République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : **Probabilité**

Par Melle Djehina Ghezal

Titre :

Introduction aux EDSR réfléchies

Devant le Jury :

Dr.	**Imad-Eddine LAKHDARI**	U. Biskra	Président
Dr.	**Saloua LABED**	U. Biskra	Rapporteur
Dr.	**Rafika GATT**	U. Biskra	Examinateur

Soutenu Publiquement le 26/06/2022

Dédicace

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour tout au long de mes études,

À mes chers frères, pour leur appui et leur encouragement,

À toute ma famille,

À Merci d'être toujours là pour moi,

À mes amis,

Et à la promotion de mathématique 2022,

Je pris Allah de leur accorder longue vie et bonne santé,

Djehina

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donne la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Un merci spécial mon encadreur Saloua Labed, qui m'a beaucoup aidé dans m'a mémoire.

Je remercie également les members du Jury : Dr Imad Eddine LAKHDARI et Dr Rafika GATT pour accepté d'évalure et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs proposition.

Grand merci mes parents et ma famille qui m'a soutenu, merci a tous ceux qui ont aidé a complètes ce mémoire.

Notations et symbols

va	:	Variable aléatoire.
MB	:	Mouvement brownien.
$\mathbb{P}-ps$	:	Prêsque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$X(t)^+$	:	$\max(X(t), 0)$.
EDSRR	:	Equation différentielle stochastique rétrograde réfléchies.
$dt \otimes d\mathbb{P}$	:	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ avec la mesure de $d\mathbb{P}$.
$\mathbb{L}^2$	:	Espace des processus de carré intégrables.
Ω	:	Un ensemble fondamentale non vide.
BDG	:	Inégalité de Burthoder-devis-Gundy.

Table des matières

Introduction

La théorie des equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) est apparue récemment. Elle a été introduite par Pardoux-Peng en 1990 [5]. Cette théorie trouve des applications en mathématiques financières, en contrôle stochastique et des autres domaines.

Dans ce mémoire, nous intéressons à un nouveau types des équations différentielles stochastiques rétrogrades que sont les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies (EDSRR), il ya beaucoup type des EDSR réfléchies par exemple : EDSRR de type voltera, EDSRR avec réflexion oblique, EDSRR à une barrière, EDSRR à deux barrières...etc.

Nous avons choisi un type simple de ces types ce qui est EDSRR à une barrière qui est une généralisation du résultat de Pardoux et Peng. L'EDSRR à une barrière est donné sous la forme suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(t, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s \qquad 0 \leq t \leq T,$$

dans ce cas la solution est un triple de processus $(Y, Z, K)_{0 \leq t \leq T}$. El-Karoui et al [4] ont montré l'existence et l'unicité de la solution par deux méthodes dans le cas où f est K-Lipschitz, mais nous intéressons a la méthode d'approximation par pénalisation.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres, le premier chapitre est une rappelle sur le calcule stochastique, nous avons cité certains définitions et propriétés que nous en avons besoin dans la suit de ce travaille.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse a la définition des équations différentielles stochastiques rétrogrades et nous citons la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où le générateur f est K-Lipschitz.

Dans le troisième chapitre, nous donnons la définition et la forme de l'EDSRR à une barrière et nous citons la démonstration de l'unicité et l'existence de la solution par une méthode de pénalisation.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

L'objet de ce chapitre est de rappeler les définitions et les propriétés de calcul stochastique et ses résultats principaux (processus stochastique, mouvement brownien, martingale...etc), pour les utiliser dans le reste de ce mémoire.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique)*** *On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *indexé par ensemble* T *et a valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, une famille* $X = (X_t)_{t \in T}$ *d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

Remarque 1.1.1

1. *Si* T *est un ensemble fini, le processus* X_t *est un vecteur aléatoire.*
2. *Si* $T = \mathbb{N}$ *ou* $T = \mathbb{Q}^+$, X_t *est un processus à temps discrèt (suite de variables aléatoires).*
3. *Si* $T = \bar{\mathbb{R}}_+$ *ou* $T = [0, a]$, $a \in \mathbb{R}^+$, X_t *est un processus à temps continue.*
4. *Soit l'application :*

$$\Omega \times T \to \mathbb{R}^d$$
$$(w, t) \to X_t(w).$$

   * *Si* $t \in T$ *fixé, l'application :* $w \in \Omega \to X_t(w)$ *est une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   * *Si* $w \in \Omega$ *fixé, l'application :* $t \in T \to X_t(w)$ *est appelé trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 ***(Processus mesurable)*** *Un processus* $X=(X_t)_{t\in T}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}^d$ *est dit mesurable si l'application* $(w,t)\to X(t,w)=X_t(w)$ *définie sur* $\Omega\times T$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(T)$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.3 ***(Modification)*** *On dit que un processus* X *est une modification d'un processus* Y *si* $\forall t\in T$ *on a* $P(X_t=Y_t)=1$*, C'est-à-dire*

$$\forall t\in T,\qquad X_t(w)=Y_t(w)\qquad \mathbb{P}-ps.$$

On dit aussi que X *et* Y *sont stochastiquement équivalente ou bien version.*

Définition 1.1.4 ***(Indistingable)*** *Deux processus* X *et* Y *sont dit indistingable si* $\mathbb{P}-ps$ *les trajectoires de* X *et de* Y *sont les mêmes,C'est-à-dire*

$$\mathbb{P}(X_t=Y_t,\forall t\in T)=1.$$

Définition 1.1.5 ***(Filtration)*** *Une filtration sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *est une famille croissante* $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *avec*

$$\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}\qquad\forall\ 0\leq s\leq t.$$

Remarque 1.1.2 *Le quadruplet* $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in T},\mathbb{P})$ *est appelé espace de probabilité filtré (ou base stochastique).*

Définition 1.1.6 ***(Filtration naturelle)*** *Filtration naturelle (propre) d'une processus* $X=(X_t)_{t\in T}$ *est définie par*

$$\mathcal{F}_t=\sigma(X_s:s\leq t,\quad t\in T).$$

$\mathcal{F}_t$ *est la classe des évènement que l'on peut identifier au temps* t.

Remarque 1.1.3

1. *Une filtration* $\{\mathcal{G}_t,t\in T\}$ *est dite plus grosse que la filtration* $\{\mathcal{F}_t,t\in T\}$ *si* $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{G}_t\ \forall t\in T$.
2. *Une filtration est continue à droit si* $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t^+}=\bigcap\limits_{s>t}\mathcal{F}_s$.

3. *Une filtration est continue à gauche si* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\underset{s<t}{\cup}\mathcal{F}_s)$.
4. *On dit que les condition usuelle ou bien habituelles sont satisfait et si l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est complet si la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *est complet est continue à droit.*

Définition 1.1.7 ***(Processus continue)*** $X = (X_t)_{t\in T}$ *un processus stochastique, on dit continue si tout leurs trajectoirs sont continue.*

Définition 1.1.8 ***(Processus cadlàg)*** *Le processus* X *est dit cadlàg si les trajectoires sont continue à droit et a des limite à gauche* $\forall w \in \Omega$.

Définition 1.1.9 ***(Processus caglàd)*** *Le processus* X *est dit caglàd si les trajectoires sont continue à gouche et a des limite à droit* $\forall w \in \Omega$.

Définition 1.1.10 ***(Processus adapté)*** *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \in T$.

Remarque 1.1.4 *Tout processus est adapté a sa filtration naturelle.*

Définition 1.1.11 ***(Processus progrressivement mesurable)*** *On dit que* X *est un processus progressivement mesurable si pour tout* $t \in T$ *l'application* $(w, s) \to X(s, w)$ *définie sur* $\Omega \times [0, t]$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, t])$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.1.1 Martingale

Définition 1.1.12 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré, on dit qu'un processus* $M = (M(t), t \geq 0)$ *est* $\mathcal{F}$*-martingale ou simplement une martingale si elle est adapté et intégrable et si*

$$\forall s \leq t, \qquad \mathbb{E}(M(t) \mid \mathcal{F}_s) = M(s) \qquad \mathbb{P} - ps.$$

On dit que $M = (M_t)_{t\geq 0}$ *est une sous-martingale (resp sur-martingale), si elle est adapté et intégrable et si*

$$\forall s \leq t \qquad \mathbb{E}(M(t) \mid \mathcal{F}_s) \geq M(s) \qquad \mathbb{P} - ps.$$

(*resp si* $\forall s \leq t \quad \mathbb{E}(M(t) \mid \mathcal{F}_s) \leq M(s) \quad \mathbb{P}-ps$).

1.1.2 Mouvement brownien

Définition 1.1.13 *Un processus* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien (standard) si* B *satisfait les propriétés suivantes :*

1 $P\left(B_0 = 0\right) = 1.$

2 $\forall s \leq t, B_t - B_s$ *est une variable de loi gaussien, centré de variance* $(t-s)$.

3 $\forall n \geq 1, \forall 0 \leq t_0 \leq t_1 ...... \leq t_n$, *les variables*

$$\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$$

sont indépendantes.

4 *Pour tout* (t,s), $B_{t+s} - B_t$ *est indépendante de la tribu du passé avant* t.

1.1.3 Propriétés du movement brownien

Si B est un mouvement brownien et pour tout $t \in [0,T]$, $\mathcal{F}_t$ est la filtration propre alors

a. $-B$ est aussi un mouvement brownien.

b. $Cov\left(B_s, B_t\right) = \min\left(s,t\right) = s \wedge t.$

c. B est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

d. $(B_t^2 - t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

e. Pour tout $\lambda \in R$, $\left(\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

Théorème 1.1.1 ***(Théorème de représentation des martingales browniennes)*** *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *la filtration naturelle du mouvement brownien* $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* M_t *est une martingale continue de carré intégrable* $\mathcal{F}_t-$*adapté. Alors il existe un processus adapté* Z *tel que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T Z^2 ds\right) < \infty$$

et pour tout $t \in [0,T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s, \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

1.2 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration de $\mathcal{F}$ satisfait les conditions habituelles et $B_t = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien définit dans un espace de probabilité.

Définition 1.2.1 *On définit l'intégrale stochastique de la forme* $\boldsymbol{I}(X) = \int_0^t X_s dB_s$*, avec* X_s *un processus stochastique et* B_s *est un mouvement brownien.*

1.2.1 Propriété de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes

1. Mesurabilité, $\forall t \geq 0$ $\boldsymbol{I}(X)_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

2. Martingale, pour $s \geq k$

$$E[\boldsymbol{I}(X) \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s) dB_s \mid \mathcal{F}_k\right] = \int_0^k X_s dB_s.$$

3. Linéarité

$$\int_0^t X_s dB_s + \int_0^t Y_s dB_s = \int_0^t (X_s + Y_s) dB_s \quad \text{et} \quad \alpha \int_0^t X_s dB_s = \int_0^t \alpha X_s dB_s.$$

4. Additivité, pour $0 \leq s \leq k \leq t \leq T$

$$\int_0^t X_s dB_s = \int_0^k X_s dB_s + \int_k^t X_s dB_s.$$

5. Isomitrie d'Itô

$$E[\boldsymbol{I}^2(X)_t] = \mathbb{E}[\int_0^t X_s^2 d_s].$$

1.2.2 Formule d'Itô et processus d'Itô

On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ tel que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

1. X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.
2. $\{b_t, 0\leq t\leq T\}$ et $\{\sigma_t, 0\leq t\leq T\}$ deux processus adapté à $\mathcal{F}_t$.
3. $\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty \qquad \mathbb{P}-ps$ et $\int_0^t |\sigma_s|^2\, ds \qquad \mathbb{P}-ps.$

On notera sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX_s = b_s ds + \sigma_s dB_s \\ X_0 = x \end{cases}.$$

Théorème 1.2.1 *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \in C^2$ on a*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s.$$

tel que

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.2.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $C^{1.2}$ on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X_S) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_S) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, X_S) d\langle X, X\rangle_s.$$

1.2.3 Formule d'intégration par partie

Soit X et Y deux processus d'Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \qquad \text{et} \qquad Y_t = Y_0 + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dB_s$$

on a

$$d\left(X_tY_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \langle dX, dY\rangle_t$$

alors

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

1.3 Résultats importants

1.3.1 Inégalités utiles

Théorème 1.3.1 *(Inégalité de Doob) Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale continue, alors*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid\right] \leq 4E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^2\right].$$

Théorème 1.3.2 *(Lemme de Gronwalle) Soit* $T \geq 0$ *et* g *une fonction positive mesurable bornée telle que*

$$g\left(t\right) \leq a + b\int_0^t g(s)ds \quad \forall t \leq T.$$

Alors on a pour tout $t \in [0, T]$

$$g\left(t\right) \leq a\exp\left(bt\right)$$

si $a = 0,$ *alors* $g = 0.$

Théorème 1.3.3 *(Inégalité Burthoder-devis-Gundy "BDG") Soit* $p > 0$ *un réel, il existe deux constante* C_p *et* c_p *telle que pour toute martingale continue* X *nulle en zéro on a*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right].$$

1.3.2 Problème de Skorokhod

En théorie des Probabilités, le problème de Skorokhod est le problème de la résolution d'une équation différentielle stochastique avec une condition aux limites réfléchissante.

La version classique du problème stipule que étant donné un processus càdlàge $\{X(t), t \geq 0\}$ et une M-matrice R, alors les processus stochastique $\{Y(t), t \geq 0\}$ et $\{K(t), t \geq 0\}$ on dit que résout le Problème de Skorokhod si pour toutes les valeurs de t positive :

1. $Y(t) = X(t) + RK(t) \geq 0$.
2. $K(0) = 0$ et $dK(t) \geq 0$.
3. $\displaystyle\int_0^t Y_i(s)\, dK_i(s) = 0$.

La matrice R est souvent appelée matrice de réflexion, $Y(t)$ comme processus réfléchi et $K(t)$ comme processus régulateur.

Chapitre 2

Equation différentielle stochastique et équation différentielle stochastique rétrograde

Le but de ce chapitre est d'étudié les équations différentielles stochastiques (EDS) et de donner leur forme générale et d'identifier les équations différentielles stochastique rétrogrades (EDSR) que sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne la condition terminale.

2.1 Equations différentielles stochastique

Définition 2.1.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, l'équation différentielle stochastique et donné sous la forme*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *deux fonction borélienne,* x *une va* $\mathcal{F}_0$ *mesurable et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t$ *mb. Les coefficients* b *et* σ *appelés respectivement dérive et coefficient de diffusion.*

Théorème 2.1.1 *(Théorème d'existence et unicité) Si* b *et* σ *sont des fonctions continue telle que il* *existe* $k < +\infty$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$ *avec*

1. *Condition de Lipschitz*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|\,.$$

2. *Condition de linéarité*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq k\,(1+|x|)\,.$$

3. $\mathbb{E}\left[x^2\right] \leq +\infty$.

Alors pour tout $T \geq 0$, *l'équation* (2.1) *admet une solution forte unique* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ $\mathcal{F}_t$*-adapté, cette solution vérifie*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < +\infty.$$

L'unicité signifie si que $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ sont deux solution de l'équation (2.1) alors

$$\forall 0 \leq t \leq T \quad X_t = Y_t \quad \mathbb{P}{-}ps.$$

2.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades

2.2.1 Présentation de probléme

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, ξ une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et de carré intégrable. On considère l'équation suivant

$$\begin{cases} dY_t = -f(t,Y) \quad \forall t \in [0,T]\,, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.2}$$

On imposant que pour tout instant t, soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ c'est à dire que pour tout $t \in [0,T]$, Y_t ne dépend pas du future après l'instant t, pour résoudre ce problème on va prendre le cas le plus simple où $f = 0$, alors l'équation (2.2) devient

$$\begin{cases} dY_t = 0 \qquad \forall t \in [0, T], \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} dY_t = cte, \qquad \forall t \in [0, T], \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

et comme $Y_t = cte = Y_T \Rightarrow Y_t = \xi$.

Mais $Y_T = \xi$ n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation de la solution dans $\mathbb{L}^2-$adapté est la martingale $Y_t = E[\xi \mid \mathcal{F}_t]$, si on travaille avec la filtration naturelle d'un mb, dans le théorème de représentation des martingales browniennes on construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = E[\xi \mid \mathcal{F}_t] = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

D'autre part si $t = T$

$$\begin{aligned} Y_T &= E[\xi \mid \mathcal{F}_T] = E[\xi] + \int_0^T Z_s dB_s, \\ Y_t - Y_T &= E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s - \left[E[\xi] + \int_0^T Z_s dB_s \right], \\ &= \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^T Z_s dB_s, \\ &= -\int_t^T Z_s dB_s, \\ Y_t &= Y_T - \int_t^T Z_s dBs = \xi - \int_t^T Z_s dB_s, \\ -dY_t &= -Z_t dB_t \qquad \text{avec} \qquad Y_T = \xi, \end{aligned}$$

on voit donc apparaitre sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qu'est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté, par conséquent comme une seconde variable appariant pour obtenir le cas générale, on permet à f dépendre du processus Z, l'équation devient alors

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \qquad \forall t \in [0, T], \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.3}$$

et sous forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s \qquad \forall t \in [0, T].$$

2.2.2 Notation et définition

On considère les espaces suivantes

$$S^2(\mathbb{R}^k) = \left\{ \begin{array}{c} Y : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^k \text{ progressivement mesurable et tel que :} \\ \|Y\|^2_{S^2} = E\left[\sup_{0 \le t \le T} |Y_t|^2\right] < \infty. \end{array} \right\}$$

$S^2_c(\mathbb{R}^k) = \{$le sous espace de $S^2(\mathbb{R}^k)$ formé par les processus continue.$\}$

$$\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right) = \left\{ \begin{array}{c} Z : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^{k\times d} \text{ progressivement mesurable à valeur dans } \mathbb{R}^{k\times d} \text{ tel que :} \\ \|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty. \end{array} \right\}$$

$M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de désigne $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Les espaces S^2, S^2_c et M^2 sont des espace de Banach pour les normes définies précédemment. On désigne par $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $S^2_c(\mathbb{R}^k) \times M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$,

$$\|(u,v)\|_0 = E\left[\sup_{0 \le t \le T} |u_t|^2 + \|v_s\|^2 ds\right]^{1/2},$$

le couple $(\mathcal{B}^2, \|.\|_0)$ est un espace de Banach.

Définition 2.2.1 *Soit $B = (B_t)_{0 \le t \le T}$ un MB d-dimensionnelle $(B_t)_{t \le T} = \left(B^1_t, B^2_t, ..., B^d_t\right)$ définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \le T}$ est la filtration complétée du brownien B. Les donné de cette équation un couple (ξ, f), f s'appelle le générateur et ξ la condition terminale où*

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$$
$$(t, y, z) \to f(t, y, z),$$

et le couple (ξ, f) vérifiant :

1. *Le processus $\{f(t, y_t, z_t)\}_{0 \le t \le T}$ est progressif pour tout y, z.*
2. *ξ est $\mathcal{F}_T-$mesurable et de carré intégrable, $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t)$.*

Définition 2.2.2 *Une solution de l'EDSR (2.3) est un couple* $(Y, Z) = (Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ *vérifiant :*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurable à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et de* $\mathbb{R}^{k \times d}$.
2. $\mathbb{P}-ps$ $\quad \displaystyle\int_0^T \{|f(t, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\} \, ds < \infty.$
3. $\mathbb{P}-ps$ *on a*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s \qquad \forall t \in [0, T].$$

Remarque 2.2.1 **a.** *L'intégrale de l'équation (2.3) étant bien définie.*

b. $Y_t = Y_0 + \displaystyle\int_t^T f(t, Y_s, Z_s) ds - \int_0^T Z_s dB_s \qquad 0 \leq t \leq T$ *telle que*

* $\displaystyle\int_t^T f(t, Y_s, Z_s) ds$ *est à variation finie.*

* $\displaystyle\int_0^t Z_s dB_s$ *est une martingale, alors* Y_t *est une semi-martingale continue.*

* *Le processus* Y *est progressivement mesurable, il est adapté et donc* Y_0 *est une quantité déterministe car* Y_0 *est* $\mathcal{F}_0$ *mesurable.*

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus* $(f_t)_{0 \leq t \leq T}$ *positif telle que* $\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$,

$$|f(t, y_t, z_t)| \leq f_t + k(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *est une solution de l'EDSR (2.3) telle que* $Z \in M^2$ *alors* $Y \in S_c^2$.

Pour montrer cette proposition on a besion de lemme de Gronwall et l'inégalité de Doob.

Lemme 2.2.1 *Si* $Y \in S^2(R^k)$ *et* $Z \in M^2(R^{k \times d})$, *alors :*

$$X_t = \left\{ \int_0^t Y_s Z_s dB_s, \ t \in [0, T] \right\},$$

est une martingale uniformément intégrable.

2.2.3 Cas Lipschitz (Résultat de Pardaux-Peng)

Jean-Michel Bismut à été introduit les EDSR dans le cas où le générateur est une fonction linéaire en (1973), puis E-pardaux et S-peng en 1990 [5] sont les premiers qui démontrent l'existence et l'unicité des solution pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire que nous verrons dans cette section.

Soit l'application f définie sur $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une va $\mathcal{F}_T-$mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$.

Hypothése (H) :

H1 Condition de Lipschitz Il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\mathbb{P}-ps$: en (y,z) pour tout $t, y, y\prime, z\prime, z$

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq k\left(|y-y'| + \parallel z - z' \parallel\right).$$

H2 Condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds\right] < \infty.$$

Cas simple(f ne dépend ni de y ni z)

C'est à dire : on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{2.4}$$

Lemme 2.2.2 *Soit $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'EDSR (2.4) possède une solution unique (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

Pour montrer ce lemme, on utilise le théorème de représentation des martingales browniennes et le théorème de Fubini.

Preuve.

1. **Existence** Supposons que (Y, Z) une solution vérifie $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ on a

$$\begin{aligned}
Y_t &= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right]. \\
&= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right]. \\
&= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] + E\left[\int_0^t Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^T Z_s dB_s$ et $\int_0^t Z_s dB_s$ sont des martingales, alors

$$E\left[\int_0^t Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] = 0.$$

Donc

$$Y_t = E\left[\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^t F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right],$$

d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable on a alors :

$$E\left[\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t F_s ds = M_t - \int_0^t F_s ds.$$

M_t est une martingale brownien d'aprés le théorème de représentation des martingale browniens, il existe un processus $Z \in M^2$ telle que

$$Y_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds$$

vérifie que (Y, Z) ainsi construit une solution de l'EDSR (2.4) étudiée, puisque comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - M_0 - \int_0^T Z_s dB_s + \int_0^T F_s ds. \\ &= \int_t^T F_s - \int_t^T Z_s dB_s \end{aligned}$$

ce que nous donne que

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s - \int_t^T Z_s dB_s.$$

2. **Unicité :** Si (Y', Z') est une autre solution de l'EDSR (2.4), alors

$$Y_t' = Y_t = E\left[\xi + \int_t^T F_s \mid \mathcal{F}_t\right]$$

d'ou l'unicité de Y puis que $Z = Z'$est vérifiée par le théorème de représentation des martingales browniens.

■

Cas où f dépend de y et de z

Théorème 2.2.1 ***(Pardaux-Peng 1990)*** *sous l'hypothèse (H) l'EDSR (2.3) possède unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. Nous utilisant un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$, on construisant une application

$$\Psi : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$$

$$(Y, Z) \to \Psi(Y, Z)$$

telle que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est une solution de l'EDSR (2.3) si et seulement si (Y, Z) c'est un point fixe de Ψ pour tout $(U, V) \in \mathcal{B}^2$, on définie $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(t, U_s, V_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \forall t \in [0, T]$$

remarque que cette dernière EDSR possède une solution unique qui est dans $\mathcal{B}^2$. En effet, posons $F_s = f(t, U_s, V_s) \in M^2$ comme f est k-Lipchitz alors

$$|f(t, U_s, V_s) - f(t, U'_s, V'_s)| \leq k\left(|U_s - U'_s| + \|V_s - V'_s\|\right).$$

Si en prenons $U'_s = V'_s = 0$, alors

$$|f(t, U_s, V_s) - f(t, 0, 0)| \leq k\left(|U_s| + \|V_s\|\right).$$
$$|f(t, U_s, V_s)| \leq |f(t, 0, 0)| + k|U_s| + k\|V_s\|.$$
$$|F_s| \leq |f(t, 0, 0)| + k|U_s| + k\|V_s\|,$$

et ces trois derniers processus f et U_s et V_s sont de carré intégrable. On applique le lemme 2.2.2 pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$ et d'après la proposition 2.2.1 alors $Y \in S^2$.

Soit (U, V), $(U', V') \in \mathcal{B}^2$ et $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ et $(Y', Z') = \Psi(U', V')$.

Notons $y = Y - Y\prime$, $z = Z - Z\prime$ et $Y_T = 0$ tel que :

$$dy_t = -\left\{f(t, U_s, V_s) - f(t, U'_s, V'_s)\right\}dt - z_t dB_t,$$

on applique la formule d'Itô a $\exp(\alpha t)|y_s|^2$

$$\begin{aligned} d\left(\exp(\alpha t)|y_s|^2\right) &= \alpha\exp(\alpha t)|y_s|^2 dt - 2y_t\exp(\alpha t)\left\{f(t, U_s, V_s) - f(t, U'_s, V'_s)\right\}dt \\ &\quad - 2\exp(\alpha t)\, y_t z_t dBt + \exp(\alpha t)\|z_t\|^2 dt, \end{aligned}$$

en passant à l'intégrale entre t et T, on trouve

$$\begin{aligned} -\exp(\alpha t)|y_s|^2 = \int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds - 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s.z_s dBs + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \\ -2\int_t^T y_s\exp(\alpha s)\left\{f(t, U_s, V_s) - f(t, U'_s, V'_s)\right\}ds, \end{aligned}$$

alors :

$$\exp(\alpha t)\left|y_s\right|^2+\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2 ds=\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\left(2y_s\left\{f(t,U_s,V_s)-f(t,U_s',V_s')\right\}-\alpha\left|y_s\right|^2\right)ds$$
$$-2\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)y_s.z_s dB.$$

Notons u et v pour U_s-U_s' et V_s-V_s' respectivement et comme f est k-Lipschitz :

$$\exp(\alpha t)\left|y_s\right|^2+\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2 ds\leq-\int_t^T \alpha\exp\left(\alpha s\right)\left|y_s\right|^2 ds$$
$$+2\int_t^T y_s\exp\left(\alpha s\right)\left(k\left|u\right|+k\|v\|\right)ds-2\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)y_s.z_s dBs.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, d'après l'inégalité de Young $2ab\leq\dfrac{a^2}{\varepsilon}+\varepsilon b^2$, l'inégalité précédente devient

$$\exp(\alpha t)\left|y_s\right|^2+\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2 ds\leq\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\left(-\alpha+\frac{2k^2}{\varepsilon}\right)\left|y_s\right|^2 ds$$
$$+\varepsilon\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\left(\left|u\right|^2+\|v\|^2\right)ds-2\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)y_s.z_s dBs.$$

Prenant $\alpha=\dfrac{2k^2}{\varepsilon}$ et notant $R=\varepsilon\displaystyle\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\left(\left|u\right|^2+\|v\|^2\right)ds$

$$\exp(\alpha t)\left|y_s\right|^2+\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2 ds\leq R-2\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)y_s.z_s dBs. \tag{2.5}$$

D'après le lemme 2.2.1 $\left\{\displaystyle\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)y_s.z_s dBs\right\}_{0\leq t\leq T}$ est une martingale uniformément intégrale d'espérance nulle puisque $Y,Y\prime$ appartient à S^2 et $Z,Z\prime$ appartient à M^2. Donc la dernière inégalité nous donne :

$$\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2\leq R-2\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)y_s.z_s dBs,\ \text{ et} \tag{2.6}$$

$$\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2 ds\leq R-2\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)y_s.z_s dBs. \tag{2.7}$$

Prenant l'espérance de (2.7), on obtient :

$$E\left[\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2 ds\right]\leq E\left[R\right]-2E\left[\int_t^T \exp\left(\alpha s\right)y_s.z_s dBs\right]\leq E\left[R\right].$$

On applique l'inégalité de Doob à l'inégalité (2.6) , l'inégalité BDG fournissant avec c universelle

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2\right] &\leq E\left[R\right]+cE\left[\left(\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left|y_s\right|^2.\|z_s\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\leq E\left[R\right]+cE\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right)\left|y_t\right|\left(\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],
\end{aligned}$$

comme $ab\leq\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}$

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2\right]\leq E\left[R\right]+\frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2\right]+\frac{c^2}{2}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2ds\right],$$

alors

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2\right]-\frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2\right]\leq E\left[R\right]+\frac{c^2}{2}E\left[R\right],$$

donc

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2\right]\leq 2E\left[R\right]+c^2E\left[R\right],$$

de plus on a :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2+\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2ds\right]\leq\left(3+c^2\right)E\left[R\right].$$

Et par suit, revenant à la définition de R, quand $t=0$

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\|z_s\|^2ds\right] &\leq\varepsilon\left(3+c^2\right)E\left[\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left(\left|u\right|^2+\|v\|^2\right)ds\right]\\
&\leq\varepsilon\left(3+c^2\right)E\left[\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left|u\right|^2ds+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\|v\|^2ds\right]\\
&\leq\varepsilon\left(3+c^2\right)E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left(\alpha t\right)\left|u\right|^2T+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\|v\|^2ds\right]\\
&\leq\varepsilon\left(3+c^2\right)\left(1\vee T\right)E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left(\alpha t\right)\left|u\right|^2+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\|v\|^2ds\right].
\end{aligned}$$

Prenons ε telle que $\varepsilon\left(3+c^2\right)\left(1\vee T\right)=\dfrac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme

$$\|\left(U,V\right)\|_\alpha=E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp\left(\alpha t\right)\left|U_t\right|^2+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\|\ V_s\ \|^2\ ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach - cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qu assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.3) dans $\mathcal{B}^2$.

On obtient ensuit une unique solution $Z \in M^2$ puisque la proposition 2.2.1 implique qu'une telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$. ∎

Chapitre 3

Equations différentialles stochastiques rétrogrades réfléchies

3.1 Introduction

Les EDSRR ont été introduites pour la première fois en 1997, le cas où f est K-Lipschitz par El karoui et al [4] dans le cas unidimensionnel. Sous la forme suivant :

$$\begin{aligned}
&Y_t = \xi + \int_t^T f(t, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T \\
&Y_t \geq S_t, 0 \leq t \leq T \\
&\int_t^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0,
\end{aligned}$$

la solution est une triple de processus $(Y, Z, K)_{0 \leq t \leq T}$, la première composante Y de la solution est contraint à rester au dessus d'une barrière donné par un processus continue adapté S. La dernière condition est connue sous la nome de condition de Skorohod signifie K agit d'une manière minimale, autrement il ne croit que lorsque Y touche le barrière S. Dans [3] les auteurs ont prouvé l'unicité et l'existence à la fois par un argument de point fixe et par approximation par pénalisation. Sur la base de ces résultats, Cvitanic, Karatzas ont ensuit introduit dans [2] des EDSRR avec deux barrières, la solution est maintenant obligée de rester entre deux barrières données. Dans ce cas, la première composante dans la solution Y est maintenue entre deux barrières grâce à deux processus croissante K^+ et K^- la solution est un quadruplet de processus adapté (Y, Z, K^+, K^-). L'EDSRR multidimensionnelle réfléchie a été étudié par Gegout-Petit et Pardoux dans un domaine convexe et une direction de réflexion normale et dans le cas de réflexion oblique par Ramasubramaniam puis Hu et Tang [6].

3.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies à une barrière

Les EDSRR à une barrière ont été introduites en 1997 par El Karoui, Kapoudjian, Pardoux, Peng et Quenez [4] comme généralisation du résultats de Pardaux et Peng pour cela la notion des EDSR à été modifiée par l'ajoutant d'une processus adapté croissante K à la solution de l'EDSR, qui devient donc un triple de processus adapté (Y, Z, K).

3.2.1 Notation et définition

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace de probabilité filtré $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ la filtration naturelle de B où $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensemble $\mathbb{P}$-nulle de f et soit σ la σ-algèbre des sous ensembles prévisible de $[0, T]$.

Introduisons quelques notations

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ (Z_t)_{0\leq t\leq T} \text{ processus prévisible tel que } E\left[\int_0^t |Z_t|^2 \, dt\right] < +\infty \right\}.$$

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ (Y_t)_{0\leq t\leq T} \text{ processus prévisible tel que } E\left[\sup |Y_t|^2\right] < +\infty \right\}.$$

Notre EDSRR s'écrit sous la forme suivant

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(t, Y_s, Z_s) ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.1}$$

telle que

$i)$ $\xi \in \mathbb{L}^2$.

$ii)$ L'application $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \qquad f(., y, z) \in \mathbb{H}^2$ pour tout

$k > 0$ et $y, y\prime \in \mathbb{R}, z, z' \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq k\left(|y - y'| + \parallel z - z' \parallel\right).$$

iv) $\{S_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ un processus continue progressivement mesurable à valeurs réelles satisfait :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}(S_t^+)^2\right] < +\infty.$$

On suppose toujours que $S_T \leq \xi\ \mathbb{P} - ps.$

Définition 3.2.1 *Une solution de l'EDSRR associe au paramètre* (f, ξ, S) *est la donnée d'une triplet du processus* $(Y, Z, K) = (Y, Z, K)_{0\leq t\leq T}$ $\mathcal{F}_t$ *mesurable à valeurs réelle dans* $\mathbb{R}$ *satisfait :*

v) $Z \in \mathbb{H}^2 \qquad E\left[\int_0^T |Z_t|^2\, dt\right] < \infty.$

v$\prime$) $Y \in \mathcal{L}^2$ *et* $K_T \in \mathbb{L}^2, \qquad 0 \leq t \leq T.$

vi) $Y_t = \xi + \int_t^T f(t, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s.$

vii) $Y_t \geq S_t \qquad 0 \leq t \leq T.$

viii) $\{K_t\}$ *est un processus continu, de plus* $K_0 = 0$ *et* $\int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0.$

Proposition 3.2.1 *Soit* (Y, Z, K) *une solution d'EDSRR* (3.1) *satisfait les conditions de* (vi) *à* (vii), *alors pour tout* $t \in [0, T]$

$$K_T - K_t = \sup_{t\leq u\leq T}\left(\xi + \int_u^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_u^T Z_s dB_s - S_u\right)^-.$$

Preuve. *Remarquez que* $\Big(Y_{T-t}(w) - S_{T-t}(w), K_{T-t}(w) - K_T(w),\quad 0 \leq t \leq T \Big)$ *c'est la solution d'un problème de Skorohod. Appliquer le lemme de skorohod avec*

$$x_t = \left(\xi + \int_{T-t}^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_{T-t}^T Z_s dB_s - S_{T-t}\right)(w),$$

$k_t = (K_T - K_{T-t})(w)$ *et* $y_t = (Y_{T-t} - S_{T-t})(w)$ *nous dérivons le résultat souhaité.* ■

Corollaire 3.2.1 *Soit* $(Y, Z, K)_{0\leq t\leq T}$ *une solution de l'EDSRR* (3.1) *satisfaisant les hypothèses de* $v)$ *à* $viii)$ *et l'hypothèses d'intégrabilité* $v)$ *sur* Z, *alors la condition* $v\prime)$ *est satisfaite*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} Y_t^2 + K_T^2\right] < \infty \qquad Y \in \mathbb{H}^2, K_T \in \mathbb{L}^2$$

$\left\{\int_0^t Y_s Z_s dB_s\right\}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

Proposition 3.2.2 *Soit* $(Y, Z, K)_{0\leq t\leq T}$ *une solution de l'équation* (3.1), *alors il existe une constante* C *telle que*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} Y_t^2 + \int_0^T |Z_t|^2 \, dt + K_T^2\right] \leq CE\left[\xi^2 + \int_0^T f^2(t,0,0)\, dt + \sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right].$$

Preuve. On a

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s)\, ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s.$$

On applique la formule d'Itô à Y_t^2 avec $Y_T = 0$

$$\begin{aligned} dY_t^2 &= 2Y_t dY_t + \frac{1}{2} \times 2\langle dY_t, dY_t\rangle \\ Y_t^2 &= \xi^2 + \int_t^T 2Y_s dY_s + \int_t^T \langle dY_s, dY_s\rangle \\ Y_t^2 + \int_t^T |Z_s|^2 \, ds &= \xi^2 + 2\int_t^T Y_s f(s, y_s, z_s)\, ds + 2\int_t^T Y_s dK_s - 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s. \end{aligned}$$

Et comme $\int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0$ alors

$$Y_t^2 + \int_t^T |Z_s|^2 \, ds = \xi^2 + 2\int_t^T Y_s f(s, y_s, z_s)\, ds + 2\int_t^T S_s dK_s - 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s,$$

donc

$$E\left[Y_t^2 + \int_t^T |Z_s|^2 \, ds\right] = E\left[\xi^2 + 2\int_t^T Y_s f(s, y_s, z_s)\, ds + 2\int_t^T S_s dK_s - 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s\right]$$

$\int_0^t Y_s Z_s dB_s$ c'est une martingale par rapport a $\mathcal{F}_t$

$$E\left[Y_t^2+\int_t^T |Z_s|^2\, ds\right]=E\left[\xi^2+2\int_t^T Y_s f\left(s,y_s,z_s\right) ds+2\int_t^T S_s dK_s\right]$$

f est k-Lipschitz, alors

$$2yf\left(t,y,z\right)|\leq \left|f\left(t,0,0\right)\right| 2y+2k\left|y\right|^2+2k\left|y\right|\left|z\right|.$$

On utilise l'inégalité de Young pour $\varepsilon=1$ et pour $\varepsilon=2$, on trouve

$$\begin{aligned}2yf\left(t,y,z\right)| &\leq \left|f\left(t,0,0\right)\right|^2+\left|y\right|^2+2k\left|y\right|^2+2k^2\left|y\right|^2+\frac{1}{2}\left|z\right|^2\\ &\leq \left|f\left(t,0,0\right)\right|^2+\left|y\right|^2\left(1+2k+2k^2\right)+\frac{1}{2}\left|z\right|^2.\end{aligned}$$

Donc avec $C=1+2k+2k^2$

$$\begin{aligned}E\left[Y_t^2+\int_t^T |Z_s|^2\, ds\right] &\leq E\left[\xi^2+\int_t^T \left|f\left(t,0,0\right)\right|^2 ds+C\int_t^T |Y_s|^2\, ds+2\int_t^T S_s dK_s+\frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\, ds\right]\\ E\left[Y_t^2\right]+\frac{1}{2}E\left[Z_s^2\right] &\leq E\left[\xi^2+\int_t^T \left|f\left(t,0,0\right)\right|^2 ds+C\int_t^T |Y_s|^2\, ds+2\int_t^T S_s dK_s\right].\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à Y donne

$$E\left[Y_t^2\right]\leq CE\left[\xi^2+\int_t^T f\left(s,0,0\right)^2 ds+2\int_t^T S_s dK_s\right] \tag{3.2}$$

par suite prenons $t=0$, on obtient

$$E\left[\int_0^T Z_s^2\right]\leq C'E\left[\xi^2+2\int_0^T f\left(s,0,0\right)^2 ds+2\int_0^T S_s dK_s\right] \tag{3.3}$$

avec $C\prime=2C$, d'autre part, d'après l'équation (3.1) pour $t=0$

$$K_T=Y_0-\xi-\int_0^T f\left(s,Y_s,Z_s\right) ds+\int_0^T Z_s dB_s$$

et les estimation (3.2) et (3.3) nous donne que :

$$\begin{aligned}
E\left[K_T^2\right] &\leq CE\left[\xi^2+\int_0^T f(s,0,0)^2\,ds\right]+2CE\left[\int_0^T S_s dK_s\right] \\
&\leq CE\left[\xi^2+\int_0^T f(s,0,0)^2\,ds\right]+2E\left[C\sup_{0\leq t\leq T} S_t^+\int_0^T dK_s\right] \\
&\leq CE\left[\xi^2+\int_0^T f(s,0,0)^2\,ds\right]+2C^2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right]+\frac{1}{2}E\left[K_T^2\right] \\
E\left[K_T^2\right] &\leq 2CE\left[\xi^2+\int_0^T f(s,0,0)^2\,ds\right]+4C^2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right] \\
E\left[K_T^2\right] &\leq C''E\left[\xi^2+\int_0^T f(s,0,0)^2\,ds+\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Finallement, pour tout $t\in[0,T]$

$$E\left[Y_t^2+\int_0^T Z_s^2ds+K_T^2\right]\leq CE\left[\xi^2+\int_0^T f(t,0,0)^2\,dt+\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right]$$

Il s'ensuit que pour chaque $t\in[0,T]$

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} Y_t^2+\int_0^T Z_s^2ds+K_T^2\right]\leq CE\left[\xi^2+\int_0^T f(t,0,0)^2\,dt+\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right].$$

Le résultat découle de l'inégalité de BDG. ■

Théorème 3.2.1 *(Théorème de comparaison) : Soit (ξ,f,S) et (ξ',f',S') deux ensembles de donnés chacun satisfaisant les hypothèse i), ii), iii) et iv) supposons en plus :*

1. $\xi\leq\xi'\qquad \mathbb{P}-ps$
2. $f(t,y,z)\leq f'(t,y,z)\qquad d\mathbb{P}\times dt\quad p.s,\quad \forall(y,z)\in R\times R^d$
3. $S_t\leq S_t',\quad 0\leq t\leq T\quad p.s.$

Soient (Y,Z,K) une solution du EDSRR de donné (ξ,f,S) et (Y',Z',K') une solution de EDSRR de donné (ξ',f',S') alors

$$Y_t\leq Y_t',\qquad \forall 0\leq t\leq T\qquad p.s.$$

Preuve. On a

$$Y_t - Y'_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s)\, ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s - \xi' - \int_t^T f'(s, y_s, z_s)\, ds - K'_T + K'_t + \int_t^T Z'_s dB_s$$

on applique la formule d'Itô à $\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2$

$$\begin{aligned} E\left[\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2\right] + E\left[\int_t^T \mathbf{1}_{\{Y_s \geq Y'_s\}} \left|Z_s - Z'_s\right|^2 ds\right] &\leq 2E\left[\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ \left[f(s, y_s, z_s) - f(s, y'_s, z'_s)\right] ds\right] \\ &+ 2E\left[\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ (dK_s - dK'_s)\right] \end{aligned}$$

puisque $\{Y_t \geq Y'_t\}, Y_t > S'_t \geq S_t$, alors

$$\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ (dK_s - dK'_s) = -\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ dK'_s \leq 0$$

comme f est k-Lipschitz, alors

$$\begin{aligned} E\left[\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2\right] + E\left[\int_t^T \mathbf{1}_{\{Y_s \geq Y'_s\}} \left|Z_s - Z'_s\right|^2 ds\right] &\leq 2E\left[\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ \left[f(s, y_s, z_s) - f(s, y'_s, z'_s)\right] ds\right] \\ &\leq 2kE\left[\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ \left(\left|(Y_t - Y'_t)^+\right| + \left|Z_s - Z'_s\right|\right) ds\right] \\ &\leq E\left[\int_t^T \mathbf{1}_{\{Y_s \geq Y'_s\}} \left|Z_s - Z'_s\right|^2 ds\right] + \bar{C}\int_t^T E\left[\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2\right] \end{aligned}$$

avec $\bar{C} = 2K$. Ce qui nous donne

$$E\left[\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2\right] \leq \bar{C}\int_t^T E\left[\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2\right] ds$$

et par le lemme de Gronwalle

$$(Y_t - Y'_t)^+ = 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

■

3.2.2 Existence et unicité d'une solution de l'EDSRR

La valeur de constante C peut varier de ligne à l'autre

Existence

Etape1 : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit $(Y^n, Z^n) = (Y_t^n, Z_t^n)_{t \leq T}$ l'unique couple de processus $\mathcal{F}_t$ progressivement mesurable a valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ satisfont $E\left[\int_0^T |Z_t^n|^2 \, dt\right] < \infty$, on définie $K_t^n = n\int_0^t (Y_s^n - S_s)^- \, ds$ $0 \leq t \leq T$ et

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^n, Z_s^n) + n\int_t^T (Y_s^n - S_s)^- \, ds - \int_t^T Z_s^n dB_s \tag{3.4}$$

où ξ et f satisfont aux hypothèses énoncées dans la section 3.2.1, la théorie des EDSR (sans contrainte) montre que pour chaque n

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n|^2 < \infty\right).$$

On appliquant la formule d'Itô à $|Y_t^n|^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[|Y_t^n|^2 + \int_t^T |Z_s^n|^2 \, ds\right] &\leq E\left[|\xi^2|\right] + 2E\left[\int_t^T Y_s^n f(s, Y_s^n, Z_s^n) \, ds\right] + 2E\left[\int_t^T Y_s^n dK_s^n\right] \\
&\leq E\left[|\xi^2|\right] + 2E\left[\int_t^T (f(s,0,0) + k|Y_t^n| + k|Z_s^n|)|Y_t^n| \, ds\right] + 2E\left[\int_t^T S_s dK_s\right] \\
&\leq C\left(1 + E\left[\int_t^T |Y_t^n| \, ds\right]\right) + \frac{1}{3}E\left[\int_t^T |Z_s^n|^2 \, ds\right] \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left(S_t^+\right)^2\right] + \varepsilon E\left[(K_T^n - K_t^n)^2\right]
\end{aligned}$$

mais

$$K_T^n - K_t^n = Y_t^n - \xi - \int_t^T f(s, Y_s^n, Z_s^n) \, ds + \int_t^T Z_s^n dB_s$$

ainsi

$$E\left[(K_T^n - K_t^n)^2\right] \leq CE\left[|Y_t^n|^2 + \xi^2 + \left(\int_t^T |f(s, Y_s^n, Z_s^n)| \, ds\right)^2 + \left(\int_t^T Z_s^n dB_s\right)^2\right]$$

$$E\left[(K_T^n - K_t^n)^2\right] \leq C\left\{E|Y_t^n|^2 + E\left[\xi^2\right] + 1 + \int_t^T \left(|Y_t^n|^2 + |Z_s^n|^2\right) ds\right\}$$

nous choisissons $\varepsilon = \left(\frac{1}{3C}\right)$, on trouve

$$\frac{2}{3}E\left[|Y_t^n|^2\right] + \frac{1}{3}E\left[\int_t^T |Z_s^n|^2\, ds\right] \leq C\left(1 + E\left[\int_t^T |Y_t^n|^2\, ds\right]\right)$$

grace à le lemme de Gronwalle

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left[|Y_t^n|^2\right] + E\left[\int_0^T |Z_s^n|^2\, dt\right] + E\left[(K_t^n)^2\right] \leq C, \qquad n \in \mathbb{N}$$

en utilisant l'équation (3.4) et l'inégalité de BDG, on en déduit que

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t^n \mid^2 + \int_0^T \mid Z_t^n \mid^2 dt + (K_t^n)^2\right] \leq C \tag{3.5}$$

Etape2 : Convergence de solution (Y^n, Z^n) de l'EDSRR pénalisés.

Tout d'abord, pour chaque n, nous introduisons une fonction f^n comme suit

$$f^n(t, Y_t, Z_t) = f(t, Y_t, Z_t) + n(Y - S_t)^-$$
$$f^n(t, Y, Z) \leq f^{n+1}(t, Y, Z)$$

d'après le résulte du théorème de comparaison (théorème 3.2.1) que $Y_t^n \leq Y_t^{n+1}$, $0 \leq t \leq T$ $p.s$ ainsi

$$Y_t^n \uparrow Y_t, \quad \mathbb{P}\text{−}ps \quad 0 \leq t \leq T$$

D'aprés (3.5) et lemme de Fatou, on a $E\left(\sup_{0\leq t\leq T} Y_t^2\right) \leq C$ et d'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T (Y_t - Y_t^n)^2\, dt = 0.$$

Montrons maintenant que (Y^n, Z^n) est une suit de Cauchy dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathcal{L}^2$, pour cela, on applique la formule d'Itô à $|Y_t^n - Y_t^p|^2$ avec $|Y_T^n - Y_T^p|^2 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} |Y_t^n - Y_t^p|^2 + \int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds &= 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p) \left(f\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) - f\left(s, Y_s^p, Z_s^p\right)\right) ds \\ &\quad + 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p) \, d\left(K_s^n - K_s^p\right) - 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p)(Z_s^n - Z_s^p) \, dB_s \\ &\leq 2k\int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 \, ds + 2K\int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 \, |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds \\ &\quad + 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p) \, d\left(K_s^n - K_s^p\right) - 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p)(Z_s^n - Z_s^p) \, dB_s, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donc

$$\begin{aligned} |Y_t^n - Y_t^p|^2 + \int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds &\leq C\int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 \, ds + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds \\ &\quad + 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p) \, d\left(K_s^n - K_s^p\right) - 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p)(Z_s^n - Z_s^p) \, dB_s, \end{aligned}$$

si $p \geq n$, alors $\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p) \, d\left(K_s^n - K_s^p\right) \leq \sup_{t \leq T} \left(Y_s^n - S_s\right)^- K_T^p$ et en prenant l'espérance des deux cotés on trouve

$$E\left[\int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds\right] \leq CE\left[\int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 \, ds\right] + 2E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(Y_s^n - S_s\right)^- K_T^p\right]$$

donc on a d'après l'estimate (3.5) et le lemme 3.2.1

$$\lim_{n,p \longrightarrow 0} E\left[\int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds\right] = 0.$$

Il existe maintenant un processus $(Z_t)_{t \leq T} \in \mathbb{H}^2$ qui est limite de processus $(Z^n)_{n \geq 0}$.

En revenant à (3.6), en prenant l'espérance et en utilisant l'inégalité de BDG on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_s^n - Y_s^p|^2 &\leq 2\int_t^T \left|f\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) - f\left(s, Y_s^p, Z_s^p\right)\right| \times |Y_s^n - Y_s^p| \, ds + 2E\left[\sup_{t \leq s \leq T} \left(Y_s^n - S_s\right)^- K_T^p\right] \\ &\quad + 2\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p)(Z_s^n - Z_s^p) \, dB_s\right| \end{aligned} \tag{3.7}$$

et par l'inégalité BDG donne

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^T (Y_s^n - Y_s^p)(Z_s^n - Z_s^p)\,dB_s\right|\right] &\leq CE\left[\left(\int_0^T |Y_s^n - Y_s^p|^2 |Z_s^n - Z_s^p|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq CE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|\left(\int_0^T |Z_s^n - Z_s^p|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right] + \frac{C}{2}E\left[\int_0^T |Z_s^n - Z_s^p|^2\,ds\right].
\end{aligned}$$

L'inégalité (3.7) donne

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right] &\leq E\left[2\int_t^T \left(K|Y_s^n - Y_s^p|^2 - K|Z_s^n - Z_s^p| \times |Y_s^n - Y_s^p|\right)ds\right] \\
&+ 2E\left[\sup_{t\leq s\leq T}(Y_t^n - S_t)^- K_T^p\right] \\
&+ E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right] + CE\left[\int_0^T |Z_s^n - Z_s^p|^2\,ds\right] \\
&\leq CE\left[\int_0^T \left(|Y_s^n - Y_s^p|^2 + |Z_s^n - Z_s^p|^2\right)ds\right] + 2E\left[\sup_{t\leq s\leq T}(Y_s^n - S_s)^- K_T^p\right] \\
&+ E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right] + CE\left[\int_0^T |Z_s^n - Z_s^p|^2\,ds\right]
\end{aligned}$$

implique que $\lim_{n,p\longrightarrow\infty} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right] = 0$ et $\lim_{n\longrightarrow\infty} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t|^2\right] = 0$ de plus $Y = (Y_t)_{t\leq T}$ est un processus continu.

Enfin puisque pour tout $n \geq 0$ et $t \leq T$

$$K_t^n = Y_0^n - Y_t^n - \int_0^t f(s, Y_s^n, Z_s^n)\,ds + \int_0^t Z_s^n dB_s$$

alors nous avons aussi $\lim_{n,p\longrightarrow\infty} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|K_t^n - K_t^p|^2\right] = 0$, il existe donc un processus $(K_t)_{t\leq T}$ continue croissante $\mathcal{F}_t$-adapté avec $K_0 = 0$ tel que $\lim_{n\longrightarrow\infty} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|K_t^n - K_t|^2\right] = 0$.

Par conséquent, il existe une paire de processus (Z, K) progressivement mesurable avec des valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\left[\int_0^T |Z_s - Z_s^n|^2\,ds + \sup_{0\leq t\leq T}|K_t^n - K_t|^2\right] = 0$$

et (v), (vi) sont satisfaits du triple (Y, Z, K).

Etape 3 : Le processus limite $(Y, Z, K) = (Y, Z, K)_{t \leq T}$ est la solution de l'EDSRR associé a (f, ξ, S) évidement les processus $(Y_t, Z_t, K_t)_{t \leq T}$ satisfont

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s.$$

D'autre part puisque $\lim_{n \longrightarrow \infty} E\left[\sup_{s \leq T}\left(\left(Y_t^n - S_s\right)^-\right)^2\right] = 0$, alors $\mathbb{P} - ps, \forall t \leq T, \qquad Y_t \geq S_t$.

Nous avons aussi (K_t) est croissante et (Y^n, Z^n) tend vers (Y, K) uniformément et la mesure $dK^n \longrightarrow dK$ en probabilité, donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty}\left(\int_0^T \left(Y_t^n - S_t\right) dK_t^n\right) = \int_0^T \left(Y_t - S_t\right) dK_t$$

on déduit du même argument et du lemme 3.2.1 $\int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t \geq 0$, d'autre part $\int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t \leq 0$ donc

$$\int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0 \qquad \mathbb{P} - ps$$

et nous avons prouvé que (Y, Z, K) résoudre l'EDSRR.

Lemme 3.2.1

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E\left[\sup_{0 \leq t \leq T}\left|\left(Y_t^n - S_t\right)^-\right|^2\right] = 0.$$

Preuve. voir [4] ■

Unicité

Proposition 3.2.3 *Soient (ξ, f, S) et (ξ', f', S') sont deux triplets satisfaisant les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv).*

Supposons que (Y, Z, K) soit une solution du EDSRR (ξ, f, S) et que (Y', Z', K') soit une solution du EDSRR (ξ', f', S'). Définir

$$\triangle\xi = \xi - \xi', \qquad \triangle f = f - f', \qquad \triangle S = S - S',$$

$$\triangle Y = Y - Y', \qquad \triangle Z = Z - Z', \qquad \triangle K = K - K'.$$

Il existe alors une constante C telle que

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|\triangle Y_t|^2+\int_0^T|\triangle Z_t|^2\,dt+|\triangle K_t|^2\right)\leq CE\left(|\triangle\xi|^2+\int_0^T|\triangle f\left(t,Y_t,Z_t\right)|^2\,dt\right)$$
$$+C\left[E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|\triangle S_t|^2\right)\right]^{1/2}\Psi_T^{1/2}$$

avec

$$\Psi_T=E\left[\xi^2+\int_0^T f^2\left(t,0,0\right)dt+\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2+\xi'^2+\int_0^T f'^2\left(t,0,0\right)dt+\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t'^+\right)^2\right].$$

Preuve. Les calculs sont similaires à ceux de la preuve du Proposition 3.2.2.

Puisque $\int_t^T\left(\triangle Y_s-\triangle S_s\right)d\left(\triangle K_s\right)\leq 0$,

$$Y_t-Y_t'=\xi-\xi'+\int_t^T\left[f\left(s,Y_s,Z_s\right)-f'\left(s,Y_s',Z_s'\right)\right]ds+K_T-K_T'+K_t'-K_t-\int_t^T\left[Z_s-Z_s'\right]dB_s$$
$$\triangle Y_t=\triangle\xi+\int_t^T\triangle f ds+\triangle K_T-\triangle K_t-\int_t^T\triangle Z dB_s$$

on applique la formule d'Itô à $|\triangle Y_t|^2$

$$E\left[|\triangle Y_t|^2\right]+\frac{1}{2}\left[\int_t^T|\triangle Z_t|^2\,ds\right]\leq CE\left[|\triangle\xi|^2+\int_t^T\left(|\triangle f\left(s,Y_s,Z_s\right)|^2+|\triangle Y_s|^2\right)ds\right]$$
$$+CE\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T}|\triangle S_t|\right)\left(K_T+K_T'\right)\right].$$

Il reste à utiliser le lemme de Gronwalle et l'inégalité de BDG.

Nous déduisons immédiatement le résultat d'unicité si $\xi=\xi'$, $f=f'$, $S=S'$. ∎

Bibliographie

[1] Ben Drari, S. (septembre 2020). Sur Les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Mémoire Master, Université Mohamed Khider - Biskra.

[2] Cvitanic, J., & Karatzas, I. (1996). Backward stochastic differential equations with reflection and Dynkin games. The Annals of Probability, 2024-2056.

[3] Dellacherie, C., & Meyer, P. A. (1975). Probabilités et potentiel, CH. Ia IV. Hermann.

[4] El Karoui, N., Kapoudjian, C., Pardoux, E., Peng, S., & Quenez, M. C. (1997). Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's. the Annals of Probability, 25(2), 702-737.

[5] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & control letters, 14(1), 55-61.

[6] Ramdani, A. (septembre 2020). Les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies. Mémoire Master, Université Dr Tahar Moulay - Saida.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est de présenter un type d'équation différentielle stochastique rétrograde qui est l'équation différentielle stochastique réfléchie, où le processus de la solution est maintenu au-dessus d'une barrière, ce résultat a été mentionné pour la première fois en 1997 dans l'article d'El Karoui, Kapoudjian, Pardoux, Peng et Quenez. A partir de là, nous avons abordé la preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution à ces équations dans le cas de Lipschitz par la méthode de pénalisation.

ملخص

إن الهدف الأساسي لهذا العمل هو تقديم نوع من أنواع المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية التي تسمى بالمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية المنعكسة حيث يتم الحفاظ على عملية الحل فوق حاجز وقد تم التطرق لهذه النتيجة لأول مرة في عام 1997 بمقالة القروي وكابوجيان وباردو وبنغ وكوينيز، من خلال هذا البحث اقتبسنا إثبات الوجود الوحدانية لحل هذه المعادلات في حالة تحقق شرط ليبشيتز وباستخدام طريقة الإعاقة.

Abstract

The main objective of this work is to present a type of backward stochastic differential equation which is the reflected backward stochastic differential equation, where the process of the solution is maintained above a barrier, this result was mentioned for the first times in 1997 in the article of El Karoui, Kapoudjian, Pardoux, Peng and Quenez. From there, we approached the proof of the existence and uniqueness of a solution to these equations in the Lipshitz case by the penalization method.