



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté Des Sciences Et De La Technologie
Département de génie mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Réf. : Entrez la référence du document

Présenté et soutenu par :

Sadki Chouaib

Segheiri Abdellatif

Le : dimanche 26 juin 2022

Détermination de la longueur d'établissement d'un écoulement laminaire dans un tube circulaire

Jury :

Mr	Adnane LABED	Pr	Université de Biskra	Président
Mr	Chawki MAHBOUB	MCB	Université de Biskra	Rapporteur
Mme	Nora BOULTIF	MCB	Université de Biskra	Examineur

Année universitaire : 2021 - 2022

Remerciements

Ce projet vient consacrer plusieurs années d'études et de recherches qui s'inscrivent Dans le cadre d'une formation au niveau de Faculté des Sciences et de la Technologie de Biskra pour l'obtention d'un diplôme de Master en Génie mécanique énergétique.

Bien que cet ouvrage représente une très grande satisfaction, il demeure avant tout important pour nous d'exprimer nos plus sincères remerciements à toutes celles et ceux qui, de façon directe ou indirecte, Qui nous a aidé à réaliser le projet. Et spécialement :

❖ A Monsieur Chawki MAHBOUB Notre encadreur pour nous avoir proposés ce projet. Pour son encouragement, son soutien, sa disponibilité, ses précieux conseils et avis éclairés sur ce travail. Pour la patience qu'il a eu à relire.

Nos longs manuscrits pour sa gentillesse et sa bonne humeur. Avec nos plus sincères remerciements pour son aide et tout le temps qu'il nous a consacré.

❖ Laboratoire génie mécanique (LGM) pour avoir assuré l'environnement de travail.

❖ A Nos parents, Auxquels on doit tant et à qui on ne pourrait rendre assez. Qui nous a toujours encouragé et soutenu tout au long de ces années d'études jusqu'à la Faculté. Pour tout l'amour qu'ils nous ont donné et qu'ils nous donnent encore. Avec toute nos affections et nos remerciements.

. ❖ Nous adressons aussi nos remerciements les plus sincères aux membres du jury, pour avoir accepté de juger et d'examiner notre travail.

Dédicace

À nos parents, la raison pour laquelle nous sommes ici aujourd'hui Merci
pour votre grand soutien et vos soins continus.

À tous les membres de notre famille, nous vous sommes vraiment
reconnaisants en tant qu'inspiration et à notre meilleur ami

À tous nos professeurs à tous les niveaux de l'éducation pour leur grand
effort

Et à nos meilleurs amis

Ayoub MACHIOURI, Salim BOUIDIAF, Khaled BOULEBBINA, Jabir BOUYALI,
Mohamed BETTAYABE, Youcef BAIA, Walid BAKKARI, Chawki ATTAF,
Boubaker OTMANE, Ahmed DJALLEL, Mohamed BENZEKRI, Khaled BADI,
Sohaib Rouba, Okba DUIBI, Abdelkader REZIG

A tous les amis de l'université sans exception.

A toute la famille de l'institut de génie mécanique

Et toute la promotion 2022.

ملخص

للتحقق مما إذا كانت فرضية الاستقرار الديناميكي لجريان مائع لزج داخل أنبوب مبررة، يجب أولاً معرفة مقدار الطول اللازم لكي يصل هذا الجريان لحالة الاستقرار هاته. من أجل ذلك قمنا بإجراء دراسة عددية لهذه المسألة مستعملين طريقة الأحمال المتناهية وخوارزمية غاوس-سايدل لحل معادلات نافير-ستوكس في المجال $100 \leq \text{عدد رينولدز} \leq 2300$. وقد أكدت النتائج التي تحصلنا عليها ما وصلت إليه دراسات سابقة وهو أن طول الاستقرار الديناميكي يتغير خطياً مع عدد رينولدز في المجال المذكور سابقاً، ومنه اقترحنا العلاقة التالية:

$$\text{طول الاستقرار/قطر الأنبوب} = 0.0556 \times \text{عدد رينولدز} + 0.4724$$

الكلمات المفتاحية: جريان صفائحي؛ أنبوب أسطواني؛ طول استقرار الديناميكي

Résumé

Pour vérifier si l'hypothèse de l'établissement dynamique d'un écoulement de fluide visqueux dans un tube est justifiée, il faut d'abord connaître la longueur nécessaire pour que l'écoulement atteigne cet état établi. Pour cela, nous avons mené une étude numérique de ce problème en utilisant la méthode des volumes finis et l'algorithme de Gauss-Seidel pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans l'intervalle $100 \leq \text{Re} \leq 2300$. Les résultats que nous avons obtenus ont confirmé ce que des études antérieures avaient trouvé, que la longueur d'établissement varie linéairement avec le nombre de Reynolds dans l'intervalle considéré, d'où nous avons proposé la relation suivante :

$$\text{Longueur d'établissement/diamètre du tube} = 0,0556 \times \text{nombre de Reynolds} + 0,4724$$

Mots-clés : Ecoulement laminaire ; tube circulaire ; longueur d'établissement dynamique

Abstract

To check whether the hypothesis of a fully developed flow in a tube is justified, it is first necessary to know the entrance length needed to reach this fully development state. For this, we conducted a numerical study on this problem using the finite volume method and the Gauss-Seidel algorithm to solve the Navier-Stokes equations in the range $100 \leq \text{Re} \leq 2300$. The results we obtained confirmed what previous studies had found, that the entrance length varies linearly with Reynolds number in the considered range, from which the following relationship was suggested:

$$\text{entrance length/pipe diameter} = 0.0556 \times \text{Reynolds number} + 0.4724$$

Keywords: Laminar flow; circular tube; entrance length

Table des matières

Remerciements	I
Dédicaces.....	II
Résumé	III
Table des matières	V
Liste des figures.....	VII
Liste des tableaux.....	VIII
Nomenclature.....	IX
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités et Revue bibliographique	
I.1. Introduction	2
I.2. Types d'écoulements	2
I.2.1. Écoulement compressible ou incompressible	2
I.2.2. Stationnarité	2
I.2.3. Régime d'écoulement.....	2
I.2.3.1. Nombres de Reynolds	2
I.2.3.2. Régime laminaire ($Re < 2000$).....	3
I.2.3.3. Régime transitoire ($2000 < Re < 3000$).....	3
I.2.3.4. Régime turbulent ($Re > 3000$).....	3
I.3. Type de fluide.....	3
I.3.1. Fluide idéal (non-visqueux)	3
I.3.2. Fluide réel (visqueux).....	3
I.4. Equations de mouvement	4
I.4.1. Equation de continuité.....	4
I.4.2. Equations de Navier-Stokes	4
I.5. Écoulement établi.....	5
I.5.1. Profil de vitesse en régime laminaire établi	5
I.5.2. Profil de vitesse en régime turbulent établi.....	6
I.6. Écoulement non-établi	7
I.6.1. Région d'entrée et couche limite dans les écoulements internes.....	7

Table des matières

I.6.1. Corrélations de la longueur d'établissement.....	8
I.7. Revue bibliographique	8
I.8. Conclusion.....	11
Chapitre II : Simulation numérique	
II.1. Introduction.....	12
II.2. Description du problème et hypothèses	12
II.3. Formulations mathématiques	13
II.4. Forme adimensionnelle du modèle mathématique	13
II.5. Génération du maillage.....	14
II.6. Discrétisation avec la méthode des volumes finis	15
II.7. Conditions aux limites	17
II.8. Détermination de la longueur d'établissement	19
II.9. Algorithme de résolution numérique	19
II.10. Conclusion	20
Chapitre III : Résultats et Discussion	
III.1. Introduction	20
III.2. Champ dynamique.....	20
III.3. Longueur d'établissement.....	20
III.4. Conclusion.....	26
Conclusion générale.....	27
Références bibliographiques.....	28

List de figure

Figure I. 1 : Profil de vitesse en régime laminaire établi.....	5
Figure I. 2 : Profil de vitesse en régime turbulent établi.	6
Figure I. 3 :Développement d'une couche limite dans un tube.	7
Figure II. 1 : Géométrie du problème.....	12
Figure II. 2 : Maillages décalés.	14
Figure III. 1 : Profils de la vitesse longitudinale U pour $Re = 1100$	21
Figure III. 2 : Profils de la vitesse transversale V pour $Re = 1700$	21
Figure III. 3 : Variation de U le long du tube pour $Re = 100$	22
Figure III. 4 :Variation de U le long du tube pour $Re = 1100$	23
Figure III. 5 : Variation de U le long du tube pour $Re = 2100$	23
Figure III. 6 : Variation du coefficient de frottement local pour $Re=100-2100$	24
Figure III. 7 : Comparaison entre les corrélations de la longueur d'établissement.	25

Liste des tableaux

Tableau III. 1 : Variation de Le/D en fonction de Re 25

Nomenclature

Lettres latines :

L_e : longueur établissement : [m]

R_e : Nombre de Reynolds [/]

D : Diamètre de la conduite [m]

u, v : Composantes du champ de vitesse [m / s]

U : Vitesse adimensionnelle horizontale [/]

V : Vitesse adimensionnelle verticale [/]

x, r : Coordonnées cylindriques [m]

X, R : Cordonnées adimensionnelle [/]

D_h : Diamètre hydraulique [m]

\bar{u} : Vitesse moyenne [m / s]

Lettres grecques :

ρ : La masse volumique du fluide [kg / m^3]

ψ : Fonction de courant [/]

Ψ : Fonction de courant adimensionnelle [/]

ω : Vorticité [s^{-1}]

Ω : Vorticité adimensionnelle [/]

ν : La viscosité cinématique du fluide [m^2/s]

Introduction générale

Introduction générale

En tant qu'ingénieur, on cherche à résoudre des problèmes relativement complexes (de point de vue phénoménologique ou mathématique) avec des approches théoriques plus ou moins rigoureuses. Dans la mécanique des fluides et le transfert de chaleur, par exemple, l'étude se fait souvent sur des modèles mathématiques réduits qu'on peut construire à partir des principes fondamentaux de la physique sous des hypothèses simplificatrices. Ces dernières doivent être justifiées, sinon elles ne conduiront pas à des solutions fiables.

L'une des hypothèses souvent rencontrées lorsqu'on lit des recherches scientifiques en technologie des conduites et des échangeurs de chaleur, est celle de l'établissement dynamique des écoulements. Cela signifie que le profil de vitesse ne change pas dans le sens de l'écoulement, ce qui permet de déterminer facilement le frottement, les pertes de charge, l'échange de chaleur s'il y en a... etc. Si l'écoulement n'est pas établi depuis l'entrée du conduit, cette hypothèse peut encore être vérifiée si la soi-disant « longueur d'établissement » est très petite par rapport à la longueur totale du conduit. Ainsi, on devrait pouvoir quantifier cette longueur d'établissement avant d'émettre une telle hypothèse.

Donc, l'objectif visé dans ce travail est de fournir une corrélation qui permet de déterminer, à partir des données du problème, la longueur d'établissement dynamique d'un écoulement laminaire incompressible permanent entrant avec une vitesse uniforme dans une conduite de section circulaire.

Le présent travail est organisé en trois chapitres : le premier chapitre contient des concepts généraux sur les écoulements visqueux internes, les équations fondamentales de la dynamique des fluides et un résumé bibliographique d'ouvrages similaires ; le deuxième chapitre présente la résolution numérique détaillée avec la méthode des volumes finis du modèle mathématique régissant le problème en question ; le troisième chapitre est réservé à l'analyse des résultats obtenus à partir de cette simulation ; et en conclusion, nous discuterons la contribution apportée par cette étude.

Chapitre I :
Généralités et Revue
bibliographique

I.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter plusieurs concepts de la mécanique des fluides en général, et des écoulement internes en particulier. Ces concepts vont nous aider à comprendre la position du problème envisagé dans ce mémoire, ainsi qu'à répondre à la problématique posée, à savoir, quelle est la relation entre la longueur d'établissement relative L_e/D et le nombre de Reynolds Re_D ?. Une synthèse bibliographique des travaux scientifiques qui ont adressé ce sujet va être présentée également.

I.2. Types d'écoulements

I.2.1. Écoulement compressible ou incompressible

Un fluide incompressible est un fluide dont on ne peut changer le volume, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le comprimer dans un espace plus restreint. Les liquides sont des fluides incompressibles (eau, huile, mercure...etc.). Au contraire, Un fluide compressible est un fluide dont on peut changer le volume, c'est-à-dire qu'on peut le comprimer dans un espace plus restreint en exerçant une pression sur ce dernier. La totalité des gaz sont des fluides compressibles (air, oxygène, hydrogène, azote...etc.) [1].

I.2.2. Stationnarité

Un écoulement est stationnaire si, en tout point de l'espace, ses propriétés sont constantes dans le temps. Concrètement, toutes les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles ($\frac{\partial}{\partial t}=0$) [2].

I.2.3. Régime d'écoulement

I.2.3.1. Nombres de Reynolds

Le passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent dépend, entre autres, de la géométrie, la rugosité de surface, la vitesse d'écoulement et du type de fluide. Après des expériences exhaustives dans les années 1880, Osborne Reynolds a découvert que le régime d'écoulement dépend principalement du rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses dans le fluide. Ce rapport est appelé le nombre de Reynolds et s'exprime pour un écoulement interne dans un tube circulaire comme suit [3]:

$$Re = \frac{\rho UD}{\mu} \quad (I.1)$$

I.2.3.2. Régime laminaire ($Re < 2000$)

On appelle laminaire le mouvement très ordonné d'un fluide dont les couches qui le caractérisent sont lisses. Le mot laminaire provient de la stratification des particules de fluide [4].

I.2.3.3. Régime transitoire ($2000 < Re < 3000$)

Aux nombres de Reynolds compris entre 2000 et 3000 environ, l'écoulement est instable en raison de l'apparition de la turbulence. Ces écoulements sont parfois appelés écoulements transitoires.[5]

I.2.3.4. Régime turbulent ($Re > 3000$)

Les turbulences résultantes des forces d'inerties qui deviennent plus importantes que les forces de viscosité et la structure du fluide tendent à se transformer de manière irréversible et importante en une structure désordonnée et chaotique [4].

I.3. Type de fluide

I.3.1. Fluide idéal (non-visqueux)

Un fluide idéal est un fluide dépourvu de contrainte tangentielle qu'il soit au repos ou en mouvement. De ce fait les différentes couches du fluide peuvent glisser librement les unes sur les autres et ne présentent de contraintes de cisaillement ni au repos ni au mouvement. La force de viscosité est donc identiquement nulle. Donc la notion de fluide idéal signifie tout simplement que le fluide n'est le siège d'aucun frottement [6].

I.3.2. Fluide réel (visqueux)

Les diverses couches d'un fluide réel en mouvement ne peuvent pas glisser librement les unes sur les autres. Tout se passe comme si des frottements au sein du fluide s'opposaient aux mouvements relatifs des lignes de courant voisines. Cette résistance au glissement caractérise la viscosité d'un fluide, c'est la propriété inverse de la fluidité [5].

Si la viscosité est constante ou ne peut varier qu'en fonction de la température, le fluide est appelé newtonien. Mais, lorsque la viscosité varie avec le taux de déformation (taux de cisaillement), le fluide est appelé non-newtonien [6].

I.4. Equations de mouvement

Les équations fondamentales de la dynamique des fluides appliquée à un domaine matériel qu'on l'appel volume de contrôle, expriment la conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie dans l'approximation des milieux continus. Elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Ces équations peuvent être établies en utilisant les équations de la mécanique classique exprimant la conservation d'une propriété d'un système physique que nous suivons dans son mouvement, et le théorème de transport de Reynolds [7].

I.4.1. Equation de continuité

Cette équation exprime la conservation de la masse contenue dans le volume de contrôle. Elle énonce que la variation de la masse dans ce volume est égale au débit massique net traversant la surface de contrôle. Elle peut s'écrire dans les coordonnées cylindriques sous la forme locale suivante [7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.2})$$

I.4.2. Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent la conservation de la quantité de mouvement contenue dans le volume de contrôle. Elles énoncent que la dérivée particulaire du tenseur de quantité de mouvement est égale au tenseur des forces extérieures appliquées à ce volume. L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut être obtenue à partir de la 2nd loi de Newton [7], et elles peuvent s'écrire dans les coordonnées cylindriques sous la forme locale suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \dots$$

$$\dots \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) + \rho g_r \quad (\text{I.3})$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \dots$$

$$\dots \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta \quad (\text{I.4})$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \dots$$

$$\dots \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (\text{I.5})$$

I.5. Écoulement établi

Écoulement établi se produit lorsque les effets visqueux dus à la contrainte de cisaillement entre les particules de fluide et la paroi de la conduite créent un profil de vitesse à plein régime [8]. Lorsque la couche limite s'étend pour remplir la totalité de la conduite, l'écoulement en développement devient un écoulement entièrement développé (établi), où la vitesse de l'écoulement ne change plus avec l'augmentation de la longueur de cette conduite [9].

I.5.1. Profil de vitesse en régime laminaire établi

Dans un écoulement laminaire incompressible et permanent, l'hypothèse d'établissement dynamique nous permet d'apporter des simplifications considérables des équations de Navier-Stokes de sorte que nous puissions obtenir une solution analytique de ces équations complexes. La résolution de ces équations aboutit au profil de vitesse parabolique de Poiseuille [10] :

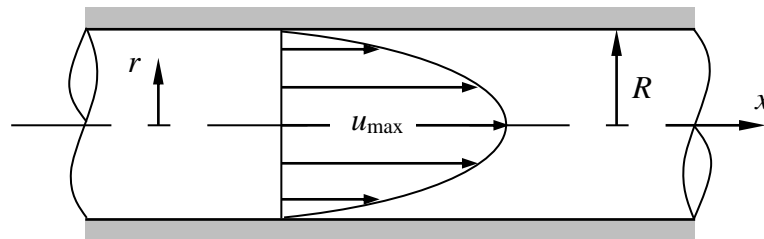


Figure I. 1 : Profil de vitesse en régime laminaire établi.

$$u(r) = U_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{I.6})$$

Ce profile vérifie les conditions aux limites, dont la vitesse est nulle immédiatement à la paroi de la conduite, puis elle augmente progressivement pour atteindre une valeur maximale à l'axe de symétrie.

I.5.2. Profil de vitesse en régime turbulent établi

Pour les écoulements turbulents établis, le profil de vitesse instantanée peut changer dans le temps et nous ne pouvons pas prédire à quoi ressemblera le profil exact d'un moment à l'autre. En outre, il existe des tourbillons de différentes tailles qui provoquent un mélange rapide de l'écoulement. Lorsque nous analysons des écoulements turbulents établis dans des conduites, nous n'analysons généralement pas le profil de vitesse instantané car sa forme exacte à un moment donné est imprévisible. Au lieu de cela, nous utilisons un profil de vitesse moyenné dans le temps (indépendant du temps). Le profil de vitesse turbulente moyenné n'a qu'une composante axiale qui varie radialement, comme pour les écoulements laminaires établis. Cependant, le profil de vitesse turbulente moyenné semble plus plat près du centre et tombe rapidement à zéro près des parois comme le montre la Figure I.2 [11] :

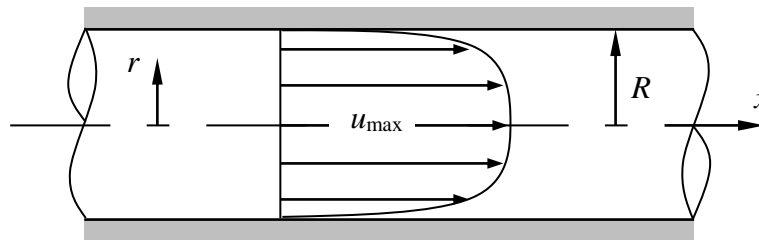


Figure I. 2 : Profil de vitesse en régime turbulent établi.

Une approximation empirique très utile pour le profil de vitesse moyenné d'un écoulement turbulent est la loi de puissance 1/7ème, proposée par Prandtl [11]:

$$\bar{u} = U_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{7}} = U_{\max} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (\text{I.7})$$

Il existe une autre approximation très utile également qui est la loi de la paroi, dont elle est valable pour la région qu'on appelle "couche interne" et qui se compose de trois zones :

Sous-couche visqueuse, zone tampon, couche logarithmique. Spalding à proposer la formule suivante valable pour ces trois zones [3]:

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B} \left(e^{\kappa u^+} - 1 - u^+ - \frac{1}{2} (\kappa u^+)^2 - \frac{1}{6} (\kappa u^+)^3 \right) \quad (\text{I.8})$$

avec :

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}, \quad \kappa \approx 0.40 - 0.41 \quad \text{et} \quad B \approx 5.0 - 5.5$$

I.6. Écoulement non-établi

Avant que l'écoulement soit établi, la vitesse évolue le long de la conduite et l'écoulement est donc non-établi. Il faut un certain parcours pour que les caractéristiques cinématiques n'évoluent plus d'une section droite à l'autre. Ce parcours s'appelle "longueur d'établissement" [4].

I.6.1. Région d'entrée et couche limite dans les écoulements internes

Lorsqu'un fluide entre dans un tube à une vitesse uniforme, les particules de fluide en contact avec la paroi s'arrêtent complètement en raison de la condition d'adhérence. Les forces visqueuses importantes près de la paroi ralentissent progressivement les couches de fluide adjacentes (couche limite visqueuse), provoquant une accélération des couches de fluide au centre du tube (écoulement de noyau non-visqueux) pour que la loi de continuité soit maintenue. La couche limite se propageant à partir de la paroi fusionne avec elle-même éventuellement à l'axe de symétrie du tube et le noyau non-visqueux disparaît. À ce point précis, nous sommes à la longueur d'établissement ($x = L_e$), à partir duquel le profil de vitesse est constant, la contrainte de cisaillement pariétale est constante et la pression chute linéairement avec x , pour un écoulement laminaire aussi bien que pour un écoulement turbulent [11].

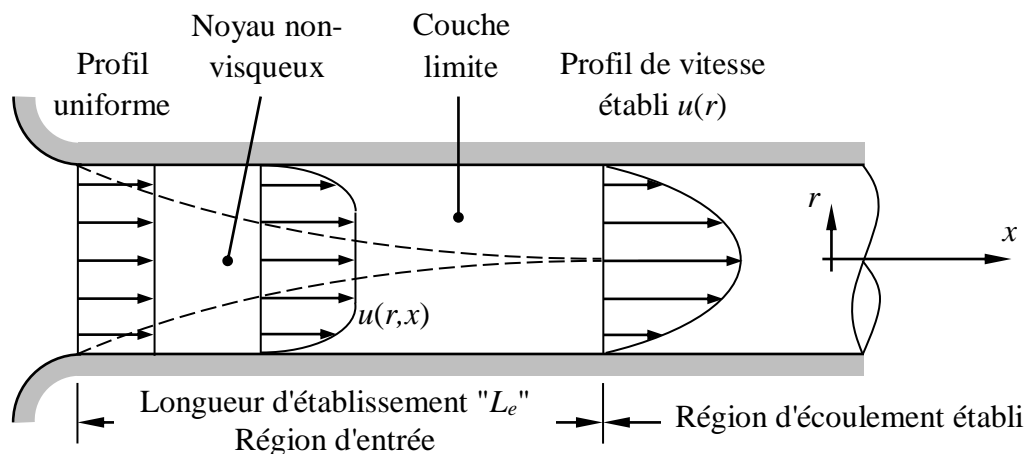


Figure I. 3: Développement d'une couche limite dans un tube.

I.6.1. Corrélations de la longueur d'établissement

L'analyse dimensionnelle montre que la longueur d'établissement relatif est en fonction que du nombre de Reynolds (elle peut aussi être en fonction de la rugosité de la paroi dans le

régime turbulent). Pour un écoulement laminaire, la longueur d'établissement peut être calculée à partir de la corrélation suivante [18]:

$$\frac{L_{e,\text{laminaire}}}{D} = 0.06 \text{Re}_D \quad (\text{I.9})$$

Dans un écoulement turbulent, la couche limite croît plus rapide par rapport au régime laminaire, et par conséquent la longueur d'établissement est relativement plus courte. Et elle peut être calculée par [20]:

$$\frac{L_{e,\text{turbulent}}}{D} = 4.4 \text{Re}_D^{1/6} \quad (\text{I.10})$$

$$\frac{L_{e,\text{turbulent}}}{D} = 1.359 \text{Re}_D^{1/4} \quad (\text{I.11})$$

I.7. Revue bibliographique

Nicol et al. [12] ont déterminé expérimentalement la longueur d'établissement (ou distance en aval de l'entrée requise pour le développement du profil de vitesse) pour un écoulement turbulent dont le nombre de Reynolds était compris entre 5000 et 50000, dans le cas de quatre conduites annulaires sectionnées pour entrée carrée, dont les rapports des diamètres étaient 0.2, 0.3, 0.5 et 0.7. En utilisant de l'air, ils ont pu obtenir des corrélations entre la longueur d'établissement, le diamètre hydraulique, le rapport des diamètres et le nombre de Reynolds. Pour des nombres de Reynolds inférieurs à 22000, les résultats peuvent être présentés par la corrélation $L_e/D_h = 0.795 \text{Re}_{D_h}^{0.374} (D_1/D_2)^{-0.60}$; tandis que la corrélation $L_e/D_h = 15.96 \text{Re}_{D_h}^{0.077} (D_1/D_2)^{-0.624}$ correspond aux nombres de Reynolds supérieurs à cette valeur.

Sridhar et al. [13] ont déterminé expérimentalement les longueurs d'établissement pour un écoulement turbulent d'air dans trois conduites annulaires concentriques lisses de rapports des diamètres de 0,306, 0,527 et 0,842. Les entrées à bords-carrés (à angle droit) et à cloche ont été étudiées pour un nombre de Reynolds allant de 7000 à 47500. La séparation de l'écoulement causée par le changement brusque de la surface de l'entrée carrée a entraîné des profils de vitesse distordus (déformés) près de l'entrée. Cette distorsion sera disparue plus loin en aval et finalement des profils de vitesse entièrement développés ont été établis. Les longueurs d'établissement relatives (L_e/D_h) pour les conduites annulaires avec les entrées à bords-carrés varient entre 25 et 35. Avec l'entrée en cloche, le profil de vitesse s'est développé conventionnellement à partir du profil presque uniforme à l'entrée,

et les longueurs d'établissement relatives étaient supérieures d'environ 10 à 15 par rapport à celles des entrées à bords-carrés.

Dombrowski et al. [14] ont effectué une analyse numérique de l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien dans la section d'entrée d'une conduite circulaire pour un nombre de Reynolds compris entre 0 et 500, au moyen d'un code de simulation par éléments finis. Un nouveau phénomène d'écoulement a été observé aux faibles nombres de Reynolds (< 50), soit l'existence d'un pic dans le profil de pression axiale à une courte distance de l'entrée. Ils ont montré également que les corrélations existantes pour la longueur d'établissement sont insuffisantes et ont proposé par conséquent une nouvelle corrélation pour cette longueur.

Chidamoio et al. [15] ont étudié numériquement l'effet du rapport longueur/diamètre (L/D_h) du tuyau sur le développement du régime d'écoulement biphasé air-eau. La vitesse axiale le long de la bulle de Taylor et la longueur d'établissement hydrodynamique nécessaire pour établir un profil parabolique (écoulement établi) ont été examinées de manière critique. La distribution excentrique de la vitesse axiale sur la bulle de Taylor est observée dans tous les rapports de longueur/diamètre. La vitesse axiale dans le film liquide en amont de la bulle de Taylor est représentée par une fonction de loi de puissance, avec un exposant $n = 6.1$ pour $L/D_h = 833.3$ et $n = 5.7$ pour $L/D_h = 1666.7$. Malgré une diminution de l'exposant n lorsque le rapport L/D_h augmente, le profil parabolique n'a pas pu être atteint. Ils suggèrent en effet que des recherches plus approfondies sur le rapport L/D_h tenant compte d'autres variables qui sont susceptibles d'avoir une influence sur le profil parabolique doivent être menées.

Joshi et Vinoth [16] ont réalisé des simulations numériques d'écoulements laminaires dans des tubes et des canaux (i) pour comprendre l'effet des conditions d'entrée (vitesse uniforme/tube de courant) sur les longueurs d'établissement, et (ii) pour étudier le développement local de l'écoulement. Les résultats de simulation montrent que pour des faibles nombres de Reynolds, la longueur d'établissement hydrodynamique pour le cas de tube de courant à l'entrée sont significativement plus faibles que celles qui correspondent au cas d'un profil de vitesse uniforme. De plus, les résultats de l'étude actuelle (écoulement newtonien avec condition d'adhérence à la paroi) ainsi que les résultats de la littérature (écoulement non-newtonien avec condition d'adhérence à la paroi) ont montré que pour de

nombreuses situations, le développement le plus lent de la vitesse axiale dans la direction longitudinale se produit très près de la paroi. Pour les cas ci-dessus, les critères de longueur d'entrée déjà existants ne sont pas appropriés pour définir la longueur d'établissement. Ils ont donc proposé un nouveau critère basé sur l'épaisseur du déplacement qui est une mesure par intégrale du profil de vitesse. Une nouvelle corrélation de la longueur d'entrée utilisant le critère d'épaisseur de déplacement est proposée pour les écoulements newtoniens sur la base de simulations avec la condition de tube de courant à l'entrée.

Ferreira et al. [17] ont présenté une investigation numérique détaillée sur la longueur d'établissement " L_e " dans un écoulement laminaire de fluide newtonien dans des micro canaux de section rectangulaire avec différents rapports d'aspect "AR". L'avènement des nouvelles technologies micro-fluidiques a suscité l'intérêt envers les nombres de Reynolds des ordres de grandeur unitaires voire inférieurs, c'est-à-dire envers les écoulements rampants. Par conséquent, des estimations précises de la longueur d'établissement à $Re \leq O(1)$ sont importantes pour la conception des micro-systèmes. A des nombres de Reynolds aussi bas, dans lesquels les forces inertielles sont moins dominantes que les forces visqueuses, les caractéristiques de l'écoulement deviennent nécessairement différentes de celles à l'échelle macroscopique où Re est généralement beaucoup plus grand. Un choix judicieux de raffinement de maillage et des méthodes numériques adéquates ont permis d'obtenir des résultats précis et une corrélation générale pour l'estimation de L_e , valable dans les plages $0 \leq Re \leq 2000$ et $0,1 \leq AR \leq 1$, couvrant ainsi les applications en macro et micro fluidique.

F. Durst et al. [20] Dans ce travail de F.Durst et Al, ils ont effectué une simulation numérique afin d'établir les coefficients $C1$ et $C0$ pour l'équation générale des écoulements laminaires pulsés et oscillants à plein développement dans les tuyaux et les canaux, qui est définie comme suit (équation). L'évaluation de ces coefficients est exprimée à $Re \rightarrow$ pour $C1 = 0.0567$ et $Re \rightarrow$ pour $C0 = 0.619$ En fin de compte, des études numériques et analytiques de la longueur de développement des écoulements laminaires de tuyaux et de canaux ont été réalisées. Dans ce travail, F.Durst et al. Ont effectué une simulation numérique pour établir les coefficients $C1$ et $C0$ pour l'équation générale des écoulements laminaires de tuyaux et de canaux pulsants et oscillants pleinement développés qui est définie comme suit (équation). L'évaluation de ces coefficients est exprimée par $Re \rightarrow$ pour $C1 = 0.044$ et $Re \rightarrow$ pour $C0 = 0.631$.

I.8. Conclusion

D'après ce que nous avons vu dans ce chapitre, la détermination de la longueur d'entrée nécessite la résolution des équations de mouvement pour l'écoulement non-établi, ce qui requiert l'utilisation de la simulation numérique même si on prend en considération certaines hypothèses pour la simplification mathématique du problème en question.

CHAPITRE II:

Simulation numérique

II.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons donner une description générale du problème envisagé, et nous allons présenter aussi les différentes étapes de la simulation numérique de l'écoulement en question en détail. La formulation fonction de courant-verticité ($\Psi - \Omega$) issue des équations de Navier-Stokes, représente le modèle mathématique sur lequel la présente simulation numérique s'effectuera. La distribution de vitesse sera déduite à partir des relations de Cauchy-Riemann, puis la longueur d'établissement sera déterminée en comparant les profils de la vitesse dans chaque section droite du canal avec le profil de vitesse du régime établi.

II.2. Description du problème et hypothèses

On étudie dans ce mémoire l'écoulement non-établi dans un tube de section droite circulaire (Figure II.1). La nature axisymétrique de cet écoulement nous permet de considérer que le problème envisagé est bidimensionnel et par conséquent d'effectuer la simulation seulement dans le plan (x,r) . D'autres hypothèses pouvant simplifier d'avantage la simulation sont les suivantes :

1. Le fluide est newtonien ;
2. L'écoulement est permanent, incompressible, laminaire ;
3. Les parois de tube sont parfaitement lisses.

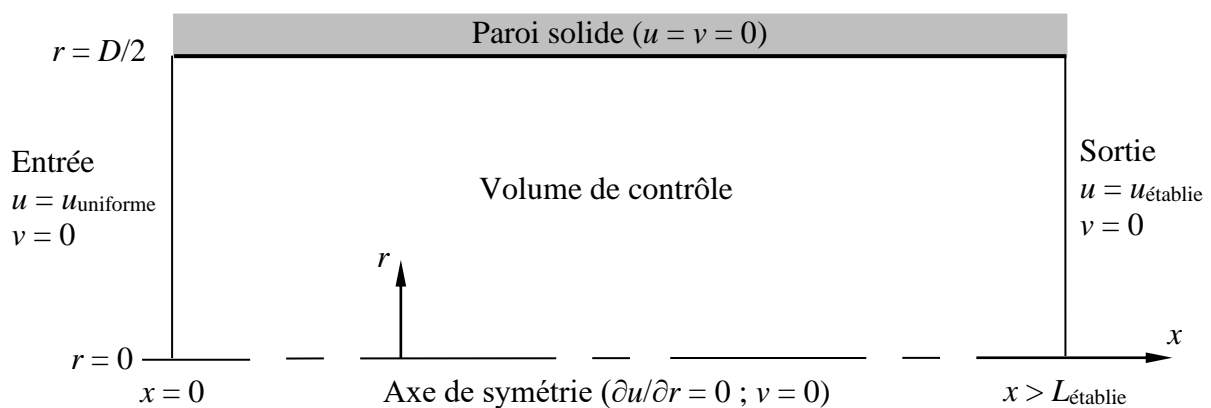


Figure II. 1 : Géométrie du problème.

II.3. Formulations mathématiques

Compte tenu des hypothèses présentées ci-dessus, les équations du mouvement simplifiées s'écrivent en coordonnées cylindriques comme suit ;

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.1})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Il est commode d'éliminer la pression des deux premières équations en dérivant la première par rapport à x et en r , puis soustrayant l'une de l'autre, et la deuxième par rapport à r en prenant $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}$, on aura :

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{v\omega}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (\text{II.4})$$

L'équation (II.4) est la forme non-conservative de l'équation de transport de la vorticité ; la forme conservative, la mieux adaptée à la méthode des volumes finis, s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial (u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial (v\omega)}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) \right) \quad (\text{II.5})$$

En utilisant les relations de Cauchy-Riemann qui satisfont l'équation de continuité (II.3), dans l'expression de la vorticité, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega \quad (\text{II.6})$$

II.4. Forme adimensionnelle du modèle mathématique

Afin de diminuer le nombre de paramètres affectant la solution du modèle mathématique, il est commode de le réécrire sous forme adimensionnelle, en introduisant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{D} & R &= \frac{r}{D} & U &= \frac{u}{\bar{u}} & V &= \frac{v}{\bar{u}} \\ & & X &= \frac{x}{D} & \Omega &= \frac{\omega D}{\bar{u}} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Où \bar{u} est la vitesse moyenne de l'écoulement, et D est le diamètre hydraulique du canal. Eventuellement, le modèle qu'on doit résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial(U\Omega)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Omega)}{\partial R} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Omega}{R} \right) \right) \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = -R\Omega \quad (\text{II.9})$$

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad V = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (\text{II.10})$$

II.5. Génération du maillage

Le maillage est l'ensemble de positions spatiales dont la simulation numérique nous permet d'avoir une solution du modèle mathématique en question. Dans notre cas, le domaine physique bidimensionnel est divisé par des lignes longitudinales et transversales où l'intersection entre elles est appelée le nœud du maillage. Le type de maillage utilisé est uniforme, c.-à-d. l'espace entre deux nœuds « le pas » est constant pour chaque direction. Pour éviter d'avoir un champ de vitesse en « Zigzag », on a utilisé un système de maillages décalés comme l'a suggéré Patankar [19] ; Ce système contient plusieurs maillages, dont on associe à chaque variable un maillage différent. Afin d'obtenir des résultats précis dans tel maillage (uniforme) on doit augmenter le nombre de nœuds ; sinon il sera plus utile de générer un maillage non uniforme, ce qui est un peu délicat et donc ne sera pas utilisé dans la présente simulation.

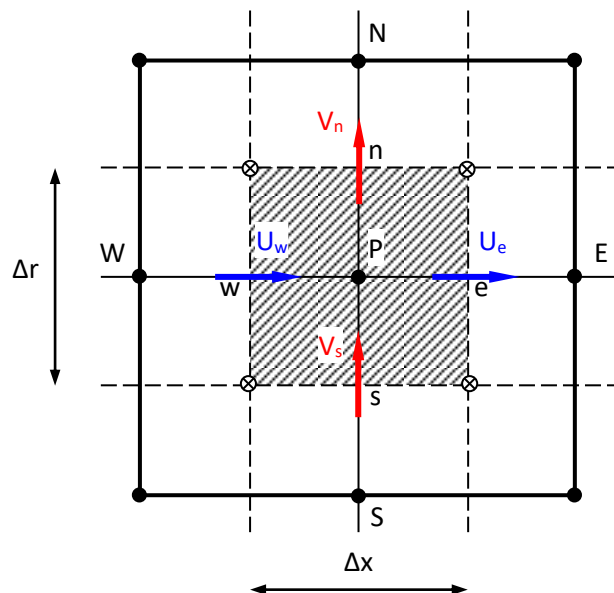


Figure II. 2 : Maillages décalés.

II.6. Discrétisation avec la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. L'application de cette méthode commence par l'intégration de chaque équation autour du volume de contrôle de la variable associée ; puis la discrétisation (ou l'approximation) de chaque terme paru dans l'équation intégrée avec le schéma convenable de différences finies, dont l'équation approximée peut s'exprimer après arrangement sous la forme matricielle suivantes $[A]\{x\} = \{b\}$; finalement, le système d'équations algébriques qui en résulte peut être résolu numériquement avec une méthode itérative.

Dans ce qui suit, le point P représente le nœud principal au cœur du volume de contrôle, les faces de ce dernier sont désignées par les lettres e et w dans la direction des x , n et s dans la direction des r . Les nœuds E, W, N, S sont les centres des volumes de contrôle adjacents situés respectivement à l'Est, à l'Ouest, au Nord et au Sud du point P (Figure II.2). La discrétisation de l'équation (II.8) se fait en l'intégrant sur le volume de contrôle de la variable Ω :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial(U\Omega)}{\partial X} dXdR + \int_s^e \int_w^e \frac{\partial(V\Omega)}{\partial R} dXdR = \dots$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} dXdR + \frac{1}{\text{Re}} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} dXdR + \frac{1}{\text{Re}} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Omega}{R} \right) dXdR \quad (\text{II.11})$$

En utilisant un schéma approprié pour approximer les valeurs des fonctions aux interfaces du volume de contrôle par rapport aux nœuds du maillage (Dans cette étude, nous avons choisi le schéma de loi de puissance), le réarrangement de cette équation donne :

$$A_p \Omega_p = A_E \Omega_E + A_W \Omega_W + A_N \Omega_N + A_S \Omega_S \quad (\text{II.12})$$

Où les expressions des coefficients de cette équation sont données par :

$$A_E = D_e \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_e}{D_e} \right| \right)^5 \right] + [-F_e, 0]$$

$$A_W = D_w \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_w}{D_w} \right| \right)^5 \right] + [F_w, 0]$$

$$A_N = D_n \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_n}{D_n} \right| \right)^5 \right] + [-F_n, 0] + \frac{\Delta X}{2 \text{Re } R_n}$$

$$A_S = D_s \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_s}{D_s} \right| \right)^5 \right] + [F_s, 0] - \frac{\Delta X}{2 \text{Re } R_s}$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + F_e - F_w + F_n - F_s - \frac{\Delta X}{\text{Re } R_n} + \frac{\Delta X}{\text{Re } R_s}$$

L'opérateur [] indique que cette quantité prend le max des deux valeurs entre crochet. Les coefficients de l'équation (II.12) contiennent une combinaison entre les flux convectifs F et diffusifs D aux interfaces des volumes de contrôle. Les flux de F et D pour chaque interface e, w, n et s du volume de contrôle sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{4R_p} (\Psi_N - \Psi_S + \Psi_{NE} - \Psi_{SE}) & F_w &= \frac{1}{4R_p} (\Psi_N - \Psi_S + \Psi_{NW} - \Psi_{SW}) \\ F_n &= -\frac{1}{4R_n} (\Psi_E - \Psi_W + \Psi_{NE} - \Psi_{NW}) & F_s &= -\frac{1}{4R_s} (\Psi_E - \Psi_W + \Psi_{SE} - \Psi_{SW}) \\ D_e &= D_w = \frac{\Delta R}{\text{Re} \Delta X} & D_n &= D_s = \frac{\Delta X}{\text{Re} \Delta R} \end{aligned}$$

Noter bien que l'équation (III.12) est applicable seulement pour les nœuds internes ; pour les nœuds qui coïncident avec les frontières du domaine physique, des expressions spéciales seront développées à partir des conditions aux limites.

De même que précédemment, la discrétisation de l'équation (III.9) se fait en l'intégrant sur le volume de contrôle de la variable Ψ :

$$\int \int_{s \ w}^n \int_{s \ w}^e \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} dX dR + \int \int_{s \ w}^n \int_{s \ w}^e \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} dX dR - \int \int_{s \ w}^n \int_{s \ w}^e \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} dX dR = - \int \int_{s \ w}^n \int_{s \ w}^e R \Omega dX dR \quad (\text{II.13})$$

En exprimant les flux aux interfaces avec le schéma en différences finies centrées, on obtient après réarrangement :

$$B_p \Psi_p = B_E \Psi_E + B_W \Psi_W + B_N \Psi_N + B_S \Psi_S + S_\Psi \quad (\text{II.14})$$

Où les expressions des coefficients de cette équation sont données par :

$$\begin{aligned} B_E &= B_W = \frac{\Delta R}{\Delta X} & B_N &= \frac{\Delta X}{\Delta R} - \frac{\Delta X}{R_p} & B_S &= \frac{\Delta X}{\Delta R} + \frac{\Delta X}{R_p} \\ B_p &= B_E + B_W + B_N + B_S & S_\Psi &= R_p \Omega_p \Delta X \Delta R \end{aligned}$$

Maintenant, les composantes du vecteur vitesse s'expriment chacune dans son propre volume de contrôle décalé, par :

$$U_p = \frac{1}{R_p} \frac{\Psi_n - \Psi_s}{\Delta R} \quad V_p = -\frac{1}{R_p} \frac{\Psi_e - \Psi_w}{\Delta X} \quad (\text{II.15})$$

En utilisant l'écriture indicielle, le système d'équations à résoudre s'écrit comme suit :

$$A_{p_{i,j}} \Omega_{i,j} = A_{E_{i,j}} \Omega_{i+1,j} + A_{W_{i,j}} \Omega_{i-1,j} + A_{N_{i,j}} \Omega_{i,j+1} + A_{S_{i,j}} \Omega_{i,j-1} \quad (\text{II.16})$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{E_{i,j}} &= D_e \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_e}{D_e} \right| \right)^5 \right] + [-F_e, 0] \\ A_{W_{i,j}} &= D_w \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_w}{D_w} \right| \right)^5 \right] + [F_w, 0] \\ A_{N_{i,j}} &= D_n \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_n}{D_n} \right| \right)^5 \right] + [-F_n, 0] + \frac{\Delta X}{2 \text{Re}(R_j + \Delta R/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{S_{i,j}} &= D_s \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_s}{D_s} \right| \right)^5 \right] + [F_s, 0] - \frac{\Delta X}{2 \operatorname{Re}(R_j - \Delta R/2)} \\
A_{P_{i,j}} &= A_{E_{i,j}} + A_{W_{i,j}} + A_{N_{i,j}} + A_{S_{i,j}} + F_e - F_w + F_n - F_s - \frac{\Delta X}{\operatorname{Re}(R_j + \Delta R/2)} + \frac{\Delta X}{\operatorname{Re}(R_j - \Delta R/2)} \\
F_e &= \frac{1}{4R_j} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1}) \\
F_w &= \frac{1}{4R_j} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1}) \\
F_n &= -\frac{1}{4(R_j + \Delta R/2)} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1}) \\
F_s &= -\frac{1}{4(R_j - \Delta R/2)} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j-1})
\end{aligned}$$

Et :

$$B_p \Psi_{i,j} = B_E \Psi_{i+1,j} + B_W \Psi_{i-1,j} + B_{N_j} \Psi_{i,j+1} + B_{S_j} \Psi_{i,j-1} + S_{\Psi_{i,j}} \quad (\text{II.17})$$

Où les expressions des coefficients de cette équation sont données par :

$$B_{N_j} = \frac{\Delta X}{\Delta R} - \frac{\Delta X}{R_j} \quad B_{S_j} = \frac{\Delta X}{\Delta R} + \frac{\Delta X}{R_j} \quad S_{\Psi_{i,j}} = R_j \Omega_{i,j} \Delta X \Delta R$$

La solution des équations (III.16) et (III.17) nous permet de déduire directement le champ de vitesse définie par :

$$U_{i,j} = \frac{1}{R_j + \Delta R/2} \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}}{\Delta R} \quad V_{i,j} = -\frac{1}{R_j} \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta X} \quad (\text{II.18})$$

II.7. Conditions aux limites

A l'entrée du canal la vitesse U est uniforme et la vitesse V est nulle, donc à partir des relations de Cauchy-Riemann, on peut déduire l'expression de la fonction de courant à cette position, telle que :

$$\Psi_{\text{entrée}} = \frac{1}{2} R^2 \quad \text{ou bien} \quad \Psi_{1,j} = \frac{1}{2} R_j^2 \quad (\text{II.19})$$

Dans cette même position, et à partir de l'expression de la vorticité, on a :

$$\Omega_{\text{entrée}} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \quad \text{ou bien} \quad \Omega_{1,j} = -\frac{1}{R_j} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right)_{1,j} \quad (\text{II.20})$$

Etant donné que le nœud ($i-1$) est en dehors du domaine physique, la dérivée seconde dans l'expression (II.20) peut s'exprimer à l'aide de développement en série de Taylor de la fonction Ψ au voisinage du nœud ($i = 1$), tel que :

$$\Psi_{2,j} = \Psi_{1,j} + \frac{\Delta X}{1!} \underbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)_{1,j}}_{=0} + \frac{\Delta X^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right)_{1,j} + O(\Delta X^3)$$

Ce qui conduit à :

$$\Omega_{1,j} = -\frac{2}{R_j} \frac{\Psi_{2,j} - \Psi_{1,j}}{\Delta X^2} \quad (\text{II.21})$$

Sur l'axe de symétrie, nous avons $V = 0$, cette condition est équivalente à $\Psi_{axe} = \text{constante}$ dont la valeur de cette dernière peut être déduite en remplaçant par $R = 0$ dans la condition (II.19) :

$$\Psi_{axe} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \Psi_{i,1} = 0 \quad (\text{II.22})$$

Et comme le gradient de la vitesse longitudinal et la vitesse transversale sont toujours nuls, on en déduit immédiatement que :

$$\Omega_{axe} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \Omega_{i,1} = 0 \quad (\text{II.23})$$

Sur la paroi solide du canal, nous avons aussi $V = 0$, qui est équivalente également à $\Psi_{paroi} = \text{constante}$ dont la valeur de cette dernière peut être déduite cette fois ci en remplaçant par $R = \frac{1}{2}$ dans la condition (II.19) :

$$\Psi_{paroi} = \frac{1}{8} \quad \text{ou bien} \quad \Psi_{i,M} = \frac{1}{8} \quad (\text{II.24})$$

Quant à la vorticité sur la paroi du canal, son expression se réduit à :

$$\Omega_{paroi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \quad \text{ou bien} \quad \Omega_{i,M} = -\frac{1}{R_M} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \right)_{i,M} \quad (\text{II.25})$$

Le développement en série de Taylor est à nouveau utilisé pour exprimer la dérivée seconde de (II.25), tel que :

$$\Psi_{i,M-1} = \Psi_{i,M} - \frac{\Delta R}{1!} \underbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)_{i,M}}_{=0} + \frac{\Delta R^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \right)_{i,M} + O(\Delta R^3)$$

Ce qui conduit à :

$$\Omega_{i,M} = -\frac{2}{R_M} \frac{\Psi_{i,M-1} - \Psi_{i,M}}{\Delta R^2} = -4 \frac{\Psi_{i,M-1} - \Psi_{i,M}}{\Delta R^2} \quad (\text{II.26})$$

La sortie du canal se trouve à une distance suffisamment grande par rapport à la longueur d'établissement, pour qu'on puisse imposer la condition d'établissement dynamique sur cette limite. Dans ce cas nous avons deux types de condition aux limites pour choisir parmi elles, à savoir :

$$\phi_{sortie} = \phi_{établie} \quad (\text{Condition de Dirichlet})$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_{sortie} = 0 \quad (\text{Condition de Von Neumann})$$

Nous pouvons utiliser également une extrapolation polynomiale (quadratique), telle que :

$$\Psi_{N,j} = 3\Psi_{N-1,j} - 3\Psi_{N-2,j} + \Psi_{N-3,j} \quad (\text{II.27})$$

$$\Omega_{N,j} = 3\Omega_{N-1,j} - 3\Omega_{N-2,j} + \Omega_{N-3,j} \quad (\text{II.28})$$

II.8. Détermination de la longueur d'établissement

Selon la définition de la longueur d'établissement dynamique (Section I.6.), cette dernière sera déterminée en calculant la différence entre le profil de Poiseuille (vitesse de l'écoulement établi) et le profil de vitesse en chaque position le long du canal ; la longueur d'établissement est égale à la première position x à partir de laquelle cette différence est égale approximativement à zéro.

$$\Delta_i = \left| \frac{U_{i,j} - U_{\text{établi}}(R_j)}{U_{\text{établi}}(R_j)} \right| \quad (\text{II.29})$$

II.9. Algorithme de résolution numérique

En tenant compte des conditions aux limites données par (II-19) - (II-28), le processus de calcul itératif est utilisé pour résoudre simultanément les systèmes d'équations algébriques (II.16) et (II.17) dans un maillage de $N \times M$ nœuds. L'algorithme de résolution itérative peut être résumé dans les points suivants selon l'ordre d'exécution :

1. Déclaration des données et estimations initiales ;
2. Calcule de Ψ à partir de l'équation (II.16) ;
3. Calcule de Ω à partir de l'équation (II.17) ;
4. Répète les étapes 2 et 3 jusqu'à la vérification de erreur = $\left| \frac{\phi^{(k)} - \phi^{(k-1)}}{\phi^{(k-1)}} \right| < \varepsilon_1$;
5. Calcule du champ de vitesse U et V à partir des relations (II.18) ;
6. Calcule de Δ à partir de l'équation (II.29) à la position i (en commençant par $i = 1$) ;
7. Mets $i = i + 1$, et répète l'étape 6 jusqu'à la vérification de $\Delta < \varepsilon_2$;
8. Affiche la longueur d'établissement $L_e = X_i$.

II.10. Conclusion

Après avoir présenté une description détaillée du problème (géométrie, hypothèses et modèle mathématique), on a appliqué la méthode des volumes finis pour convertir le modèle aux dérivées partielles en systèmes d'équations algébriques qui seront résolues selon les étapes de l'algorithme précédent avec un code Matlab dont les résultats seront présentés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III:

Résultats et discussion

III.1. Introduction

Dans ce qui suit les résultats de la simulation numérique d'un écoulement laminaire (Re compris entre 100 et 2300) non-établi dans un tube de section droite circulaire, seront présentés. Ces résultats sont obtenus à l'aide d'un programme sous Matlab. Après avoir testé plusieurs maillages $N \times M$, l'analyse montre que ces résultats sont peu sensibles au nombre de nœuds. Cependant, nous choisissons un nombre de nœuds relativement important correspondant aux pas de maillage suivants $\Delta X = 0.05$ et $\Delta R = 0.005$ pour obtenir une variation « lisse » du champ de vitesse. Dans le but de développer une corrélation fiable permettant de calculer la longueur d'établissement dans tel écoulement, une comparaison sera effectuée entre nos résultats et ceux disponibles dans la littérature.

III.2. Champ dynamique

La figure III.1 présente le profil de la vitesse longitudinale pour un nombre de Reynolds égal à 1100 à différentes positions le long du tube. A l'entrée de tube ($X = 0$), le profil de la vitesse longitudinale U est uniforme (condition aux limites imposée à l'entrée). En s'éloignant dans le sens de l'écoulement, les particules de fluide à proximité de la paroi du tube décélèrent sous l'effet des forces visqueuses ; cela, conformément à la loi de continuité, est accompagné d'une accélération des particules de fluide dans la région centrale, entraînant une distorsion du profil de vitesse. Plus on va loin, plus le profil de vitesse est déformé ; jusqu'à atteindre la longueur d'établissement $X = \frac{L_e}{D}$, au-delà de laquelle le profil de vitesse devient complètement développé (profil parabolique).

La figure III.2 présente le profil de la vitesse transversale pour un nombre de Reynolds égal à 1700 à différentes positions le long du tube. A l'entrée de tube ($X = 0$), la vitesse transversale V est nulle (condition aux limites imposée à l'entrée). En s'éloignant de l'entrée dans le sens de l'écoulement, on constate que la vitesse est toujours nulle à la paroi (condition d'adhérence) ; ensuite, elle devient négative car la décélération suivant x des particules fluides dans la couche limite force une certaine quantité de fluide de s'échapper à travers la frontière de cette couche limite (près de la paroi) vers la zone centrale (près de l'axe) ; puis, elle s'annule à nouveau sur l'axe du tube à cause de la symétrie. En s'éloignant de l'entrée du tube, la vitesse transversale (la valeur absolue) diminue de plus en plus jusqu'à ce qu'elle devient nulle à partir de la longueur d'établissement, car à partir

de cette position-là, la vitesse transversale s'écrit $V = \frac{C}{R}$, et comme $V(0) = v\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on obtient, $C = 0$, et donc, $V = 0$ partout.

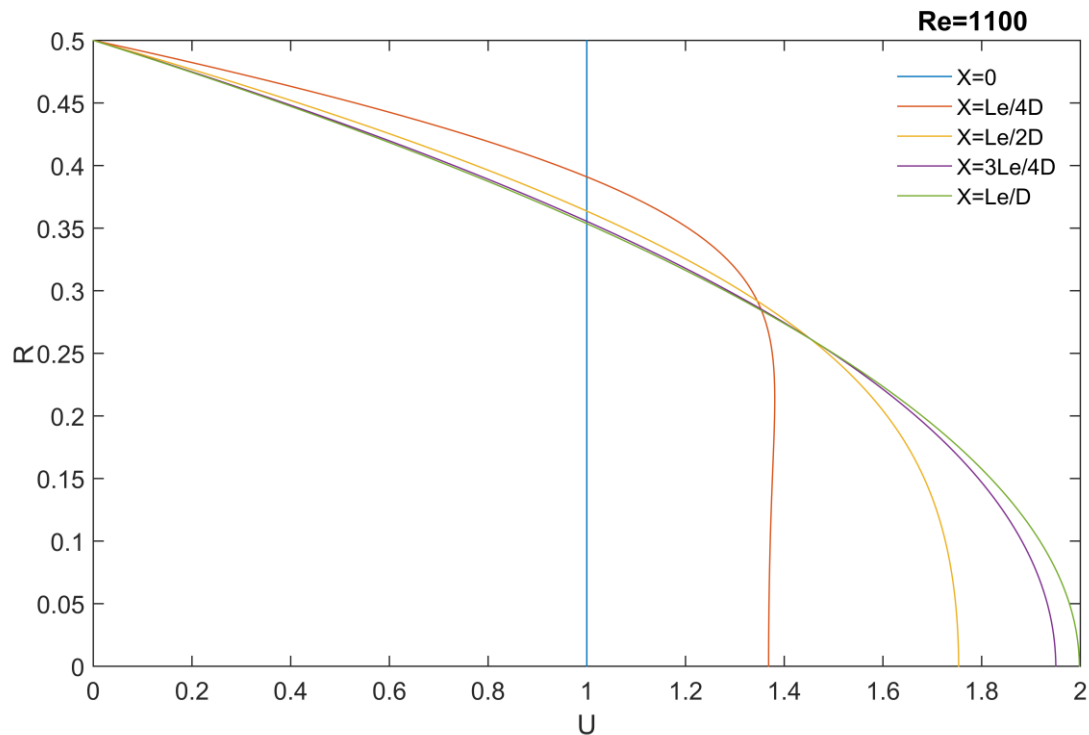


Figure III. 1 : Profils de la vitesse longitudinale U pour $Re = 1100$.

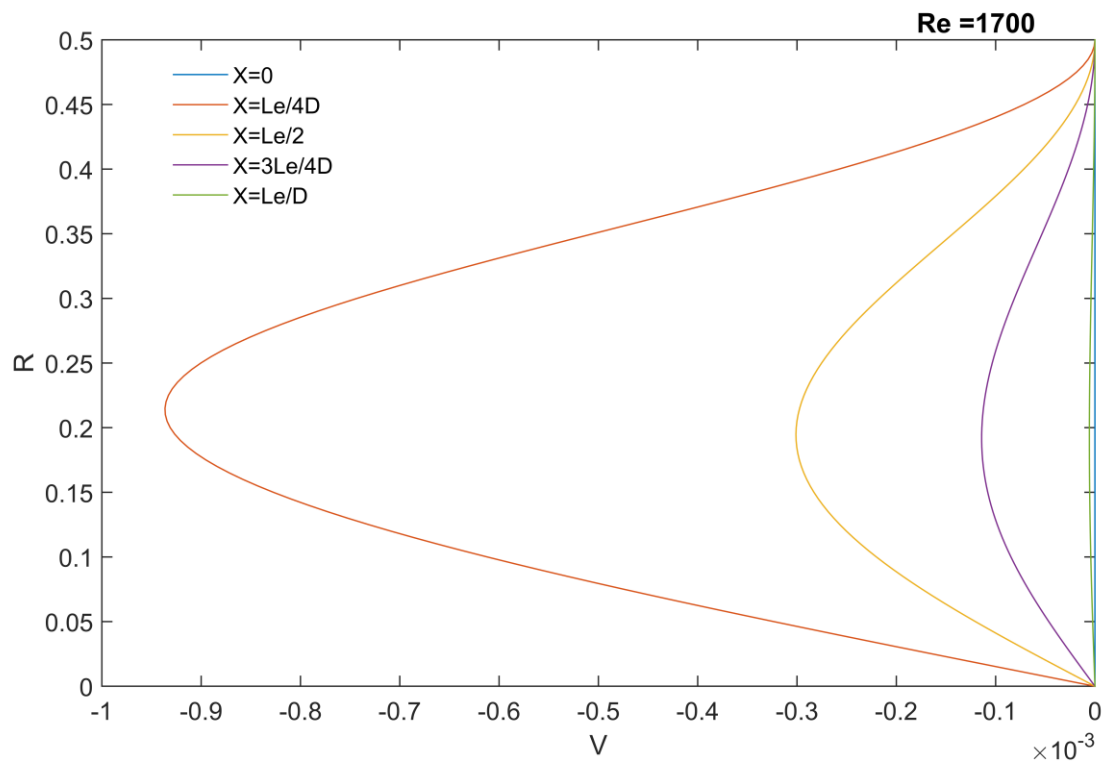


Figure III. 2 : Profils de la vitesse transversale V pour $Re = 1700$.

L'analyse du champ de vitesse montre que si on trace les profils de U (ou bien de V) à une abscisse $X^* = \frac{XD}{L_e}$ pour différents nombres de Reynolds, on va trouver que ces profils sont superposés. A partir de cela, on peut penser qu'avec l'emploi d'un changement de variables plus approprié, on peut obtenir un modèle mathématique encore réduit dans lequel le nombre de Reynolds ne figure pas ; et par conséquent, une solution plus générale (valable pour tout nombre de Reynolds – laminaire –) peut être obtenue.

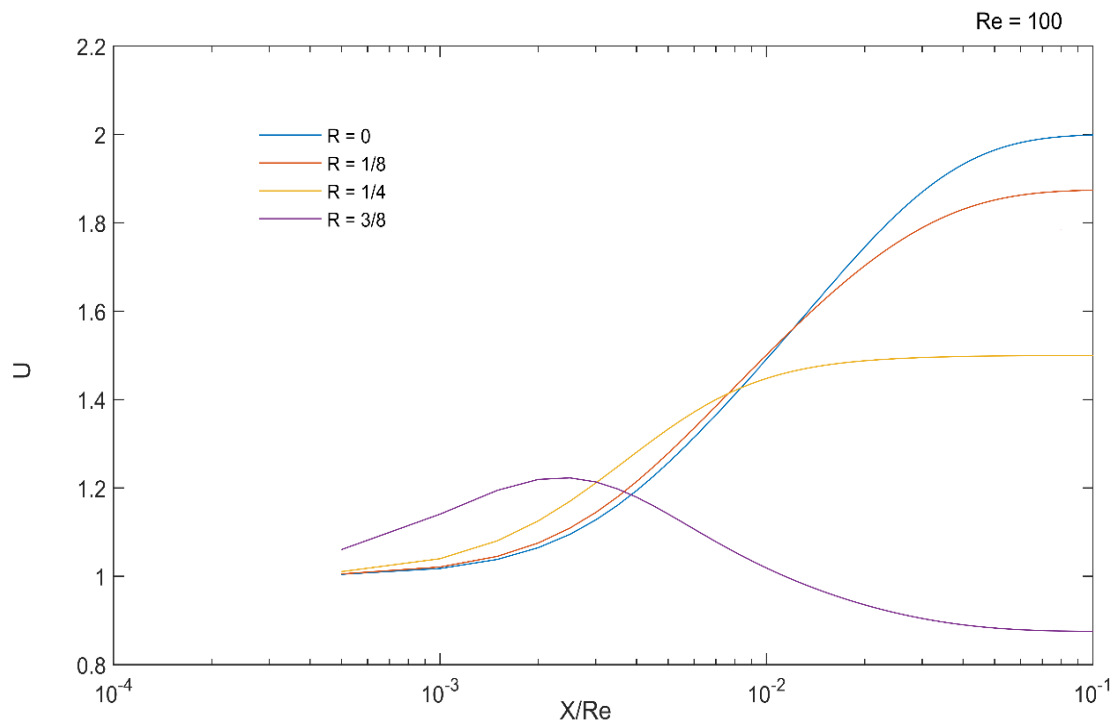


Figure III. 3 : Variation de U le long du tube pour $Re = 100$.

Les figures III.3 – III.5 montrent la variation de la vitesse longitudinale U le long du tube pour un nombre de Reynolds égal à 100, 1100 et 2100 respectivement. Ces courbes nous permettent de savoir où le fluide accélérerait et où il décélérerait à une position radiale donnée. Toutes les courbes partent du même point ($U = 1$ à l'entrée), et elles se séparent par la suite pour atteindre chacune une valeur asymptotique qui est égale à la vitesse du profil parabolique à la position radiale correspondante (nous savons par exemple à partir du profil parabolique que la vitesse maximale du régime établi $U(R = 0) = U_{max}$ prend la valeur 2, ce qu'on peut clairement voir pour la courbe en bleu).

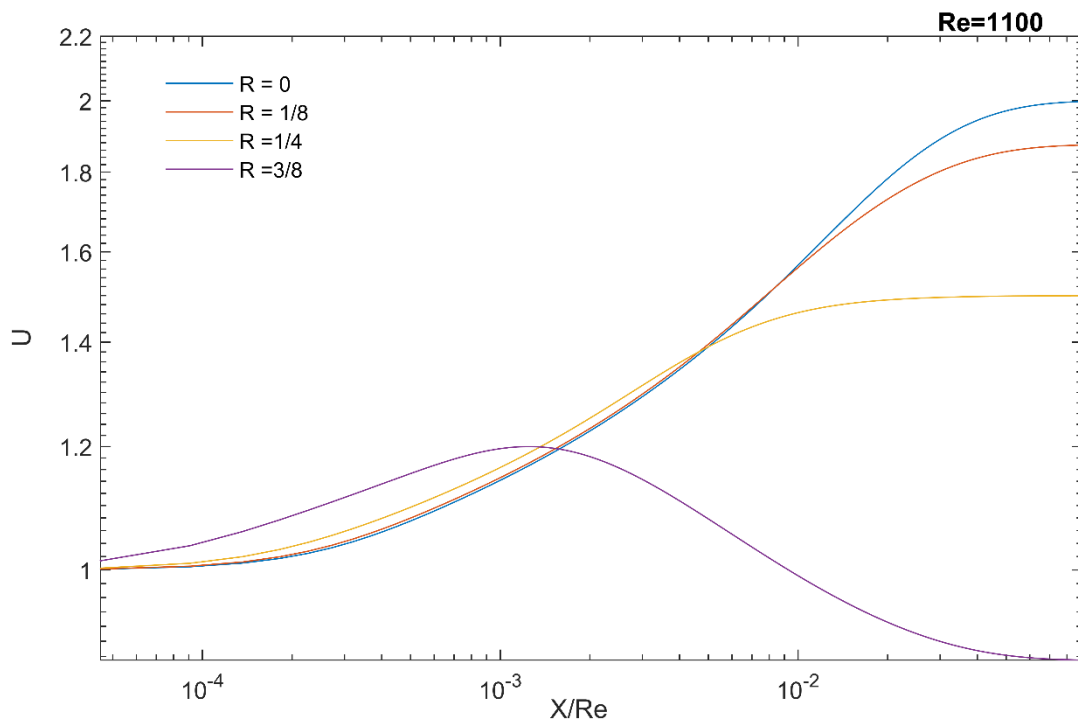


Figure III. 4: Variation de U le long du tube pour $Re = 1100$.

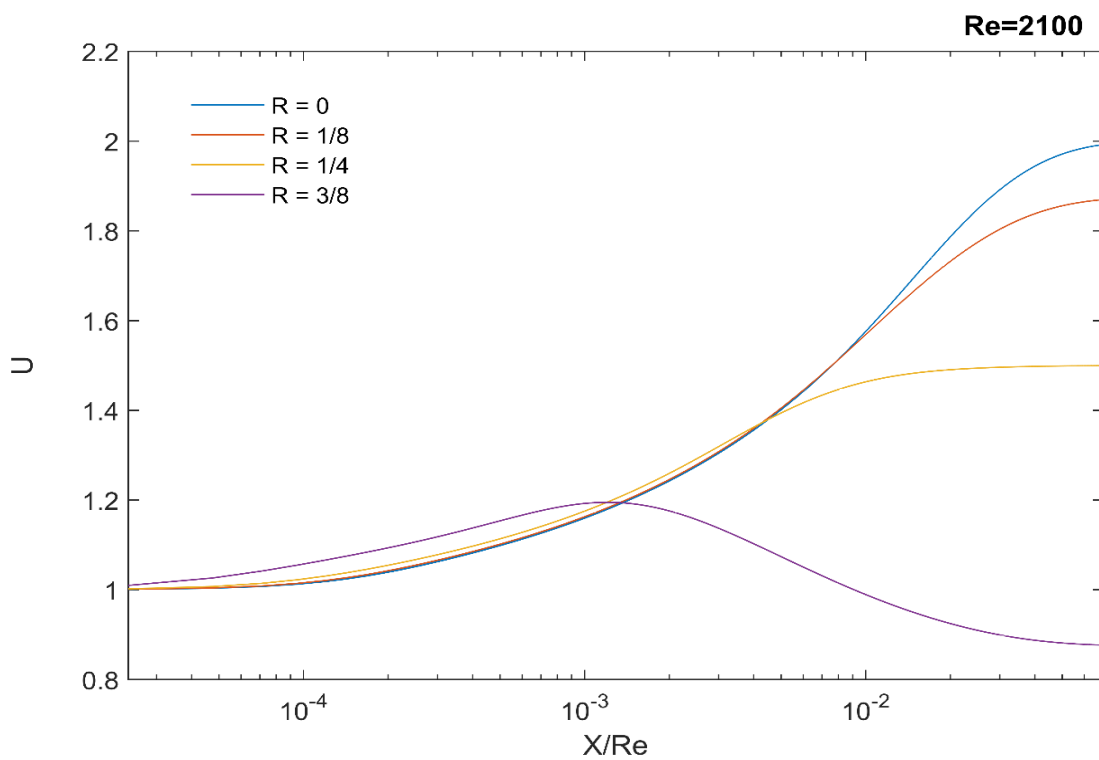


Figure III. 5 : Variation de U le long du tube pour $Re = 2100$.

La figure III.6 montre la variation du rapport de coefficient de frottement local sur le coefficient de frottement établi pour différents nombres de Reynolds. Ce rapport est plus élevé juste à l'entrée puis il diminue progressivement jusqu'à l'unité lorsqu'on atteint l'établissement dynamique ; du fait que le gradient radial de la vitesse longitudinale est important près de l'entrée car il se manifeste dans une région (épaisseur de la couche limite) plus fine, puis il devient de plus en plus faible car cette région s'élargit proportionnellement à X .

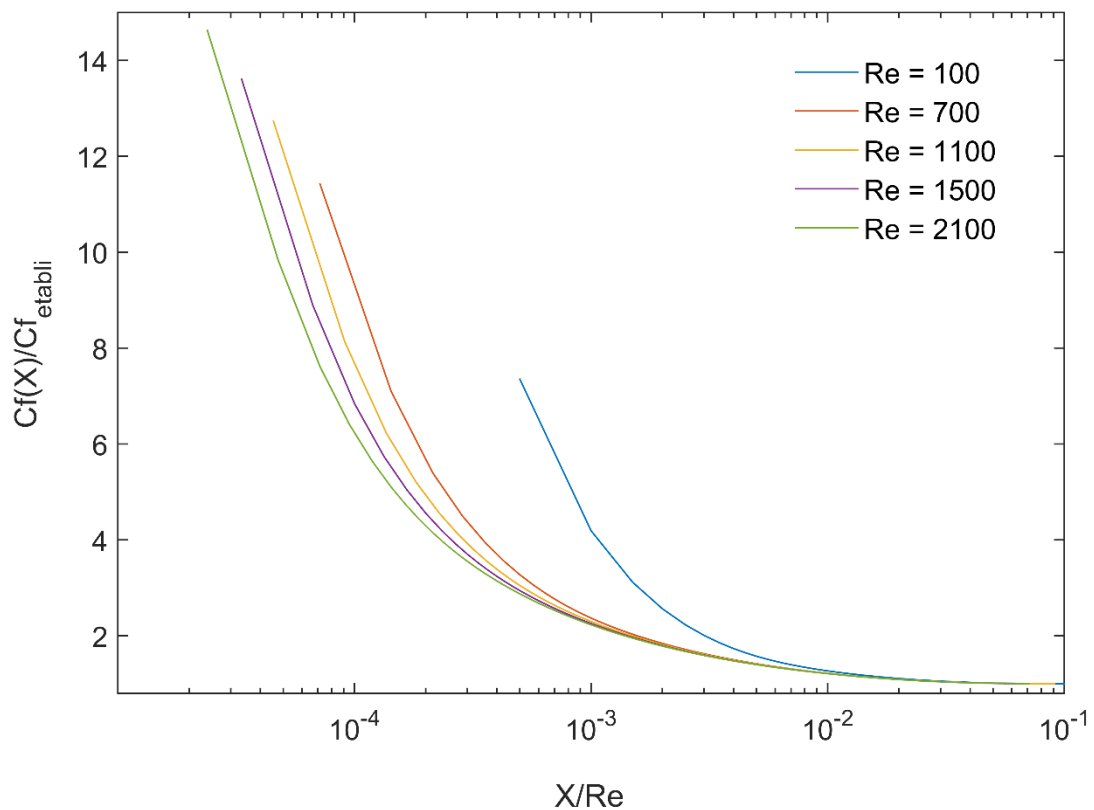


Figure III. 6 : Variation du coefficient de frottement local pour Re=100-2100.

III.3. Longueur d'établissement

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la longueur d'établissement dynamique adimensionnelle n'est en fonction que du nombre de Reynolds. Donc, à partir des résultats du problème en question, nous avons extrait le tableau ci-après. Ces données montrent que la longueur d'établissement varie de façon linéaire avec le nombre de

Reynolds, ce qui nous a permis d'utiliser une régression linéaire de ces données afin d'établir la corrélation suivante entre ces deux variables :

$$\frac{L_e}{D} = 0.0556Re + 0.4724 \quad (\text{III.1})$$

Tableau III. 1 : Variation de L_e/D en fonction de Re .

Re	100	300	500	700	900	1100
L_e/D	5.95	17.1	28.25	39.4	50.5	61.65
Re	1300	1500	1700	1900	2100	2300
L_e/D	72.75	83.85	94.95	106	117.1	128.2

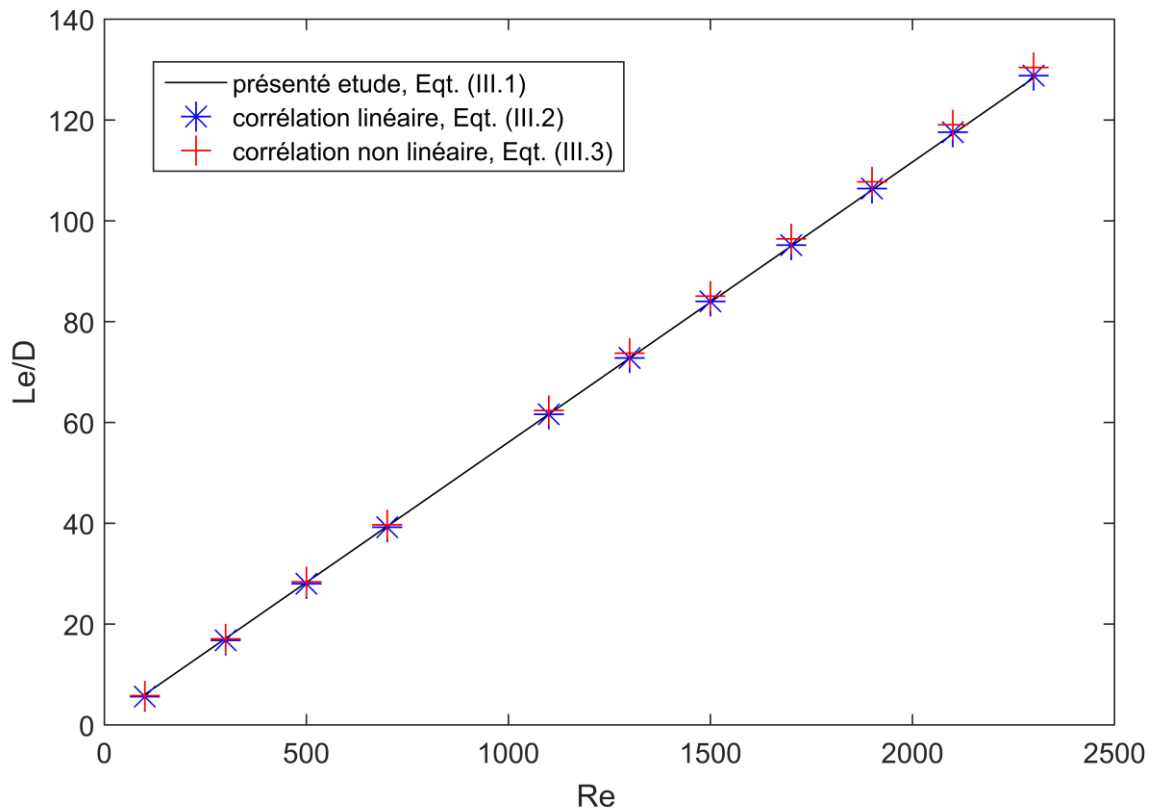


Figure III. 7 : Comparaison entre les corrélations de la longueur d'établissement.

Dans la littérature, on peut trouver plusieurs corrélations permettant le calcul de la longueur d'établissement en connaissant le nombre de Reynolds dont la différence est fort probablement due aux différentes approches suivies pour les établir, au choix de la fonction de régression, et peut être à la plage du nombre de Reynolds dans laquelle l'étude

est effectuée et les résultats sont obtenus. La plupart de ces corrélations sont linéaires, telles que [20] :

$$\frac{L_e}{D} = 0.056Re \quad (\text{III.2})$$

Et certains sont non linéaires, telles que [20] :

$$\frac{L_e}{D} = ((0.0567Re)^{1.6} + (0.619)^{1.6})^{\frac{1}{1.6}} \quad (\text{III.3})$$

Les corrélations susmentionnées sont présentées ensemble dans la figure III.7, dont on peut clairement constater que les corrélations (III.1) et (III.2) sont presque superposées, pourtant, elles peuvent ne pas donner la même estimation de la longueur d'établissement pour des petites valeurs du nombre de Reynolds à cause de l'ordonnée à l'origine non nulle dans notre corrélation. La corrélation (III.3) est aussi très proche à la notre .

Les corrélations linéaires et non linéaires donnent des prédictions différentes pratiquement lorsque $1 \leq Re \leq 100$, et dans cette plage la longueur d'établissement est assez petite, et l'erreur de prédiction ne changera pas le fait que cette longueur peut être négligée lorsqu'il s'agit de décider que le l'hypothèse d'écoulement pleinement développée est justifiée. Donc, il semble que la corrélation affine (linéaire) est plus pratique car elle est plus simple.

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté, interprété et analysé les résultats de la simulation numérique du problème envisagé dans ce mémoire. Ces résultats sont cohérents avec ce qui est bien établi dans le domaine de la mécanique des fluides, et ils sont également bien alignés avec les constatations et les conclusions tirées d'autres études similaires.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le problème envisagé dans ce projet de fin d'étude porte sur l'écoulement visqueux laminaire dans une conduite circulaire de parois lisses dont le profil de la vitesse à l'entrée est uniforme puis évolue le long de la conduite jusqu'à ce qu'elle devient parabolique et à la sortie. L'objectif de l'étude est de déterminer la longueur d'établissement dynamique L_e défini comme étant la distance de l'entrée au point où les caractéristiques cinématiques n'évoluent plus d'une section droite à l'autre. La simulation de l'écoulement considéré a été réalisée avec la méthode des volumes finis et à l'aide d'un programme de calcul itératif. Les résultats obtenus sont résumés ci-dessous :

- L'analyse dimensionnelle des équations de mouvement montre que la longueur d'établissement adimensionnel L_e/D dépend seulement du nombre de Reynolds Re ;
- Pour Re compris entre 100 et 2300, la longueur L_e est compris entre approximativement $6D$ et $128D$;
- La relation entre L_e/D et Re est évidemment linéaire sur l'intervalle du nombre de Reynolds considéré dans cette étude ; alors que la relation non-linéaire décrivant mieux l'évolution de L_e/D sur l'intervalle $1 \leq Re \leq 100$, est algébriquement complexe dont la précision n'est pas exigée ;
- En se basant sur les résultats numériques présentés dans le tableau (III.1) et à l'aide de la méthode des moindres carrés, une nouvelle corrélation de la longueur d'établissement en fonction du nombre de Reynolds est donnée par :

$$\frac{L_e}{D} = 0.0556Re + 0.4724$$

Références bibliographiques

- [1] R. Ben Hammouda. “Notions de mécanique des fluides cours et exercices corrigés” . Centre de publication universitaire (2008) ,1-11 pages.
- [2] F. M. White ‘Fluide Mechanicus’ MCGRAW-Hill Series in Mechanics Engineering, fifth edition ,162 page.
- [3] R. Comolet, & Bonnin, J. C. (1986). Mécanique expérimentale des fluides (No. BOOK). Masson. 11 pages .
- [4] B. R. Musons Wade W. Huebsch “Fundamentals of Fluids Mechanics” seventh edition, 184 ;405 pages.
- [5] R. Ferhat ‘Etude des écoulements turbulents à travers une conduite a section carrée avec une coude à 90°’ mémoire de magister, Université d’Oran Mohamed Boudiaf 2013/2014.
- [6] B. Saida, S. Ilyas ‘ Simulation numérique d’un écoulement à travers un élargissement brusque ‘, mémoire de fin d’étude master académique, Université d’Mestghanem 2020/2019.
- [7] C. Mahboub, Mécanique des fluides approfondi, cours, Université Mohamed Khaider Biskra, 2018/2019.
- [8] S. Amiroudine , Jean-Luc Battaglia, Mécanique des fluides, Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2011, 1-255 pages.
- [9] <https://greedhead.net/how-do-you-determine-if-flow-in-a-pipe-is-fully-developed/> ,by A. Flynn, 08/02/2022.
- [10] <https://www.quora.com/For-uniform-laminar-flow-in-a-pipe-what-is-the-velocity-distribution?fbclid=IwAR1uqByX4Ey5RPSQJHee1CXoZIR6k7G7YJ2xAy3yaZA4LzFS8f74NtFujp0> ,
by brain hoggins, professor emeritus at university of California, Davis, 04/02/2022.

- [11] S.Amjad. 'Représentation du profil de vitesse pour des écoulements turbulents pleinement développés dans des tuyaux : une loi de puissance modifiée. *Fluids*, 2021, vol. 6, n° 10, p. 369
- fluids*, 2021, VOL. 6, N° 10, P. 369.
- [12] A. Nicol, Me dwell, J. O., &Goel, R. K. (1967). Settling length for turbulent flow of air in an annulus. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 45(2), 97-99.
- [13] K., Sridhar, Nicol, A. A., &Padmanabha, A. V. A. (1970). Settling Length for Turbulent Flow of Air in Smooth Annuli with Square-Edged or Bellmouth Entrances.
- [14] N. Dombrowski, Foumeny, E. A., Ookawara, S., &Riza, A. (1993). The influence of Reynolds number on the entry length and pressure drops for laminar pipe flow. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 71(3), 472-476.
- [15] G., Sucena, Ferreira, A., Ferrás, L. Pinho, F. T., &Afonso, A. M. (2021). Hydrodynamic Entrance Length for Laminar Flow in Microchannels with Rectangular Cross Section. *Fluids*, 6(7), 240
- [16] Y. Joshi,, &Vinoth, B. R. (2018). Entry lengths of laminar pipe and Channel flows. *Journal of Fluides Engineering*, 140(6).
- [17] J. Chidamoio, F., Akanji, L., &Rafati, R. (2017). Effect of length-to-diameter ratio on axial velocity and hydrodynamic entrance length in air-water two-phase flow in vertical pipes. *Journal of Oil, Gas and Petrochemical Sciences*.
- [18] Y.A. Cengel, J M. Cambala "Fluid Mechanics Fundamentals and Applications" Mc Graw Hill Education Forth Edition (2017)
- [19] S.Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*1980.
- [20] F. Durst, S Ray, B Ünsal, OA Bayoumi ' The Development Lengths of Laminar Pipe and Channel Flows' ,2005 .