République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Probabilités

Par Melle. DENDOUGA AHLAM

Titre :

Principe de maximum pour les EDSs de type champ moyen

Devant le Jury :

Mr.	ABBA Abedelmajid	Dr	U. Biskra	Président
Mr.	GHERBAL Boulakhras	Pr	U. Biskra	Encadreur
Mme.	BENABBA Fadhila	Dr	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

Je dédie ce humble travail

À ma très cher Mère et mon très cher Père

À ceux qui m'ont toujours encouragé pour que je réussisse dans mes études

À mon époux

À tous mes sœurs

À toute ma famille

À tous ceux qui m'ont étudié

À tous mes compagnons de promotion et à tous ce que ma réussite leur tient à cœur

Que ce travail soit le témoignage de ma gratitude et de mon profond respect.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercions ALLAH Le Tout Puissant qui m'a accordée la volonté et le courage pour réaliser ce mémoire.

Mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à Pr.GHERBAL Boulakhras qui a accepté de diriger ce travail. Sa grande disponibilité et ses encouragements ont joué un rôle important dans la réalisation de ce mémoire.

Je remercie sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examinateur.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de notre département de mathématiques de l'université de Mouhamed Khider et les intervenants professionels responsables.

Merci à tous et à toutes.

Notations et symbols

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$	Espace probabilisé filtré .
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace probabilisé complet .
$(\Omega, \mathcal{F})$	Espace mésurable .
$\mathcal{F}_t$	Filtration .
W_t	Mouvement Brownien .
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique du processus stochastique X .
EDS	Equation différentielle stochastique .
b	Drift .
$J(.)$	La fonction de coût à minimiser .
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d .
H	Hamiltonien .
$\mathcal{R}$	Ensemble des contrôles relaxés

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques (EDSs) ont été introduites pour la première fois en 1946 par K.Itô pour étudier les trajectoires d'un processus de diffusion. Cette notion a été traitée de maniere profonde en relation avec la théorie des semi-martingale. Des applications dans tous les domaines de sciences de l'ingénieur (féltrage des processus, contrôle optimal, mathématiques financières, gestion des stoks etc...) cette étude a porté sur le but les équations différentielles stochastiques de type champ moyen, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dx_t = \int_U b\left(t, x_t, \mathbb{E}\left[x_t\right], u\right) q_t(du)dt + \sigma\left(t, x_t, \mathbb{E}\left[x_t\right]\right) dW_t \\ x\left(0\right) = x_0, \end{cases}$$

où b est appelée la derive (drift) et σ appelé le coeffcient de diffusion, et W_t un mouvement Brownien.

Le plan de ce travail se compose de 3 chapitres :

Chapiter 1 : Dans ce chapitre, on va présenter les définitions et les propriétés des processus continues qui sont destinés à fournir des outils de base (processus stochastique, martingale, quelques inégalités, mouvement brownien, calcul d'Itô, ...etc.) que nous aurons besoin dans la suite de ce travail .

Chapiter 2 : Dans ce chapitre, on va présenter la théorie générale et la notation des équations différentielles stochastiques (EDS), après ça on va prouver le théorème d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastiques dans le cas où les coefficients sont Lipschitzien.

Chapiter 3 : Le dernier chapitre est consacré d'établir les conditions nécessaires d'optimalité (sous forme d'un principe de maximum stochastique) vérifient par un contrôle optimal relaxé pour un système des équations différentielles stochastiques de type champ moyen avec la fonction de coût non linéaire définie comme suit :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U h(t, x_t, \mathbb{E}[x_t], u)\, q_t(du)dt + g(x_T, \mathbb{E}[x_T])\right].$$

La méthode pour établir un principe de maximum stochastique relaxé c'est méthode du perturbation faible (convexe).

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

1.1 Géneralités sur le processus stochastique

1.1.1 Processus stochastique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace probabilisé filtré .

Définition 1.1.1

Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $Y = (Y_t, t \in \mathbb{R}_+)$ définies sur le même espace de probabilité .

Filtration

Une filtration est une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous tribu $\mathcal{F}$ c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},\ \forall 0 \leq s \leq t < +\infty\ .$$

Remarque 1.1.1

1. $\mathcal{F}_t$ est la classe des évènements que l'on peut identifier au temps t .

2. Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *muni d'un filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon T}$ *est satisfait les conditions suivantes :*

- *Les ensembles négligeables* $\mathcal{N}$ *sont contenus dans* $\mathcal{F}_0$ *.*
- *La filtration* $\mathcal{F}_t$ *est continue à droite au sens où*

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_t, \forall t.$$

- *Une filtration* $\mathcal{G}$ *est dite plus grosse que* $\mathcal{F}$ *si* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, $\forall t$ *.*

3. Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *muni d'un filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon T}$ *se note* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\epsilon T}, P)$ *est appelé un espace probabilisé filtré.*

Mesurabilité

Définition 1.1.2

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* (E, ξ) *deux espaces mesurables. Une application* f *de* Ω *dans* E *est dite* $(\mathcal{F}, \xi)$*-mesurable si*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \xi,$$

où :

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les tribus employées, on dit simplement que f *est mesurable .*

Définition 1.1.3

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable, une variable aléatoire réelle (v.a.r)* Y *est une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $\mathbb{R}$ *(donc telle que* $Y^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \beta_{\mathbb{R}}$*).*

Une constante est une variable aléatoire de même qu'une fonction indicatrice d'ensemble de la tribu $\mathcal{F}$.

Processus adapté

Définition 1.1.4

Un processus stochastique $(Y_t)_{t\epsilon T}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon T}$ (ou $(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon T}$-adapté), si pour tout t dans T, la v.a Y_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable .

1.1.2 Martingale

Cas discret

Soit $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, et la tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables .

Définition 1.1.5

Une suite de v.a.r $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite $\mathcal{F}_n$-martingale si :

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable .

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n est intégrable c'est-à-dire

$$\mathbb{E}\left[|Y_n|\right] < \infty.$$

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}\left(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = Y_n.$$

Propriété 1.1.1

$$\mathbb{E}\left[Y_{n+p} \mid \mathcal{F}_n\right] = Y_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ } et \text{ } \forall p \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.1.1

Si $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *où les* X_i *sont indépendantes équidistribueés centrées,* Y_n *est une martingale .*

Cas continue

Soit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \ \forall s \leq t$.

Définition 1.1.6

Une famille de v.a $(Y_t; t \in [0, +\infty[)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$ *si :*

i) Y_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mésurable et intégrable pour tout* t*,*

ii) *avec*

$$\mathbb{E}\left[Y_t \mid \mathcal{F}_s\right] = Y_s, \forall s \leq t.$$

Propriété 1.1.2

∘ *Si* Y *est une martingale on a,*

$$\mathbb{E}\left[Y_t\right] = \mathbb{E}\left[Y_0\right], \forall t.$$

Propriété 1.1.3

Si $(Y_t, t \leq T)$ *est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale :*

$$Y_t = \mathbb{E}\left[Y_T \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Cette dernière propriété est d'un usage très fréquent en finance .

Définition 1.1.7

Une famille de v.a $(Y_t; t \in [0, +\infty[)$ *est une sur-martingale (respectivement sous-martingale) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

i) Y_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et intégrable pour tout* t *.*

ii) $\mathbb{E}[Y_t \mid \mathcal{F}_n] \leq Y_s$, $\forall s \leq t$ *(respectivement* $\mathbb{E}[Y_t \mid \mathcal{F}_n] \geq Y_s$*).*

Proposition 1.1.1 *(Inégalité de Doob) Si* Y *est une martingale continue alors*

$$\mathbb{E}\left[\sup |Y_s|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[|Y_s|^2\right].$$

1.1.3 Mouvement Brownien

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P\right)$ un espace probabilisé filtré.

Définition 1.1.8

On appelle $\mathcal{F}_t$*-mouvement Brownien (ou processus de Wiener) de matrice de co-variance* H*, tout processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté,* $(W_t)_{t \in I}$ *qui vérifié :*

1. $W_0 = 0$ *.*
2. $\forall s, t \in I$ *avec* $s < t$ *,* $(W_t - W_s)$ *est un vecteur gaussien de loi normale* $N(0, (t-s)H)$ *indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *.*
3. *La fonction* $t \to W_t(\omega)$ *est presque sûr (p.s) continue .*

Remarque 1.1.2

Lorsque $H = 1$ *(dans la définition préssidente) alors,* W *est un mouvement Brownien standard .*

Proposition 1.1.2

Soit $(W_t)_{t\in I}$ *un* $\mathcal{F}_t$*- mouvement Brownien alors :*

1. $$\mathbb{E}\left[W_t\right] = 0, \forall t \in I.$$

2. $$\mathbb{E}\left[W_s W_t\right] = (s \wedge t)H.$$

3. *Ses trajectoires sont localement Hölderiennes d'ordre* $1/2-\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in \left]0, 1/2\right[$ *.*

1.2 Intégrale stochastique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P\right)$ un espace probabilisé filtré où $\mathcal{F}_t = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ c'est une filtration de $\mathcal{F}$, satisfaisant les condtions habituelles et $W_t = (W_t)_{t\in T}$ est un mouvement Brownien défini dans cet espace probabilisé.

Définition 1.2.1

Un processus stochastique $Y_t = (Y_t)_{t\in T}$ *est dit simple, si il existe une subdivision* $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$ *, de l'interval* $[0, T]$ *et une famille* $(\kappa_i)_{i\geq 0}$ *des v.a avec*

$$\sup_i |\kappa_i| \leq const \leq \infty,$$

telle que κ_i *est* $\mathcal{F}_{t_i}$*-mesurable* $\forall i \geq 0$ *et :*

$$Y_i = \kappa_0 \chi_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_i \chi_{[t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Où χ_B *désigne l'indicatrice de l'ensemble* B *, c'est-à-dire :*

$$\chi_B = \begin{cases} 1 \text{ : } si\ x \in B \\ -1 \text{ : } sinon \end{cases}$$

Définition 1.2.2

Un processus stochastique $Y_t = (Y_t)_{t\in T}$ est dit progressivement mesurables et dit de classe M_T si :

$$M_T = \left\{ Y_t = (Y_t)_{t\epsilon T} \text{ progressivement mesurables } \mathbb{E}\left[\int_0^t |Y_t|^2 \, dt < \infty\right]\right\}.$$

Où M_T est l'ensemble des processus progressivement mesurables et de carré intégrable.

Définition 1.2.3

Un processus stochastique $Y_t = (Y_t)_{t\in T}$ est dit progressivement mesurables et dit de classe P_T si :

$$P_T = \left\{ Y_t = (Y_t)_{t\in T} \text{ progressivement mesurables } P\left\{\int_0^t |Y_t|^2 \, dt < \infty = 1\right\}\right\}.$$

Où P_T est l'ensemble des processus progressivement mesurables et de carré intégrable p.s .

Cas de processus simple

Soit $Y_t = (Y_t)_{t\in T}$ un processus stochastique simple, on définit formellement intégrale stochastique X par rapport au mouvement Brownien $W = (W_t)_{t\in T}$ comme suit :

$$I(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) + \kappa_n \left(W_T - W_{t_n}\right),$$

et

$$I(t) = \int_0^t Y_s dW_s,$$

donc

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \left[\kappa_0 \chi_{\{0\}}(s) + \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \chi_{[t_i, t_{i+1}]}(s) \right] dW_s \\ &= \int_0^t \kappa_0 \chi_{\{0\}}(s) dW_s + \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \int_0^t \chi_{[t_i, t_{i+1}]}(s) dW_s \\ &= \kappa_0 W_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) + \kappa_n \left(W_T - W_{t_n} \right), \end{aligned}$$

puisque $P(\kappa_0 = 0) = 1$.

On conclut, et en vérifiant que pour tout $i \neq j$:

$$\mathbb{E}\left[\alpha(t_i) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) \alpha(t_j) \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right) \right] = 0.$$

De plus

$$\mathbb{E}\left[I(t) \right] = 0,$$

et

$$Var\left[I(t) \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\alpha(s))^2 ds \right].$$

Dans se qui suit, on se donne les propriétés fondamentales de l'intégrale stochastique, concernant la linéarité et la propriété de martingale (isométrie).

1. $t \geq 0$, est $\mathcal{F}_t$-mesurable .
2. Linearité : soient $I(t)$ et $J(t)$ deux intégrales stochastiques donnés par :

$$I(t) = \int_0^t \alpha(s) dW_s \text{ et } J(t) = \int_0^t \beta(s) dW_s.$$

Alors on obtient le resultat suivant :

$$I(t) + J(t) = \int_0^t (\alpha(s) + \beta(s))dW_s.$$

et

$$\lambda I(t) = \int_0^t \lambda\alpha(s)dW_s.$$

3. L'isométrie : $(I(t))_{t\geq 0}$ est martingale.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \alpha(s)dW_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \alpha^2(s)ds\right].$$

Cas de processus général

L'ensemble des processus simples (S_T) est dense dans (M_T). Soient le réel $T > 0$ et le processus α tel que : I et α sont $\mathcal{F}_t$-adapté.

De plus ,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \alpha^2(t)dt\right] < \infty \,;\, \forall T > 0.$$

Il existe une suite de processus étagées α_n telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |\alpha_n - \alpha|^2 \, dt\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n - \alpha\|^2_{L^2(\Omega,[0,T])} \longrightarrow 0.$$

On définit l'intégrale $\int_0^t \alpha(s)dW_s$ par la limite suivante dans $L^2\left(\Omega, [0,T]\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \alpha_n(s)dW_s = \int_0^t \alpha(s)dW_s.$$

1. $I(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, ce qui implique que :

$$I(t) = \int_0^t \alpha_n(s)dW_s.$$

2. Linéarité : soient $I(t)$ et $J(t)$ deux intégrales stochastiques donnés par :

$$I(t) = \int_0^t \alpha(s)dW_s \text{ et } J(t) = \int_0^t \beta(s)dW_s.$$

Alors on obtient le resultat suivant :

$$I(t) + J(t) = \int_0^t (\alpha(s) + \beta(s))dW_s.$$

et

$$\lambda I(t) = \int_0^t \lambda\alpha(s)dW_s.$$

3. $(I(t))_{t\geq 0}$ est une martingale.

4. L'isométrie : $t \longrightarrow \int_0^t \alpha_n(s)dW_s$ est continue.

5. $$\mathbb{E}\left[\int_0^t \alpha(s)dW_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \alpha^2(s)ds\right].$$

Proposition 1.2.1

Pour tout t on a

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).$$

Preuve.

Par définition

$$\int_0^t W_s dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n W_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right).$$

L'égalité

$$2\sum_{i=0}^n W_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) = \sum_{i=0}^n \left(W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2\right) - \sum_{i=0}^n \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2,$$

montre que

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}\left[W_t^2 - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[W_t^2 - t\right].$$

■

1.2.1 Formule d'Itô et processus d'Itô

Formule d'Itô

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace probabilisé filtré et $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien défini dans cet espace.

Définition 1.2.4

Soient f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et X_t est un processus stochastique, alors la formule d'Itô s'écrit sous la forme :

$$d(f(t, X_t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X, X\rangle_t .$$

Processus d'Itô

Définition 1.2.5

Un processus X est un processus d'Itô s'il écrit sous la forme suuivante :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

- *Telle que b est un processus adapté avec $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe (au sens de Lebesgue) p.s pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ (c'est l'ensemble*

$L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$). *On utilise la notation plus concise suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Où b *est le drift ou la dérive .*

Et σ *est le coefficient de diffusion.*

L'écriture

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

est unique (sous réserve que les processus b *et* σ *vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signifier que si*

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t = \tilde{b}_t dt + \tilde{\sigma}_t dW_t \Rightarrow \begin{cases} b = \tilde{b} \\ \quad et \\ \sigma = \tilde{\sigma} \end{cases}.$$

En particulier, si X *est une martingale locale alors* $b = 0$ *et réciproquement. On peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que*

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty, P.p.s,$$

mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique .

La partie $x + \int_0^t b_s ds$ *est la partie à variation finie. Si un processus* A *à variation finie est une martingale, il est constante. En effet, si* $A_0 = 0$,

$$A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$$

et par suite $E\left[A_t^2\right] = 0$ *.*

Chapitre 2

Existence et unicité de solution pour les EDSs

2.1 Equation différentielle stochastique

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filté et (W_t) est un mouvement Brownien d-dimensionelle défini dans cet espace.

Définition 2.1.1

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{2.1}$$

ou sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x. \end{cases}$$

L'inconnu est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de démontrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.

Définition 2.1.2

Soit b et σ deux fonctions tel que

$$b : [0;T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$\text{et } \sigma : [0;T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$

qui sont mesurable. Une solution de l'équation 2.1, est un processus X continu, $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s,X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s$ ont un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s$$

est satisfaite pour tout t, $P-p.s.$

2.1.1 Existence et unicité

Définition 2.1.3

Pour l'équation 2.1, on dit qu'il y a :

- *Existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de 2.1 .*
- *Unicité trajectorielle si l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ et le mouvement Brownien W étant fixés, deux solutions X et $\grave{X}$ de 2.1 telles que $X_t = \grave{X}_t$ $P.s$, sont indistinguables.*

On dit de plus qu'une solution X de 2.1 est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de W, il y a unicité forte pour l'EDS 2.1 *si pour tout mouvement Brownien W, deux solutions fortes associées à W sont indistinguables.*

Théoreme 2.1.1

Soient $T > 0$ et $b(t,x)$ $\sigma(t,x)$ sont des fonctions mesurables satisfaisantes :

1. *(condition de Lipschitz locale)*

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \left|b(t,x) - b(t,y)\right| + \left|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\right| \leq k\left|x-y\right|, t \in [0;T]; x,y \in \mathbb{R},$$

2. *(condition de croissance linéaire)*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \left|b(t,x) - b(t,y)\right| + \left|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\right| \leq k\left(1 + |x|\right), t \in [0;T]; x \in \mathbb{R},$$

3. *X_0 varaible aléatoire indépandante de $W = (W_t)_{t\geq 0}$ et de carré intégrable (ie : $\mathbb{E}\left[|X_0^2|\right] < +\infty$). Alors l'équation 2.1 admet une unique solution forte $X = (X_t(w))_{t\geq 0}$ adaptée par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t^{x_0} = \mathcal{F}_t \wedge \sigma(X_0)$ et vérife :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t|^2\, dt\right] < +\infty.$$

Preuve.

Commençons par démontrer l'unicité, soient X_t et Y_t deux solutions fortes de condition initiale x telle que :

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= \left|\int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s - \int_0^t b(s,Y_s)ds - \int_0^t \sigma(s,Y_s)dW_s\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t \left[b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right]ds + \int_0^t \left[\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\right]dW_s\right|^2,
\end{aligned}$$

on utilisant le fait que $(x+y)^2 \leq 2x^2+2y^2$; on a pour tout $0 \leq r \leq t \leq T$

$$|X_t - Y_t|^2 \leq 2\left|\int_0^t [b(s,X_s)-b(s,Y_s)]\,ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t [\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)]\,dW_s\right|^2$$

où

$$\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2 \leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t [b(s,X_s)-b(s,Y_s)]\,ds\right|^2 + 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t [\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)]\,dW_s\right|^2,$$

en passant aux ésperances, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))\,ds\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t [\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)]\,dW_s\right|^2\right],$$

utilisant l'inégalité de Doob et l'isométrie d'Itô on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (b(s,X_s)-b(s,Y_s))\,ds\right|^2\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds\right],$$

l'inégalité de Cauchy Schwartz, donne alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^T |b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2\,ds\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds\right]\\ &= 2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^T (|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2 + |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2)ds\right],\end{aligned}$$

comme les fonctions b et σ sont Lipschtizienne alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] &\leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^T|X_s-Y_s|^2\,ds\right]\\
&\leq 2K^2(T+4)\int_0^T\mathbb{E}\left[|X_s-Y_s|^2\right]ds\\
&\leq 2K^2(T+4)\int_0^T\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}|X_r-Y_r|^2\right]ds,
\end{aligned}$$

donc par l'inégalité de Gronwall

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right]\leq 0\exp(2K^2(T+4)T)=0,$$

ce si implique que X et Y sont indistinguables c'est-à-dire :

$$P(X_t=Y_t,\forall 0\leq t\leq T)=1.$$

A fin de prouver l'existence, on procède comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose

$$
\begin{aligned}
X_t^0 &= x \qquad (2.2)\\
X_t^1 &= x + \int_0^t b(,x)ds + \int_0^t \sigma(s,x)dW_s\\
X_t^2 &= x + \int_0^t b(s,X_s^1)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^1)dW_s\\
&\vdots\\
X_t^n &= x + \int_0^t b(s,X_s^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})dW_s.
\end{aligned}
$$

On peut déterminer (X_t^n) pour tout n, on montre que (X_t^n) converge vers X_t et X_t vérifie notre EDS 2.1. D'abord on suppose que les fonctions σ et b vérifient la condition de croissance linéaire et on prouve qu'il $\exists C > 0$ telque :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n|^2\right] \leq C,$$

si $n = 1$ on a

$$\left|X_t^1\right|^2 = \left|x + \int_0^t b(s,x)ds + \int_0^t \sigma(s,x)dW_s\right|^2,$$

et comme $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$, on trouve

$$\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left(|x|^2 + \left|\int_0^t b(s,x)ds\right|^2 + \left|\int_0^t \sigma(s,x)dW_s\right|^2\right),$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $0 \leq t \leq d \leq T$

$$\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left(|x|^2 + T\int_0^t |b(s,x)|^2\, ds + \left|\int_0^t \sigma(s,x)dW_s\right|^2\right),$$

donc

$$\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left(|x|^2 + T\int_0^d |b(s,x)|^2\,ds + \sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,x)dW_s\right|^2\right),$$

en passant aux ésperances, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2 + T\int_0^d |b(s,x)|^2\,ds + \sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,x)dW_s\right|^2\right],$$

d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, la croissance linéaire de b et σ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right] &\leq 3\left[\mathbb{E}\,|x|^2 + T\int_0^d |b(s,x)|^2\,ds + 4\int_0^d |\sigma(s,x)|^2\,dW_s\right] \\ &\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2 + TK^2\int_0^d \left(1+|x|^2\right)ds + 4K^2\int_0^d \left(1+|x|^2\right)ds\right] \\ &\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2 + K^2(1+|x|)^2(T+4)d\right] \\ &= 3\,|x|^2 + 3K^2(1+|x|)^2(T+4)d,\end{aligned}$$

donc soit $C_1 = 3K^2(1+|x|)^2(T+4)$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right] \leq 3\,|x|^2 + C_1 d,$$

de la même manière on trouve que d'après le fait que $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tout $0 \leq t \leq d \leq T$

$$
\begin{aligned}
\left|X_t^2\right|^2 &= \left|x + \int_0^t b(s, X_s^1)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^1)dW_s\right|^2 \\
&\leq 3\left(|x|^2 + \left|\int_0^t b(s, X_s^1)ds\right|^2 + \left|\int_0^t \sigma(s, X_s^1)dW_s\right|^2\right) \\
&\leq 3\left(|x|^2 + T\int_0^t \left|b(s, X_s^1)\right|^2 ds + \left|\int_0^t \sigma(s, X_s^1)dW_s\right|^2\right) \\
\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2 &\leq 3\left(|x|^2 + T\int_0^d \left|b(s, X_s^1)\right|^2 ds + \sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s, X_s^1)dW_s\right|^2\right) \\
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2 + T\int_0^d \left|b(s, X_s^1)\right|^2 ds + \sup_{t\leq d\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s, X_s^1)dW_s\right|^2\right],
\end{aligned}
$$

et par utilisant l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, la croissance linéaire de b et σ

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2 + T\int_0^d \left|b(s,\, X_s^1)\right|^2 ds + 4\int_0^d \left|\sigma(s,\, X_s^1)\right|^2 ds\right] \\
&= 3\left(|x|^2 + T\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|b(s,\, X_s^1)\right|^2 ds\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|\sigma(s,\, X_s^1)\right|^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3\left(|x|^2 + T\mathbb{E}\left[\int_0^d K^2\left(1 + |\ X_s^1|\right)^2 ds\right] + 4\mathbb{E}\left[K^2\left(1 + |\ X_s^1|\right)^2 ds\right]\right) \\
&= 3\left(|x|^2 + (T+4)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^d \left(1 + |\ X_s^1|\right)^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3\left(|x|^2 + (T+4)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^d 2\left(1 + |\ X_s^1|\right)^2 ds\right]\right),
\end{aligned}
$$

soit $C_2 = (T+4)K^2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_t^2\right|^2\right] &\leq 3\left(|x|^2 + 2C_2\mathbb{E}\left[\int_0^d \left(1+\mid X_s^1\right|\right)^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3\left(|x|^2 + 2C_2\mathbb{E}\left[T + \int_0^d \mid X_s^1\right|^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3\left(|x|^2 + 2C_2\left(T + \int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{tv\leq s}\mid X_s^1\right|^2 ds\right]\right)\right) \\
&\leq 3\left(|x|^2 + 2C_2\left(T + \int_0^d (3\,|x|^2 + C_1 d) ds\right)\right) \\
&= 3\left(|x|^2 + 2C_2\left(T + 3\,|x|^2\, d + C_1\frac{d^2}{2} ds\right)\right),
\end{aligned}$$

et par une récurrence nous avons donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}|X_t^n|^2\right] \leq |x|^2 + \sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{i!}2C_i \forall n \geq 1,$$

Ensuite, il reste à montrer que la suite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ converge $P-p.s$, uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t\in[0,T]}$

$$\begin{aligned}
\left|X_t^2 - X_t^1\right| &= \left|\int_0^t (b(s,X_s^1) - b(s,x))ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s^1) - \sigma(s,x))dW_s\right| \\
&\leq 2\left|\int_0^t (b(s,X_s^1) - b(s,x))ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s^1) - \sigma(s,x))dW_s\right|^2
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sup_{t\leq d}\left|X_t^2 - X_t^1\right| \leq 2\sup_{t\leq d}&\left|\int_0^t (b(s,X_s^1) - b(s,x))ds\right|^2 \\
&+ 2\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s^1) - \sigma(s,x))dW_s\right|^2
\end{aligned}$$

en passant aux ésperances et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, la croissance linéaire de b et σ .

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^1-X_t^2\right|\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t (b(s,X_s^1)-b(s,x))ds\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s^1)-\sigma(s,x))dW_s\right|^2\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|(b(s,X_s^1)-b(s,x))\right|^2 ds\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s^1)-\sigma(s,x))dW_s\right|^2\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^d \left|(b(s,X_s^1)-b(s,x))\right|^2 ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|(\sigma(s,X_s^1)-\sigma(s,x))\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2TK^2E\left[\int_0^d \left|X_s^1-x\right|^2 ds\right]+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^1-x\right|^2 ds\right] \\
&\leq \left(2TK^2+8K^2\right)\int_0^d \left[\mathbb{E}\left|X_s^1-x\right|^2\right]ds \\
&\leq \left(2TK^2+8K^2\right)\int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{v\leq s}\left|X_v^1-x\right|^2\right]ds,
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^2-X_t^1\right|\right] &\leq 2\left(2TK^2+8K^2\right)\left(\int_0^d \mathbb{E}\left[|x|^2\right]ds+\int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{v\leq s}\left|X_v^1\right|^2\right]ds\right) \\
&= 2\left(2TK^2+8K^2\right)\left(x^2d+\int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{v\leq s}\left|X_v^1\right|^2\right]ds\right) \\
&\leq 2\left(2TK^2+8K^2\right)\left(x^2d+\int_0^d \mathbb{E}\left[\sup_{v\leq s}\left|X_v^1\right|^2\right]ds\right) \\
&\leq 2\left(2TK^2+8K^2\right)\left(x^2d+\int_0^d (C+C_1d)\,ds\right) \\
&\leq 2\left(2TK^2+8K^2\right)\left(x^2d+Cd+C_1\frac{d^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

donc pour tout n

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (b(s,X_s^n)-b(s,X_s^{n-1}))ds\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))dW_s\right|^2\right]$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, la croissance linéaire de b et σ

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|(b(s,\, X_s^n)-b(s,\, X_s^{n-1}))\right|^2 ds\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|(\sigma(s,\, X_s^n)-\sigma(s,\, X_s^{n-1}))\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds\right] + 8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds\right] \\
&= \left(2TK^2+8K^2\right)\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds\right] \\
&\leq \left(2TK^2+8K^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d\leq T}\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right] ds,
\end{aligned}$$

on répete ce procedure, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right] \leq C_n\frac{d^{n+1}}{(n+1)!},$$

cela entraîne que $p.s$

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2} &\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left\|\sup_{t\leq d}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_n\frac{d^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{2}} \leq +\infty,
\end{aligned}$$

cela entraîne que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \leq d} \left| X_t^{n+1} - X_t^n \right| < +\infty,$$

et donc la suite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ converge $p.s$ uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t\in[0,T]}$ qui est continu. Après on vérifier que (X_t) est une solution de l'EDS 2.1, soit une sous suite X^K converge dans L^2, en effet

$$\begin{aligned}
\|X_t^m - X_t^n\|_{L^2} &\leq \left\| \sum_{n=0}^{m-1} \sup_{t\leq d} \left| X_t^{K+1} - X_t^K \right| \right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{n=0}^{m-1} \left\| \sup_{t\leq d} \left| X_t^{K+1} - X_t^K \right| \right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(C_K \frac{d^{K+1}}{(K+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

en passant à la limite dans 2.2, et d'après le lemme de Fatou

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^n - X_t|^2 \, dt \right] \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^n - X_t^m|^2 \, dt \right] \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

utilisant la condition de Lipschitz, l'inégalité de Cauchy Schwartz, l'inégalité de Doob et l'isométrie de l'intégrale stochastique, on a

$$\mathbb{E}\left[\left| \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s))ds \right|^2 \right] \leq tK^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s^n - X_s|^2 \, ds \right] \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\mathbb{E}\left[\left| \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s))dW_s \right|^2 \right] \leq 4K^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s^n - X_s|^2 \, ds \right] \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\int_0^t b(s, X_s^n)ds \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} \int_0^t b(s, X_s)ds \text{ et } \int_0^t \sigma(s, X_s^n)ds \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,$$

on déduit que X_t est une solution de l'EDS 2.1. ■

Chapitre 3

Conditions nécessaires d'optimalité pour l'EDS de type champ moyen

L'objectif de ce chapitre est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité (sous forme d'un principe de maximum stochastique) vérifient par un contrôle optimal relaxé pour un système des équations différentielles stochastiques de type champ moyen, où les coefficients de système, dépent du processus d'état ainsi que leur distribution via l'esperence du processus d'état. La fonction de coût est aussi de type champ moyen.

La méthode pour établir un principe de maximum stochastique relaxé c'est méthode du perturbation faible (convexe), puisque l'ensemble des valeurs des contrôles relaxé est convexe.

3.1 Contrôle relaxé

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0,T]\times A$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt, muni de la topologie de la convergence stable des mesures. L'espace V est muni de sa tribu borelienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q \mapsto \int f(s,u)q(ds,du)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurable, bornée et continues en u.

Un contrôle relaxé q est une variable aleatoire $q(w,dt,du)$ à valeur dans V telle que pour chaque $t, 1_{[0,t]}q$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable ($\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$). Tout contrôle relaxé peut être intégré en $q(w,dt,da) = dtq_t(w,da)$ où $q_t(da)$ est un processus progressivement

mesurable à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités $P(U)$.

Définition 3.1.1

Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire $q(w,dt,da)$ à valeur dans V telle que pour chaque $t, 1_{[0,t]}q$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

On note par $\mathcal{R}$ l'ensemble des contrôles relaxés.

Soit T un nombre réel strictement positif fixé et $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un éspace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien définie sur cet éspace. Nous supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de W augmentée par les ensembles P-nul de $\mathcal{F}$.

On considère l'équation différentielle stochastique de type champ moyen suivante :

$$\begin{cases} dx_t = \int_U b\left(t, x_t, \mathbb{E}\left[x_t\right], u\right) q_t(du)dt + \sigma\left(t, x_t, \mathbb{E}\left[x_t\right]\right) dW_t \\ x\left(0\right) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}.$$

La fonction de coût a minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés admissibles $\mathcal{R}$, est donné par :

$$J(q) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U h(t, x_t, \mathbb{E}[x_t], u)\, q_t(du)dt + g(x_T, \mathbb{E}[x_T])\right], \tag{3.2}$$

où

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$h : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Le problème de contrôle relaxé est de minimiser la fonction $J(.)$ sur l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$. Le contrôle qui résoud ce problème de contrôle est appelé optimal.

Nous disons qu'un contrôle relaxé μ_t est un contrôle optimal si :

$$J(\mu) = \inf_{q \epsilon \mathcal{R}} J(q).$$

Considérons les hypothèses suivantes :

(**H1**) Les fonctions b, σ, h sont bornées et continument différentiable par rapport à (x, x') .

(**H2**) Les dérivées $b_x, b_{x'}, \sigma_x, \sigma_{x'}, h_x$ et $h_{x'}$ sont continues et bornées.

x désigne la variable d'état, x' l'esperance de l'état.

Sous l'hypothèses (**H1**), (**H2**), l'EDS 3.1 admet une solution unique.

3.1.1 Perturbation convexe (faible)

Comme l'ensemble de valeurs des contrôles relaxés $\mathcal{R}$ est convexe, alors pour établir les conditions nécessaire d'optimalité on utilisé une perturbation convexe (faible). On définit le contrôle relaxé perturbi de la manière suivante :

$$\mu_t^\theta = \tilde{\mu}_t + \theta \left(q_t - \tilde{\mu}_t \right), \forall q_t \in P(U) \text{ et } \theta \in [0, 1],$$

avec trajectoire correspondante x_t^θ.

3.1.2 L'inégalité variationelle

En utilisant l'optimalité de $\tilde{\mu}$, l'inégalité variationnelle sera dérivée de l'inégalité :

$$J\left(\mu^\theta\right) - J\left(\tilde{\mu}\right) \geq 0.$$

Pour cela, nous avons besoin des résultats suivants .

Proposition 3.1.1

Sous les hypothèses précédentes nous avons :

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|x_t^\theta - \tilde{x}_t\right|^2\right] = 0, \tag{3.3}$$

où x_t^θ et $\tilde{x}_t$ sont les trajectoires correspondantes à μ_t^θ et μ_t respectivement.

Preuve.

On a

$$x_t^\theta - \tilde{x}_t = \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right], u\right) \mu_s^\theta(du)ds - \int_0^t \int_U b\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right) \tilde{\mu}_s(du)ds$$
$$+ \sigma\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right]\right) dW_s - \sigma\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right]\right) dW_s,$$

d'après la définition de μ_t^θ, on trouve

$$x_t^\theta - \tilde{x}_t = \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right], u\right) \left(\tilde{\mu}_t(du) + \theta\left(q_t(du) - \tilde{\mu}_t(du)\right)\right) ds$$
$$- \int_0^t \int_U b\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right) \tilde{\mu}_s(du)ds$$
$$+ \sigma\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right]\right) dW_s - \sigma\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right]\right) dW_s,$$

Nous calculons $\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - \tilde{x}_t\right|^2\right]$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et l'isométrie, pour obtenir

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - \tilde{x}_t\right|^2\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\int_0^t \left[\left|\int_U b\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right], u\right) \tilde{\mu}_s(du) - \int_U b\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right) \tilde{\mu}_s(du)\right|^2 ds\right] \\
&+ C\theta^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\int_U b\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right], u\right) q_t(du) - \int_U b\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right], u\right) \tilde{\mu}_s(du)\right|^2 ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right]\right) - \sigma\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right]\right)\right|^2 ds\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_U \left|b\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right], u\right) - \int_U b\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right)\right|^2 \tilde{\mu}_s(du)\, ds\right] \\
&+ C\theta^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_U \left|b\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right], u\right)\right|^2 \left(q_t(du) - \tilde{\mu}_s(du)\right) ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right]\right) - \sigma\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right]\right)\right|^2 ds\right]
\end{aligned}
$$

Puisque b est uniformement Lipschitzienne et bornée, et σ est uniformement Lipschitzienne on a :

$$
\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - \tilde{x}_t\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|x_s^\theta - \tilde{x}_s\right|^2 ds\right] + C\theta^2
$$

En appliquant le lemme de Granwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, nous obtenons 3.3 . ■

Proposition 3.1.2

Soit $\hat{x}_t$, la solution des équations variationnelles suivant :

$$\begin{cases} d\hat{x}_t = \left(\int\limits_U b_x \left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \tilde{\mu}_t \left(du\right) \hat{x}_t + \mathbb{E}\left[\int\limits_U b_{x'} \left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \tilde{\mu}_t \left(du\right) \mathbb{E}\left[\hat{x}_t\right] \right] \right) dt \\ \qquad + \left(\sigma_x \left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right]\right) \hat{x}_t + \mathbb{E}\left[\sigma_{x'} \left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right]\right) \mathbb{E}\left[\hat{x}_t\right]\right]\right) dW_t \\ \qquad + \left(\int\limits_U b\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \tilde{\mu}_t(du) - \int\limits_U b\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) q_t\left(du\right) \right) dt \\ \hat{x}\left(0\right) = 0. \end{cases}$$

Nous avons l'estimation suivantes :

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{\theta} \left(x_t^\theta - \tilde{x}_t\right) - \hat{x}_t \right|^2 \right] = 0 \tag{3.4}$$

Preuve.

Pour simplfication, notons par

$$\Psi_t^\theta = \frac{1}{\theta} \left(x_t^\theta - \tilde{x}_t\right) - \hat{x}_t \tag{3.5}$$

Prouvons 3.4 . D'après 3.3 et la notation 3.5, nous avons

$$
\begin{aligned}
\Psi_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[b\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right], u\right)\mu_s^\theta(du) - b\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right)\mu_s^\theta(du)\right] ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[b\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right)\mu_s^\theta(du) - b\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right)\tilde{\mu}_s(du)\right] ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s^\theta, \mathbb{E}\left[x_s^\theta\right]\right) - \sigma\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right]\right)\right] dW_s \\
&- \int_0^t \left(\int_U b_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right)\tilde{\mu}_t(du)\,\hat{x}_t + \mathbb{E}\left[\int_U b_{x'}\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right)\tilde{\mu}_t(du)\,\mathbb{E}\left[\hat{x}_t\right]\right]\right) dt \\
&- \int_0^t \left(\sigma_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right]\right)\hat{x}_t + \mathbb{E}\left[\sigma_{x'}\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right]\right)\mathbb{E}\left[\hat{x}_t\right]\right]\right) dW_t \\
&- \int_0^t \left(\int_U b\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right)\tilde{\mu}_t(du) - \int_U b\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) q_t(du)\right) dt.
\end{aligned}
$$

En utilisant la définition de u_s^θ et en prenant l'esperance, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\Psi_t^\theta\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}&\left[\int_0^t\int_0^1\int_U \left|b_x\left(s, \Phi_s^\theta, u\right)\Psi_t^\theta\right|^2 \tilde{\mu}_s(du)d\lambda ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^1\int_U \left|\mathbb{E}\left[b_{x'}\left(s, \Phi_s^\theta, u\right)\mathbb{E}\left[\Psi_t^\theta\right]\right]\right|^2 \tilde{\mu}_s(du)d\lambda ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^1 \left|\sigma_x\left(s, \Phi_s^\theta\right)\Psi_t^\theta\right|^2 d\lambda ds\right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^1 \left|\mathbb{E}\left[\sigma_{x'}\left(s, \Phi_s^\theta\right)\mathbb{E}\left[\Psi_t^\theta\right]\right]\right|^2 d\lambda ds\right] + C\mathbb{E}\left[\left|\Gamma_t^\theta\right|^2\right],
\end{aligned}
$$

où

$$
\left(s, \Phi_s^\theta, u\right) := \left(s, \tilde{x}_s + \lambda\theta\left(\Psi_s^\theta + \hat{x}_s\right), \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s + \lambda\theta\left(\Psi_s^\theta + \hat{x}_s\right)\right], u\right) \tag{3.6}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\Gamma_t^\theta &= \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x\left(s, \Phi_s^\theta, u\right)\left(x_s^\theta - \tilde{x}_s\right)\left(q_s(du) - \tilde{\mu}_s(du)\right) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \int_U \mathbb{E}\left[b_{x'}\left(s, \Phi_s^\theta, u\right)\mathbb{E}\left[x_s^\theta - \tilde{x}_s\right]\right]\left(q_s(du) - \tilde{\mu}_s(du)\right) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \int_U \left(b_x\left(s, \Phi_s^\theta, u\right)\hat{x}_s + \mathbb{E}\left[b_{x'}\left(s, \Phi_s^\theta, u\right)\mathbb{E}\left[\hat{x}_s\right]\right]\right)\tilde{\mu}_t\left(du\right) d\lambda ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left(\sigma_x\left(s, \Phi_s^\theta\right)\hat{x}_s + \mathbb{E}\left[\sigma_{x'}\left(s, \Phi_s^\theta\right)\mathbb{E}\left[\hat{x}_s\right]\right]\right) d\lambda dW_s \\
&- \int_0^t \int_U b_x\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right)\hat{x}_s \tilde{\mu}_t\left(du\right) ds \\
&- \int_0^t \int_U \mathbb{E}\left[b_{x'}\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right], u\right)\mathbb{E}\left[\hat{x}_s\right]\right]\tilde{\mu}_t\left(du\right) ds \\
&- \int_0^t \left(\sigma_x\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right]\right)\hat{x}_s - \int_0^t \mathbb{E}\left[\sigma_{x'}\left(s, \tilde{x}_s, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_s\right]\right)\mathbb{E}\left[\hat{x}_s\right]\right]\right) dW_s,
\end{aligned}
$$

puisque les dérivées $b_x, b_{x'}, \sigma_x, \sigma_{x'}$ sont continues et bornées et d'après 3.3, nous avons

$$
\mathbb{E}\left[\left|\Psi_t^\theta\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\Psi_s^\theta\right|^2 ds\right] + C\mathbb{E}\left[\Gamma_t^\theta\right], \tag{3.7}
$$

et

$$
\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left[\left|\Gamma_t^\theta\right|^2\right] = 0. \tag{3.8}
$$

En utilisant 3.8, le lemme de Granwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy en 3.7, on peut montrer 3.4 . ■

Proposition 3.1.3 *(inégalité variationnelle)*

*Sous les hypotèses **(H1)-(H2).** Soit $\tilde{\mu}$ un contrôle relaxé optimal avec des trajectoires associées $\tilde{x}_t$. Ensuite, pour tout élément $q \in \mathcal{R}$, nous avons :*

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}\Big[& g_x\left(\tilde{x}_T, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_T\right]\right) \hat{x}_T+\mathbb{E}\left[g_{x'}\left(\tilde{x}_T, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_T\right]\right) \mathbb{E}\left[\hat{x}_T\right]\right] \\
&+\int_0^T \int_U\left(h_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \hat{x}_t+\mathbb{E}\left[h_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \mathbb{E}\left[\hat{x}_t\right]\right]\right) \tilde{\mu}_t(du)\, dt\Big] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) q_t(du)-\int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \tilde{\mu}_t(du)\right) dt\right].
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Preuve.

D'après l'optimalité de $\tilde{\mu}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \mathbb{E}\left[g\left(x_T^\theta, \mathbb{E}\left[x_T^\theta\right]\right)-g\left(\tilde{x}_T, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_T\right]\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U h\left(t, x_t^\theta, \mathbb{E}\left[x_t^\theta\right], u\right) \mu_t^\theta(du)-\int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \mu_t^\theta(du)\right) dt\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \mu_t^\theta(du)-\int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \tilde{\mu}_t(du)\right) dt\right].
\end{aligned}$$

Divisons cette inégalité par θ et en utilisant la définition de u_t^θ et la notation 3.5, on a

$$\begin{aligned}
& =\mathbb{E}\left[\int_0^1\left(g_x\left(\Phi_T^\theta\right) \hat{x}_T+\mathbb{E}\left[g_{x'}\left(\Phi_T^\theta\right) \mathbb{E}\left[\hat{x}_T\right]\right]\right) d\lambda\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 \int_U\left(h_x\left(t, \Phi_t^\theta, u\right) \hat{x}_t+\mathbb{E}\left[h_{x'}\left(t, \Phi_t^\theta, u\right) \mathbb{E}\left[\hat{x}_t\right]\right]\right) \tilde{\mu}_t(du)\, d\lambda dt\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \tilde{\mu}_t(du)-\int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) q_t(du)\right) dt\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\Lambda_t^\theta\right],
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned}\Lambda_t^\theta &= \int_0^1 \left(g_x\left(\Phi_T^\theta\right)\Psi_s^\theta + \mathbb{E}\left[g_x\left(\Phi_T^\theta\right)\mathbb{E}\left[\Psi_s^\theta\right]\right]\right)d\lambda \\ &+ \int_0^t\int_0^1\int_U h_x\left(s,\Phi_s^\theta,u\right)\left(x_s^\theta-\tilde{x}_s\right)\left(q_s(du)-\tilde{\mu}_s(du)\right)d\lambda ds \\ &+ \int_0^t\int_0^1\int_U \mathbb{E}\left[h_{x'}\left(s,\Phi_s^\theta,u\right)\mathbb{E}\left[x_s^\theta-\tilde{x}_s\right]\right]\left(q_s(du)-\tilde{\mu}_s(du)\right)d\lambda ds \\ &+ \int_0^t\int_0^1\int_U h_x\left(s,\Phi_s^\theta,u\right)\Psi_s^\theta\tilde{\mu}_s(du)d\lambda ds \\ &+ \int_0^t\int_0^1\int_U \mathbb{E}\left[h_{x'}\left(s,\Phi_s^\theta,u\right)\mathbb{E}\left[\Psi_s^\theta\right]\right]\tilde{\mu}_s(du)d\lambda ds.\end{aligned}$$

Comme les dérivées $b_x, b_{x'}, \sigma_x, \sigma_{x'}$ sont continues et bornées et d'après 3.3 et 3.4, nous avons

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\Lambda_t^\theta\right] = 0.$$

Alors, en laissant ε tendre vers 0 dans 3.10, on obtient l'inégalité variationnelle.

■

3.1.3 Conditions nécessaires d'optimalité

Définition 3.1.2

Le hamiltonien H défini de

$$[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}$$

dans $\mathbb{R}$ par

$$H\left(t,x,x',q,\Upsilon,\Delta\right) := \Upsilon\int_U b\left(t,x,x',u\right)q\left(du\right)+\Delta\sigma\left(t,x,x'\right)+\int_U h\left(t,x,x',u\right)q\left(du\right)$$

Théoreme 3.1.1 *(Conditions nécessaires d'optimalité pour un contrôle relaxè)*

Supposons que ***(H1)-(H2)*** *sont vérifiées. Soit* $\tilde{\mu} \in \mathcal{R}$ *un contrôle relaxé optimal. Soit* $\tilde{x}_t$ *la solution de l'EDS 3.1 associée à* $\tilde{\mu}_t$*. Alors , il existe une solution unique* (Υ, Δ) *des équations adjoints suivantes :*

$$\begin{cases} d\Upsilon_t = -\left(H_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], \tilde{\mu}_t, \Upsilon_t, \Delta_t\right) + \mathbb{E}\left[H_{x'}\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], \tilde{\mu}_t, \Upsilon_t, \Delta_t\right)\right]\right) dt + \Delta_t dW_t \\ \Upsilon_T = g_x\left(\tilde{x}_T, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_T\right]\right) + \mathbb{E}\left[g_{x'}\left(\tilde{x}_T, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_T\right]\right)\right] \end{cases} \tag{3.11}$$

telle que

$$H\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], \tilde{\mu}_t, \Upsilon_t, \Delta_t\right) \leq H\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], q_t, \Upsilon_t, \Delta_t\right), \forall q_t \in P\left(U\right). \tag{3.12}$$

Preuve.

D'après 3.11, l'inégalité variationnelle 3.9 devient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\left[\langle \Upsilon_T, \hat{x}_T \rangle\right] \qquad (3.13) \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U \left(h_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \hat{x}_t + \mathbb{E}\left[h_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \mathbb{E}\left[\hat{x}_t\right]\right]\right) \tilde{\mu}_t\left(du\right) dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) q_t\left(du\right) - \int_U h\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \tilde{\mu}_t\left(du\right)\right) dt\right]. \end{aligned}$$

Appliquant maintenant la formule d'Itô (intégration par parties) pour calculer $\langle \Upsilon_t, \hat{x}_t \rangle$ on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\langle \Upsilon_T, \hat{x}_T \rangle\right] = &-\mathbb{E}\left[\int_0^T \Upsilon_t \left(\int_U b\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \tilde{\mu}_t\left(du\right) \right.\right. \\ &\left.\left. - \int_U b\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) q_t\left(du\right)\right) dt\right] \\ &- \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U \left(h_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \hat{x}_t + \mathbb{E}\left[h_x\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], u\right) \mathbb{E}\left[\hat{x}_t\right]\right]\right) \tilde{\mu}_t\left(du\right) dt\right]. \end{aligned}$$

Remplaçant l'égalités ci-dessus dans l'inégalité 3.13 pour obtenir, pour chaque $q \in \mathcal{R}$

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(H\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], q_t, \Upsilon_t, \Delta_t\right) - H\left(t, \tilde{x}_t, \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t\right], \tilde{\mu}_t, \Upsilon_t, \Delta_t\right)\right) dt\right]$$

Par conséquent, l'inégalité 3.12 suit par un argument standard (perturbation). ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudier un problème de contrôle stochastique pour un système dirigé par une équation différentielle stochastique (EDS) de type champ moyen. Un problème de contrôle optimal consiste a trouver parmi l'ensemble des contrôles admissibles un contrôle qui minimise la fonction de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles et les trajectoires associées à ce contrôle vérifiants un système initial. Les coefficients de notre système initial d'EDS de type champ moyen, depend de processus d'état ainsi que leur distribution via l'esperence de processus d'état. De plus, la fonction de coût est également de type champ moyen. En particulier, dans ce mémoire on a établi les conditions nécessaires d'optimalités sous forme d'un principe de maximum stochastique, vérifies par un contrôle relaxé optimal pour ce genre du système. La méthode de démonstration est basée sur la méthode de perturbation faible (convexe), puisque l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$ est convexe.

Bibliographie

[1] Nassima Berrouis, Boulakhras Gherbal and Abdelhakim Ninouh, *Stochastic optimal control for dynamics of forward backward doubly SDEs of mean-field type*, Bol. Soc. Paran. Mat. c SPM –ISSN-2175-1188 on line.

[2] Philippe Briand, (Mars 2001). *Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.*

[3] Jean-Christophe Breton, *Calcul stochastique M2 Mathématiques*, Université de Rennes 1, Octobre-Décembre (2021).

[4] Mebarki Asma (Juin 2021), Mémoire Master : *Les conditions nécessaires d'optimalités pour les EDSPR de type champ moyen.*

[5] Monique Jeanblanc, (Septembre 2010), *Cours de Calcul stochastique* Master 2IF EVRY .

RÉSUMÉ

Nous intéressons dans ce travail aux conditions nécessaires d'optimalités, vérifies par un contrôle relaxé optimal pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques de type champ moyen. La fonction de coût est aussi de type champ moyen. La méthode de démonstration est basée sur la méthode de perturbation convexe, puisque l'ensemble des contrôles relaxés est convexe. Dans le premier chapitre., nous donnons quelque généralité sur le calcul stochastique. Le deuxième chapitre est consacré au preuve du résultat d'existence et d'unicité des solutions pour les EDS non linéaires dans Le cas Lipschitzien. Dans le troisième chapitre , nous établissons les conditions nécessaires d'optimalités sous forme d'un principe de maximum stochastique, vérifies par un contrôle relaxé optimal pour ce genre du système.

ABSTRACT

We are interested in this work, in the necessary conditions of optimality, verified by an optimal relaxed control for a system governed by stochastic differential equations of the mean field type. The cost function is also of mean field type. The proof method is based on the convex perturbation method, since the set of relaxed controls is convex. In the first chapter, we give some general information on the stochastic calculus. The second chapter is devoted to the proof of the result of existence and uniqueness of solutions for nonlinear SDEs in the Lipschitz case. In the third chapter, we establish the necessary conditions of optimalitiy in the form of a stochastic maximum principle, verified by an optimal relaxed control for this kind of system.

ملخص

نحن مهتمون في هذا العمل بالشروط اللازمة للأمثلية ، والتي يحققها التحكم الأمثل المريح لنظام تحكمه المعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية لنوع الحقل المتوسط. دالة التكلفة هي أيضًا من نوع الحقل المتوسط. تعتمد طريقة الإثبات على طريقة الاضطراب المحدب ، نظرًا لأن مجموعة التحكم المريح محدبة. في الفصل الأول ، نقدم بعض المعلومات العامة عن حساب التفاضل والتكامل العشوائي. تم تخصيص الفصل الثاني لإثبات نتيجة وجود الحلول للمعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية في حالة ليبشيتز.
في الفصل الثالث ، نؤسس الشروط اللازمة للأمثلية في شكل مبدأ أقصى عشوائي ، والتي يحققها التحكم المريح الأمثل لهذا النوع من النظام.