



## **APPROCHE NUMERIQUE AUX VOLUMES FINIS POUR LE CALCUL DE LA REPOSE DYNAMIQUE DES CHEMINEES D'EQUILIBRE**

**AMARA L.<sup>1</sup>, ACHOUR B.<sup>2</sup>, BERREKSI A.<sup>3</sup>**

<sup>1,2</sup> Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface - LARHYSS,  
Université de Biskra, B.P. 145, R.P., 07000,

Biskra, Algérie

<sup>3</sup> Université de Bejaia, Laboratoire LRS-Eau, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger,  
Algérie

amara.lyes@yahoo.fr, bachir.achour@larhyss.net, ali\_berreksi@yahoo.fr

### **RESUME**

Le calcul des écoulements non permanent dans un système hydraulique en charge présente beaucoup de difficultés tant sur le plan pratique que théorique. Dans ce travail, une approche numérique aux volumes finis est présentée pour la simulation de la réponse dynamique des cheminées d'équilibre. Après avoir rappelé les équations différentielles hyperboliques gouvernant la propagation des ondes élastiques en charge, les détails de discrétisation du modèle mathématique par le schéma de Godunov sont donnés ainsi que l'intégration du terme source et l'implémentation des conditions aux limites. L'application est faite sur un aménagement hydro-électrique type muni d'une cheminée d'équilibre prismatique. Les résultats sont analysés et comparés à la théorie simplifiée de l'oscillation en masse fréquemment utilisée dans certains cas.

**Mots clés :** Ecoulement non permanent, calcul numérique, méthode des volumes finis, schéma de Godunov, cheminée d'équilibre.

### **ABSTRACT**

The computation unsteady flow in a pressurized hydraulic system presents many difficulties as well on the practical level as theoretical. In this work, a numerical approach based on the finite volumes method is presented for the

simulation of the dynamic response of surge tank. After having presented the hyperbolic differential equations governing the elastic wave propagation, the discretization details of the mathematical model meaning Godunov scheme are given as well as the integration of the source term and the implementation of the boundary conditions. The application covers a typical hydro-electric power plant protected by a surge tank. The results are analyzed and compared with the simplified mass oscillation theory largely used in certain cases.

**Keywords:** Unsteady flow, numerical computation, finite volume method, Godunov scheme, surge tank.

## INTRODUCTION

L'un des dispositifs classiques et anciens de protection contre le coup de bélier est bien celui de la cheminée d'équilibre. Cet organe de protection a connu de larges applications et développements dans les installations hydro-électriques. Appelé parfois chambre d'équilibre, il sert à protéger la galerie d'amenée des surpressions dues aux variations de régime de marche des turbines à travers les puits blindés (conduites forcées). Mais en parallèle, la cheminée d'équilibre a trouvée emploi dans la protection des usines élévatoires d'eau pour pallier aux effets nuisibles des surpressions et dépressions, surtout sur les points hauts du tracé des conduites. L'importance de ces ouvrages de formes diverses a conduit à une multitude de recherches théoriques, à l'image de celles de Eydoux (1917), Calame, Gaden et Gardel (Jaeger, 1977) et Escande (1950 et 1971) ; mais la plupart de ces études reposent sur l'approche de l'oscillation en masse (théorie de la colonne rigide) qui ne donne qu'une image simplifiée, et souvent erronée, du phénomène. Il a fallu l'apparition de la méthode graphique de Bergeron (1949) pour en donner un essor considérable à l'étude souvent complexe de ces ouvrages, de part son originalité et sa reconstitution fidèle de la propagation des ondes élastiques, qui est l'image précise du phénomène transitoire, mais la méthode devient vite inextricable pour des cas complexes. Ainsi, l'étude complète et précise des systèmes hydrauliques munis de cheminée d'équilibre revient à résoudre les équations différentielles des ondes élastiques dans une conduite en charge, cependant par le recourt aux méthodes de calcul numériques vouées à ce type d'équations. La plus connue de ces méthodes est celle dite des caractéristiques (Wylie et Streeter, 1978; Chaudhry, 1979). De part leur nature hyperbolique, ces équations du mouvement nécessitent des traitements numériques particuliers quant à certains aspects physiques d'apparition de chocs et discontinuités dans la solution, et dont la méthode des caractéristiques souffre (Guinot, 2008). Actuellement, la méthode qui a connu un large écho dans la résolution des problèmes hyperboliques est bien celle des « Volumes Finis », en raison des particularités dont elle jouit (LeVeque, 2002).

Dans ce travail, nous présentons l'application de la méthode des Volumes Finis (schéma de Godunov de premier ordre), pour la simulation de la réponse dynamique d'une installation hydro-électrique type munie d'une cheminée d'équilibre prismatique.

## EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU MOUVEMENT

Les équations gouvernant le phénomène du coup de bélier, en écoulement unidirectionnel, sont dérivées en appliquant le principe de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ces équations décrivent la variation temporelle et axiale des variables du champ d'écoulement en régime instationnaire (Ghidaoui et al., 2005). Pour une section transversale de diamètre constant, ces équations s'écrivent comme suit (Chaudhry, 1979) :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \quad (2)$$

Dans lesquelles,  $Q$ ,  $H$ ,  $S$  et  $a$  sont respectivement le débit, la charge, la section transversale de la conduite et la célérité des ondes élastiques. Par ailleurs  $R = \lambda / (2DS)$  représente la résistance de la conduite où  $\lambda$  et  $D$  correspondent dans l'ordre au coefficient de frottement et le diamètre de la conduite. Il est à noter que dans ces équations, les termes convectifs sont négligés étant donné leur très faible contribution en pratique (De Almeida et Koelle, 1992). Le système d'équations précédent peut s'écrire sous la forme vectorielle divergente suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + G = 0 \quad (3)$$

Où le vecteur des variables  $U$  et le vecteur flux  $F$  ainsi que le terme source  $G$  sont donnés comme suit :

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{gS} Q \\ gSH \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ RQ|Q| \end{bmatrix} \quad (4)$$

Le modèle mathématique régissant le problème du coup de bélier est alors un système d'équations aux dérivées partielles hyperbolique à coefficient constant (Chaudhry, 1979). En raison de la présence du terme source non linéaire, une

solution générale étant impossible. A cet effet, leur intégration s'effectue par l'usage de méthodes numériques.

### DISCRETISATION NUMERIQUE PAR VOLUMES FINIS

Cette approche repose sur l'écriture des équations du mouvement sous forme intégrale sur un volume de contrôle ou cellule (León, 2007; León et al., 2009). La discrétisation du domaine de calcul est effectuée en cellules de longueur  $\Delta x_i$ . Le domaine temporelle  $t$  est aussi discrétisé en pas de temps  $\Delta t$ . La  $i$ ème cellule est centrée au point  $i$  et dont les interfaces sont  $i - \frac{1}{2}$  et  $i + \frac{1}{2}$ . Les variables d'état ( $H, Q$ ) sont alors définies aux centres des cellules  $i$  et sont moyennées sur chacune d'elle. Les flux, de leur côté, sont évalués aux interfaces intercellulaires (figure 1).

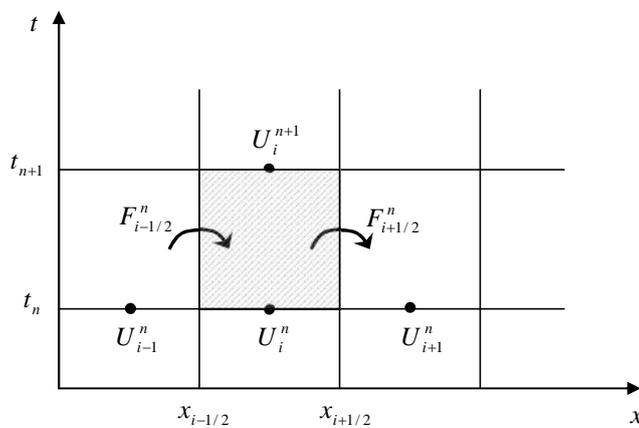


Figure 1: Discretisation en volumes finis

Plutôt que de considérer la valeur prise par la variable  $u(x, t)$  en  $x = x_i$ , comme dans la méthode des différences finies, on introduit alors la valeur moyennée de  $u$  sur le segment  $C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  :

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t_n) dx \quad (5)$$

Pour la cellule  $i$ , l'intégration de l'équation (3), avec terme source, sur le domaine  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$  donne alors (Toro et Garcia-Navarro, 2007) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) + G_i \Delta t \quad (6)$$

Avec :

$$F_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{i\pm 1/2}, t)] dt \quad (7)$$

$$G_i = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G[U(x_{i\pm 1/2}, t)] dx dt \quad (8)$$

Un schéma numérique est ainsi défini pour l'approximation des intégrales du flux et du terme source dans les équations (7) et (8). A cet effet, la détermination de  $U$  au temps  $n + 1$  requiert alors le calcul des flux numériques  $F_{i\pm 1/2}^n$  aux interfaces des cellules. L'introduction du terme source dans la solution est faite par des techniques à pas fractionnés. Dans l'approche de *Godunov*, où l'on omet le terme source, les flux intercellulaires sont évalués en résolvant un problème de *Riemann* aux interfaces des cellules à chaque pas de temps. La solution du problème de *Riemann* peut alors s'obtenir par l'usage de solutions exactes (Guinot, 2003). Ainsi, les flux intercellulaires sont donnés par :

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = T U_i^n + Y U_{i+1}^n \quad (9)$$

$$U_{i-1/2}^{n+1/2} = T U_{i-1}^n + Y U_i^n \quad (10)$$

Avec  $T$  et  $Y$  matrices de passage s'exprimant par :

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & B \\ B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -B \\ -B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Où  $B = a / gS$ . Ce procédé numérique étant appliqué aux cellules internes du domaine de calcul, un traitement particulier aux frontières doit être appliqué.

### Conditions aux limites

Pour résoudre numériquement les équations du mouvement et déterminer l'état complet de l'écoulement en régime transitoire, Il est alors indispensable de compléter la solution aux cellules frontières par l'équation caractéristique de l'organe hydraulique, imposant un régime spécifique pour l'écoulement. Cette équation complémentaire de l'appareil peut s'écrire sous une forme générale comme une relation fonctionnelle de la manière suivante :

$$\Omega\left(\frac{dU}{dt}, U, t\right) = 0 \quad (12)$$

Avec  $\Omega$  relation fonctionnelle liant le vecteur  $U = [H, Q]^T$  au temps pour les organes imposant une relation différentielle, comme est le cas pour les cheminées d'équilibre.

### Stabilité numérique

Pour les équations hyperboliques et dont la méthode de calcul est explicite, il faut remplir la condition de stabilité de *Courant*, dite règle CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*). De manière simple, cette règle stipule que la méthode de calcul utilisée doit pouvoir propager l'onde d'information (signal) de façon correcte du point de vue physique, c'est-à-dire avec la célérité réelle donnée par les valeurs propres de la matrice *jacobienne*  $\partial F(U)/U$ . Dans ce cas, le nombre de *Courant* est défini par :

$$C_r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_p |\lambda^{(p)}| \quad (13)$$

Où  $\lambda^{(p)}$  sont les valeurs propres de la matrice *jacobienne* du flux. Ce nombre doit remplir la condition  $C_r \leq 1$  (LeVeque, 2002; Guinot, 2008).

### Intégration du terme source

Après résolution de la partie homogène du modèle mathématique (problème de *Riemann*) dans l'approche de *Godunov*, la méthode utilisée pour l'incorporation du terme source consiste à résoudre le second membre de l'équation (3) comme une équation différentielle ordinaire (Zhao et Guidaoui 2004):

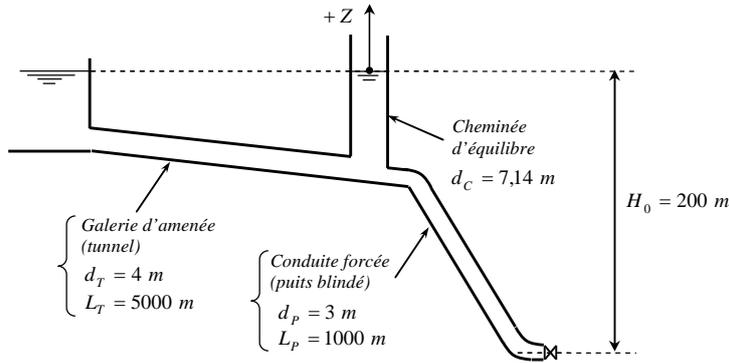
$$\frac{dU}{dt} + G = 0 \quad (14)$$

Pour ce faire, il est d'usage de faire appel aux techniques de résolution dites à pas fractionnés, telle que la méthode *Runge-Kutta*.

## RESULTATS ET DISCUSSION

Dans la présente application nous nous proposons d'appliquer la méthode des volumes finis (schéma de *Godunov*) à l'étude du régime transitoire dans une installation hydro-électrique pourvue d'une chambre d'équilibre. L'objectif est

alors d'étudier la réponse du système par son mode propre d'ondes élastiques et l'appréhension de l'interaction dynamique du couple "Galerie-Conduite forcée". L'aménagement hydro-électrique étudié ici se compose d'une galerie d'amenée d'eau d'un linéaire de 5 km et d'un diamètre de 4 m, se terminant immédiatement à l'aval par une cheminée d'équilibre prismatique formant 40 m<sup>2</sup> de section transversale. Cette chambre d'équilibre absorbe les pressions dynamiques transmises par la conduite forcée dont le diamètre est de 3 m avec une longueur atteignant 1000 m (Figure 2).



**Figure 2:** Schéma descriptif de l'aménagement hydro-électrique simulé

Les données hydrauliques complètes relatives à l'installation sont regroupées dans le tableau (1) ci-dessous.

**Tableau 1:** Données hydrauliques de l'installation hydro-électrique

<b>Galerie d'amenée</b>	
Longueur	5 000 m
Débit véhiculé	20 m <sup>3</sup> /s
Diamètre	4.0 m
Section transversale	12.5 m <sup>2</sup>
Coefficient de frottement ( )	0,0168
Célérité des ondes	1 000 m/s
<b>Conduite forcée</b>	
Longueur	1 000 m
Diamètre	3.0 m
Section transversale	7.08 m <sup>2</sup>
Coefficient de frottement ( )	0,0154
Célérité des ondes	1 000 m/s
<b>Cheminée d'équilibre</b>	
Type	Circulaire
Diamètre	7,14 m
Section transversale	40 m <sup>2</sup>

Le calcul numérique se limitera ici à la simulation du comportement transitoire de l'installation pour les deux cas suivants :

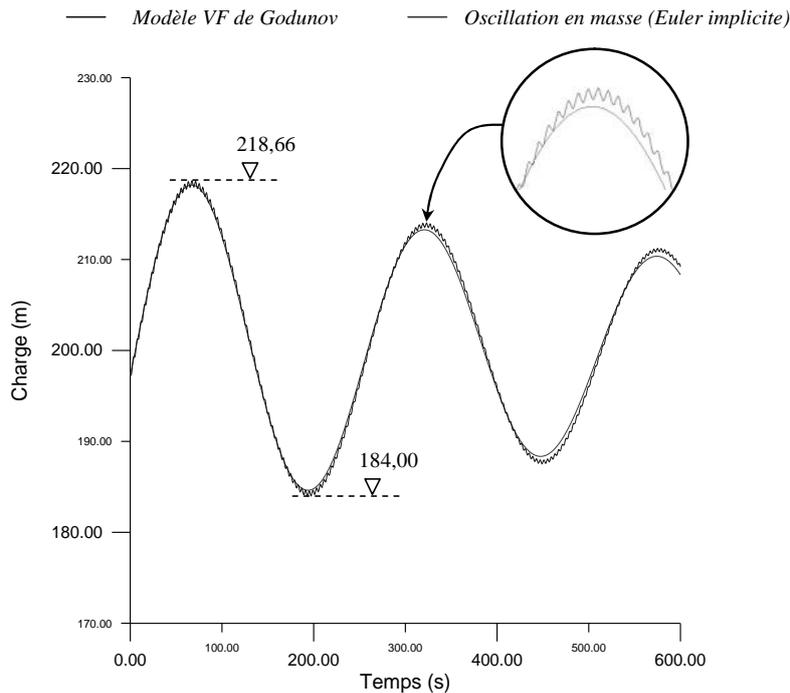
- Analyse de la réponse dynamique suite à une annulation brusque du débit turbiné (avec prise en compte des pertes de charge) ;
- Analyse de l'influence des dimensions de la cheminée.

### **Réponse transitoire du système tenant compte des pertes de charge**

Ce test vise à déterminer l'ordre de grandeur de la variation du plan d'eau dans la dite cheminée ainsi que l'amortissement et l'atténuation de l'amplitude des ondes. Les paramètres de calcul considérés dans ce cas sont :

- Durée de la simulation du phénomène:  $t_s = 600 \text{ s}$  ;
- Cas de charge : arrêt des turbines (fermeture brusque de l'obturateur) ;
- Pas de temps de calcul :  $0,5 \text{ s}$  ;
- Pertes de charge dans la galerie d'amenée :  $J_T = 2,71 \text{ m}$  ;
- Pertes de charge dans la conduite forcée :  $J_p = 2,09 \text{ m}$  ;

Pour pouvoir comparer les résultats découlant du modèle numérique aux volumes finis ainsi que ceux de la théorie de la colonne rigide, on a procédé à la résolution de l'équation différentielle du mouvement oscillatoire. A cet effet, et en absence d'une solution analytique de l'équation en raison de la non-linéarité du terme de frottement, nous avons fait usage de la méthode d'*Euler* implicite (Griffiths et Higham, 2010). Sur la figure (3) sont reportés les résultats du calcul numérique issus des deux modèles.

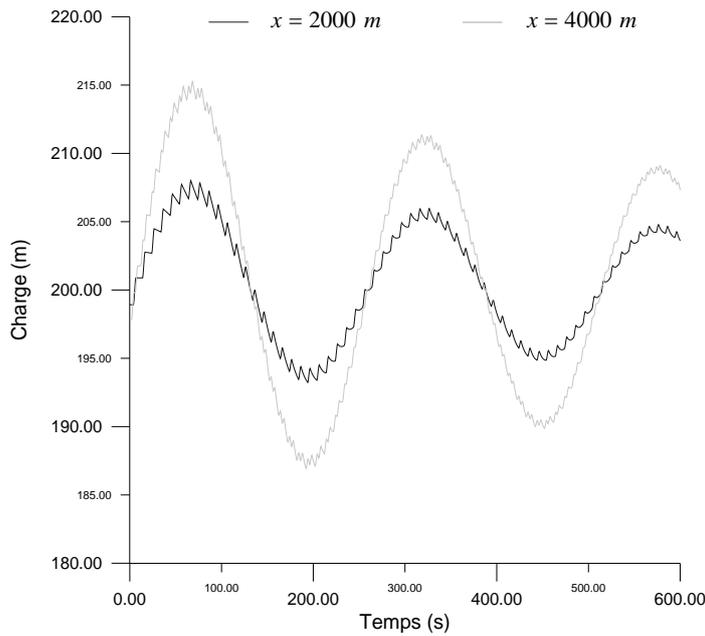


**Figure 3:** Variation du niveau d'eau dans la cheminée d'équilibre

Nous pouvons voir sur la figure (3) illustrant l'évolution du niveau d'eau dans la cheminée en fonction du temps, qu'à partir de la charge dynamique initiale de 197,29 m, ce dernier subit une hausse qui persiste au bout de 67 s pour atteindre sa valeur maximale de 218,66 m. Au cours de sa descente, le plan libre d'eau touche à sa valeur minimale à la cote 184,00 m, et ceci au temps 193 s. On peut alors remarquer le caractère périodique amorti du phénomène dû à la perte de charge avec une période propre  $T = 253,16$  s.

Une comparaison avec le calcul usuel de l'oscillation montre une concordance des résultats issus des deux modèles de calcul, avec toutefois la superposition au mode fondamental des oscillations harmoniques (d'ordre très élevé) pour le modèle complet des ondes élastiques pendant la première demi-période. Passé ce temps, on voit que le calcul usuel sous-estime les maxima et minima des fluctuations dans la cheminée d'équilibre. Ceci met en relief les pulsations du coup de bélier venant de la conduite forcée sur le mouvement d'ensemble de la colonne d'eau dans la cheminée.

En ce qui est de la variation temporelle de la charge dans la galerie d'amenée, les résultats sont mis en graphes sur la figure (4).

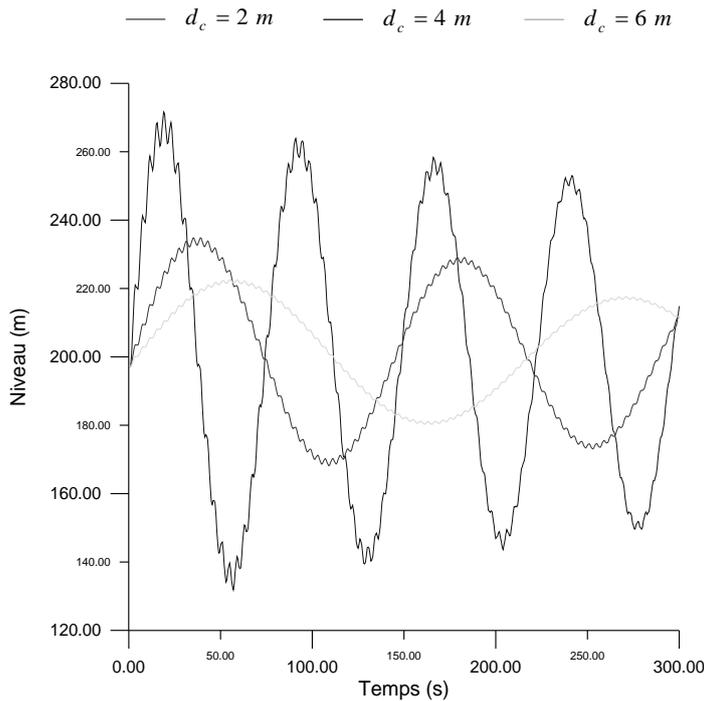


**Figure 4:** Variation temporelle de la charge dans la galerie d'amenée

A partir de cette dernière, il apparaît clairement l'influence du coup d'onde venant de la conduite forcée sur l'état dynamique dans la galerie d'amenée. Il est à remarquer qu'en se rapprochant vers le bassin et en s'éloignant de la cheminée, l'amplitude des harmoniques se voit augmentée. En raison de la présence de la cheminée d'équilibre, la charge maximale dans la galerie étant celle dictée par le niveau maximum atteint durant le régime transitoire. De ce fait, la répartition des maxima des charges le long de la galerie est linéaire en raison de la variation très lente du mouvement d'ensemble de la colonne liquide, toutefois ces fluctuations harmoniques de pulsation peuvent compromettre cette linéarité si celles-ci sont d'amplitude importante.

#### **Influence des dimensions de la cheminée d'équilibre**

Etant donné que les dimensions de la cheminée d'équilibre conditionnent le taux de réflexion et de réfraction des ondes émises à partir de la conduite forcée, on vise alors à mettre en exergue l'ordre d'impact de la dimension transversale de la chambre sur la réponse dynamique du système envisagé. Pour ce faire, plusieurs simulations ont été exécutées et sur des temps prolongés à 150 min en vue de déceler d'éventuelles résonances ou amplifications. Les diamètres testés prennent alors des valeurs de 2 m, 4 m, et 6 m. Les résultats de variation du plan d'eau dans la cheminée sont reportés sur la figure (5).



**Figure 5:** Influence du diamètre de la cheminée sur les mouvements de plan d'eau dans la cheminée

On remarque alors que le marnage dans l'ouvrage est inversement proportionnel aux dimensions de celui-ci. Par voie de conséquence, plus la section de la cheminée se voit en hausse, l'amplitude des fluctuations du plan libre d'eau se voit réduite. Ceci est dû à l'effet capacitif de la chambre où, en vertu du principe de continuité, l'emmagasinement des flux est à cet effet plus important. On assiste alors à un mouvement saccadé très agité du niveau d'eau dans la cheminée comparativement à des diamètres conséquents de celle-ci, ce que la figure précédente traduit bien.

En toute rigueur, pour les petits diamètres de la cheminée, les forces d'inertie rentrent en jeu pour accélérer le fluide dans l'organe. Ceci fait que la pression à la base de la cheminée soit supérieure à la pression hydrostatique admise dans nos modèles mathématiques. Dans ce cas, il faut adjoindre à l'équation différentielle de stockage, l'équation du mouvement (second principe de la mécanique) pour traduire la variation de l'impulsion en cet endroit. Cependant, l'influence de ce paramètre est négligeable en pratique, raison pour laquelle on ne s'est pas attaché à cette question.

## CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons appliqué une approche numérique aux Volumes Finis pour la résolution des équations aux dérivées partielles gouvernant les écoulements non permanents en charge. Ceci visait à simuler le comportement transitoire d'un système hydraulique muni d'une cheminée d'équilibre pour en prédire sa réponse dynamique.

A cet effet, en premier lieu, la méthode de discrétisation du modèle mathématique des ondes élastiques en charge par Volumes Finis a été présentée ainsi que les techniques d'implémentation des conditions aux limites et du terme source. Nous avons en l'occurrence appliqué un schéma de *Godunov* de premier ordre en raison de ses particularités, notamment de capture de choc.

Le système hydraulique simulé est un aménagement hydro-électrique typique pourvu d'une chambre d'équilibre prismatique. Un seul scénario a été étudié, qui est celui d'un rejet instantané de la charge sur les turbines, pour montrer l'application du modèle numérique présenté ici pour ce type de problèmes d'écoulement transitoire.

Il en a résulté des calculs ont montré une très bonne concordance avec ceux basé sur la théorie de l'oscillation en masse. Néanmoins, cette dernière approche néglige les effets d'élasticité (fluide et parois) et par conséquent ne considère pas le caractère réel de propagation d'ondes. Ainsi, le modèle numérique présenté basé sur la théorie des ondes élastique reproduit fidèlement la propagation des ondes du coup de bélier venant de la conduite forcée, effet mis en relief par les harmoniques observées sur les résultats de simulation.

L'étude paramétrique portant sur les dimensions de la cheminée a révélé l'influence de l'effet capacitif de l'ouvrage sur la capacité de transmission et de réflexion des ondes de la conduite forcée. Il a été observé que l'amplitude des fluctuations du niveau d'eau dans la chambre ainsi que la fréquence propre est inversement proportionnelle au diamètre de cette dernière.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BERGERON L. (1949). "Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité. Méthode graphique générale". Dunod, Paris.
- CHAUDHRY M. H. (1979). "Applied hydraulic transients". Van Nostrand.
- DE ALMEIDA B., KOELLE E. (1992). "Fluid transients in pipe networks". Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, Glasgow.
- ESCANDE L. (1950). "Méthodes nouvelles pour le calcul des chambres d'équilibre". Dunod, Paris.
- ESCANDE L. (1971). "Hydraulique Générale". Tome 2. Institut National Polytechnique de Toulouse, Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique.

- EYDOUX D. (1917). "Contribution à la technique de la houille blanche, les mouvements de l'eau et les coups de bélier dans les cheminées d'équilibre". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>ème</sup> série, Tome 9, 147-285.
- GHIDAOUI M.S., ZHAO M., MCLNNIS D.A., AXWORTH D.H. (2005). "A review of Water hammer Theory and Practice". Transactions of the ASME, Vol. 58, 49-76.
- GRIFFITHS D.F., HIGHAM D.J. (2010). "Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Initial Value problems". Springer Undergraduate Mathematics, London.
- GUINOT V. (2003). "Godunov-type schemes : an introduction for engineers". Elsevier Science B.V.
- GUINOT V. (2008). "Wave Propagation in Fluids : Models and numerical techniques". ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.
- JAEGER C. (1977). "Fluid transients in hydro-electric engineering practice". Blackie, London.
- LEON S.A. (2007). "Improved modeling of unsteady free surface, pressurized and mixed flows in storm-sewer systems ". Thèse de Doctorat de Philosophie (PhD) en Génie civil, Université d'Illinois.
- LEON A.S., GHIDAOUI M.S., SCHMIDT A.R., GARCIA M.H. (2009): "Application of Godunov-type schemes to transient mixed flows". Journal of Hydraulic Research, Vol. 47, N° 2, 147–156.
- LEVEQUE, R. J. (2002) : "Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems". Cambridge University Press, Cambridge.
- TORO ELEUTERIO F., GARCIA-NAVARRO P. (2007). "Godunov-type methods for free-surface shallow flows : A review". Journal of Hydraulic Research, Vol. 45, N° 6, 736–751.
- WYLIE E.B., STREETER V.L. (1978) : "Fluid transients". MacGraw-Hill.
- ZHAO M., GHIDAOUI M. S. (2004). "Godunov-type solutions for water hammer flows". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 130(4), 341-348.