République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Nor El-houda Lamri

Titre :

Contrôle optimal de type risque-sensitive

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**MANSOURI BADEREDDINE**	UMKB	Président
Dr.	**TAMER LAZHAR**	UMKB	Encadreur
Dr.	**GATT RAFIKA**	UMKB	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 27/06/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes trés chers parents pour leurs sacrifices et leur soutien moral tout le long de mon cursus, ma chére mère mon bonheur et mon paradis dans la vie qui m'a conseillée, mon père qui m'a encouragé.

A mes très frères et sœurs à qui je souhaite une grande réussite dans leurs vies.

Mon fiancé

A'toute la famille Lamri.

Tous mes amis

A mes collègues de la promotion 2022.

A' tous ceux qui ont contribué, de loin ou de prés, à la réalisation de ce projet

Aux lecteurs de ce mémoire.

$\mathcal{R}$emerciements

A l'issue de ce modeste travail, je tenais à remercier tout d'abord Dieu de m'avoir offert tout ce que je possède.

Je tiens à remercier en particulier : Mon promoteur Docteur TAMER LAZHAR. Qui a pris tout le soin de m'orienter et de me faire part de ses précieuses remarques surtout ses encouragements et sa disponibilité qui ont grandement contribuer à l'élaboration de ce mémoire.

Ma gratitude va tout autant aux membres du jury : Dr.MANSOURI BADEREDDINE et Dr.GATT RAFIKA, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

A touts les enseignants- du département MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation.

A toutes les personnes qui n'ont manqué aucun effort et ont contribué de prés et de loin à la réalisation de ce travail par leurs d'encouragements.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastique à champ moyen ont été introduite pour la première fois par Mckean [8], lors d'une étude d'un systèmes physiques avec un grand nombre de particules en interaction. La motivation d'étudier ce type de problème découle de son large domaine d'application, compris les modèles biologiques, la conception de l'alimentation sans fil, la programmation du trafic routier. Par des approches purement stochastique Buckdahn [3] a obtenu un résultat sur les équations différentielles stochastique rétrograde de type champ moyen. Ce qui concerne les problèmes de contrôle optimal à champ moyen des bon résultats ont été obtenu par beaucoup de chercheurs dans diverse système progressive, rétrograde ou progressive-rétrograde fortement ou faiblement couplé l'auteur peut consulter Wang, Xiao et Xing [15],Liet Liu [11],Ma et Liu [13],Carmona et Delarue [4],Buckdahn Djehiche, Li[2], Shen, Siu [14].

Les problèmes de contrôle optimal mentionné ci-dessus sont considérés au risque neutre dont la fonction objective est formalisée par trois coûts, intégrale initiale et terminal. Ce cas peut etre étendre au risque sensitive, dans lequel la fonction de coût est exponentielle. Le premier résultat dans le principe du maximum stochastique pour un système de risque sensitive a été obtenu par Whittle [16], basons sur différente technique ce type de problème à tracté un grand nombre de chercheurs par exemple, Bielecki et Pliska [1],Davis, Lleo, $\{[5],[6]\}$Lim, Zhou [9].

Les problèmes de contrôle optimal de risque sensitive mentionné ci-dessus ont été établis sous une information complète. En général, les contrôleurs ne peuvent etre obtenir que des informations partielles, par exemple on considère le processus de flux de trésorerie d'une entreprise d'assurance, où raison de confidentialité sur les comptes il est impossible pour que l'entreprise observe pleinement le flux de trésorerie, cela idique l'importance d'étudier des problèmes de contrôle optimal partiellement observés et les rend largement utilisés, voir les références $\{[10] - [17]\}$. Dans ce mémoire, on s'intéresse à un problème de contrôle optimal partiellement observé de type risque sensitive dont l'état de système est une solution d'une EDSPR à champ moyen, et le domaine de contrôle est convexe.

Notre mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente un rappel sur le calcul stochastique (définitions, généralité sur l'espérance conditionnelle, etc...) .

Dans le deuxième chapitre, on donne deux théorèmes d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique progressive et rétrograde.

Dans le troisième chapitre, on se consacre à l'étude du principe de maximum d'un système d'edspr faiblement couplé de type champs moyen et de risque sensitive dont on présente les conditions suffisantes et nécessaires d'optimalité et comme application ont résoudre un problème de contrôle dans un cas de système linéaire et de coût quadratique où on utilise les résultats obtenus à la section 1 et 2 .

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastique

1.1 Généralités et notations

Dans ce chapitre introductif, nous donnons quelques définitions de base et le plus souvent élémentaires, concernant les résultats de calcul stochastique. Nous nous limitons au strict nécessaire pour les chapitres suivants. Notons que, pour représenter un phénomène aléatoire dépondant du temps, le modèle mathématique est donné par :

1. Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
2. Une fonction

$$X : (\mathbb{R}_+ \otimes \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

avec

$$(t, w) \rightarrow X(t, w) .$$

Pour chaque t fixé, l'état du systéme est une variable aléatoir c' est à dire $w \rightarrow X(t, w)$ est mesurable. Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \curvearrowright X(t, w)$ est appelée une trajectoire.

Définition 1.1.1 (processus stochastiques) *: Un processus aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, indexé par un ensemble de temps* $T \subset \mathbb{R}_+$*, est une famille*$(X_t)_{t\in T}$ *de variables aléatoires sur* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *à valeurs dans un certain espace* E*.*

Définition 1.1.2 (modification et indistinguables) *: Soient* $(X_t)_{t\succeq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\succeq 0}$ *deux processus stochastique définie sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*,* X *est une modification de* Y *si pour tout* T *:*

$$\forall t \geq 0, P(X_t = Y_t) = 1, P - ps.$$

X *et* Y *sont indistinguable si P-ps, les trajectoires de* X *et* Y *sont les mêmes c'est à dire*

$$P(X_t = Y_t; \forall t \geq 0) = 1, P - ps$$

Définition 1.1.3 (processus mesurable) *Un processus* $(X\,(t))_{t\in T}$ *est mesurable si l'application* $(t, w) \rightarrow X_t\,(w)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}\,(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$*.*

Définition 1.1.4 (Filtration) *Soients* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *Un espace probabilité et* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *au sens où,* $\forall\ s \leq t, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$*.* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelée filtration de* $(\Omega, \mathcal{F})$*. On dit que* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P}\right)$ *est un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.5 (Processus adapté) *Un processus* $(X\,(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est adapté par rapprt à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* t*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable. Si* $N \subset \mathcal{F}_0$*, et si* X *est adapté par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *alors toute modification de* X *est encore adaptée.*

Définition 1.1.6 (Processus progressivement mesurable) *On dit q'un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est progressivement mesurable si l'application*

$$X(\centerdot,\centerdot):([0,t]\times\Omega,\mathcal{B}(0,t)\otimes\mathcal{F})\longrightarrow(E,\mathcal{E}),$$
$$(s,w)\longmapsto X(s,w),$$

est $(\mathcal{E},\mathcal{B}(0,t)\otimes\mathcal{F})-$ mesurable.

Finissons ces généralités par la notion de temps d'arrêt.

Définition 1.1.7 (Temps d'arrêt) *Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$. On dit que τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$temps d'arrêt si, pour tout t, $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$. Si τ est un temps d'arrêt, on appelle tribu des évènements antérieurs à τ, la tribu définie par :*

$$\mathcal{F}_\tau=\{A\in\mathcal{F}_\infty,A\cap\{\tau\leq T\}\in\mathcal{F}_t,\forall t\}.$$

Proposition 1.1.1 *Soit τ est un temps d'arrêt. Si X est progressivement mesurable, le processus arrêté X^τ défini par $X_t^\tau=X_{\tau\wedge t}$ est progressivement mesurable.*

1.2 Mouvement brownien et Martingale

Définition 1.2.1 (Mouvement brownien standard) *: Le mouvement brownien est un processus $(B_t)_{t\in[0,1]}$ continu dont les accroissements sont indépendants, stationnaires et gaussiens. Plus précisément.*
un mouvement Brownien standard est un processus $(B_t)_{t\in[0,1]}$ vérifiant :

i) $B_0=0$ P-p.s.

ii) B est continu.i.e. $t\to B_t(w)$ est continue pour P presque tout w.

iii) B est à accroissements indépendants : si $t\geq s$, B_t-B_s est indépendant de $\mathcal{F}_s^B=\sigma(B_u,u\leq s)$.

Définition 1.2.2 (Martingale, sous et surmartingale) *: Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_n, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré. Un processus* $(X_t, t \geq 0)$ *adapté et tel que, pour tout* $t \geq 0, X_t \in L^1$ *est appelé :*

i) martingale si pour $s < t, \mathbb{E}[X_t \backslash \mathcal{F}_s] = X_s$.

ii) surmartingale si pour $s < t, \mathbb{E}[X_t \backslash \mathcal{F}_s] \leq X_s$.

iii) sous-martingale si pour $s < t, \mathbb{E}[X_t \backslash \mathcal{F}_s] \leq X_s$.

Définition 1.2.3 (martingale locale) *: Soit* X *un processus* $\{f_t\}_{t \geq 0}$*-adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que* X *est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt* $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ *telle que* $\lim_{n \to \infty} \tau_n = +\infty$ *P-p.s et pour tout* n*,* $X^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ *est une martingale.*

Définition 1.2.4 (semi-martingale) *: Une semi-martingale continue est un processus* X *qui s'écrit* $X = M + V$*, où* M *est une martingale locale continue et* V *est un processus continu adapté à variation bornée tel que :* $v_0 = 0$.

1.3 Calcul d'Itô

1.3.1 Intégrale stochastique

Soit (B_t) un MB adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$

1. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, t \geq s$.
2. B_t est $\mathcal{F}_t-$adapté.
3. $\forall t \leq t_1 \leq ... \leq t_n, B_{t_1} - B_t, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendant de $\mathcal{F}_t$.

Soit $\theta(t)$ un processus tel que :

i) $\theta(t)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.

ii) $\forall T > 0$, $\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T (\theta(t))^2 \mathrm{d}t\right)\right] < \infty$.

On veut défini l'intégrale stochastique d'Itô

$$\int\limits_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s.$$

Remarque 1.3.1 *Si f est une fonction dérivable alors :*

$$\int\limits_0^t \theta(s) \mathrm{d}f(s) = \int\limits_0^t \theta(s) f'(s) \mathrm{d}s.$$

Intégrale d'Itô pour un processus simple

Soit $\eta = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ partition de $[0, T]$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$, supposon que $\theta(t)$ est constant sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}[$. On définit :

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \theta(t_j)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) + \theta(t_k)\left(B_t - B_{t_k}\right), t_{k \leq t \leq t_{k+1}}.$$

1. $\forall t \geq 0$, $I(t)$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.
2. Linéarité.
3. $(I(t))_t$ est une martingale.

Théorème 1.3.1 (Isométrie d'Itô)

$$\mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^t \theta^2(u) \mathrm{d}u\right].$$

Intégrale d'Itô pour un processus quelconque

Soit $T > 0$ soit θ un processus :

i) $\theta(t)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.

ii) $\forall T > 0,\ \mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T (\theta(t))^2 \, \mathrm{d}t\right)\right] < \infty.$

Théorème 1.3.2 *Il existe une suite (θ_n) de processus simple tel que :*

$$\lim_n \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T (\theta_n(s) - \theta(s))^2 \, \mathrm{d}s\right] = 0.$$

On a défini :

$$I_n(T) = \int\limits_0^T \theta_n(u) \, \mathrm{d}B_u.$$

On défini :

$$I(T) = \int\limits_0^T \theta(u) \, \mathrm{d}B_u =^{déf} \lim_n \int\limits_0^T \theta_n(u) \, \mathrm{d}B_u.$$

$$I(t) = \int\limits_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s \quad , \quad \theta, \mathcal{F}_t - \textit{adapté} \quad , \quad \theta \in L^2(\mathcal{F} \times [0, T])$$

1. *$\forall t \geq 0, I(t)$ est $\mathcal{F}_t$−mesurable.*
2. *$\theta \mapsto I(t)$ est linéaire.*
3. *$(I(t))_t$ est une martingale.*
4. *Continuté : $t \mapsto \int\limits_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s$ est à trajéctoires continue.*
5. *Isométrie d'Itô :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^t \theta(u) \, \mathrm{d}B_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^t \theta^2(u) \, \mathrm{d}u\right] \tag{1.1}$$

Proposition 1.3.1

$$\int\limits_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right).$$

Théorème 1.3.3 (Inégalité de Doob) *Soit* $(M_n, n \in \mathbb{N})$ *une martingale réelle de carré intégrable. On a :*

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq k\leq n} M_k^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[M_n^2\right].$$

En particulier

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n^2\right] \leq 4\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[M_n^2\right]. \tag{1.2}$$

Théorème 1.3.4 (Inégalité de burkholder-davis-gundy "BDG") *: Pour tout* $p > 0$, *il existe des constantes positives* c_p *et* C_P *telles que, pour toute martingale continue* $X = (X_t)_{t>0}$, *nul en* 0 *:*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.3.2 *: En particulier, si* $T \geq 0$

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right].$$

1.3.2 Processus d'Itô

Définition 1.3.1 *On appelle processus d'Itô un processus* $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs réelles tel que* $\forall 0 \leq s \leq t$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s), \mathbb{P} - p.s.$$

où, $X(0)$ *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable,* b *et* σ *sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions*

$$\int_0^T \mid b(s) \mid ds < \infty \ et \ \int_0^T \parallel \sigma(s) \parallel^2 ds < \infty, \ où \ \parallel \sigma \parallel = trace(\sigma\sigma^*).$$

Le coefficient b *est le drift ou la dérive,* σ *est le coefficient de diffusion.*

Théorème 1.3.5 (Première formule d'Itô) *Soit* $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô, soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de classe* C^2*. Alors*

$$f(X(t)) = f(x(0)) + \int_0^t f_x(X(s))dX(s) + 1/2\int f_{xx}(X(s))\sigma^2(s)ds.$$

Théorème 1.3.6 (Deuxième formule d' Itô) *Soit* $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ *un processus d' Itô, soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *par rapport à* t*, de classe* C^2 *par rapport à* x*. On a*

$$\begin{aligned} f(t,X(t)) &= f(0,X_0) + \int_0^t f_t(s,X(s))ds + \int_0^t f_x(s,X(s))dX(s) \\ &+ 1/2\int_0^t f_{xx}(s,X(s))\sigma^2(s)ds. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.2 (Formule d' intégrale par parties) *Soient* $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ *et*

$(Y(t))_{0\leq t\leq T}$ deux processus d' Itô, alors

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \langle X,Y\rangle_t\,.$$

Chapitre 2

EDS et EDSR

2.1 Equations différentielles stochastiques

Définition 2.1.1 *Dans toute cette partie, on s'intéressera à l'équation différentielle stochastique,*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b\left(t, X_t\right)dt + \sigma\left(t, X_t\right)\mathrm{d}B_t \\ X_0 = Z \end{cases} \tag{2.1}$$

où T est un réel strictement positif, $b\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ sont deux fonctions mesurables et où Z est une variable aléatoire quelconque, b est appelée coefficient dérive (drift) de l'E.D.S, et σ coefficient de diffusion de l'E.D.S.

Définition 2.1.2 (solution fort d'une E.D.S) *Un processus X est solution de cette E.D.S (2.1) si c'est un processus $F-$adapté (ou $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du MB B) satisfaisant,*

$$\int_0^t \left|b\left(s, X_s\right)\right| \mathrm{d}s + \int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s\right)\right|^2 \mathrm{d}s < \infty, \forall t \in \mathbb{R}^{+}\mathbb{P} - p.s$$

et qui vérifie :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s, \forall t \in \mathbb{R}^+ \mathbb{P} - p.s \tag{2.2}$$

Définition 2.1.3 (Unicité forte) *On dit qu'il ya unicité fort pour l'E.D.S si, pour*

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s \\ Y_t = y + \int_0^t b(s, Y_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, Y_s)\,\mathrm{d}B_s \end{cases}$$

alors

$$x = y \Rightarrow \mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in [0, T]) = 1.$$

Remarque 2.1.1 *si X_t et Y_t sont continue alors :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in [0, T]) = 1 \Leftrightarrow \forall t \in [0, T], \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

2.1.1 Existence et Unicité forte

Théorème 2.1.1 *On suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0, T], x, y$ dans $\mathbb{R}^n$:*

1) Condition de lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|. \tag{2.3}$$

2) Croissance linéaire :

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|). \tag{2.4}$$

3) $\mathbb{E}\left|Z\right|^2 < \infty$.

Alors l'E.D.S (2.1) possède une unique solution. De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t\right|^2\right] < \infty.$$

Preuve. Soit X_t et Y_t deux solution forte de l'E.D.S (2.1),comme $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ pour tout $0 \leq t \leq r \leq T$

$$\begin{aligned}
\left|X_t - Y_t\right|^2 &= \left|\int_0^t b\left(s,X_s\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\left(s,X_s\right)\mathrm{d}B_s - \int_0^t b\left(s,Y_s\right)\mathrm{d}s - \int_0^t \sigma\left(s,Y_s\right)\mathrm{d}B_s\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s\right) - b\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s\right) - \sigma\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}B_s\right|^2 \\
&\leq 2\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s\right) - b\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2 \\
&\quad + 2\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s\right) - \sigma\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}B_s\right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t - Y_t\right|^2 &\leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s\right) - \sigma\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}B_s\right|^2 \\
&\quad + 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s\right) - b\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2.
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Doob (1.2) et l'isométrie des l'intégrale stochastique(1.1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t-Y_t\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}B_s\right|^2\right. \\
&\quad\left.+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\leq 8\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\quad+2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t-Y_t\right|^2\right] &\leq 8\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\quad+2T\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\leq\left(8\vee 2T\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\left|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X_s\right)\right|^2\right.\right. \\
&\quad\left.\left.+\left|b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right|^2\right)\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont lipschitz en espace, on obtient pour tout $r \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right] &\leq (8\vee 2T)\,K^2\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_s - Y_s|^2\,\mathrm{d}s\right] \\
&\leq C\,(T,K)\,\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_s - Y_s|^2\,\mathrm{d}s\right] \\
&\leq C\,(T,K)\int_0^T \mathbb{E}\left[|X_s - Y_s|^2\right]\mathrm{d}s \\
&\leq C\,(T,K)\int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{r\leq s}|X_r - Y_r|^2\right]\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right] \leq C\,(T,K)\int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{r\leq s}|X_r - Y_r|^2\right]\mathrm{d}s$$

Utilisant le lemme de GRONWALL,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right] &\leq 0e^{C(T,K)T} = 0 \\
&\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2\right] = 0 \\
&\Rightarrow \sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2 = 0 \\
\forall t, |X_t - Y_t|^2 &= 0, \mathbb{P}-p.s \Leftrightarrow \forall t, X_t = Y_t \ \ \mathbb{P}-p.s \\
&\Leftrightarrow \forall t, \mathbb{P}\left(X_t = Y_t\right) = 1
\end{aligned}$$

Comme $t \longmapsto X_t$ et $t \longmapsto Y_t$.On en déduit que X_t et Y_t sont également indistinguables. ■

2- **Existence de la solution de l'E.D.S.(2.1)**

On montrer l'existence de solution par la méthode de Picard, on définit

Preuve. une suite $(X_t)_{t>0}$par :

$$\begin{cases} X_t^{n+1} = Z + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int\limits_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s, \forall n \geq 0 \\ X_t^0 = Z \end{cases}$$

De X_t^0 on obtient

$$\begin{aligned} X_t^1 &= Z + \int\limits_0^t \sigma\left(s, X_s^0\right)\mathrm{d}B_s + \int\limits_0^t b\left(s, X_s^0\right)\mathrm{d}s \\ &= Z + \int\limits_0^t \sigma(s, Z)\,\mathrm{d}B_s + \int\limits_0^t b(s, Z)\,\mathrm{d}s \\ X_t^2 &= Z + \int\limits_0^t \sigma\left(s, X_s^1\right)\mathrm{d}B_s + \int\limits_0^t b\left(s, X_s^1\right)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Aussi, on peut déterminer (X_t^n) pour tout n on montre (X_t^n) converge vers X_t et X_t vérifiel'E.D.S.**(2.1).**

1. On suppose que σ et b vérifient la condition (2.4) on démontre que

$$\exists C(T, Z, K), \sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} |X_T^n|^2\right] \leq C$$

On a : pose $0 \leq t \leq r \leq T$

$$\left|X_t^1\right|^2 = \left|Z + \int\limits_0^t \sigma\left(s, X_s^0\right)\mathrm{d}B_s + \int\limits_0^t b\left(s, X_s^0\right)\mathrm{d}s\right|^2$$

Comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$,

$$\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left[|Z|^2 + \left|\int\limits_0^t \sigma\left(s, X_s^0\right)\mathrm{d}B_s\right|^2 + \left|\int\limits_0^t b\left(s, X_s^0\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left[|Z|^2 + \left|\int_0^t \sigma(s,Z)\,\mathrm{d}B_s\right|^2 + T\int_0^t |b(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right]$$

$$\sup_{t\leq r\leq T}\left|X_t^1\right|^2 \leq 3\left[|Z|^2 + \sup_{t\leq r\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,Z)\,\mathrm{d}B_s\right|^2 + T\int_0^r |b(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right] \leq 3\left[|Z|^2 + \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,Z)\,\mathrm{d}B_s\right|^2\right] + T\int_0^r |b(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right]$$

Utilisant l'inégalité (1.2 et (1.1) et (2.4) de b et σ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right] &\leq 3\left[|Z|^2 + 4\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right] + T\int_0^t |b(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2 + 4\int_0^r |\sigma(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s + T\int_0^r |b(s,Z)|^2\,\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2 + 4\int_0^r K^2\left(1+|Z|^2\right)\mathrm{d}s + T\int_0^r K^2\left(1+|Z|\right)^2\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2 + 4\int_0^r C_1(K,Z)\,\mathrm{d}s + T\int_0^r C_1(K,Z)\,\mathrm{d}s\right]\\
&\leq 3\left[|Z|^2 + 4C_1(K,Z)\,r + TC_1(K,Z)\,r\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right] \leq 3\left[|Z|^2 + C_2(K,T,Z)\,r\right]$$

De la même manière on trouve que :

$$
\begin{aligned}
\left|X_t^2\right|^2 &= \left|Z+\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s+\int_0^t b\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}s\right|^2 \\
&\leq 3\left[|Z|^2+\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+\left|\int_0^t b\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\leq 3\left[|Z|^2+\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+T\int_0^t \left|b\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
\sup_{t\leq r}\left|X_t^2\right|^2 &\leq 3\left[|Z|^2+\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s\right|^2+T\int_0^r \left|b\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^2\right|^2\right] &\leq 3|Z|^2+3\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t \sigma\left(s,X_s^1\right)\mathrm{d}B_s\right|^2\right]+3T\mathbb{E}\left[\int_0^r \left|b\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\leq 3\left[|Z|^2+4\mathbb{E}\left[\int_0^r \left|\sigma\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]+T\mathbb{E}\left[\int_0^r \left|b\left(s,X_s^1\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]\right] \\
&\leq 3\left[|Z|^2+4\mathbb{E}\left[\int_0^r K^2\left(1+\left|X_s^1\right|^2\right)\mathrm{d}s\right]\right. \\
&\quad \left.+\,3T\mathbb{E}\left[\int_0^r K^2\left(1+\left|X_s^1\right|\right)^2\mathrm{d}s\right]\right] \\
&\leq 3\left[|Z|^2+C_3\left(K,T\right)\mathbb{E}\left[\int_0^r \left(1+\left|X_s^1\right|\right)^2\mathrm{d}s\right]\right] \\
&\leq 3\left[|Z|^2+C_3\left(K,T\right)\mathbb{E}\left[\int_0^r 2\left(1+\left|X_s^1\right|^2\right)\mathrm{d}s\right]\right]
\end{aligned}
$$

$$\leq 3\left[|Z|^2 + 2C_3(K,T)\left[T + \mathbb{E}\left[\int_0^r \left|X_s^1\right|^2 \mathrm{d}s\right]\right]\right]$$
$$\leq 3\left[|Z|^2 + 2C_3(K,T)\left[T + \int_0^r \mathbb{E}\left[\sup_{u\leq s}\left|X_u^1\right|^2\right] \mathrm{d}s\right]\right]$$
$$\leq 3\left[|Z|^2 + 2C_3(K,T)\left[T + \int_0^r 3\left(|Z|^2 + C_2(K,T,Z)\, r\right) \mathrm{d}s\right]\right]$$
$$\leq 3\left[|Z|^2 + 2C_3(K,T)\left[T + 3\left(|Z|^2 r + C_2(K,T,Z)\frac{r^2}{2}\right)\right]\right]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq r}|X_T^n|^2\right) &\leq C(T,Z,K)\sum_{i=0}^{n}\frac{r^i}{i!}, \forall n \geq 1\\ &\leq C(T,Z,K)\, e^r\\ &\leq C(T,Z,K)\, e^T\end{aligned}$$

2. Montrons que la suite (X_T^n) converge $P-p.s$ uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X_T

$$\begin{aligned}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 &= \left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^1\right) - \sigma\left(s,X_s^0\right)\right) \mathrm{d}B_s + \int_0^t \left(b\left(s,X_s^1\right) - b\left(s,X_s^0\right)\right) \mathrm{d}s\right|^2\\ &\leq 2\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^1\right) - \sigma\left(s,X_s^0\right)\right) \mathrm{d}B_s\right|^2\\ &+ 2\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s^1\right) - b\left(s,X_s^0\right)\right) \mathrm{d}s\right|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{t\leq r}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 &= 2\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^1\right) - \sigma\left(s,X_s^0\right)\right) \mathrm{d}B_s\right|^2\\ &+ 2\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s^1\right) - b\left(s,X_s^0\right)\right) \mathrm{d}s\right|^2\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité (1.2), (1.1)l'inégalité de Cauchy Schawartz et la condition (2.3),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\le r}\left|X_t^2-X_t^1\right|^2\right] &\le 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\le r}\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^1\right)-\sigma\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&+ 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\le r}\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s^1\right)-b\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\le 8\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|\sigma\left(s,X_s^1\right)-\sigma\left(s,X_s^0\right)\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&+ 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^r\left(b\left(s,X_s^1\right)-b\left(s,X_s^0\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\le 8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&+ 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\le \left(8K^2+2TK^2\right)\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\le \left(8K^2+2TK^2\right)\int_0^r\mathbb{E}\left[\sup_{u\le s}\left|X_u^1-X_u^0\right|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\le \left(8K^2+2TK^2\right)\int_0^r\mathbb{E}\left[\sup_{u\le s}\left|X_u^1-Z\right|^2\right]\mathrm{d}s \\
&\le 2\left(8K^2+2TK^2\right)\left[Z^2r+\int_0^r\mathbb{E}\left(\sup_{u\le s}\left|X_u^1\right|^2\right)\mathrm{d}s\right] \\
&\le 2\left(8K^2+2TK^2\right)\left[Z^2r+\int_0^r\left(C\left(K,T,Z\right)+C'\left(K,T,Z\right)s\right)\mathrm{d}s\right] \\
&\le 2\left(8K^2+2TK^2\right)\left[Z^2r+C\left(K,T,Z\right)r+C'\left(K,T,Z\right)\frac{r^2}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\mathrm{d}B_s\right|^2\right]$$
$$+2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]$$

Utilisant l'inégalité, l'inégalité de Cauchy Schwartz et la condition

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq 8\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right|^2\mathrm{d}s\right]$$
$$+2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^r b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]$$
$$\leq 8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\mathrm{d}s\right]$$
$$+2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^r\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\mathrm{d}s\right]$$
$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\leq\left(8K^2+2TK^2\right)\int_0^r\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]\mathrm{d}s$$
$$\leq C^n\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$$

Donc la somme $\sum_n\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq r}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]<\infty\Rightarrow\mathbb{P}.p.s$
X_t^n converge uniformément

$$\exists X_t,\,\mathrm{tq}:\sup_t\left|X_t^n-X_t\right|^2\longrightarrow 0\ \mathbb{P}.p.s$$

3. X_t vérifier l'E.D.S (2.1).On pose

$$X_t^k=Z+\int_0^t b\left(s,X^{k-1}\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma\left(s,X^{k-1}\right)\mathrm{d}B_s \tag{2.5}$$

il reste a montrer que (X_t) est solution de (2.1) ; pour cela, on remarque que $\left(X^k\right)$ converge dans $L^2(P)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\left\|X_t^m - X_t^n\right\|_{L^2} &= \left\|\sum_{k=n}^{m-1} X_t^{k+1} - X_t^k\right\|_{L^2}, m > n \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left\|X_t^{k+1} - X_t^k\right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left(C_k \frac{r^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{1/2} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

Si on note X_t la limite L^2 de $\left(X_t^k\right)$, on sait qu'il existe une sous-suite que converge $p.s$, donc nécessairement vers Y_t. En conséquence $X_t = Y_t \ \ p.s$. On voudrait maintenant passer à la limite dans (2.5), comme $\left(X_t^k\right)$ converge dans $L^2(P)$, le lemme de fatou donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|X_t - X_t^n\right|^2 \mathrm{d}t\right] \leq \liminf_{m\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|X_t^m - X_t^n\right|^2 \mathrm{d}t\right] \longrightarrow_{m\to+\infty} 0$$

La condition (2.3), l'inégalité de Cauchy Schwartz implique que

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s\right)\right) \mathrm{d}s\right|^2\right] \leq tK^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n - X_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

Alors

$$\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) \mathrm{d}s \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(P)} \int_0^t b\left(s, X_s\right) \mathrm{d}s$$

De même manière en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s\right)\right) \mathrm{d}B_s\right|^2\right] \leq 4K^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n - X_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

Alors

$$\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) \mathrm{d}B_s \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(P)} \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) \mathrm{d}B_s$$

Tout converge dans (2.5). En passant à la limite, on en déduit que (X_t) est solution de (2.1).

■

2.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans cette section on va donnner le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde dont les coefficients sont globalement Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par **Pardoux** et **Peng** en **1990** avec le générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

La forme générale d'une équation différentielle stochastique rétrograde est donnée comme suit :

$$\begin{cases} -\, dY_t = f(t; Y_t; Z_t)dt - Z_t dW_t, t \in [0,T] \\ \qquad\qquad Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.6}$$

ou de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\ (s; Y_s; Z_s)dt - \int_t^T Z_s dW_s,\ t \in [0,T]$$

2.2.1 Notations

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un mouvement brownien (MB) d-dimensionnel sur cet espace. On notera $(\mathcal{F}_t)_{t\ \geq\ 0}$ la filtration naturelle du MB W. On travaillera avec deux espaces de processus :

On note $S^{\,2}(\mathbb{R}^K)$: l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, tels que :

$$\|Y\|_{S^{\,2}}^2 = E\left[\sup_{0\leq t\,\leq T}\ |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $S^{\,2}_{\,c}(\mathbb{R}^K)$ le sous espace formé par le processus continus.

En suite $L^2_{\mathcal{F}_t}\,(\mathbb{R}^{K\times d})$ celui formé par les processus Z, progrssivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{K\times d}$, tels que :

$$\|Z\,\|_{M^{\,2}}^2 = E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2\,dt\right] < \infty,$$

Où si $z\in\mathbb{R}^{K\times d}$,$\|z\|^2 = trace(zz^*) L^2_{\mathcal{F}_t}(\mathbb{R}^{K\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $L^2_{\mathcal{F}_t}(\mathbb{R}^{K\times d})\mathbb{R}^K$et $\mathbb{R}^{K\times d}$ seront souvent omis ; les espaces S^2 ;S^2_c et $L^2_{\mathcal{F}_t}$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $B^{\,2}$ l'espace de Banach $S^2_c(\mathbb{R}^K)\times L^2_{\mathcal{F}_t}(\mathbb{R}^{K\times d})$.

Soit f une application aléatoire définie sur $[0;T]\times\Omega\times\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}^{K\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^K$ telle que, pour tout $(y;z)\in\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}^{K\times d}$, le processus$\{f(t,y;z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^K$. La fonction f s'appelle le générateur et ξ la condition terminale. Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation differentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) (2.6).

Définition 2.2.1 *une solution de l'EDSR*(**2**.**6**)*est un couple de processus*

$\{(Y_t;Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$vérifiant :

1) Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs recpectivement dans $\mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}^{K\times d}$.

2) P-p.s

$$\int_0^T \left\{ f(r;Y_r;Z_r) + \|z_r\|^2 \right\} dr < \infty.$$

3) P-p.s, on a

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r;Y_r;Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, t \in [0,T].$$

Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité, on donne les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler, sous les données suiventes : f est définie sur $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d}$ à valeur dans $\mathbb{R}^K$, telle que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d}$; le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire,$\mathcal{F}_T-$mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^K$.

a) Condition d'intégrabilité

$$E\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f\ (r,0,0)|^2 dr \right] < \infty,$$

b) Condition de Lipschitz en (y ; z)

pour tout t; y; $\acute{y}$; z; $\acute{z}$;

$$|f(t;y;z) - f(t;\acute{y};\acute{z})| \leq C\left(|y-\acute{y}| + \|z-\acute{z}\|\right),$$

où C est une constante indépendante de t; y; $\acute{y}$; z et $\acute{z}$.

Théorème 2.2.1 (Pardoux–Peng 90) *Sous les hypothèses* ***(a)*** *et* ***(b)****, l'EDSR* (2.6) *possède une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z \in L^2_{\mathcal{F}_t}$.

Chapitre 3

Principe du maximum sous l'information partielle

3.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré complet muni d'une filtration naturelle $\mathcal{F}_t := \sigma\{W(s), Y(s); 0 \leq s \leq t\}$,où $W(\cdot)$ et $Y(\cdot)$ sont 2 mouvements browniens standard indépendants unidimensionnels. On note par :

$$\mathcal{F}_t^W := \sigma\{W(s); 0 \leq s \leq t\}$$
$$\mathcal{F}_t^Y := \sigma\{Y(s); 0 \leq s \leq t\}$$

Notre problème de contrôle est de type chapms moyen de risk sensitive et sous l'information partielle est défini par un système couplé :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), Ex(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), Ex(t), u(t))dW(t) \\ -dy(t) = f(t, x(t), y(t), z(t), Ex(t), Ey(t), Ez(t), u(t))dt - z(t)dW(t), \\ x(0) = a, y(T) = \phi(x(T)), \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$b,\ \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times U \to \mathbb{R}$$

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^6 \times U \to \mathbb{R}$$

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

a est un constant, et $U \subset \mathbb{R}$ un convexe non vide de $\mathbb{R}$. Une variable de contrôle $u : [0,T] \times \Omega \to U$ est dite admissible si il est $\mathcal{F}_t^Y$-adapté et satisfait

$$E\left[\int_0^T |u(t)|^2 \, dt\right] < \infty.$$

L'ensemble des contrôle admissibles est noté par $\mathcal{U}_{ad}$. On suppose que le processus d'espace d'états (x, y, z) n'est pas complètement observé, mais il est partiellement observé à travers d' un processus Y, qui vérifier l'équation differentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dY(t) = h(t, x(t), u(t))dt + d\tilde{W}(t) \\ Y(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

On donne maintenant les hypothèses sous lesquelle on va travailler :

H1) b, σ et ϕ sont $\mathcal{F}_{t\geq 0}$-adaptés et continûments différentiables par rapport à $(x, \tilde{x}, u)$, de dérivées bornées et majoré par $c(1 + |x| + |\tilde{x}| + |u|)$.

H2) h est continûments différentiables par rapport à (x, u), h et ses dérivées par rapport à (x, u) sont uniformément bornée.

H3) l, g et γ sont continûment différentiable par rapport à $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, z, \tilde{z}, u$ et les dérivées sont bornées.

Comme h est bornée, la condition de Novikov $E\{e^{\frac{1}{2}\int_0^t h^2(s,x(s),u(s))ds}\} < \infty$ est vérifier. Soit $dP^u = Z^u(t)dP$, avec

$$Z^u(t) = e^{\left\{\int_0^t h(s,x(s),u(s))dY(s)-\frac{1}{2}\int_0^t |h(s,x(s),u(s))|^2 ds\right\}},$$

qui vérifier l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dZ^u(t) = Z^u(t)h(t,x(t),u(t))dY(t) \\ Z^u(0) = 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

alors d'après le théorème de Girsanov et $(H1)$,P^v est une nouvelle mesure de probabilité, et $(W, \tilde{W})$ est un brownien de $\mathbb{R}^2$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P^u)$. La fonction de coût associée a notre problème de contrôle est définie par :

$$J^\theta(u(\cdot)) = E^u\big[e^{\theta(\int_0^T l(t,x(t),y(t),z(t),E^u x(t),E^u y(t),E^u z(t),u(t))dt+g(x(T))+\ \gamma(y(0)))}\big], \tag{3.4}$$

où E^u désigne l'espérance sous P^u et θ est l'indice de risque sensitive ($\theta \in [0,1]$). La formule de Bayes va nous permet d'écrire , la fonction de coût (3.4) sous la forme :

$$J^\theta(u(\cdot)) = E^u\big[e^{\theta(\int_0^T l(t,x(t),y(t),z(t),E[Z^u(t)x(t)],E[Z^u(t)y(t)],E[Z^u(t)z(t)],u(t))dt+g(x(T))+\gamma(y(0)))}\big]. \tag{3.5}$$

L'objectif du controlleur est de maximiser (3.5) sur l'ensemble des contrôle admissibles $\mathcal{U}_{ad}$. Un contrôle $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$ qui satisfait

$$J^\theta(\bar{u}(\cdot)) = \max_{u\in\mathcal{U}_{ad}} J^\theta(u(\cdot)),$$

est appelé un contrôle optimal. Le processus d'état correspondant à $\bar{u}$ est noté par $\bar{x}(\cdot) := x^{\bar{u}}(\cdot)$, de plus, nous utilisons l'abréviation $\bar{W}(\cdot) := \bar{W}^{\bar{u}}(\cdot)$, et

$\bar{Z}(\cdot) := Z^{\bar{u}}(\cdot)$. On défini l'équation

$$\begin{cases} d\xi(t) = l(t, x(t), \tilde{x}(t), z(t), y(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t), u(t))dt \\ \xi(0) = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

alors notre problème de contrôle est équivalent à maximiser

$$J^{\theta}(u(\cdot)) = E[Z^{u}(T)e^{\theta(\xi(T)+g(x(T))+\gamma(y(0)))}], \tag{3.7}$$

sous les processus d'état (3.1), (3.2) et (3.6). Soit $u(\cdot)$ tel que $\bar{u}(t) + u(t) \in U, 0 \leq t \leq T$, comme U est convexe alors pour tout $0 < \rho < 1, u^{\rho}(t) = \bar{u}(t) + \rho u(t) \in U$. Soit $(x^{\rho}, y^{\rho}, z^{\rho})$ et $Z^{\rho}(t)$ les solutions de (3.1) et (3.2) associé au contrôle $u^{\rho}(\cdot)$, respectivement. Pour la simplification, on utilise les notations suivante :

$$\begin{aligned}
\bar{h}(t) \quad & := h(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\
\varphi_{\zeta}(t) \quad & := \varphi_{\zeta}(t, \bar{x}(t), E\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\
\psi^{u}(t) \quad & := \psi(t, x(t), y(t), z(t), Ex(t), Ey(t), Ez(t), u(t)), \\
\overline{\psi}(t) \quad & := \psi(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t), E\bar{x}(t), E\bar{y}(t), E\bar{z}(t), \bar{u}(t)), \\
\psi_{\zeta}(t) \quad & := \psi_{\zeta}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t), E\bar{x}(t), E\bar{y}(t), E\bar{z}(t), \bar{u}(t)), \\
\zeta \quad & = x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, z, \tilde{z}, u \\
\varphi \quad & = b, \sigma, \\
\psi \quad & = f, l, h.
\end{aligned}$$

3.2 Équations variationnelles et ses estimations

Dans cette section on définie les équations variationnelles et on donne quelque estimations, ces equations sont défini par :

$$\begin{cases} dx^1(t) & = [b_x(t)x^1(t) + b_{\tilde{x}}(t)Ex^1(t) + b_u(t)u(t)]dt + [\sigma_x(t)x^1(t) \\ & +\sigma_{\tilde{x}}(t)Ex^1(t) + \sigma_u(t)u(t)]dW(t), \\ -dy^1(t) & = [f_x(t)x^1(t) + f_y(t)y^1(t) + f_z(t)z^1(t) + f_{\tilde{x}}(t)Ex^1(t) + f_{\tilde{y}}(t)Ey^1(t) \\ & +f_{\tilde{z}}(t)Ez^1(t) + f_u(t)u(t)]dt - z^1(t)dW(t), \\ x^1(0) & = 0, \\ y^1(T) & = \phi_x(\bar{x}(T))x^1(T), \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} dZ^1(t) & = [Z^1(t)h(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) + Z(t)h_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \\ & +Z(t)h_u(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))u(t)]dY(t), \\ Z^1(0) & = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} d\xi^1(t) & = [l_x(t)\xi^1(t) + l_{\tilde{x}}(t)E\xi^1(t) + l_y(t)\xi^1(t) + l_{\tilde{y}}(t)E\xi^1(t) \\ & +l_z(t)\xi^1(t) + l_{\tilde{z}}(t)E\xi^1(t) + l_u(t)u(t)]dt, \\ \xi^1(0) & = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Lemme 3.2.1 *Sous les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$, les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\sup_{t\in[0,T]} E\left|\frac{x^\rho(t)-\bar{x}(t)}{\rho} - x^1(t)\right|^2 = 0, \tag{3.11}$$

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\sup_{t\in[0,T]} E\left|\frac{y^\rho(t)-\bar{y}(t)}{\rho} - y^1(t)\right|^2 = 0,$$

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0} E\int_t^T \left|\frac{z^\rho(t)-\bar{z}(t)}{\rho} - z^1(t)\right|^2 dt = 0,$$

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\sup_{t\in[0,T]} E\left|\frac{Z^\rho(t)-\bar{Z}(t)}{\rho} - z^1(t)\right|^2 = 0,$$

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\sup_{t\in[0,T]} E\left|\frac{\xi^\rho(t)-\bar{\xi}(t)}{\rho} - \xi^1(t)\right|^2 = 0.$$

Preuve. Posons $\tilde{x}^\rho(t) = \frac{x^\rho(t)-x(t)}{\rho} - x^1(t),\ \tilde{y}^\rho(t) = \frac{y^\rho(t)-\bar{y}(t)}{\rho} - y^1(t),\ \tilde{z}^\rho(t) = \frac{z^\rho(t)-\bar{z}(t)}{\rho} - z^1(t),\ \tilde{Z}^\rho(t) = \frac{Z^\rho(t)-\bar{Z}(t)}{\rho} - Z^1(t)$. Pour la première équation on à :

$$\begin{cases} d\tilde{x}(t) = d(\frac{x^\rho(t)-\bar{x}(t)}{\rho}) - dx^1(t) \\ = \Big(\frac{1}{\rho}(b(t,\bar{x}(t)+\rho(\tilde{x}^\rho(t)+x^1(t)), E[\bar{x}(t)+\rho(\tilde{x}^\rho(t)+x^1(t))], \bar{u}(t)+\rho u(t)\Big) \\ -b(t,\bar{x}(t),E\bar{x}(t),\bar{u}(t))) - b_x(t)x^1(t) - b_{\tilde{x}}(t)Ex^1(t) - b_u(t)u(t))dt \\ +(\frac{1}{\rho}\sigma(t,\bar{x}(t)+\rho(\tilde{x}^\rho(t)+x^1(t)), E[\bar{x}(t)+\rho(\tilde{x}^\rho(t)+x^1(t))], \bar{u}(t)+\rho u(t) \\ -\sigma(t,\bar{x}(t),E\bar{x}(t),\bar{u}(t))) - \sigma_x(t)x^1(t) - \sigma_{\tilde{x}}(t)Ex^1(t) - \sigma_u(t)u(t))dW(t), \\ \tilde{x}^\rho(0) = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

on peut aussi réécrit l'équation (3.12) comme suit :

$$\begin{cases} d\tilde{x}^\rho(t) & = (D^\rho(t)\tilde{x}^\rho(t) + \tilde{D}^\rho(t)E\tilde{x}^\rho(t) + F^\rho(t))dt \\ & \quad +(E^\rho(t)\tilde{x}^\rho(t) + \tilde{E}^\rho(t)E\tilde{x}^\rho(t) + H^\rho(t))dW(t), \\ \tilde{x}^\rho(0) & = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

où

$$\begin{aligned} D^\rho(t) &= \int_0^1 b_x(t,\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1), E(\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1)), \bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda, \\ \tilde{D}^\rho(t) &= \int_0^1 b_{\tilde{x}}(t,\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1), E(\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1)), \bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda, \\ E^\rho(t) &= \int_0^1 \sigma_x(t,\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1), E(\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1)), \bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda, \\ \tilde{E}^\rho(t) &= \int_0^1 \sigma_{\tilde{x}}(t,\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1), E(\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1)), \bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda, \\ F^\rho(t) &= (D^\rho(t)-b_x(t))x^1(t) + (\tilde{D}^\rho(t)-b_{\tilde{x}}(t))Ex^1(t) \\ &\quad + \left(\int_0^1 b_u(t,\overline{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1), E(\overline{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1)), E(\bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda - b_u(t)\right)u(t), \\ H^\rho(t) &= (E^\rho(t)-\sigma_x(t))x^1(t) + (\tilde{E}^\rho(t)-\sigma_{\tilde{x}}(t))Ex^1(t) \\ &\quad + \left(\int_0^1 \sigma_u(t,\overline{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1), E(\overline{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^\rho+x^1)), E(\bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda - \sigma_u(t)\right)u(t). \end{aligned}$$

En applique la formule d'Itô à $|\tilde{x}^\rho(t)|^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
d(\tilde{x}^\rho(t))^2 &= 2\tilde{x}^\rho(t)d\tilde{x}^\rho(t) + (d\tilde{x}^\rho(t))^2 \\
&= 2\tilde{x}^\rho(t)\Big\{(D^\rho(t)\tilde{x}^\rho(t) + \tilde{D}^\rho(t)E\tilde{x}^\rho(t) + F^\rho(t))dt + (E^\rho(t)\tilde{x}^\rho(t) \\
&+\tilde{E}^\rho(t)E\tilde{x}^\rho(t) + H^\rho(t))dW(t)\Big\} + (E^\rho(t)\tilde{x}^\rho(t) + \tilde{E}^\rho(t)E\tilde{x}^\rho(t) + H^\rho(t))^2 dt.
\end{aligned}$$

En intégre l'équation ci-dessus entre 0 et T puis en prenant l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}
&E((\tilde{x}^\rho(t))^2 - (\tilde{x}^\rho(0))^2)) \\
&= 2E\int_0^T (\tilde{x}^\rho(t))^2(D^\rho(t)\tilde{x}^\rho(t) + \tilde{D}^\rho(t)E\tilde{x}^\rho(t) + F^\rho(t))dt \\
&+ \int_0^T (E^\rho(t)\tilde{x}^\rho(t) + \tilde{E}^\rho(t)E\tilde{x}^\rho(t) + H^\rho(t))^2 dt \\
&\leq K(E\int_0^T |\tilde{x}^\rho(t)|^2 dt + E\int_0^T |F^\rho(t)|^2 dt + E\int_0^T |H^\rho(t)|^2 dt),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $K > 0$ un constant. En vertu de l'hypothèse $(H1)$, on a :

$$\lim_{\rho\to 0} E\int_0^T (|E^\rho(t)|^2 dt) + E(\int_t^T |H^\rho(t)|^2 dt) = 0. \tag{3.15}$$

On utilise l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy et l'inégalité de Gronwall à (3.14), et par (3.15), on obtient la première convergence de (3.11).

$$\begin{cases} d\tilde{y}^{\rho}(t) = d\left(\frac{y^{\rho}(t)-\bar{y}(t)}{\rho}\right) - dy^{1}(t) \\ = \{\frac{1}{\rho}(-f(t,\bar{x}(t)+\rho(\tilde{x}^{\rho}(t)+x^{1}(t)),\bar{y}(t)+\rho(\tilde{y}^{\rho}(t)+y^{1}(t)),\bar{z}(t) \\ +\rho(\tilde{z}^{\rho}(t)+z^{1}(t)),E[\bar{x}(t)+\rho(\tilde{x}^{\rho}(t)+x^{1}(t))],E[\bar{y}(t)+\rho(\tilde{y}^{\rho}(t)+y^{1}(t))],E[\bar{z}(t) \\ +\rho(\tilde{z}^{\rho}(t)+z^{1}(t))],\bar{u}(t)+\rho u(t))+f(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t),\bar{z}(t),E\bar{x}(t),E\bar{y}(t),E\bar{z}(t),\bar{u}(t))) \\ +f_{x}(t)x^{1}(t)+f_{y}(t)y^{1}(t)+f_{z}(t)z^{1}(t)+f_{\tilde{x}}(t)Ex^{1}(t)+f_{\tilde{y}}(t)Ey^{1}(t)+f_{\tilde{z}}(t)Ez^{1}(t) \\ +f_{u}(t)u(t)\}dt+\tilde{z}^{\rho}(t)dW(t), \\ \tilde{y}^{\rho}(T) = \rho^{-1}(\phi(x^{\rho}(T))-\phi(\bar{x}(T)))-\phi_{x}(\bar{x}(T))x^{1}(T). \end{cases} \tag{3.16}$$

L'équation (3.16) peut être également prend la forme suivante :

$$\begin{cases} -d\tilde{y}^{\rho}(t) & = (A^{\rho}(t)\tilde{x}^{\rho}(t)+B^{\rho}(t)\tilde{y}^{\rho}(t)+C^{\rho}(t)\tilde{z}^{\rho}(t)+\tilde{A}^{\rho}(t)E\tilde{x}^{\rho}(t) \\ & \quad +\tilde{B}^{\rho}(t)E\tilde{y}^{\rho}(t)+\tilde{C}^{\rho}(t)E\tilde{z}^{\rho}(t)+G^{\rho}(t))dt-\tilde{z}^{\rho}(t)dW(t) \\ \tilde{y}^{\rho}(T) & = \rho^{-1}(\phi(x^{\rho}(T))-\phi(\bar{x}(T)))-\phi_{x}(\bar{x}(T))x^{1}(T), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A^{\rho}(t) = \int_{0}^{1} & f_{x}(t,\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^{\rho}+x^{1}),\bar{y}+\lambda\rho(\tilde{y}^{\rho}+y^{1}),\bar{z}+\lambda\rho(\tilde{z}^{\rho}+z^{1}),E(\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^{\rho}+x^{1})), \\ & E(\bar{y}+\lambda\rho(\tilde{y}^{\rho}+y^{1})),E(\bar{z}+\lambda\rho(\tilde{z}^{\rho}+z^{1})),\bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda, \\ B^{\rho}(t) = \int_{0}^{1} & f_{y}(t,\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^{\rho}+x^{1}),\bar{y}+\lambda\rho(\tilde{y}^{\rho}+y^{1}),\bar{z}+\lambda\rho(\tilde{z}^{\rho}+z^{1}),E(\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^{\rho}+x^{1})), \\ & E(\bar{y}+\lambda\rho(\tilde{y}^{\rho}+y^{1})),E(\bar{z}+\lambda\rho(\tilde{z}^{\rho}+z^{1})),\bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda, \\ C^{\rho}(t) = \int_{0}^{1} & f_{z}(t,\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^{\rho}+x^{1}),\bar{y}+\lambda\rho(\tilde{y}^{\rho}+y^{1}),\bar{z}+\lambda\rho(\tilde{z}^{\rho}+z^{1}),E(\bar{x}+\lambda\rho(\tilde{x}^{\rho}+x^{1})), \\ & E(\bar{y}+\lambda\rho(\tilde{y}^{\rho}+y^{1})),E(\bar{z}+\lambda\rho(\tilde{z}^{\rho}+z^{1})),\bar{u}+\lambda\rho u)d\lambda, \end{aligned}$$

$$\tilde{A}^\rho(t) = \int_0^1 f_{\tilde{x}}(t, \bar{x} + \lambda\rho(\tilde{x}^\rho + x^1), \bar{y} + \lambda\rho(\tilde{y}^\rho + y^1), \bar{z} + \lambda\rho(\tilde{z}^\rho + z^1), E(\bar{x} + \lambda\rho(\tilde{x}^\rho + x^1)),$$
$$E(\bar{y} + \lambda\rho(\tilde{y}^\rho + y^1)), E(\bar{z} + \lambda\rho(\tilde{z}^\rho + z^1)), \bar{u} + \lambda\rho u)d\lambda,$$
$$\tilde{B}^\rho(t) = \int_0^1 f_{\tilde{y}}(t, \bar{x} + \lambda\rho(\tilde{x}^\rho + x^1), \bar{y} + \lambda\rho(\tilde{y}^\rho + y^1), \bar{z} + \lambda\rho(\tilde{z}^\rho + z^1), E(\bar{x} + \lambda\rho(\tilde{x}^\rho + x^1)),$$
$$E(\bar{y} + \lambda\rho(\tilde{y}^\rho + y^1)), E(\bar{z} + \lambda\rho(\tilde{z}^\rho + z^1)), \bar{u} + \lambda\rho u)d\lambda,$$
$$\tilde{C}^\rho(t) = \int_0^1 f_{\tilde{z}}(t, \bar{x} + \lambda\rho(\tilde{x}^\rho + x^1), \bar{y} + \lambda\rho(\tilde{y}^\rho + y^1), \bar{z} + \lambda\rho(\tilde{z}^\rho + z^1), E(\bar{x} + \lambda\rho(\tilde{x}^\rho + x^1)),$$
$$E(\bar{y} + \lambda\rho(\tilde{y}^\rho + y^1)), E(\bar{z} + \lambda\rho(\tilde{z}^\rho + z^1)), \bar{u} + \lambda\rho u)d\lambda,$$

et

$$G^\rho(t) = (A^\rho(t) - f_x(t))x^1 + (B^\rho(t) - f_y(t))y^1 + (C^\rho(t) - f_z(t))z^1$$
$$+ (\tilde{A}^\rho(t) - f_{\tilde{x}}(t))Ex^1 + (\tilde{B}^\rho(t) - f_{\tilde{y}}(t))Ey^1(t) + (\tilde{C}^\rho(t) - f_{\tilde{z}}(t))Ez^1$$
$$+ (\int_0^1 f_u(t, \bar{x} + \lambda\rho(\tilde{x}^\rho + x^1), \bar{y} + \lambda\rho(\tilde{y}^\rho + y^1), \bar{z} + \lambda\rho(\tilde{z}^\rho + z^1), E(\bar{x} + \lambda\rho(\tilde{x}^\rho + x^1)),$$
$$E(\bar{y} + \lambda\rho(\tilde{y}^\rho + y^1)), E(\bar{z} + \lambda\rho(\tilde{z}^\rho + z^1)), \bar{u} + \lambda\rho u)d\lambda - f_u(t))u(t).$$

En applique la formule d'Itô à $|\tilde{y}^\rho(t)|^2$ on obtient :

$$E[|\tilde{y}^\rho(t)|^2] + E\int_t^T |\tilde{z}^\rho(t)|^2 dt \tag{3.17}$$
$$= 2E\int_t^T < \tilde{y}^\rho(s), A^\rho(s)\tilde{x}^\rho(s) + B^\rho(s)\tilde{y}^\rho(s) + C^\rho(s)\tilde{z}^\rho(s) + \tilde{A}^\rho(s)E\tilde{x}^\rho(s) + \tilde{B}^\rho(s)E\tilde{y}^\rho(s)$$
$$+ \tilde{C}^\rho(s)E\tilde{z}^\rho(s) + G^\rho(s) > ds + E\left\{\rho^{-1}[\phi(x^\rho(T)) - \phi(\bar{x}(T))] - \phi_x(\bar{x}(T))x^1(T)\right\}^2$$
$$\leq K_1(E\int_t^T |\tilde{y}^\rho(t)|^2 ds + E\int_t^T |\tilde{z}^\rho(t)|^2 ds + E\int_t^T |A^\rho(s)\tilde{y}^\rho(s)|^2 ds$$
$$+ E\int_t^T |\tilde{A}^\rho(s)\tilde{y}^\rho(s)|^2 ds + E\int_t^T |G^\rho(s)|^2 ds),$$

où $K_1 > 0$ un constant. On passe à la limite on trouve que :

$$\lim_{\rho \longrightarrow 0} \left(E \int_t^T |A^\rho(s)\tilde{y}^\rho(s)|^2 ds + E \int_t^T |\tilde{A}^\rho(s)\tilde{y}^\rho(s)|^2 ds + E \int_t^T |G^\rho(s)|^2 ds) \right) = 0. \tag{3.18}$$

On applique l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy et l'inégalité de Gronwall à (3.17) et par (3.18), on obtient :

$$\lim_{\rho \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} E|\tilde{y}^\rho(t)|^2 = 0,$$
$$\lim_{\rho \longrightarrow 0} E \int_t^T |\tilde{z}^\rho(t)|^2 dt = 0.$$

Alors la deuxième et la troisième convergence de (3.11) sont assurés. D'une manière similaire on montre les derniers estimations de (3.11). ∎

3.3 Conditions nécessaires et suffisantes

Dans cette section on donne les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité :

3.3.1 Conditions nécessaires

Avant de donner les conditions nécessaire on définie les équations adjointes suivantes :

$$\begin{cases} dP(t) & = \eta(t)dW(t) + \tilde{\eta}(t)d\tilde{W}(t) \\ P(T) & = e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\begin{cases} -dp(t) & = (E(p(t)b_{\tilde{x}}(t)) + p(t)b_x(t) + E(k(t)\sigma_{\tilde{x}}(t)) + \sigma_x k(t) \\ & \quad -E(f_{\tilde{x}}(t)q(t)) - f_x(t)q(t) + h_x(t)\tilde{\eta}(t))dt - k(t)dW(t) \\ p(T) & = \theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))} g_x(\bar{x}(T)) - \phi_x(\bar{x}(T))q(T), \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} -dq(t) & = (E(q(t)f_{\tilde{y}}(t)) + q(t)f_y(t))dt + (E(q(t)f_{\tilde{z}}(t)) + q(t)f_z(t))dW(t) \\ q(0) & = \theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(-\gamma_y(\bar{y}(0))), \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} -d\alpha(t) & = (E(\alpha(t)l_{\tilde{x}}(t)) + \alpha(t)l_x(t) + E(\alpha(t)l_{\tilde{y}}(t)) \\ & \quad +\alpha(t)l_y(t) + E(\alpha(t)l_{\tilde{z}}(t)) + \alpha(t)l_z(t))dt - \beta(t)dW(t) \\ \alpha(T) & = \theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}. \end{cases} \tag{3.22}$$

On donne maintenant l'inégalité variationnelle suivante.

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses $(H1)-(H3)$ on trouve que :*

$$E^{\bar{u}}\left[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(\bar{Z}^{-1}(T)Z^1(T) + \theta(\xi^1(T) + g_x(\bar{x}(T))x^1(T) + \gamma_y(\bar{y}(0))y^1(0)))\right] \leq 0$$

Preuve. Par le fait que

$$\begin{aligned} &\frac{J(u^\rho(t)) - J(\bar{u}(t))}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho}E(Z^\rho(T)e^{\theta(\xi^\rho(T)+g(x^\rho(T))+\gamma(y^\rho(0)))} - \bar{Z}(T)e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))} \\ &= \frac{1}{\rho}E\left((Z^\rho(T) - \bar{Z}(T)\right)e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))} + Z^\rho(T)(e^{\theta(\xi^\rho(T)+g(x^\rho(T))+\gamma(y^\rho(0)))} \\ &- e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))})) \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

On utilise la formule de Taylor et on passe à la limite dans (3.23), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\rho\longrightarrow 0}\frac{J(u^{\rho}(t))-J(\bar{u}(t))}{\rho} \qquad (3.24)\\
&=\lim_{\rho\longrightarrow 0}\frac{1}{\rho}E(Z^{1}(T)e^{\theta(\xi^{\rho}(T)+g(x^{\rho}(T))+\gamma(y^{\rho}(0)))}-\bar{Z}(T)e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}\\
&=\lim_{\rho\longrightarrow 0}\frac{1}{\rho}E\left((Z^{\rho}(T)-\bar{Z}(T)\right)e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}\\
&+Z^{\rho}(T)(e^{\theta(\xi^{\rho}(T)+g(x^{\rho}(T))+\gamma(y^{\rho}(0)))}-e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}))\\
&=E(Z^{1}(T)^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}+\bar{Z}(T)\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(\xi^{1}(T)\\
&+g_{x}(\bar{x}(T))x^{1}(T)+\gamma_{y}(\bar{y}(0))y^{1}(0)))\\
&=E^{\bar{u}}[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(\bar{Z}^{-1}(T)Z^{1}(T)+\theta\xi^{1}(T)\\
&+g_{x}(\bar{x}(T))x^{1}(T)+\gamma_{y}(\bar{y}(0))y^{1}(0)))],
\end{aligned}
$$

alors

$$
\Big\{E^{\bar{u}}[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(\bar{Z}^{-1}(T)Z^{1}(T)+\theta\xi^{1}(T)+g_{x}(\bar{x}(T))x^{1}(T)+\gamma_{y}(\bar{y}(0))y^{1}(0)))]\leq 0.
$$

Ce qui achève la preuve. ■

Le Hamiltonien de notre système est défini comme suit :

$$
\begin{aligned}
H(t,x,\tilde{x},y,\tilde{y},z,\tilde{z},u,p,q,k,\alpha,\tilde{\eta}) \quad &:= pb(t,x,\tilde{x},u)+k\sigma(t,x,\tilde{x},u)\\
&-f(t,x,y,z,\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},u)q+h(t,x,u)\tilde{\eta}\\
&+\alpha(t)l(t,x,\tilde{x},z,y,\tilde{y},\tilde{z},u),
\end{aligned}
$$

Théorème 3.3.2 *Supposons que $(H1)-(H3)$ sont vérifions et $\bar{u}$ un contrôle optimal, alors il existe une unique solution $(P,\eta,\tilde{\eta})\in L^{2}_{\mathcal{F}_t}(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{R})\times L^{2}_{\mathcal{F}_t}(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{R}))\times L^{2}_{\mathcal{F}_t}(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{R});(p,k)\in L^{2}_{\mathcal{F}_t}(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{R})\times L^{2}_{\mathcal{F}_t}(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{R});q\in L^{2}_{\mathcal{F}_t}(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{R});$*

$(\alpha, \beta) \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{R}) \times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{R})$ pour les equations adjointes (3.19)–(3.22), tel que :

$$E^{\bar{u}}[H_u(t)u(t)|\mathcal{F}_t^Y] \leq 0,\ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, a.e.t \in [0,T], P - a.s.$$

Preuve. Par un calcul simple on trouve que

$$\begin{cases} dZ^{-1}(t) = \bar{h}^2(t)dt - Z^{-1}(t)\bar{h}(t)dY(t) \\ Z^{-1}(0) = 0. \end{cases}$$

Soit $\Gamma(t) = Z^{-1}(t)Z^1(t)$, on appliquant la formule d'Itô à $t \to \Gamma(t)$, alors

$$\begin{cases} d\Gamma(t) & = (h_x(t)x^1(t) + h_u(t)u(t))dY(t) - (\bar{h}(t)h_x(t)x^1(t) \\ & \quad +\bar{h}(t)h_u(t)u(t))dt \\ \Gamma(0) & = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

En remplaçant (3.2) dans (3.25), on obtient

$$\begin{cases} d\Gamma(t) = (h_x(t)x^1(t) + h_u(t)u(t))d\tilde{W}(t) \\ \Gamma(0) = 0. \end{cases}$$

En appliquant la formule d'Itô à $t \to< P(t), \Gamma(t) >$, et on prend l'espérence :

$$E^{\bar{u}}(\Gamma(T)p(T)) = E^{\bar{u}} \int_0^T h_x(t)x^1(t)\tilde{\eta}(t) + h_u(t)\tilde{\eta}(t)u(t)dt \tag{3.26}$$

Appliquant la formule d'Itô à

$$t \to< p(t), x^1(t) > + < q(t), y^1(t) >,$$

on obtient que

$$\begin{aligned}
&E^{\bar{u}}(x^1(T)p(T)+y^1(T)q(T)-y^1(0)q(0) \qquad (3.27)\\
&=E^{\bar{u}}\int_0^T p(t)b_u(t)u(t)-x^1(t)h_x(t)\tilde{\eta}(t)+k(t)\sigma_u(t)u(t)-f_u(t)u(t)q(t)dt.
\end{aligned}$$

En remplaçant (3.26) dans (3.27), on obtient

$$\begin{aligned}
&E^{\bar{u}}(x^1(T)p(T)+y^1(T)q(T)-y^1(0)q(0)+\Gamma(T)P(T)) \qquad (3.28)\\
&=E^{\bar{u}}\int_0^T <p(t)b_u(t)+k(t)\sigma_u(t)-f_u(t)q(t)+h_u(t)\tilde{\eta}(t),u(t)>dt.
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
p(T)&=\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}g_x(\bar{x}(T))-\phi_x(\bar{x}(T))q(T), \qquad (3.29)\\
y^1(t)&=\phi_x(\bar{x}(T))x^1(T),\\
p(T)&=e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))},\\
q(0)&=\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(-\gamma_y(\bar{y}(0))).
\end{aligned}$$

Remplaçant (3.29) dans (3.28), on trouve que

$$\begin{aligned}
&E^{\bar{u}}[x^1(T)\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}g_x(\bar{x}(T))-\phi_x(\bar{x}(T))q(T), \qquad (3.30)\\
&+\phi_x(\bar{x}(T))x^1(T)q(t)-y^1(0)\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(-\gamma_y(\bar{y}(0)))\\
&+\Gamma(T)e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}]\\
&=E^{\bar{u}}[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(\theta g_x(\bar{x}(T))x^1(T)+\theta\gamma_y(\bar{y}(0))y^1(0)+\Gamma(T))]\\
&=E^{\bar{u}}\int_0^T <p(t)b_u(t)+k(t)\sigma_u(t)-f_u(t)q(t)+h_u(t)\tilde{\eta}(t),u(t)>dt.
\end{aligned}$$

De (3.24), on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho\longrightarrow 0}\frac{J(u^{\rho}(t))-J(\bar{u}(t))}{\rho} \\
&= E^{\bar{u}}[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(\bar{Z}^{-1}(T)Z^{1}(T) \\
&+\theta(\xi^{1}(T)+g_{x}(\bar{x}(T))x^{1}(T)+\gamma_{y}(\bar{y}(0))y^{1}(0)))] \\
&= E^{\bar{u}}[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(\Gamma(T)+\theta(\xi^{1}(T) \\
&+g_{x}(\bar{x}(T))x^{1}(T)+\gamma_{y}(\bar{y}(0))y^{1}(0)))] \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

En remplaçant(3.30)dans(3.31), on obtient

$$\begin{aligned}
&E^{\bar{u}}[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}\theta(\xi^{1}(T)] \\
&+E^{\bar{u}}\textstyle\int_{0}^{T}<p(t)b_{u}(t)+k(t)\sigma_{u}(t)-f_{u}(t)q(t)+h_{u}(t)\tilde{\eta}(t),u(t)>dt \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

En appliquant à nouveau la formule d'Itô à $t\rightarrow<\xi^{1}(t),\alpha(t)>$, on obtient

$$\begin{aligned}
&E^{\bar{u}}[\alpha(T)\xi^{1}(T)] \\
&= E^{\bar{u}}[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}\xi^{1}(T)] \\
&= E^{\bar{u}}\int_{0}^{T}\alpha(t)l_{u}(t)u(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

En substituant(3.33)à(3.32), on obtient que

$$E^{\bar{u}}\int_{0}^{T}<p(t)b_{u}(t)+k(t)\sigma_{u}(t)-f_{u}(t)q(t)+h_{u}(t)\tilde{\eta}(t)+\alpha(t)l_{u}(t),u(t)>dt\leq 0. \tag{3.34}$$

Alors(3.34) peut être écrite comme suit

$$E^{\bar{u}}[H_{u}(t)u(t)|\mathcal{F}_{t}^{Y}]\leq 0.$$

Ceci achève la preuve. ∎

3.3.2 Condition suffisante

Dans cette section, nous étudions la condition suffisante d'optimalité pour notre problème de contrôle. En plus de $(H1)-(H3)$, nous supposons également l'hypothèse suivante.

H4) l ne dépend pas de x, Ex, y, Ey, z, Ez,et $\phi(x) = Mx$, où M est une constante. Les équations adjointes de notre nouveau système contrôlé sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} d\alpha(t) = \beta(t)dW(t), \\ \alpha(T) = \theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))} \\ dP(t) = \eta(t)dW(t) + \tilde{\eta}(t)d\tilde{W}(t), \\ P(T) = e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}, \end{cases} \tag{3.35}$$

$$\begin{cases} -dp(t) & = (E(p(t)b_{\tilde{x}}(t)) + p(t)b_x(t) + E(k(t)\sigma_{\tilde{x}}(t)) + \sigma(t)k(t) \\ & \quad -E(f_{\tilde{x}}(t)q(t)) - f_x(t)q(t) + h_x(t)\tilde{\eta}(t))dt - k(t)dW(t) \\ p(T) & = \theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))} g_x(\bar{x}(T)) - Mq(T), \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} -dq(t) & = (E(q(t)f_{\tilde{y}}(t)) + q(t)f_y(t))dt + (E(q(t)f_{\tilde{z}}(t)) + q(t)f_z(t))dW(t) \\ q(0) & = \theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(-\gamma_y(\bar{y}(0))), \end{cases} \tag{3.37}$$

et le hamiltonien H prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & H(t, x(t), \tilde{x}(t), y(t), \tilde{y}(t), z(t), \tilde{z}(t), u(t), p(t), q(t), k(t), \alpha(t), \tilde{\eta}(t)) \\ & := p(t)b(t, x(t), \tilde{x}(t), u(t)) + k(t)\sigma(t, x(t), \tilde{x}(t), u(t)) \\ & - f(t, x(t), y(t), z(t), \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t), u(t))q(t) + h(t, x(t), u(t))\tilde{\eta}(t) + \alpha(t)l(t, u). \end{aligned}$$

Théorème 3.3.3 *Si $(H1) - (H4)$ sont vérifions et $(\alpha(t), \beta(t)), P(t), (p(t), k(t))$ et*

$q(t)$ *les solutions des équations adjointes*(3.35)-(3.37), *respectivement. De plus*

$H(t,\cdot,\cdot,\cdot,p,q,k,\alpha,\tilde{\eta})$, $g(\cdot)$ et $\gamma(\cdot)$sont concaves par rapport aux variables correspondantes pour tout $t \in [0,T]$ et

$$\begin{aligned}&E[H(t,\bar{x}(t),E[\bar{x}(t)],\bar{y}(t),E[\bar{y}(t)],\bar{z}(t),E[\bar{z}(t)],\bar{u}(t),p(t),q(t),k(t),\alpha(t),\tilde{\eta}(t))|F_t^Y]\\ &\max_{u\in\mathcal{U}_{ad}} E[H(t,\bar{x}(t),E[\bar{x}(t)],\bar{y}(t),E[\bar{y}(t)],\bar{z}(t),E[\bar{z}(t)],u(t),p(t),q(t),k(t),\alpha(t),\tilde{\eta}(t))|\mathcal{F}_t^Y].\end{aligned} \tag{3.38}$$

Alors $\bar{u}(\cdot)$ est optimal.

Preuve. Pour tout $u(t) \in \mathcal{U}_{ad}$ et par la propriété de concavité de $g(\cdot),\gamma(\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}&J^\theta(u(t)) - J^\theta(\bar{u}(t))\\ &= E^u[e^{\theta(\xi(T)+g(x(T))+\gamma(y(0)))}] - E^{\bar{u}(t)}[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}]\\ &= E[(Z^u(T) - \bar{Z}(T)e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}] + E^u[e^{\theta(\xi(T)+g(x(T))+\gamma(y(0)))}]\\ &- E^u[e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}]\\ &\leq E[(Z^u(T) - Z(T)e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}] + E^u[\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}](\xi(T)-\bar{\xi}(T))\\ &+ g_x(\bar{x}(T))(x(T)-\bar{x}(T)) + \gamma_y(\bar{y}(0))(y(0)-\bar{y}(0))].\end{aligned}$$

On défini

$$\begin{aligned}I_1 &:= E[(Z^u(T) - Z(T)e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}],\\ I_2 &:= E^u[\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}(\xi(T)-\bar{\xi}(T))],\\ I_3 &:= E^u[\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}g_x(\bar{x}(T))(x(T)-\bar{x}(T))],\\ I_4 &:= E^u[\theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}\gamma_y(\bar{y}(0))(y(0)-\bar{y}(0))],\end{aligned}$$

alors

$$J^\theta(u(t)) - J^\theta(\bar{u}(t)) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{3.39}$$

En appliquant la formule d'Itô à

$$t \to < Z^u(t)q(t), y(t) - \bar{y}(t) >,$$

on a

$$E < Z^u(T)q(T), y(T) - \bar{y}(T) > -E < Z^u(0)q(0), y(0) - \bar{y}(0) >$$
$$= E < Z^u(T)q(t), Mx(T) - M\bar{x}(T) > -E < \theta e^{\theta(\bar{\xi}(T)+g(\bar{x}(T))+\gamma(\bar{y}(0)))}$$
$$(-\gamma_y(\bar{y}(0))), (y(0) - \bar{y}(0) >$$
$$= E^u \int_0^T \{< f_y(t)q(t) + E[f_{\tilde{y}}(t)q(t)], y(t) - \bar{y}(t) >$$
$$+ < f_z(t)q(t) + E[f_{\tilde{z}}(t)q(t)], z(t) - \bar{z}(t) > + < q(t), \bar{f}(t) - f(t) >\}dt$$
$$= E^u \int_0^T \{< -H_y(t) - E[H_{\tilde{y}}(t), y(t) - \bar{y}(t) >$$
$$+ < -H_z(t) - E[H_{\tilde{z}}(t)], z(t) - \bar{z}(t) > - < q(t), f(t) - \bar{f}(t) >\}dt,$$

mais

$$I_4 = -E < Z^u(T)q(T), y(T) - \bar{y}(T) > +E^u \int_0^T \{< -H_y(t) - E[H_{\tilde{y}}(t), y(t) - \bar{y}(t) >$$
$$+ < -H_z(t) - E[H_{\tilde{z}}(t)], z(t) - \bar{z}(t) > - < q(t), f(t) - \bar{f}(t) >\}dt \tag{3.40}$$

En appliquant à nouveau la formule d'Itô aux

$$t \to < Z^u(t) - \bar{Z}(t), P(t) >, t \to < x(t) - \bar{x}(t), p(t) >$$

et

$$t \to < \xi(t) - \bar{\xi}(t), \alpha(t) >,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= E^u \textstyle\int_0^T < h(t) - \bar{h}(t), \tilde{\eta}(t) > dt, \\
I_2 &= E^u \textstyle\int_0^T < \alpha(t), l(t) - \bar{l}(t) > dt, \\
I_3 &= E^u < Mq(T), x(T) - \bar{x}(T) > -E^u \textstyle\int_0^T < E[p(t) b_{\tilde{x}}(t)] \\
&\quad + p(t) b_x(t) + \sigma_x(t) k(t) + E[k(t) \sigma_{\tilde{x}}(t)] - f_x(t) q(t) \\
&\quad - E[f_x(t) q(t)] + h_x(t) \tilde{\eta}(t), x(t) - \bar{x}(t) > + < p(t), b(t) - \bar{b}(t) > \\
&\quad + < k(t), \sigma(t) - \bar{\sigma}(t) > dt.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

En substituant (3.40)et(3.41)dans(3.39), on trouve que

$$\begin{aligned}
&J^\theta(u(t)) - J^\theta(\bar{u}(t)) \\
&= E^u \textstyle\int_0^T [H(t, x(t), E[x(t)], y(t), E[y(t)], z(t), E[z(t)], u(t), p(t), q(t), k(t), \alpha(t), \tilde{\eta}(t)) \\
&- H(t, \bar{x}(t), E[\bar{x}(t)], \bar{y}(t), E[\bar{y}(t)], \bar{z}(t), E[\bar{z}(t)], \bar{u}(t), p(t), q(t), k(t), \alpha(t), \tilde{\eta}(t)) dt \\
&- E^u \textstyle\int_0^T < H_x(t) + E[H_{\tilde{x}}(t)], x(t) - \bar{x}(t) > + < H_y(t) + E[H_{\tilde{y}}(t)], y(t) \\
&- \bar{y}(t) + < H_z(t) + E[H_{\tilde{z}}(t)], z(t) - \bar{z}(t) > dt.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

D'après(3.42), et par la concavité de H en$(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, z, \tilde{z}, u)$,

$$\begin{aligned}
&J^\theta(u(t)) - J^\theta(\bar{u}(t)) \\
&\leq E^u \int_0^T H_u(t)(u(t) - \bar{u}(t)) dt \\
&\leq E \int_0^T Z^u(t) H_u(t)(u(t) - \bar{u}(t)) dt \\
&\leq E \int_0^T E[Z^u(t) H_u(t)(u(t) - \bar{u}(t)) | F_t^Y] dt,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

comme $Z^u(t) > 0$ pour tout $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$ de plus, (3.38)donne que

$$u \to E[H(t, \bar{x}(t), E[\bar{x}(t)], \bar{y}(t), E[\bar{y}(t)], \bar{z}(t), E[\bar{z}(t)], u(t), p(t), q(t), k(t), \alpha(t), \tilde{\eta}(t)) | \mathcal{F}_t^Y]$$

est maximale en $u(t) = \bar{u}(t), t \in [0, T]$, alors

$$E[H_u(t)(u(t) - \bar{u}(t))|\mathcal{F}_t^Y]dt \leq 0, \tag{3.44}$$

combinant(3.43)et (3.44), on obtient que $J^\theta(u(t)) - J^\theta(\bar{u}(t)) \leq 0$, $\forall u(t) \in \mathcal{U}_{ad}$, alors $\bar{u}(\cdot)$ est un contrôle optimal. ■

3.4 Applications (linéaire-quadratique)

Dans cette section on va résoudre un problème de contrôle optimal de type linéaire-quadratique dont on cherche les condition nécessaire d'optimalité . ($Th\acute{e}or\grave{e}me2$). Le système non observé est donné comme suit :

$$\begin{cases} dx(t) & = (a_1 x(t) + a_2 E[x(t)] + a_3 u(t))dt \\ & +(b_1 x(t) + b_2 E[x(t)] + b_3 u(t))dW(t), \\ -dy(t) & = (c_1 x(t) + c_2 E[x(t)] + c_3 y(t) + c_4 E[y(t)] \\ & +c_5 z(t) + c_6 E[z(t)] + c_7 u(t))dt - z(t)dW(t), \\ x(0) = x_0, & y(T) = 0, \end{cases}$$

et le processus observé satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} dY(t) = F(t)dt + d\tilde{W}(t), \\ Y(0) = 0, \end{cases}$$

où $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, x(0)$ sont des constantes et F est bornée et déterministe.

La fonction de coût est de forme exponentielle :

$$J(u(\cdot)) = E[e^{\theta \frac{1}{2}(x^2(T) + y^2(0))}]. \tag{3.45}$$

On défin aussi le Hamiltonien par :

$$
\begin{aligned}
& H(t, x(t), \tilde{x}(t), y(t), \tilde{y}(t), z(t), \tilde{z}(t), u(t), p(t), q(t), k(t), \alpha(t), \tilde{\eta}(t)) \\
& = p(t)(a_1 x(t) + a_2 E[x(t)] + a_3 u(t)) + k(t)(b_1 x(t) + b_2 E[x(t)] \\
& + b_3 u(t)) - q(t)(c_1 x(t) + c_2 E[x(t)] + c_3 y(t) + c_4 E[y(t)] \\
& + c_5 z(t) + c_6 E[z(t)] + c_7 u(t)) + F(t)\tilde{\eta}(t)
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

où $p(t)$, $q(t)$, $k(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ sont les processus adjoints qui satisfaisont les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
-dp(t) &= (a_2 E[p(t)] + p(t)a_1 + b_2 E[k(t)] + b_1 k(t) \\
&\quad - c_1 q(t) - c_2 E[q(t)])dt - k(t)dW(t) \\
p(T) &= \theta e^{\theta(\frac{1}{2}(\bar{x}(T)^2 + \bar{y}^2(0))} \bar{x}(T),
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

$$
\begin{cases}
dq(t) = (c_3 q(t) + c_4 E[q(t)])dt + (c_5 q(t) + c_6 E[q(t)])dW(t) \\
q_0 = \theta e^{\theta(\frac{1}{2}\bar{x}(T)^2 + \frac{1}{2}\bar{y}^2(0))}(-\bar{y}(0)),
\end{cases} \tag{3.48}
$$

$$
\begin{aligned}
dP(t) &= \eta(t)dW(t) + \tilde{\eta}(t)d\tilde{W}(t) \\
P(t) &= e^{\theta(\frac{1}{2}\bar{x}(T)^2 + \frac{1}{2}\bar{y}^2(0))}
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

On introduit maintenant les équations variationnelles :

$$
\begin{cases}
dx^1(t) = (a_1 + a_2 E[x^1(t)] + a_3 u(t))dt + (b_1 + b_2 E[x^1(t)] + b_3 u(t))dW(t), \\
-dy^1(t) = (c_1 x^1(t) + c_2 E[x^1(t)] + c_3 y^1(t) + c_4 E[y^1(t)] \\
+c_5 z^1(t) + c_6 E[z^1(t)] + c_7 u(t))dt - z^1(t)dW(t), \\
x^1(0) = 0, y^1(T) = 0,
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} dZ^1(t) = Z^1(t)F(t)dY(t), \\ Z^1(t) = 0. \end{cases}$$

Théorème 3.4.1 *Si* $(H1) - (H3)$ *sont vérifions, et* $(p(t), k(t)), q(t)$ *et* $P(t)$ *les solutions de* (3.47) *et* (3.48), *respectivement et si* $\bar{u}(\cdot)$ *un contrôle optimal, alors*

$$E[(a_3 p(t) + b_3 k(t) - c_7 q(t))u(t)|\mathcal{F}_t^Y] \leq 0, \;\; \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, a.e.t \in [0,T], P - a.s.$$

Preuve. Par un calcul simple on a

$$\begin{cases} dZ^{-1}(t) = Z^{-1}(t)F^2(t)dt - Z^{-1}(t)F(t)dY(t), \\ Z^{-1}(0) = 1. \end{cases}$$

Soit $\Gamma(t) = Z^1(t)Z^{-1}(t)$, en appliquant la formule d'Itô à $\Gamma(t)$, on obtient $\Gamma(t) = 0$ et par suite on applique la formule d'Itô à $x^1(t)p(t) + y^1(t)q(t)$, on trouve que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \longrightarrow 0} \frac{J(u^\rho(t)) - J(\bar{u}(t))}{\rho} &= E^{\bar{u}}[e^{\theta \frac{1}{2}(x^2(T)^2 + y^2(0))}(\theta x(T)x^1(T) + y(0)y^1(0))] \qquad (3.50) \\ &= E^{\bar{u}}\left[\int_0^T (a_3 p(t) + b_3 k(t) - c_7 q(t))u(t)dt\right] \\ &= E^{\bar{u}}\left[\int_0^T H_u(t)u(t)dt\right] \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

alors le théorème du principe de maximum est vérifier. ■

Bibliographie

[1] Bielecki TR, Pliska SR. Risk-sensitive dynamic asset management. Appl Math Optim. 1999 ;39(3) :337-360.

[2] Buckdahn R, Djehiche B, Li J. A general stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type. Appl Math Optim. 2011 ;64(2) :197-216.

[3] Buckdahn R, Djehiche B, Li J, Peng SG. Mean-field backward stochastic differential equations : a limit approach. Ann Probab.2009 ;37(4) :1524-1565.

[4] Carmona R, Delarue F. Mean field forward-backward stochastic differential equations. Electron Commun Probab. 2013 ;18(68) :1-15.

[5] Davis M, Lleo S. Jump-diffusion risk-sensitive asset management I : diffusion factor model. SIAM J Financ Math. 2011 ;2(1) :22-54.

[6] Davis M, Lleo S. Jump-diffusion risk-sensitive asset management II : jump-diffusion factor model. SIAM J Control Optim.2013 ;51(2) :1441-1480.

[7] Huang JH, Li X, Wang GC. Maximum principles for a class of partial information risk-sensitive optimal controls. IEEE Trans Automat Contr. 2010 ;55(6) :1438-1443

[8] Kac M Foundations of kinetic theory. Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability ; Vol. 3,1956 :171-197

[9] Lim AEB, Zhou XY. Risk-sensitive control with HARA utility. IEEE Trans Automat Contr. 2001 ;46(4) :563-578.

[10] Li RJ, Fu FY. The maximum principle for partially observed optimal control problems of mean-field FBSDEs. Int J Control.2019 ;92(10) :2463-2472.

[11] Li RJ, Liu B. A maximum principle for fully coupled stochastic control systems of mean-field type. J Math Anal Appl. 2014 ;415(2) :902-930.

[12] Ma, Heping, and Weifeng Wang. "Stochastic maximum principle for partially observed risk-sensitive optimal control problems of mean-field forward-backward stochastic differential equations." Optimal Control Applications and Methods 43.2 (2022) : 532-552.

[13] Ma HP, Liu B. Linear quadratic optimal control problem for partially observed forward-backward stochastic differential equations of mean-field type. Asian J Control. 2016 ;18 :2146-2157.

[14] Shen Y, Siu TK. The maximum principle for a jump-diffusion mean-field model and its application to the mean-variance problem.

[15] Wang GC, Xiao H, Xing GJ. An optimal control problem for mean-field forward-backward stochastic differential equation with noisyobservation. Automatica. 2017 ;86 :104-109.

[16] Whittle P. A Risk-sensitive maximum principle. Syst Control Lett. 1990 ;15(3) :183-192.

[17] Zhou Q, Ren Y, Wu WX. On optimal mean-field control problem of mean-field forward-backward stochastic system with jumps under partial information. J Syst Sci Complex. 2017 ;30(4) :828-856.

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بدراسة التحكم الأمثل في ظل المعلومات الجزئية لنظام مراقب مختلط ذو قيمة ابتدائية ونهائية مع وجود القيمة المتوسطة والتكلفة الأسية. أولا نعطي مفاهيم عامة حول التحليل التصادفي، ثم نعطي نظرية الوجود والوحدانية للنظام المدروس، وفي الأخير نقوم بدراسة الشروط اللازمة والكافية للمتغير الأمثل وكتطبيق ندرس نموذج خطي تربيعي .

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude d'un problème de contrôle optimal sous l'information partielle pour un système progressive –rétrograde de type champs moyen et de coût exponentiel. Premièrement nous rappelons quelques définitions de base sur le calcul stochastique, ensuite on donne des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution de notre système, enfin on étudié les conditions nécessaire et suffisante d'optimalité et comme exemple nous considérons le cas linéaire-quadratique de type risque sensitive.

Abstract

In this memory, we are interested in the study of an optimal control problem under partial information for forward-backward system with mean field type and exponential cost. Firstly, we recall some basic definitions about the stochastic calculus, then we give the existence and uniqueness of the solution of our system, finally we studied the necessary and sufficient conditions of optimality of our system and as application, we consider the linear-quadratic case.