

Ressaut hydraulique contrôlé par seuil dans un canal triangulaire

Control of hydraulic jump by sill in triangular channel

BACHIR ACHOUR, *Maître de Conférence, Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface, Université de Biskra, B.P. 145, 07000, Biskra, Algérie*

MAHMOUD DEBABÈCHE, *Maître-assistant chargé de Cours, Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface, Université de Biskra, B.P. 145, 07000, Biskra, Algérie*

ABSTRACT

The control of an hydraulic jump by a thin wall continuous sill in a triangular channel with an aperture of 90° is analyzed experimentally. A relationship for the control of the hydraulic jump under any conditions of generation is presented in an adimensional form in order to have a general validity character. The sill effect on the stilling basin is observed and evaluated. This research has its application in the ditch irrigation with triangular shape, using the jump ability to raise the flow head plane downstream.

RÉSUMÉ

Le contrôle du ressaut hydraulique par un seuil continu à paroi mince dans un canal de section triangulaire à angle d'ouverture de 90° est analysé par voie expérimentale. Une relation traduisant le contrôle du ressaut sous des conditions quelconques de formation est présentée en termes adimensionnels afin de lui donner un caractère de validité générale. L'effet du seuil sur la compacité du bassin amortisseur est observé et quantifié. Cette recherche trouve son application dans les raies d'irrigation de forme triangulaire, utilisant la capacité du ressaut à surélever le plan de charge à l'aval de l'écoulement.

Keywords: Hydraulic jump; classical jump; controlled jump; triangular channel; thin-crested sill; sill effect; stilling basin; compactness.

1 Introduction

Le ressaut hydraulique évoluant dans un canal de section droite triangulaire n'a pas connu un aussi grand intérêt que celui accordé à son homologue du canal rectangulaire. Cependant, bien que rares, les études qui y ont été consacrées tendent à montrer que le ressaut hydraulique dans un canal triangulaire est beaucoup plus avantageux vis-à-vis de la dissipation d'énergie et requiert une plus faible hauteur finale à l'aval pour la même valeur du nombre de Froude incident (Hager et Wanoschek, 1985). Toutefois, le choix de la section d'un bassin amortisseur ne repose pas sur le seul critère d'efficacité mais également sur l'aspect économique lié à sa réalisation ainsi que sur la stabilité du ressaut. Les premiers travaux connus sont ceux d'Argyropoulos (1962) et de Rajaratnam (1964) à travers son analyse des recherches de Silvester (1964). Tandis que le premier a mené son expérimentation dans un canal symétrique d'angle d'ouverture de 47° environ, le second a testé un canal d'angle d'ouverture de 60° . Les résultats ont montré, en règle générale, que l'équation de la quantité de mouvement demeure suffisante pour évaluer le rapport Y des hauteurs conjuguées du ressaut, bien que les points de mesures tendent à indiquer que Y expérimental

est légèrement inférieur au rapport Y théorique. Cet écart, estimé à environ 5% est également observé à travers l'analyse des résultats obtenus par Hager et Wanoschek (1985) pour le canal triangulaire d'angle d'ouverture de 90° . Il faut cependant signaler que cette dernière étude a été expérimentalement entreprise dans un canal semi-triangulaire d'angle d'ouverture de 45° composé d'une paroi verticale et d'une paroi inclinée et les résultats obtenus ont été extrapolés au ressaut évoluant dans le canal triangulaire symétrique d'angle d'ouverture de 90° . Cette extrapolation peut paraître peu fiable eu égard à l'influence que peut avoir la paroi verticale sur les caractéristiques d'un tel ressaut dont le comportement est de nature tridimensionnelle. En effet, des travaux plus récents (Achour, 1997) et relatifs au ressaut dans un canal symétrique d'angle d'ouverture de 90° ont abouti à des conclusions différentes de celles de Hager et Wanoschek (1985), notamment en ce qui concerne les longueurs caractéristiques du ressaut. Par ailleurs, la bibliographie montre que les travaux concernant le contrôle du ressaut par seuil n'ont été entrepris que sur le canal de section droite rectangulaire; à titre indicatif, nous pouvons citer les recherches de Forster et Skrinde (1950) et celles de Hager et Li (1992).

La présente étude se propose alors d'examiner, par la voie de l'expérimentation au laboratoire, le ressaut hydraulique contrôlé par un seuil continu à paroi mince dans un canal symétrique d'angle d'ouverture de 90° . Nous observerons l'influence du seuil sur les caractéristiques du ressaut tel que Y ainsi que sur la compacité du bassin amortisseur. Nous proposerons des relations adimensionnelles liant les divers paramètres intervenant au phénomène et nous établirons en particulier l'équation régissant le contrôle du ressaut sous des conditions quelconques de formation. Il faut cependant noter que la forme triangulaire n'est pas du tout adaptée aux grandes structures telles que les bassins amortisseurs, mais elle présente de multiples avantages lorsqu'elle est utilisée, à titre d'exemple, dans les raies d'irrigation. Dans ce cas, il est intéressant d'exploiter la capacité naturelle ou contrôlée d'un ressaut triangulaire à surélever le plan de charge aval (Achour, 1989) et cette particularité est souvent recherchée pour le prélèvement du débit requis. C'est dans ce domaine que notre travail trouve son application.

2 Position du problème

La mise en place d'un seuil continu à paroi mince de hauteur s (Figure 1) dans un canal triangulaire horizontal, à une distance x du pied du ressaut, provoque l'apparition de celui-ci. Le ressaut est généré par un convergent C inséré au pied d'un réservoir R . Pour une valeur donnée du débit Q_1 et pour une hauteur choisie s_1 du seuil, le ressaut peut s'étendre sur une longueur L_{j1} nettement inférieure à x (Figure 1a). L'accroissement du débit à $Q_2 > Q_1$ entraîne à la fois le déplacement du ressaut vers l'aval ainsi que l'augmentation de sa longueur à L_{j2} (Figure 1b). En dépit de l'augmentation du débit, la tranche d'écoulement en régime torrentiel de longueur Δx peut être réduite par la surélévation du

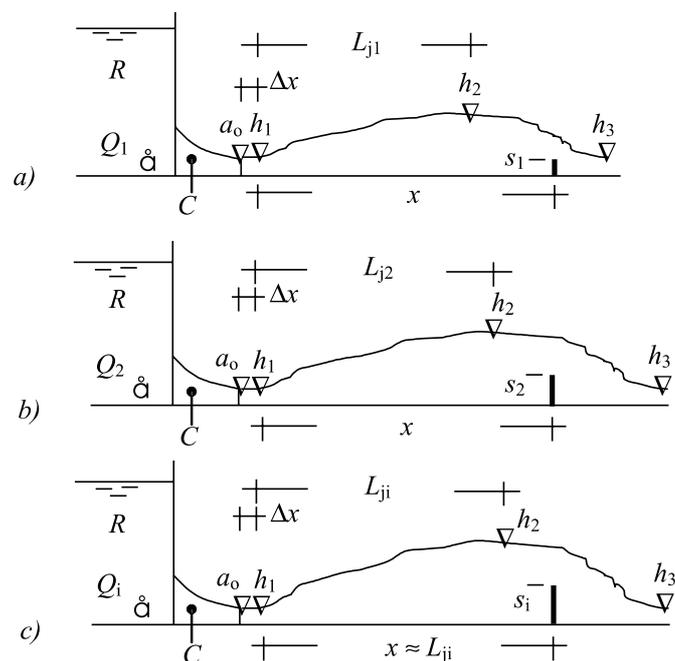


Figure 1 Configurations à débit croissant du ressaut contrôlé par un seuil à paroi mince.

seuil. L'accroissement de Q et de s implique une longueur relative L_j/x de plus en plus grande et à la limite égale à l'unité (Figure 1c). Plus la longueur x est grande et plus les valeurs de Q et de s doivent être élevées afin d'atteindre une longueur relative L_j/x égale à l'unité. Si la longueur Δx est suffisamment courte, la hauteur initiale h_1 du ressaut peut être raisonnablement assimilée à l'ouverture a_0 du convergent générant l'écoulement incident. Si l'on considère un seuil à paroi mince dénoyé, la hauteur h_3 à l'aval du seuil n'a aucune influence sur le débit et même sur le comportement du ressaut. Les paramètres intervenant au phénomène sont alors Q, h_1, s, x, L_j, g et θ , où g et θ représentent, respectivement, l'accélération gravitationnelle et l'angle d'inclinaison des parois du canal par rapport à l'horizontale. Ces paramètres permettent de composer les produits adimensionnels tels que le nombre de Froude de l'écoulement incident $F_1 = [2Q^2/(gm^2h_1^5)]^{1/2}$ avec $m = \cot \theta$ où \cot est la cotangente et $h_1 \approx a_0$, la hauteur relative du seuil $S = s/h_1$, la position relative du seuil $X = x/h_1$ et enfin $\lambda_j = L_j/x$, qui sont liés par la relation fonctionnelle $f(F_1, S, X, \lambda_j) = 0$. L'un des objectifs de la présente étude est de définir f pour l'ensemble des configurations du ressaut, c'est à dire pour toute valeur de la longueur relative λ_j , et notamment pour $\lambda_j = 1$.

3 Procédure expérimentale

Le canal horizontal (Figure 2), de section droite triangulaire symétrique et dont les parois sont inclinées de $\theta = 45^\circ$ est d'une longueur de 4 mètres, suffisante à la formation complète du ressaut pour toute la gamme des débits Q utilisés $4 \text{ l/s} \leq Q \leq 30 \text{ l/s}$. Ceux-ci ont été évalués par un débitmètre à diaphragme à $\pm 0,5 \text{ l/s}$. L'écoulement incident est généré par la mise en place d'un convergent en charge C de section droite triangulaire dont le rôle est d'une part de provoquer un écoulement à grande vitesse et d'éviter la mesure de la profondeur h_1 d'autre part; il est en effet très délicat de procéder à la lecture limnimétrique de h_1 en raison du caractère fortement torrentiel de l'écoulement incident. Pour chacune des valeurs expérimentalement obtenues de F_1 telles que $1,60 \leq F_1 \leq 10,90$, la hauteur s du seuil a été choisie de telle sorte que la longueur Δx soit environ égale à 4 à 5 cm. Cette distance n'a pu être réduite davantage en raison de l'instabilité horizontale du ressaut. Les hauteurs d'eau amont h_1 qui correspondent à l'ouverture de sortie du convergent C ont été telles que $40 \text{ mm} \leq h_1 \approx a_0 \leq 80 \text{ mm}$. Les distances horizontales ont été mesurées à l'aide d'un ruban gradué, notamment la longueur L_j estimée à $\pm 10 \text{ cm}$. Cette longueur L_j a été associée à la section de l'écoulement caractérisée par une remontée de bulles d'air à la surface; celle-ci est par ailleurs quasi parallèle au fond du canal de mesures. La hauteur aval h_2 du ressaut a été mesurée à l'aide d'un limnimètre à vernier à double précision à $\pm 1 \text{ cm}$ à $1,5 \text{ cm}$, en raison des fluctuations parfois importantes de la surface libre aval. Afin de contrôler la position du ressaut, des seuils à paroi mince ont été utilisés. Dix neuf seuils d'épaisseur de 2 mm ont été testés et dont la hauteur s est telle que $4 \text{ cm} \leq s \leq 20 \text{ cm}$ correspondant à $0,50 \leq S \leq 4,5$. L'expérimentation a montré que le caractère dénoyé de l'écoulement (Figure 3a) est obtenu pour

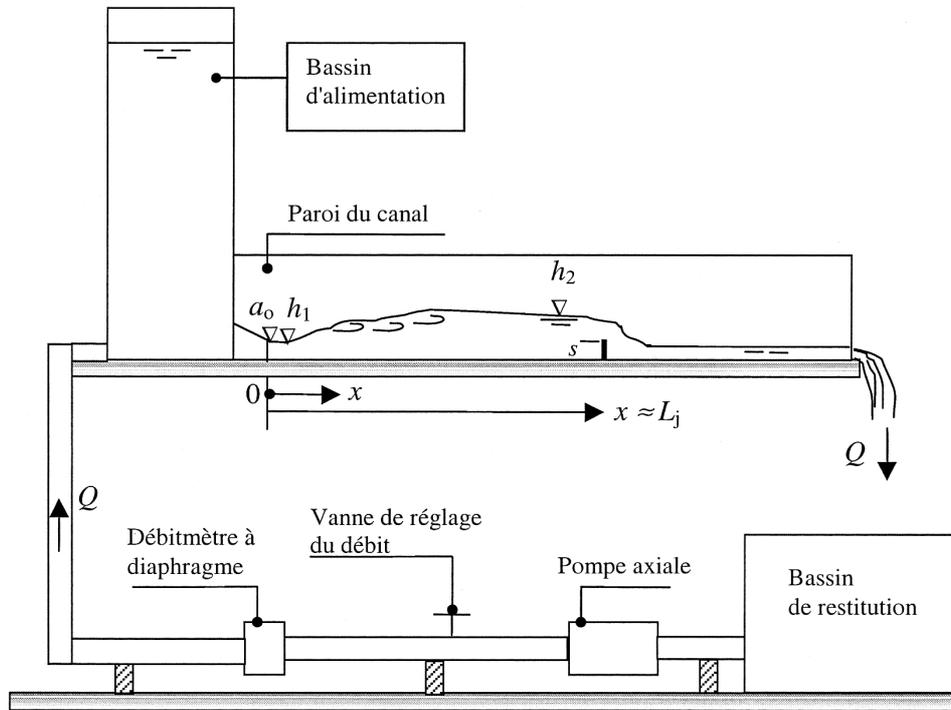


Figure 2 Schéma du dispositif expérimental.

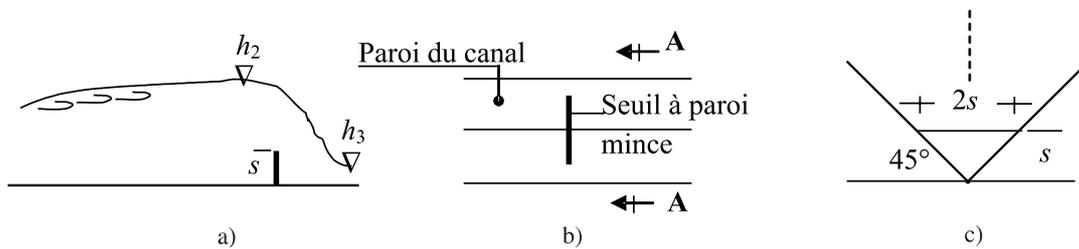


Figure 3 Ressaut contrôlé par un seuil à paroi mince. (a) profil de l'écoulement au-dessus du seuil, (b) vue en plan du canal, (c) Vue suivant A-A.

une profondeur h_3 à l'aval du seuil telle que $h_3 < h_2 - (3/4)s$, comme dans le cas du canal rectangulaire. L'installation a permis de faire varier X et λ_j dans les larges gammes $4 \leq X \leq 47$ et $0,03 \leq \lambda_j \leq 0,98$. Chaque série d'essais a été exécutée sous une hauteur h_1 constante.

4 Résultats expérimentaux

4.1 Influence du seuil sur le rapport des hauteurs conjuguées du ressaut

Théoriquement, le seuil ne devrait avoir aucun effet réducteur sur la hauteur finale h_2 du ressaut, puisque celui-ci n'est pas encore forcé (Rajaratnam, 1964). En d'autres termes, la hauteur aval h_{2T}^* du ressaut "classique triangulaire" doit être égale à la hauteur h_{2T} du ressaut contrôlé par le seuil, sous les mêmes conditions d'écoulement incident. Dans un premier temps, notre démarche a consisté à évaluer le rapport Y_T^* expérimental du ressaut classique triangulaire et le comparer au rapport Y_T^* théorique, pour la même valeur de F_1 . Cette première étape a été nécessaire afin d'observer un éventuel effet de frottement sur le rapport des hauteurs conjuguées. La Figure 4 compare la variation théorique et expérimentale de $Y_T^* = f(F_1)$, en notant que Y_T^* théorique a été

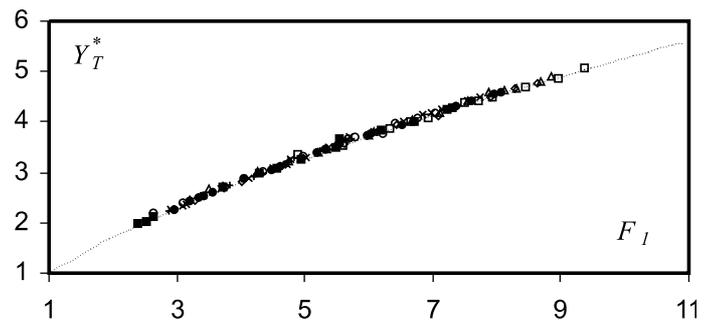


Figure 4 Variation théorique et expérimentale de du ressaut $Y_T^* = f(F_1)$ du ressaut "classique triangulaire" ($m = 1$). (---) relation (1). Points expérimentaux obtenus pour $2,32 \leq F_1 \leq 11$: (\square) $h_1 = 45$ mm, (Δ) $h_1 = 49,5$ mm, (\diamond) $h_1 = 52$ mm, (\times) $h_1 = 56,7$ mm, (\bullet) $h_1 = 60$ mm, (\blacksquare) $h_1 = 65,8$ mm, (\circ) $h_1 = 70$ mm, ($+$) $h_1 = 78,5$ mm.

évalué par l'équation suivante (Hager et Wanoscchek, 1985):

$$F_{1T}^2 = \frac{2Y_T^2(Y_T^{*2} + Y_T^* + 1)}{3(Y_T^* + 1)} \quad (1)$$

La Figure 4 ne montre aucun effet de frottement dans une large gamme de valeurs considérée de F_1 et la relation (1) demeure donc suffisante pour évaluer le rapport Y_T^* .

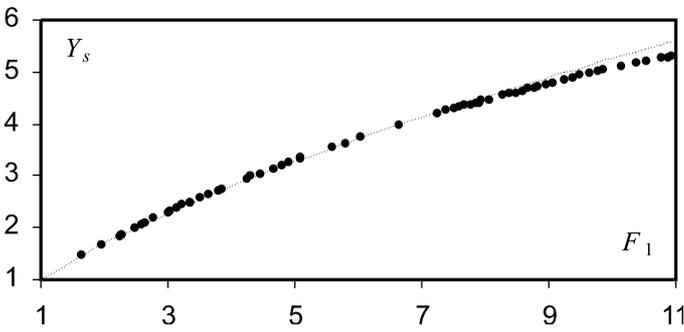


Figure 5 Variation expérimentale de dans un canal triangulaire lors du contrôle du ressaut.

La Figure 5 indique la variation expérimentale du rapport Y_s du ressaut contrôlé par seuil à paroi mince en fonction de F_1 . La relation (1) y est également représentée et nous pouvons noter que l'égalité $Y_s = Y_T^*$ n'est satisfaite que pour une certaine gamme de F_1 . L'influence du seuil sur le rapport des hauteurs conjuguées apparaît à des valeurs de F_1 supérieures à 7,50 environ. Cette influence s'accroît avec l'augmentation de F_1 mais elle n'est cependant pas significative; nous avons pu observer en effet que pour $F_1 \approx 11$, l'écart relatif est $(Y_T^* - Y_s)/Y_T^* \cong 5\%$. Nous pouvons ainsi admettre que la relation théorique (1) reste applicable au ressaut contrôlé par un seuil dans un canal triangulaire à angle d'ouverture de 90° puisqu'elle offre une certaine sécurité. Dans toute la gamme de F_1 testée, c'est à dire $1,60 \leq F_1 \leq 10,90$, un ajustement des valeurs expérimentales a montré que la variation de $Y_s = f(F_1)$ est de type logarithmique:

$$Y_s = 1 + 4Ln\left(\frac{F_1 + 4}{5}\right), \quad R^2 = 0,999 \quad (2)$$

Selon (2), la condition $F_1 = 1$ correspond $Y_s = 1$. L'analyse des mesures expérimentales a montré la possibilité de corrélérer Y_s et la hauteur relative S . La Figure 6 montre la variation expérimentale de $(Y_s - 1) = \zeta(S)$ pour le cas du seuil à paroi mince. Il ressort que cette variation suit une loi linéaire et un ajustement a permis d'écrire avec une excellente approximation $Y_s = (1 + 0,96S)$, $R^2 = 0,999$, où bien plus simplement:

$$Y_s \cong 1 + S \quad (3)$$

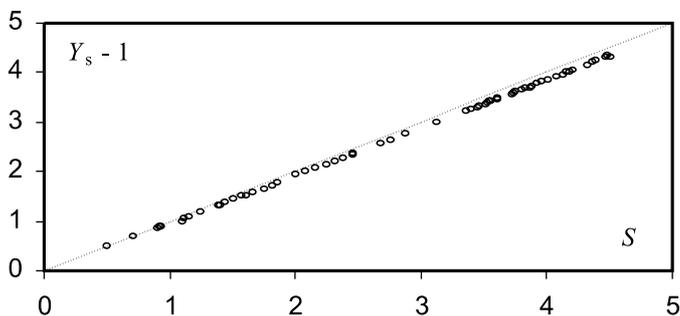


Figure 6 Variation expérimentale de $(Y_s - 1) = \zeta(S)$ lors du contrôle du ressaut par un seuil à paroi mince dans un canal triangulaire ($m = 1$). (---) relation (3).

Cette dernière égalité montre que $(h_2 - s) = h_1$, ce qui permet de conclure que le seuil est franchi par une lame d'eau d'épaisseur égale à la hauteur amont. Il ressort des relations (2) et (3) que:

$$S = 4Ln\left(\frac{F_1 + 4}{5}\right) \quad (4)$$

4.2 Relation générale régissant le contrôle du ressaut

Comme nous l'avons montré sur la Figure 1, le ressaut peut présenter diverses configurations pour une valeur choisie de la position x du seuil et de la hauteur initiale h_1 . Ainsi, pour une même valeur de la position relative $X = x/h_1$, la longueur relative $\lambda_j = L_j/x$ peut être inférieure ou à la limite égale à l'unité selon les conditions de l'écoulement incident, c'est à dire selon la valeur de F_1 lié à S par la relation (4). Pour la position extrême du ressaut correspondant à la valeur limite $\lambda_j \cong 1$, l'analyse des mesures expérimentales a montré que la meilleure représentation graphique adimensionnelle de la relation fonctionnelle $f(F_1, S, X) = 0$ répond à l'équation:

$$S + F_1^{2/5} = 0,127(X + 10), \quad R^2 = 0,999 \quad (5)$$

La relation (5) est applicable pour $\lambda_j \cong 1$ et $X \geq 4$, condition largement satisfaite dans la pratique. Nous présentons sur la Figure 7 les résultats obtenus pour le cas du seuil à paroi mince.

La relation (5) peut être généralisée à l'ensemble des configurations que peut prendre le ressaut telles qu'elles sont représentées sur la Figure 1 et répondant à l'inégalité $\lambda_j < 1$. Pour le cas du seuil à paroi mince, les essais que nous avons effectués ont pu aboutir à plus de 150 mesures expérimentales du couple (Ψ, λ_j) , où $\Psi = (S + F_1^{2/5} - 1,278)/(0,127X)$. La variation expérimentale de $\Psi(\lambda_j)$ est représentée sur la Figure 8, qui montre des points expérimentaux uniformément répartis autour de la courbe d'équation:

$$\Psi = 0,8\lambda_j^{3/2} + 0,2 \quad (6)$$

Pour la position extrême du ressaut correspondant à $\lambda_j = 1$, l'application de (6) indique que $\Psi = 1$ et la relation (5) est alors reproduite.

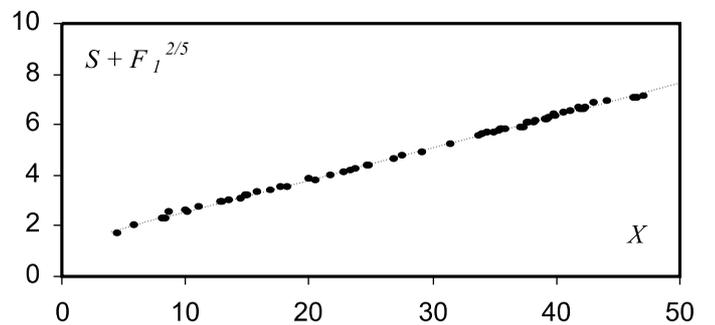


Figure 7 Variation expérimentale de $(S + F_1^{2/5}) = \varphi(X)$ lors du contrôle du ressaut par un seuil à paroi mince dans un canal triangulaire ($m = 1$) tel que $\lambda_j \cong 1$ (---) relation (5).

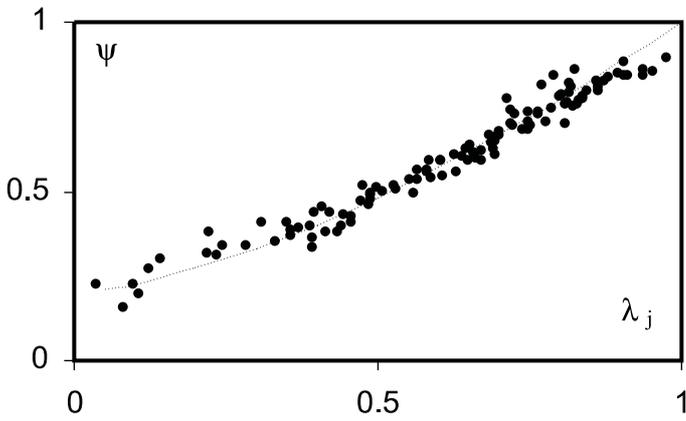


Figure 8 Variation expérimentale de Ψ en fonction de la longueur relative $\lambda_j = L_j/x$ lors du contrôle du ressaut par un seuil à paroi mince. (---) relation (6).

4.3 Effet de compacité

Nous avons montré que la mise en place d'un seuil à paroi mince n'a pas d'effet réducteur significatif sur le rapport des hauteurs conjuguées du ressaut. La présence du seuil ne sert essentiellement qu'à contrôler la position du ressaut. La présente partie de l'étude a pour but d'observer et de quantifier l'effet réducteur du seuil sur la compacité du bassin amortisseur. Cela revient à montrer que, sous les mêmes conditions d'écoulement incident, la longueur L_{jT}^* du ressaut "classique triangulaire" est supérieure à la distance x correspondant à la position du seuil. L'étude expérimentale du ressaut "classique triangulaire" (Achour, 1997), a montré que la longueur relative L_{jT}^*/h_1 est $L_{jT}^*/h_1 = 12,40(Y_T^* - 1)^{0,956}$, qui peut approximativement s'écrire:

$$L_{jT}^*/h_1 = 12,40(Y_T^* - 1) \quad (7)$$

La relation (7) a été obtenue pour $2 \leq Y_T^* \leq 5,6$ correspondant à $2,50 \leq F_1 \leq 11$. Pour la même valeur de la hauteur initiale h_1 , nous pouvons écrire que $x/L_{jT}^* = X/(L_{jT}^*/h_1)$ où $X = x/h_1$ est la position relative du seuil telle que $\lambda_j \cong 1$ et répondant à la relation (5) dans laquelle S est lié au nombre de Froude incident F_1 par la relation (4). Ainsi, en tenant compte des relations (4) et (5), nous pouvons écrire:

$$\frac{x}{L_{jT}^*} = \frac{4Ln((F_1 + 4)/5) + F_1^{2/5} - 1,270}{1,575(Y_T^* - 1)} \quad (8)$$

La relation (8) ainsi que les valeurs expérimentales de x/L_{jT}^* sont représentées sur la Figure 9. Celle-ci montre que le rapport x/L_{jT}^* est inférieur à l'unité et même inférieur à 0,90 dans toute la gamme considérée de F_1 .

La courbe expérimentale ci-dessus obtenue peut cependant être subdivisée en quatre zones suivant la gamme de valeurs de F_1 . C'est ainsi que pour les faibles valeurs de F_1 tel que $1 < F_1 \leq 3$, x/L_{jT}^* croît rapidement et subit un accroissement lent dans la gamme $3 \leq F_1 \leq 5$. Par contre, dans la gamme $5 \leq F_1 \leq 7$, x/L_{jT}^* demeure quasi constant et subit une légère diminution au fur et à mesure que F_1 croît dans la gamme $7 \leq F_1 \leq 11$. Ce sont les deux dernières zones qui sont à considérer puisqu'elles correspondent à des valeurs pratiques de F_1 et montrent alors que

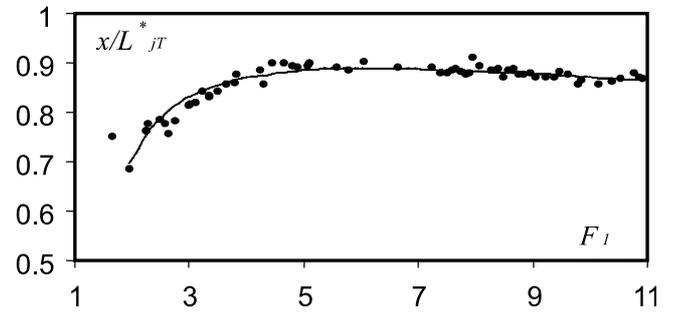


Figure 9 Variation expérimentale de x/L_{jT}^* en fonction de F_1 lors du contrôle du ressaut par un seuil à paroi mince dans un canal triangulaire. (---) relation (8).

$x/L_{jT}^* < 0,90$. Ce résultat implique que la mise en place du seuil à paroi mince réduit la longueur du bassin de plus de 10% (12% pour $F_1 = 9$).

5 Conclusion

Le contrôle du ressaut par un seuil à paroi mince dans un canal triangulaire d'angle d'ouverture de 90° est expérimentalement étudié. L'écoulement incident non développé est généré par la mise en place d'un convergent en charge. L'analyse des mesures expérimentales montre que la mise en place du seuil n'a pas d'effet réducteur significatif sur le rapport des hauteurs conjuguées du ressaut pour $X \geq 1$. En outre, la représentation graphique des mesures expérimentales montre que $(Y_s - 1)$ augmente au fur et à mesure que la hauteur relative S du seuil croît; l'interdépendance des paramètres adimensionnels S et F_1 est alors mise en évidence. La relation générale régissant le contrôle du ressaut est proposée en termes adimensionnels pour toute configuration telle que $\lambda_j \leq 1$; la relation obtenue permet en particulier le dimensionnement du bassin pour la position extrême du ressaut correspondant à $\lambda_j = 1$. Si l'effet réducteur du seuil sur le rapport des hauteurs conjuguées du ressaut n'est pas significatif, sa mise en place induit cependant un effet de compacité non négligeable. L'étude montre en effet que la longueur du bassin est réduite d'au moins 10%.

Remerciements

Nous tenons à présenter nos vifs remerciements à Monsieur le Professeur W.H. Hager du laboratoire d'Hydraulique, Hydrologie et Glaciologie VAU de l'École Polytechnique Fédérale de Zurich pour ses recommandations et ses encouragements à l'élaboration de ce travail.

Notations

F_1 (-)	=	Nombre de Froude incident
g (ms^{-2})	=	Accélération de la pesanteur
h (m)	=	Profondeur d'écoulement
L_j (m)	=	Longueur du ressaut
m (-)	=	Cotangente de l'angle d'inclinaison de la paroi du triangle par rapport à l'horizontale

Q ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)	=	Débit volume
s (m)	=	Hauteur de seuil
S (-)	=	Hauteur relative de seuil $S = s/h_1$
x (m)	=	Position de seuil
X (-)	=	Position relative de seuil $X = x/h_1$
Y (-)	=	Rapport des hauteurs conjuguées du ressaut
Y_s (-)	=	Rapport des hauteurs conjuguées du ressaut contrôlé par seuil
λ_j (-)	=	Rapport de la longueur du ressaut à la position du seuil $\lambda_j = L_j/x$

References

- ACHOUR, B. (1989). "Jump Flowmeter in a Channel of Triangular Cross-section Without Weir", *J. Hydr. Res.*, 27, n°2, 205–214.
- ACHOUR, B. (1997). Dissipateurs d'énergie par ressaut, Thèse de Doctorat d'état en Hydraulique, Université de Tizi-Ouzou, Algérie.
- ARGYROPOULOS, P.A. (1962). General Solution of the Hydraulic Jump in Sloping Channels", *Proc. ASCE, J. Hydr. Div.*, 88(HY4), 61–75.
- FORSTER, J.W. and SKRINDE, R.A. (1950). "Control of Hydraulic Jump by Sills", *Trans. ASCE*, 115, 973–1022.
- HAGER, W.H. and LI, D. (1992). "Dissipateurs d'énergie contrôlé par seuil", *J. Recherches Hydrauliques*, 30, n°2, 165–181.
- HAGER, W.H. and WANOSCHEK, R. (1985) "Ressaut hydraulique en canal triangulaire", *J. Recherches Hydrauliques*, 25, n°5, 549–564.
- RAJARATNAM, N. (1964). "Discussion of Silvester", *Proc. ASCE, J. Hydr. Div.*, 90(HY4), 341–350.
- RAJARATNAM, N. (1964). The Forced Hydraulic Jump, *Water Power*, January, 14–19, February, 61–65.
- SILVESTER, R. (1964). "Hydraulics Jumps in all Shapes of Horizontal Channels", *Proc. ASCE, J. Hydr. Div.*, 90, 23–55.

Annexe 1 Données expérimentales du ressaut contrôlé par un seuil à paroi mince pour $\lambda_j = 1$.

F_1	1,64	1,96	2,24	2,26	2,27	2,47	2,58	2,62	2,75	2,99	3,02
Y_s	1,50	1,68	1,86	1,88	1,89	2,00	2,06	2,09	2,20	2,30	2,32
S	0,50	0,71	0,90	0,92	0,93	1,10	1,11	1,15	1,24	1,38	1,40
X	4,50	5,85	8,08	8,20	8,40	9,60	10,07	10,03	11,04	12,75	12,96
F_1	3,12	3,22	3,34	3,35	3,49	3,64	3,78	3,83	4,24	4,29	4,44
Y_s	2,38	2,45	2,50	2,50	2,58	2,65	2,72	2,76	2,95	3,00	3,06
S	1,44	1,50	1,57	1,60	1,66	1,75	1,81	1,85	2,00	2,08	2,15
X	13,52	14,43	14,85	14,95	15,80	16,83	17,60	18,23	20,48	20,00	21,75
F_1	4,65	4,79	4,90	5,08	5,09	5,57	5,78	6,03	6,64	7,23	7,37
Y_s	3,15	3,20	3,26	3,35	3,36	3,56	3,62	3,75	4,00	4,22	4,27
S	2,25	2,31	2,37	2,45	2,46	2,68	2,75	2,87	3,12	3,35	3,40
X	22,80	23,34	23,73	24,63	24,83	26,80	27,51	29,15	31,35	33,73	33,95
F_1	7,50	7,58	7,66	7,75	7,83	7,89	7,93	8,05	8,26	8,38	8,47
Y_s	4,30	4,33	4,37	4,39	4,41	4,42	4,46	4,48	4,56	4,60	4,62
S	3,44	3,46	3,51	3,53	3,55	3,54	3,60	3,60	3,72	3,74	3,75
X	34,42	34,97	35,32	35,49	35,58	35,91	37,31	37,06	37,59	38,16	37,72
F_1	8,58	8,67	8,75	8,82	8,95	9,05	9,23	9,38	9,47	9,62	9,77
Y_s	4,65	4,70	4,70	4,73	4,77	4,80	4,85	4,91	4,95	5,00	5,01
S	3,80	3,83	3,86	3,88	3,92	3,96	4,01	4,07	4,13	4,15	4,18
X	38,32	39,22	39,07	39,31	39,92	39,82	40,50	41,06	41,87	42,20	42,75
F_1	9,85	10,14	10,38	10,52	10,75	10,86	10,92				
Y_s	5,05	5,13	5,20	5,23	5,30	5,30	5,33				
S	4,20	4,32	4,36	4,38	4,47	4,50	4,48				
X	42,36	42,95	44,10		46,23	47,10	46,43				

Annexe 2 Quelques données expérimentales de la fonction ι pour $\lambda_j < 1$.Série A: $x = 248$ cm, $h_1 = 4,95$ cm

ι	0,4140	0,4623	0,5045	0,5187	0,6127	0,6170	0,6670	0,6657	0,6988	0,7486
λ_j	0,3064	0,4839	0,5080	0,5242	0,6048	0,6935	0,6572	0,6935	0,7500	0,7863
ι	0,7612	0,7879	0,7925	0,8089	0,8242					
λ_j	0,8064	0,8024	0,8145	0,8185	0,8145					

Série B: $x = 283$ cm, $h_1 = 5,20$ cm

ι	0,3550	0,3910	0,4403	0,5000	0,5391	0,5651	0,5961	0,6230	0,6714	0,7312
λ_j	0,3286	0,3569	0,4205	0,4876	0,5653	0,5653	0,6466	0,6713	0,6820	0,7243
ι	0,7374	0,7852								
λ_j	0,7455	0,7986								

Série C: $x = 248,5$ cm, $h_1 = 5,67$ cm

ι	0,3689	0,3925	0,3989	0,4386	0,4580	0,5107	0,5401	0,5592	0,5625	0,5963
λ_j	0,3559	0,3675	0,3868	0,3945	0,4062	0,5300	0,5880	0,6267	0,5797	0,6692
ι	0,6299	0,6692	0,6872	0,7349	0,7593	0,7705	0,7984	0,8288	0,8413	0,8505
λ_j	0,6886	0,7000	0,7466	0,7621	0,8278	0,8317	0,8626	0,8704	0,8781	0,8936

Série D: $x = 266,6$ cm, $h_1 = 6$ cm

ι	0,1586	0,2276	0,3437	0,3631	0,3833	0,4017	0,4120	0,4295	0,4725	0,4939
λ_j	0,0788	0,0975	0,2438	0,3900	0,4313	0,4388	0,4538	0,4538	0,4726	0,4876
ι	0,5368	0,5648	0,5926	0,6076	0,6155	0,6502	0,6791	0,7057	0,7428	0,7774
λ_j	0,5514	0,5814	0,6039	0,6376	0,6564	0,6939	0,6977	0,7164	0,7164	0,7127
ι	0,8198	0,8440	0,8644	0,8841						
λ_j	0,7689	0,7877	0,8252	0,9040						

Série E: $x = 274,5$ cm, $h_1 = 6,58$ cm

ι	0,2022	0,3131	0,3204	0,3419	0,4127	0,5000	0,5928	0,6096	0,6282	0,7080
λ_j	0,1056	0,2331	0,2186	0,2805	0,3497	0,5574	0,5828	0,6266	0,6448	0,7468
ι	0,7309	0,7656	0,8117	0,8441	0,8566					
λ_j	0,7614	0,8124	0,8634	0,9362	0,9508					

Série F: $x = 299$ cm, $h_1 = 7,85$ cm

ι	0,2708	0,3077	0,4278	0,4798	0,5000	0,5254	0,5343	0,5856	0,5952	0,6794
λ_j	0,1672	0,3177	0,4180	0,4682	0,5017	0,5418	0,5518	0,6120	0,6421	0,6689
ι	0,6928	0,7060	0,7342	0,7717	0,7922					
λ_j	0,7358	0,7525	0,8027	0,8361	0,8528					

