République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Probabilité**

Par

Bennara Amani

Titre :

Sur les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour EDS-EDSR avec saut

Devant le Jury :

Dr.	TABET Moufida,	U. Biskra	**Encadreur**
Dr.	LABED Boubakeur	U. Biskra	**Président**
Pr.	GHERBEL Boulakhras	U. Biskra	**Examinateur**

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, je n'arriverais jamais exprimer mon amour sincère.

A l'homme qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon chèr père.

A la femme qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation et de ses dévouements : mon adorable mère.

A mes chères soeurs qui n'ont pas cessés de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

A tous ceux que j'aime.

Amani.Bennara.

Remerciements

On remercie **Allah** le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je tiens à remercier tout d'abord l'encadrante **Dr.** *Tabet Moufida*, pour sa patience, sa confiance, ses remarques et ses conseils durant tout ce travail.

Je voudrais également remercier les membres du jury : **Dr.***Labed Boubakeur* et **Pr.***Gherbel Boulakhras* pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques.

Mes remerciements sont également adressés à tous personne qui, de loin ou de près, on contribué à la réalisation de ce mémoire.

Merci a vous tous.

Table des matières

Introduction

$\mathcal{L}$e problème de contrôle optimal stochastique est très important dans la théorie du contrôle, et d'un point de vue mathématique, on constate deux approches dans la résolution du ce problème : la première est connue par "La programation dynamique", et la deuxième méthode est "Le principe du maximum de Pontryagin", connue sous le nom "Conditions nécessaires d'optimalité". Dans ce mémoire, on s'intéresse au deuxième méthode qui s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe qui minimise la fonction de coût sur un ensemble des contrôles admissibles, alors quelle sont les conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par ce contrôle ?

Par conséquent, notre objectif dans cette mémoire est d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans le cas où le domaine du contrôle est convex pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques progressives-rétrogrades avec saut donné par la formule suivante :

$$\begin{cases} dx(t) & = & f(t,x(t),u(t))dt+\sigma(t,x(t),u(t))dW(t) \\ & & +\int_{\Theta} c(t,x(t-),u(t),\theta)N\left(d\theta,dt\right), \\ -dy(t) & = & \int_{\Theta} g(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\theta),u(t))\mu\left(d\theta\right)dt \\ & & -z(t)dW(t)-\int_{\Theta} r(t,\theta)N\left(d\theta,dt\right), \\ x(0) & = & x_0, y(T)=h(x(T)), \end{cases}$$

telle que :

- f,σ,c,g,h sont des fonctions déterministes.
- W est un mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P})$ et N est une mesure aléatoire de Poisson.
- Le drift, la diffusion et la partie de saut sont des coefficients dépendent par le contrôle.

Le coût associé à ce problème est donné par :

$$J(u(\cdot)) \doteq E\left[\int_0^T\int_{\Theta} l(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\theta),u(t))\mu\left(d\theta\right)dt+\phi(x(T))+\varphi(y(0))\right].$$

Ce mémoire est organisé comme suit :

► Le premier chapitre est sous le titre "Généralité sur le calcul stochastique" : présente les différents outils nécessaires pour comprendre le concept de principe du maximum stochastique.

- ▶ Le deuxième chapitre est sous le titre "Principe du maximum stochastique pour EDS-EDSR avec saut" qui est détaillé comme suit : La première section, nous cosidérons quelques hypothèses pour arriver à notre objectif. La deuxième section, nous obtenons les conditions nécessaire d'optimalité pour le système ci-dessus. La troisième section ; sous des conditions supplimentaires, nous prouvons les conditions suffisantes d'optimalité. La dernière section, nous appliquons les résultats du chapitre précèdent à la finance. Ce résultat a étudié par Shi et Wu [10].

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

*D*ans ce chapitre, nous allons présenter les concepts de base de la théorie du calcule stochastique qui permetent de mieux comprendre notre problème, tout d'abord nous avons donnée quelques définitions (processus stochastique, mouvement Brownien, intégrale stochastique, processus d'Itô,...etc), puis on donne un rappelle sur le processus de Poisson et enfin quelques résultats importants.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *(**Un processus stochastique**) : Soit* $\mathbb{T}$ *un ensemble* $(\mathbb{T} = [0, T]\,,\ ou\ \mathbb{T} = \mathbb{R}_+)$ *. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *indexé par* $\mathbb{T}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *une famille* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(E,\ \varepsilon)$ *:*

$$\begin{array}{rcccl} X_t & : & (\Omega,\ \mathcal{F}) & \longrightarrow & (E,\ \varepsilon)\,, \\ & & (\omega, t) & \longmapsto & X_t(\omega). \end{array}$$

Géneralment $(E,\ \varepsilon) = (\mathbb{R}^d,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

Remarque 1.1.1

- Si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$ le processus est à temps discret, $\mathbb{T} = [0, T]$ tel que $T > 0$ le processus est à temps continu.
- Pour t fixé, $\omega \in \Omega \longrightarrow X_t\,(\omega)$ est une variable aléatoire.
- Pour ω fixé, $t \in \mathbb{T} \longrightarrow X_t(\omega)$ est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.2 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est càdlàg (respectivement càglàd) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limite à gauche (respectivement, continues à gauche et pourvues de limite à droite)*

Définition 1.1.3 *On dit que :*

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est mesurable si, l'application* $(t, \omega) \mapsto X_t\,(\omega)$ *de* $\mathbb{R} \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*.*

1.2 Filtration

Définition 1.2.1 *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$*est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *telle que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ *pour tout* $t \leq s$.

Remarque 1.2.1 *La filtration naturele (ou canoniquze) de processus* X_t *est donnée par :*

$$\mathcal{F}_t^X \quad = \quad \sigma(X_s;\ 0 \leq s \leq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.2.2 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit adapté par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pour tout* t, *la variable aléatoire* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mésurable.*

Remarque 1.2.2 *Tout processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est adapté par rapport à sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.2.3 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit* $\mathcal{F}_t$ *-prévisible si* X_0*est* $\mathcal{F}_0-$*mésurable et* X_t *est* $\mathcal{F}_{n-1}-$*mésurable pour tout* $t \geq 0$.

Définition 1.2.4 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est progressivement mésurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$
si : $\forall t \geq 0,$ *l'application*

$$\begin{array}{ccc} [0,\ t] \times \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ (s,\ \omega) & \mapsto & X_s(\omega), \end{array}$$

est mésurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Proposition 1.2.1 *Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors* X *est mesurable et* X *est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

1.3 Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.3.1 *Un processus X à valeurs réelles est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$martingale si :*

i) pour tout $t \geq 0,\ X_t$ est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$adapté ($\mathcal{F}_t-$mesurable) ;

ii) pour tout $t \geq 0,\ X_t$ est intégrable i.e. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$;

iii) pour tout $0 \leq s \leq t, \mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$.

Remarque 1.3.1 *Si X est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$martingale alors nécessairment est une $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}_{t\geq 0}-$martingale.*

Définition 1.3.2 *Uu processuce X à valeurs réelles est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sur-martingale (respectivement $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sous-martingale) si :*

i) pour tout $t \geq 0,\ X$ est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$adapté ($\mathcal{F}_t-$mesurable) ;

ii) pour tout $t \geq 0,\ X_t$ est integrable, i.e. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$;

iii) pour tout $0 \leq s \leq t,\ \mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s$ (respectivement $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s$).

Proposition 1.3.1 ***(Décomposition de Doob)**: Soit (X_t) un processus aléatoire intégrable. Alors il existe une martingale (M_t) et un processus $\mathcal{F}$-prévisible (V_t), tels que : $M_0 = V_0 = 0$, et*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

De plus, cette décomposition est unique.

1.4 Mouvement Brownien

On se donne un processus $(W_t,\, t \geq 0)$ sur un espace $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$.

Définition 1.4.1 ***(Mouvement Brownien)***: *Le processus $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien si*:

1. $\mathbb{P} - p.s.$ $t \mapsto W_t(\omega)$ *est continue ;*
2. *pour* $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ *est indépendant de la tribu* $\sigma\{W_u,\ u \leq s\}$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $t - s$;
3. $W_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$

Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ *en référence à* ***Wiener*** *ou* $(B_t, t \geq 0)$ *en référence à* ***Brown****.*

Proposition 1.4.1 *Si* $(W_t)_{t \geq 0}$ *est un mouvement Brownien, alors :*

- *Le processus* $\check{W}$ *défini par* $\hat{W}_t = W_{t+s} - W_s$ *est un mouvement Brownien.*
- *Le processus* $\hat{W}$ *défini par* $\hat{W}_t = -W_t$ *est un mouvement Brownien.*
- *Le processus* $\tilde{W}$ *défini par* $\tilde{W}_t = \frac{1}{c} W_{\frac{t}{c^2}}$ *est un mouvement Brownien.*
- *Le processus* $\bar{W}$ *défini par* $\bar{W}_t = tW_{\frac{1}{t}}$, $\forall t > 0$, $\bar{W}_0 = 0$ *est un mouvement Brownien.*

1.5 Calcul d'Itô

1.5.1 Processus d'Itô

Définition 1.5.1 ***(Procesus d'Itô)***: *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\mathbb{P}-p.s.\ \forall\ 0 \leq t \leq T, \quad X_t \;=\; X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_t,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}-p.s.$:

$$\int_0^T |K_s| ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |H_s|^2 ds < \infty.$$

Ou sous la forme :

$$dX_t \;=\; K_t dt + H_t dW_t.$$

Proposition 1.5.1 *La covariation quadratique entre deux processus X et Y*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_t \quad et \quad Y_t = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dW_t\ .$$

donnée par :

$$\langle X, Y\rangle_t \;=\; \int_0^t H_s H_s' ds$$

Proposition 1.5.2 (Itégration par parties): *Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t \;=\; X_0 X_0' + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

1.5.2 Formule d'Itô

Théorème 1.5.1 *Soit f une fonction $C^2(\mathbb{R})$, on a :*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\,\theta_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

Ou bien sous la forme :

$$df(X_t) = f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\,d\langle X, X\rangle_t\,.$$

Théorème 1.5.2 *Soient $(t,\ x) \mapsto f(t,\ x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus d'Itô. On a :*

$$f(t, X_t) = f(0,\ X_0) + \int_0^t f_s'(s,\ X_s)ds + \int_0^t f_x'(s,\ X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s,\ X_s)d\langle X, X\rangle_s.$$

Ou sous la forme :

$$df(t, X_t) = f_t'(t, X_t)\,dt + f_x'(t, X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}''(t, X_t)\,d\langle X, X\rangle_t\,.$$

1.6 Processus de Poisson

Définition 1.6.1 *Un processus de Poisson N de paramétre $\lambda > 0$ est un processus de comptage*

$$\forall t \geq 0, \ N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{(T_n \leq t)},$$

associé à une famille $(T_n, \ n \in \mathbb{N})$ avec $T_0 = 0$ représentant les temps d'arrivées, telle que les variables aléatoires $(T_{n+1} - T_n; \ n \in \mathbb{N})$ sont i.i.d de loi exponentielle de paramétre λ.

Processus de Poisson compensé: On définit la version "centrée" d'un processus de Poisson par:

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\phi_{\tilde{N}_t}(z) = \exp(e^{iz} - 1 - iz).$$

$\tilde{N}$ est aussi a accroissement indépendant. Comme

$$\mathbb{E}\left[N_t/N_s, s \leq t\right] = \mathbb{E}\left[N_t - N_s + N_s/N_s\right] = \mathbb{E}\left[N_t - N_s\right] + N_s = \lambda(t-s) + N_s,$$

alors $\left(\tilde{N}_t\right)$ est une martingale

$$\forall s \leq t, \ \mathbb{E}\left[N_t/N_s\right] = N_s.$$

$\left(\tilde{N}_t\right)$ est dit processus de Poisson compensé et l'expression déterministe $(\lambda t)_{t\geq 0}$ est dite compensateur de $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$. Pour un processus de Poisson compensé, sa mesure aléatoire est définie par: $\tilde{M}(A) = M(A) - \lambda |A|$.

vérifie :

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(A)] = 0 \text{ , et } var\left(\tilde{M}(A)\right) = \lambda |A|.$$

Remarque 1.6.1 *Pour définir la mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d$, on peut remplacer $A \subset \mathbb{R}^+$ par un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ et la mesure de Lebesgue $|.|$ par une mesure de Radon -Nykodim sur E.*

Mesure aléatoire de Poisson compensé : La mesure aléatoire de Poisson compensé est définit par :

$$\tilde{M}(A) = M(A) - \mu(A).$$

Et elle vérifie :

– Pour tous les ensembles compacts disjoints $A_1, ..., A_n \in E$.

– Les variables $\tilde{M}(A_1), ..., \tilde{M}(A_n)$ sont indépendantes et vérifiants.

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(A_i)] = 0,\ var\left(\tilde{M}(A_i)\right) = \mu(A_i).$$

Le processus de Poisson est définit par un processus de comptage n'est pas utilisé pour modéliser les cours d'actifs, car la condition que la taille est toujours égale à 1, n'est pas réaliste.

Théorème 1.6.1 *Supposons que $X(t) \in \mathbb{R}$ est un processus d'itô de la forme*

$$dX(t) = \alpha(t;\ \omega)dt + \beta(t;\ \omega)dW(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,\ z,\ \omega)\bar{N}(dt,\ dz),$$

où

$$\bar{N}(dt,\ dz) = \begin{cases} N(dt,\ dz) - v(dz)dt & si \quad |z| < R, \\ N(dt, dz\ ) & si \quad |z| \geq R, \end{cases}$$

pour certains $R \in [0,\ \infty]$.

Soit $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ et définie $Y(t) = f(t, X(t))$, alors $Y(t)$ est un nouveau processus d'Itô et

$$\begin{aligned} dY(t) \quad = \quad & \tfrac{df}{dt}(t,\ X(t))dt + \tfrac{df}{dx}(t,\ X(t))\left[\alpha(t,\ \omega)dt + \beta(t,\ \omega)dWt\right] \\ & + \tfrac{1}{2}\beta^2(t,\ \omega)\tfrac{d^2f}{dx^2}(t,\ X(t))dt \\ & + \textstyle\int_{|z|<R}\{f(t,\ X'(t^-) + \gamma(t,\ z)) - f(t,\ X(t^-)) \\ & - \tfrac{df}{dx}(t,\ X'(t^-)\gamma(t,\ z)\}v(dz)dt + \textstyle\int_R\{f(t,\ X'(t^-) + \gamma(t,\ z)) \\ & - f(t,\ X(t^-))\}\bar{N}(dt,\ dz). \end{aligned}$$

1.7 Résultats importants

Lemme 1.7.1 ***(Lemme de Gronwall)*** : *Soit g une fonction positive contiue sur $\mathbb{R}_+$, telle que*:

$$g(t) \leq h(t) + C\int_0^t g(s)ds, \quad \forall t \geq 0,$$

où : C est un constante positive et h est une fonction intégrable sur $[0,T]$, $T \geq 0$, alors

$$g(t) \leq h(t) + C\int_0^t h(s)e^{C(t-s)}ds, \ 0 \leq t \leq T.$$

Donc

$$g(t) \leq h(t)e^{CT}.$$

Définition 1.7.1 ***(Fonction convexe)***: *Une fonction f convexe sur un intervalle I si, pour tous x et y de I et pour tout t de $[0,1]$:*

$$f(tx + (1-t)\,y) \leq tf\,(x) + (1-t)\,f\,(y)\,.$$

Propriété 1.7.1 *Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I*

La fonction f est convexe sur I si sa dérivée f' est croissante sur I i.e :

$$f''(x) \geq 0, \quad \textit{pour tout } x \textit{ de } I.$$

Théorème 1.7.1 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz) :*** *Soient $f, g \in C([0,\ 1],$ $\mathbb{R})$. Alors :*

$$\textstyle\int_0^1 |fg| \quad \leq \quad (\int_0^1 |f|^2)^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 |g|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.7.2 *On dit que la fonction f est globalement Lipschitzienne par rapport à y, s'il existe $k : I \mapsto \mathbb{R}$ continue et positive telle que :*

$$\forall t \in I,\ \forall y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}^d,\ \ \|f(t,\ y_1) - f(t,\ y_2)\| \leq k(t)\, \|y_1 - y_2\|\,.$$

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique pour EDS-EDSR avec saut

2.1 Introduction

$\mathcal{D}$ans ce chapitre on obtient le principe du maximum pour un système de contrôle stochastique gouverné par une équation différentielle stochastique progressive-rétrograde avec saut, dans le cas où le domaine de contrôle est convexe, la variable de contrôle est entré dans le diffusion et le coefficient de saut. Ce résultat est étudié par Shi et Wu [10].

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, on considère certains hypothèses pour arriver à notre objectif. Dans la section 3, on obtient le principe du maximum pour un système de type équation différentielle stochastique progressive-rétrograde avec saut. Dans la section 4, on preuve que sous certains conditions supplémentaires, les conditions suffisantes d'optimalité. Dans la section 5, nous appliquons ce résultat à l'étude d'une sélection de portefeuille à un problème d'optimisation fonctionnelle d'utilité récursive et donnons l'expression explicite de la stratégie de sélection de portefeuille optimale.

2.2 Formulation du problème

$\mathcal{S}$oit $T > 0$ un horizon temporel fixe et $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0.}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles. On suppose que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0.}$ est une filtration engendrée par deux processus indépendants : $\{W_t, t \geq 0\}$ et N tell que $\{W_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard de dimension d et $\tilde{N}$ est une mesure aléatoire de Poisson de $\Theta \times \mathbb{R}_+$, où $\Theta \times \mathbb{R}^l$ un ensemble ouvert non vide équipé de son champ Borel $\mathcal{B}(\Theta)$ avec componsateur $\hat{N}(d\theta dt) = \mu\,(d\theta)$ où

$$N(A \times [0,t]) = (\tilde{N} - \hat{N})(A \times [0,t])t \geq 0,$$

est une martingale pour tout $A \in \mathcal{B}(\Theta)$ satisfant $\mu(A) < \infty$ et μ est une mesure $\sigma-$finie sur $(\Theta, \mathcal{B}\,(\Theta))$ qu'on appellon la mesure de caractéristique.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de dimension finie, on note par :

$L^2(\Omega, \mathcal{F}_T; \mathcal{H})$ est l'espace de toute les variables aléatoires de carré intégrables à valeur dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_T$ -mesurables, $L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; \mathcal{H})$ est l'espace des processus de carré intégrable à valeur dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_t$-adaptés, $L^\infty_{\mathcal{F}}[0,T]; \mathcal{H})$ est l'espace des processus bornées à valeur dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_t$-adaptés, $L^2_{\mathcal{F},p}([0,T]; \mathcal{H})$ est l'espace des processus de carré intégrable à valeur dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_t-$ prévisibles et $F^2_p([0,T]; \mathcal{H})$ est l'espace de toute processus $f(.,.,.)$ définis sur $\Omega\times$ $[0,T]\times$ Θ et $\mathcal{F}_t$ -prévisibles tell que : $\mathbb{E} \int_0^T \int_{\boldsymbol{E}} |f\,(.,t,\theta)|^2\, \mu(d\theta)dt < \infty$.

Soit U un sous ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^k$, on définit l'ensemble de contrôle admissible :

$$\mathcal{U}\left([0,T]\right) = \left\{u\left(\cdot\right) \in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T]\,;\mathbb{R}^k\right); u\left(t\right) \in U, a.e.\;\; t \in [0,T]\,, \mathbb{P}-a.s.\right\}.$$

Pour tout contrôle admissible $u\left(\cdot\right) \in \mathcal{U}\left([0,T]\right)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on considère le système du contrôle stochastique EDS-EDSR avec saut comme suit :

$$\begin{cases} dx(t) &= f(t,x(t),u(t))dt + \sigma(t,x(t),u(t))dW(t) \\ & \quad + \int_\Theta c(t,x(t-),u(t),\theta)N\left(d\theta,dt\right), \\ -dy(t) &= \int_\Theta g(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\theta),u(t))\mu\left(d\theta\right)dt \\ & \quad -z(t)dW(t) - \int_\Theta r(t,\theta)N\left(d\theta,dt\right), \\ x(0) &= x_0,\;\; y(T) = h(x(T)), \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d},$$
$$c : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^m \times U \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$
$$h : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

sont des fonctions déterministes.

Le problème de contrôle optimal stochastique consiste a minimiser sur l'ensemble $\mathcal{U}([0,T])$ une fonction de coût de la forme suivante :

$$J(u(\cdot)) \doteq E\left[\int_0^T \int_\Theta l(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\theta),u(t))\mu(d\theta)\,dt + \phi(x(T)) + \varphi(y(0))\right], \tag{2.2}$$

où

$$l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^m \times U \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont des fonctions déterministes.

Un contrôle admissible qui resoudre ce problème est appellé un contrôle optimal et on le note par u^*, i.e.

$$J(u^*(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}([0,T])} J(u(\cdot)).$$

Hypothèses (H.1)

Au cours de ce chapitre, on suppose que les fonctions ci-dessus satisfait les hypothèses suivantes :

1. f, σ, c sont globalements Lipschitziennes en (x,u) et g est globalement Lipschitzienne en (x,y,z,r,u) ;
2. $f, \sigma, c, g, l, \phi, \varphi$ sont continuellement différentiables pour leurs variables comprenant (x,y,z,r,u) ;
3. $f_x, f_u, \sigma_x, \sigma_u, g_x, g_y, g_z, g_r, g_u$ et $\int_\Theta |c_x(\cdot,\cdot,\theta)|^2 \mu(d\theta)$, $\int_\Theta |c_u(\cdot,\cdot,\theta)|^2 \mu(d\theta)$ sont bornés ;
4. l_x, l_y, l_z, l_r, l_u sont bornnées par$C(1+|x|+|y|+|z|+|r|+|u|)$, ϕ_x et φ_y sont bornés par $C(1+|x|)$, $C(1+|y|)$ respectivement ;

5. $\forall x \in \mathbb{R}^n, h(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T; \mathbb{R}^m)$ et pour tout $w \in \Omega, h(x)$ continuellement différentiable en x, h_x est borné ;

6. Pour tout $t \in [0,T]$, $f(t,0,0), g(t,0,0,0,0,0) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n)$, $\sigma(t,0,0) \in L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^{n\times d}\right)$ et $c(t,0,0,\cdot) \in \mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n)$.

Sous les hypothèses (**H.1**) l'equation (2.1) admet une unique solution

$(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), r(\cdot,\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^m) \times L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^{m\times d}\right) \times \mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^m)$.

2.3 Conditions nécessaires d'optimalité

$\mathcal{L}$e but dans cette section est d'obtenir les conditons nécessaires d'optimalité vérifié par un contrôle optimal, pour cela on utilise la méthode classique de variation convexe, on suppose qu'il existe un contrôle optimal $u^*(\cdot)$ qui minimise la fonction de coût J sur $\mathcal{U}([0,T])$ et $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), z^*(\cdot), r^*(\cdot,\cdot))$ la trajectoire optimale correspondante à $u^*(\cdot)$ de (2.1).

Comme U est convexe, alors pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, on définit un contrôle perturbi $u^\varepsilon(\cdot)$ par la perturbation suivante :

$$u^\varepsilon(\cdot) \doteq u^*(\cdot) + \varepsilon u(\cdot),$$

qui est aussi un contrôle admissible dans U.

On note par $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot), r^\varepsilon(\cdot,\cdot))$ la trajectoire correspondante à $u^\varepsilon(\cdot)$.

2.3.1 Equation variationnelle

Soit $(x_1(\cdot), y_1(\cdot), z_1(\cdot), r_1(\cdot,\cdot))$ est une solution de l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} dx_1(t) &= [f_x(t)x_1(t) + f_u(t)u(t)]\,dt + [\sigma_x(t)x_1(t) + \sigma_u(t)u(t)]\,dW(t) \\ & \quad + \int_\Theta [c_x(t,\theta)x_1(t-) + c_u(t,\theta)u(t)]\,N(d\theta, dt), \\ -dy_1(t) &= \int_\Theta [g_x(t,\theta)x_1(t) + g_y(t,\theta)y_1(t) + g_z(t,\theta)z_1(t) \\ & \quad + g_r(t,\theta)r_1(t,\theta) + g_u(t,\theta)u(t)]\mu(d\theta)\,dt \\ & \quad - z_1(t)dW(t) - \int_\Theta r_1(t,\theta)N(d\theta, dt), \\ x_1(0) &= 0,\ y_1(T) = h_x(x^*(T))x_1(T), \end{cases} \tag{2.3}$$

où

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv f(t, x^*(t), u^*(t)), \\ \sigma(t) &\equiv \sigma(t, x^*(t), u^*(t)), \\ c(t,\theta) &\equiv c(t, x^*(t), u^*(t), \theta), \\ l(t,\theta) &\equiv l(t, x^*(t), y^*(t), z^*(t), r^*(t,\theta), u^*(t)), \\ g(t,\theta) &\equiv g(t, x^*(t), y^*(t), z^*(t), r^*(t,\theta), u^*(t)), \end{aligned}$$

Sous (**H.1**), il existe une unique solution

$$\begin{aligned} & (x_1(\cdot), y_1(\cdot), z_1(\cdot), r_1(\cdot,\cdot)) \\ & \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^m) \times L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^{m\times d}\right) \times \mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^m), \end{aligned}$$

satisfait (2.3).

Le lemme suivante est importante pour obtenir notre résultat.

Pour tout $t \in [0,T]\,, \varepsilon \geq 0$, on suppose

$$\begin{aligned}
\hat{x}^{\varepsilon}(t) &\doteq \varepsilon^{-1}\left(x^{\varepsilon}(t) - x^{*}(t)\right) - x_{1}^{\varepsilon}(t), \\
\hat{y}^{\varepsilon}(t) &\doteq \varepsilon^{-1}\left(y^{\varepsilon}(t) - y^{*}(t)\right) - y_{1}^{\varepsilon}(t), \\
\hat{z}^{\varepsilon}(t) &\doteq \varepsilon^{-1}\left(z^{\varepsilon}(t) - z^{*}(t)\right) - z_{1}^{\varepsilon}(t), \\
\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta) &\doteq \varepsilon^{-1}\left(r^{\varepsilon}(t,\theta) - r^{*}(t,\theta)\right) - r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Lemme 2.3.1 *Soit les hypothèses **(H.1)** vérifié. Alors*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} E\left|\hat{x}^{\varepsilon}(t)\right|^{2} = 0, \\
&\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} E\left|\hat{y}^{\varepsilon}(t)\right|^{2} = 0, \\
&\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} E\int_{0}^{T} \left|\hat{z}^{\varepsilon}(t)\right|^{2} dt = 0, \\
&\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} E\int_{0}^{T}\int_{\Theta} \left|\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)\right|^{2} \mu\left(d\theta\right) dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Preuve. Après de définir $x^{\varepsilon}(t), x^{*}(t)$ et $x_{1}^{\varepsilon}(t)$, on a

$$\begin{aligned}
dx^{\varepsilon}(t) &= f(t,x^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))dt + \sigma(t,x^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))dW(t) \\
&\quad + \int_{\Theta} c(t,x^{\varepsilon}(t-),u^{\varepsilon}(t),\theta)N\left(d\theta,dt\right), \\
dx^{*}(t) &= f(t,x^{*}(t),u^{*}(t))dt + \sigma(t,x^{*}(t),u^{*}(t))dW(t) \\
&\quad + \int_{\Theta} c(t,x^{*}(t-),u^{*}(t),\theta)N\left(d\theta,dt\right), \\
dx_{1}^{\varepsilon}(t) &= \left[f_{x}(t)x_{1}^{\varepsilon}(t) + f_{u}(t)u(t)\right]dt + \left[\sigma_{x}(t)x_{1}^{\varepsilon}(t) + \sigma_{u}(t)u(t)\right]dW(t) \\
&\quad + \int_{\Theta}\left[c_{x}(t,\theta)x_{1}^{\varepsilon}(t-) + c_{u}(t,\theta)u(t)\right]N\left(d\theta,dt\right).
\end{aligned}$$

D'aprés (2.4) on a :

$$\hat{x}^{\varepsilon}(t) \doteq \varepsilon^{-1}\left(x^{\varepsilon}(t)-x^{*}(t)\right)-x_{1}^{\varepsilon}(t),$$

On applique la formule d'Itô, on trouve

$$\begin{aligned}
d\hat{x}^{\varepsilon}(t) &= \varepsilon^{-1}\left(dx^{\varepsilon}(t)-dx^{*}(t)\right)-dx_{1}^{\varepsilon}(t)\\
&= \varepsilon^{-1}\left[f(t,x^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))-f(t)\right]dt-\left[f_{x}(t)x_{1}^{\varepsilon}(t)+f_{u}(t)u(t)\right]dt\\
&\quad+\varepsilon^{-1}\left[\sigma(t,x^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))-\sigma(t)\right]dW(t)-\left[\sigma_{x}(t)x_{1}^{\varepsilon}(t)+\sigma_{u}(t)u(t)\right]dW(t)\\
&\quad+\varepsilon^{-1}\left[\int_{\Theta}c(t,x^{\varepsilon}(t-),u^{\varepsilon}(t),\theta)-c(t,\theta)\right]N\left(d\theta,dt\right)\\
&\quad-\int_{\Theta}\left[c_{x}(t,\theta)x_{1}^{\varepsilon}(t-)+c_{u}(t,\theta)u(t)\right]N\left(d\theta,dt\right),
\end{aligned}$$

avec $\hat{x}^{\varepsilon}(0)=0$.

On remplace $x^{\varepsilon}(t)$ par $x^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_{1}^{\varepsilon}(t)\right)$ et $u^{\varepsilon}(t)$ par $u^{*}(t)+\varepsilon u(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
d\hat{x}^{\varepsilon}(t) &= \varepsilon^{-1}\left[f\left(t,x^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_{1}^{\varepsilon}(t)\right),u^{*}(t)+\varepsilon u(t)\right)-f(t)\right]dt\\
&\quad-\left[f_{x}(t)x_{1}^{\varepsilon}(t)+f_{u}(t)u(t)\right]dt\\
&\quad+\varepsilon^{-1}\left[\sigma\left(t,x^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_{1}^{\varepsilon}(t)\right),u^{*}(t)+\varepsilon u(t)\right)-\sigma(t)\right]dW(t)\\
&\quad-\left[\sigma_{x}(t)x_{1}^{\varepsilon}(t)+\sigma_{u}(t)u(t)\right]dW(t)\\
&\quad+\varepsilon^{-1}\left[\int_{\Theta}c\left(t,x^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_{1}^{\varepsilon}(t)\right),u^{*}(t)+\varepsilon u(t),\theta\right)-c(t,\theta)\right]N\left(d\theta,dt\right)\\
&\quad-\int_{\Theta}\left[c_{x}(t,\theta)x_{1}^{\varepsilon}(t-)+c_{u}(t,\theta)u(t)\right]N\left(d\theta,dt\right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

D'aprés la formule de Taylor, on a :

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon^{-1}\left[f(t, x^*(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\varepsilon u(t))-f(t)\right] \\
= & \int_0^1 f_x(t, x^*(t)+\lambda \varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\lambda \varepsilon u(t))\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right) d \lambda \\
& +\int_0^1 f_u(t, x^*(t)+\lambda \varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\lambda \varepsilon u(t)) u(t) d \lambda .
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon^{-1}\left[\sigma(t, x^*(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\varepsilon u(t))-\sigma(t)\right] \\
= & \int_0^1 \sigma_x(t, x^*(t)+\lambda \varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\lambda \varepsilon u(t))\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right) d \lambda \\
& +\int_0^1 \sigma_u(t, x^*(t)+\lambda \varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\lambda \varepsilon u(t)) u(t) d \lambda,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon^{-1}\left[c(t, x^*(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\varepsilon u(t), \theta)-c(t, \theta)\right] \\
= & \int_0^1 c_x(t, x^*(t)+\lambda \varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\lambda \varepsilon u(t)), \theta)\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right) d \lambda \\
& +\int_0^1 c_u(t, x^*(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t)+\lambda \varepsilon u(t)), \theta) u(t) d \lambda .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Nous remplaçons (2.7), (2.8) et (2.9) dans (2.6), il revient :

$$
\begin{aligned}
& d\hat{x}^{\varepsilon}(t) \\
= & \int_0^1 f_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t))\hat{x}^{\varepsilon}(t) d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \sigma_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t))\hat{x}^{\varepsilon}(t) d\lambda dW(t) \\
& + \int_0^1 c_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t), \theta)\hat{x}^{\varepsilon}(t) d\lambda N\left(d\theta, dt\right) \\
& + \int_0^1 \left[f_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t)) - f_x(t)\right] x_1^{\varepsilon}(t) d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \left[f_u(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t)) - f_u(t)\right] u(t) d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \left[\sigma_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t)) - \sigma_x(t)\right] x_1^{\varepsilon}(t) d\lambda dW(t) \\
& + \int_0^1 \left[\sigma_u(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t)) - \sigma_u(t)\right] u(t) d\lambda dW(t) \\
& + \int_0^1 \left[c_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t), \theta) - c_x(t, \theta)\right] x_1^{\varepsilon}(t) d\lambda N\left(d\theta, dt\right) \\
& + \int_0^1 \left[c_u(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t), \theta) - c_u(t, \theta)\right] u(t) d\lambda N\left(d\theta, dt\right).
\end{aligned}
$$

Alors, on obtient

$$
\begin{cases}
d\hat{x}^{\varepsilon}(t) & = \left[A^{\varepsilon}(t)\hat{x}^{\varepsilon}(t) + G^{1\varepsilon}(t)\right] dt + \left[B^{\varepsilon}(t)\hat{x}^{\varepsilon}(t) + G^{2\varepsilon}(t)\right] dW(t) \\
& \quad + \displaystyle\int_{\Theta} \left[C^{\varepsilon}(t-, \theta)\hat{x}^{\varepsilon}(t-) + G^{3\varepsilon}(t-, \theta)\right] N\left(d\theta, dt\right), \\
\hat{x}^{\varepsilon}(0) & = 0,
\end{cases}
$$

où

$$\begin{aligned}
A^{\varepsilon}(t) &\doteq \int_0^1 \left[f_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t))\right] d\lambda, \\
G^{1\varepsilon}(t) &\doteq \left[A^{\varepsilon}(t) - f_x(t)\right] x_1^{\varepsilon}(t) + \int_0^1 [f_u(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), \\
&\quad u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t)) - f_u(t)]u\left(t\right) d\lambda, \\
B^{\varepsilon}(t) &\doteq \int_0^1 [\sigma_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t)] d\lambda,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{2\varepsilon}(t) &\doteq \left[B^{\varepsilon}(t) - \sigma_x(t)\right] x_1^{\varepsilon}(t) + \int_0^1 [\sigma_u(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), \\
&\quad u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t)) - \sigma_u(t)]u\left(t\right) d\lambda, \\
C^{\varepsilon}(t,\theta) &\doteq \int_0^1 c_x[(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t), \theta)] d\lambda, \\
G^{3\varepsilon}(t,\theta) &\doteq \left[C^{\varepsilon}(t,\theta) - c_x(t,\theta)\right] x_1^{\varepsilon}(t) + \int_0^1 [c_u(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), \\
&\quad u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t), \theta) - c_u(t,\theta)]u\left(t\right) d\lambda.
\end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô au $\left|\hat{x}^{\varepsilon}(t)\right|^2$, d'aprés (**H.1**), on a :

$$\begin{aligned}
E\left|\hat{x}^{\varepsilon}(t)\right|^2 &= E\int_0^T \left[\langle 2\hat{x}^{\varepsilon}(t), A^{\varepsilon}(s)\hat{x}^{\varepsilon}(t) + G^{1\varepsilon}(t)\rangle\right] dt + E\int_0^T \left|B^{\varepsilon}(t)\hat{x}^{\varepsilon}(s) + G^{2\varepsilon}(t)\right|^2] dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Theta} \left|C^{\varepsilon}(t,\theta)\hat{x}^{\varepsilon}(t) + G^{3\varepsilon}(t,\theta)\right|^2 \mu(d\theta) dt \\
&\leq CE\int_0^T \left|\hat{x}^{\varepsilon}(t)\right|^2 dt + o(\rho).
\end{aligned}$$

D'aprés (2.5) et l'inégalité de Gronwall.

Maintenant, les derniers résultats, tout d'abord on a :

$$\begin{cases} -dy^{\varepsilon}(t) &= \displaystyle\int_{\Theta} g(t, x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t), z^{\varepsilon}(t), r^{\varepsilon}(t,\theta), u^{\varepsilon}(t))\mu\left(d\theta\right) dt - z^{\varepsilon}(t) dW(t) \\ & \quad - \displaystyle\int_{\Theta} r^{\varepsilon}(t,\theta) N\left(d\theta, dt\right), \\ -dy^{*}(t) &= \displaystyle\int_{\Theta} g(t, x^{*}(t), y^{*}(t), z^{*}(t), r^{*}(t,\theta), u(t))\mu\left(d\theta\right) dt - z^{*}(t) dW(t) \\ & \quad - \displaystyle\int_{\Theta} r^{*}(t,\theta) N\left(d\theta, dt\right), \\ -dy_{1}^{\varepsilon}(t) &= \displaystyle\int_{\Theta} [g_{x}(t,\theta) x_{1}^{\varepsilon}(t) + g_{y}(t,\theta) y_{1}^{\varepsilon}(t) + g_{z}(t,\theta) z_{1}^{\varepsilon}(t) + g_{r}(t,\theta) r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta) \\ & \quad + g_{u}(t,\theta) u(t)]\mu\left(d\theta\right) dt - z_{1}^{\varepsilon}(t) dW(t) - \displaystyle\int_{\Theta} r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta) N\left(d\theta, dt\right). \end{cases}$$

Alors on peut définie $\hat{y}^{\varepsilon}(t)$ comme suit :

$$\hat{y}^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}\left(y^{\varepsilon}(t) - y^{*}(t)\right) - y_{1}^{\varepsilon}(t),$$

et d'aprés la formule d'Itô', on trouve :

$$\begin{aligned} -d\hat{y}^{\varepsilon}(t) &= \varepsilon^{-1} \int_{\Theta} \left[g(t, x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t), z^{\varepsilon}(t), r^{\varepsilon}(t,\theta), u^{\varepsilon}(t)) - g(t,\theta)\right] \mu\left(d\theta\right) dt \\ & \quad - \varepsilon^{-1}\left[z^{\varepsilon}(t) - z^{*}(t)\right] dW(t) - \varepsilon^{-1} \int_{\Theta} \left[r^{\varepsilon}(t,\theta) - r^{*}(t,\theta)\right] N\left(d\theta, dt\right) \\ & \quad - \int_{\Theta} [g_{x}(t,\theta) x_{1}^{\varepsilon}(t) + g_{y}(t,\theta) y_{1}^{\varepsilon}(t) + g_{z}(t,\theta) z_{1}^{\varepsilon}(t) + g_{r}(t,\theta) r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta) \\ & \quad + g_{u}(t,\theta) u(t)]\mu\left(d\theta\right) dt + z_{1}^{\varepsilon}(t) dW(t) + \int_{\Theta} r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta) N\left(d\theta, dt\right). \end{aligned}$$

On utilise que :

$$\begin{aligned}
x^{\varepsilon}(t) &= x^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_{1}^{\varepsilon}(t)\right), \\
y^{\varepsilon}(t) &= y^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t)+y_{1}^{\varepsilon}(t)\right), \\
z^{\varepsilon}(t) &= z^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{z}^{\varepsilon}(t)+z_{1}^{\varepsilon}(t)\right) \\
r^{\varepsilon}(t,\theta) &= r^{*}(t,\theta)+\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)+r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta)\right) \\
u^{\varepsilon}(t) &= u^{*}(t)+\varepsilon u(t),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& -d\hat{y}^{\varepsilon}(t) \\
= \; & \varepsilon^{-1}\int_{\Theta}[g(t,x^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_{1}^{\varepsilon}(t)\right),y^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t)+y_{1}^{\varepsilon}(t)\right), \\
& z^{*}(t)+\varepsilon\left(\hat{z}^{\varepsilon}(t)+z_{1}^{\varepsilon}(t)\right),r^{*}(t,\theta)+\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)+r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta)\right),u^{*}(t)+\varepsilon u(t)) \\
& -g(t,\theta)]\mu\left(d\theta\right)dt-\varepsilon^{-1}\left[z^{\varepsilon}(t)-z^{*}(t)\right]dW(t)-\varepsilon^{-1}\int_{\Theta}\left[r^{\varepsilon}(t,\theta)-r^{*}(t,\theta)\right]N\left(d\theta,dt\right) \\
& -\int_{\Theta}[g_{x}(t,\theta)x_{1}^{\varepsilon}(t)+g_{y}(t,\theta)y_{1}^{\varepsilon}(t)+g_{z}(t,\theta)z_{1}^{\varepsilon}(t)+g_{r}(t,\theta)r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta) \\
& +g_{u}(t,\theta)u(t)]\mu\left(d\theta\right)dt+z_{1}^{\varepsilon}(t)dW(t)+\int_{\Theta}r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta)N\left(d\theta,dt\right).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

D'aprés le développement de Taylor, on trouve que :

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1}[g(t, x^*(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t)+\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t)+y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)+\varepsilon\left(\hat{z}^{\varepsilon}(t)+z_1^{\varepsilon}(t)\right), \\
&r^*(t,\theta)+\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)+r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t)+\varepsilon u(t))-g(t,\theta)] \\
&=\int_0^1[g_x(t, x^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t)+y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)+\lambda\varepsilon(\hat{z}^{\varepsilon}(t) \\
&+z_1^{\varepsilon}(t)), r^*(t,\theta)+\lambda\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)+r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t)+\lambda\varepsilon u(t))\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right)d\lambda \\
&+\int_0^1 g_y(t, x^*(t)+\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t)+y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)+\lambda\varepsilon(\hat{z}^{\varepsilon}(t) \\
&+z_1^{\varepsilon}(t)), r^*(t,\theta)+\lambda\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)+r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t)+\lambda\varepsilon u(t))\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t)+y_1^{\varepsilon}(t)\right)d\lambda \\
&+\int_0^1 g_z(t, x^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t)+y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)+\lambda\varepsilon'\hat{z}^{\varepsilon}(t) \\
&+z_1^{\varepsilon}(t)), r^*(t,\theta)+\lambda\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)+r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t)+\lambda\varepsilon u(t))\left(\hat{z}^{\varepsilon}(t)+z_1^{\varepsilon}(t)\right)d\lambda \\
&+\int_0^1 g_r(t, x^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\tilde{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\tilde{y}^{\varepsilon}(t)+y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)+\lambda\varepsilon'\tilde{z}^{\varepsilon}(t) \\
&+z_1^{\varepsilon}(t)), r^*(t,\theta)+\lambda\varepsilon\left(\tilde{r}^{\varepsilon}(t,\theta)+r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t)+\lambda\varepsilon u(t))\left(\tilde{r}^{\varepsilon}(t)+r_1^{\varepsilon}(t)\right)d\lambda \\
&+\int_0^1 g_u(t, x^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t)+x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t)+\lambda\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t)+y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)+\lambda\varepsilon(\hat{z}^{\varepsilon}(t) \\
&+z_1^{\varepsilon}(t)), r^*(t,\theta)+\lambda\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)+r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t)+\lambda\varepsilon u(t))u(t)d\lambda.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

On remplace (2.11) dans (2.10), on obtient

$$
\begin{cases}
-d\hat{y}^{\varepsilon}(t) & = \displaystyle\int_{\Theta}[D^{\varepsilon}(t,\theta)\hat{x}^{\varepsilon}(t)+I^{\varepsilon}(t,\theta)\hat{y}^{\varepsilon}(t)+F^{\varepsilon}(t,\theta)\hat{z}^{\varepsilon}(t)+\Lambda^{\varepsilon}(t,\theta)\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta) \\
& \quad +G^{4\varepsilon}(t,\theta)]\mu(d\theta)dt-\hat{z}^{\varepsilon}(t)dW(t)-\displaystyle\int_{\Theta}\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta)N\left(d\theta,dt\right), \\
\hat{y}^{\varepsilon}(T) & = \varepsilon^{-1}\left[\left(h\left(x^{\varepsilon}(T)\right)-h(x^*(T))\right]-h_x\left(x^*(T)\right)x_1^{\varepsilon}(T),\right.
\end{cases}
$$

où

$$D^{\varepsilon}(t,\theta) \doteq \int_0^1 [g_x(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t) + y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)$$
$$+ \lambda\varepsilon\left(\hat{z}^{\varepsilon}(t) + z_1^{\varepsilon}(t)\right), r^*(t,\theta) + \lambda\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta) + r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t))d\lambda.$$

$$I^{\varepsilon}(t,\theta) \doteq \int_0^1 g_y(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t) + y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)$$
$$+ \lambda\varepsilon\left(\hat{z}^{\varepsilon}(t) + z_1^{\varepsilon}(t)\right), r^*(t,\theta) + \lambda\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta) + r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t))d\lambda.$$

$$F^{\varepsilon}(t,\theta) \doteq \int_0^1 g_z(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t) + y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)$$
$$+ \lambda\varepsilon\left(\hat{z}^{\varepsilon}(t) + z_1^{\varepsilon}(t)\right), r^*(t,\theta) + \lambda\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta) + r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t))d\lambda,$$

$$\Lambda^{\varepsilon}(t,\theta) \doteq \int_0^1 g_r(t, x^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{x}^{\varepsilon}(t) + x_1^{\varepsilon}(t)\right), y^*(t) + \lambda\varepsilon\left(\hat{y}^{\varepsilon}(t) + y_1^{\varepsilon}(t)\right), z^*(t)$$
$$+ \lambda\varepsilon\left(\hat{z}^{\varepsilon}(t) + z_1^{\varepsilon}(t)\right), r^*(t,\theta) + \lambda\varepsilon\left(\hat{r}^{\varepsilon}(t,\theta) + r_1^{\varepsilon}(t,\theta)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon u(t))d\lambda.$$

On applique la formule d'Itô' à $\left|\hat{y}^{\varepsilon}(t)\right|^2$, sous (**H.1**), on a :

$$\begin{aligned}
& E\left[\left|\hat{y}^{\varepsilon}(t)\right|^2\right] + E\int_t^T \left|\hat{z}^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds + E\int_t^T \int_{\Theta} \left|\hat{r}^{\varepsilon}(s,\theta)\right|^2 \mu(d\theta)ds \\
= \; & E\int_t^T \int_{\Theta} \langle 2\hat{y}^{\varepsilon}(s), D^{\varepsilon}(s,\theta)\hat{x}^{\varepsilon}(s) + I^{\varepsilon}(s,\theta)\hat{y}^{\varepsilon}(s) + F^{\varepsilon}(s,\theta)\hat{z}^{\varepsilon}(s) \\
& + \Lambda^{\varepsilon}(s,\theta)\hat{r}^{\varepsilon}(s,\theta) + G^{4\varepsilon}(s,\theta)\rangle \, \mu(d\theta)ds \\
& + E\left[\varepsilon^{-1}\left[\left(h\left(x^{\varepsilon}(T)\right) - h(x^*(T))\right] - h_x\left(x^*(T)\right) x_1^{\varepsilon}(T)\right]^2 \\
\leq \; & CE\int_t^T \left|\hat{y}^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T \left|\hat{z}^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T \int_{\Theta} \left|\hat{r}^{\varepsilon}(s,\theta)\right|^2 \mu(d\theta)ds + o(\rho).
\end{aligned}$$

Enfin, d'aprés l'inégalité de Gronwall, on trouve le resultat (2.5). ■

Inégalité variationelle

Comme $u^*(\cdot)$ est un contrôle optimal, donc on a :

$$\varepsilon^{-1}\left[J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right)-J\left(u^*(\cdot)\right)\right]\geq 0. \tag{2.12}$$

D'aprés ça et le lemme (2.3.1), on a le suivant.

Lemme 2.3.2 *Sous l'hypothèses (**H.1**). on a l'inégalité variationelle suivante :*

$$\begin{aligned} o(\rho) \leq\ & E\int_0^T\int_\Theta [l_x(t,\theta)x_1^{\varepsilon}(t)+l_y(t,\theta)y_1^{\varepsilon}(t)+l_z(t,\theta)z_1^{\varepsilon}(t)+l_r(t,\theta)r_1^{\varepsilon}(t,\theta) \\ & +l_u(t,\theta)u(t)\mu(d\theta)]dt+E\left[\phi_x(x^*(T))x_1^{\varepsilon}(T)\right]+E\left[\varphi_y(y^*(0))y_1^{\varepsilon}(0)\right]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Preuve. D'aprés (2.12), on a :

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1}\left[J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right)-J\left(u^*(\cdot)\right)\right] \\ = & \ \varepsilon^{-1}E\int_0^T\int_\Theta l(t,x^{\varepsilon}(t),y^{\varepsilon}(t),z^{\varepsilon}(t),r^{\varepsilon}(t,\theta),u^{\varepsilon}(t)) \\ & -l(t,x^*(t),y^*(t),z^*(t),r^*(t,\theta),u^*(t))]\mu(d\theta)\,dt \\ & +\varepsilon^{-1}E\left[\phi(x^{\varepsilon}(T))-\phi(x^*(T))\right]+\varepsilon^{-1}E\left[\varphi(y^{\varepsilon}(0))-\varphi(y^*(0))\right]\geq 0. \end{aligned}$$

On applique le développement de Taylor et le résultat (2.5) respectivement, on trouve :

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1}E\left[\phi(x^{\varepsilon}(T))-\phi(x^*(T))\right] \\ = & \ \varepsilon^{-1}E\int_0^1\phi_x(x^*(T)+\lambda\left(x^{\varepsilon}(T)-x^*(T)\right))\left(x^{\varepsilon}(T)-x^*(T)\right)d\lambda \\ \longrightarrow & \ E\left[\phi_x(x^*(T)x_1^{\varepsilon}(T)\right]. \end{aligned}$$

De même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-1}E\left[\varphi(y^{\varepsilon}(0))-\varphi(y^{*}(0))\right] \\
= \quad & \varepsilon^{-1}E\int_{0}^{1}\varphi_{y}(y^{*}(0)+\lambda\left(y^{\varepsilon}(0)-y^{*}(0)\right))\left(y^{\varepsilon}(0)-y^{*}(0)\right)d\lambda \\
\longrightarrow \quad & E\left[\varphi_{y}(y^{*}(0)y_{1}^{\varepsilon}(0)\right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-1}E\int_{0}^{T}\int_{\Theta}[l(t,x^{\varepsilon}(t),y^{\varepsilon}(t),z^{\varepsilon}(t),r^{\varepsilon}(t,\theta),u^{\varepsilon}(t)) \\
& -l(t,x^{*}(t),y^{*}(t),z^{*}(t),r^{*}(t,\theta),u^{*}(t))]\mu\left(d\theta\right)dt \\
& \longrightarrow E\int_{0}^{T}\int_{\Theta}[l_{x}(t,\theta)x_{1}^{\varepsilon}(t)+l_{y}(t,\theta)y_{1}^{\varepsilon}(t)+l_{z}(t,\theta)z_{1}^{\varepsilon}(t) \\
& +l_{r}(t,\theta)r_{1}^{\varepsilon}(t,\theta)+l_{u}(t,\theta)u(t)]\mu\left(d\theta\right)dt.
\end{aligned}$$

D'où le resultat (2.13). ■

2.3.2 Processus adjoint et équations adjointes

On introduire les équations adjointes :

$$
\begin{cases}
-d\Psi(t) & = & [f_x^\top(t)\Psi(t) - \int_\Theta g_x^\top(t,\theta)K(t)\mu(d\theta) + \sigma_x^\top(t)Q(t) \\
& & + \int_\Theta \left(c_x^\top(t,\theta)R(t,\theta) + l_x^\top(t,\theta)\right)\mu(d\theta)]dt \\
& & -Q(t)dW(t) - \int_\Theta R(t,\theta)N(d\theta,dt), \\
\Psi(T) & = & -h_x^\top(x^*(T))K(T) + \phi_x(x^*(T)), \\
dK(t) & = & \int_\Theta \left[g_y^\top(t,\theta)K(t) - l_y^\top(t,\theta)\right]\mu(d\theta)dt \\
& & + \int_\Theta \left[g_z^\top(t,\theta)K^*(t) - l_z^\top(t,\theta)\right]\mu(d\theta)dW(t) \\
& & + \int_\Theta \left[g_r^\top(t-,\theta)K^*(t-) - l_r^\top(t-,\theta)\right]N(d\theta,dt), \\
K(0) & = & -\varphi_y(y^*(0)).
\end{cases}
\tag{2.14}
$$

D'aprés (2.3), sous l'hypothèses (**H.1**), il existe une unique solution $(\Psi(t), Q(t), K(t), R(t,\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}^{n\times d}\right) \times L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^m) \times \mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n)$ satisfait (2.14).

On définie la fonction d' Hamiltonien

$$
H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^m \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},
$$

comme suit :

$$
\begin{aligned}
& H(t,x,y,z,r(\cdot),u,\Psi,Q,K,R(\cdot)) \\
\doteq\ & \langle \Psi, f(t,x,u)\rangle + \langle Q, \sigma(t,x,u)\rangle - \int_\Theta [\langle K, g(t,x,y,z,r(\theta),u)\rangle \\
& -l(t,x,y,z,r(\theta),u) - \langle R(\theta), c(t,x,u,\theta)\rangle]\mu(d\theta).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

On note $H(t) = H(t, x^*(t), y^*(t), z^*(t), r^*(t, \cdot), u^*(t), \Psi(t), Q(t), K(t), R(t, \cdot))$, les équations adjointes (2.14) peuvent être écrire sous forme d' Hamiltonien comme suit :

$$\begin{cases} -d\Psi(t) &= H_x(t)dt - Q(t)dW(t) - \displaystyle\int_\Theta R(t,\theta)N(d\theta, dt), \\ \Psi(T) &= -h_x^\intercal(x^*(T))K(T) + \phi_x(x^*(T)), \\ dK(t) &= -H_y(t)dt - H_z(t)dW(t) - \displaystyle\int_\Theta H_r(t-,\theta)N(d\theta, dt), \\ K(0) &= -\varphi_y(y^*(0)). \end{cases} \tag{2.16}$$

Le résultat de ce chapitre est dans le suivant.

2.3.3 Conditions nécessaires d'optimalité

$\mathcal{D}$ans cette partie, notre objectif est d'obtenir les conditons nécessaires d'optimalité vérifiéé par un contrôle optimal, connue par le principe du maximum stochastique qui est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.3.1 ***(Principe du maximum stochastique)*** *Soit* ***(H.1)*** *vérifié, $u^*(\cdot)$ est un contrôle optimal pour notre problème stochastique optimal et $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), z^*(\cdot), r^*(\cdot,\cdot))$ est la trajectoire optimale correspondante. Alors on a*

$$\langle H_u(t), u - u^*(t)\rangle \geq 0, \quad \forall u \in U, a.e.t \in [0,T], \mathbb{P} - a.s. \tag{2.17}$$

Preuve. On applique la formule d'Itô au $\langle \Psi(t), x_1^\varepsilon(t) \rangle$, on obtient

$$\begin{aligned} E\left[\langle \Psi(T), x_1^\varepsilon(T) \rangle\right] &= E\int_0^T \langle \Psi(t), dx_1^\varepsilon(t) \rangle + E\int_0^T \langle x_1^\varepsilon(t), d\Psi(t) \rangle \\ &+E\int_0^T \langle Q(t), \sigma_x(t)x_1^\varepsilon(t) + \sigma_u(t)u(t) \rangle\, dt \\ &+E\int_0^T \int_\Theta \langle R(t,\theta), c_x(t)x_1^\varepsilon(t-) + c_u(t,\theta)u(t) \rangle\, \mu(d\theta)dt. \end{aligned} \tag{2.18}$$

D'aprés un calcul simple on trouve :

$$E\int_0^T \langle \Psi(t), dx_1^\varepsilon(t) \rangle = E\int_0^T \langle \Psi(t), f_x(t)x_1^\varepsilon(t) + f_u(t)u(t) \rangle\, dt, \tag{2.19}$$

et

$$\begin{aligned} E\int_0^T \langle x_1^\varepsilon(t), d\Psi(t) \rangle &= -E\int_0^T [\Big\langle x_1^\varepsilon(t), f_x^\intercal(t)\Psi(t) - \int_\Theta g_x^\intercal(t,\theta)K(t)\mu(d\theta) + \sigma_x^\intercal(t)Q(t) \\ &+\int_\Theta (c_x^\intercal(t,\theta)R(t,\theta) + l_x^\intercal(t,\theta))\mu(d\theta) \Big\rangle]dt. \end{aligned} \tag{2.20}$$

On replace (2.19), (2.20) dans (2.18) et utilise que

$$\Psi(T) = -h_x^\intercal(x^*(T))K(T) + \phi_x(x^*(T)),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & E\left[\langle -h_x^\intercal(x^*(T))K(T) + \phi_x(x^*(T))], x_1^\varepsilon(T) \rangle\right] \\ = & E\int_0^T \int_\Theta \langle x_1^\varepsilon(t), g_x^\intercal(t,\theta)K(t) - l_x^\intercal(t,\theta)) \rangle\, \mu(d\theta)dt \\ & +E\int_0^T \langle \Psi(t), f_u(t)u(t) \rangle\, dt + E\int_0^T \langle Q(t), \sigma_u(t)u(t) \rangle\, dt \\ & +E\int_0^T \int_\Theta \langle R(t,\theta), c_u(t,\theta)u(t) \rangle\, \mu(d\theta)dt. \end{aligned} \tag{2.21}$$

On applique la formule d'Itô aussi au $\langle K(t), y_1^\varepsilon(t)\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned}
& E\left[\langle K(T), y_1^\varepsilon(T)\rangle\right] - E\left[\langle K(0), y_1^\varepsilon(0)\rangle\right] \\
= \; & E\int_0^T \langle K(t), dy_1^\varepsilon(t)\rangle + E\int_0^T \langle y_1^\varepsilon(t), dK(t)\rangle \\
& + E\int_0^T\int_\Theta \langle z_1^\varepsilon(t), g_z^\intercal(t,\theta)K(t) - l_z^\intercal(t,\theta)\rangle\, \mu\,(d\theta)\, dt \\
& + E\int_0^T\int_\Theta \langle r_1^\varepsilon(t,\theta), g_r^\intercal(t-,\theta)K(t-) - l_r^\intercal(t-,\theta)\rangle\, \mu(d\theta)dt,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

où

$$\begin{aligned}
E\int_0^T \langle K(t), dy_1^\varepsilon(t)\rangle \;=\; & -E\int_0^T\int_\Theta \langle K(t), g_x(t,\theta)x_1^\varepsilon(t) + g_y(t,\theta)y_1^\varepsilon(t) + g_z(t,\theta)z_1^\varepsilon(t) \\
& + g_r(t,\theta)r_1^\varepsilon(t,\theta) + g_u(t,\theta)u(t)\rangle\, \mu\,(d\theta)\, dt
\end{aligned} \tag{2.23}$$

et

$$E\int_0^T \langle y_1^\varepsilon(t), dK(t)\rangle \;=\; E\int_0^T\int_\Theta \left\langle y_1^\varepsilon(t), g_y^\intercal(t,\theta)K(t) - l_y^\intercal(t,\theta)\right\rangle \mu(d\theta)dt. \tag{2.24}$$

On remplace (2.23), (2.24) dans (2.22) et utilise que $K(0) = -\varphi_y(y^*(0))$, $y_1^\varepsilon(T) = h_x(x^*(T))x_1^\varepsilon(T)$, on trouve

$$\begin{aligned}
& E\left[\langle K(T), h_x(x^*(T))x_1^\varepsilon(T)\rangle\right] + E\left[\langle \varphi_y(y^*(0)), y_1^\varepsilon(0)\rangle\right] \\
= \; & -E\int_0^T\int_\Theta \left\langle y_1^\varepsilon(t), l_y^\intercal(t,\theta)\right\rangle \mu(d\theta)dt \\
& -E\int_0^T\int_\Theta \langle K(t), g_x(t,\theta)x_1^\varepsilon(t) + g_u(t,\theta)u(t)\rangle\, \mu\,(d\theta)\, dt \\
& -E\int_0^T\int_\Theta \langle z_1^\varepsilon(t), l_z^\intercal(t,\theta)\rangle\, \mu(d\theta)dt \\
& -E\int_0^T\int_\Theta \langle r_1^\varepsilon(t,\theta), l_r^\intercal(t-,\theta)\rangle\, \mu(d\theta)dt.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

On comparée (2.21) et (2.25), on trouve

$$\begin{aligned}
& E\left[\phi_x(x^*(T)x_1^\varepsilon(T)\right] + E\left[\varphi_y(y^*(0)y_1^\varepsilon(0)\right] \\
= \quad & -E\int_0^T \int_\Theta [l_x(t,\theta)x_1^\varepsilon(t) + l_y(t,\theta)y_1^\varepsilon(t) + l_z(t,\theta)z_1^\varepsilon(t) + l_r(t,\theta)r_1^\varepsilon(t,\theta) \\
& + l_u(t,\theta)u(t)]\mu\,(d\theta)\,dt + E\int_0^T \langle H_u(t), u(t)\rangle\,dt.
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité variationelle (2.13), pour $u(\cdot) \in \mathcal{U}\left([0,T]\right)$,

$$E\int_0^T \langle H_u(t), u(t)\rangle\,dt \geq \quad 0.$$

Alors (2.17) vérifié. ■

2.4 Condition suffisante d'optimalité

$\mathcal{D}$ans cette section, on trouve des conditons suffisantes d'optimalité avec certains notations utilisées au cours de cette section . De plus, on ajoute quelques hypothèses :

Hypothèses (**H.2)**

i) ϕ est convexe en x,

ii) φ est convexe en y,

iii) H est convexe en $(x, y, z, r(\cdot), u)$.

Donc on a le resultat suivant.

Théorème 2.4.1 (Condition suffisante d'optimalité) *Soit* ***(H.1)*** *et* ***(H.2)*** *sont vérifiées.* $u^*(\cdot)$ *est un contrôle admissible et* $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), z^*(\cdot), r^*(\cdot,\cdot))$ *est*

la trajectoire correspondante t avec $y^*(T) = M_T x^*(T)$, $M_T \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Soit $(\Psi(\cdot), Q(\cdot), K(\cdot), R(\cdot,\cdot))$ *est la solution de l'équation adjointe (2.14). Donc* $u^*(\cdot)$ *est un contrôl optimal s'il satisfies (2.17).*

Preuve. Soit $u(\cdot)$ un contrôle admissible arbitraire et $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), r(\cdot,\cdot))$ est la trajectoire correspondante. Nous considérons :

$$\begin{aligned} J(u^*(\cdot)) - J(u(\cdot)) &= E\int_0^T \int_\Theta [l(t, x^*(t), y^*(t), z^*(t), r^*(t,\theta), u^*(t)) \\ &\quad - l(t, x(t), y(t), z(t), r(t,\theta), u(t))]\mu(d\theta)\, dt \\ &\quad + E\left[\phi(x^*(T) - \phi(x(T))\right] + E\left[\varphi(y^*(0) - \varphi(y(0))\right]. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Premièrment, par la convexité de ϕ et la formule d'Itô au $(x^*(t) - x(t))^\intercal \Psi(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} & E\left[\phi(x^*(T) - \phi(x(T))\right] \\ \leq\ & E\left[(x^*(T) - x(T))^\intercal \phi_x(x^*(T))\right] \\ =\ & E\left[(x^*(T) - x(T))^\intercal \Psi(T)\right] + \mathbb{E}\left[(x^*(T) - x(T))^\intercal M_T^\intercal K(T)\right] \\ =\ & E\int_0^T [(x^*(t) - x(t))^\intercal (-f_x^\intercal(t)\Psi(t) + \int_\Theta g_x^\intercal(t,\theta)K(t)\mu(d\theta) - \sigma_x^\intercal(t)Q(t) \\ & - \int_\Theta \left(c_x^\intercal(t,\theta)R(t,\theta) - l_x^\intercal(t,\theta)\right)\mu(d\theta)) + \langle \Psi(t), f(t) - f(t, x(t), u(t))\rangle \\ & \langle Q(t), \sigma(t) - \sigma(t, x(t), u(t))\rangle + \int_\Theta \langle R(t,\theta), c(t,\theta) - c(t, x(t), u(t), \theta)\rangle\, \mu(d\theta)]dt \\ & + E\left[(x^*(T) - x(T))^\intercal M_T^\intercal K(T)\right]. \end{aligned}$$

Et de mème, par la convexité de φ et la formule d'Itô au $(y^*(t)-y(t))^\intercal K(t)$, il devient

$$\begin{aligned}
& E\left[\varphi(y^*(0)-\varphi\left(y(0)\right)\right] \\
\leq\ & E\left[(y^*(0)-y(0))^\intercal \varphi_y\left(y(0)\right)\right] \\
=\ & -E\left[(y^*(0)-y(0))^\intercal K(0)\right] \\
=\ & -E\left[(x^*(T)-x(T))^\intercal M_T^\intercal K(T)\right] \\
& +E\int_0^T\int_\Theta [(y^*(t)-y(t))^\intercal \left(g_y^\intercal(t,\theta)K(t)-l_y^\intercal(t,\theta)\right) \\
& +\left[(z^*(t)-z(t))^\intercal \left(g_z^\intercal(t,\theta)K(t)-l_z^\intercal(t,\theta)\right)\right] \\
& +\left[(r^*(t,\theta)-r(t,\theta))^\intercal \left(g_r^\intercal(t,\theta)K(t)-l_r^\intercal(t,\theta)\right)\right] \\
& -\langle K(t),g(t,\theta)-g(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\theta),u(t))\rangle]\mu(d\theta)dt.
\end{aligned}$$

Par la définition (2.15) de H, on a

$$\begin{aligned}
& E\int_0^T\int_\Theta [l(t,x^*(t),y^*(t),z^*(t),r^*(t,\theta),u^*(t))-l(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\theta),u(t))]\mu(d\theta)dt \\
=\ & E\int_0^T [H(t)-H(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\cdot),u(t),\Psi(t),Q(t),K(t),R(t,\cdot))]dt \\
& +E\int_0^T\int_\Theta [-\left\langle \Psi(t),f(t)-f(t,x(t),u(t))\right\rangle-\left\langle Q(t),\sigma(t)-\sigma(t,x(t),u(t))\right\rangle \\
& +\left\langle K(t),g(t,\theta)-g(t,x(t),y(t),z(t),r(t,\theta),u(t))\right\rangle \\
& -\left\langle R(t,\theta),c(t,\theta)-c(t,x(t),u(t),\theta)\right\rangle \mu(d\theta)]dt.
\end{aligned}$$

A partir (2.26), on peut trouve

$$
\begin{aligned}
& J(u^*(\cdot)) - J(u(\cdot)) \\
\leq\ & E\int_0^T [H(t) - H(t, x(t), y(t), z(t), r(t,\cdot), u(t), \Psi(t), Q(t), K(t), R(t,\cdot)) \\
& - \langle H_x(t), x^*(t) - x(t)\rangle - \langle H_y(t), y^*(t) - y(t)\rangle - \langle H_z(t), z^*(t) - z(t)\rangle \\
& - \langle H_r(t), r^*(t,\cdot) - r(t,\cdot)\rangle]dt.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Comme H est convexe en $(x, y, z, r(\cdot), u)$.

$$
\begin{aligned}
& H(t) - H(t, x(t), y(t), z(t), r(t,\cdot), u(t), \Psi(t), K(t), Q(t), R(t,\cdot)) \\
\leq\ & \langle H_x(t), x^*(t) - x(t)\rangle + \langle H_y(t), y^*(t) - y(t)\rangle + \langle H_z(t), z^*(t) - z(t)\rangle \\
& + \langle H_r(t), r^*(t,\theta) - r(t,\theta)\rangle + \langle H_u(t), u^*(t) - u(t)\rangle .
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

On compare entre (2.27) et (2.28), on obtien

$$
J(u^*(\cdot)) - J(u(\cdot)) \leq E\int_0^T \langle H_u(t), u^*(t) - u(t)\rangle\, dt. \tag{2.29}
$$

Daprés la condition nécessaire (2.17), on déduit que $J(u^*(\cdot)) \leq J(u(\cdot))$ pour tout $u(\cdot) \in U$, ce qui preuve $u^*(\cdot)$ est optimal. ■

2.5 Applications en finance

$\mathcal{D}$ans cette section, on applique le résultat de principe maximum (2.3.1) qui est obtenus pour étudier le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une fonction d'utilité récursive.

Supposons qu'on a deux types de titres sur le marché pour un choix d'investissement possible :

1. Un investissement sans risque, où le prix $P_0(t)$ au temps t est donné par

$$dP_0(t) = \rho(t) P_0(t)dt, P_0(0) > 0, \tag{2.30}$$

tels que $\rho(t)$ est une fonction déterministe bornée.

2. Un investissement risqué, où le prix $P_1(t)$ au temps t est donné par

$$dP_1(t) = P_1(t-)\left[\zeta(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t) + \int_\Theta \xi(t,\theta)N(d\theta,dt)\right],\ P_1(0) > 0, \tag{2.31}$$

tels que $\zeta(t), \sigma(t) \neq 0$, sont des fonctions déterministes bornées et $\zeta(t) > \rho(t)$. Pour tout $P_1(t) > 0$, on suppose que $\xi(t,\theta) > -1$, $\forall\theta \in \Theta$ et de plus nous supposons que $\int_\Theta \xi^2(t)\mu(d\theta)$ est une fonction bornée.

Soit $u(t) \doteq e_1(t)P_1(t)$ est le montant investi dans l'investissement risqué que nous appelons la stratégie de portefeuille. Soit $x(0) = x_0 \geq 0$ la richesse initiale.

On combinant (2.30) et (2.31), nous avons introduit le processus de la richesse $x(\cdot)$ et le processus d'utillité recursif $y(\cdot)$ comme une solution de l'équation suivante de type équation différentielle stochastique progressive-rétrograde avec saut :

$$\begin{cases} dx(t) & = & [\rho(t)\, x(t) + (\zeta(t) - \rho(t))\, u(t)]\, dt + \sigma(t)u(t)dW(t) \\ & & + \int_{\Theta} \xi(t,\theta)u(t-)N(d\theta,dt), \\ -dy(t) & = & [\rho(t)\, x(t) + (\zeta(t) - \rho(t))\, u(t) - \beta y(t)]\, dt - z(t)dW(t) \\ & & - \int_{\Theta} r(t,\theta)N(d\theta,dt), \\ x(0) & = & x_0, y(T) = x(T). \end{cases} \tag{2.32}$$

On note par $\mathcal{U}([0,T])$ l'ensemble des portefeuilles admissibles à valeur dans $U = \mathbb{R}$.

La fonction de coùt est donné par

$$J(u(\cdot)) \doteq E[\frac{1}{2}(x(T)-a)^2] - y(0), \tag{2.33}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est donné.

Le problème d'optimisation peut être réécrit comme

$$J(u^*(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}([0,T])} J(u(\cdot)). \tag{2.34}$$

Dans ce cas l'équation adjoint (2.14) devient

$$\begin{cases} -d\Psi(t) & = & \rho(t)\,[\Psi(t) - K(t)]\, dt - Q(t)dW(t) - \int_{\Theta} R(t,\theta)N(d\theta,dt), \\ dK(t) & = & -\beta K(t)dt, \\ \Psi(T) & = & x(T) - a - K(T), K(0) = 1. \end{cases} \tag{2.35}$$

Soit $u^*(\cdot)$ est une stratégie de portfeuille optimal, $x^*(\cdot), y^*(\cdot)$ est le processus de richesse correspondant et le processus d'utilité récursif, respictivement, avec $(\Psi^*(\cdot), Q^*(\cdot), K^*(\cdot), R^*(\cdot,\cdot))$ la solution correspondante de l'équation adjoint (2.35). La fonction d'Hamiltonien (2.15) se réduit à

$$\begin{aligned} & H(t, x^*(t), y^*(t), z^*(t), r^*(t,\theta), u, \Psi^*(t), Q^*(t), K^*(t), R^*(t,\theta)) \\ = & -\left[\rho(t)x^*(t) + (\zeta(t) - \rho(t))\,u\right]\left[K^*(t) - \Psi^*(t)\right]dt + \sigma(t)Q^*(t)u \\ & +\beta K^*(t)y^*(t) + \int_\Theta \xi(t,\theta)R^*\,(t,\theta)\,u\mu(d\theta). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Comme cette expression est linéaire à u, par le principe maximum (2.17), Théoreme (2.3.1)), on a

$$-\left(\zeta(t) - \rho(t)\right)\left[K^*(t) - \Psi^*(t)\right]dt + \sigma(t)K^*(t) + \int_\Theta \xi(t,\theta)R^*\,(t,\theta)\,\mu(d\theta) = 0. \tag{2.37}$$

Afin de trouver l'expression $u^*(t)$, on définit le processus $\Psi^*(t)$ par la forme suivante :

$$\Psi^*(t) \;=\; A(t)x^*(t) + B(t), \tag{2.38}$$

où $A(t), B(t)$ sont des fonctions différentiables.

En appliquant la formule d'Itô à (2.38), on obtient

$$\begin{aligned} d\Psi^*(t) &= A(t)\left\{\left[\rho(t)x^*(t) + (\zeta(t) - \rho(t))\,u^*(t)\right]dt + \sigma(t)u^*(t)dW(t) \right. \\ & \quad \left. + \int_\Theta \xi(t,\theta)u^*\,(t-)\,N(d\theta,dt)\right\} + x^*(t)A'(t)dt + B'(t)dt, \\ &= \left[A(t)\rho(t)x^*(t) + A(t)\left(\zeta(t) - \rho(t)\right)u^*(t) + x^*(t)A'(t) + B'(t)\right]dt \\ & \quad + A(t)\sigma(t)u^*(t)dW(t) + \int_\Theta A(t)\xi(t,\theta)u^*\,(t-)\,N(d\theta,dt), \end{aligned} \tag{2.39}$$

où $A'(t)$ et $B'(t)$ sont les dérivées.

En comparant (2.39) avec l'équation différentielle stochastique rétrograde de (2.35), on trouve (on note que $K^*(t) = e^{-\beta t}$)

$$\begin{aligned} & A(t)\rho(t)x^*(t) + A(t)\left(\zeta(t) - \rho(t)\right)u^*(t) + x^*(t)A'(t) + B'(t) \\ = \; & -\rho(t)\left(A(t)x^*(t) + B(t)\right) + \rho(t)e^{-\beta t}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$Q^*(t) = A(t)\sigma(t)u^*(t), \tag{2.41}$$

$$R^*(t,\theta) = A(t)\xi(t,\theta)u^*(t). \tag{2.42}$$

On remplace (2.41), (2.42) dans (2.37) et on note

$$\Lambda(t) \doteq \sigma^2(t) + \int_\Theta \xi^2(t,\theta)\mu(d\theta), \tag{2.43}$$

on peut avoir

$$u^*(t) = \frac{\left(\rho(t) - \zeta(t)\right)\left(A(t)x^*(t) + B(t) - e^{-\beta t}\right)}{A(t)\Lambda(t)}. \tag{2.44}$$

D'autre part, (2.40) donne

$$u^*(t) = \frac{\left(2A(t)\rho(t) + A'(t)\right)x^*(t) + \rho(t)B(t) + B'(t) - \rho(t)e^{-\beta t}}{A(t)\left(\rho(t) - \zeta(t)\right)}. \tag{2.45}$$

En compare (2.44) et (2.45) (en notant la condition terminale en (2.35)), on trouve

$$\begin{cases} A'(t) = \left[\dfrac{(\rho(t) - \zeta(t))^2}{\Lambda(t)} - 2\rho(t)\right]A(t), \\ A(T) = 1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B'(t) &= \left[\dfrac{(\rho(t)-\zeta(t))^2}{\Lambda(t)} - \rho(t)\right] B(t) - e^{-\beta t}\left[\dfrac{(\rho(t)-\zeta(t))^2}{\Lambda(t)} - \rho(t)\right], \\ B(T) &= -a-1. \end{cases}$$

La solution de cette équation est

$$\begin{cases} A(t) &= \exp\left\{-\int_t^T [\frac{(\rho(s)-\zeta(s))^2}{\Lambda(s)} - 2\rho(s)]ds\right\}, \\ B(t) &= \exp\left\{-\int_t^T [\frac{(\rho(s)-\zeta(s))^2}{\Lambda_s} - \rho(s)]ds\right\} \\ & \quad \left\{\int_t^T e^{-\beta s}\left[\frac{(\rho(s)-\zeta(s))^2}{\Lambda(s)} - \rho(s)\right] \exp\left\{\int_s^T [\frac{(\rho(r)-\zeta(r))^2}{\Lambda(r)} - \rho(r)]dr\right\} ds - a - e^{-\beta T}\right\}. \end{cases} \tag{2.46}$$

Avec ce choix de $A(t)$ et $B(t)$ le processus

$$\Psi^*(t) = A(t)x^*(t) + B(t), K^*(t) = e^{-\beta t},\ Q^*(t) = A(t)\sigma(t)u^*(t),$$
$$R^*(t,\theta) = A(t)\xi(t,\theta)u^*(t),$$

Satisfant l'équation adjointe (2.35) avec $u^*(t)$ donnée par (2.44). Ainsi, avec ce choix de $u^*(t)$, le principe de maximum (2.17) du théorème (2.3.1)) est vérifié.

Théorème 2.5.1 *La solution optimale $u^*(t)$ de notre problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'utilitté récursif (2.34), lorsque la dynamique de richesse (2.32), est donné sous forme de feedback par*

$$u^*(t,x^*) = \frac{(\rho(t)-\zeta(t))\left(A(t)x^*(t) + B(t) - \rho(t)e^{-\beta t}\right)}{A(t)\Lambda(t)}.$$

où $\Lambda(t)$, $A(t)$ et $B(t)$ sont donnée par (2.43) et (2.46) respectivement.

Conclusion

Dans cette mémoire, nous avons étudié les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un système gouverné par des équations différentielles stochastique progressives-rétrogrades avec saut sous l'hypothèse que le domaine de contrôle est convexe. Les coefficients de saut et le processus du diffusion dépendent a la variable de contrôle. Ce résultat est appliqué au problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une fonction d'utilité récursive.

Bibliographie

[1] Bensoussan, A. (1982). Lectures on stochastic control. In Nonlinear filtering and stochastic control (pp. 1-62). Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] El Karoui, N., Peng, S., & Quenez, M. C. (1997). Backward stochastic differential equations in finance. Mathematical finance, 7(1), 1-71.

[3] El Karoui, N., Peng, S., & Quenez, M. C. (2001). A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints. Annals of applied probability, 664-693.

[4] Framstad, N. C., Oksendal, B., & Sulem, A. (2004). Sufficient stochastic maximum principle for the optimal control of jump diffusions and applications to finance. Journal of optimization theory and applications, 121(1), 77-98.

[5] Ikeda, N. and Watanabe, S. (1989) Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd Edition, North-Holland Publishing Company, Kodansha Scientific Books, New York.

[6] Lambert, D., & Lawyer, B. (1997). Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance., deuxième édition, Ellipses, Paris.

[7] Peng, S. (1990). A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM Journal on control and optimization, 28(4), 966-979.

[8] Peng, S. (1993). Backward stochastic differential equations and applications to optimal control. Applied Mathematics and Optimization, 27(2), 125-144.

[9] Shi, J., & Wu, Z. (2006). The maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic control system. Acta Automatica Sinica, 32(2), 161-169.

[10] Shi, J., & Wu, Z. (2010). Maximum principle for forward-backward stochastic control system with random jumps and applications to finance. Journal of Systems Science and Complexity, 23(2), 219-231.

[11] Situ, R. (1991). A maximum principle for optimal controls of stochastic systems with random jumps. Proc. National Conference on Control Theory and Its Applications, Qingdao, 1-7.s.

[12] Tang, S., & Li, X. (1994). Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps. SIAM Journal on Control and Optimization, 32(5), 1447-1475.

[13] Xu, W. (1995). Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. The ANZIAM Journal, 37(2), 172-185.

[14] Zhen, W. U. (1998). Maximum principle for optimal control problem of fully coupled forward-backward stochastic systems. Systems Science and Mathematical Sciences, 11(3), 249-259.

[15] Zhou, X. Y., & Li, D. (2000). Continuous-time mean-variance portfolio selection : A stochastic LQ framework. Applied Mathematics and Optimization, 42(1), 19-33.

Notations et Abréviations

Les différentes notations et abréviations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$	:	Filtration.
$(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega,\ \mathcal{F})$	:	Espace mesurable.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace réel de dimension n.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	:	Tribus boréliènne.
C^1	:	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dèrivée est continue.
C^2	:	Ensemble des fonctions deux fois dérivable et dont a dèrivée second est continue.
W_t ou $W(t)$	:	Mouvement Brownien.
$\mathbb{P}.p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$p.s$	:	Presque sûrement.
$p.p$	:	Presque partout.
1_A	:	La fonction indécatrice de l'ensemble A.
e, exp	:	Exponentiel.
$\mathbb{E}$	:	L'esperance.

$\lvert A \rvert$	:	La norme euclidienne de la matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ définie par $(\sum \lvert a_{ij} \rvert^2)^{\frac{1}{2}}$.
$\langle ., . \rangle$	:	Produit scalaire.
$A^\top$	:	La matrice transposé de A.
$J(.)$	:	La fonction de coût.
$i.i.d$	:	Indépendantes et identiquement distribuées.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
EDSR	:	Equation différentielle stochastique rétrograde.

Résumé

Dans cette mémoire, nous étudiions les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un système gouverné par une équation différentielle stochastique progressive-rétrograde avec saut sous la forme du principe du maximum de Pontryagin. Le résultat obtenu a été appliqué à l'étude d'un problème de sélection de portefeuille moyenne-variance mélangée avec un problème d'optimisation d'une fonction d'utilité récursive

Mots clé : contrôle optimal, équations différentielles stochastiques progressives-rétrogrades, principe du maximum, mesure aléatoire de Poisson, portefeuille moyenne-variance.

Abstract

In this thesis, we study the necessary and sufficient conditions for the of optimality for system governed by the forward-backward stochastic differential equation with random jumps based in the forme of the Pontryagin's maximum principle. The result obtained is applied to a mean-variance portfolio selection mixed with a recursive utility functional optimization problem.

Key words: optimal control, forward-backward stochastic differential equation, maximum principle, Poisson random measure, mean-variance portfolio.

ملخص

في هذه الأطروحة، درسنا الشروط اللازمة والكافية المثلى لنظام تحكمه معادلة تفاضلية عشوائية تقدمية-الرجعية مع القفز في شكل الحد الأقصى لبونتريجين. تم تطبيق النتيجة المتحصلة عليها في دراسة مشكلة اختيار محفظة التباين المتوسط الممزوجة بمشكلة تحسين وظيفة المنفعة المتكررة.

الكلمات المفتاحية: التحكم الأمثل، معادلة تفاضلية عشوائية تقدمية-رجعية، الحد الأقصى، مقياس بواسون العشوائي،محفظة التباين المتوسط.