intervalle  $]\bar{x}_2, \bar{x}_3[$ . alors,  $P(x) = 0$  accepte exactement.

$$m = \lambda(0) - \lambda(\bar{x}_1) + \lambda(\bar{x}_2) - \lambda(\bar{x}_3),$$

des solutions positives répondent à  $Q(x) > 0$ . [6]

## 3.4 Analyse dynamique

Dans cette partie, nous étudions la stabilité d'un point d'équilibre intérieur  $X_e$  du système (3.4) et on analysons la bifurcation selon la valeur du profit économique  $v$ . La présente étude a été maniée en utilisant tant la théorie de bifurcation et la théorie de la forme normale.

### 3.4.1 Analyse de stabilité locale

Aux fins de l'analyse de la stabilité locale d'un point d'équilibre  $X_e$ , mettre  $X = Q\bar{X}$  comme illustré, tel que

$$\bar{X} = (x, y, \bar{E})^T, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{E_e p}{py_e - c} & 1 \end{pmatrix},$$

Il en résulte  $D_X h(X_e)Q = (0, 0, py_e - c)$ , et

$$x = x, \quad y = y, \quad \bar{E} = E + \frac{E_e p y}{py_e - c}.$$

Il est donc possible d'exprimer le système (3.4) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r(1 - \frac{x}{K}) - \frac{axy}{d+x^2}), \\ \dot{y} = y(s(1 - \frac{y}{N}) + \frac{bx^2}{d+x^2} - \bar{E} + \frac{E_e p y}{py_e - c}), \\ 0 = (\bar{E} - \frac{E_e p y}{py_e - c})(py - c) - v. \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous dénotons également par :

$$f(v, \bar{X}) = \begin{pmatrix} f_1(v, \bar{X}) \\ f_2(v, \bar{X}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r(1 - \frac{x}{K}) - \frac{axy}{d+x^2}) \\ y(s(1 - \frac{y}{N}) + \frac{bx^2}{d+x^2} - \bar{E} + \frac{E_e py}{py_e - c}) \end{pmatrix},$$

$$h(v, \bar{X}) = \left( \bar{E} - \frac{E_e py}{py_e - c} \right) (py - c) - v, \quad \bar{X} = (x, y, \bar{E})^T,$$

Et il est permis de conclure que le système (3.13) admet le point d'équilibre positif suivant :

$$\bar{X}_e = (x_e, y_e, \bar{E}_e)^T = \left( x_e, y_e, E_e + \frac{E_e py}{py_e - c} \right)^T,$$

et que  $D_X h(\bar{X}_e)Q = (0, 0, py_e - c)$ .

En ce qui concerne le système (3.13), on considère la paramétrisation local suivant :

$$\bar{X} = \Psi(v, \delta) = \bar{X}_e + U_0 \delta + V_0 g(v, \delta), \quad h(v, \Psi(v, \delta)) = 0,$$

Ici,  $\delta = (y_1, y_2)$ ,  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application

régulière.

Plus d'informations sur le paramétrisation locale se trouve dans [6, 10]. Ensuite, on

peut déduire que le système paramétrique de (3.13) est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(v, \psi(v, \delta)), \\ \dot{y}_2 = f_2(v, \psi(v, \delta)), \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour cette raison, la matrice jacobienne  $A(v)$  du système paramétrique (3.14) à

$\delta = 0$  est de la forme :

$$\begin{aligned}
 A(v) &= \begin{pmatrix} D_{y_1} f_1(v, \psi(v, \delta)) & D_{y_2} f_2(v, \psi(v, \delta)) \\ D_{y_1} f_1(v, \psi(v, \delta)) & D_{y_2} f_2(v, \psi(v, \delta)) \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} D_{\bar{X}} f_1(v, \bar{X}_e) \\ D_{\bar{X}} f_2(v, \bar{X}_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\bar{X}} h(v, \bar{X}_e) \\ U_0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} D_x f_1(v, \bar{X}_e(v)) & D_x f_1(v, \bar{X}_e(v)) \\ D_x f_2(v, \bar{X}_e(v)) & D_x f_2(v, \bar{X}_e(v)) \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} x_e \left( -\frac{r}{K} + \frac{ay_e(x_e^2 - d)}{(x_e^2 + d)^2} \right) & -\frac{ax^2}{x_e^2 + d} \\ \frac{2bdx_e y_e}{(x_e^2 + d)^2} & y_e \left( -\frac{s}{N} + \frac{pE_e}{py_e - c} \right) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En outre, on peut exprimer l'équation caractéristique de la matrice  $A(u)$  peut être exprimée par :

$$\beta^2 + a_1(v)\beta + a_2(v) = 0, \quad (3.15)$$

Où

$$\begin{aligned}
 a_1(v) &= x_e \left( \frac{r}{K} - \frac{ay_e(x_e^2 - d)}{(x_e^2 - d)^2} \right) + y_e \left( \frac{s}{N} - \frac{pE_e}{py_e - c} \right), \\
 a_2(v) &= x_e y_e \left( -\frac{r}{K} + \frac{ay_e(x_e^2 - d)}{(x_e^2 - d)^2} \right) \left( -\frac{s}{N} + \frac{pE_e}{py_e - c} \right) + \frac{2abd x_e^3 y_e}{(x_e^2 + d)^3}.
 \end{aligned}$$

Pour le point d'équilibre positif  $\bar{X}_e$  du système (3.13), on a :

- 1- S'il ya  $a_1^2(v) \geq 4a_2(v)$  et  $a_2(v) > 0$ , de sorte que quand  $a_1(v) > 0$ ,  $\bar{X}_e$  est un **nœud localement asymptotiquement stable**. Lorsque  $a_1(v) < 0$ ,  $\bar{X}_e$  est un **nœud instable**.
- 2- Si  $a_2(v) < 0$ ,  $\bar{X}_e$  est un point selle **instable**.

**3-** Si  $a_1^2(v) < 4a_2(v)$ , puis, lorsque  $a_1(v) > 0$ ,  $\bar{X}_e$  est un foyer **localement asymptotiquement stable**. Lorsque  $a_1(v) < 0$ ,  $\bar{X}_e$  est un foyer **instable**.

**Remarque 3.4.1** [10] Le point d'équilibre positif  $\bar{X}_e$  du système (3.13) constitue le point d'équilibre  $\delta = 0$  du système (3.14).

### 3.5 Analyse bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf est une forme de bifurcation très intéressante. signifie l'occurrence ou la disparition locale d'une solution périodique d'un point d'équilibre lors du passage d'un paramètre à travers une valeur critique appelée valeur de bifurcation. Dans ce fragment, il est question de la bifurcation de Hopf dans le système (3.13) à partir du point d'équilibre  $X_e$  sur la base du profit économique  $v$  comme **une valeur de bifurcation**. Si on pose  $a_1^2(v) \leq 4a_2(v)$ , alors l'équation (3.15) admet une paire de racines complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= -\frac{1}{2}a_1(v) \pm i\sqrt{a_2(v) - \frac{a_1^2(v)}{4}}, \\ &= \sigma(v) \pm i\mu(v). \end{aligned}$$

Qu'il en soit  $a_1(v) = 0$ , obtenons la valeur de bifurcation  $v^*$  qui satisfait

$$v^* = \frac{(py_e(v^*) - c)^2}{py_e(v^*)} \left( \frac{s}{N}y_e(v^*) + x_e(v^*) \left( \frac{r}{K} - \frac{ay_e(v^*)((x_e(v^*))^2 - d)}{((x_e(v^*))^2 + d)^2} \right) \right)$$

Si

$$\frac{r}{K} = \frac{ay_e(v^*)((x_e(v^*))^2 - d)}{((x_e(v^*))^2 + d)^2},$$



Donc

$$v^* = \frac{s(py_e(v^*) - c)^2}{pN}. \quad (3.16)$$

De plus

$$\sigma(v^*) = 0, \quad \mu(v^*) = \sqrt{\frac{2abdy_e(v^*)(x_e(v^*))^3}{((x_e(v^*))^2 + d)^3}} > 0, \quad (3.17)$$

Ce qui veut dire que si  $\sigma'(v^*) = \frac{d}{dv} \left( \frac{Npv_y_e(v) - sy_e(v)(py_e(v) - c)^2}{N(py_e(v) - c)^2} \right)_{v=v^*} \neq 0$ , donc, la bifurcation de Hopf se produit la valeur  $v^*$ . le signe du nombre  $\gamma$  offert par

$$\gamma = \frac{1}{8} \left[ \frac{3a^3x_e^5(d - x_e^2)}{(d + x_e^2)^6} (-y_e(3d - x_e^2) + 4d) + \frac{sp\mu^{*2}}{N(py_e - c)} + \frac{3p^2cE_e\mu^{*2}}{(py_e - c)^3} \right], \quad (3.18)$$

Ce panneau détermine la direction de la bifurcation de Hopf par l'équilibre intérieur  $X_e(v)$  du système (3.4) dans la mesure où il sera mentionné du prochain théorème.

**Théorème 3.5.1** [10] *En ce qui concerne le système (3.4), il ya une constante positive  $\varepsilon$  et de petites voisins du point d'équilibre positif  $X_e(v)$  :  $Z_1$  et  $Z_2$ , où*

$$0 < \varepsilon \leq 1 \text{ et } Z_1 \subset Z_2.$$

**Cas1** Si  $\gamma > 0$ , a ce moment -la

- \* Quand  $v^* < v < v^* + \varepsilon$ ,  $X_e(v)$  refuse tout points en  $Z_2$ , donc il est **instable**.
- \* pour autant que  $v^* - \varepsilon < v < v^*$ , le système (3.4) admet au moins une solution périodique située dans  $\bar{Z}_1$  (le fermé de  $Z_1$ ), on rejette tous les points dans  $\bar{Z}_1 \setminus X_e(v)$ , en même moment une autre solution périodique (éventuellement identique) rejette tous les points de  $Z_2 \setminus \bar{Z}_1$ , puis  $X_e(v)$  est **localement asymptotiquement stable**.

**Cas2** Si  $\gamma < 0$ , a ce moment -la

- \* Lorsque  $v^* - \varepsilon < v < v^* + \varepsilon$ ,  $X_e(v)$  attire tous les points dans  $Z_2$ , donc  $X_e(v)$  est **localement asymptotiquement stable**.
- \* Lorsque  $v^* - \varepsilon < u < v^* + \varepsilon$ , le système (3.4) admet au moins une solution périodique située dans  $Z_1$ , l'un d'eux attire tous les points dans  $\bar{Z}_1 \setminus X_e(v)$ , en même temps une autre solution périodique (peut être la même) attire tous les points dans  $Z_2 \setminus \bar{Z}_1$ , alors  $X_e(v)$  est **instable**. [6]

### 3.6 Exemple numérique

Nous réalisons maintenant quelques simulations pour mieux comprendre notre traitement analytique. L'exemple numérique suivant montre les différents comportements dynamiques lorsque le profit économique augmente d'une certaine valeur  $v^*$ . [10] Considérons les valeurs des paramètres suivantes :

$$r = 0.728025, \quad a = 1, \quad b = 0.72, \quad c = 0.28, \quad d = 0.3, \quad p = 3, \quad s = 0.75, \quad K = 4, \quad N = 0.8. \quad (3.19)$$

Coefficients $p_i$		Coefficients $q_i$	
$p_0$	0.51518	$q_0$	2.62089
$p_1$	-2.36479	$q_1$	-1.77522
$p_2$	$6.5172 + 3.84v$	$q_2$	8.7363
$p_3$	-22.6624	$q_3$	-2.18408
$p_4$	$27.7848 + 12.8v$		
$p_5$	-52.1281		
$p_6$	31.0395		
$p_7$	-9.54038		
$p_8$	1.19255		

TAB. 3.1 – Évaluation des coefficients p et q  
[3.1]

### 3.6.1 Nombre des équilibres intérieurs

Pour toutes les valeurs des paramètres (3.19), nous calculons les coefficients  $p_i$ ,  $i = 0, \dots, 8$  et  $q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  de  $P(x)$  et  $Q(x)$  respectivement, défini dans (3.10) sous sa forme actuelle. est présenté au tableau 3.1. Le polynôme  $Q(x)$  est admet une racine positive unique  $\bar{x}_1 \approx 3.8701$ . Ainsi, par la proposition 3.4.1, le nombre exact des équilibres intérieurs de (3.4) correspond à  $m = \lambda(0) - \lambda(\bar{x}_1)$ . Un code **Matlab** basé sur l'algorithme euclidien est élaboré, pour calculer ce nombre, pour  $0 < v \leq 5$ , et les résultats sont affichés sur la figure 3.1.

Nous constatons que pour  $0 < v < v_c \approx 1.436$ , il existe deux équilibres. et pour  $v_c < v \leq 5$ , il n'existe aucun équilibre interne. La figure 3.2 montre les coordonnées biologiques des deux équilibres intérieurs  $X_{e_1}$  et  $X_{e_2}$  relatives au profit économique  $v$ , indiquant que les deux équilibres coïncident lorsque  $v = v_c \approx 1.436$ , mais ils disparaissent pour  $v > v_c$ .

### 3.6.2 Stabilité locale des équilibres intérieurs :

Nous analysons la stabilité locale des deux équilibres  $X_{e_1}$  et  $X_{e_2}$  dans l'intervalle d'existence  $I_v = ]0, v_c[$ . On calcule la trace  $Tr$  et le déterminant  $Det$  de la matrice Jacobienne  $A$  aux deux équilibres, comme le montre la figure 3.3

-Pour le deuxième équilibre  $X_{e_2}$ , noter que  $Tr(A(X_{e_2})) \geq 0$  et  $Det(A(X_{e_2})) \leq 0$  pour tout  $v \in I_v$ , Indique que  $X_{e_2}$  est toujours un point de selle instable.

-Pour le premier équilibre  $X_{e_1}$ , on note que  $Tr(A(X_{e_1}))$  change sa signe et

$Det(A(X_{e_1})) > 0$  et  $\Delta_{X_{e_1}} < 0$  pour tout  $v \in I_v$ , indiquant que  $X_{e_1}$  est toujours foyer qui modifie sa caractéristique de stabilité. La figure 3.4 montre  $Tr(A(X_{e_1}))$  par en termes de profit économique  $v$  montrant que  $X_{e_1}$  est un foyer localement

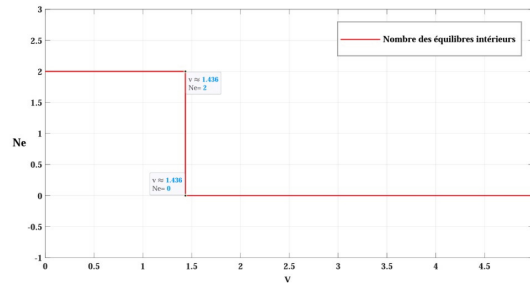


FIG. 3.1 – Nombre des équilibres intérieurs du système (3.4) par rapport au profit économique  $v$ , pour  $0 < v \leq 5$

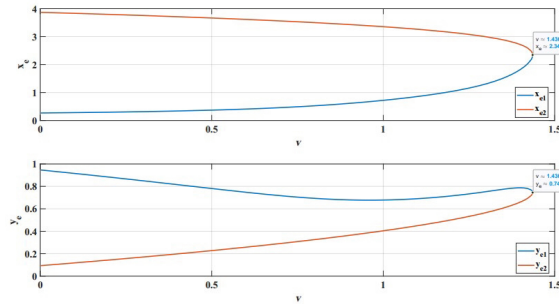


FIG. 3.2 – Les coordonnées biologiques  $X_e, Y_e$  des 2 équilibres intérieurs  $X_{e_1}$  et  $X_{e_2}$

stable pour  $0 < v < v_1^* \approx 0.9596$  ou  $1.4147 \approx v_2^* < v < v_c$ , et un foyer instable pour  $v_1^* < v < v_2^*$ . [10]

### 3.6.3 Bifurcation de Hopf par l'équilibre interne

Tant que  $Det(A(X_{e_2})) \leq 0$  pour toute  $v \in I_v$ , la bifurcation de Hopf n'est pas effectué à travers le deuxième équilibre interne, donc nous étudions la bifurcation de Hopf seulement par le premier équilibre interne  $X_{e_1}$ . Par étude de stabilité locale, il y a deux bifurcations possibles de Hopf à  $v = v_1^*$  et à  $v = v_2^*$ . Accent sur la bifurcation de Hopf à  $v = v_1^*$ . Afin de déterminer les valeurs de bifurcation Hopf de haute précision de  $v_1^*$  à travers  $X_{e_1}$ , nous résolvons numériquement l'équation

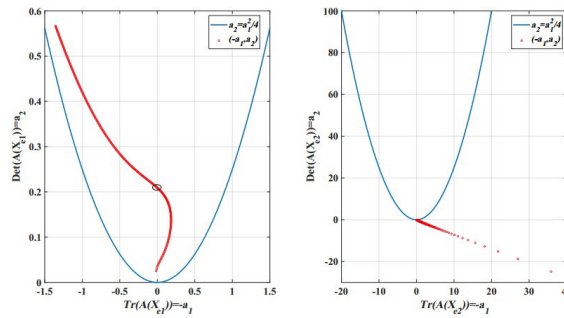


FIG. 3.3 – Représentation de la trace  $Tr$  et le déterminant  $Det$  de la matrice Jacobienne  $A$  aux deux équilibres intérieurs  $X_{e_1}$  et  $X_{e_2}$  pour  $v \in I_v$ .

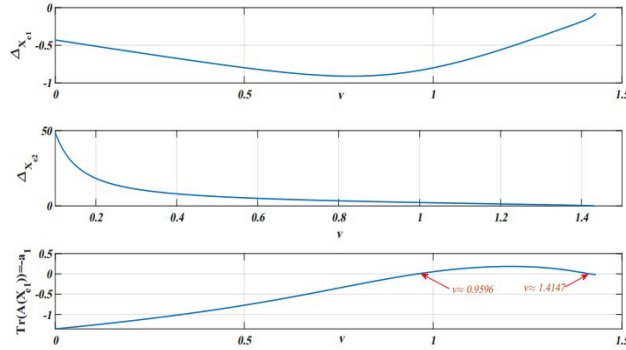


FIG. 3.4 – Représentation des discriminants de  $X_{e_1}$  et  $X_{e_2}$  et la trace  $Tr(A(X_{e_1}))$

(3.17). [6] Premièrement, nous identifions la fonction

$$g(v) = \frac{s(py_e(v) - c)^2}{pN} - v,$$

donc (3.17) peut être écrit comme

$$g(v) = 0, \tag{3.20}$$

Pour se rapprocher de la solution, nous développons le code Matlab basé sur la méthode La section équitale est appliquée à l'intervalle  $I_0 = [0.9, 1]$ .

Notre  $g(0.9).g(1) \approx -6.6 \times 10^{-4} < 0$ , cela implique (3.20) admet au moins une solution dans  $I_0$ . Nous choisissons l'erreur maximale  $\epsilon = 10^{-13}$ , En suite, on obtient  $v_1^* \approx 0.959607613852853$ .

Nous remplaçons (3.18) nous trouvons  $\gamma \approx 0.0232833778979292 > 0$  qui répond au cas 1 de la théorème 3.5.1. Par la suite, le système (3.4) subit une bifurcation de Hopf souscritique à travers  $X_{e_1}$  à  $v = v_1^*$ , où  $X_{e_1}$  st localement asymptotique stable pour  $v$  est proche de  $v_1^*$  avec  $v < v_1^*$  et il est entouré par un cycle limite instable bifurquant comme le montre la figure 3.5.  $X_{e_1}$  devient un centre de  $v = v_1^*$  comme la figure 3.6 apparaît. Enfin,  $X_{e_1}$  est un foyer instable pour  $v$  proche de  $v_1^*$  avec  $v > v_1^*$  comme le montre la figure 3.7

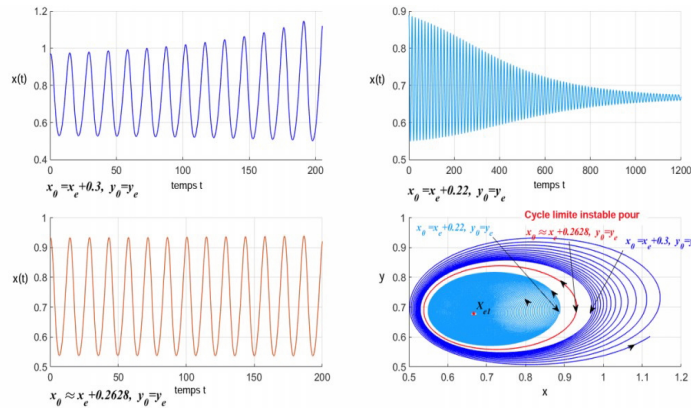


FIG. 3.5 – Évolution temporelle des proies  $x$ , et le portrait de phase du système (3.4) pour  $v = 0.955 < v_1^*$

Pour les proies et les espèces prédatrices. En outre, la réponse fonctionnelle utilisée est Holing III type, ce qui rend notre modèle plus réaliste, en outre il se concentre sur l'attention les aspects économiques des efforts de pêche commerciale sur les prédateurs. Un autre avantage est que le modèle proposé contient plusieurs équilibres internes, ce qui signifie qu'en théorie contrôle, les pêcheurs ont de nombreuses possibilités et possibilités de stabiliser l'écosystème au point

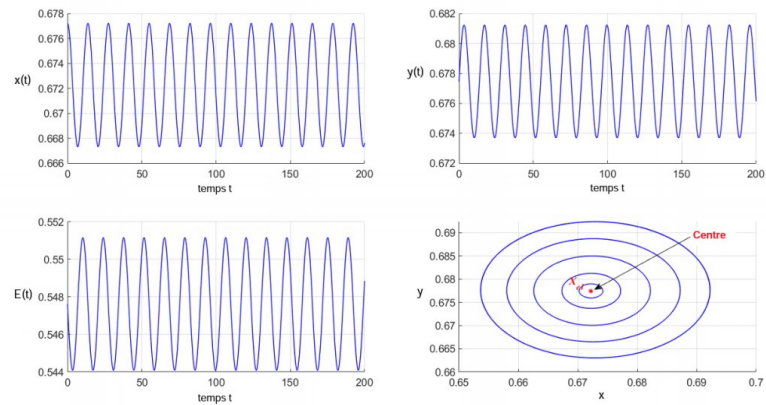


FIG. 3.6 – Évolution temporelle des espèces  $x, y,$

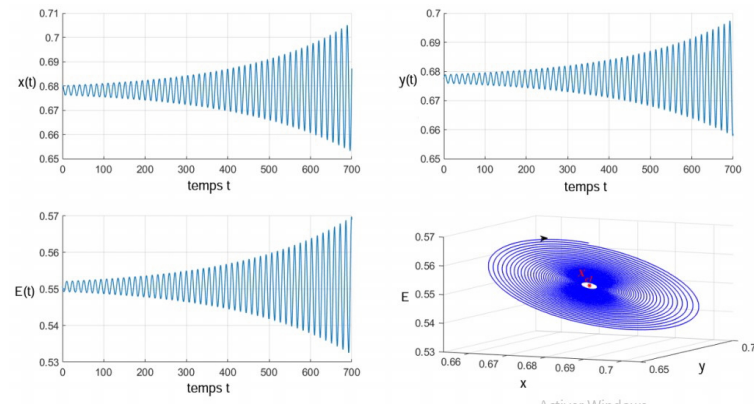


FIG. 3.7 – Évolution temporelle des espèces  $x, y,$

de l'équilibre interne qui représente sa performance parfaite.

# Conclusion

Enfin, ce mémoire est clôturée par une conclusion générale, dans laquelle nous avons clarifié l'efficacité des résultats obtenus après l'étude d'un nouveau système algébrique, et pour la conduite de cette étude, on a divisé le travail en trois chapitres. Des généralités sont introduites pour les concepts sur un système dynamique qui vise à modéliser des processus qui évoluent dans le temps. Dans le deuxième chapitre on a discuté des types et du concept d'expressions algébriques différentielles qui ont suscité un grand intérêt après leur découverte.

Quant le dernier chapitre comprenait certains aspects mathématiques qui permettent la modélisation de la dynamique des populations en mettant l'accent sur certains modèles bien connus de changement de groupe tels que la prédation, la compétition et l'échange, et l'épidémiologie a également été abordée.

Nous concluons de ce qui précède que seuls les animaux adultes doivent être chassés par les chasseurs. Comme cela n'affectera pas l'économie et contribuera en même temps à la stabilité de l'écosystème.



# Bibliographie

- [1] Bendtsen, C. and Thomsen, P. G, 1999. Numerical Solution of Differential Algebraic Equations. Technical report, IMM-REP.
- [2] Bernd Simeon, 2015. On the History of Differential-Algebraic Equations.
- [3] Campbell, S. L. Petzold, L. and Linh, V. H, 3(8)(2008). Differential-algebraic equations. Scholarpedia.
- [4] E.Zerrik, et A. ElJai, 2014. Stabilité des système dynamiques.
- [5] Guillaume Cheze, Jean-Claude Yakoubsohn, Invitation Aux Equations Differentielles Algebriques.
- [6] Kerioui Nadjah, 2021. Stabilité et bifurcations de quelques modèles biologiques. Doctorat Université Abdelhafid Boussouf- Mila.
- [7] Liu, W., Biwen, L., Fu, C., and Chen, B, 2015. Dynamics of a predator-prey ecological system with nonlinear harvesting rate. Wuhan Univ. J. Nat. Sci. 20, 25 – 33.
- [8] Luis Barreira, et Claudia Valls, 2013 Theorie des systemes dynamiques : une introduction.
- [9] Senouci Assia, 01/07/2020. Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation. Doctorat Université Mohamed Khider-Biskra.

- [10] Zhu,W.,Huang, J., and Liu,W, 2015. The stability and Hopf bifurcation of the differentialalgebraic biological economic system with single harvesting. Sixth Interna-104 tional Conference on Intelligent Control and information Processing (ICICIP), W.

## ملخص

يرتبط العمل المنجز بالدراسة النوعية للنماذج الرياضية لبعض الظواهر البيولوجية والاقتصادية، لأن هذه الدراسة تم الحصول عليها في تطبيق نظريات النظم الديناميكية، التي تم عرض مفاهيمها الأساسية حول نظرية النظم الديناميكية في الفصل الأول ومفهوم المعادلات التفاضلية الجبرية مع أنواعها في الفصل الثاني، فادتنا هذه الدراسة إلى تصميم نموذج تفاضلي جبري من نوع فريسة مفترس. يتكون من معادلتين تفاضليتين ومعادلة جبرية. كان يُنظر إلى الربح الاقتصادي على أنه معامل تشعب لأننا أولينا مزيداً من الاهتمام لنقاط التوازن الموجبة ولأننا خلصنا إلى أن النظام لديه عدد متساوٍ من نقاط التوازن الموجبة، بين 0 و 8 وهذا يعطي أهمية خاصة للنظام المقترح لأن تنوع التوازنات الموجبة يعطي إمكانيات أكبر في نظرية التحكم لاختيار النقطة التي تمثل الأداء الأعلى للنظام البيئي. ولما كان التفاوت في الأرباح الاقتصادية قد تسبب في زعزعة استقرار النظام. سلطت الدراسة المقترحة الضوء على أهمية تعديل الإيرادات ووضع استراتيجيات مفيدة لدعم وتحسين الحصاد للحفاظ على التنمية المستدامة للنظام الإيكولوجي للفرائس المفترسة. أخيراً، تم توضيح نتائجنا وتأكيدنا من خلال المثال الرقمي.

**الكلمات المفتاحية:** نظام الجبر التفاضلي، الاستقرار ، تشعب هوف ، الربح الاقتصادي.

# Abstract

The work carried out is related to the qualitative study of mathematical models of certain biological and economic phenomena, as this study was obtained to the application of theories of dynamic systems, whose basic concepts on the theory of dynamic systems were presented in the first chapter and the notion of algébro-differential equations with their types in the second chapter. This study led us to design an algebraic differential model of a predatory prey type. The system consists of two differential equations and an algebraic equation. Economic profit was seen as a coefficient of ramification because we paid more attention to positive equilibrium points because we concluded that the system has an even number of positive equilibrium points, between 0 and 8. This gives particular importance to the proposed system because the diversity of positive balances gives more possibilities in the theory of control to choose the point that represents performance. The ideal of the ecosystem. As the disparity of economic profits has caused the destabilization of the system. The proposed study underscored the importance of the government adjusting revenues and developing useful strategies to support and improve harvest to maintain the sustainable development of the predatory prey ecosystem. Finally, our results have been clarified and confirmed through the digital example.

**Key words:** Algébro-Differential System, Stability, Hopf Bifurcation, Economic profit.

# Résumé

Le travail réalisé est lié à l'étude qualitative des modèles mathématiques de certains phénomènes biologiques et économiques, car cette étude a été obtenue. Le travail réalisé est lié à l'étude qualitative des modèles mathématiques de certains phénomènes biologiques et dynamiques, dont on a présente des concepts de base sur la théorie des systèmes dynamiques dans le premier chapitre et notion des équations algébro-différentielles avec leurs types dans le deuxième chapitre. Cette étude nous a conduits à concevoir un modèle différentiel algébrique d'un type de proie prédatrice. Le système est constitué de deux équations différentielles et d'une équation algébrique. Le profit économique a été considéré comme un coefficient de ramification, car nous avons accordé plus d'attention aux points d'équilibre positifs, car nous avons conclu que le système a un nombre pair de points d'équilibre positifs, compris entre 0 et 8. Cela donne une importance particulière au système proposé parce que la diversité des équilibres positifs donne plus de possibilités dans la théorie du contrôle pour choisir le point qui représente la performance. L'idéal de l'écosystème. Comme la disparité des profits économiques a provoqué la déstabilisation du système. L'étude proposée nous a permis de souligner qu'il est important d'ajuster les revenus et de tirer des stratégies utiles pour soutenir et améliorer la récolte afin de maintenir le développement durable de l'écosystème des proies prédatrices. Enfin, nos résultats ont été précisés et confirmés à travers l'exemple numérique.

**Mots-clés:** Système Algébro-Différentiel, Stabilité, Bifurcation de Hopf, Profit économique.