République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par :

Ghelloudj Sabrina

Sur la théorie élémentaire de l'approximation

Devant le Jury :

Dr.	**Chemcham Madani**	Grade	U. Biskra	Président
Dr.	**Soukeur Abdesselam**	Grade	U. Biskra	Encadreur
Dr.	**Adouane Saida**	Grade	U. Biskra	Examinateur

27/06/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail de recherche d'abord :

Aux personnes, qui sans elles je ne serai jamais arrivée à ce palier.

ceux qui m'ont poussée,encouragées... :

Mes Parents

Et à mon mari pour son aide et son soutien.

Aux personnes les plus proches de moi :

Mes soeurs et mon frère

Mes amies :Loubna, Fatoum, Amina,

A toute ma famille et toutes les amies

Chapitre 1

$\mathcal{R}$emerciements

Je remercie tout d'abord Dieu tout puissant qui nous a donné toute la patience et l'aide pour réaliser notre travail de recerche.

*Je tiens à remercier mon directeur de recherche **SOUKEUR Abdesselam** pour son aide,son soutien, et surtout ses conseils et orientation, sa direction et son encouragement pour réaliser ce modeste travail de recherche.*

Et je veux exprime tout mon respect aux membres du jury, qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail,

Dr.CHEMCHAM Madani d'avoir accepté la présidence du jury.

Dr.ADOUANE Saida d'avoir accepté l'examinateur de ce travail.

Mes remeciments vont également à tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin dans la réalisation de ce travail.

Tous mes remerciements aux membres de jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Merci à tous

Table des matières

Introduction

Une approximation est une représentation imprécise ayant toutefois un lien étroit avec la quantité ou l'objet qu'elle reflète :

Approximation d'un nombre (de π par 3.14 , de la vitesse instantanée d'un véhicule par sa vitesse moyenne entre deux points), d'une fonction mathématique, d'une solution d'un problème d'optimisation, d'une forme géométrique, d'une loi physique.

Lorsqu'une partie de l'information nécessaire fait défaut, une approximation peut se substituer à une représentation exacte.

Cependant, même si cette dernière est connue, une approximation est parfoits préférable par le fait qu'elle simplifie l'analyse sans générer de trop grandes erreurs.

Par exemple, les physiciens rapprochent souvent la forme de la terre à celle d'une sphère, même si des représentations plus précises sont possibles : plusieurs phénomènes physiques(telle la pesanteur) sont en effet plus faciles à étudier en supposant une sphère à la place d'une forme plus complexe.

Le choix d'un degré d'approximation dépend de l'information disponible, du niveau d'exactitude souhaité, de la sensibilité des résultats aux données des gains de temps et d'effort qui en découlent.

En mathématiques et plus particulièrement en topologie, un espace métrique est un ensemble au sein duquel une notion de distance entre les éléments de l'ensemble est définie. Les éléments seront, en général, appelés des points [1].

Tout espace métrique est canoniquement muni d'une topologie. Les espaces métrisables sont les espaces topologiques obtenus de cette manière.

L'exemple correspondant le plus à notre expérience intuitive de l'espace est l'espace euclidien à trois dimensions. La métrique euclidienne de cet espace définit la distance entre deux points comme la longueur du segment les reliant.

La classe d'isométrie d'un espace métrique (c'est-à-dire l'ensemble de tous les espaces de même structure métrique) est beaucoup plus petite que sa classe d'homéomorphie. Par exemple, un carré, un triangle, un cercle et n'importe quelle courbe de Jordan sont homéomorphes, par contre ils ne sont pas isométriques. Ainsi une structure métrique code beaucoup plus d'information sur la forme géométrique des objets qu'une simple structure topologique ; ce qui n'a rien de surprenant, car la notion de distance entre deux points est centrale pour la géométrie usuelle.

La notion de métrique a été considérée par Fréchet (1886-1971) et Riesz (1880-1956), celle d'espace métrique résultant directement des propriétés de la distance usuelle. Par ailleurs la donnée d'une norme sur un espace vectoriel permet de faire de l'analyse tout en privilégiant les opérations linéaires. La théorie des espaces de Hilbert trouve son origine dans celle des développements des fonctions en séries de fonctions orthogonales, lesquelles apparaissent le plus souvent comme fonctions propres d'opérateurs différentiels linéaires (séries de Fourier).

L'objectif de ce mémoire est de donner un aperçu sur la théorie élémentaire de l'approximation. Dans notre modeste travail, nous dennons dans le premier chapitre des définitions et des concepts élémentaires tels que (les distances ; les normes ;

les boules et les suites et ....). Le deuxiéme chapitre est le principal dans ce travail qui est meilleure approximation dans un espace métrique ; on présente les pricipaux résultats concernant la meilleur approximation, on commence par définir formellement la meilleure approximation, on définit par (Approximation dans un espace préhilbertien ;Existence d'une meilleure approximation ;Unicité de la meilleure approximation), et on donne les proprietiés de chaque définition avec bien sûr des théorèmes, propositions et résultats liés à chacun,On présentera alors dans le troisième chapitre , plusieurs techniques importantes d'approximation polynomiale, à savoir méthode des moindres carrés, les développements de Taylor, on appliquera dans ce chapitre les techniques et les résultats donnés dans le deuxième chapitre.

Chapitre 2

Rappels sur les espaces métriques

Espace metrique

La notion déspace métrique sert à étendre la notion de limite, une des notions les plus importantes des mathématiques, à des espaces plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Dans $\mathbb{R}$ on dit que (x_n) tend vers x si $\mid x_n - x \mid$ tend vers 0 (ce qu'on précise avec des $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in N$,....). Sur un ensemble E, on va associer à chaque couple $(x; y)$ d'éléments de E un nombre positif $d(x; y) \geq 0$ (la distance de x à y), d obéissant à certains axiomes. On dira que x_n tend vers x si $d(x_n; x)$ tend vers 0. On appellera le couple $(E; d)$ un espace métrique.

2.1 *Espace metrique*

Soit E un ensemble.

2.1.1 Distances

Définition 2.1.1 *On appelle distance sur E une fonction $d : E \times \ E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant*

les axiomes suivantes : Pour tous $x, y, z \in E$

Positivité : Pour tout $x, y \in E$ on a $d(x; y) \geq 0$. On a $d(x; y) = 0$

si et seulement si $x = y$.

Symétrie : Pour tout $x, y \in E$ on a $d(x; y) = d(y; x)$.

Inégalité triangulaire : Pour tout $x, y, z \in E$ on a $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$:

On appelle espace métrique le couple $(E; d)$.

Définition 2.1.2 *(les distances usuelles sur $E = \mathbb{k}^n$). On définit les distances*

d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{k}^n$ par

$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid$

$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid^2}$

$d_\infty(x, y) = \max\limits_{i \in \{1,..,n\}} \mid x_i - y_i \mid$

2.1.2 *Normes*

On suppose dans cette section que E est un espace vectoriel sur le corps

$\mathbb{k}(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 2.1.3 *On appelle norme sur E une fonction $\|\| : E \rightarrow R$ vérifiant les*

axiomes suivantes : Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$.

Positivité : On a $\| x \| \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Homogénéité positive : On a $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$.

Sous-additivité : On a $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

On appelle espace vectoriel normé (EVN) le couple $(E; \|\|)$.

Définition 2.1.4 *(les normes usuelles sur $\mathbb{k}^n$). On définit les normes $\| \|_1, \| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{k}^n$ par*

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2}$$

$$\| x \|_\infty = \max_{i \in \{1,..,n\}} | x_i |$$

Définition 2.1.5 *Plus généralement on peut définir pour tout réel $p \geq 1$ une*

norme sur K^n par

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Quand $p \to \infty, \| x \|_p \to \| x \|_\infty$.

Proposition 2.1.1 *Si $(E; \|\|)$ est un EVN, alors $d(x, y) = \| x - y \|$ définit une distance sur E, invariante par translation, non bornée si $E \neq \{0\}$.*

Remarque 2.1.1 *Une distance bornée (par exemple de la forme $min(1, d)$ sur E) ne provient donc pas d'une norme.*

Proposition 2.1.2 *Pour tout $x \in \mathbb{k}^n$ on a les inégalités*

$$\frac{\| x \|_1}{n} \leq \| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq \sqrt{n} \| x \| \leq n \| x \|_\infty$$

Démonstration La seule subtilité est d'utiliser Cauchy-Schwarz :

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i | = \langle (| x_1 |, ..., | x_n |, (1, ..., 1) \rangle$$
$$\leq (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \| x \|_2$$

Définition 2.1.6 *(norme uniforme). Soit (X, d) un espace métrique,$\|\|$une norme sur E et $B(X; E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E, c'est-à-dire l'ensemble des $f : X \to E$ telles qu'il existe $M_f \geq 0$ tel que $\| f(x) \| \leq M_f$ pour tout $x \in X$. Alors $B(X, E)$ a une structure d'éspace vectoriel donnée par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ et on peut le munir d'une norme définie par*

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in X} \| f(x) \|$$

dite la norme uniforme.

Définition 2.1.7 *(norme L^p). Soit $C(I, R)$ l'espace vectoriel des fonctions continues d'un intervalle fermé $I = [a; b]$ dans R, alors pour tout réel $p \geq 1$,*

$$\| f \|_p = (\int_I | f(x) |^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$$

définit une norme, dite norme L^p sur $C(I; \mathbb{R})$. Quand $p \to \infty$, $\| f \|_p \to \| f \|_\infty$.

2.1.3 *Produit scalaire*

On suppose dans cette section que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.8 *On appelle produit scalaire une application* $\langle , \rangle : E \times \ E \to \mathbb{R}$

vérifiant les axiomes suivantes.

Positivité : $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \geq 0; \langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Symétrie :$\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

Linearité : $\forall x, y, z \in E, \langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Proposition 2.1.3 *(inégalité de Cauchy-Schwarz). Si* $\langle , \rangle$ *est un produit scalaire sur* E *alors*

$$| \langle x, y\rangle | \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}},$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration : Si $\langle x, y\rangle = 0$ c'est vrai. Si $\langle x, y\rangle \neq 0$, le polynôme $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$ est de degré 2 et positif, donc de discriminant $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$. En cas d'égalité, P admet une racine (double) et $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = 0$ implique $x + ty = 0$.

Corollaire 2.5 : Si $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E alors on obtient une norme sur E en posant

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Démonstration : La sous-additivité résulte de

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Proposition 2.1.4 *Soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E et $x, y \in E$. Alors*

1) Pour tous $x, y \in E$,

$$(\|x\| + \|y\|)^2 + (\|x\| - \|y\|)^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

2) Pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x, y \rangle = 0$ si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

La première identité est l'identité du parallélogramme (ou de la médiane), la deuxième est le théorème de Pythagore

2.1.4 *Boules et suites dans un espace métrique*

Définition 2.1.9 *Dans (E, d) on appelle boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble*

$$B_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}$$

On appelle boule fermée l'ensemble

$$\tilde{B}_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}.$$

On appelle sphére de centre $x \in E$ et de rayon $r \geq 0$

$$S_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) = r\}.$$

2.2 Espace métrique complet :

Définition 2.2.1 *On dit qu'une suite* (x_n) *de Cauchy dans* (E, d)*,*

$((E, d)$ espace métrique) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n, m > N_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Proposition 2.2.1 *Une suite de Cauchy est toujour bornée.*

Définition 2.2.2 *Soit* (E, d) *un espace métrique est dit complet, si toute suite de Cauchy est convergente.*

Proposition 2.2.2 *Soit* (E, d) *un espace métrique, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes avec* $F \subset E$ *(*F *sous espace de* E *)*

(i) F *fermé.*

(ii) $\forall (x_n)$ *une suite de* F *convergente vers* x *alors* $x \in F$*.*

2.3 *Espace de Banach :*

Définition 2.3.1 *On appelle espace de Banach, tout espace vectoriel normé*

$(E, \|\cdot\|)$ complet pour la distance issue de sa norme $(d(x, y) = \|x - y\|)$.

Chapitre 3

Meilleur approximation dans un espace métrique

3.1 Approximation dans un espace préhilbertien

3.1.1 Rappels

Définition 3.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. On appelle forme hermitienne sur E toute application φ de $E \times E$ dans K telle que*

1. $\forall y \in E \qquad x \longrightarrow \varphi(x, y)$ *est une forme linéaire sur E.*
2. $\forall x, y \in E$ *on a* $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$.

Définition 3.1.2 *On appelle espace préhilbetien, un ensemble E muni de la structure définie par donnée sur E d'une structure d'espace vectoriel par rapport à K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et d'une forme hermitienne positive (si $\varphi(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in E$). Il est bien connu que $\varphi(x, x)$ est alors une semi norme sur E .Si c'est une norme (i.e.$\varphi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$) on dit que l'espace préhilbertien est séparé.*

Définition 3.1.3 *On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien séparé complet (pour la norme associée à la forme φ).*

Ensemble convexe

Définition 3.1.4 *Un ensemble C de E est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in C \ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

On peut dire que C est convexe donc le segment $[x, y]$ est inclus dans C.

Définition 3.1.5 (cône convexe) *Soit $\Gamma \subset E$ est un cône si*

$$\forall x \in \Gamma, \forall \lambda \geq 0 : \ \lambda x \in \Gamma.$$

Et elle est notée cône(Γ) .

Autrement dit , un cône Γ doit vérifier $\lambda\Gamma \subset \Gamma$ pour tout $\lambda \geq 0$.

Définition 3.1.6 *On dit que $X \subset H$ est un cône (pointé) de sommet 0, s'il est stable par les homothéties de rapport positif.*

Proposition 3.1.1 *Soient H un espace préhilbertien réel séparé et X un sous ensemble convexe complet dans H. Alors*

$\forall f \in H \ \exists! u \in X$ t.q. $\| f - u \| = d(f, X)$.

Démonstration Soient $\delta = d(f, X) = \inf\limits_{v \in X} \| f - v \|$, $B_n = B_{fermée}(f, \delta + \frac{1}{n})$

$$C_n = X \cap B_n \text{ est fermé non vide}$$

il vient :$\{u \in X \text{ t.q. } \| f - u \| = \delta\} = \bigcap\limits_{n \geq 1} C_n$.

Déterminons le diamétre de C_n : $\sup\limits_{v,w\in C_n} \parallel v-w \parallel$. Si v et $w \in X$, alors $m=\frac{v+w}{2} \in C_n$ par convexité

$$\parallel f-m \parallel^2 + \parallel v-w \parallel^2 = 2\left[\parallel f-v \parallel^2 + \parallel f-w \parallel^2\right]$$

d'après la règle parallélograme. On a $\parallel f-v \parallel \leq \delta+\frac{1}{n}$ et $\parallel f-m \parallel \geq \delta$ d'où

$$\parallel v-w \parallel^2 \leq 4(\delta+\frac{1}{n})^2-4\delta^2$$
$$\delta(C_n) \leq (\frac{8\delta}{n}+\frac{4}{n^2})^{\frac{1}{2}} \to 0, n\to\infty.$$

Dans un espace métrique complet, une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0, a une intersection réduite à un point. D'où l'existence et l'unicité de la m.a. (la meillleure approximation)

Remarque 3.1.1 *Cette proposition est valable sous des hypothèses plus générales sur l'espace* H, *elle s'étend aux espaces de Banach uniformément convexes.*

Définition 3.1.7 *Dans les conditions de la proposition,* $f\to u$ *s'appelle le projecteur dans* H *sur* X *(par analogie avec le cas où* X *est un sous espace complet de* H *).*
On note :

$$u = proj_X f$$

Il vient :

$$proj_X f = f, \forall f \in X$$

et donc $proj_X$ *est une surjection sur* X *.*

Proposition 3.1.2 *Sous les hypothèses de* ***la proposition 2.1.1,*** *une condtion* *nécessaire et suffisante pour que $u \in X$ soit la projection de f est que*

$$\langle u - v, f - u \rangle \geq 0, \forall v \in X.$$

Démonstration : Soient $u = proj_X f \quad v \in X$ et $\theta \in [0,1]$

alors $\quad \theta v + (1-\theta)u \in X$

$$\|f-u\|^2 \leq \| f - [\theta v + (1-\theta)u] \|^2 = \| f - u + \theta(u-v) \|^2$$
$$= \| f - u \|^2 + \theta^2 \| (u-v) \|^2 + 2\theta \langle f-u, u-v \rangle$$

soit $2(f-v, u-v) + \theta \| u - v \|^2 \geq 0 \quad \forall \theta \in [1,0]$, faisons tendre θ vers 0, il vient $(f-u, u-v) \geq 0 \ \forall v \in X$.

On a

$$\|f-v\|^2 = \| f - u + u - v\|^2$$
$$= \|f-u\|^2 + 2(f-u, u-v) + \|u-v\|^2$$
$$\geq \|f-u\|^2$$

alors $\|f-u\| \geq \|f-u\| \forall v \in X$ et par suite $u = proj_X f$ c.q.f.d.

Cas particuliers de la proposition 2.1.2

Proposition 3.1.3 *Soit X un cône pointé convexe complet de sommet 0. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que u soit la projection de f sur X est que $(u,f) = \| u \|^2$ et $(u,v) \geq (f,v) \forall v \in X$.*

Démonstration u est caractérisée par $(u-v, f-v) \geq 0 \geq \forall v \in X$

1. si $v = 0 \quad$ on a $\quad (u, f-u) \geq 0$.
2. si $v = 2u$ on a $-(u, f-u) \geq 0$.

donc $(u, f-u)=0$ et $(v, f-u) \leq 0$,$\forall v \in X$.

Inversement ces deux conditions s'écrivent $(u, f-u)=0$ et $(u, f-v) \geq 0$, d'où $(u-v, f-u)>0 \;\; v \in X$ c.q.f.d.

Exemple 3.1.1 *Soit* $H=C\,[0,1]$*muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle=\int f(x) g(x) dx.$$

Soit $X=\{\varphi \in C\,[0,1]\,; \varphi(x)=cste \geq 0 \;\; sur[0,1]\}$. *C'est un cône pointé convexe complet de sommet* 0 *si* $f \in H$, *chercher la m.a. de* f *sur* X *c'est trouver la m.a. de* f *par une constante positif. Soit* u *cette meilleure approximation*

Proposition 3.1.4

$$u(x)=\lambda \geq 0; si\ v \in X, v(x), u \geq 0$$

*D'après l**a proposition 2.1.3***

$$(u, f)=\mid u\mid^{2} \Longrightarrow \int_{0}^{1} \lambda f(x) dx=\lambda \int_{0}^{1} f(x) dx=\int_{0}^{1} \lambda^{2} dx$$

$$\Longrightarrow \lambda=0 \text{ ou } \lambda=\int_{0}^{1} f(x) dx.$$

1. *Si* $\int_0^1 f(x)dx \leq 0 \Longrightarrow \lambda=0$ *car* λ *doit être positif.*
2. *Si* $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$, *on utilise le fait que* :$\langle v, f\rangle \leq \langle v, u\rangle$,$\forall v \in X$.

   i.e

   $$\int_{0}^{1} u f(x) dx \leq \int_{0}^{1} \lambda u dx=\lambda u, \forall u \geq 0 \Longrightarrow \int_{0}^{1} f(x) dx \leq \lambda$$

   Donc

   $$\int_{0}^{1} f(x) dx \geq 0 \Longrightarrow \lambda=\int_{0}^{1} f(x) dx.$$

Par conséquent la m.a. de $f \in C[0,1]$ par une constante positif est :$\int_0^1 f(x)dx$ *si* $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$ *;* 0 *si non.*

Espaces uniformément convexes

Définition 3.1.8 *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si* $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ *tel que*

$$(x, y \in E, \| x \|\leq 1, \| y \|\leq 1et \| x - y \|> \varepsilon) \implies (\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta)$$

On notera que cette définition fait intervenir une propriété géométrique de la boule unité (qui doit être << bien ronde>> et qu'elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente .

Proposition 3.1.5 *Soient Y un sous-espace complet de H et $X = \varphi + Y$ le translaté de Y par $\varphi \in H$. Alors u est la projection de f sur X si et seulement si $u \in X$ et $f - u$ est orthogonal à Y.*

Preuve. En effet $\forall w \in Y$ si $u = pro_X f \quad u - w$ et $u + w \in X$ d'où $(w, f - u) = 0$ d'après la caractérisation 1.3 de u.Réciproquement supposons que pour $u \in X$ on ait $(w, f - u) = 0 \;\; \forall w \in Y$ on a alors $\forall v \in X, w = u - v \in Y$ d'où $(u - v, f - u) = 0$ c.q.f.d. ■

3.1.2 Résultats généraux de projection dans un EVN

Pour se fixer un cadre de travail, on considérera que la fonction f qu'on cherche à approcher appartient à un espace vectoriel normé E, et on notera M la partie de E dans laquelle seront choisies les approximations.

Dans la suite, les situations dans lesquelles on se placera seront celles où E est soit l'espace des fonctions continues

$$E = C([a, b]) \tag{3.1}$$

muni de la norme

$$\| f \|_{L^\infty} = \| f \|_{L^\infty} \ ([a, b]) := \underset{x \in [a,b]}{sup} |f(x)|,$$

soit l'espace des fonctions de carré (pondéré) intégrable

$$E = L^2_w([a, b]) \tag{3.2}$$

muni de la norme

$$\| f \|_{L^2_w} = \| f \|_{L^2_w([a,b])} := (\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx)^{\frac{1}{2}},$$

w étant une fonction strictement positive et intégrable, i.e. $\int_a^b w(x)dx < \infty$

3.2 Notion de meilleure approximation

Dans un tel cadre, la norme de E est l'outil naturel pour mesurer la qualité des approximations. En particulier, on dira que f_M est une meilleure approximation de f (dans M) si

$$f_M \in M \qquad et \qquad \| f - f_M \|_E = d_E(f, M) := \underset{g \in M}{inf} \| f - g \|_E \tag{3.3}$$

3.3 Existence d'une meilleure approximation :

Commençons par un exemple (relativement simple) de non-existence.

Exemple 3.3.1 (non-existence d'une meilleure approximation) *Prenons l'espace E des suites bornées :*

$$E = \ell^{\infty} = \left\{ (u_{k)_{k \in N}} : \exists C > 0, \mid u_k \mid \leq C \ \forall k \right\},$$

muni de la norme suivante (de type 'ℓ^1 pondéré ')

$$\|u\|_E := \sum_{k \in N} \frac{1}{2^k} \mid u_k \mid .$$

(Bien sûr, on pourrait minir E de sa norme 'usuelle' $\|u\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in N} \mid u_k \mid$, mais alors notre exemple ne marcherait pas).Comme partie M , on choisit l'en-semble des suites tendant vers 0 (notons que c'est un sous espace de E, de dimension infinie), et on considère comme élément de E à approcher la suite constante

$$u_k = 1, \forall k.$$

Que vaut $d_E(v, M) = \inf_{u \in M} \|v - u\|_E$?.Pour le calculer, il faut chercher des suites de M qui s'approchent de v. Par exemple la suite tronquée u^n définie par

$$u_k^n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \text{si } k \leq 0 \\ 0 & \text{si k} \geq n+1 \end{pmatrix} \right\}$$

vérifie

$$\|v - u^n\|_E = \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n},$$

ce qui montre que l'ensemble $\{\|v - u^n\|_E : u \in M\}$ contient des valeurs aussi petites que l'on veut, et donc que sa borne inférieure vaut $d_E(v, M) = 0$. Supposons maintenant qu'il existe une meilleure approximation, i.e.que cette valeur est atteinte par un élément v_M de M : on aurait alors

$$\|v - v_M\|_E = d_E(v, M) = 0,$$

ce qui impliquerait $v = v_M$. Comme v n'est pas clairement dans M, on voit que c'est impossible. Le minimum n'est donc pas atteint.

Théoreme 3.3.1 (Existence d'une meilleure approximation) *Si M est un sous-espace de dimension finie de E, alors tout élément f de E possède (au moins) une meilleure approximation dans M.*

Preuve. Tout d'abord, commençons par rappeler que dans un espace de dimension finie, les boules sont compactes, ce qui signifie (entre autres choses) qu'une suite bornée possède toujours une sous-suite convergente (ce qui n'est clairement pas vrai dans un espace de dimension infinie). C'est cette propriété qu'on existe ici. D'après la définition d'une borne inférieure, on sait en effet qu'il existe une suite d'éléments $g_n \in M$, telle que

$$\|f - g_n\|_E \to \inf_{g \in M} \|f - g\|_E.$$

En particulier, une telle suite est forcément bornée, on peut donc utiliser l'argument ci-dessus pour en extraire une sous-suite $g_{\sigma(n)}$ qui converge dans M vers un élément qu'on notera g^*. On aura alors, en utilisant la continuité de la norme

$$\|f - g^*\|_E = \lim_{n \to \infty} \|f - g_{\sigma(n)}\|_E = \lim_{n \to \infty} \|f - g_n\|_E = \inf_{g \in M} \|f - g\|_E.$$

En d'autres termes : g^* est une meilleure approximation de f dans M . ■

Dans la suite, la partie M sera toujours un espase vectoriel de dimension finie. Par exemple, on considèrera le cas où M est l'espace

$$P_n := \{p(x) = c_n x^n + ... + c_0 : c_0, ..., c_n \in \mathbb{R}\}$$

des polynômes de degré inférieur ou égale à n, clairement inclu dans les espaces (2.1) et (2.2)

3.4 Unicité de la meilleure aproximation

La question suivante que l'on peut se poser est alors de savoir si l'on a unicité de la meilleure approximation. L'exemple suivant (très simple) montre que ce n'est a priori pas toujours le cas.

Exemple 3.4.1 *Prenons ici $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|x\|_{\ell^\infty} := \max\{| x_1 |, | x_2 |\}$, et pour M , la droite $\{x : x_2 = 0\}$. Dans la mesure où les "boules" de E sont des carrés de côtés parallèles aux axes, il est facile de voir que le point $y = (0,1)$, qui est à distance 1 de la droite M, posséde une infinité de meilleurs approximations dans M : tout le segment $[-1,1] \times \{0\} \subset M$, en fait, puisque*

$$\|x - y\|_E = \max\{| x_1 |, 1\} \text{ lorsque } x \in M .$$

Chapitre 4

Applications

4.1 Méthode des moindres carrés :

La méthode des moindres carrés a pour but de résoudre au mieux un système de m équations à n inconnues lorsque $m > n$ (et que les équations ne sont pas compatibles) Soit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j = c_i \quad 1 \ \leq i \leq m$$

ce système où les inconnues sont : $\lambda_j \qquad 1 \leq j \leq n$

On prend $H = \mathbb{R}^m$ avec le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i$$

Le système développé donne :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}\lambda_1 & + & \cdots & + & a_{1j}\lambda_j & + & \cdots & + & a_{1n}\lambda_n & = & c_1 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}\lambda_1 & + & \cdots & + & a_{ij}\lambda_j & + & \cdots & + & a_{in}\lambda_n & = & c_i \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\lambda_1 & + & \cdots & + & a_{mj}\lambda_j & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_n & = & c_m
\end{array}$$

avec m lignes et n colonnes. Si on pose

$$f = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

$$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \;\; \text{où} \quad f \;\; \text{et} \;\; a_j \in \mathbb{R}^m = H$$

le système devient :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \lambda_j + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

ou :

$$a_1\lambda_1 + \ldots + a_j\lambda_j + \ldots + a_n\lambda_n = f.$$

Prenons pour X l'espace engendré par $a_1, \ldots, a_n$.

Si $f \notin X$ il n'existe pas de λ_j tels que

$$f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j.$$

Une des solutions du problème consiste à chercher les λ_j tels que $\|f - \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j \|$ soit minimun. Cela revient à chercher $u = \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j$,meilleure approximation de $f \in H$, dans H. On a donc à résoudre :

$$\langle f - \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j, a_j\rangle = 0, 1 \leq i \leq n$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle a_j, a_i\rangle = \langle f, a_i\rangle$$

avec

$$\langle a_j, a_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_{ki}$$

et

$$\langle f, a_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_k a_{ki}.$$

Autres solutions : On peut prendre un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k g_k$$

$a_k > 0$; ceci revient à pondérer différemment les équations. On peut prendre une norme non hilbertienne sur $\mathbb{R}^m$(par exemple $\|f\| = \max_k \mid f_k \mid$) ; mais cela n'entre plus dans le carde précédent.

4.2 Détermination de la meilleure approximation :

Soit $X = \varphi + Y$, où $\varphi \in H$ et Y est un sous-espace vectoriel de H de dimension finie n. X est isomorphe à Y et Y isomorphe à $\mathbb{R}^n$,donc X est complet.

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de Y . soit $f \in H$, et soit u la m.a.de f dans X

$$u = \varphi + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$$

Proposition 4.2.1 *Les $\lambda_j$sont solutions du système*

$$\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j \rangle \lambda_j = \langle f - \varphi, e_i \rangle \ 1 \leq i \leq n$$

qui est de Cramer.

Démonstration :

$$u \quad m.a. \ de \quad f \iff u \in X \quad et \ (f-u) \perp Y$$

$$\iff (f-u) \perp e_i \quad 1 \leq i \leq n \qquad ou \qquad \langle (f-u\rangle, e_i \rangle = 0$$

$$\iff \langle f - \varphi - \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j, e_j \rangle = 0, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

$$\iff \textstyle\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j \rangle \lambda_j = \langle f - \varphi, e_i \rangle \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Ce système est de Cramer, car il existe une seule m.a.

Remarque 4.2.1 *Il est intéressant de prendre une base orthogonale.*

Prenons $H = c\,[0,1]$ muni de la norme quadratique :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Soit Y l'espace les trinômes tels que $p(1) = 0$, $X = \varphi + Y$, avec $\varphi = 1$ sur $[0,1]$. Par conséquent :

$$p \in Y \Longleftrightarrow p(x) = ax^2 + bx + c$$

et

$$a + b + c = 0$$

donc

$$p(x) = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$$

Comme base de Y on choisit

$$e_1(x) = x^2 - 1$$

$$e_2(x) = x - 1$$

et on cherche la meilleure approximation u de f dans $X = \varphi + Y$

$$u(x) = \varphi(x) + p(x) = 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1)$$

On a

$$\langle f - u, e_i\rangle = 0 \; i = 1,2 \implies \langle f, e_i\rangle = \langle u, e_i\rangle \; i = 1,2$$

ce qui donne le système (en a et b) :

$$\langle f, x-1\rangle = \langle 1 + a(x^2-1) + b(x-1), x-1\rangle$$

$$\langle f, x^2-1\rangle = \langle 1 + a(x^2-1) + b(x-1), x^2-1\rangle$$

4.3 Développements de Taylor

Un exemple très classique d'approximation polynomiale est donné par les polynômes de Taylor qui apparaissent dans le développement limité d'une fonction. Rappelons-les brièvement : en supposant - pour l'instant - f infiniment régulière, on a en intégrant par parties, pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f\prime(y)dy \\
&= f(0) - [(x-y)f\prime(y)]_0^x + \int_0^x (x-y)f"(y)dy \\
&= f(0) + xf\prime(0) + \int_0^x (x-y)f"(y)dy \\
&= f(0) + xf\prime(0) - \left[\frac{(x-y)^2}{2}f"(y)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-y)^2}{2}f^{(3)}(y)dy \\
&= f(0) + xf'(0)\frac{x^2}{2}f"(0) + \int_0^x \frac{(x-y)^2}{2}f^{(3)}(y)dy \\
&= (\cdots) \\
&= f(0) + x'f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(y)dy
\end{aligned}$$

On en déduit donc que le polynôme

$$T_n f(x) : \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

qu'on pourrait appeler "polynôme[2] de Taylor de f à l'ordre n", approche f avec une précision ponctuelle

$$|f(x) - T_n f(x)| =| \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y) dy \,|, \quad , x \in [0,1] \tag{4.1}$$

4.3.1 Estimations d'erreur pour des développements de Taylor

Ainsi, on obtient facilement l'estimation suivante en distance uniforme, pour une fonction $f \in C^{(n+1)}([0,1])$:

$$\| f - T_n f \|_{L^\infty([0,1])} \leq \sup_{x \in [0,1]} (\int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} dy) \| f^{(n+1)} \|_{L^\infty([0,1])}$$
$$\leq C(n) \| f^{(n+1)} \|_{L^\infty([0,1])}$$

avec $C(n) = \frac{1}{(n+1)!}$

Remarque 4.3.1 *On sera attentif au fait que l'erreur est bien plus faible près du point $x = 0$ (et, plus généralement, de l'origine du développement), dans la mesure où l'on a $\| f - T_n f \|_{L^\infty([0,r])} \leq \| f^{(n+1)} \|_{L^\infty([0,1])}$ pour tout $r > 0$.*

A partir de (3.1), il est également possible d'estimer l'erreur en moyenne quadratique pondérée. On peut en effet écrire, lorsque la dérivée $(n+1)$ -ème de f est de carré intégrable,

$$\| f - Tnf \|^2_{L^2_w([0,1])} = \int_0^1 \mid \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)dy \mid^2 w(x)dx$$

$$\leq \int_0^1 (\int_0^1 \mid \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y) \mid dy)^2 w(x)dx$$
$$\leq \int_0^1 (\| \frac{(x-y)^n}{n!} \|_{L^2([0,1])} \| f^{(n+1)} \|_{L^2([0,1]})^2 w(x)dx$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la dernière inégalité. Pour $x \in [0,1]$, un petit calcul nous donne

$$\int_0^1 \mid x-y \mid^k dy = \int_0^x (x-y)^k dy + \int_x^1 (y-x)^k dy$$
$$\frac{1}{k+1}(x^{k+1} + (1-x)^{k+1}) \leq \frac{1}{k+1}$$

on en déduit

$$\| \frac{(x-y)^2}{n!} \|^2_{L^2([0,1])} \leq \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 \mid x-y \mid^{2n} dy \leq \frac{1}{(2n+1)\,(n!)^2}$$

puis finalement

$$\| f - T_n f \|_{L^2_\omega([0,1])} \leq C_w(n) \| f^{(n+1)} \|_{L^2([0,1])}$$

avec

$$C_w(n) = \frac{1}{n!\sqrt{2n+1}} \| w \|^{\frac{1}{2}}_{L^1([0,1])}$$

Conclusion

En mathématiques, la théorie de l'approximation concerne la façon dont les fonctions peuvent être approchées par de plus simples fonctions, en donnant une caractérisation quantitative des erreurs introduites par ces approximations.

Dans ce mémoire on a étudié l'approximation dans les espaces métriques

Dans le premier chapitre on a introduit des définitions et des concepts élémentaires tels que (les distances ; les normes ; les boules et les suites et .....). Le deuxième chapitre est le principal dans ce travail qui est meilleur approximation dans un espace métrique ; on a présenté les principaux résultats concernant la meilleur approximation, on a commencé par définir formellement la meilleur approximation, on a défini l'approximation dans un espace préhilbertien ; existence d'une meilleure approximation ; unicité de la meilleure approximation, et on a donné les propriétés de chacun avec bien sûr des théorèmes, propositions et résultats liés à chacun, Dans le troisième chapitre on a présenté, deux applications ou deux techniques d'approximation polynomiale, à savoir méthode des moindres carrés, les développements de Taylor. On peut conclure de ce modeste travail l'intérêt de l'approximation et qu'il peut être utiliser pour le passage d'un problème très compliqué à un autre plus simple par exemple, étant donné une fonction f calculable, mais "compliquée", comment la remplacer par une fonction f plus "simple", tout en restant proche de f

Notations et symbols

$\mathbb{R}^N$	espace euclidien de dimension N.
$C([a,b])$	ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$.
$\parallel \cdot \parallel$	la norme associée aux produit saclaires.
$\parallel x \parallel$	la norme de x
$d\,(.,.)$	métrique
K^n	espace euclidien de dimension n.
$\langle \cdot \rangle$	produit scalaire.
L^p	l'espace des fonctions de puissance p-ème intégrable pour la mésure de Lebesgue dx.
$\rightarrow$	convergence.
B	boule.
(x_n)	écriture allégée de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$\bar{B}_x$	boule d'unité fermé.
H^1	le dual topologique de espace hilbert H.
$L^2([a,b])$	espace fonctionnelB.
$\bar{B}_x$	boule d'unité fermé.
$\int$	symbole d'intégration sur un intervalle.

Bibliographie

[1] BOURBAKI(N.).-Eléments de Mathématiques.Livre v Espace vectoriel topologique Chapitre v Espace hilbertiens.Hermann

[2] CHENEY(E.W.).-Itroduction to Approximaion Theory,International series in pure and applied mathematics.Mc Graw-Hill Company.

[3] C C Heyde et E Seneta, Statisticians of th [détail des éditions], 3e éd., p. 34.e Centuries, Springer, 2001 (ISBN 978-0-387-95329-8, lire en ligne (https ://books.google.fr/books ?id=6DD1FKq6fFoC&lpg=PA332&hl=fr&pg=PA331#v=on [archive]), p. 331

[4] DAVIS(P.J.).-Interpolation and approximation (1961) Ginn and Blaisdell.Publishing Campany.

[5] Eléments de topologie et espaces métriques, Abdelhaq El Jai.

[6] FONCTIONNELLE,H.Brezis Analyse.Théorie et applications. 1983.

[7] LORENTZ(G.G.).-Approximation of Function(1966) Rinehort and Winston.

[8] Maurice Fréchet, « Sur quelques points du calcul fonctionnel », Thèse, Paris. Rendiconti Circolo Mat. Palermo, vol. 22, 1906, p. 1-74 (lire en ligne (https ://www.lpsm.paris/pageperso/mazliak/Frechet_1906.pdf) [archive])

[9] PINTO,Martin Campos,Approximation Polynomiale des fonctions et intégrales,21décembre 2006.

[10] Stanislaw Szarek.(2017/2018). Analyse convexe (cours M1) Sorbonne Université.

[11] Jean Dieudonné, Éléments d'analyse, t. I : Fondements de l'analyse moderne

Résumé

D'une façon un peu générale, l'approximation polynomiale tente de répondre au problème suivant, à la base même du calcul scientifique : étant donné une fonction f calculable, mais "compliquée", comment la remplacer par une fonction f˜ plus "simple", tout en restant proche de f.

Mots-clés :

espace métrique, espace préhilbertien, espaces uniformément convexes, espaces de Banach, meilleur approximation

Abstract

In a somewhat general way, the polynomial approximation tries to answer the following problem, at the very basis of the scientific calculation: given a calculable function f, but "complicated", how to replace it with a function f more "simple", while remaining close to f.

Key words: metric space, prehilbertian space, uniformly convex spaces, Banach spaces, best approximation

الملخص

يحاول تقريب كثير الحدود الإجابة المشكلة التالية، على أساس الحساب العلمي ذاته: معطى أوظيفة قابلة للحساب، ولكنها" معقدة f" وكيفية

استبدالها بوظيفة "ابسط f بينما تظل قريبة من f

الكلمات المفتاحية : فضاء متري، فضاء ما قبل هلبرت، فراغات محدبة بشكل موحد، فراغات باناخ، أفضل تقدير.