République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Trai Amina

Titre :

Méthode de Concavité et Applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr	**BERBICHE Mohamed**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Chemcham Madani**	UMKB	Présidente
Dr.	**Hasouna Houda**	UMKB	Examinateur

Soutenu publiquement 27/06/2022

Dédicace

Ce travail est dédié à mon père décédé trop tôt, qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études.

A ma maman qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'études.

Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissaance.

À mes chèrs soeurs " Houda," "Linda, " "Samiha," "Souraya," et "Sara"

et leus enfants et leurs maris, et mes petites soeurs "djouhaina","malak"

À tous ma famille " trai"

À mes amies " sabrina " "fatoum "

À toute la promotion de 2022 de 2 ème master mathématique.

À tous ce qui m'ont aidé de pré ou loin pour la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie DIEU, le tout puissant, pour m'avoire santé accordé, courage et patience afin d'accomplir ce travail.

Notre vif remerciement à Dr. Berbiche Mohamed pour nous avoir encadré, encouragé et c'est grâce à sa grande disponibilité ses conseils et ses orientations que j'ai pu mener à bien ce travail.

Pour cela, je lui adresse un grand merci.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils porté à notre recherche, acceptant d'examiner notre travail afin de l'enrichir par leurs propositions.

Ces remerciements vont tout d'abord à tous les enseignants et membres de l'administration du département de mathématiques de l'université de "Biskra"

Table des matières

Introduction

Le but de ce memoire est de trouver des conditions suffisantes sur la non-existence de solutions globales à certaines classes d'équations d'évolution telles que les equations de la chaleur et les equations d'ondes non linéaires. De nombreuses études s'intéressent à la question de la non-existence de solutions globales aux problèmes initiaux et aux limites pour des EDP's non linéaires. Divers exemples d'équations paraboliques dont les solutions explosent en un temps fini sont donnés dans Keller 1957[5], Kaplan 1963[4], Glassey 1973[?], paraboliques du second ordre et hyperboliques du second ordre de la forme suivante sont considérées

$$U_t + Lu = f(u) \tag{1}$$

$$U_{tt} + Lu = f(u) \tag{2}$$

où L est un operateur du Laplacien ou un opérateur auto-adjoint uniformément elliptique. Dans ces travaux, des conditions suffisantes ont été fournies pour l'explosion des solutions aux problèmes aux limites et de valeurs initiales pour des équations de type (1) et (2). Leurs méthodes sont basées sur la positivité de la solution ou la positivité de la première valeur propre de l'opérateur elliptique L.

H. A. Levine est le premier qui a été créé une méthode célèbre connue sous le nom méthode de concavité qui est basée sur la construire d'une fonctionnelle concave définie positive (voir les articles Levine 1974a [9], Levine 1973 [8]). Cette méthode a été développée par plusieurs chercheurs (voir les articles de Kalantarov et Ladyzhenskaya [6], Straughan 1975 [13], Levine Payne 1974 [11]) pour trouver des conditions suffisantes assurent la nonexistence globale des solutions du problème de Cauchy pour les équations différentielles-à coefficients opérateurs de la forme

$$Pu_{tt} + Au = F(u) \tag{3}$$

$$Pu_t + Au = F(u) \tag{4}$$

Dans les équations (3),(4), P et A sont des opérateurs symétriques linéaires, avec P positif et A non-négatif. L'opérateur $F(u)$ est un opérateur potentiel non linéaire satisfaisant au condition :

$$(F(u), u) - bG(u) \geq 0$$

où b est un nombre positif supérieur à 2, $G(u)$ est la fonction dont le gradient est l'opérateur $F(u)$,et $(.,.)$ est le produit scalaire de l'espace de Hilbert H, sur lequel les équations sont considérées.

La méthode de concavité de Levine, a été utilisé par plusieurs chercheurs voir par exemple Knops et al. 1974 [7], Levine 1974c [8], Straughan 1975 [13], Levine Payne 1974 [8], où des théorèmes de non-existence globale sont prouvés pour les équations différentielles à coefficients opérateurs avec la partie principale non linéaire, pour des operateurs differentiels de second ordre avec term dissipative et pour divers equations et systèmes d'équations de la mécanique des milieux continus.

L'idée de la méthode de concavité est basée sur une construction d'une certaine fonctionnelle positive $\Psi(t) = \Psi(u(t))$, qui est défini en fonction de la solution locale du problème et en prouvant que la fonction $\Psi(t)$ vérifie l'inégalité (5) donnée dans le lemme suivant

Lemme 0.0.1 (voir Levine 1974 [9]) *On suppose qu'une fonction positive deux fois différentiable* $\psi(t)$ *telle que pour* $t > 0$

$$\psi"(t)\psi(t) - (1+\alpha)\left[\psi^{'}(t)\right]^2 \geq 0 \tag{5}$$

pour certain $\alpha > 0$. *Si* $\psi(0) > 0$, *et* $\psi'(0) > 0$, *alors il existe* $t_1 > 0$, *tel que* $\psi(t) \to +\infty$ *lorsque* $t \to t_1 \leq \frac{\psi(0)}{\alpha\psi'(0)}$.

Nous soulignons que ce resultat a été généraliser par plusieurs chercheurs. On va voir dans ce mémoire un resultat plus géneral que celui dans le Lemme 0.0.1 qui a été démontré par Kalantarov & Ladyzhanskaya [6].

Le présent mémoire contient trois principaux chapitres :

Dans le premier chapitre on présente quelques définitions et propriétés importantes de l'analyse fonctionnelle, les espaces L^p, différentiabilité, théorie des distributions, théorème de Lax-Milgram, et espaces de Sobolev.

Dans le deuxieme chapitre on présente une variante méthode de concavité qui a été introduite en 1978 par Kalantarov & Ladyzhanskaya [6]. Ensuite on va considérer l'equation des ondes abstraite non linéaire et on va voir que sous certaines conditions sur les données initiaux ainsi que sur les termes non linéaires la solution va exploser à un certain temps fini via cette méthode.

Dans le troisieme chapitre, on va voir à travers dex exemples simples, l'importance de l'etude de la méthode de concavité. On dérive des conditions suffisantes sur les données de ces problèmes pour garantir que l'explosion va se produire, et on dérive dans ces conditions une certaine borne supérieure de t^* .

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Définitions et premiéres propriétés

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (dans la suite $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1.1 *On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\|.\|$ telle que a).$\|x\| \geq 0, \forall x \in E$ et $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$;*

b).$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire),$\forall x, y \in E$;

c).$\alpha x = |\alpha| \, \|x\|$,(homogénéité),$\forall \alpha \in \Bbbk, \forall x \in E$.

Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple $(E, \|.\|)$. Il s'agit d'un cas particulier d'espace

métrique muni de la distance

$$d(x,y) = \|x-y\|, x, y \in E$$

La topologie sur E est la topologie d'espace métrique. On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$ converge fortement vers $x \in E$ si $\|x_n - x\| \to 0$, lorsque $n \to \infty$.

Définition 1.1.2 *Une suite* $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$ *dans un espace vectoriel normées* $(E, \|.\|)$ *dite de Cauchy si* $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

Définition 1.1.3 *Un e.v.n. est dit espace de Banach s'il est complet en tant qu'espace métrique, autrement dit, si chaque suite de Cauchy converge fortement vers un point* $x_\infty \in E$.

Définition 1.1.4 *Soit* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *une suite dans e.v.n.* E. *On note* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *une série dans* E *et* $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j, n \geq 1$, *la suite des sommes partielles. La série est dite convergente s'il existe* $s \in E$ *tel que* $s_n \to s$, *lorsque* $n \to \infty$ *et dans ce cas on écrit . La série est dite absolument convergente si* $\sum_{n\geq 1} \|x_n\| \leq \infty$.

Théorème 1.1.1 (caractérisation des espaces de Banach)*Soit* E *un e.v.n. Les affirmations suivantes sont équivalentes*

1. E *est un espace de Banach ;*

2. toute série absolument convergente est (fortement) convergente ;

3. pour toute suite$\{x_n\}_{n\geq 1}$ *vérifiant* $\|x_n\| \leq c^n$, *avec* $0 < c < 1$, *la série* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *est (fortement) convergente.*

Théorème 1.1.2 (résultat admis) (existence du compléte) *Soit* E *un e.v.n. qui n'est pas complet. Alors* E *est isomorphe et isométrique avec un sous espace vectoriel dense d'un espace de Banach* $\tilde{E}$. *Soit* E *un e.v.n. On dit que* E *est séparable s'il existe une suite* $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$ *qui est dense dans* E

1.1.2 Espace des opérateurs linéaires bornés

Soient E, F deux espaces vectoriels sur le méme corps $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.5 *Une application* $T : x \to y = Tx$ *; définie sur un sous-espace vectoriel* $D \subset E$ *et à valeurs dans* F *est dite linéaire si*

$$T(\alpha x + \beta x\prime) = \alpha Tx + \beta Tx\prime$$

On notera $D(T) = D$, $R(T) = \{y \in F : y = Tx, x \in D(T)\}$ *et* $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$ *et on les appelera domaine, image et noyau de* T*, respectivement.*

Définition 1.1.6 *On appelle* T *opérateur linéaire de* $D(T) \subset E$ *dans* F*. Si l'image* $R(T)$ *est contenue dans le corps* $\mathbb{K}$ *alors* T *est une fonctionnelle linéaire. Si* T *est injective de sur* $R(T)$*, alors* T *est bijective entre* $D(T)$ *et* $R(T)$ *et l'application inverse* T^{-1} *est un opérateur linéaire de* $R(T)$ *sur* $D(T)$*, on a* $T^{-1}Tx = x, x \in D(T)$*, et* $T^{-1}Ty = y, y \in R(T)$

Soit $T \in L(E; F)$ opérateur linéaire continu entre deux e.v.n. E et F. On définit $\|T\| = \inf\{c > 0, \|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in E\}$
D'aprés la proposition précédente il est facile de voir que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\},$$

$\|T\|$ s'appelle la norme de T.
Un opérateur linéaire continu de E dans F e.v.n. est un opérateur linéaire borné puisque $T(B_E)$ est un ensemble borné, avec $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité. Notons aussi que pour T continu

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|, \forall x \in E$$

L'ensemble des opérateurs linéaires bornés (continus) de E dans F sera noté $B(E; F)$. C'est un espace vectoriel avec les opérations $(T+S)x = Tx+Sx, x \in E$ et $(\alpha T)x = \alpha(Tx), x \in E$

Théorème 1.1.3 (espace des opérateurs bornés) *Soient* E *et* F *deux e.v.n.* $\|T\|$ *est une norme pour* $T \in B(E; F)$*. Si* F *est un espace de Banach, alors* $B(E; F)$ *est un espace de Banach.*

Un opérateur $T \in B(E; F)$ est un isomorphisme linéaire (ou plus court, isomorphisme) entre les e.v.n.E et F si T est une bijection et $T^{-1} \in B(F; E)$.

Définition 1.1.7 *Les espaces E et F isomorphes s'il existe $T \in B(E;F)$ un isomorphisme linéaire. Un tel isomorphisme transporte les suites de Cauchy dans des suites de Cauchy. En particulier, si E et F sont isomorphes et si E est de Banach, alors F est de Banach également.*

Définition 1.1.8 *Deux normes $\|.\|_1 et \|.\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalents si l'opérateur identité $Ix = x$ est isomorphisme entre $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$, c'est–dire, qu'il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que $c\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$, pour tout $x \in E$. L'opérateur $T \in B(E;F)$ est une isométrie linéaire si $\|Tx\|_F = \|x\|_E$, pour tout $x \in E$. Les espaces E et F isométriques s'il existe $T \in B(E;F)$ une isométrie linéaire.*

1.2 Théorèmes de Banach et conséquences

Définition 1.2.1 *Soit T un opérateur linéaire entre deux e.v.n. E et F. Le graphe de T est $G(T) = \{f(x, Tx) \in E \times F : x \in E\}$ en tant que sous-espace de l'espace produit $E \times F$ muni de la norme $\|.\|_E + \|.\|_F$. On dit que T est un opérateur fermé si $G(T)$ est un fermé dans $E \times F$ ou équivalent si lorsque $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$ on a $Tx = y$.*

Remarque 1.2.1 *Il est clair que si $T \in B(E;F)$ avec E, F e.v.n. alors T est un opérateur fermé.*

Théorème 1.2.1 ***(de Banach, principe du graphe fermé)*** *Soient $E; F$ deux espaces de Banach et $T \in L(E;F)$ un opérateur fermé. Alors T est un opérateur continu.*

1.2.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.2 *Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une fonction scalaire $(.,.)$ sur $E \times E$ telle que*

a) *$\forall y \in E$, l'application $x \to (x, y)$ est linéaire ;*

b) $\overline{(x,y)} = (y,x), \forall x,y \in E$;

c) $(x,x) \geq 0, \forall x \in E$ *et* $(x,x) = 0$ *ssi* $x = 0$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x,y \in E,\ |(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

L'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ définie par $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ est une norme sur E

Définition 1.2.3 *Un espace de Banach E est un espace de Hilbert s'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur $E \times E$ tel que la norme de l'espace de Banach satisfait $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.*

Un e.v.n. est un espace pre-hilbertien si sa norme satisfait l'égalité du parallélogramme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Théorème 1.2.2 (Fréchet, von Neumann, Jordan) *Soit E un e.v.n. pre-hilbertien réel. Alors*

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

est un produit scalaire sur E qui donne la méme norme sur E. En particulier, si E est un espace de Banach, il est un espace de Hilbert.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Théorème 1.2.3 (von Neumann, Jordan) *Soit E un e.v.n. pré-hilbertien complexe. Alors*

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2)$$

est un produit scalaire sur E qui donne la méme norme sur E. En particulier, si E est un espace de Banach, il est un espace de Hilbert.

1.3 Différentiabilité au sens de Gâteaux et de Fréchet

Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $f : X \to Y$ une fonction. En présentant d'abord la forme faible de différentiabilité.

Définition 1.3.1 *On dit que f est Gâteaux-différentiable au point $x \in X$ s'il existe $L \in B(X;Y)$ tell que*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = Lh, \text{ pour tout } h \in X$$

L'opérateur $L \in B(X;Y)$ est dit la dérivée de f au sens de Gâteaux au point $x \in X$ et on le note par $f'(x)$. On dit que f est Gâteaux-différentiable s'il est Gâteaux-différentiable en tout point $x \in X$.

Remarque 1.3.1 *La dérivée au sens de Gâteaux est une dérivée directionnelle et alors il est essentiallement dans un concept de unidimensionnel. Si on fixe $x, h \in X$ et on pose $\varphi(\lambda) = f(x+\lambda h)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on aurra*

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(\lambda + t) - \varphi(\lambda)}{t}$$

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \mid_{\lambda=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

posons $\varepsilon = th$ alors $t = \frac{\varepsilon}{h}$ et donc, si t tend vers 0 alors ε tend vers 0, et on a

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \mid_{\lambda=0} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\frac{\varepsilon}{h}} \\ &= h \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \\ &= hf^{'}(x) \end{aligned}$$

Remarque 1.3.2 *Si la dérivée de f au sens de Gâteaux existe au point $x \in X$ alors elle est unique*

Exemple 1.3.1 *(a) Si $A \in B(X;Y)$ alors $A'(x) = A$ pour tout $x \in X$.*
(b) Si $f = (f_k)_{k=1}^{m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ alors $f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (la matrice Jacobienne).

Nous allons montrer le théorème de valeurs moyenne pour les fonctions Gâteaux-différentiables.

Proposition 1.3.1 *Si $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentielle, et si $x, h \in X$ alors il existe $t \in]0;1[$ tel que*

$$f(x+h) - f(x) = f^{'}(x+th)h.$$

Exemple 1.3.2 *Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (cost; sint)$.*

Dans ce cas, le théorème de la valeur moyenne prend une forme d'inégalité. C'est-à-dire, nous avons le résultat suivant

Proposition 1.3.2 *Si $f : X \to Y$ une fonction Gâteaux-différentiable, $x, h \in X$ et si $y^* \in Y^*$ alors il existe $t \in]0;1[$ tell que*

$$\langle y^*, f(x+h) - f(x)\rangle_Y = \left\langle y^*, f^{'}(x+th)h \right\rangle_Y$$

et

$$\|f(x+h) - f(x)\|_Y \leq \|f'(x+th)\|_{\pounds} \|h\|_X .$$

Définition 1.3.2 *On dit que $f : X \to Y$ est Fréchet différentiable au point $x \in X$, s'il existe $L \in \pounds(X;Y)$ tel que*

$$f(x+h) - f(x) = Lh + R(x,h)$$

avec $\frac{\|R(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0$ quand $\|h\|_X \to 0$. L'opérateur $L \in B(X;Y)$ est dit la dérivée au sens de Fréchet de f au point $x \in X$, et on note par $f'(x)$. On dit que f est Fréchet différentiable s'il est Fréchet différentiable en tout points $x \in X$.

Remarque 1.3.3 *Si* $f : X \to Y$ *est une fonction Gâteaux-différentiable sur un ensemble ouvert* $U \subseteq X$, $x \in X$ *et la fonction* $u \to f'(u)$ *est continue au point* $x \in X$ *de* X *dans* $B(X;Y)$ *muni d'opérateur topologique normé, alors* f *est aussi Fréchet différentiable au point* $x \in X$ *et les deux dérivées coincident.*

Proposition 1.3.3 *Soit* $f : X \to Y$ *une fonction alors,*

1. Si f *est Fréchet différentiable au point* $x \in X$ *alors* f *est Gâteaux-différentiable au point* $x \in X$, *(la réciproque n'est pas vraie en générale)*

2. Si f *est Fréchet différentiable au point* $x \in X$ *alors* f *est continue au point* $x \in X$

Exemple 1.3.3 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^4y}{x^6+y^3} & sinon \end{cases}$$

Montrons que f *est Gâteaux-différentiable au point* $(0;0)$.

Soit $h = (v,w) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(v,w)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv,tw)}{t^4(t^3v^6+w^3)} = \lim_{t\to 0}\frac{tv^4w}{t^3v+w^3} = 0,$$

d'où f *est Gâteaux-différentiable au point* $(0,0)$.

Pour montrer que f *n'est pas Fréchet différentiable il suffit de montrer qu'il n'est pas continue au point* $(0,0)$, *On a*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y}{x^6+y^3},$$

posons $y = \lambda x^2$, *pour* y *tend vers* 0 *on a* x *tend vers* 0, *alors*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^6\lambda}{x^6(1+\lambda^3)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^3},$$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y)$..... *Alors* f *n'est pas continue au point* $(0,0)$, *donc il n'est pas Fréchet différentiable au point* $(0,0)$.

Proposition 1.3.4 *Si* X, Y *et* Z *espaces de Banach, et* $f : X \to Y$ *une fonction Gâteaux différentiable au point* $x \in X$, *et* $g : Y \to Z$ *Fréchet différentiable au point* $f(x)$, *alors* $\xi = g \circ f : X \to Z$ *est Gâteaux-différentiable au point* $x \in X$ *et* $\xi(x) = g\prime(f(x))f\prime(x)$. *De plus, si* f *est Fréchet différentiable au point* $x \in X$, *alors* ξ *est Fréchet différentiable au point* $x \in X$.

Définition 1.3.3 *On dit que* $f : X \to Y$ *est continûment Fréchet différentiable au point* $x \in X$ *si*

1. f *est Fréchet différentiable au point* $x \in X$.

2. $u \to f'(u)$ *est continue au point* $x \in X$ *de* X *dans* $B(X;Y)$ *muni d'opérateur topologique normé*

Proposition 1.3.5 *Si* $f : X_1 \times X_2 \to Y$ *est une fonction Fréchet différentiable au point* $x = (x_1, x_2) \in X$, *alors les deux fonctions partielles associées à* f *au point* x *sont Fréchet différentiables au point* $x_1 \in X_1$ *et* $x_2 \in X_2$ *respectivement, et nous avons*

$$f\prime(x)h = f'_{x_1}(x)h_1 + f'_{x_2}(x)h_2$$

pour tout $h = (h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$

Exemple 1.3.4 *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & si \ (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

alors $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(0,0) = 0$ *mais* f *n'est pas continue au point* $(0,0)$ *alors elle n'est pas Fréchet différentiable*

Proposition 1.3.6 *Si* $\{X_k\}_{k=1}^n, Y$ *sont des espaces de Banach et* $f : X = X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$, *alors* $f \in C_1(X, Y)$ *si et seulement si le, n-dérivée, partielles* $f'_{x_k}(x)$ *existe au chaque point* $x \in X$ *et* $x \to f'_{x_k}$ *continue de* X *dans* $B(X_k, Y)$ *muni d'opérateur topologique normé, pour tout* $1 \leq k \leq n$.

1.4 Théorie de Riesz

Lemme 1.4.1 ***(Lemme de Riesz)****Soit* E *un espace vectoriel normé, et soit* $M \subset E$ *un sous-espace fermé tel que* $M \neq E$. *Alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists u \in E \quad \text{tel que} \quad ||u|| = 1 \quad \text{et} \quad d\,(u - M) > 1 - \varepsilon.$$

Théorème 1.4.1 ***(Théorème de réprésentation de Riesz-Fréchet)****Soit* H *un espace de Hilbert. Alors pour tout* $\varphi \in H'$, *il existe* $f \in H$ *unique tel que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \qquad \forall v \in H.$$

De plus on a

$$|f| = ||\varphi||_{H'} .$$

1.4.1 Théorème de Lax-Milgram

Forme bilinéaire coercive

Soit H un espace de Hilbert réel (un espace préhillbertien suffit dans ces définition). (Il est bient sûr possible de traviller avec des $\mathbb{C}$-espace de Hilbert, il faut parfoit changer certaines définition : en particulier travailler avec des formes sesquilinéaires).

Définition 1.4.1 *Une forme bilinéaire* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *est*

1. *Continue s'il existe* $C \geq 0$ *tel que*

$$|a(u,v)| \leq C\,||u||\,||v||\,, \qquad \forall u, v \in H.$$

2. *Coercive s'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$a(u,u) \geq \alpha\,||u||^2\,, \quad \forall u \in H.$$

3. *Symétrique si* $a(u,v) = a(v,u)$ *pour tout* $u, v \in H$.

Théorème 1.4.2 *Soit* $a(u,v)$ *une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout* $\varphi \in H'$ *il existe* $u \in H$ *unique tel que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle \qquad \forall v \in H.$$

De plus si a *est symétrique, alors* u *est caractérisé par le propriété*

$$u \in H \quad \text{et} \qquad \frac{1}{2}a(u,u) - (\varphi, u) = \min_{v \in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - (\varphi, v)\right\}.$$

1.5 Espace de Sobolev

Notons par $x = (x_1; x_2; ....; x_n)$ le point générique d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$: Soit u une fonction définie de à valeurs dans $\mathbb{R}$; on désigne par $D^i u(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}u(x)$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i : Déffinissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit :

$$\nabla u := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u, \frac{\partial}{\partial x_2}u, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}u\right)$$

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x)$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$; $(C(\Omega))^m$ est l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $C_b(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\bar{\Omega}$; on le munit de la norme $\|.\|_\infty$;

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)|$$

Pour k entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω

$C_c^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$; dont le support est compact et contenu dans Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $D(\Omega)$; est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

1.6 Espaces L^p

Définition 1.6.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme*

$$\|u\|_1 := \int_\Omega |u(x)|\, dx.$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < +\infty$; on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Pour $p = \infty$, l'espace de Banach $L^\infty(\Omega)$ tel que

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \exists C > 0 \ t.q.\, |u(x)| \leq C \ p.p\}$$

est muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup ess(u) = \inf \{k > 0 : |u(x)| \leq k \ p.p\}.$$

Remarque 1.6.1 *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.6.2 *On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $\left(\int_K |u\,(x)|^p \,dx\right)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.*

1.7 L'espace$L^p(0, T; V)$

Définition 1.7.1 *Soit V un espace de Banach, on désigne par $L^p(0, T; V)$ l'espace des fonctions mesurables $u :]0; T[\to V$ tel que*

$$\|u\|_{Lp(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ pour \ 1 < p \leq \infty$$

et pour $p = \infty$ on a

$$\|u\|_{L\infty(0,T;V)} = \sup_{0 \leq p \leq T} ess \,\|u(x)\|_V < \infty$$

L'espace $Lp(0, T; V)$est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

Si V est de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_V$, $L_2(0, T; V)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V \,dt.$$

1.7.1 Dérivée faible

Définition 1.7.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$; et $1 \leq i \leq n$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)\,dx$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens des distributions ; on écrira $\frac{\partial}{\partial x_i}u(x) = f_i(x)$

1.7.2 Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 1$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega)\,; D^\alpha f \in L^p,\ \forall |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens de la Définition 2.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \|f\|_p + \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_p\,.$$

On pose $W^{m,2}(\Omega) := H^m(\Omega)$

Remarque 1.7.1 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(f,g)_{H^m(\Omega)} = (f,g)_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}\,,\ \ f,g \in H^m(\Omega)\,.$$

Formule de Green

Définition 1.7.3 *Soit u et v deux fonctions de $H^2(\Omega)$ (resp. $H^1(\Omega)$), on a*

$$\int_{\Omega} u\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

Lemme 1.7.1 (Injection de Sobolev) *Si Ω est borné, il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Chapitre 2

Nonexistence des solutions globales aux équations non linéaire

2.1 Equation d'onde abstraite

Soit D un sous-espace vectoriel dense d'un espace de Hilbert réel H avec le produit sclaire $(.,.)$ et la norme correspondante $\|.\|$.

On note par une fonction vectorielle u définie sur $[0,T]$ et d'un image D.

Supposons que P, Q et A sont des opérateurs linéaires symétriques définis sur D tels que les opérateurs A, Q sont non négatif et l'opérateur P est défini positif.

Soit $B(.,.)$ un opérateur non-linéaire défini sur $D \times D$ et $F(.,.)$ est un opérateur non linéaire défini sur $[0,T]\ \times D$, on suppose aussi que pour chaque t fixé l'opérateur $F(t,u)$ est la différentielle au sens de Frechet d'une certaine fonctionnelle non linéaires $G(u,t)$:

$$\frac{d}{d\tau}G(t,u(\tau)) = (F(t,u(\tau)), u_\tau(\tau)). \tag{2.1}$$

De plus $G(u,t)$ dépend régulièrement de t de sorte que pour $u(t) \in C^1(0,T;D)$ on a

$$\frac{d}{dt}G(t,u(t)) = (F(t,u(t)), u_t(t)) + G_t(t,u(t)) \tag{2.2}$$

Dans l'espace de Hilbert H, on considére le problème de Cauchy suivant :

$$Pu_{tt} + Qu_t + Au = B(u, u_t) + F(t, u) \tag{2.3}$$

$$u(0) = u_0, \;\; u_t(0) = u_1 \tag{2.4}$$

On suppose que $u(t)$ est une solution forte de (2.3)-(2.4) c'est-à-dire que tous les termes de (2.3) sont des éléments de $L^2(0, T; D)$ et $u_t(.) \in C(0, T; H)$.

Le résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 (voir [6]) *On suppose que les opérateurs P, A, Q et F vérifient toutes les conditions mentionnées ci-dessus et soit $u(t)$ une solution forte de l'équation (2.3). On suppose en plus que*

$$(F(t, u), u) \geq 2(1 + 2\alpha)G(t, u), \forall u \in D \tag{2.5}$$

pour certain $\alpha > 0$,

$$G_t(t, u) \geq M_1 G(t, u), \forall u \in D \tag{2.6}$$

pour certain $M_1 > 0$,

$$|(B(u, v), u)| \leq d_1(Au, u) + d_2(Pv, v) + M_2(Pu, u), \forall u, v \in D \tag{2.7}$$

pour certains $d_1 \in [0, 2\alpha]\,, d_2 \in [0, 2\alpha]\,,$ et $M_2 > 0$,

$$|(B(u, v), v)| \leq \frac{1}{2} M_1 \left[(Au, u) + (Pv, v)\right], \forall u, v \in D. \tag{2.8}$$

On suppose aussi que les donnés initiaux satisfasant aux conditions suivantes

$$(Pu_0, u_0) + (Qu_0, u_0) > 0,$$

$$2(Pu_1, u_0) + 2(Qu_1, u_0) > -\gamma_2\alpha_0^{-1}\left[(Pu_0, u_0) + (Qu_0, u_0)\right],$$

et

$$-\frac{1}{2}(Pu_1, u_1) - \frac{1}{2}(Au_0, u_0) + G(0, u(0)) \geq 0. \tag{2.9}$$

Alors

$$\lim_{t\mapsto t_1}(Pu(t), u(t)) + \int_0^t (Qu(s), u(s))ds = \infty,$$

pour certain t_1 vérifie

$$t_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{(1+\alpha_0)^2 + \alpha_0(2M_2+1+\alpha_0)}} \times \ln\frac{\gamma_1\left[(Pu_0, u_0) + (Qu_0, u_0)\right] + \alpha_0\left[(Pu_1, u_0) + (Qu_1, u_0)\right]}{\gamma_2\left[(Pu_0, u_0) + (Qu_0, u_0) + \alpha_0(Pu_1, u_0) + (Qu_1, u_0)\right]},$$

où

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{d_2}{2}, \gamma_1 = -(1+\alpha_0) + \sqrt{(1+\alpha_0)^2 + \alpha_0(2M_2+1+\alpha_0)},$$

$$\gamma_2 = -(1+\alpha_0) - \sqrt{(1+\alpha_0)^2 + \alpha_0(2M_2+1+\alpha_0)}$$

Preuve. On considére la fonction suivante

$$\psi(t) = 2(Pu(t), u(t)) + 2\int_0^t (Qu(s), u(s))ds + (Qu_0, u_0).$$

Il est clair que

$$\psi'(t) = 2(Pu(t), u(t)) + 2\int_0^t (Qu(s), u(s))ds + (Qu_0, u_0) \tag{2.10}$$

et

$$\psi''(t) = 2(Pu_{tt}(t) + Qu_t(t), u(t)) + 2(Pu_t(t), u_t(t))$$

En utilisant l'équation (2.3) on obtient de la dernière relation:

$$\psi''(t) = -2(Au + u) + 2(B(u, u_t), u) + 2(F(t; u), u) + 2(Pu_t, u_t)$$

En vertu de la condition 2.5 on a

$$\psi''(t) \geq -2(Au,u) + 2(Pu_t, u(t)) + 4(1+2\alpha)G(t,u) + 2(B(u,u_t),u)$$
$$= 4(1+2\alpha)\left[-\frac{1}{2}(Au,u) - \frac{1}{2}(Pu_t,u_t) + G(t,u)\right] + 4\alpha(Au,u),u)$$
$$+ 4(1+\alpha)(Pu_t,u_t) + 2(B(u,u_t),u). \tag{2.11}$$

De la définition de la fonction de l'énergie

$$E(t) = -\frac{1}{2}(Au,u) - \frac{1}{2}(Pu_t,u_t) + G(t,u)$$

et la condition (2.7) il vient de (2.11)

$$\psi''(t) \geq 4(1+2\alpha)E(t) + (4\alpha - 2d_1)(Au,u)$$
$$+ (4(1+\alpha) - 2d_2)(Pu_t,u_t) - 2M_2(Pu,u). \tag{2.12}$$

Comme $d_1 \leq 2\alpha$, l'inégalité (2.12) implique :

$$\psi''(t) \geq 4(1+2\alpha)E(t) + 4(1+2\alpha_0)(Pu_t,u_t) - 2M_2(Pu,u) \tag{2.13}$$

où $\alpha_0 = \alpha - \frac{d2}{2}$. En multipliant l'équation (2.3) par u_t on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(Pu_t,u_t) + \frac{1}{2}(Au,u) - G(t,u)\right) + (Qu_t,u_t) = (B(u,u_t),u_t) - G(t,u).$$

Ici on a utilisé (2.2. Alors grace a (2.6 on a

$$\frac{d}{dt}E(t) = (Qu_t,u_t) - (B(u,u_t),u_t) + G_t(t,u) \geq (Qu_t,u_t) - (B(u,u_t),u_t) + M_1G(t,u).$$

En utilisant la condition (2.8, on peut voir facilement de la dernière inégalité :

$$\frac{d}{dt}E(t) \geq (Qu_t, u_t) + M_1 E(t). \tag{2.14}$$

En intégrant l'inégalité(2.14 on trouve

$$E(t) \geq E(0)\exp(M_1 t) + \int_0^t (Qu(s), u(s))ds.$$

A partir de (2.8 il s'ensuit que $E(0)$ est non négative. Donc la dernière inégalité implique

$$E(t) \geq \int_0^t (Qu(s), u(s))ds. \tag{2.15}$$

Il résulte de 2.13 et 2.15 que :

$$\psi''(t) \geq 4(1+2\alpha)\int_0^t (Qu(s), u(s))ds + 4(1+\alpha_0)(Pu_t(t), u_t(t)) - 2M_2(Pu(t), u(t)). \tag{2.16}$$

Enfin en utilisant l'inégalité 2.16 et la relation 2.10 on obtient

$$\begin{aligned}
&\psi"\psi - (1+\alpha_0)\left[\psi'\right]^2 \geq \\
&\qquad 4(1+\alpha_0)\left\{\left[(Pu_t, u_t) + \int_0^t (Qu_s, u_s)ds\right]\left[(Pu, u) + \int_0^t (Qu, u)ds + (Qu_0, u_0)\right]\right.\\
&\qquad \left.-\left[(Pu_t, u) + \int_0^t (Qu_s, u)ds + \frac{1}{2}(Qu_0, u_0)\right]^2\right\} - 2M_2(Pu, u)\psi \\
&\qquad = 4(1+\alpha_0)\left\{\left[(Pu_t, u_t) + \int_0^t (Qu_s, u_s)ds\right].\left[(Pu, u) + \int_0^t (Qu, u)ds\right]\right.\\
&\qquad \left.-\left[(Pu_t, u) + \int_0^t (Qu_s, u)ds\right]^2\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4(1+\alpha_0)\left\{\left[(Pu_t,u_t)+\int_0^t (Qu_s,u_s)ds\right].\left[(Pu,u)+\int_0^t (Qu,u)ds\right]\right\}\\
&- 2M_2\psi^2+(Qu_0,u_0)\left[(Pu_t,u_t)+\int_0^t (Qu_s,u)ds\right]\\
&- 4(1+\alpha_0)(Qu_0,u_0)\left[(Pu_t(t),u(t))+\int_0^t (Qu_s(s),u(s))ds\right]-(1+\alpha_0)(Qu_0,u_0)^2 \quad (2.17)
\end{aligned}
$$

Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'expression :

$$
\left[(Pu,u)+\int_0^t (Qu,u)ds\right].\left[(Pu_t,u_t)+\int_0^t (Qu_s,u_s)ds\right]-\left[(Pu_t,u)+\int_0^t (Qu_s,u)ds\right]^2
$$

est non négatif. Par conséquent, l'inégalité 2.17 implique

$$
\begin{aligned}
&\psi"(t)\psi(t)-(1+\alpha_0)\left[\psi^{'}(t)\right]^2\\
&\geq -4(1+\alpha_0)(Qu_0,u_0)\left[(Pu_t(t),u(t))+\int_0^t (Qu_s(s),u(s))ds\right]-2M_2\left[\psi\right]^2-(1+\alpha_0)(Qu_0,u_0)^2\\
&\geq -2(1+\alpha_0)\psi(t)\psi^{'}(t)-(2M_2+1+\alpha_0)\left[\psi(t)\right]^2.
\end{aligned}
$$

Ainsi on a prouvé que la fonction $\psi(t)$ vérifie l'inégalité dans le Lemme ci-dessous avec $C_1 = 1+\alpha_0$ et $C_2 = 2M_2+1+\alpha_0$. ■

Donc la conclusion du théorème découle du lemme suivant car toutes les conditions de ce lemme sont satisfaites.

Lemme 2.1.1 (voir Kalantarov, Ladyzhenskaya 1977 [6]) *On suppose qu'une fonction positive deux fois différentiable $\psi(t)$ telle que pour $t > 0$*

$$
\psi"(t)\psi(t)-(1+\alpha)\left[\psi^{'}(t)\right]^2 \geq -2C_1\psi^{'}(t)\psi(t)-C_1\left[\psi(t)\right]^2 \qquad (2.18)
$$

où $\alpha > 0, C_1, C_2 \geq 0$. Si $\psi(0) > 0, \psi'(0) > -\gamma_2\alpha^{-1}\psi(0)$, et $C_1+C_2 > 0$, alors $\psi(t) \to +\infty$ lorsque $t \to t_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{C_1^2+\alpha C_2}} \ln \frac{\gamma_1\psi(0)+\alpha\psi'(0)}{\gamma_2\psi(0)+\alpha\psi'(0)}$, où $\gamma_1 = -C_1+\sqrt{C_1^2+\alpha C_2}, \gamma_2 = -C_1-\sqrt{C_1^2+\alpha C_2}$.

Maintenant on suppose que $B(u,v) = B_1 u + B_2 v$, où B_1 et B_2 sont des opérateurs linéaires. Dans ce cas suivant Kalantarov-Ladyzhenskaya 1977[6], sous certains restrictions sur les opérateurs $B_{i,}\ i = 1,2$. On peut montrer que la condition 2.6, peut être remplacé par condition plus faible :

$$G_t(t,u) \geq 0 \tag{2.19}$$

Soit $u(t)$ une solution de l'équation 2.3, alors la fonction $v(t) = u(t)e^{-mt}$ satisfait l'équation :

$$Pv_{tt} + \hat{Q}v_t + \hat{A}v = \hat{B}(v,v_t) + \hat{F}(t,v) \tag{2.20}$$

où

$$\hat{Q} = 2mP + Q, \hat{A} = m^2P + mQ + A, \hat{B}(v,v_t) = (B_1 + mB_2)v + B_2 v_t$$

et

$$\hat{F}(t,v) = e^{-2mt}G_t(t, e^{mt}v).$$

Il est clair que l'inégalité 2.5 reste valide pour l'opérateur $\hat{F}(t,v)$ et son potentiel $\hat{G}(t,v) = e^{-2mt}G(t, e^{mt}v)$, et

$$\hat{G}_t(t,v) = e^{-2mt}G_t(t, e^{mt}v) - 2m\hat{G}(t,v) + m(\hat{F}(t,v), v).$$

En vertu du condition 2.5 il résulte de la dernière égalité que si G vérifie 2.19 alors :

$$\hat{G}_t(t,v) \geq 4\alpha m \hat{G}(t,v).$$

En prenant $m = \frac{M_1}{4\alpha}$, la condition 2.6 est satisfaite.

On suppose maintenant que les opérateurs B_1 et B_2 sont linéaires symétriques ou asymétriques qui satisfont les inégalités :

$$|(B_i u, v)| \leq b_i(Au, u) + c_i(Pv, v) + D_i(Pu, u), i = 1, 2., \forall u, v \in D, \tag{2.21}$$

et

$$|(B_2 u, u)| \leq D_3(Pu, u), \forall u \in D, \tag{2.22}$$

où $b_i, c_i, i = 1, 2$ and $D_i, i = 1, 2, 3$, sont des nombres non négatifs. Utilisation des conditions (2.21),(2.22) on peut facilement montrer que

$$\left|((\hat{B}u, v), u)\right| \leq (b_1 + b_2)(Au, u) + c_2(Pv, v) + (c_1 + D_1 + D_2 + mD_3)(Pu, u),$$

$$\left|((\hat{B}u, v), u)\right| \leq (b_1 + mb_2)(Au, u) + (c_1 + mc_2 + D_3)(Pv, v) + (D_1 + mD_2)(Pu, u).$$

Enfin, il est facile de voir que,si

i) $b_1 + b_2 \leq 2\alpha, c_2 < 2\alpha,$

ii) $b_1 + \frac{M_1}{4\alpha} b_2 \leq \frac{1}{2} M_1, c_{1+} \frac{M_1}{4\alpha} c_2 + D_3 \leq \frac{1}{2} M_1,$

iii) $D_1 + \frac{M_1}{4\alpha} D_2 \leq \frac{M_1^3}{32\alpha^2}.$

Alors l'opérateur $\hat{B}(u, v)$ satisfait les conditions

$$\left|((\hat{B}u, v), u)\right| \leq d_1(\hat{A}u, u) + d_2(Pv, v) + M_2(Pu, u), \tag{2.23}$$

$$\left|((\hat{B}u, v), u)\right| \leq \frac{1}{2} M_1 \left[(\hat{A}u, u) + (Pv, v)\right], \tag{2.24}$$

avec $d_1 = b_1 + b_2, d_2 = c_2, M_2 = c_1 + D_1 + D_2 + mD_3$

Ainsi, on peut appliquer le Théorème 1 et voir qu'il est vrai

Théorème 2.1.2 ***(voir** [3])* *Soit $v(t)$ une solution forte de l'équation (2.20), satisfaisant les conditions initiales $v(0) = v_0, v_t(0) = v_1$, et on suppose que :*

1) Les opérateurs $B_i, i = 1, 2$, vérifient (2.21), (2.22), les paramètres $b_i, c_i, i = 1, 2$ et $D_i, i = 1, 2, 3$, satisfont i)-iii),

2) $(Pv_0, v_0) + (\hat{Q}v_0, v_0) > 0$

$$2(Pv_1, v_0) + 2(\hat{Q}v_0, v_0) > -\gamma_2\alpha_0^{-1}\left[(Pv_0, v_0) + (\hat{Q}v_0, v_0)\right],$$
$$-\frac{1}{2}(Pv_1, v_1) + \hat{G}(0, v_0) \geq 0.$$

Alors

$$\lim_{t\to t_0}(Pv(t), v(t)) + \int_0^t (\hat{Q}v(s), v(s))ds = \infty,$$

pour certains

$$t_0 \leq \frac{1}{2\sqrt{(1+\alpha_0)^2 + \alpha_0(2M_2 + 1 + \alpha_0)}} \ln \frac{\gamma_1\hat{\psi}(0) + \alpha_0\hat{\psi}'(0)}{\gamma_2\hat{\psi}(0) + \alpha_0\hat{\psi}'(0)},$$

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{c_2}{2}, \gamma_1 = -(1+\alpha_0) + \sqrt{(1+\alpha_0)^2 + \alpha_0(2M_2 + 1 + \alpha_0)},$$
$$\gamma_2 = -(1+\alpha_0) - \sqrt{(1+\alpha_0)^2 + \alpha_0(2M_2 + 1 + \alpha_0)}$$

et

$$\hat{\psi}(t) = (Pv(t), v(t)) + \int_0^t (\hat{Q}v(s), v(s))ds + (\hat{Q}v_0, v_0).$$

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, on va voir à travers des exemples simples, que l'étude de l'explosion en temps fini à certains problèmes aux limites se ramène à celle d'une équation abstraite. Notamment, on considère problème aux limites non-linéaires de l'equation des ondes amorties, on donne des conditions suffisantes sur les données garantissant la non-existence de solutions globales aux problèmes correspondants

3.0.1 Equation hyperbolique semi-linéaire du second ordre

On suppose que $u(x,t)$ est une solution du problème aux limites de valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + r_1 u + r_2 u_t = |u|^p u, x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0, \end{cases}$$

où $p > 0$ et r_1, r_2 sont des constantes arbitraires.

Ce problème est un cas particulier du problème (2.3),(2.4), avec

$$H = L_2(0,1), \ D = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \ P = I, \ A = -\frac{d^2}{dx^2}, \ B(u, u_t) = B_1 u + B_2 u_t,$$

où $B_1 = r_1 I$, $B_2 = r_2 I$, et $F(u) = |u|^p u$ est le gradient du fonctionnelle $G(u) = \frac{1}{p+2}\int_0^1 |u|^{p+2} dx$.

Donc la condition (2.5) est satisfait avec $\alpha = \frac{p}{4}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwarz, on a

$$|(B_i u, v)| = |r_i| \, |(u, v)| \leq |r_i| \, (\int_0^1 u^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 v^2 dx)^{\frac{1}{2}},$$

$$|r_i| \, (Pu, u)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{p}{4}(Pv, v) + \frac{r_i^2}{p}(Pu, u).$$

Ainsi les conditions (2.21),2.22) satisfaites avec $c_1 = c_2 = \frac{p}{4}$, $b_1 = b_2 = 0$, $D_i = \frac{r_i}{p}, i = 1, 2,$ et $D_3 = |r_2|$.

Il est facile de voir que la condition i) est satisfaite et les conditions ii),iii) sont satisfaites avec $M_1 \geq \max\{p + 4|r_2|, z_0\}$, où z_0 est une racine positive de l'équation $z^3 - 2p|r_1| = 0$. Donc en utilisant le Théorème 2 on peut trouver des conditions suffisantes de non-existence globale

3.0.2 Equations de thermoélasticité hyperbolique :

On considére le problème aux limites de valeur initiales pour les équations de thermoétasticité non linéaire suivant

$$w_{tt} - w_{xx} + k\theta_{xt} = f_1(w, \theta), x \in (0, 1), t > 0, \tag{3.1}$$

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} + kw_{xt} = f_2(x, \theta), x \in (0, 1), t > 0, \tag{3.2}$$

Satisfaisant aux conditions initiales et aux limites suivantes :

$$w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \tag{3.3}$$

$$w(0, t) = w(1, t) = 0, \theta(0, t) = 0, t > 0, \tag{3.4}$$

où k est un paramètre donné $w(x,t)$ et $\theta(x,t)$ sont des fonctions inconnues. Les composantes de la fonction vectorielle $f(p,y)=\begin{pmatrix} f_1(p,y) \\ f_2(p,y) \end{pmatrix}$ sont donnés suffisamment fonctions régulieres définies sur $\mathbb{R}^2$ et il existe la fonction différentiable $G(p,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$, tel que pour des fonctions différentiables arbitraires $p(t),y(t)$ l'égalité suivante vaut :

$$\frac{d}{dt}G(p(t),y(t)) = f_1(p,y)p'(t)+f_2(p,y)y'(t).$$

De plus on suppose qu'il existe un nombre positif l tel que

$$f_1(p,y)p+f_2(p,y),y \geq (2+l)G(p,y),$$

Pour chaque $\{p,y\}\in\mathbb{R}^2$.

Le problème (3.1),(3.4) peut s'écrire sous la forme (2.3),(2.4) où $u=\begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix}$ est la fonction vectorielle inconnue,

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

est un opérateur symétrique défini positif agissant dans $H=L_2(0,1)\times L_2(0,1)\equiv[L_2(0,1)]^2$

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix}$$

est un opérateur défini positif symétrique de $D=\left[H^2(0;1)\cap H_0^1(0,1)\right]^2$ dans $\left[L_2(0,1)\right]^2$. L'opérateur $B_2=0$. L'opérateur

$$B_2\begin{pmatrix} 0 & k\frac{d}{dx} \\ k\frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}$$

est symétrique, et pour chaque $u = \begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} z \\ \sigma \end{pmatrix}$ à partir de D on a

$$\begin{aligned}(B_2u, u) &= k\int_0^1 \left[-\theta_x(x,t)w(x,t) + w_x(x,t)\theta(x,t)\right]dx \\ &= k\int_0^1 \left[\theta_x(x,t)w_x(x,t) + w_x(x,t)\theta(x,t)\right]dx = 0,\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}|(B_2u, v)| &= \left|k\int_0^1 \left[\theta_x(x,t)z(x,t) + w_x(x,t)\sigma(x,t)\right]dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[w_x^2(x,t) + \theta_x^2(x,t)\right]dx + \frac{k^2}{2l}\int_0^1 \left[z^2(x,t) + \sigma^2(x,t)\right]dx \\ &= \frac{l}{2}(Au, u) + \frac{k^2}{2l}(pv, v)\end{aligned}$$

pas difficile de voir que l'opérateur

$$F(u) = \begin{pmatrix} f_1(w,\theta) \\ f_2(w,\theta) \end{pmatrix}$$

satisfait la condition (5) avec $\alpha = \frac{1}{4}$.il est clair que si $|k| < l$,alors le théorème 2 est applicable

3.0.3 Equation pseudo-hyperbolique non linéaire

Soit $u(x,t)$ la solution du problème suivant :

$$-\Delta u_{tt} - \Delta u + \sum b_i u_{tx_i} + c(u, u_t) = e^{2t}u^5, x \in \Omega, t > 0, \tag{3.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega; u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, \tag{3.7}$$

où $b_i, i = 1....,n$, sont des constantes arbitraires et $c(.,.) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition :

$$|c(s,v)| \leq C_1 |s| + C_2 |v|, \forall s, v \in R^1,$$

avec C_1 et C_2 sont des nombres non négatifs vérifiés l'inégalité $C_1 + C_2 \leq \lambda_1$, et λ_1 la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition aux limites de Dirichlet homogène.

Le problème (3.6),(3.7), écrit sous la forme (2.3),(2.4), avec $P = -\Delta$:

$$D \to L_2(\Omega) \equiv H,\ Q = P,\ B(u,u_t) = \sum b_i u_{tx_i} + +c(u,u_t),\ F(t,u) = e^{2t}u^5.$$

Dans ce cas, le potentiel de $F(t,u)$ est

$$G(t,u) = \frac{1}{6}e^{2t}\int_\Omega u^6 dx.$$

Alors la condition (2.5) tenir avec $\alpha = 1$,et (2.6) tenir avec $M_1 = 2$. Grâce à l'inégalité de friedrichs on obtient

$$\begin{aligned}
|(B(u,v),u)| &= \left|\int_\Omega (\sum b_i v_x u + c(u,v)u)dx\right| \\
&\leq \frac{b}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}} \|\nabla u\| \|\nabla v\| + C_1 \|u\|^2 + C_2 \|(u,v)\| \\
&\leq \frac{d_2}{2}\|\nabla v\|^2 + C_1\lambda_1^{-1}\|\nabla u\|^2 + \frac{d_2}{2}\|\nabla v\|^2 + \frac{C_2^2}{2d_2\lambda_1^2}\|\nabla u\|^2 \\
&= d_2(Pv,v) + M_2(Pu,u)
\end{aligned}$$

où $d_2 < 2$ un nombre positif, $b = \sqrt{\sum b_i^2}$, $M_2 = \frac{b^2\lambda_1 + 2C_1 d_2 + C_2^2}{2d_2\lambda_1^1}$. Il est clair que :

$$\begin{aligned}
|(B(u,v),u)| &= \left| \int_\Omega (c(u,v)v)dx \right| \\
&\leq C_1 \int_\Omega |u|\,|v|\,dx + C_2 \int_\Omega |v|^2\,dx \\
&\leq \frac{C_1}{2}\lambda_1^{-1}\,\|\nabla u\|^2 + (\frac{C_1}{2} + C_2)\lambda_1^{-1}\,\|\nabla v\|^2 \\
&\leq (C_1 + C_2)\lambda_1^{-1}\left[(Pv,v) + (Au,u)\right].
\end{aligned}$$

Ainsi les conditions (2.7),(2.8) sont également satisfaites et on peut appliquer le théorème 1

Conclusion

La méthode de concavité est une argumentation qui nous permet de démontrer l'absence des solutions globales pour une grande classe d'équations d'evolution non linéaires, telles que les équations paraboliques et hyperboliques. Cette méthode basé sur une construction d'une fonctionnelle définie positive, qui vérifie certaine inégalité différentielle du second ordre non linéaire. En particulier on a considèré un problème d'évolution du second ordre non-linéaires dissipatif avec conditions au bord, on a présenté des conditions suffisantes assurant l'existence de l'explosion en temps, avec l'estimation du temps d'explosion.

Bibliographie

[1] Haïm Brezis, (1983) Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications.

[2] Fujita, Hiroshi. "On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$." Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1, Mathematics, astronomy, physics, chemistry 13.2 (1966) : 109-124.

[3] Kalantarov, Varga. "Nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations." Turbulence Modeling and Vortex Dynamics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997. 169-181.

[4] Kaplan, Stanley. "On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations." Communications on Pure and Applied Mathematics 16.3 (1963) : 305-330.

[5] Keller J.B., On solutions of nonlinear wave equations, Comm.Pure Appl.Math.,10, 523-530, 1957.

[6] Kalantarov, Varga K., and Olga A. Ladyzhenskaya. "The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types." Journal of Soviet Mathematics 10.1 (1978) : 53-70.

[7] Knops, R. J., H. A. Levine, and L. E. Payne. "Non-existence, instability, and growth theorems for solutions of a class of abstract nonlinear equations with applications to nonlinear elastodynamics." Archive for Rational Mechanics and Analysis 55.1 (1974) : 52-72.

[8] Levine, Howard A. "Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$." Transactions of the American mathematical society 192 (1974) : 1-21.

[9] Levine, Howard A. "Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$." Archive for Rational Mechanics and Analysis 51.5 (1973) : 371-386.

[10] Levine, Howard A. "Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations." SIAM Journal on Mathematical Analysis 5.1 (1974) : 138-146.

[11] Levine, Howard A., and Lawrence E. Payne. "Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time." Journal of Differential Equations 16.2 (1974) : 319-334.

[12] Ladyženskaja, O. A., Solonnikov, V. A., & Ural'ceva, N. N. (1988). Linear and quasilinear equations of parabolic type (Vol. 23). American Mathematical Soc..

[13] Straughan, Brian. "Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations." Proceedings of the American Mathematical Society 48.2 (1975) : 381-390.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$C([a,b])$	ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$
$\mathcal{L}(X,Y)$	ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y
$L^2([a,b])$	espace des classes de fonctions carré intégrable
$H_0^1(\Omega)$	espace de Sobolev
$L^\infty(\Omega)$	$\{u$ mesurable sur Ω et il existe C tel que $\lvert u(x)\rvert \leq C$ p.p sur $\Omega\}$
$L^2(\mathbb{R}^N)$	$\left\{u \text{ mesurable sur } \mathbb{R}^N \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} \lvert u\rvert^2 dx < \infty\right\}$
H'	dual topologique de espace hibert H

Résumé

Conditions suffisantes pour la non-existence de solutions globale au problème de Cauchy abstrait de second ordre sont présentées en utilisant la méthode de concavité. En particulier une application de cette méthode aux certains problèmes aux limites de second ordre non linéaires est donné.

Mots-clés : *Méthode de Concavité, Equation d'onde abstraite, Equation hyperbolique, Equations de thermo élasticité, Equation pseudo-hyperbolique*

Abstract

Sufficient conditions for the nonexistence of global solutions to the second-order abstract Cauchy problem are presented using the concavity method. In particular an application of this method to certain problems at non-linear second-order limits is given.

Key word: *Concavity Method, abstract wave equation, hyperbolic equation, Thermo elasticity equations, Pseudo hyperbolic equation*

الملخص

تقديم شروط كافية لعدم وجود حلول شاملة لمشكلة كوشي المجردة من الدرجة الثانية باستخدام طريقة التقعر . وعلى وجه الخصوص،تم إعطاء تطبيق لهذه الطريقة على بعض المشاكل عند حدود الرتبة الثانية غير الخطية.

الكلمات المفتاحية: *طريقة التقعر, معادلة الموجة المجردة , المعادلة القطعية, معادلات المرونة الحرارية, المعادلة الزائفة الزائدية*