



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences et de la technologie
Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Énergétique

Réf. :

Présenté et soutenu par :

- Sarra Terghini
- Nour El Houda Benaich

Le : 28 / 06 / 2022

Titre

Etude de l'influence des formes des chicanes sur la répartition de la température d'un capteur solaire à air

Jury:

| | | | | |
|----|----------------------|-----|----------------------|------------|
| Mr | Abdelwahed ALI OUALI | MCA | Université de Biskra | Président |
| Mr | Nacer CHOUCANE | MCA | Université de Biskra | Rapporteur |
| Mr | Fouad CHAABANE | MCA | Université de Biskra | Examineur |

Année universitaire :2021- 2022

Remerciement

Tout d'abord nous tenons à remercier en premier lieu et avant tout,
Le bon Dieu de nous avoir aidé et donné la force et la sagesse d'arriver
jusqu'à ce niveau d'études et de réaliser ce travail dans les meilleurs
conditions.

En second lieu nous nous tenons à remercier monsieur *Dr. Nacer Chouchane*, pour son sérieux ses compétences et ses orientations.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude envers tous les
enseignants de département nous tenons à remercier du fond du cœur notre
famille pour leur soutien et leur encouragement sans faille.

Nous tenons à remercier aussi les membres de jury *Dr. Abdelwahed Aliouali* et *Dr. Fouad Chaabane*.

Qui nous ont fait l'honneur de présider et examiner ce modeste travail.

A toutes les chères nous vous disons merci pour tous.



Dédicace

Du fond cœur nous dédions ce modeste travail à :

*Nos chers parents (Farid Terghini * Sabah Khamed), (Abbes Benaich * Rahima Bouguettaya) qui nous ont poussé vers le succès . merci pour votre aide . vous êtes toujours les plus importants dans notre vie . Qu'Allah nous les garde durant toute notre vie . Tous nos frères et sœurs nos amis de la promotion 2021-2022.*

Tous ceux qui sont proches de notre cœur et nous encouragent à donner le meilleur de nous-même ;

Tous nos enseignants du département génie mécanique.



Table des matières

Table des matières

Remerciement I
Dédicace II
Table des matières IV
Liste des tableaux VIII
Liste des figure IX
Nomenclatures XI

Introduction Générale..... 3

Chapitre I :

Généralités sur les modes de transferts de chaleur

I.1.Introduction..... 5
I.2. Définitions : 5
 I.2.1. Champ de température : 5
 I.2.2. Gradient de température : 5
 I.2.3. Flux de chaleur : 5
 I.2.4. Formulation d'un problème de transfert de chaleur : 6
 I.2.4.1. Bilan d'énergie : 6
I.3. Modes de transfert de chaleur : 6
 I.3.1. Transfert par conduction : 6
 I.3.2. Transfert de chaleur par rayonnement : 8
 I.3.3. Transfert de chaleur par convection : 10
 I.3.3.1. Régime d'écoulement : 10
 I.3.3.2. En convection naturelle : 11
 I.3.3.3. En convection forcée 14
 I.3.3.4. Convection mixte..... 16
I.4. Les ailettes : 16
 I.4.1. L'augmentation du flux de chaleur : 166
 I.4.2. Forme des ailettes : 17
I.5. Conclusion 19

Chapitre II:
recherche bibliographique

Travaux effectués pour l'amélioration des performances d'un capteur solaire plan à air muni des chicanes : 21

Conclusion..... 30

Chapitre III:
La méthode des différences finies

III.1. Introduction 32

III.2. Interpolation et l'extrapolation 32

III.2.1. Forme polynômiale développée en puissance de x 32

III.2.1.1. Calcul des coefficients du développement..... 333

III.2.2. Forme polynômiale de Lagrange 333

III.2.2.1. Expression du polynôme d'interpolation 333

III.2.3. Interpolation par les différences divisées 344

III.2.3.1. Définition de l'opérateur différence divisée 344

III.2.3.2. Polynôme d'interpolation par les différences divisées 344

III.2.4. Interpolation polynomiale de Newton sur un pas constant..... 344

III.2.4.1. Interpolation utilisant les différences à droite (formule de Gregory-Newton) :
..... 344

III.2.4.2. Interpolation utilisant les différences à gauche (Formule régressive de Gregory
Newton)..... 366

III.2.4.3. Interpolation utilisant les différences centrées sur base entière (Formule de
Stirling) : 377

III.2.4.4. Interpolation utilisant les différences centrées sur base entière (Formule de
Bessel)..... 388

III.2.4.5. Interpolation utilisant les Différences centrées sur base demi-entière (formule de
Bessel)..... 388

III.2.5. Utilisation des formules d'interpolation 399

III.2.6. Erreur d'interpolation 399

III.3. Dérivée numérique d'une fonction..... 400

III.3.1. Utilisation des différences à droite (ou progressive) 40

III.3.1.1. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 1 en h 40

| | |
|--|-----------|
| III.3.1.2. Les dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 2 en h | 41 |
| III.3.2. Utilisation des différences à gauche (ou régressive) | 42 |
| III.3.2.1. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 1 en h | 42 |
| III.3.2.2. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 2 en h | 43 |
| III.3.3. Utilisation des différences centrées | 43 |
| III.3.4. Incertitude sur le calcul des dérivées | 44 |
| III.4. Classification des équations aux dérivées partielles | 44 |
| III.4.1. Définition..... | 44 |
| III.4.2. Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes) : | 45 |
| III.4.3. Résolution des équations aux dérivées partielles : | 46 |
| III.4.3.1. Méthodes de résolution des E.D.P paraboliques :..... | 46 |
| III.4.3.2. Méthodes de résolution des E.D.P elliptiques | 50 |
| III.5. Conclusion | 53 |

Chapitre IV:

La comportement thermique d'une ailette rectangulaire

| | |
|---|------------|
| IV.1 Introduction : | 555 |
| IV.2 Problématique : | 555 |
| IV.3 L'équation générale : | 566 |
| IV.4 Etude graphique : | 71 |
| IV.4.1. Interprétation des résultats..... | 744 |
| IV.5. Conclusion : | 755 |

Chapitre V:

Modélisation et simulation en CFD

| | |
|---|------------|
| V.1. Simulation par le code fluent..... | 777 |
| V.1.1. Introduction au CFD | 777 |
| V.1.2. Définition du CFD | 777 |
| V.1.3. Présentation du logiciel de simulation « ansys fluent »..... | 777 |
| V.1.4. Menu principal du logiciel..... | 777 |
| Les différentes étapes : | 799 |
| V.2. Comparaison et validation..... | 855 |
| V.3. Construction d'un maillage | 855 |

Sommaire

| | |
|---|------------|
| V.4. Notice d'utilisation de (ansys) | 866 |
| V.5. Conclusion..... | 877 |
| Conclusion générale | 899 |
| Référence Bibliographie. | 90 |

Liste des tableaux

Chapitre –I-

Tableau I.1 : Conductivité thermique de certains matériaux..... 08

Tableau I. 2:Nombre de Nusselt pour un écoulement laminaire d'un fluide..... 15

Chapitre –III-

Tableau III.1: Différence à droite $\Delta_{+}^n f_j$ pour $n=1$ à 5..... 35

Tableau III.2 : Différence à gauche $\Delta_{-}^n f_j$ pour $n=1$ à 5..... 36

Tableau III.3 : Différences centrées $\Delta_0^n f_j$ sur une base entière..... 37

Tableau III.4 : Différences centrées $\Delta_0^n f_{(j+1/2)}$ sur base demi centrées..... 39

Tableau III.4 : Dérivées à l'ordre 1 à partir des différences à droite..... 41

Tableau III.5 : Dérivées, à l'ordre 2, à partir des différences à droite..... 42

Tableau III. 6 :Dérivées à l'ordre 1 à partir des différences à gauche..... 43

Tableau III.7 : Dérivées au 2ème ordre à partir des différences à gauche..... 43

Tableau III. 8 :Dérivées au 2ème ordre à partir des différences centrées..... 45

Tableau III.9 : Dérivées au 4ème ordre à partir des différences centrées..... 45

Chapitre-V-

Tableau 10 : Les étapes de Modélisation et les sous-programmes qui en sont responsables..... 79

Tableau 2:Comparaison entre la valeur obtenue par logiciel et manuel..... 86

Liste des Figures

Chapitre -I-

| | |
|--|----|
| Figure I.1: Système et bilan énergétique..... | 6 |
| Figure II.2: Illustration des différents types de transferts..... | 8 |
| Figure III.3 : Schéma du transfert de chaleur conductif..... | 10 |
| Figure I.4: Ecoulement d'un fluide en régime laminaire..... | 11 |
| Figure I.5 : Ecoulement d'un fluide en régime turbulent..... | 11 |
| Figure I.6 : Convection naturelle le long d'une plaque plane verticale pour $Pr \gg 1$ | 13 |
| Figure I.7 : Convection naturelle le long d'une plaque plane verticale pour $Pr \ll 1$ | 13 |
| Figure I.8 : Convection naturelle le long d'une plaque verticale : transition à la turbulence | 13 |
| Figure I.9 : $\delta < \delta_t$ ($Pr < 1$) Métaux liquides | 15 |
| Figure I.10 : $\delta > \delta_t$ ($Pr > 1$) Liquides usuels..... | 15 |
| Figure I.11 : Utilisation d'ailettes pour augmenter le flux de chaleur évacué du mur(a) mur plan, (b) mur muni d'ailettes..... | 17 |
| Figure I.12 Les formes des ailettes les plus utilise..... | 18 |

Chapitre - II -

| | |
|--|----|
| Figure II.1 : Différentes configurations des chicane étudiées | 21 |
| Figure II.2 : Disposition en rangée et en quinconce des chicane..... | 22 |
| Figure II.3 : Schéma du dispositif expérimental..... | 22 |
| Figure II.4 : Schéma descriptif des chicane..... | 23 |
| Figure II.5 : (A) Obstacles alvéolés multiples en forme de V (B) vue photographique de plusieurs obstacles alvéolés en forme de V..... | 24 |
| Figure II.6 : Rugosité avec des nervures en forme de V à cavités multiples combinées à des nervures en quinconce..... | 25 |
| Figure II.7 : rugosité avec fils métalliques continus transversaux..... | 26 |
| Figure II.8 : Rugosité par combinaison entre fils métalliques transversaux et inclinés..... | 26 |
| Figure II.9 : Rugosité avec nervures en forme de L inversé | 27 |
| Figure II.10 : Rugosité avec fils métalliques en forme d'arc..... | 27 |
| Figure II.11 : Capteur plan à air muni de rugosités cylindriques | 28 |
| Figure II.12 : Les différents arrangements des chicane cylindriques..... | 28 |
| Figure II.13 Schéma d'un capteur solaire avec chicane | 29 |

Chapitre -III-

| | |
|---|----|
| Figure III.1 : Schéma explicite..... | 49 |
| Figure III.2 : Schéma implicite..... | 50 |
| Figure III.3 : schéma Crank-Nicholson..... | 51 |

Chapitre –IV-

| | |
|--|----|
| Figure IV.1 : Schéma d'ailette..... | 55 |
| Figure IV.2 : Schéma de maillage ailette..... | 56 |
| Figure IV.3 : bilan d'énergie sur une tranche d'ailette d'épaisseur dx..... | 56 |
| Figure IV.4 : La variation de tep dans une ailette à l'instant 60s..... | 72 |
| Figure IV.5 : La variation de tep dans une ailette à l'instant 120s..... | 72 |
| Figure IV.6 : La variation de tep dans une ailette à l'instant 180s..... | 73 |
| Figure IV.7 : La variation de tep dans une ailette à l'instant 240s..... | 73 |
| Figure IV.8 : La variation de tep dans une ailette à l'instant 300s..... | 74 |

Chapitre -V-

| | |
|---|----|
| Figure V.1 : La fenêtre principale du logiciel ANSYS(Workbench)..... | 78 |
| Figure V.2 : la fenêtre de lancement du fluent..... | 78 |
| Figure V.3 : L'interface d'ANSYS Design Modeler et la géométrie..... | 80 |
| Figure V.4 :L'interface d'ANSYS Design Modeler et la géométrie(volume de contrôle) | 81 |
| Figure V.5 :L'interface d'ANSYS meshing..... | 81 |
| Figure V.6 :L'interface d'ANSYS meshing et maillage | 82 |
| Figure V.7 : établir les équations d'énergie | 82 |
| Figure V.8 : spécification de la matière utilisée (aluminium)..... | 83 |
| Figure V.9 : initialisation et itérations..... | 83 |
| Figure V.10 : Condition aux limites (le flux)..... | 84 |
| Figure V.11 : La variation de température dans une ailette rectangulaire | 84 |

Nomenclatures

| Symbole | Description | unité |
|---------------------------------|---|-------------|
| S | Surface d'échange | m^2 |
| P | Le périmètre d'une ailette rectangulaire | m |
| e | L'épaisseur d'ailette | m |
| L | Longueur de l'ailette | m |
| h | Le coefficient de convection | $W/m^3.K$ |
| T_0 | Température de base | $^{\circ}K$ |
| dv | Dérivée de volume | m^3 |
| dt | Le pas suivant le temps | s |
| $\frac{\partial T}{\partial x}$ | Dérivée de la température à l'abscisse x | K/m |
| Δx | Le pas suivant x | m |
| T_{∞} | Température ambiante | $^{\circ}K$ |
| ρ | Masse volumique du fluide | Kg/m^3 |
| C | Chaleur massique de matière | $J/Kg.K$ |
| λ | Conductivité thermique de matériau | $w/m.K$ |
| ϕ_{conv} | Le flux convectif | W |
| ϕ_e | Le flux entré | W |
| ϕ_s | Le flux sorti | W |
| dU | Dérivée d'énergie interne | $/$ |
| ΔT | Degré de chauffage d'air | $^{\circ}K$ |
| V | vitesse | m/s |
| Q | Débit volumique | m^3/h |
| \vec{n} | Vecteur unitaire de la normale | $/$ |
| $\frac{\partial T}{\partial n}$ | Dérivée de la température le long de la normale | $/$ |

Introduction Générale

Introduction générale

Les écoulements de fluides en présence d'obstacles (dites chicanes) sont largement utilisés dans l'industrie, et leurs applications sont extrêmement variées. On peut les rencontrer dans le cas des problèmes d'environnement liés à la dispersion des polluants à travers les agglomérations ainsi que les effets du vent sur les bâtiments, la ventilation des tunnels routiers, les ailettes de refroidissement des engins thermiques, les chicanes des échangeurs de chaleur ou des capteurs solaires, dans les équipements électroniques, dans les réacteurs nucléaires, les canalisations urbaines, etc.

On distingue dans certaines machines thermiques (échangeurs thermique, capteurs solaires, batteries chaudes et froides cyclones...) que l'utilisation des chicanes a pour but d'optimiser les performances thermiques de ces machines et aussi pour augmenter la surface d'échange thermique et créer des perturbations à l'intérieur du fluide.

Notre objectif du travail est d'étudier le changement de température dans une ailette (chicane) en Aluminium pour sa polyvalence dans la vie pratique, où elle spécifie ou définit les tailles de chicane (longueur, épaisseur, largeur) dans des différentes machines et programmes ainsi, capteur solaire plan à air et à eau ; l'échangeur ; les téléphones et les micro-processeurs ; le capot avant de la voiture...etc. Elle est notamment utilisée dans le domaine de métallurgie.

Pour réaliser cette étude, on a abordé quatre axes :

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé généralités sur les modes de transfert thermiques qui sont à la base de notre étude plus précisément transfert par convection naturelle, son domaine d'application et les paramètres qui y sont associés.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation des différentes approches utilisées dans l'étude numérique. Cela vise en particulier à cerner l'essentiel de la méthode de différence finie. Vu que l'étude est essentiellement basée sur la méthode d'approximation par collocation Interpolation et Extrapolation et la dérivée d'un polynôme par différences divisées et les résolutions des équations aux dérivées partielles.

Dans le troisième chapitre, on présente le modèle du problème physique faisant objet de l'étude, sa configuration géométrique et les conditions aux limites imposées. Où nous avons réalisé une étude analytique

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié brièvement l'évolution de la température dans une ailette par le code fluent.

Finalement, ce mémoire sera terminé par une conclusion générale qui résumera les principaux résultats obtenus.

Chapitre I

Généralités sur les modes de transferts de chaleur

I.1.Introduction

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. Il y a échangé thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes.

Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz, etc., électronique) ou domestique (chauffage de l'habitat). Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid. Il existe trois modes essentiels de transferts de chaleur : la conduction, le rayonnement et la convection [1].

I.2. Définitions :

I.2.1. Champ de température :

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. L'unité de température est le degré Kelvin (K) ou encore le degré Celsius (°C). [2]

Distinguer deux cas [3] :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou in stationnaire.

I.2.2. Gradient de température :

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température [3].

$$\vec{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{I.1})$$

\vec{n} : Vecteur unitaire de la normale.

$\frac{\partial T}{\partial n}$: Dérivée de la température le long de la normale.

I.2.3. Flux de chaleur :

Flux de chaleur c'est la quantité de chaleur qui traverse une surface (S) par unité de temps [2] :

$$\phi = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{I.2})$$

Densité de flux elle représente la puissance qui traverse l'unité de surface. Pour une surface perpendiculaire au flux de chaleur :

$$\phi = \frac{d\phi}{dS} \tag{I.3}$$

ϕ : Flux de chaleur par conduction (W).

S : L'aire de la section de passage du flux de chaleur (m²).

ϕ : Densité de flux (W.m⁻²).

Si le flux est homogène en tout point de la surface alors:

$$\phi = \frac{\phi}{S} \tag{I.4}$$

Pour une surface dont la normale \vec{n} est orientée de manière quelconque par rapport au flux alors :

$$d\phi = \vec{\phi} \cdot \vec{n} dS = \phi \cdot \cos\alpha \tag{I.5}$$

Le flux à travers une surface quelconque s'écrira donc:

$$\phi = \int_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} dS \tag{I.6}$$

I.2.4. Formulation d'un problème de transfert de chaleur :

I.2.4.1. Bilan d'énergie :

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être [3].

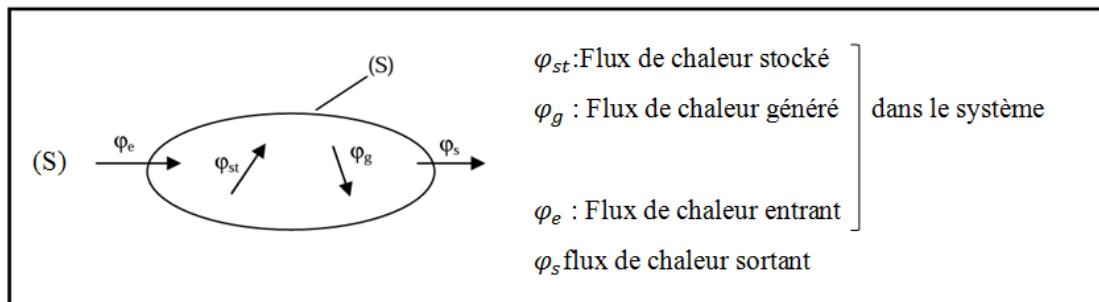


Figure I.1. Système et bilan énergétique [6]

On applique alors le 1^{er} principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) [3] :

$$\phi_e + \phi_g = \phi_s + \phi_{st} \tag{I.7}$$

I.3. Modes de transfert de chaleur :

I.3.1. Transfert par conduction :

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu

solide ; voici **la figure (I.3)**, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique (Gradient de température dans un milieu), elle est étudiée dans les milieux solides, puisque dans les milieux fluides (c'est-à-dire liquide ou gazeux), il y a souvent couplage avec un déplacement de matière et donc mécanisme de convection [5].

La conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact.

La conduction s'effectue de proche en proche :

- Si on chauffe l'extrémité d'un solide il y a transfert progressif.
- Si on coupe le solide, on stoppe le transfert.

On comprend donc intuitivement que la conduction a une origine microscopique. Il s'agit d'un mécanisme de diffusion de la chaleur.

En tout point d'un milieu s'applique une équation dite « équation de chaleur » qui traduit le mécanisme local du transfert, elle lie les grandeurs suivantes : la température T , le temps t et les variables d'espace (x, y, z) [6].

L'équation de la chaleur est donnée sous une forme unidimensionnelle par [7] :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I.8})$$

Où « a » est la diffusivité thermique du matériau.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température [3] :

$$\vec{\varphi} = -\lambda S \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (\text{I.9})$$

Ou sous forme algébrique :

$$\varphi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{I.10})$$

Avec :

φ : Flux de chaleur transmis par conduction (W).

λ : Conductivité thermique du milieu ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$).

x : Variable d'espace dans la direction du flux (m).

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2).

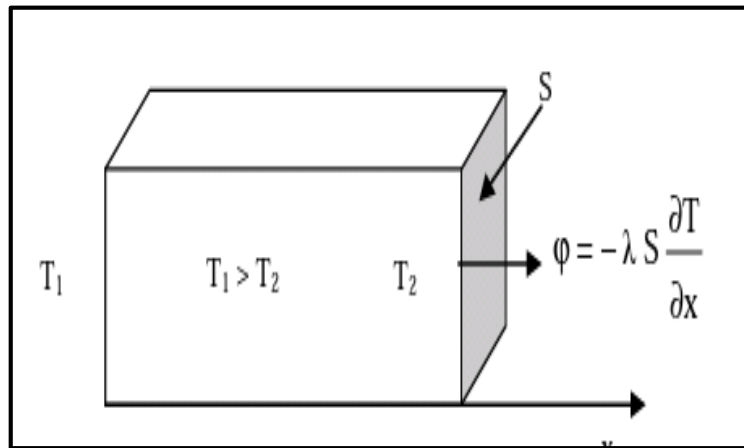


Figure I.2 : Schéma du transfert de chaleur conductif [3].

On trouvera dans le tableau I.1 les valeurs de la conductivité thermique de certains matériaux parmi les plus courants

| Matériau | (W.m ⁻¹ . °C ⁻¹) | Matériau | (W.m ⁻¹ . °C ⁻¹) |
|---------------------------|---|-------------------------|---|
| Argent | 419 | Plâtre | 0.48 |
| Cuivre | 386 | Amiante | 0.16 |
| Aluminium | 204 | Bois (feuille-résineux) | 0.12-0.23 |
| Acier doux | 45 | Liège | 0.044-0.049 |
| Acier inox | 15 | Laine de roche | 0.038-0.041 |
| Glace | 1.88 | Laine de verre | 0.035-0.051 |
| Béton | 1.4 | Polystyrène expansé | 0.036-0.047 |
| Brique terre cuite | 1.1 | Polyuréthane (mousse) | 0.030-0.045 |
| Verre | 1.0 | Polystyrène extrudé | 0.028 |
| Eau | 0.60 | Air | 0.026 |

Tableau I.1 : Conductivité thermique de certains matériaux [3].

I.3.2. Transfert de chaleur par rayonnement :

C'est une propagation d'énergie à distance, entre deux corps séparés ou non par un milieu matériel (transformation d'énergie thermique d'un émetteur en énergie électromagnétique, propagation,

transformation partielle en énergie thermique sur un corps récepteur) ; voici **la figure (I.2)**. C'est le cas de l'énergie qui nous vient du soleil. Son interprétation physique est tout corps émet des particules désignées par "photons" ; ceux-ci se déplaçant à la vitesse de la lumière et transportent une énergie fonction de leur "longueur d'onde" [6].

Un corps émettant des photons dans toutes les directions possibles, certains d'entre eux sont reçus par l'autre corps est éventuellement absorbés, en tout ou en partie. Bien entendu, ce corps émet aussi des photons dont certains seront reçus et absorbés par le premier corps. Le bilan net se traduit par un échange d'énergie entre les deux corps.

La densité du flux thermique (rayonnement) émis par une surface dont la température est (T), est donnée par la loi de Stéphane Boltzmann.

$$Q = \varepsilon \sigma T^4 \tag{I.11}$$

Le rayonnement pur à grande longueur d'onde entre deux surfaces **i** et **j** portées respectivement à deux différentes températures est évalué par la relation :

$$Q_{ij} = F_{ij} S_i \sigma (T_{si}^4 - T_{sj}^4) = F_{ji} S_j \sigma (T_{si}^4 - T_{sj}^4) \tag{I.12}$$

T_s : La température de la surface (K°).

F_{ij} : Facteur de forme entre les surfaces i et j.

σ : Constante de Stéphane Boltzmann. ($\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2\text{k}^4$).

S : Superficie de la surface (m²).

Q_{ij} : Flux de rayonnement à grande longueur d'onde entre les surfaces i et j.

Si le coefficient d'émission ε du corps est différent du facteur F_{ij} peut admettre que [6] :

$$F_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_i} - 1 + \frac{1}{F_{ij}} + \frac{S_i}{S_j} \left(\frac{1}{\varepsilon_i} - 1\right)} \tag{I.13}$$

Peut également trouver dans la littérature :

$$Q_{ij} = h r_{ij} S_{ij} (T_i - T_j) \tag{I.14}$$

$$hr_{ij} = \frac{\sigma (T_i - T_j)(T_i^2 + T_j^2)}{\frac{1}{\varepsilon_i} - 1 + \frac{1}{F_{ij}} + \frac{S_i}{S_j} \left(\frac{1}{\varepsilon_i} - 1\right)} \quad (\text{I.15})$$

I.3.3. Transfert de chaleur par convection :

Le transfert de chaleur par convection s'effectue dans les milieux fluides ; voici **la figure (I.2)**, plus précisément dans les échanges thermiques entre une paroi et un fluide en mouvement.

Suivant la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue. [7] :

- La convection naturelle (libre) : ou le mouvement du fluide est dû à l'action simultanée des différences des températures qui existe dans le milieu et d'un champ de forces massiques.
- La convection forcée : ou le mouvement du fluide est induit par un moyen mécanique (pompes, ventilateur, etc....).

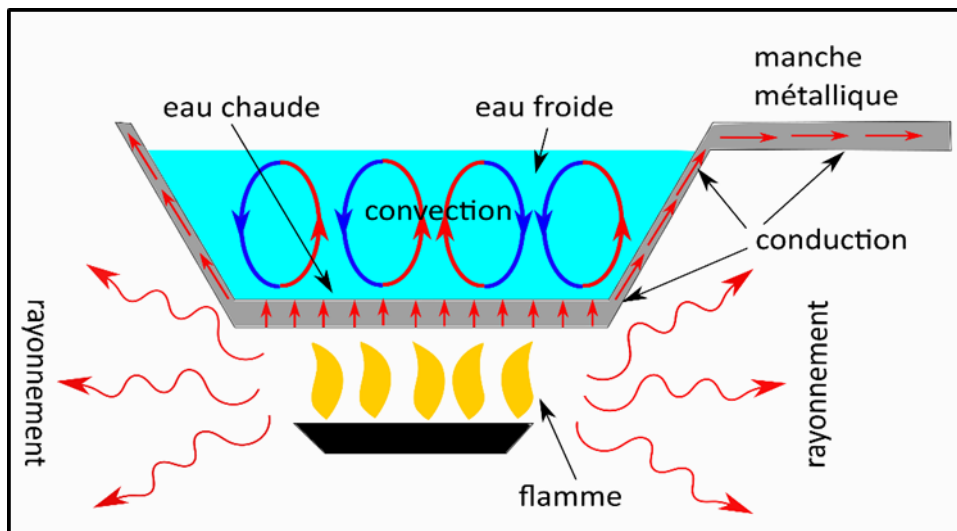


Figure I.3 : Illustration des différents types de transferts thermiques [4].

I.3.3.1. Régime d'écoulement :

A - En régime laminaire :

L'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes entre deux filets de fluides adjacents entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc [8]:

- Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
- Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.

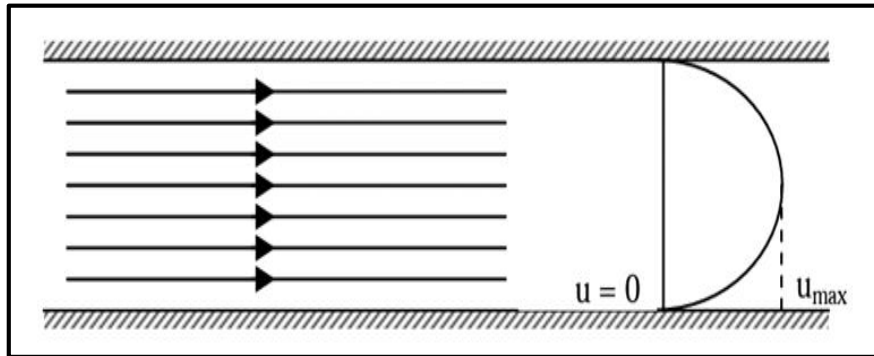


Figure I.4 : Ecoulement d'un fluide en régime laminaire [8].

B - En régime turbulent :

L'écoulement n'est pas unidirectionnel : L'échange de chaleur dans la zone turbulente s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions. Que la chaleur transférée par conduction est généralement négligeable par rapport à celle transférée par convection [8].

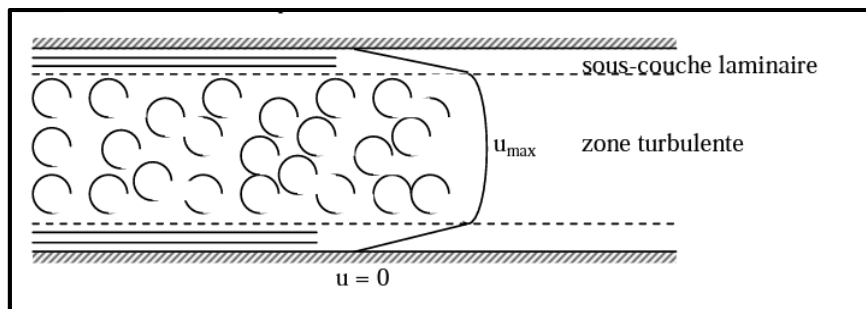


Figure I.5 : Ecoulement d'un fluide en régime turbulent [8].

Le transfert thermique convectif est régi par la loi de Newton [9] :

$$Q = h \times S \times (T_p - T_f) \quad (\text{I.16})$$

Q : Flux de chaleur par convection (W).

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection ($W m^{-2} \text{°C}^{-1}$).

T_p : Température de surface du solide (°C).

T_f : Température du fluide (°C).

S : Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2).

I.3.3.2. En convection naturelle :

Dans le cas de la convection naturelle le flux est une fonction des caractéristiques du fluide, de la longueur de la paroi et l'écart de la température.

En introduisant l'analyse adimensionnelle on déduit une relation entre trois nombres [6] :

$$Nu = c(GrPr)^m \quad (I.17)$$

Ou $Nu = \frac{hD}{\lambda}$ Nombre de Nusselt

$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2}$ Nombre de Grashof

$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$ Nombre de Prandtl

Le calcul de flux de chaleur transmis par convection naturelle suit les étapes suivantes [10] :

- Calcul des nombres adimensionnels Gr et Pr.
- Suivant la valeur du nombre de Gr on choisit de la corrélation correspondante.
- Calcul du nombre de Nu en appliquant la corrélation choisie.
- Calcul du coefficient d'échange par convection h :

$$h = \frac{Nu \lambda}{D} \quad (I.18)$$

- Calcul du flux transmis φ :

$$\varphi = h S (T_p - T_\infty) \quad (I.19)$$

En résolvant le problème de façon analytique, pour un nombre de Prandtl quelconque et pour une paroi de température imposée, on trouve une formule unique [11] :

$$Nu_z = \frac{h_z z}{\lambda} = 0.508 \frac{Pr^{1/2}}{(0.95 + Pr)^{1/4}} \cdot Gr_z^{1/4} \quad (I.20)$$

$$Nu_L = \frac{h L}{\lambda} = 0.677 \frac{Pr^{1/2}}{(0.95 + Pr)^{1/4}} \cdot Gr_L^{1/4} \quad (I.21)$$

Les formules ci-dessus ne sont valables qu'en régime laminaire c'est à dire quand $< 10^9$.

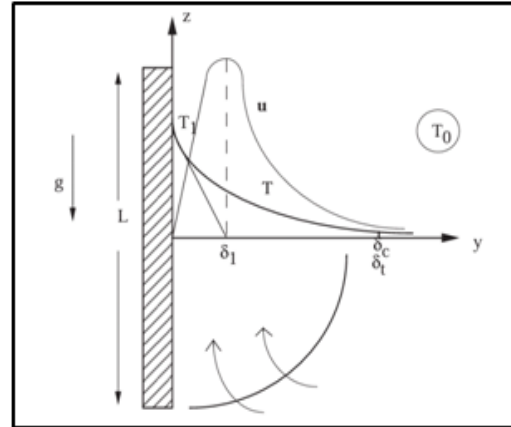
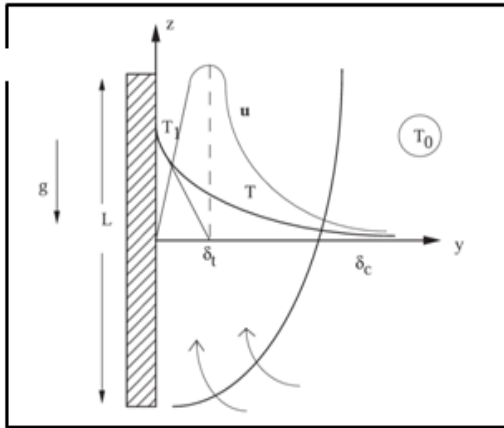


Figure I.6 : Convection naturelle le long d'une plaque plane verticale pour $Pr \gg 1$ [11].

Figure I.7 : Convection naturelle le long d'une plaque plane verticale pour $Pr \ll 1$ [11].

Pour $Gr > 10^9$, le régime est turbulent et MAC ADAMS propose la corrélation [11] :

$$Nu_L = 0.13(Gr_L \cdot Pr)^{1/3} \tag{I.22}$$

Valable pour $Ra_L \in [10^9, 10^{13}]$

Ou $Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta\Delta T l^3}{\alpha\nu}$ Nombre de Rayleigh

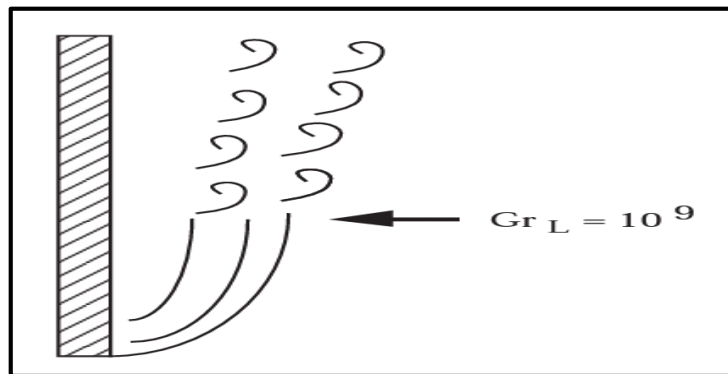


Figure I.8 : Convection naturelle le long d'une plaque verticale : transition à la turbulence [11].

a- Convection naturelle sur plaque plane verticale chauffée à flux constant

Cette situation se rencontre lorsque la paroi contient par exemple une source de chaleur électrique dont la puissance est évacuée par la paroi : le flux à la paroi est alors imposé. Les résultats suivants seront alors utilisés [11] :

- Pour $10^5 < Gr_z^* \cdot Pr < 10^{11}$ (régime laminaire) :

$$Nu_z = 0.6(Gr_z \cdot Pr)^{1/5} \quad (I.23)$$

- Pour $2.10^{13} < Gr_z^* \cdot Pr < 10^{16}$ (régime turbulent) :

$$Nu_z = 0.568(Gr_z^* \cdot Pr)^{0.22} \quad (I.24)$$

- Le nombre de Grashof local modifié s'écrit dans ce cas :

$$Gr_z^* = \frac{g\beta z^3 \varphi_p z}{\nu^2 \lambda} = \frac{g\beta \varphi_p z^4}{\vartheta^2 \lambda} \quad (I.25)$$

Dans cette expression, φ_p désigne le flux à la paroi.

I.3.3.3. En convection forcée

Dans le cas de la convection forcée la relation liant le flux de chaleur transféré aux différentes variables peut être simplifiée à la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels [6] :

$$Nu = f(Re, Pr) \quad (I.26)$$

a- Expressions exactes - Flux total échangé (en laminaire):

Le calcul complet tenant compte du profil de vitesse réel dans la couche limite est en fait possible pour certains écoulements et notamment celui sur plaque plane. On trouve [11]:

- Pour $Pr < 0.1$:

$$Nu_x = 0.565 Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/2} \quad (I.27)$$

(Les propriétés du fluide sont à prendre à la température du film $\frac{T_p + T_\infty}{2}$)

$$\text{Nombre de Nusselt global : } Nu_L = \frac{\phi/L}{\lambda \frac{\Delta T}{L}} = \frac{\int_0^L \phi \cdot dx}{\lambda \Delta T} = \int_0^L \frac{Nu_x \lambda \frac{\Delta T}{x} \cdot dx}{\lambda \Delta T} = \int_0^L Nu_x \frac{dx}{x}$$

Soit :

$$Nu_L = \int_0^L 0.565 \cdot Pr^{1/2} \left(\frac{U_0 \cdot x}{\nu}\right)^{1/2} \cdot \frac{dx}{x} = 1.13 Re_L^{1/2} Pr^{1/2} \quad (I.28)$$

Avec : $Re_L = \frac{U_0 \cdot L}{\nu}$ Nombre de Reynolds

- Pour $Pr > 0.1$:

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \quad (I.29)$$

De même :

$$Nu_L = 0.664 Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \quad (I.30)$$

Le tableau suivant synthétise les résultats :

| | |
|------------|-------------------------------------|
| $Pr \ll 1$ | $Nu_L = 1.13Re_L^{1/2} Pr^{1/2}$ |
| $Pr \gg 1$ | $Nu_L = 0.664Re_L^{1/2} . Pr^{1/3}$ |

Tableau I.2 : Nombre de Nusselt pour un écoulement laminaire d'un fluide sur une plaque plane [11].

b- Convection force turbulent sur plaque plane:

Corrélations usuelles : Lorsque le nombre de Reynolds local Re_x excède la valeur

$Re_x > 3.10^5$ on adopte les résultats suivants [11] :

Pour $0.5 < Pr > 50$ avec un écoulement turbulent sur toute la plaque :

$$Nu_x = 0.029Re_x^{4/5} . Pr^{1/3} \tag{I.31}$$

$$Nu_L = 0.036Re_L^{4/5} \tag{I.32}$$

Le calcul de flux de chaleur transmis par convection forcée suit les étapes suivantes :

- Calcul des nombres adimensionnels Re et Pr .
- Suivant la valeur du nombre de Reynolds Re on fait le choix de la corrélation correspondante
- Calcul du nombre Nu en appliquant la corrélation choisie.
- Calcul du coefficient h à partir de l'équation (I.18).
- Calcul du flux transmis ϕ à partir de l'équation (I.19).

Ou

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2} \tag{I.33}$$

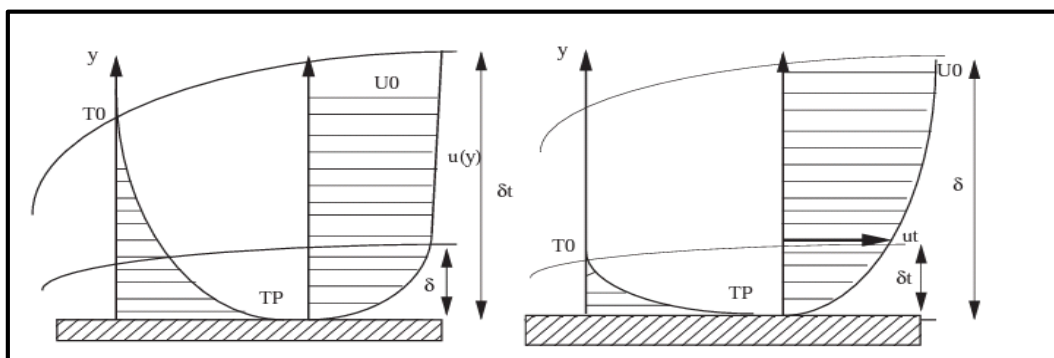


Figure I.9 : $\delta < \delta_t$ ($Pr < 1$) Métaux liquides [11].

Figure I.10 : $\delta > \delta_t$ ($Pr > 1$) Liquides usuels [11].

I.3.3.4. Convection mixte

Il existe une cause externe au mouvement du fluide mais insuffisante pour que la poussée d'Archimède puisse être négligée (frontière entre la convection libre et la convection forcée) c'est le cas des transferts de chaleur dans un habitacle d'automobile :

L'air est soufflé dans l'habitacle par un ventilateur, mais la poussée d'Archimède n'est pas négligeable, surtout lorsqu'on se place loin des entrées d'air [12].

Le groupe adimensionnel qui détermine laquelle de ces convections est dominante est le nombre de Richardson Ri qui est le rapport du nombre de Grashof sur le carré du nombre de Reynolds [12] :

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (I.34)$$

- Si : $\frac{Gr}{Re^2} < 0.1$ c'est la convection forcée qui domine.
- Si : $\frac{Gr}{Re^2} > 10$ c'est la convection naturelle qui domine.
- Si : $0.1 < \frac{Gr}{Re^2} < 10$ c'est le domaine de la convection mixte (naturelle et forcée).

La "gamme des valeurs" de h (unité $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$) est [13]:

- Convection libre (air) $\rightarrow 5-25$
- Convection libre (eau) $\rightarrow 100-900$
- Convection forcée (air) $\rightarrow 10-500$
- Convection forcée (eau) $\rightarrow 100-15000$
- Convection forcée (huile) $\rightarrow 50-2000$
- Convection forcée (métaux fondus) $\rightarrow 6000-120000$
- Eau bouillante $\rightarrow 2500-25000$
- Vapeur d'eau se condensant $\rightarrow 50000-100000$
- Rayonnement (linéarisé a 300K) $\rightarrow 1$

I.4. Les ailettes :

Les ailettes contribuent à l'amélioration du transfert de la chaleur par convection. Elles sont utilisées pour améliorer l'évacuation de la chaleur d'un système solide confiné dans lequel les densités de flux de chaleur sont élevées.[25]

I.4.1. L'augmentation du flux de chaleur :

L'augmentation du flux de chaleur sera maximale si l'ailette est à température uniforme à T_b (conductivité infinie).

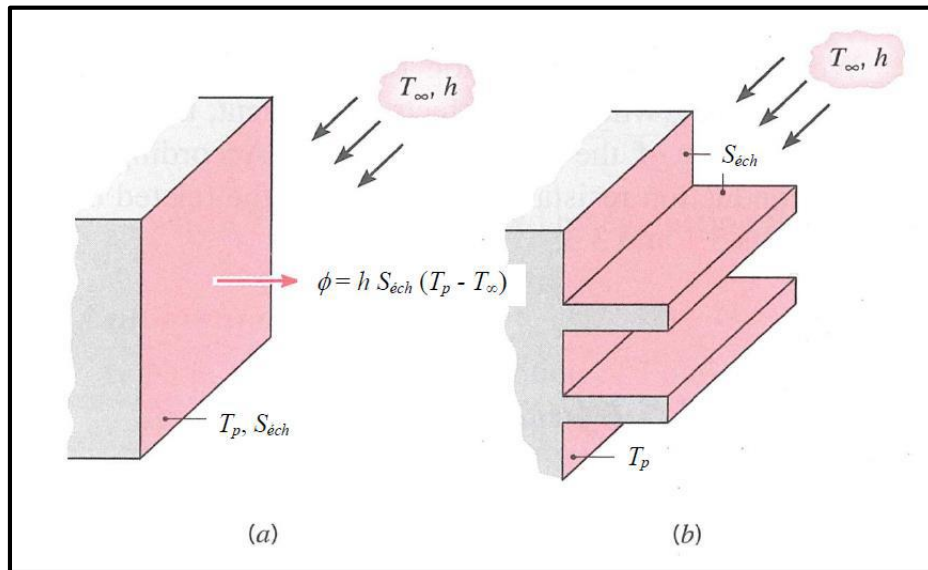


Figure I.11. Utilisation d'ailettes pour augmenter le flux de chaleur évacué du mur
 (a) mur plan, (b) mur muni d'ailettes.

Si T_p est fixée, il y a deux possibilités pour augmenter le flux de chaleur évacué :

- Augmenter le coefficient d'échange convectif, h , en augmentant la vitesse de l'écoulement et/ou diminuer la température du fluide T_∞ . Dans la plupart des applications, augmenter h au maximum ne suffit pas pour évacuer le flux de chaleur souhaité et bien souvent le coût est trop élevé (installation de pompes ou ventilateurs puissants et encombrants). Réduire T_∞ est bien souvent impossible dans l'installation.
- La deuxième solution est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre: il s'agit d'**augmenter la surface d'échange, $S_{éch}$** , en utilisant des ailettes s'étendant à partir du solide dans le milieu environnant. La conductivité thermique du matériau constituant l'ailette doit être élevée afin de minimiser les gradients de température entre la base et l'extrémité de l'ailette.[25]

I.4.2. Forme des ailettes :

Les formes des ailettes sont tellement variées qu'il est important de les citer. il existe plus de 180 profils et géométrie d'ailette en Aluminium dans le monde. La recherche de nouvelles formes est en développement continu. On distingue classiquement les formes :

- ❖ Rectangulaire
- ❖ Triangulaire
- ❖ Parabolique
- ❖ Hyperbolique
- ❖ Annulaire... [26]

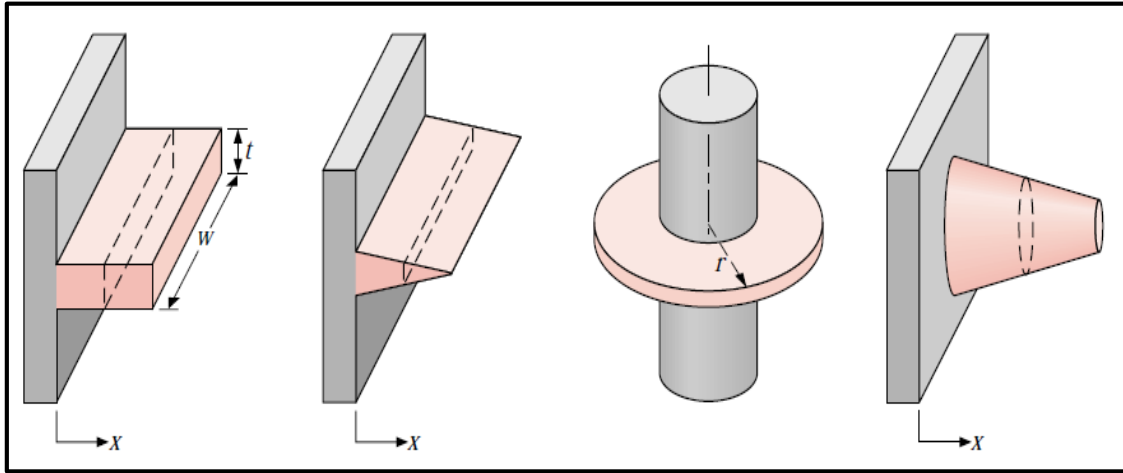


Figure I.12 Les formes des ailettes les plus utilise [27].

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général sur les modes de transferts thermiques ainsi que les grandeurs liées à ces phénomènes physiques et les principales lois régissent ces modes.

Chapitre II
Recherche bibliographique

Travaux effectués pour l'amélioration des performances d'un capteur solaire plan à air muni des chicanes :

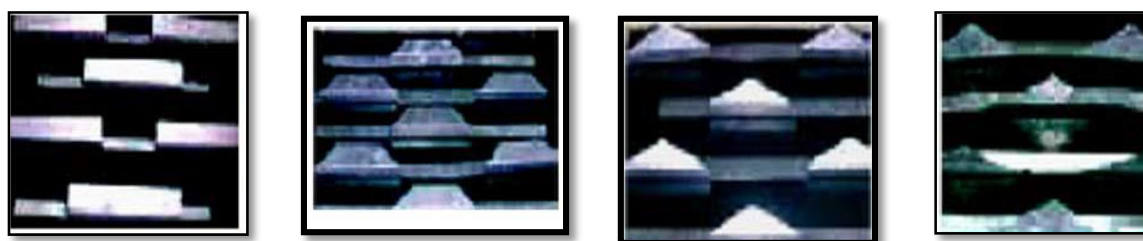
L'emplacement des rugosités artificielles, sous différentes formes sur la surface d'échange entre l'air et l'absorbeur a été recommandé par plusieurs chercheurs.

De nombreuses études ont été menées afin de valoriser l'effet des différentes géométries des rugosités artificielles sur le transfert thermique et le facteur de frottement dans la veine d'air mobile. Cela est essentiellement dû aux faibles propriétés thermo-physiques de l'air.

Pour accroître les performances de ces capteurs, différentes méthodes ont été étudiées par plusieurs chercheurs.

Nous citerons quelques travaux réalisés sur cette thématique de recherche.

N. Chouchane et al. (2009). En vue d'optimiser les échanges convectifs et les Performances thermiques des échangeurs de chaleur et des capteurs solaires à eau et à air, ils ont introduit dans le conduit utile des ailettes de formes diverses dites chicanes. Cependant, leur présence induit une augmentation considérable des pertes de charge qui nécessite une puissance mécanique importante pour le pompage du fluide. Dans ce travail expérimental, ils se sont intéressés à quatre configurations de chicanes. Plusieurs rangées sont introduites à l'intérieur du canal rectangulaire. Les chicanes sont munies d'une partie supérieure inclinée, qui ont pour rôle, la création des écoulements désordonnés et à structure tourbillonnaire développée, à axe vertical et horizontal due aux rétrécissements et aux élargissements brusques, notamment en présence de la disposition en quinconce [14].



a-chicane
rectangulaire

b-chicane
rectangulo-
trapézoïdale

c-chicane
rectangulo
triangulaire

d-chicane
triangulaire

Figure II.1 : Différentes configurations des chicanes étudiées [14].

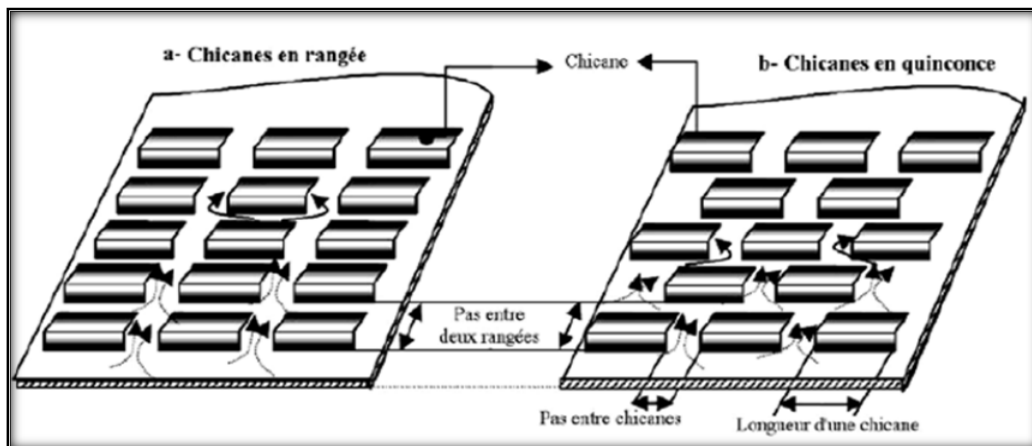


Figure II.2 : Disposition en rangée et en quinconce des chicanes [14]

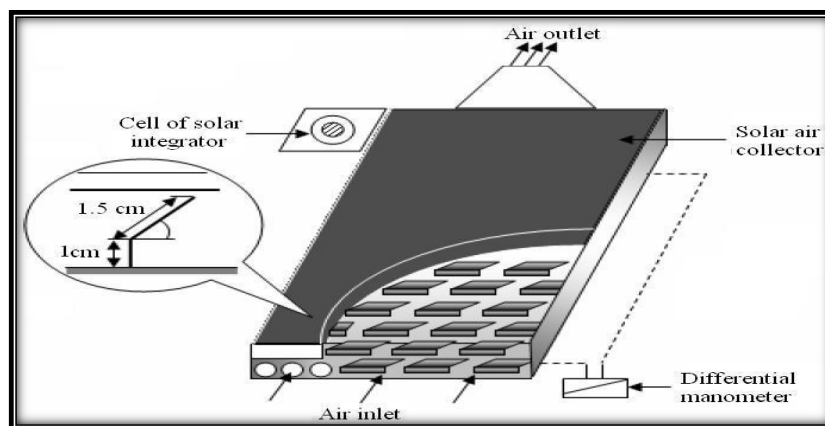


Figure II.3 : Schéma du dispositif expérimental [14]

K. Aoues et al. (2009) Le capteur solaire étudié est conçu et réalisé au laboratoire. Il s'agit d'un capteur plan à air à simple passe d'une surface de captation égale à $1,74 \text{ m}^2$, d'une longueur $L_c = 1.95 \text{ m}$ et d'une largeur $l_c = 0.89 \text{ m}$.

Nous résumons les principaux composants du capteur comme suit:

Une seule couverture transparente de verre d'épaisseur 5 mm.

Une plaque absorbante mince en acier galvanisé peinte en noir mat avec une épaisseur de 0.4 mm.

La hauteur entre la couverture transparente et la plaque absorbante est égale à 25 mm.

La veine d'air dynamique d'une hauteur de 25 mm est comprise entre la plaque absorbante (corps noir) et une plaque inférieure en acier galvanisé placée sur l'isolant.

L'isolation arrière est assurée grâce à une feuille de polystyrène de 40 mm d'épaisseur et puis elle est assurée également par le boîtier en bois de 5 mm d'épaisseur.

En outre, la veine d'air dynamique est équipée de rangées d'obstacles métalliques minces soudées perpendiculairement à l'écoulement sur la plaque inférieure placée au-dessus de l'isolant (Fig. II.3). Ces obstacles ont deux formes différentes (model-1 et model-2) où la différence entre les deux réside dans la partie inclinée d'angle α . Respectivement égale à 60° et 120° [15].

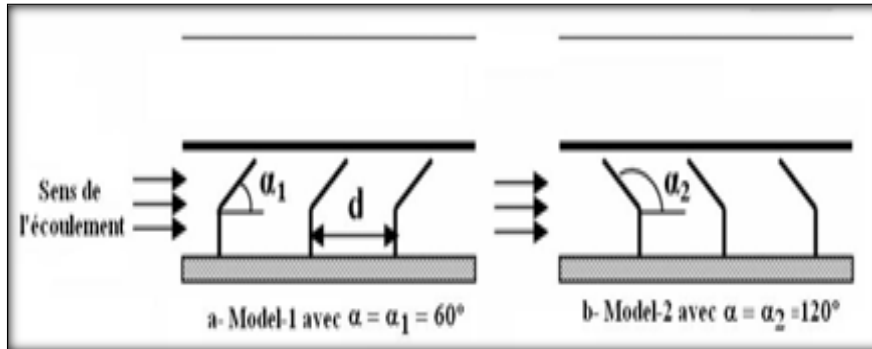


Figure II.4 : Schéma descriptif des chicanes [15]

Ainsi, ces obstacles ont été mis en place et espacés d'une distance (d) suivant deux configurations, A et B, respectivement à $d = 10$ et $d = 5$ cm. Les deux configurations, A et B, se différencient donc par le nombre de rangées (de chicanes), respectivement égale à 152 et 256 chicanes.

Les capteurs solaires fonctionnent dans les états équilibrés (régime thermique établi). Dans ces conditions, les performances d'un capteur solaire sont décrites par le bilan énergétique global suivant:

$$\varphi_{sa} = \varphi_u + \varphi_p + \varphi_{st} \quad (\text{II.1})$$

En négligeant l'énergie thermique stockée dans les différents composants du capteur (inertie thermique), on obtient:

$$\varphi_{sa} = \varphi_u + \varphi_p \quad (\text{II.2})$$

La quantité d'énergie utile à l'échauffement du fluide caloporteur extraite de la chaleur récupérée par un capteur solaire peut être exprimée par:

$$Q_u = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_{fs} - T_{fe}) \quad (\text{II.3})$$

Le rendement du capteur solaire, définie comme étant le rapport entre la quantité d'énergie utile récupérée et le rayonnement global incident, est donné par:

$$\eta = \frac{Q_u}{IG.Sabs} \quad (\text{II.4})$$

Kumar et al. (2017). Leur travail présente les résultats d'une étude expérimentale sur le nombre de *Nusselt* (Nu) et les coefficients de frottement (f) d'un passage d'air solaire avec de multiples obstacles alvéolés de type V. Ils ont réalisé une étude pour examiner les données thermiques et hydrauliques d'un passage d'air solaire avec de multiples obstacles alvéolés de type V sur la paroi chauffée. Le nombre de *Reynolds* (Re) basé sur le diamètre hydraulique du passage d'air solaire, la largeur relative des obstacles en creux (W_c/W_d), le rapport entre la profondeur en creux et le diamètre d'impression (e_d/D_d), le pas relatif entre alvéoles (P_b/e_d), la hauteur relative d'alvéoles (e_d/D_h) et l'angle d'attaque (α_a). [16]

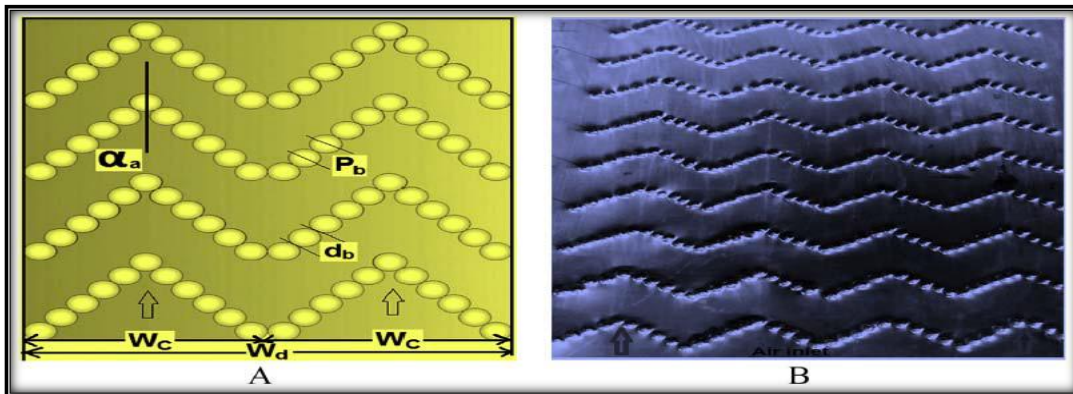


Figure II.5 :(A) Obstacles alvéolés multiples en forme de V [16].

(B) vue photographique de plusieurs obstacles alvéolés en forme de V [16].

Deo et al. (2016), ont mené une étude expérimentale pour examiner les caractéristiques de transfert de chaleur, de frottement et thermo-hydrauliques d'un écoulement dans un conduit rectangulaire rendu rugueux artificiellement d'un côté avec des nervures en V à cavités multiples combinées à des nervures en quinconce.

Les paramètres du système, du fonctionnement et de l'expérimentation considérés ont été: le rapport de forme du conduit rectangulaire de 12, le nombre de *Reynolds* basé sur le débit massique d'air à l'entrée du conduit, le pas relatif de rugosité(p/e), la hauteur relative de rugosité (e/D_h), l'angle d'attaque (α), la largeur relative de l'écart (g/e), le rapport longueur/largeur des côtes décalés (w/e), le pas relatif des côtes décalée (P/p), deux nombres d'écart (n) de chaque côté de la jambe en V[17].

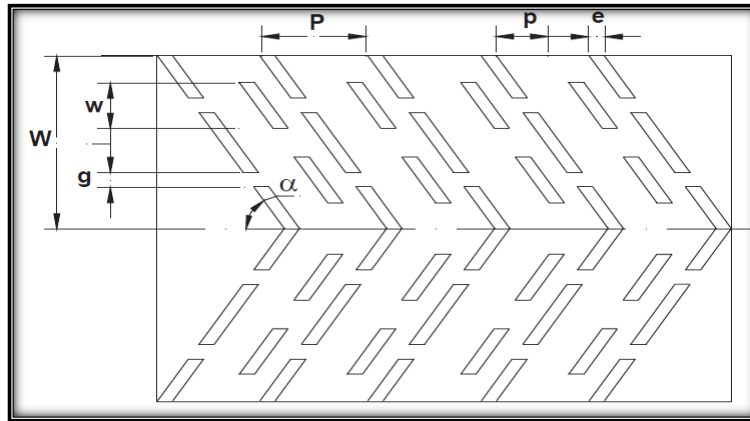


Figure II.6 : Rugosité avec des nervures en forme de V à cavités multiples combinées à des nervures en quinconce [18].

Les résultats montrent deux pics pour le nombre de *Nusselt* correspondant aux valeurs de (P/e) de 6 et de 12 et une diminution du nombre de *Nusselt* a été observée pour une augmentation de la valeur de (e/Dh) au-delà de 0.044. L'amélioration maximale obtenue en nombre de *Nusselt* et de paramètre de performance thermo hydraulique était de 3.34 et 2.45 fois, respectivement [18].

Prasad et Saini (1988), ont tenté d'améliorer le coefficient de transfert de chaleur par convection entre la plaque absorbante et l'air dans un panneau solaire à plaque plane en dotant la plaque absorbante d'une rugosité artificielle. Ils ont réalisé une étude d'un flux complètement turbulent dans un conduit de panneau solaire à air avec des fils de métal saillants de petit diamètre sur la plaque absorbante. Ils ont développé, ainsi, des expressions.

Pour prédire le nombre *Nusselt* et le coefficient de frottement. Ils ont comparé, en outre, les résultats de ces expressions aux résultats disponibles. Ils se sont avérés comparables avec un écart moyen de 6.3% pour le facteur de frottement et 10.7% pour le nombre de *Nusselt*. Enfin, ils ont également étudié l'effet de la hauteur et du pas des éléments de rugosité sur le taux de transfert de chaleur et le frottement pour une gamme de paramètre décrite comme suit:

Une amélioration du nombre de *Nusselt* et du coefficient de frottement dans le conduit rendu rugueux est d'environ 2.38; 2.14; 2.01 et 4.25; 3.39; 2.93 fois par rapport à ceux du conduit lisse pour un pas de rugosité relatif de 10, 15 et 20 respectivement [19].

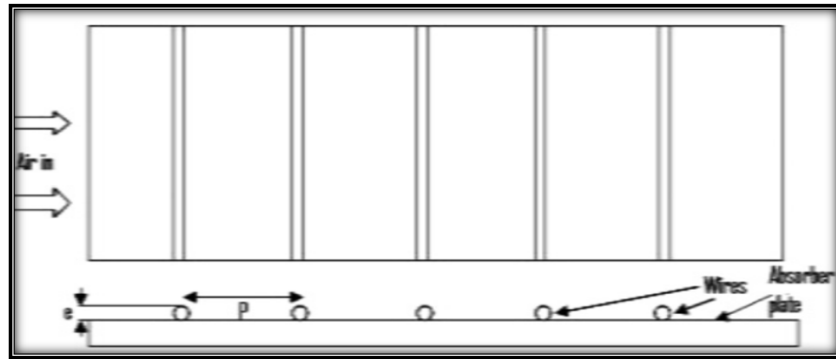


Figure II.7 : rugosité avec fils métalliques continus transversaux [19].

Varun et al.(2008), ont réalisé une expérience pour étudier les caractéristiques de transfert de chaleur et de frottement en utilisant une combinaison de nervures inclinées et transversales sur la plaque absorbante d'un capteur solaire à air. L'étude expérimentale a porté sur un nombre de Reynolds (Re) compris entre 2000 et 14000, un pas relatif de rugosité (p/e) de 3 à 8 et une hauteur relative de rugosité (e/D) de 0.030. La discussion de l'effet de ces paramètres sur le coefficient de transfert de chaleur et le coefficient de frottement a permis de conclure que les meilleures performances sont obtenues avec un pas de rugosité relative égal à 8 [20].

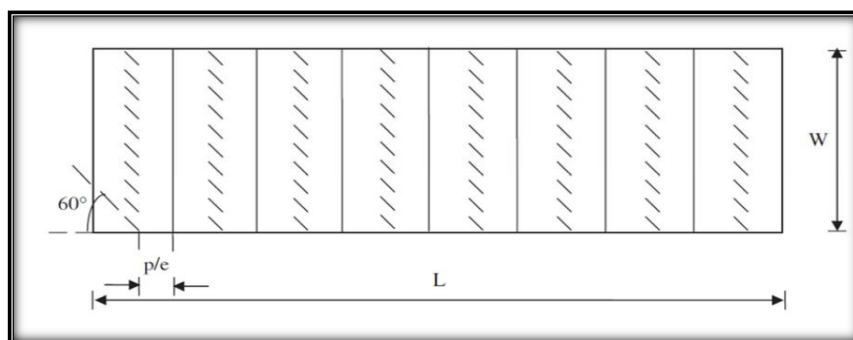


Figure II.8 : Rugosité par combinaison entre fils métalliques transversaux et inclinés [20]

Gawande et al. (2016), ont mené une étude sur un capteur solaire qui utilise une rugosité artificielle sous la forme de nervures répétées sur la plaque absorbante pour améliorer le taux de transfert de chaleur. Le transfert de chaleur par convection forcée de l'air dans un capteur solaire avec des nervures inversées en forme de L a été effectué de manière expérimentale et numérique [21].

Les performances thermiques du capteur solaire à air sont étudiées avec des variables de conception tels que le pas relatif de rugosité (P/e), le nombre de Reynolds (Re), le flux de chaleur (1000 W/m^2) et la hauteur de rugosité relative (e/D). Une simulation CFD bidimensionnelle utilisant un code CFD, ANSYS FLUENT et le modèle de turbulence RNG $k-\epsilon$, permet de résoudre les termes de turbulence dans les équations de gouvernance.

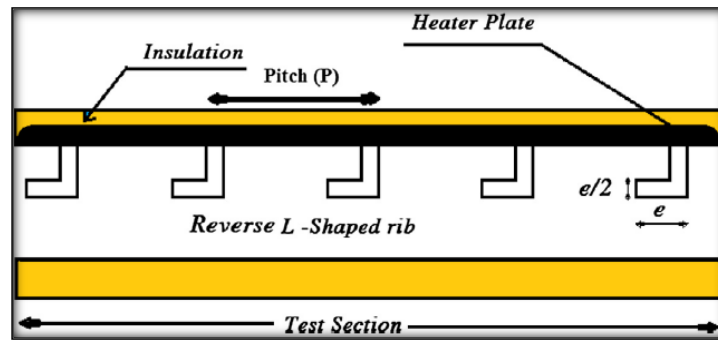


Figure II.9: Rugosité avec nervures en forme de L inversé [21].

Cette étude a révélé que la présence d'une nervure en forme de L inversée présente un effet significatif sur les caractéristiques de transfert de chaleur et du coefficient de frottement, par optimale de l'élément de rugosité (nervure en forme de L inversée) pour le capteur solaire à air durci artificiellement. Il a été constaté que les résultats numériques concordaient bien avec les résultats expérimentaux pour la gamme de paramètres étudiés.

Saini SK et Saini RP(2008), ont étudié expérimentalement l'amélioration du coefficient de transfert de chaleur d'un capteur solaire ayant un conduit d'air doté d'une rugosité artificielle sous la forme de fils parallèles en forme d'arcs servant d'éléments de rugosité. L'effet des paramètres du système tels que la hauteur de rugosité relative (e/d) de 0.0213 à 0.0422; l'angle d'arc ($\alpha/90$) de 0.3333 à 0.6666; pas de rugosité relative (p/e) égal à 10 et le facteur de forme (W/H) de 12, sur le nombre de Nusselt (Nu) et le coefficient de frottement (f) a été étudié avec un nombre de Reynolds (Re) de 2000 à 17000. Une amélioration considérable du coefficient de transfert de chaleur a été obtenue avec un tel élément de rugosité. Le maximum de Nu obtenu a été de 3.80 fois celui du conduit lisse pour un angle d'attaque relatif ($\alpha/90$) de 0.333 et une hauteur de rugosité relative (e/D) de 0.0422. Cependant, l'augmentation du coefficient de frottement correspondant à ces paramètres n'a été que de 1.75 fois seulement [22].

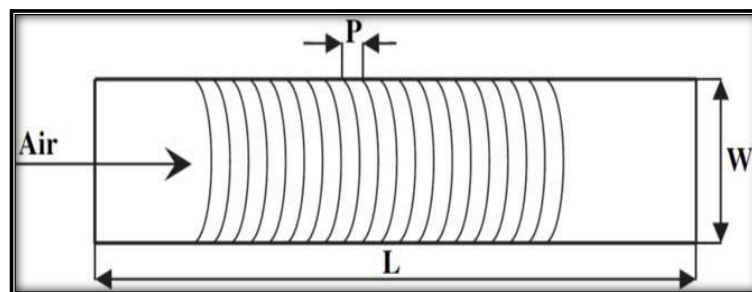


Figure II.10 : Rugosité avec fils métalliques en forme d'arc [22]

K. Aoues et Al [23] ont mené un travail théorique en vue d'améliorer le coefficient de transfert convectif entre l'air et l'absorbeur, en plaçant des chicanes cylindriques perpendiculairement à l'écoulement dans la veine d'air dynamique entre l'absorbeur et l'isolant.

Les auteurs ont étudié les trois cas suivants :

- Le capteur plan à air dé pour vu de chicanes.
- Le capteur plan à air muni de chicanes cylindriques arrangées en rangés alignées.
- Le capteur plan à air muni de chicanes cylindriques arrangées en quinconces.

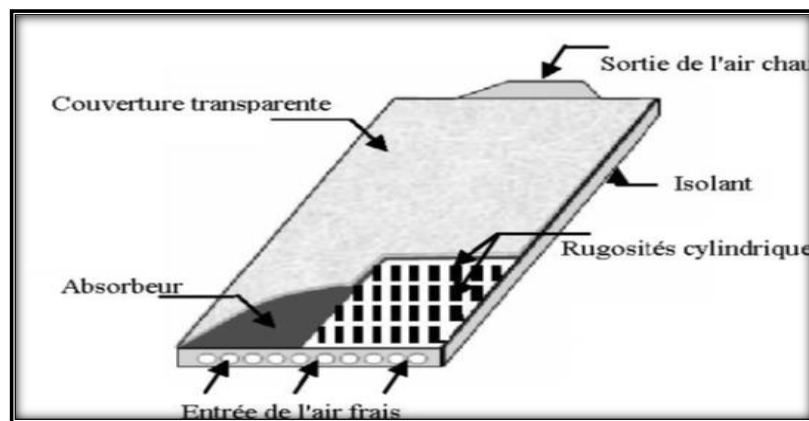


Figure II.11 : Capteur plan à air muni de rugosités cylindriques [23].

Les auteurs ont trouvé que le meilleur rendement est obtenu avec des chicanes cylindriques arrangées en quinconce, et le plus bas pour le capteur lisse [23].

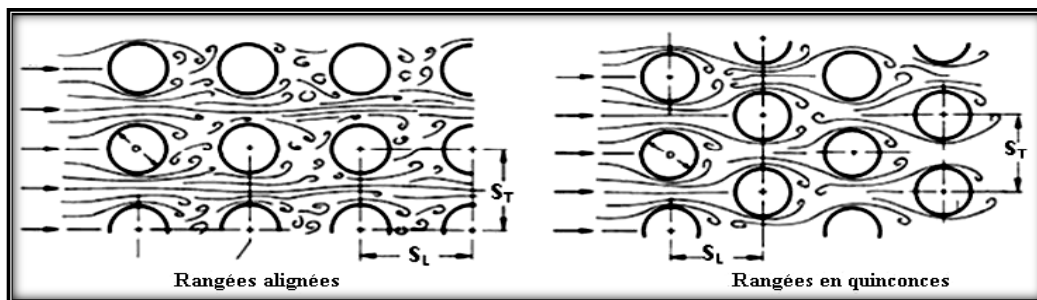


Figure II.12 : Les différents arrangements des chicanes cylindriques.[23]

Bahria et al [24] ont comparés deux capteurs similaires, l'un est simple et l'autre est muni de 8 rangées de chicanes, d'après les résultats, les auteurs ont remarqués que l'adjonction des chicanes a apporté une augmentation remarquable aux performances du capteur qui est d'environ 27 % vers midi et cela est dû à l'augmentation de la surface d'échange d'une part et de l'écoulement turbulent créé par ces obstacles.

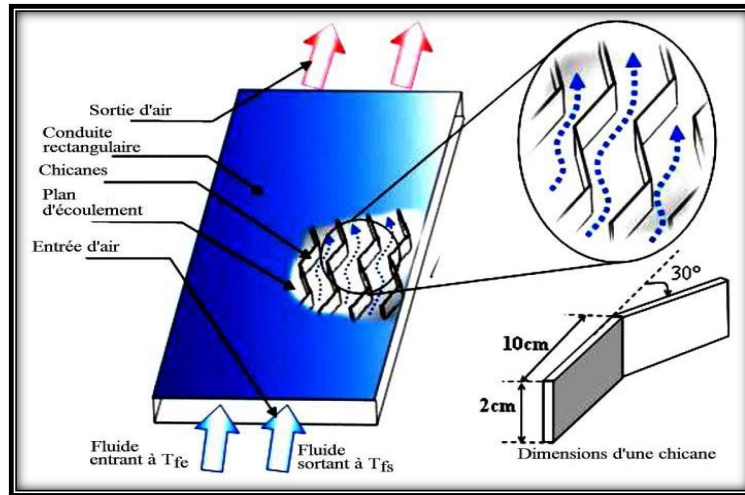


Figure II.13 : Schéma d'un capteur solaire avec chicane. [24]

Conclusion :

Dans ce chapitre on a réalisé une recherche bibliographique sur les travaux effectués pour l'amélioration des performances des capteurs solaires plans à air muni des chicanes, on a remarqué clairement que l'introduction des chicanes artificielles dans les conduits utiles des capteurs solaires plans à air améliorent énormément les performances thermiques des capteurs.

Chapitre III

La méthode des différences finis

III.1. Introduction

En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux étapes : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

III.2. Interpolation et l'extrapolation

Il arrive souvent que la fonction qu'on doit traiter (détermination en certains points, sa valeur, sa dérivée,etc.) soit défini d'une façon qui rende sa manipulation mal aisée (expression algébrique compliquée, définition sous forme implicite ou par un développement en séries). Il est donc nécessaire de remplacer la fonction à traiter par une fonction approchée plus simple $g(x)$ ou plus généralement par un ensemble de fonctions $g_K(x)$ puis de traiter non pas $f(x)$ mais $g(x)$.

On appelle l'interpolation, l'ensemble des points $x_j (j = 0, \dots, n)$ ou la fonction est connue.

L'approximation peut être globale si $g(x)$ est défini à partir de tous les x_j ou par morceaux si $g(x)$ est défini à partir de sous ensemble de points x_j .

Une fois $g(x)$ est déterminée il est souvent nécessaire de déterminer $f(x)$ en un ou plusieurs points ne coïncidant pas avec x_j . C'est le problème de l'interpolation si x est dans l'intervalle $[x_0, x_n]$ et de l'extrapolation si x est extérieur à $[x_0, x_n]$, $x < x_0$ ou $x > x_n$ [28].

III.2.1. Forme polynômiale développée en puissance de x

Etant donné $f(x)$ défini par les valeurs f_j qu'elle prend en $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. On remplace $f(x)$ par le polynôme $P_n(x)$ de degré n passant par les points (x_j, f_j) . Ce polynôme peut s'écrire sous diverses formes. On peut écrire $P_n(x)$ sous la forme [28]:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (\text{III.1})$$

III.2.1.1. Calcul des coefficients du développement

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f_0(1) \\ f(x_1) = P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f_1(2) \\ \vdots \\ f(x_n) = P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f_n(n+1) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III.2)} \\ \text{(III.3)} \\ \text{(III.4)} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \text{(III.5)}$$

On a un système de (n+1) équations de (n+1) inconnus. La résolution de ce système linéaire se fait soit par une méthode directe (élimination de Gauss, méthode de décomposition de A, méthode d'inversion de A ou bien par une méthode itérative ex : Jacobi, Gauss-Hill, méthode avec relaxation...) [28].

III.2.2. Forme polynômiale de Lagrange

III.2.2.1. Expression du polynôme d'interpolation

Le polynôme $P_n(x)$ qui passe par les (n+1) points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ s'écrit alors[29] :

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^n L_j(x_i) f(x_j) = f(x_i) \delta_{ij} = f(x_i) \quad \text{(III.6)}$$

$L_j(x)$: S'appelle polynôme de Lagrange.

$L_j(x)$ Peut s'écrire, de façon plus condensée :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad \text{(III.7)}$$

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} \quad \text{(III.8)}$$

III.2.3. Interpolation par les différences divisées

III.2.3.1. Définition de l'opérateur différence divisée

On peut définir les différences divisées d'ordre « 0 » (zéro), 1, 2, 3, ..., n de la façon suivante

[29] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta(x_i)f = \delta_i = f(x_i) = f_i & \text{Différence divisée d'ordre 0 (relatif à } x_i \text{)} \quad \text{(III.9)} \\ \delta(x_i, x_j)f = \delta_{i,j} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} & \text{Différence divisée d'ordre 1} \quad \text{(III.10)} \\ \delta(x_i, x_j, x_k)f = \delta_{i,j,k} = \frac{\delta_{j,k} - \delta_{i,j}}{x_k - x_i} & \text{Différence divisée d'ordre 2} \quad \text{(III.11)} \\ \delta(x_i, x_{j+1}, \dots, x_{p-1}, x_p)f = \delta_{i,i+1,\dots,p-1,p} = \frac{\delta_{i+1,\dots,p} - \delta_{i,\dots,p-1}}{x_p - x_i} & \text{Différences divisées d'ordre } p-1 \quad \text{(III.12)} \end{array} \right.$$

III.2.3.2. Polynôme d'interpolation par les différences divisées

$$\begin{aligned} f(x) \cong P_n(x) = & (x_0) + (x - x_0)\delta_{0,1} + (x - x_0)(x - x_1)\delta_{0,1,2} \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\delta_{0,1,2,3} + \dots \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})\delta_{0,1,\dots,n} \end{aligned} \quad \text{(III.13)}$$

Il faut utiliser le 1^{er} point le point le plus proche du point d'interpolation et ainsi de suite.

Si utilise un seul point, on a une interpolation linéaire, deux points c'est l'interpolation parabolique et trois points c'est l'interpolation cubique [29].

III.2.4. Interpolation polynomiale de Newton sur un pas constant

$$h = x_j - x_{j-1} :$$

III.2.4.1. Interpolation utilisant les différences à droite (formule de Gregory-Newton) :

L'opérateur « différence à droite » pour la différence progressive notée Δ_+ est défini par [30] :

$$h = x_j - x_{j-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_+ f(x) = f(x+h) - f(x) & \text{Différence à droite d'ordre 1} \quad \text{(III.14)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_+^2 f(x) = \Delta_+[\Delta_+ f(x)] = \Delta_+ f(x+h) - \Delta_+ f(x) \\ = [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] \\ = f(x+2h) + f(x) - 2f(x+h) & \text{Différence à droite d'ordre 2} \quad \text{(III.15)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ \Delta_+^n f(x) = \Delta_+[\Delta_+^{n-1} f(x)] & \text{Différence à droite d'ordre } n \quad \text{(III.16)} \end{array} \right.$$

Lorsque $x = x_j$ (x est un point de la base d'interpolation).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_+ f(x_j) = \Delta_+ f_j = f(x_j + h) - f(x_j) = f_{j+1} - f_j \end{array} \right. \quad (\text{III.17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_+^2 f(x_j) = \Delta_+^2 f_j = f(x_j + 2h) - 2f(x_j + h) + f(x_j) = f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \Delta_+^n f(x_j) = \Delta_+^n f_j = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} f_{j+k} \end{array} \right. \quad (\text{III.19})$$

Le tableau III.1 donne les 5 premières différences à droite. Il se lit, par exemple :

$$\Delta_+^4 f_j = f_j - 4f_{j+1} + 6f_{j+2} - 4f_{j+3} + f_{j+4}$$

| | f_j | f_{j+1} | f_{j+2} | f_{j+3} | f_{j+4} | f_{j+5} |
|------------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\Delta_+ f_j$ | -1 | 1 | | | | |
| $\Delta_+^2 f_j$ | 1 | -2 | 1 | | | |
| $\Delta_+^3 f_j$ | -1 | 3 | -3 | 1 | | |
| $\Delta_+^4 f_j$ | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | |
| $\Delta_+^5 f_j$ | -1 | 5 | 10 | 10 | -5 | 1 |

Tableau III.1 : Différence à droite $\Delta_+^n f_j$ pour $n = 1$ à 5 [30].

Dans la formule progressive de Gregory-Newton on prend les points situés à droite du point considéré :

$$x_j < x < x_{j+1}$$

L'abscisse x est repérée par rapport à l'un quelconque des points x_j de la base d'interpolation, et on pose :

Ou h est le pas.

$$\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{x - x_j}{h} = r \quad (\text{III.20})$$

Si $\frac{x - x_j}{h} < 1$ alors :

$$\begin{aligned} f(x) = & f_j + r \Delta_+ f_j + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta_+^2 f_j + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} \Delta_+^3 f_j \\ & + \dots + \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-n+1)}{n!} \Delta_+^n f_j \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

III.2.4.2. Interpolation utilisant les différences à gauche (Formule régressive de Gregory Newton)

L'opérateur « différence à gauche » pour la différence régressive noté Δ_- est défini par [30] :

$$\begin{cases} \Delta_- f(x) = f(x) - f(x - h) & \text{Différence à gauche d'ordre 1} & \text{(III.22)} \\ \vdots & \vdots & \\ \Delta_-^n f(x) = \Delta_- [\Delta_-^{n-1} f(x)] & \text{Différence à gauche d'ordre } n & \text{(III.23)} \end{cases}$$

Lorsque $x = x_j$

$$\begin{cases} \Delta_- f(x_j) = \Delta_- f_j = f_j - f_{j-1} & \text{(III.24)} \\ \Delta_-^2 f(x_j) = \Delta_-^2 f_j = f(x_j - 2h) - 2f(x_j - h) + f(x_j) = f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j & \text{(III.25)} \\ \vdots & \\ \Delta_-^n f(x_j) = \Delta_-^n f_j = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} f_{j+k} & \text{(III.26)} \end{cases}$$

Les premières différences sont indiquées tableau III.2 ci-dessous.

| | f_j | f_{j-1} | f_{j-2} | f_{j-3} | f_{j-4} | f_{j-5} |
|------------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\Delta_- f_j$ | 1 | -1 | | | | |
| $\Delta_-^2 f_j$ | 1 | -2 | 1 | | | |
| $\Delta_-^3 f_j$ | 1 | -3 | 3 | 1 | | |
| $\Delta_-^4 f_j$ | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | |
| $\Delta_-^5 f_j$ | 1 | -5 | 10 | -10 | 5 | -1 |

Tableau III.2 : Différence à gauche $\Delta_-^n f_j$ pour $n = 1$ à 5 [30].

Dans la formule régressive de Gregory-Newton on prend les points situés à gauche du point considéré x_j .

$$\frac{x - x_j}{h} = r \quad / \text{ Ou } h \text{ est le pas.}$$

$-1 < r < 0$ Alors

$$\begin{aligned} f(x) = & f_j + r \Delta_- f_j + \frac{r(r+1)}{2!} \Delta_-^2 f_j + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!} \Delta_-^3 f_j \\ & + \dots + \frac{r(r+1)(r+2) \dots (r+n-1)}{n!} \Delta_-^n f_j \end{aligned} \quad \text{(III.27)}$$

III.2.4.3. Interpolation utilisant les différences centrées sur base entière

(Formule de Stirling) :

L'opérateur différence centré noté Δ_0 est défini par [31]:

$$\Delta_0 f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \text{ Différence à droite d'ordre 1} \tag{III.28}$$

$$\Delta_0^n f(x) = \Delta_0[\Delta_0^{n-1}(x)] \text{ Différence à droite d'ordre } n \tag{III.29}$$

Pour x , point du support d'interpolation $x = x_j$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_0 f_j &= f\left(x_j + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_j - \frac{h}{2}\right) = f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2}(f_j + f_{j-1}) \end{aligned} \right. \tag{III.30}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_0^2 f_j &= \Delta_0[\Delta_0 f_j] = \Delta_0\left[f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}\right] = \Delta_0 f_{j+\frac{1}{2}} - \Delta_0 f_{j-\frac{1}{2}} \\ &= (f_{j+1} - f_j) - (f_j - f_{j-1}) = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1} \end{aligned} \right. \tag{III.31}$$

$$\left. \begin{aligned} &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \tag{III.32}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_0^{n=2p} f_j &= \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \frac{(2p)!}{k!(2p-k)!} f_{j-p+k} \end{aligned} \right. \tag{III.33}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_0^{n=2p+1} f_j &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k \frac{(2p+1)!}{k!(2p+1-k)!} f_{j+p-k+1} + f_{j+p-k} \end{aligned} \right.$$

| | f_{j-3} | f_{j-2} | f_{j-1} | f_j | f_{j+1} | f_{j+2} | f_{j+3} |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|
| $2\Delta_0 f_j$ | | | -1 | 0 | 1 | | |
| $\Delta_0^2 f_j$ | | | 1 | -2 | 1 | | |
| $2\Delta_0^3 f_j$ | | -1 | 2 | 0 | -2 | 1 | |
| $\Delta_0^4 f_j$ | | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | |
| $2\Delta_0^5 f_j$ | -1 | 4 | -5 | 0 | 5 | -4 | 1 |

Tableau III.3 : Différences centrées $\Delta_0^n f_j$ sur une base entière [30].

Dans la formule d'interpolation par les différences centrées :

$$\frac{x - x_j}{h} = r \quad \text{Ou } h \text{ est le pas.}$$

Si $x_j > x$ $r < 0$

Si $x_j < x$ $r > 0$ -è »

$$-\frac{1}{2} < r < \frac{1}{2} \quad |x - x_j| < \frac{h}{2}$$

$$f(x) = f_j + r \Delta_0 f_j + \frac{r^2}{2!} \Delta_0^2 f_j + \frac{r(r^2 - 1)}{3!} \Delta_0^3 f_j + \frac{r^2(r^2 - 1)}{4!} \Delta_0^4 f_j + \frac{r(r^2 - 1)(r^2 - 4)}{5!} \Delta_0^5 f_j \quad (\text{III.34})$$

III.2.4.4. Interpolation utilisant les différences centrées sur base entière (Formule de Bessel)

Il faut à aussi distinguer les cas n pair et n impair [32]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_0 f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} - f_j \\ d'où \\ \Delta_0^n f_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} f_{j-k+\frac{n+1}{2}} \end{array} \right. \quad (\text{III.35})$$

$$\quad \quad \quad (\text{III.36})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_0^{n=2p+1} f_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k \frac{(2p+1)!}{k!(2p+1-k)!} f_{j+p+1-k} \\ \Delta_0^{n=2p} f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \frac{(2p)!}{k!(2p-k)!} f_{j+p-k+1} + f_{j+p-k} \end{array} \right. \quad (\text{III.37})$$

$$\quad \quad \quad (\text{III.38})$$

III.2.4.5. Interpolation utilisant les Différences centrées sur base demi-entière (formule de Bessel)

Les différences centrées sur base demi entière $f_{j+1/2}$ sont construites comme précédemment [32]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_0 f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} - f_j \\ d'où \\ \Delta_0^{2p} f_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2p!}{k!(2p-k)!} f_{j-k+\frac{n+1}{2}} \end{array} \right. \quad (\text{III.39})$$

$$\quad \quad \quad (\text{III.40})$$

Il faut à aussi distinguer les cas n pair et n impair :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_0^{n=2p+1} f_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k \frac{(2p+1)!}{k!(2p+1-k)!} f_{j+p+1-k} \\ \Delta_0^{n=2p} f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \frac{(2p)!}{k!(2p-k)!} f_{j+p-k+1} + f_{j+p-k} \end{array} \right. \quad (\text{III.41})$$

$$\quad \quad \quad (\text{III.42})$$

Le tableau III.4 donne les premiers termes :

| | f_{j-2} | f_{j-1} | f_j | f_{j+1} | f_{j+2} | f_{j+3} |
|-------------------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|
| $\Delta_0 f_j$ | | | -1 | 1 | | |
| $\Delta_0^2 f_j$ | | 1 | -1 | -1 | 1 | |
| $2\Delta_0^3 f_j$ | | -1 | 3 | -3 | 1 | |
| $\Delta_0^4 f_j$ | 1 | -3 | 2 | 2 | -3 | 1 |
| $2\Delta_0^5 f_j$ | -1 | 5 | -10 | 10 | -5 | 1 |

Tableau III.4 : Différences centrées $\Delta_0^n f_{j+1/2}$ sur base demi centrées [33].

Peut obtenir les formules de Gauss (cf. ouvrage de Hacques), d'où on déduit la situé au milieu d'un segment joignant deux valeurs tabulées (base demi entiers) :

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) + r\Delta_0 f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{(r^2 - \frac{1}{4})}{2!} \Delta_0^2 f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{r(r^2 - \frac{1}{4})}{3!} \Delta_0^3 f_{j+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{(r^2 - \frac{1}{4})(r^2 - \frac{9}{4})}{4!} \Delta_0^4 f_{j+\frac{1}{2}} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{III.43}$$

III.2.5. Utilisation des formules d'interpolation

Pour que la précision soit la meilleur possible, il faut utiliser le maximum de terme dans le développement de (x).

La fonction est tabulée pour les valeurs $x_0, x_1, x_2 \dots \dots, x_n$

- Si x est voisin des premières valeurs tabulées x_0, x_1, \dots on utilise la formule d'interpolation par les différences à droite.
- Si x est voisin des dernières valeurs tabulées \dots, x_{n-1}, x_n , on utilise la formule d'interpolation par les différences à gauche.
- Si x est situé au milieu de la table, on utilise la formule d'interpolation par les différences centrées.

Lorsque le pas n'est pas constant, on utilise les différences divisées ou Lagrange ou un développement en puissance de x [30].

III.2.6. Erreur d'interpolation

Le polynôme $P_n(x)$ représente une approximation de (x). On peut montrer que l'erreur faite vaut :

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = f^{n+1}(\xi) \cdot S_n(x) / (n + 1)!
 \tag{III.44}$$

$f^{n+1}(\xi)$ Le dérivé d'ordre (n+1) de la fonction f au point ξ .

$$S_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots \dots \dots (x - x_n) \tag{III.45}$$

ξ est la valeur de $x \in [x_0, x_n]$ intervalle d'interpolation.

Il est impossible d'évaluer l'erreur si (x) n'est pas connue [30].

III.3. Dérivée numérique d'une fonction

Les formules pour les dérivées peuvent être obtenues à partir des formules d'interpolation de Newton pour un pas constant, mais peuvent aussi être établies en utilisant les développements en séries de Taylor.

III.3.1. Utilisation des différences à droite (ou progressive)

III.3.1.1. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 1 en h

a. Calcul de f'_j :

l'erreur commise est de l'ordre de h [21].

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x) \dots \dots \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) \dots \dots \dots \tag{III.46}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \sigma(h) \tag{III.47}$$

Si $x = x_j$ alors

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h} + \sigma(h) = \frac{\Delta_+ f_j}{h} + \sigma(h) \tag{III.48}$$

b. Calcul de f''_j :

$$(-2) * \left\{ \begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x) + \dots \dots \dots \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(x) + \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

$$-2f(x+h) + f(x+2h) = -f(x) + h^2f''(x) + h^3f^{(3)}(x) + \dots \dots \dots$$

$$f'' = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} - hf^{(3)}(x) + \dots \dots \dots \tag{III.49}$$

Ou encore, en faisant $x = x_j$

$$f''_j = \frac{f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2}}{h^2} + \sigma(h) = \frac{\Delta_+^2 f_j}{h^2} + \sigma(h) \tag{III.50}$$

$$f_j^n = \frac{\Delta_+^n f_j}{h^n} + \sigma(h) = \frac{(-1)^n}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k c_n^k f_{j+k} + \sigma(h) \tag{III.51}$$

Le tableau (III.5) ci-dessous donne les coefficients jusqu'à l'ordre 4. Par exemple, on lit sur le tableau(III.5) :

$$f_j^{(4)} = \frac{1}{h^4} (f_j - 4f_{j+1} + 6f_{j+2} - 4f_{j+3} + f_{j+4}) + \sigma(h)$$

| | f_j | f_{j+1} | f_{j+2} | f_{j+3} | f_{j+4} | |
|-----------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| hf'_j | -1 | 1 | | | | $+\sigma(h)$ |
| $h^2 f''_j$ | 1 | -2 | 1 | | | |
| $h^3 f'''_j$ | -1 | 3 | -3 | 1 | | |
| $h^4 f_j^{(4)}$ | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | |

Tableau III.5 : Dérivées à l'ordre 1 à partir des différences à droite [33].

III.3.1.2. Les dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 2 en h

On obtient une meilleure précision en prenant plus de termes dans le développement en séries, ainsi pour trouver f'_j on utilise le développement jusqu'à l'ordre 2[32].

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{6!} f^{(3)}(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) \tag{III.52}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} \left[\frac{f(x) - 2f(x + h) + f(x + 2h)}{h^2} - hf^{(3)}(x) - \dots \right] \\ &\quad - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) \dots \dots \\ &= \frac{2f(x + h) - 2f(x) - f(x) + 2f(x + h) - f(x + 2h)}{2h} - \frac{4h^2}{3} f^{(3)}(x) + \dots \\ f'(x) &= \frac{-3f(x) + 4f(x + h) - f(x + 2h)}{2h} - \frac{h^2}{3} f^{(3)}(x) + \dots \tag{III.53} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit, pour $x = x_j$

$$f'_j = \frac{-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}}{2h} + \sigma(h^2) \tag{III.54}$$

Par des démonstrations similaires on obtient $f', f'', f^{(3)} \dots$ à l'ordre 2 en h

Le tableau III.6 donne les dérivées ainsi calculées jusqu'à l'ordre 4 : par exemple :

$$f_j'' = \frac{1}{h^2} (2f_j - 5f_{j+1} + 4f_{j+2} - f_{j+3}) + \sigma(h^2)$$

| | f_j | f_{j+1} | f_{j+2} | f_{j+3} | f_{j+4} | f_{j+5} | |
|------------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| $2h f_j'$ | -3 | 4 | -1 | | | | $+\sigma(h^2)$ |
| $h^2 f_j''$ | 2 | -5 | 4 | -1 | | | |
| $2h^3 f_j^{(3)}$ | -5 | 18 | -24 | 14 | -3 | | |
| $h^4 f_j^{(4)}$ | 3 | -14 | 26 | -24 | 11 | -2 | |

Tableau III.6 : Dérivées, à l'ordre 2, à partir des différences à droite [33].

III.3.2. Utilisation des différences à gauche (ou régressive)

Cette méthode permet d'obtenir la dérivée d'ordre n au point $x_j(f_j^n)$ comme combinaison linéaire des $f_j, f_{j-1}, f_{j-2}, \dots, f_{j-n}$, [32].

III.3.2.1. Dérivées successives de f(x) en x_j à l'ordre 1 en h [33]

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \tag{III.55}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) + \dots \tag{III.56}$$

Donc $f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \sigma(h)$

Soit, en $x = x_j$ alors

$$f'(x) = \frac{f(x_j) - f(x_j - h)}{h} + \sigma(h) \tag{III.57}$$

$$f_j' = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} + \sigma(h) = \frac{\Delta_- f_j}{h} + \sigma(h)$$

$$f_j^n = \frac{\Delta_-^n f_j}{h^n} + \sigma(h) \tag{III.58}$$

Pour trouver la dérivée à l'ordre 1 en h d'ordre (n), on utilise (n+1) points. Pour la dérivée première à l'ordre 1 en h, on prend les deux premiers termes du polynôme.

Le tableau (III.7) ci-dessous donne les coefficients jusqu'à l'ordre 4. Par exemple :

$$f_j^{(4)} = \frac{1}{h^4} (f_j - 4f_{j+1} + 6f_{j+2} - 4f_{j+3} + f_{j+4}) + \sigma(h)$$

| | f_j | f_{j+1} | f_{j+2} | f_{j+3} | f_{j+4} | $+ \sigma(h)$ |
|-----------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| hf'_j | -1 | 1 | | | | |
| $h^2 f''_j$ | 1 | -2 | 1 | | | |
| $h^3 f_j^{(3)}$ | -1 | 3 | -3 | 1 | | |
| $h^4 f_j^{(4)}$ | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | |

Tableau III.7 : Dérivées à l'ordre 1 à partir des différences à gauche [33].

III.3.2.2. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 2 en h

Les premières dérivées à l'ordre 2 en h sont données dans le tableau suivant :

| | f_j | f_{j-1} | f_{j-2} | f_{j-3} | f_{j-4} | f_{j-5} | $+ \sigma(h^2)$ |
|------------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------------|
| $2hf'_j$ | 3 | -4 | 1 | | | | |
| $h^2 f''_j$ | 2 | -5 | 4 | -1 | | | |
| $2h^3 f_j^{(3)}$ | 5 | -18 | 24 | -14 | -3 | | |
| $h^4 f_j^{(4)}$ | 3 | -14 | 26 | -24 | 11 | -2 | |

Tableau III.8 : Dérivées au 2^{ème} ordre à partir des différences à gauche [33].

Pour trouver la dérivée nième du polynôme à l'ordre 2 en h , on utilise $(n+2)$ points ou bien pour la dérivée première à l'ordre 2 en h , on prend les trois premiers termes du polynôme [21].

III.3.3. Utilisation des différences centrées

Pour calculer f'_j on utilise les points situés de part et d'autre de x_j [32].

$$\{f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) \dots \quad (\text{III.59})$$

$$\{f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) \dots \quad (\text{III.60})$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x) + \dots \quad (\text{III.61})$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(x) + \dots \quad (\text{III.62})$$

Pour $x = x_j$ obtient :

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}f_j^{(3)} + \dots \quad (\text{III.63})$$

Malgré utilise deux points, l'erreur est de l'ordre 2 en h (plus précise) :

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} + \sigma(h^2) \quad (\text{III.64})$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f + h^2f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + \sigma(h^6)$$

D'où

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x) + \sigma(h^4) \quad (\text{III.65})$$

C'est-à-dire, que $x = x_j$

$$f''_j = \frac{f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}}{h^2} + \sigma(h^2) \quad (\text{III.66})$$

Lorsque n est paire $n = 2p$:

$$f_j^{(2p)} = \frac{\Delta_-^{2p} f_{j+p} + \Delta_+^{2p} f_{j-p}}{h^{2p}} + \sigma(h^2) \quad (\text{III.67})$$

Lorsque n est impaire $n = 2p + 1$

$$f_j^{(2p+1)} = \frac{\Delta_-^{2p+1} f_{j+p} + \Delta_+^{2p+1} f_{j-p}}{2h^{2p+1}} + \sigma(h^2) \quad (\text{III.68})$$

Les tableaux (III.9) et(III.10) donnent les quatre premières dérivées, à l'ordre 2 et à l'ordre 4 en h.

| | | | | | | |
|-----------------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------------|
| | f_{j-2} | f_{j-1} | f_j | f_{j+1} | f_{j+2} | $+ \sigma(h^2)$ |
| $2hf'_j$ | | -1 | 0 | 1 | | |
| $h^2 f''_j$ | | 1 | -2 | 1 | | |
| $2h^3 f'''_j$ | -1 | 2 | 0 | -2 | 1 | |
| $h^4 f^{(4)}_j$ | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | |

Tableau III.9 : Dérivées au 2^{ème} ordre à partir des différences centrées [33].

| | | | | | | | | |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------------|
| | f_{j-3} | f_{j-2} | f_{j-1} | f_j | f_{j+1} | f_{j+2} | f_{j+3} | $+ \sigma(h^4)$ |
| $12hf'_j$ | | 1 | -8 | 0 | 8 | -1 | | |
| $12h^2 f''_j$ | | -1 | 16 | -30 | 16 | -1 | | |
| $8h^3 f'''_j$ | 1 | -8 | 13 | 0 | -13 | 8 | -1 | |
| $h^4 f^{(4)}_j$ | -1 | 12 | -39 | 56 | -39 | 12 | -1 | |

Tableau III.10 : Dérivées au 4^{ème} ordre à partir des différences centrées [33].

III.3.4. Incertitude sur le calcul des dérivées

Peut montrer que lorsque $f(x)$ est approchée par un polynôme $P_n(x)$ on a [33]:

$$\frac{df(x)}{dx} - \frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dS_n(x)}{dx} \frac{f^{(n+1)}(C_1)}{(n+1)!} + S_n(x) \frac{f^{(n+2)}(C_2)}{(n+2)!} \tag{III.69}$$

Où C_1 et C_2 appartiennent à l'intervalle d'interpolation $[a,b]$ où ont été choisis les x, x_0, \dots, x_n , et $S_n(x)$ est le polynôme :

$$S_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots \dots \dots (x - x_n) \tag{III.70}$$

Lorsque $x = x_j$ donc $S_n(x_j) = 0$

$$\left[\frac{df(x)}{dx} - \frac{dP_n(x)}{dx} \right]_{x=x_i} = \frac{f^{(n+1)}(C_1)}{(n+1)!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_j) \tag{III.71}$$

III.4. Classification des équations aux dérivées partielles

III.4.1. Définition

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation faisant intervenir les variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , la fonction f et ses dérivées partielles.

Par exemple, si f est une fonction de deux variables, une EDP peut s'écrire par la relation [34]:

$$F(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dots) = 0 \tag{III.72}$$

- On appelle ordre de l'EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP, par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + f + c = 0 \text{ Est d'ordre } 3 \tag{III.73}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - c = 0 \text{ Est d'ordre } 2 \tag{III.74}$$

- L'EDP est dite linéaire si F est linéaire par rapport à ses arguments f et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de (x, y) ; sinon elle est non linéaire. Par exemple, l'EDP du second ordre :

$$a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial f}{\partial x} + a_5 \frac{\partial f}{\partial y} + a_6 f + a_7 = 0 \tag{III.75}$$

Est linéaire si les a_i ne dépendent que de (x, y)

III.4.2. Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes) :

De très nombreux phénomènes physiques se traduisent par les EDP linéaires du second ordre du type (II.75) qui peuvent s'écrire sous la forme [34]:

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e \tag{III.76}$$

Ou, a, b, c et e sont des coefficients peuvent dépendre de $(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$

Il y a trois types d'équations aux dérivées partielles représentés par l'équation (III.76) :

- Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) < 0$ l'équation (III.76) est dite du type elliptique.
- Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) = 0$ l'équation (III.76) est dite du type parabolique.

Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) > 0$ l'équation (III.76) est dite du type hyperbolique.

Ainsi, selon le signe du discriminant $\Delta = (b^2 - 4ac)$, nous obtenons différentes formes géométriques :

- $\Delta = (b^2 - 4ac) < 0$ l'équation (II.76) est dite elliptique, un exemple typique

$$\text{d'équation elliptique est : } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g(x, y)$$

C'est l'équation de Poisson lorsque $g \neq 0$, de Laplace lorsque $g = 0$

- $\Delta = (b^2 - 4ac) = 0$ l'équation (III.76) est dite parabolique, l'exemple de telle

$$\text{équation est l'équation de diffusion ou équation de la chaleur de la forme } \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\alpha : \text{Diffusivité thermique } \alpha = \frac{k}{\rho c}$$

k : Conductivité thermique des matériaux.

ρ : Masse volumique.

c : Chaleur massique des matières.

- $\Delta = (b^2 - 4ac) > 0$ L'équation (III.76) est dite hyperbolique. Avec pour exemple type de l'équation de propagation ou des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad \Delta = 0 - 4 \left(-\frac{1}{c^2} \right) = \frac{4}{c^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (x^2 - y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \quad (\text{III.77})$$

L'équation (II.76) est hyperbolique si $|x| < |y|$, parabolique si $|x| = |y|$ et elliptique si $|x| > |y|$ certaines équations sont encore compliquées par le fait que les coefficients des dérivées secondes peuvent dépendre de la solution cherchée $f(x, y)$.

III.4.3. Résolution des équations aux dérivées partielles :

III.4.3.1. Méthodes de résolution des E.D.P paraboliques :

Elles se rencontrent typiquement dans le problème diffusion on régime transitoire, telle que l'équation de la chaleur [35]:

$$\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{III.78})$$

Nous désignerons par t la variable par rapport à laquelle apparaît la dérivée d'ordre au plus égale à un, car dans les situations pratique elle est relative au temps.

Il existe essentiellement trois méthodes de base pour la résolution de telles équations :

- Méthodes explicites.
- Méthodes implicites.
- Méthodes mixtes (type Crank-Nicholson).

Nous exposerons chacune d'elle en prenant l'exemple d'une équation linéaire à une d'espace.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + C(x)f(x, t) + D(x) \\ f(x = a, t) = f_a(t) \\ f(x = b, t) = f_b(t) \\ f(x, t = 0) = f_0(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III. 79)} \\ \\ \text{Conditions aux limite} \\ \text{Condition initiale} \end{array}$$

Afin de résoudre l'équation (II.78) nous divisons l'intervalle $[a, b]$ en $(n + 1)$ intervalles Δx par les points :

$$x_0 = a; \quad x_1 = \Delta x; \quad x_2 = 2\Delta x; \dots \dots \dots x_n; \quad x_{n+1} = b$$

Nous choisirons de même un pas de temps Δt . Notons qu'en générale ces pas sont différents et ne s'expriment même pas avec les mêmes unités.

III.4.3.1.1. Méthodes explicite de résolution [36]

Considérons l'équation (II.79) et supposons connue $f(x, t)$ en tout point $x(a < x < b)$ à l'instant t : on peut calculer $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ de sorte que le second membre de (III.79) est connue et on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = g(x, t) \\ f(x, t = 0) = f_0(x) \end{array} \right. \quad \text{(III.80)}$$

Ou $g(x, t)$ est connue ou est ramené à une équation différentielle avec condition initiale parrapport à t la résolution cette équation par l'une des méthodes exposées (connue). Effectuée séparément en chacun des points $x_1, x_2 \dots \dots, x_n$ donne la solution cherchée.

De façon plus précise si l'indice i repère les variables x et l'indice k repère la variable t l'équation (II.79) discrétisée peut s'écrire en utilisant les différences centrées sur x et les différences à droite sur t .

$$\frac{f_{i,k+1} - f_{i,k}}{\Delta t} = A_i \frac{f_{i-1,k} - 2f_{i,k} + f_{i+1,k}}{(\Delta x)^2} + B_i \frac{f_{i+1,k} + f_{i-1,k}}{2\Delta x} + C_i f_{i,k} + D_i$$

Ce qui donne

$$f_{i,k+1} = \left[\frac{A_i \Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{B_i \Delta t}{2\Delta x} \right] f_{i-1,k} + \left[1 - \frac{2A_i \Delta t}{(\Delta x)^2} + C_i \Delta t \right] f_{i,k} + \left[\frac{A_i \Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{B_i \Delta t}{2\Delta x} \right] f_{i+1,k} + D_i \Delta t \quad (\text{III.81})$$

On obtient f_i à l'instant $(k+1)$ comme combinaison de f_{i-1} , f_i et f_{i+1} à l'instant k : la molécule de base est représentée figure (III.6).

La résolution de l'équation (III.81) faut progresser cette molécule vers t_{k+1} , t_{k-1} , etc...

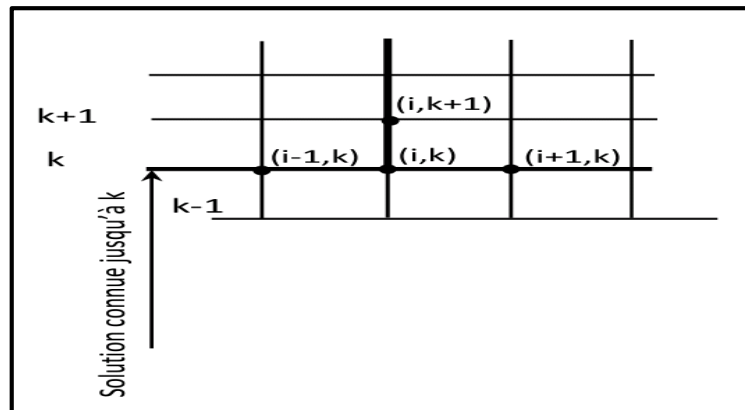


Figure (III.1) : Schéma explicite [35].

La méthode s'applique, sans aucune modification de principe aux équations dont les coefficients A , B , C , D dépendent non seulement de x mais aussi t et de f , ainsi fonctions de plusieurs variable d'espace.

L'inconvénient principale de la méthode explicite est qu'elle nécessite de choisir Δt suffisamment petit sinon la solution de l'équation devient instable. En fait, il faut que le coefficient de $f_{i,k}$ soit positif c'est-à-dire [35]:

$$\left(\frac{2A_i}{(\Delta x)^2} - C_i \right) \Delta t \leq 1$$

A cause de ce risque d'instabilité, il est préférable lorsque cela est possible d'utiliser l'une des méthodes suivantes :

III.4.3.1.2. Méthode implicite de résolution [36] :

L'équation explicite (II.80) a été obtenue en écrivant le second membre de l'équation (III.81) à l'instant t_k où la solution est connue on obtient une équation implicite en écrivant le second membre de l'équation (II.79) à l'instant t_{k+1} où la solution n'est pas connue, ce qui donne :

$$\frac{f_{i,k+1} - f_{i,k}}{\Delta t} = A_i \frac{f_{i-1,k+1} - 2f_{i,k+1} + f_{i+1,k+1}}{(\Delta x)^2} + B_i \frac{f_{i+1,k+1} + f_{i-1,k+1}}{2\Delta x} + C_i f_{i,k+1} + D_i$$

Ou

$$\left[\frac{A_i}{(\Delta x)^2} - \frac{B_i}{2\Delta x} \right] f_{i-1,k+1} - \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{2A_i}{(\Delta x)^2} - C_i \right] f_{i,k+1} + \left[\frac{A_i}{(\Delta x)^2} + \frac{B_i}{2\Delta x} \right] f_{i+1,k+1} = - \left[\frac{f_{i,k}}{\Delta t} + D_i \right] \tag{III.82}$$

- On obtient f_i connue à l'instant k comme combinaison de f_{i-1}, f_i et f_{i+1} inconnue à l'instant $(K + 1)$. la molécule de base est représentée figure (III.2).
- L'équation obtenue peut s'appliquer en chaque point aux temps $(K + 1)$. On obtient ainsi un système d'équations linéaires dont la résolution nous donne les valeurs de f au temps $(K + 1)$.
- On procède de la même manière pour avoir les valeurs de f au temps $(K + 2)$; $(K + 3)$
- Un avantage essentiel de cette méthode est qu'elle est universellement stable.

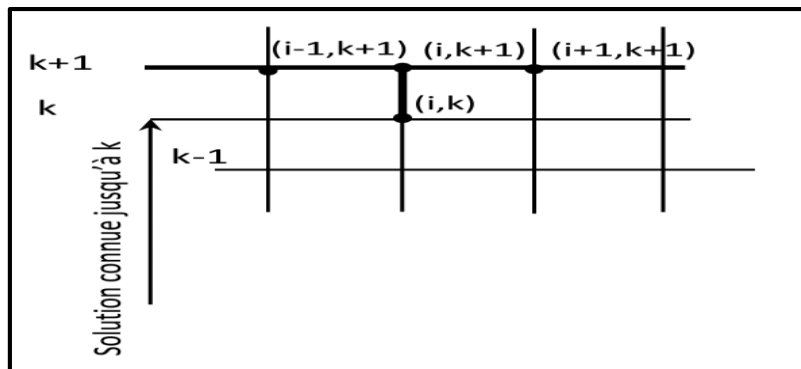


Figure (III.2) : Schéma implicite [36].

III.4.3.1.3. Méthodes du type Crank-Nicholson [37]

Dans la méthode explicite, le second membre de l'équation (II.79) est écrit à l'instant k (figure 2). Dans la méthode implicite, le second membre est écrit à l'instant $(k+1)$ (figure 3).

Dans les deux cas la dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}$ est écrite sous la forme $\frac{f_{j,k+1} - f_{j,k}}{\Delta t}$ c'est-à-dire en fait à l'instant $k + \frac{1}{2}$

La méthode de Crank-Nicholson consiste à écrire le second membre de (III.79) au point $(k + \frac{1}{2})$

En l'exprimant comme la demi somme des seconds membres des méthodes implicite et explicite, on obtient alors la molécule de la figure (III.3).

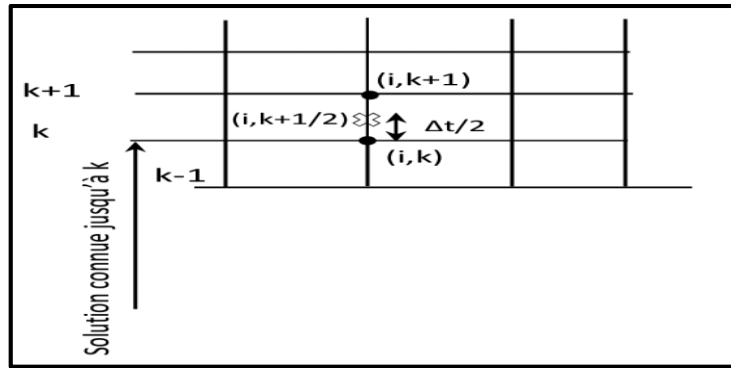


Figure (III.3) : schéma Crank-Nicholson [37].

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,k+1} - f_{i,k}}{\Delta t} = & \frac{1}{2} \left[\frac{A_i}{(\Delta x)^2} (f_{i-1,k+1} - 2f_{i,k+1} + f_{i+1,k+1}) + \frac{B_i}{2\Delta x} (f_{i+1,k} + f_{i-1,k}) \right. \\ & \left. + C_i f_{i,k+1} + D_i \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{A_i}{(\Delta x)^2} (f_{i-1,k} - 2f_{i,k} + f_{i+1,k}) + \frac{B_i}{2\Delta x} (f_{i+1,k} + f_{i-1,k}) + C_i f_{i,k} + D_i \right] \end{aligned} \quad (III.83)$$

Le second crochet de l'équation (II.83) étant connu, on voit que l'équation est (III.83) en fait une équation implicite, qui se traite exactement comme il a été indiqué au paragraphe précédent.

- L'avantage principal de ce schéma est que pour une valeur donnée de Δx , l'erreur de troncature sur le terme en Δt est nettement plus petite que dans les méthodes implicite et explicite.
- La méthode de Crank-Nicholson est inconditionnellement stable et converge quel que soit $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

III.4.3.2. Méthodes de résolution des E.D.P elliptiques

III.4.3.2.1. Expression à l'aide des différences finies

La mise en équation à l'aide des différences finies comporte les étapes suivantes [38] :

- Définir un maillage couvrant le domaine et sa frontière.
- En tout nœud intérieur au domaine, exprimer les dérivées à l'aide des différences finies. Ces termes contiennent des points situés sur la frontière.
- Exprimer les valeurs de la fonction en tout point sur la frontière en tenant compte des conditions aux limites. On obtient alors un système de n équations à n inconnus dont on résout par l'une des techniques de résolution.

Déterminer la fonction $f(x, y)$ dans le domaine rectangulaire $[0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b]$.

f Satisfait l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.84})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x=0, y) = f_0 & \\ f(x=a, y) = f_a & \\ f(c \leq x \leq a, y=0) = f_a & \text{Dirichlet} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x \leq c, y=0) = 0 & \text{Neumann} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y=b) = 0 & \end{array} \right.$$

- Définit un maillage qui coïncide avec les frontières du domaine.
- Choisit $(n+1)$ pas sur x de valeur $\Delta x = \frac{a}{n+1}$.
- Choisit Δx sous multiple de a et de $(a-c)$ de façon que $x=c$ corresponde au $p^{\text{ième}}$ pas sur x .
- Choisit le maillage de telle façon que :

$$c_1 \Delta x = a$$

$$c_2 \Delta x = (a - c)$$

Ce qui veut dire une ligne du maillage qui passe par le point c . Si on trouve une discontinuité des limites, on procède de la même manière.

- Choisit $(m+1)$ pas sur y de valeur $\Delta y = \frac{b}{m+1}$
- Choisit Δy sous multiple de b et de $(b-c)$ de façon que $y=c$ corresponde au $p^{\text{ième}}$ pas sur y .
- En chaque nœud interne $[1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m]$, on exprime l'équation aux D.P de Laplace à l'aide des différences finies (différences centrées), ce qui donne :

$$\frac{f_{i-1,k} - 2f_{i,k} + f_{i+1,k}}{(\Delta x^2)} + \frac{f_{i,k-1} - 2f_{i,k} + f_{i,k+1}}{(\Delta y^2)} = 0 \quad (\text{III.85})$$

L'équation obtenue fait intervenir les points à la frontière ($i=0 ; i=n+1 ; k=0 ; k=m+1$).

- Il faut maintenant exprimer les conditions aux limites, elle porte sur $i=1 ; i=n ; k=1 ; k=m$.

III.5.Conclusion

Après avoir appris le phénomène de transfert de chaleur et la méthode numérique dans le chapitre précédent, vous passerez à ce chapitre. L'approche des différences finies sera utilisée pour résoudre et étudier les équations et les dérivées partielles (équation de la chaleur).

Cette méthode consiste à substituer des différences fractionnées ou des combinaisons de valeurs de points de fonction à un nombre fini de points discrets ou de nœuds de maillage pour les dérivées partielles.

Voici quelques-uns des avantages : L'écriture est très simple et son calcul coûte très peu.

Chapitre IV

Le comportement thermique d'une ailette rectangulaire

IV.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré pour étudier le comportement thermique d'une ailette rectangulaire.

Pour étudier l'évolution de la température dans l'ailette et discrétiser l'équation parabolique on a utilisé la méthode des différences finis.

IV.2 Problématique :

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur.

dans un domaine rectangulaire muni avec les conditions aux limites.

Les caractéristiques géométriques du domaine sont représentées dans la figure (IV.1)

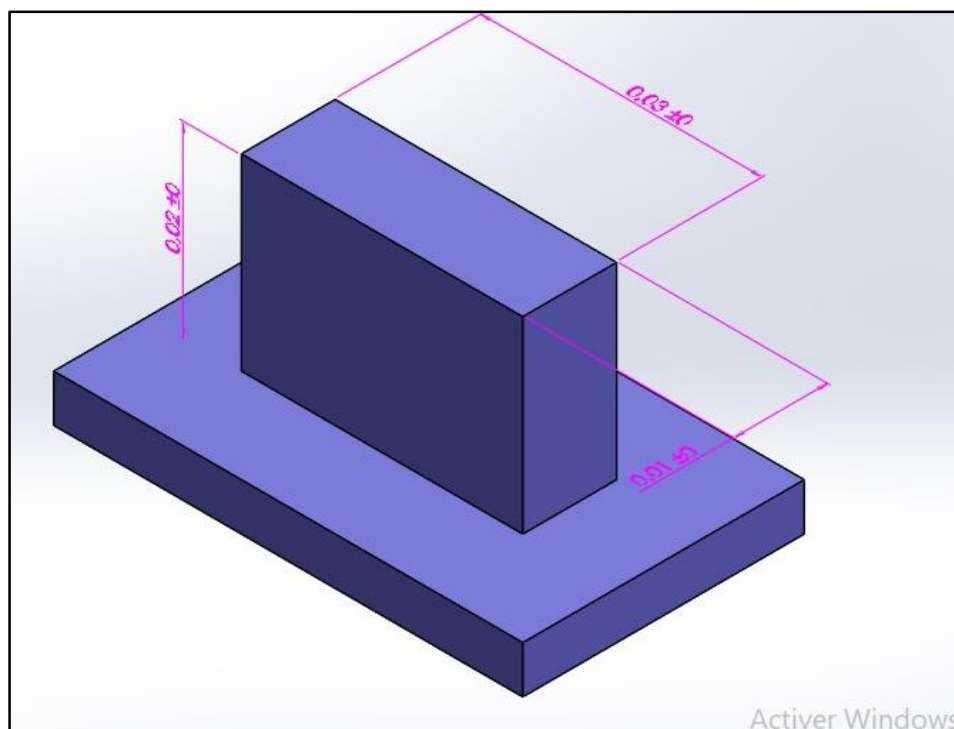


Figure IV.1 : Schéma d'ailette

- Le maillage d'ailette :

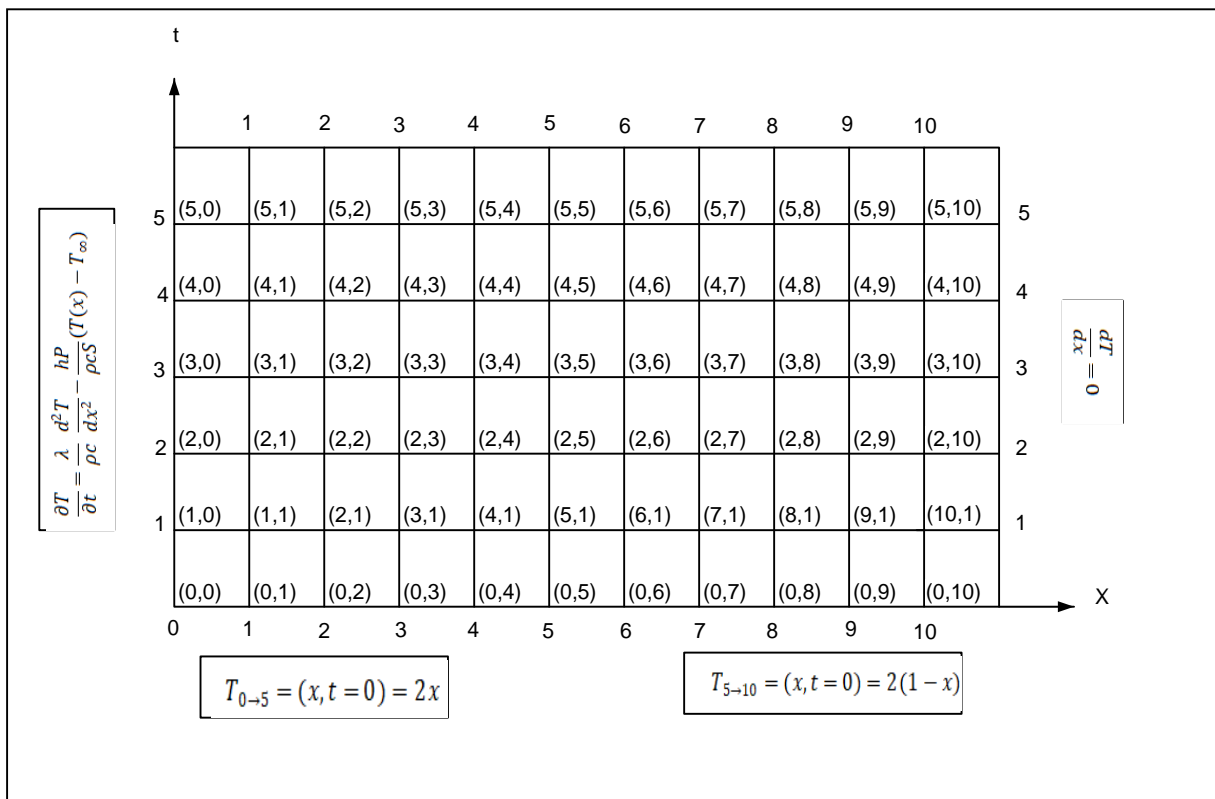


Figure IV.2 : Schéma de maillage ailette

IV.3 L'équation générale :

Le profil de la température d'une ailette de profil géométrique général s'obtient en considérant la conservation de l'énergie sur un volume de contrôle de hauteur dx et de surface une fonction f(x). Ce volume d'est borné par deux plans parallèles à x et x+dx représentés par les fonctions f(x).

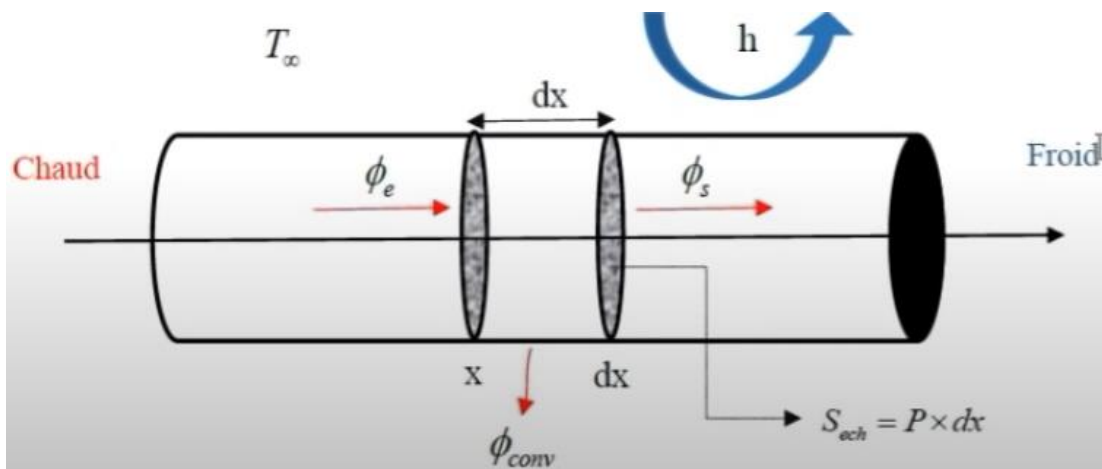


Figure IV.3 : bilan d'énergie sur une tranche d'ailette d'épaisseur dx

Le bilan de puissance sur un volume de contrôle :

❖ Le flux de chaleur transmet par conduction en x :

$$\Phi_e = -\lambda \left. \frac{SdT}{dx} \right|_x \quad (\text{IV.1})$$

Le flux de chaleur transmis par conduction en x+dx :

$$\Phi_e = -\lambda \left. \frac{S dT}{dx} \right|_{x+dx} \quad (\text{IV.2})$$

❖ Le flux de chaleur transmet par convection en x:

$$\Phi_{conv} = hS_{éch}(T(x) - T_{\infty}) \quad (\text{IV.3})$$

❖ Le flux de chaleur transmet par convection en x+dx :

$$\Phi_{conv} = hPdx (T(x) - T_{\infty}) \quad (\text{IV.4})$$

Où S est l'aire de la section de passage du flux de conduction.

P est le périmètre de l'ailette (périmètre d'échange du flux convectif)

❖ On a :

$$dU = Cdt \quad (\text{IV.5})$$

U : Energie interne ; C : chaleur spécifique (J/k.kg)

$$dm dU = \rho dv C dT = \rho dv C \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (\text{IV.6})$$

$$dU = dm dU = \rho dv C \frac{\partial T}{\partial t} dt, \quad \Phi_{accumulation} = \frac{dU}{dt}$$

$$\Phi_{d'accumulation} = \Phi_e - \Phi_s - \Phi_{conv}$$

$$\frac{dU}{dt} = \rho dv C \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \left. \frac{SdT}{dx} \right|_x + \lambda \left. \frac{S dT}{dx} \right|_{x+dx} - hPdx(T(x) - T_{\infty}) \quad (\text{IV.7})$$

Par développement de Tylor :

$$T(x + dx) = T(x) + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{1!} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots \quad (\text{IV.8})$$

$$dx(\text{petit}) \rightarrow dx^2 \rightarrow 0$$

$$\frac{dT(x + dx)}{dx} = \frac{dT(x)}{dx} + \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx$$

Donc :

$$\Rightarrow \rho \, dv \, C \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda S \frac{dT}{dx} + \left(\frac{dT(x)}{dx} + \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx \right) \lambda S - hP dx (T(x) - T_\infty) \quad (\text{IV.9})$$

$$\Rightarrow \rho \, dv \, C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda S \frac{d^2T}{dx^2} dx - hP dx (T(x) - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \rho \, S \, C \, dx \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda S \frac{d^2T}{dx^2} dx - hP dx (T(x) - T_\infty)$$

$$dv = S dx$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C} \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\rho SC} (T(x) - T_\infty) \quad (\text{IV.10})$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} \quad \rightarrow (1)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad \rightarrow (2)$$

$$\Rightarrow T(x)|_{i,j} = T_{i,j}$$

On remplace les formules (1) et (2) dans l'équation d'énergie (III.10), On trouve :

$$\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{i,j} - T_\infty) \quad (\text{IV.11})$$

▪ **Les données :**

$$\lambda = 0.2 \frac{\text{kw}}{\text{mk}} \Rightarrow 200 \frac{\text{w}}{\text{mk}}$$

$$\rho = 2.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \Rightarrow 2.7 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$C = 920 \frac{\text{J}}{\text{kg.k}}$$

$$\Delta x = 0.002 \text{ m}$$

$$\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$h = 100 \frac{\text{w}}{\text{m}^2\text{k}}$$

$$L = 3 \text{ cm} \Rightarrow 3 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$T_\infty = 40^\circ\text{C}$$

$$T_0 = 50^\circ\text{C}$$

$$\emptyset_s = 0$$

- $P = (e + L) \times 2$ (IV.12)

$$P = (0.01 + 0.03) \times 2$$

$$P = 0.08\text{m}$$

- $S = (e \times L)$ (IV.13)

$$S = 0.01 \times 0.03$$

$$S = 0.0003\text{m}^2$$

• *La discrétisation de l'équation par la méthode des différences finies nous donne :*

❖ Pour le point (1,1)

$$\frac{T_{1,1} - T_{1,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{2,1} - 2T_{1,1} + T_{0,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{1,1} - T_\infty)$$

$$T_{1,1} - T_{1,0} = 1207.72(T_{2,1} - 2T_{1,1} + T_{0,1}) - 0.6(T_{1,1} - T_\infty)$$

$$2417.04T_{1,1} - 1207.72T_{2,1} = 390281.364 \quad (\text{IV.14})$$

$$T_{1,1} = 335.66 \text{ K} = 62.66^\circ\text{C}$$

❖ Pour le point (2,1)

$$\frac{T_{2,1} - T_{2,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{3,1} - 2T_{2,1} + T_{1,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{2,1} - T_\infty)$$

$$T_{2,1} - T_{2,0} = 1207.72(T_{3,1} - 2T_{2,1} + T_{1,1}) - 0.6(T_{2,1} - T_\infty)$$

$$1813.57T_{2,1} - 1207.72T_{3,1} = 213718.54 \quad (\text{IV.15})$$

$$T_{2,1} = 348.61 \text{ K} = 75.61^\circ\text{C}$$

❖ Pour le point (3,1)

$$\frac{T_{3,1} - T_{3,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{4,1} - 2T_{3,1} + T_{2,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{3,1} - T_\infty)$$

$$T_{3,1} - T_{3,0} = 1207.72(T_{4,1} - 2T_{3,1} + T_{2,1}) - 0.6(T_{3,1} - T_\infty)$$

$$1612.77T_{3,1} - 1207.72T_{4,1} = 142510.49 \quad (\text{IV.16})$$

$$T_{3,1} = 346.53 \text{ K} = 73.53^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (4,1)**

$$\frac{T_{4,1} - T_{4,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{5,1} - 2T_{4,1} + T_{3,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{4,1} - T_\infty)$$

$$T_{4,1} - T_{4,0} = 1207.72(T_{5,1} - 2T_{4,1} + T_{3,1}) - 0.6(T_{4,1} - T_\infty)$$

$$1512.64T_{4,1} - 1207.72T_{5,1} = 106906.53 \quad (\text{IV.17})$$

$$T_{4,1} = 344.75 \text{ K} = 71.75^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (5,1)**

$$\frac{T_{5,1} - T_{5,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{6,1} - 2T_{5,1} + T_{4,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{5,1} - T_\infty)$$

$$T_{5,1} - T_{5,0} = 1207.72(T_{6,1} - 2T_{5,1} + T_{4,1}) - 0.6(T_{5,1} - T_\infty)$$

$$1452.77T_{5,1} - 1207.72T_{6,1} = 85543.97 \quad (\text{IV.18})$$

$$T_{5,1} = 343.27 \text{ K} = 70.27^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (6,1)**

$$\frac{T_{6,1} - T_{6,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{7,1} - 2T_{6,1} + T_{5,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{6,1} - T_\infty)$$

$$T_{6,1} - T_{6,0} = 1207.72(T_{7,1} - 2T_{6,1} + T_{5,1}) - 0.6(T_{6,1} - T_\infty)$$

$$1413.03T_{6,1} - 1207.72T_{7,1} = 71302.40 \quad (\text{IV.19})$$

$$T_{6,1} = 342.09 \text{ K} = 69.09^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (7,1)**

$$\frac{T_{7,1} - T_{7,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{8,1} - 2T_{7,1} + T_{6,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{7,1} - T_\infty)$$

$$T_{7,1} - T_{7,0} = 1207.72(T_{8,1} - 2T_{7,1} + T_{6,1}) - 0.6(T_{7,1} - T_\infty)$$

$$1384.79T_{7,1} - 1207.72T_{8,1} = 61130.13 \quad (\text{IV.20})$$

$$T_{7,1} = 341.21 \text{ K} = 68.21 \text{ °C}$$

❖ Pour le point (8,1)

$$\frac{T_{8,1} - T_{8,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{9,1} - 2T_{8,1} + T_{7,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{8,1} - T_{\infty})$$

$$T_{8,1} - T_{8,0} = 1207.72(T_{9,1} - 2T_{8,1} + T_{7,1}) - 0.6(T_{8,1} - T_{\infty})$$

$$1363.74T_{8,1} - 1207.72T_{9,1} = 53501.35 \quad (\text{IV.21})$$

$$T_{8,1} = 340.62 \text{ K} = 67.62 \text{ °C}$$

❖ Pour le point (9,1)

$$\frac{T_{9,1} - T_{9,0}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{10,1} - 2T_{9,1} + T_{8,1}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{9,1} - T_{\infty})$$

$$T_{9,1} - T_{9,0} = 1207.72(T_{10,1} - 2T_{9,1} + T_{8,1}) - 0.6(T_{9,1} - T_{\infty})$$

$$1347.49T_{9,1} - 1207.72T_{10,1} = 47568.28 \quad (\text{IV.22})$$

$$T_{9,1} = 340.33 \text{ K} = 67.33 \text{ °C}$$

❖ Pour le point (10,1)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{10,1} = \frac{T_{10,1} - T_{9,1}}{\Delta x} = 0$$

$$T_{10,1} - T_{9,1} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

$$T_{10,1} = T_{9,1} = 340.33 \text{ K} = 67.33 \text{ °C}$$

❖ Pour le point (1,2)

$$\frac{T_{1,2} - T_{1,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{2,2} - 2T_{1,2} + T_{0,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{1,2} - T_{\infty})$$

$$T_{1,2} - T_{1,1} = 1207.72(T_{2,2} - 2T_{1,2} + T_{0,2}) - 0.6(T_{1,2} - T_{\infty})$$

$$2417.04T_{1,2} - 1207.72T_{2,2} = 390617.02 \quad (\text{IV.24})$$

$$T_{1,2} = 323.1 \text{ K} = 50.1 \text{ °C}$$

❖ **Pour le point (2,2)**

$$\frac{T_{2,2} - T_{2,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{3,2} - 2T_{2,2} + T_{1,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{2,2} - T_{\infty})$$

$$T_{2,2} - T_{2,1} = 1207.72(T_{3,2} - 2T_{2,2} + T_{1,2}) - 0.6(T_{2,2} - T_{\infty})$$

$$1813.57T_{2,2} - 1207.72T_{3,2} = 195715.63 \quad (\text{IV.25})$$

$$T_{2,2} = 323.21 \text{ K} = 50.21 \text{ } ^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (3,2)**

$$\frac{T_{3,2} - T_{3,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{4,2} - 2T_{3,2} + T_{2,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{3,2} - T_{\infty})$$

$$T_{3,2} - T_{3,1} = 1207.7 + 2(T_{4,2} - 2T_{3,2} + T_{2,2}) - 0.6(T_{3,2} - T_{\infty})$$

$$1612.77T_{3,2} - 1207.72T_{4,2} = 130868.24 \quad (\text{IV.26})$$

$$T_{3,2} = 323.29 \text{ K} = 50.29^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (4,2)**

$$\frac{T_{4,2} - T_{4,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{5,2} - 2T_{4,2} + T_{3,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{4,2} - T_{\infty})$$

$$T_{4,2} - T_{4,1} = 1207.72(T_{5,2} - 2T_{4,2} + T_{3,2}) - 0.6(T_{4,2} - T_{\infty})$$

$$1512.64T_{4,2} - 1207.72T_{5,2} = 98533.00 \quad (\text{IV.27})$$

$$T_{4,2} = 323.42 \text{ K} = 50.42 \text{ } ^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (5,2)**

$$\frac{T_{5,2} - T_{5,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{6,2} - 2T_{5,2} + T_{4,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{5,2} - T_{\infty})$$

$$T_{5,2} - T_{5,1} = 1207.72(T_{6,2} - 2T_{5,2} + T_{4,2}) - 0.6(T_{5,2} - T_{\infty})$$

$$1452.77T_{5,2} - 1207.72T_{6,2} = 79201.6 \quad (\text{IV.28})$$

$$T_{5,2} = 323.42 \text{ K} = 50.42 \text{ } ^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (6,2)**

$$\frac{T_{6,2} - T_{6,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{7,2} - 2T_{6,2} + T_{5,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{6,2} - T_{\infty})$$

$$T_{6,2} - T_{6,1} = 1207.72(T_{7,2} - 2T_{6,2} + T_{5,2}) - 0.6(T_{6,2} - T_{\infty})$$

$$1413.03T_{6,2} - 1207.72T_{7,2} = 66371.99 \quad (\text{IV.29})$$

$$T_{6,2} = 323.46 \text{ K} = 50.46 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (7,2)**

$$\frac{T_{7,2} - T_{7,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{8,2} - 2T_{7,2} + T_{6,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{7,2} - T_\infty)$$

$$T_{7,2} - T_{7,1} = 1207.72(T_{8,2} - 2T_{7,2} + T_{6,2}) - 0.6(T_{7,2} - T_\infty)$$

$$1384.79T_{7,2} - 1207.72T_{8,2} = 57257.30 \quad (\text{IV.30})$$

$$T_{7,2} = 323.49 \text{ K} = 50.49 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (8,2)**

$$\frac{T_{8,2} - T_{8,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{9,2} - 2T_{8,2} + T_{7,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{8,2} - T_\infty)$$

$$T_{8,2} - T_{8,1} = 1207.72(T_{9,2} - 2T_{8,2} + T_{7,2}) - 0.6(T_{8,2} - T_\infty)$$

$$681.46T_{8,2} - 1207.72T_{9,2} = 50464.36 \quad (\text{IV.31})$$

$$T_{8,2} = 323.51 \text{ K} = 50.51 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (9,2)**

$$\frac{T_{9,2} - T_{9,1}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{10,2} - 2T_{9,2} + T_{8,2}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{9,2} - T_\infty)$$

$$T_{9,2} - T_{9,1} = 1207.72(T_{10,2} - 2T_{9,2} + T_{8,2}) - 0.6(T_{9,2} - T_\infty)$$

$$1347.49T_{9,2} - 1207.72T_{10,2} = 45129.06 \quad (\text{IV.32})$$

$$T_{9,2} = 323.52 \text{ K} = 50.52 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (10,2)**

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{10,2} = \frac{T_{10,2} - T_{9,2}}{\Delta x} = 0$$

$$T_{10,2} - T_{9,2} = 0 \quad (\text{IV.33})$$

$$T_{10,2} = T_{9,2} = 323.52 \text{ K} = 50.52 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ Pour le point (1,3)

$$\frac{T_{1,3} - T_{1,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{2,3} - 2T_{1,3} + T_{0,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{1,3} - T_{\infty})$$

$$T_{1,3} - T_{1,2} = 1207.72(T_{2,3} - 2T_{1,3} + T_{0,3}) - 0.6(T_{1,3} - T_{\infty})$$

$$2417.04T_{1,3} - 1207.72T_{2,3} = 390604.46 \quad (\text{IV.34})$$

$$T_{1,3} = 322.96 \text{ K} = 49.96^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (2,3)

$$\frac{T_{2,3} - T_{2,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{3,3} - 2T_{2,3} + T_{1,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{2,3} - T_{\infty})$$

$$T_{2,3} - T_{2,2} = 1207.72(T_{3,3} - 2T_{2,3} + T_{1,3}) - 0.6(T_{2,3} - T_{\infty})$$

$$1813.57T_{2,3} - 1207.72T_{3,3} = 195683.9 \quad (\text{IV.35})$$

$$T_{2,3} = 322.93 \text{ K} = 49.93^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (3,3)

$$\frac{T_{3,3} - T_{3,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{4,3} - 2T_{3,3} + T_{2,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{3,3} - T_{\infty})$$

$$T_{3,3} - T_{3,2} = 1207.72(T_{4,3} - 2T_{3,3} + T_{2,3}) - 0.6(T_{3,3} - T_{\infty})$$

$$1612.77T_{3,3} - 1207.72T_{4,3} = 130823.91 \quad (\text{IV.36})$$

$$T_{3,3} = 322.91 \text{ K} = 49.91^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (4,3)

$$\frac{T_{4,3} - T_{4,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{5,3} - 2T_{4,3} + T_{3,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{4,3} - T_{\infty})$$

$$T_{4,3} - T_{4,2} = 1207.72(T_{5,3} - 2T_{4,3} + T_{3,3}) - 0.6(T_{4,3} - T_{\infty})$$

$$1512.64T_{4,3} - 1207.72T_{5,3} = 98478.41 \quad (\text{IV.37})$$

$$T_{4,3} = 322.90 \text{ K} = 49.90^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (5,3)

$$\frac{T_{5,3} - T_{5,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{6,3} - 2T_{5,3} + T_{4,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{5,3} - T_{\infty})$$

$$T_{5,3} - T_{5,2} = 1207.72(T_{6,3} - 2T_{5,3} + T_{4,3}) - 0.6(T_{5,3} - T_{\infty})$$

$$1452.77T_{5,3} - 1207.72T_{6,3} = 79138.22 \quad (\text{IV.38})$$

$$T_{5,3} = 322.89 \text{ K} = 49.89 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (6,3)

$$\frac{T_{6,3} - T_{6,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{7,3} - 2T_{6,3} + T_{5,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{6,3} - T_{\infty})$$

$$T_{6,3} - T_{6,2} = 1207.72(T_{7,3} - 2T_{6,3} + T_{5,3}) - 0.6(T_{6,3} - T_{\infty})$$

$$1413.03T_{6,3} - 536T_{7,3} = 66300.62 \quad (\text{IV.39})$$

$$T_{6,3} = 322.88 \text{ K} = 49.88 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (7,3)

$$\frac{T_{7,3} - T_{7,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{8,3} - 2T_{7,3} + T_{6,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{7,3} - T_{\infty})$$

$$T_{7,3} - T_{7,2} = 1207.72(T_{8,3} - 2T_{7,3} + T_{6,3}) - 0.6(T_{7,3} - T_{\infty})$$

$$620.96T_{7,3} - 1207.72T_{8,3} = 57178.58 \quad (\text{IV.40})$$

$$T_{7,3} = 322.87 \text{ K} = 49.87 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (8,3)

$$\frac{T_{8,3} - T_{8,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{9,3} - 2T_{8,3} + T_{7,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{8,3} - T_{\infty})$$

$$T_{8,3} - T_{8,2} = 1207.72(T_{9,3} - 2T_{8,3} + T_{7,3}) - 0.6(T_{8,3} - T_{\infty})$$

$$1363.64T_{8,3} - 1207.72T_{9,3} = 50378.60 \quad (\text{IV.41})$$

$$T_{8,3} = 322.86 \text{ K} = 49.86 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (9,3)

$$\frac{T_{9,3} - T_{9,2}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{10,3} - 2T_{9,3} + T_{8,3}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{9,3} - T_{\infty})$$

$$T_{9,3} - T_{9,2} = 1207.72(T_{10,3} - 2T_{9,3} + T_{8,3}) - 0.6(T_{9,3} - T_{\infty})$$

$$1347.49T_{9,3} - 1207.72T_{10,3} = 45126.30 \quad (\text{IV.42})$$

$$T_{9,3} = 322.86 \text{ K} = 49.86 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (10,3)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{10,3} = \frac{T_{10,3} - T_{9,3}}{\Delta x} = 0$$

$$T_{10,3} - T_{9,3} = 0 \quad (\text{IV.43})$$

$$T_{10,3} = T_{9,3} = 322.86 \text{ K} = 49.86 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (1,4)

$$\frac{T_{1,4} - T_{1,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{2,4} - 2T_{1,4} + T_{0,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{1,4} - T_{\infty})$$

$$T_{1,4} - T_{1,3} = 1207.72(T_{2,4} - 2T_{1,4} + T_{0,4}) - 0.6(T_{1,4} - T_{\infty})$$

$$2417.04T_{1,4} - 1207.72T_{2,4} = 390604.32 \quad (\text{IV.44})$$

$$T_{1,4} = 322.96 \text{ K} = 49.96 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (2,4)

$$\frac{T_{2,4} - T_{2,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{3,4} - 2T_{2,4} + T_{1,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{2,4} - T_{\infty})$$

$$T_{2,4} - T_{2,3} = 1207.72(T_{3,4} - 2T_{2,4} + T_{1,4}) - 0.6(T_{2,4} - T_{\infty})$$

$$1813.57T_{2,4} - 1207.72T_{3,4} = 195683.60 \quad (\text{IV.45})$$

$$T_{2,4} = 322.94 \text{ K} = 49.94 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (3,4)

$$\frac{T_{3,4} - T_{3,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{4,4} - 2T_{3,4} + T_{2,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{3,4} - T_{\infty})$$

$$T_{3,4} - T_{3,3} = 1207.72(T_{4,4} - 2T_{3,4} + T_{2,4}) - 0.6(T_{3,4} - T_{\infty})$$

$$1612.77T_{3,4} - 1207.72T_{4,4} = 130823.30 \quad (\text{IV.46})$$

$$T_{3,4} = 322.91 \text{ K} = 49.91 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (4,4)

$$\frac{T_{4,4} - T_{4,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{5,4} - 2T_{4,4} + T_{3,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{4,4} - T_{\infty})$$

$$T_{4,4} - T_{4,3} = 1207.72(T_{5,4} - 2T_{4,4} + T_{3,4}) - 0.6(T_{4,4} - T_{\infty})$$

$$1512.64T_{4,4} - 1207.72T_{5,4} = 98477.50 \quad (\text{IV.47})$$

$$T_{4,4} = 322.89 \text{ K} = 49.89 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (5,4)

$$\frac{T_{5,4} - T_{5,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{6,4} - 2T_{5,4} + T_{4,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{5,4} - T_{\infty})$$

$$T_{5,4} - T_{5,3} = 1207.72(T_{6,4} - 2T_{5,4} + T_{4,4}) - 0.6(T_{5,4} - T_{\infty})$$

$$1452.77T_{5,4} - 1207.72T_{6,4} = 79136.96 \quad (\text{IV.48})$$

$$T_{5,4} = 322.87 \text{ K} = 49.87 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (6,4)

$$\frac{T_{6,4} - T_{6,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{7,4} - 2T_{6,4} + T_{5,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{6,4} - T_{\infty})$$

$$T_{6,4} - T_{6,3} = 1207.72(T_{7,4} - 2T_{6,4} + T_{5,4}) - 0.6(T_{6,4} - T_{\infty})$$

$$1413.03T_{6,4} - 1207.72T_{7,4} = 66298.99 \quad (\text{IV.49})$$

$$T_{6,4} = 322.86 \text{ K} = 49.86 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (7,4)

$$\frac{T_{7,4} - T_{7,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{8,4} - 2T_{7,4} + T_{6,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{7,4} - T_{\infty})$$

$$T_{7,4} - T_{7,3} = 1207.72(T_{8,4} - 2T_{7,4} + T_{6,4}) - 0.6(T_{7,4} - T_{\infty})$$

$$1384.79T_{7,4} - 1207.72T_{8,4} = 57176.57 \quad (\text{IV.50})$$

$$T_{7,4} = 322.85 \text{ K} = 49.85 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (8,4)

$$\frac{T_{8,4} - T_{8,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{9,4} - 2T_{8,4} + T_{7,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{8,4} - T_{\infty})$$

$$T_{8,4} - T_{8,3} = 1207.72(T_{9,4} - 2T_{8,4} + T_{7,4}) - 0.6(T_{8,4} - T_{\infty})$$

$$1363.74T_{8,4} - 1207.72T_{9,4} = 50376.19 \quad (\text{IV.51})$$

$$T_{8,4} = 322.84 \text{ K} = 49.84 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (9,4)

$$\frac{T_{9,4} - T_{9,3}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{10,4} - 2T_{9,4} + T_{8,4}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{9,4} - T_{\infty})$$

$$T_{9,4} - T_{9,3} = 1207.72(T_{10,4} - 2T_{9,4} + T_{8,4}) - 0.6(T_{9,4} - T_{\infty})$$

$$1347.49T_{9,4} - 1207.72T_{10,4} = 45123.51 \quad (\text{IV.52})$$

$$T_{9,4} = 322.84 \text{ K} = 49.84 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ Pour le point (10,4)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{10,4} = \frac{T_{10,4} - T_{9,4}}{\Delta x} = 0$$

$$T_{10,4} - T_{9,4} = 0 \quad (\text{IV.53})$$

$$T_{10,4} = T_{9,4} = 322.84 \text{ K} = 49.84 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (1,5)**

$$\frac{T_{1,5} - T_{1,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{2,5} - 2T_{1,5} + T_{0,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{1,5} - T_\infty)$$

$$T_{1,5} - T_{1,4} = 1207.72(T_{2,5} - 2T_{1,5} + T_{0,5}) - 0.6(T_{1,5} - T_\infty)$$

$$2417.04T_{1,5} - 1207.72T_{2,5} = 390604.31 \quad (\text{IV.54})$$

$$T_{1,5} = 322.96 \text{ K} = 49.96 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (2,5)**

$$\frac{T_{2,5} - T_{2,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{3,5} - 2T_{2,5} + T_{1,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{2,5} - T_\infty)$$

$$T_{2,5} - T_{2,4} = 1207.72(T_{3,5} - 2T_{2,5} + T_{1,5}) - 0.6(T_{2,5} - T_\infty)$$

$$1813.57T_{2,5} - 1207.72T_{3,5} = 195683.55 \quad (\text{IV.55})$$

$$T_{2,5} = 322.95 \text{ K} = 49.95 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (3,5)**

$$\frac{T_{3,5} - T_{3,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{4,5} - 2T_{3,5} + T_{2,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{3,5} - T_\infty)$$

$$T_{3,5} - T_{3,4} = 1207.72(T_{4,5} - 2T_{3,5} + T_{2,5}) - 0.6(T_{3,5} - T_\infty)$$

$$1612.77T_{3,5} - 1207.72T_{4,5} = 130823.28 \quad (\text{III.56})$$

$$T_{3,5} = 332.91 \text{ K} = 49.91 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ **Pour le point (4,5)**

$$\frac{T_{4,5} - T_{4,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{5,5} - 2T_{4,5} + T_{3,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{4,5} - T_\infty)$$

$$T_{4,5} - T_{4,4} = 1207.72(T_{5,5} - 2T_{4,5} + T_{3,5}) - 0.6(T_{4,5} - T_\infty)$$

$$1512.64T_{4,5} - 1207.72T_{5,5} = 98477.5 \quad (\text{IV.57})$$

$$T_{4,5} = 322.89 \text{ K} = 49.89 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ Pour le point (5,5)

$$\frac{T_{5,5} - T_{5,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{6,5} - 2T_{5,5} + T_{4,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{5,5} - T_\infty)$$

$$T_{5,5} - T_{5,4} = 1207.72(T_{6,5} - 2T_{5,5} + T_{4,5}) - 0.6(T_{5,5} - T_\infty)$$

$$1452.77T_{5,5} - 1207.72T_{6,5} = 79136.9 \quad (\text{IV.58})$$

$$T_{5,5} = 322.88 \text{ K} = 49.88 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ Pour le point (6,5)

$$\frac{T_{6,5} - T_{6,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{7,5} - 2T_{6,5} + T_{5,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{6,5} - T_\infty)$$

$$T_{6,5} - T_{6,4} = 1207.72(T_{7,5} - 2T_{6,5} + T_{5,5}) - 0.6(T_{6,5} - T_\infty)$$

$$1413.03T_{6,5} - 1207.72T_{7,5} = 66298.97 \quad (\text{IV.59})$$

$$T_{6,5} = 322.86 \text{ K} = 49.86 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ Pour le point (7,5)

$$\frac{T_{7,5} - T_{7,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{8,5} - 2T_{7,5} + T_{6,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{7,5} - T_\infty)$$

$$T_{7,5} - T_{7,4} = 1207.72(T_{8,5} - 2T_{7,5} + T_{6,5}) - 0.6(T_{7,5} - T_\infty)$$

$$1384.79T_{7,5} - 1207.72T_{8,5} = 57176.56 \quad (\text{IV.60})$$

$$T_{7,5} = 322.85 \text{ K} = 49.85 \text{ }^\circ\text{C}$$

❖ Pour le point (8,5)

$$\frac{T_{8,5} - T_{8,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{9,5} - 2T_{8,5} + T_{7,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{8,5} - T_\infty)$$

$$T_{8,5} - T_{8,4} = 1207.72(T_{9,5} - 2T_{8,5} + T_{7,5}) - 0.6(T_{8,5} - T_{\infty})$$

$$1363.74T_{8,5} - 1207.72T_{9,5} = 50376.15 \quad (\text{IV.61})$$

$$T_{8,5} = 322.85 \text{ K} = 49.85 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ **Pour le point (9,5)**

$$\frac{T_{9,5} - T_{9,4}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \left(\frac{T_{10,5} - 2T_{9,5} + T_{8,5}}{\Delta x^2} \right) - \frac{hP}{\rho CS} (T_{9,5} - T_{\infty})$$

$$T_{9,5} - T_{9,4} = 1207.72(T_{10,5} - 2T_{9,5} + T_{8,5}) - 0.6(T_{9,5} - T_{\infty})$$

$$1347.49T_{9,5} - 1207.72T_{10,5} = 45123.47 \quad (\text{IV.62})$$

$$T_{9,5} = 322.84 \text{ K} = 49.84 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

❖ **Pour le point (10,5)**

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{10,5} = \frac{T_{10,5} - T_{9,5}}{\Delta x} = 0$$

$$T_{10,5} - T_{9,5} = 0 \quad (\text{IV.63})$$

$$T_{10,5} = T_{9,5} = 322.84 \text{ K} = 49.84 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

IV.4 Etude graphique :

A partir des résultats qu'on a trouvés on peut tracer la variation des températures en fonctions des abscisses x

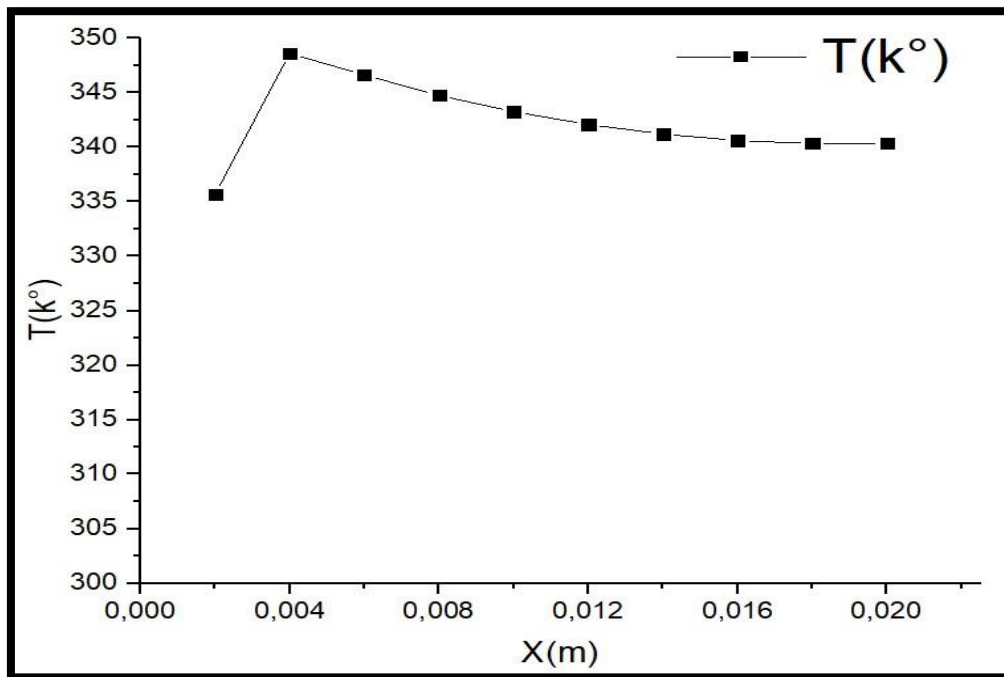


Figure IV.4 : La variation de T dans une ailette à l'instant 60s

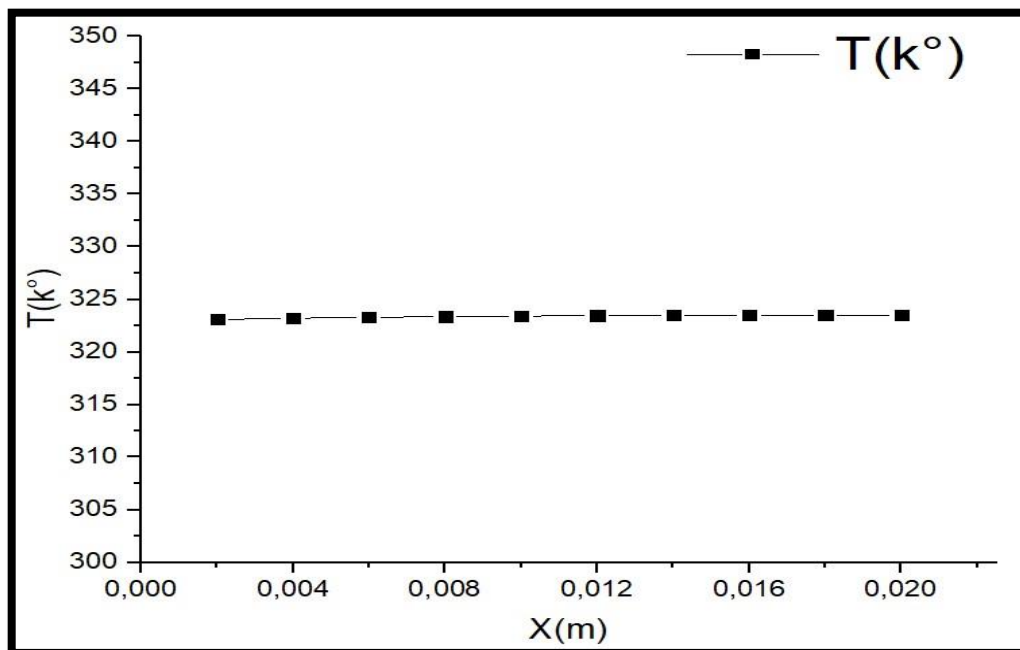


Figure IV.5 : La variation de T dans une ailette à l'instant 120s

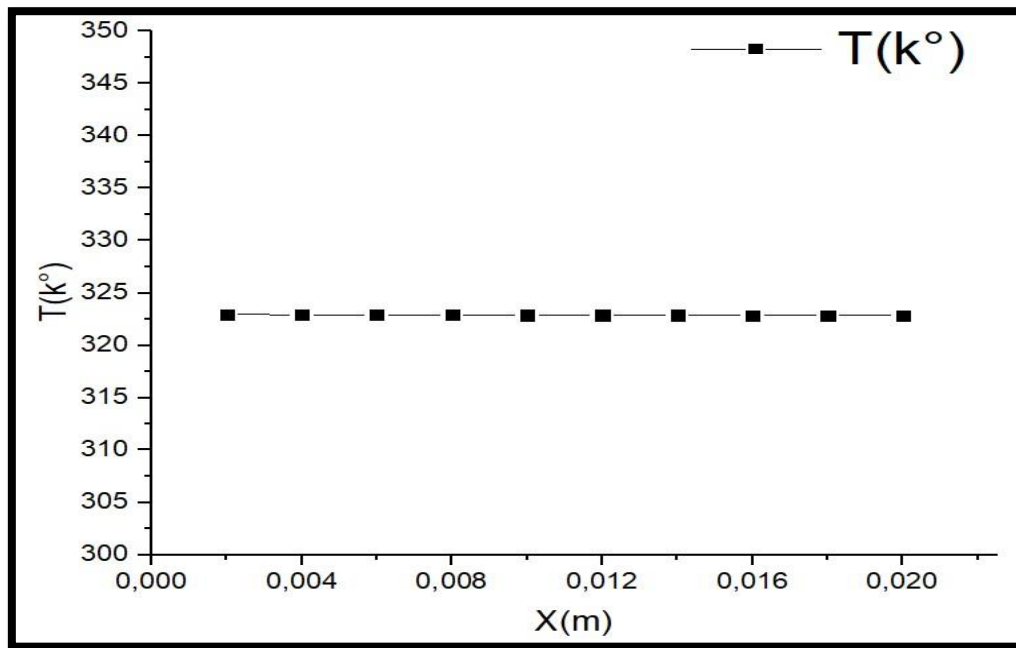


Figure IV.6 : La variation de tep dans une ailette à l'instant 180s

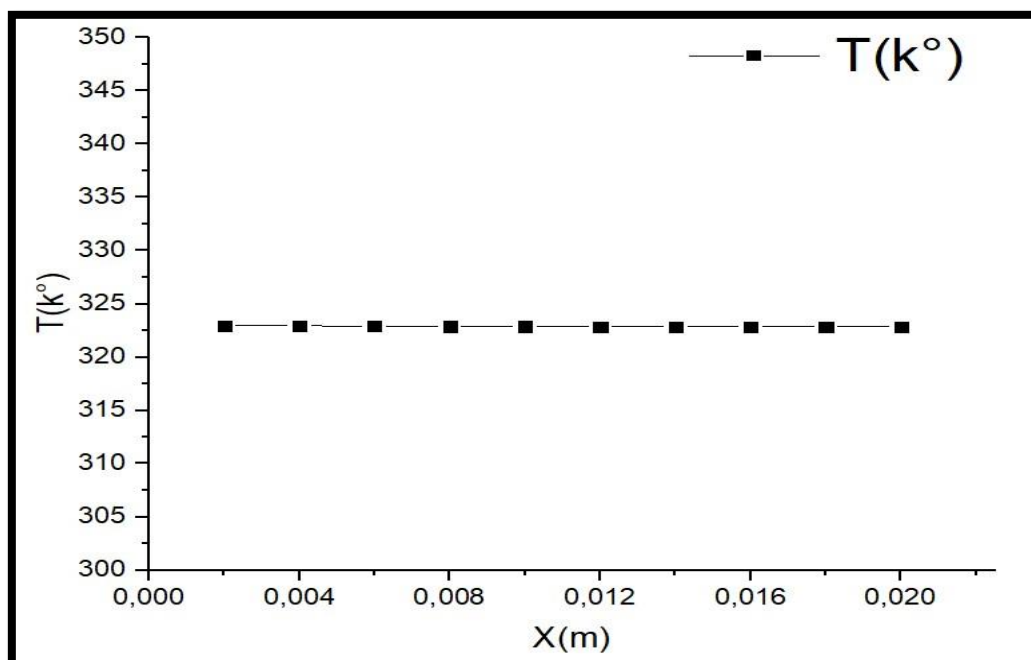


Figure IV.7 : La variation de tep dans une ailette à l'instant 240s

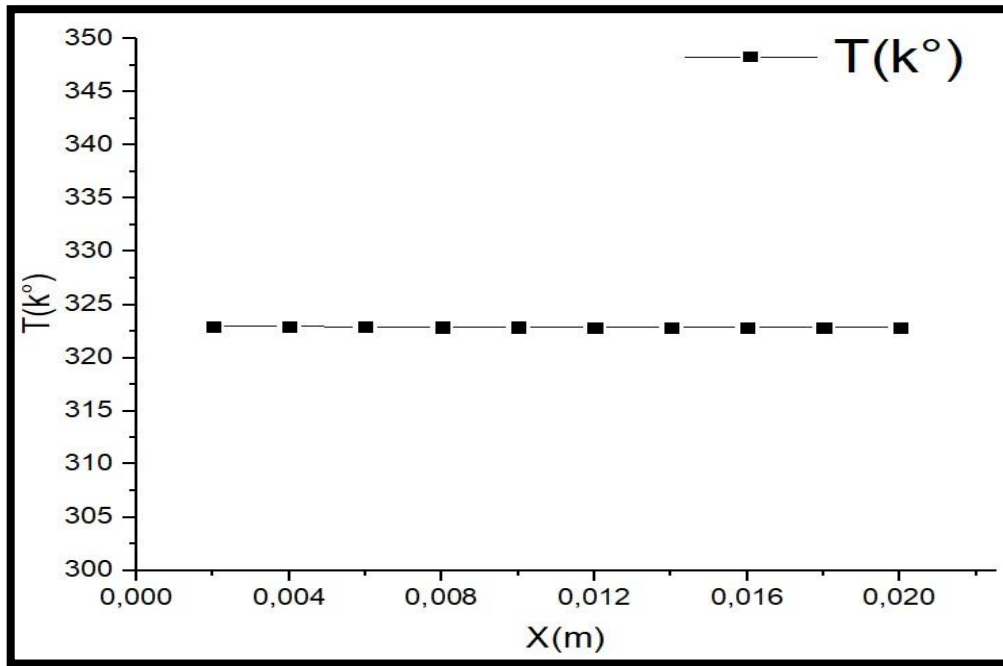


Figure IV.8 : La variation de tep dans une ailette à l'instant 300s

IV.4.1. Interprétation des résultats

La figure IV.4 : Présente l'évolution de la température en fonction de l'abscisse x pour le temps $t=60s$; La courbe commence à partir de la valeur ($T = 335.66^{\circ}K$) et croissante jusqu'à atteindre la valeur ($T = 348.61^{\circ}K$), Pui il dés croissante jusqu'à atteindre la dernière valeur ($T = 348.61^{\circ}K$).

La figure IV.5 : Présente l'évolution de la température en fonction de l'abscisse x pour le temps $t=120s$; La courbe commence à partir de la valeur ($T = 323.1^{\circ}k$) et croissante jusqu'à atteindre la valeur final ($T = 323.52^{\circ}K$).

La figure IV.6 : Présente l'évolution de la température en fonction de l'abscisse x pour le temps $t=180s$; La courbe commence à partir de la valeur ($T = 322.96^{\circ}k$) et dés croissante jusqu'à atteindre la dernière valeur ($T = 322.86^{\circ}k$).

La figure IV.7 : Présente l'évolution de la température en fonction de l'abscisse x pour le temps $t=240s$; La courbe commence à partir de la valeur ($T = 322.96^{\circ}K$) et dés croissante jusqu'à atteindre la dernière valeur ($T = 322.84^{\circ}k$).

La figure IV.8 : Présente l'évolution de la température en fonction de l'abscisse x pour le temps $t=300s$; La courbe commence à partir de la valeur ($T = 322.96^{\circ}k$)et dés croissante jusqu'à atteindre la dernière valeur ($T = 322.86^{\circ}k$).

IV.5. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié analytiquement et graphiquement l'évolution de la température dans une ailette rectangulaire .Les calculs présentés sont réalisés avec un maillage 2D.

Les résultats obtenus montrent que l'évolution de température d'ailette est croissant et parfois dés croissant

Chapitre V

Modélisation Et simulation en CFD

V.1. Simulation parle code fluent

V.1.1. Introduction au CFD

L'analyse des phénomènes complexes tels que le transfert de chaleur, les écoulements d'eau et d'air nécessitent une bonne compréhension du système analytique des mécaniques des fluides, et les champs d'application de ces systèmes, voire les différentes étapes de traitement du code CFD afin d'obtenir les résultats qui expliquent notre phénomène en question. Le choix du logiciel de simulation dépend de nos données d'entrée (inputs) et de la nature de notre expérience et les conditions dans lesquelles elle est inscrite [39].

V.1.2. Définition du CFD

La dynamique des fluides computationnelle ou CFD (Computational Fluid Dynamics) est l'analyse des systèmes d'écoulement des fluides, le transfert de la chaleur et tous les phénomènes associés tels que les réactions chimiques en utilisant la simulation par ordinateur. La technique est très puissante et couvre un large champ d'applications industrielles et non industrielles tels que : l'aérodynamique, hydrodynamique, centrale électrique, turbomachines, de l'ingénierie de processus chimique, génie maritime, génie de l'environnement, de la métrologie, de l'ingénierie biomédicale, l'hydrologie et l'océanographie voire l'environnement externe et interne des bâtiments [40].

V.1.3. Présentation du logiciel de simulation « ansys fluent »

ANSYS FLUENT est un logiciel de simulation CFD qui permet de modéliser l'écoulement du fluide, le transfert de chaleur, et les réactions chimiques dans des géométries complexes. Ce programme est écrit dans le langage C de programmation et permet d'utiliser pleinement la flexibilité et la puissance offerte par cette langue. ANSYS FLUENT utilise une architecture client / serveur, ce qui lui permet d'exécuter des processus simultanés distinctes sur plusieurs postes de travail client et serveurs de calcul puissants. Cette architecture est essentielle pour une exécution efficace, un contrôle interactif, et une flexibilité totale entre les différents types de machines ou de systèmes d'exploitation [41].

V.1.4. Menu principal du logiciel

L'interface graphique de « Work bench » ANSYS est montrée sur la (Figure IV.1). Dans cette étude, nous utilisons mécanique des fluides (fluents) qui se trouve en la barre d'outils.

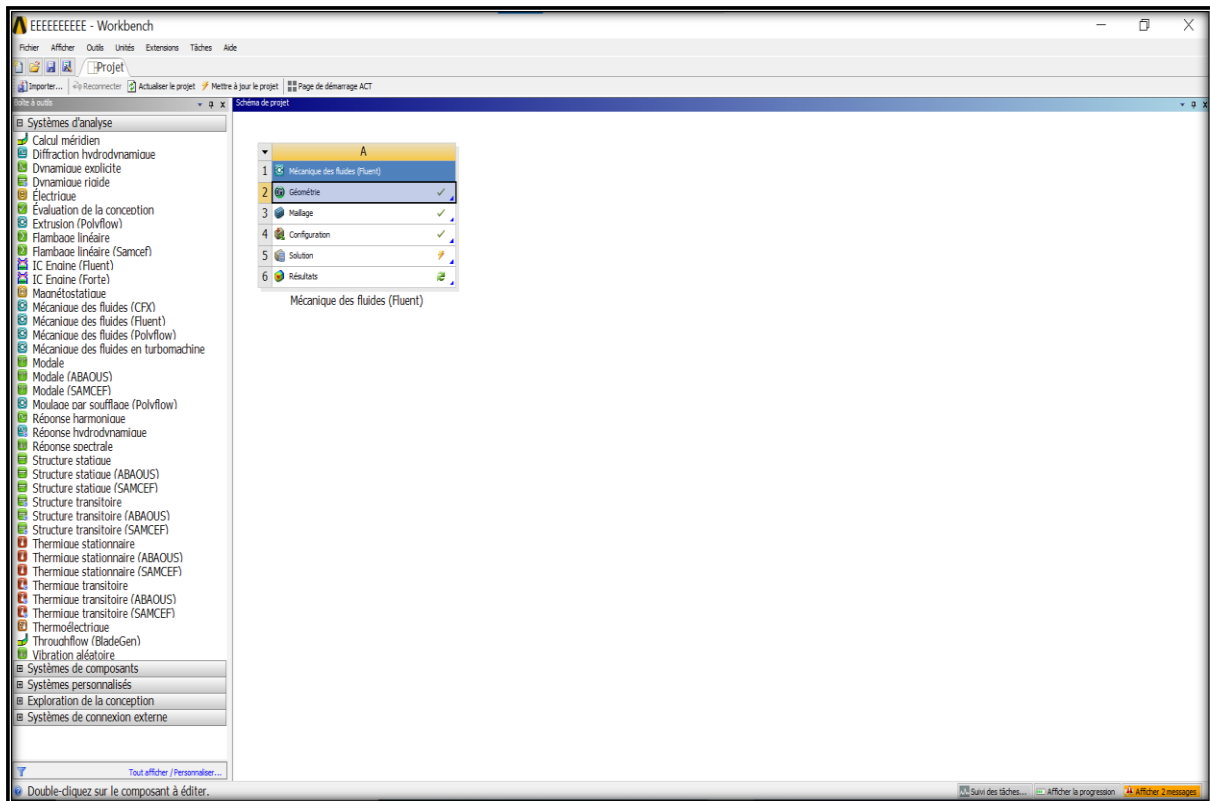


Figure V.1. La fenêtre principale du logiciel ANSYS(Work bench).

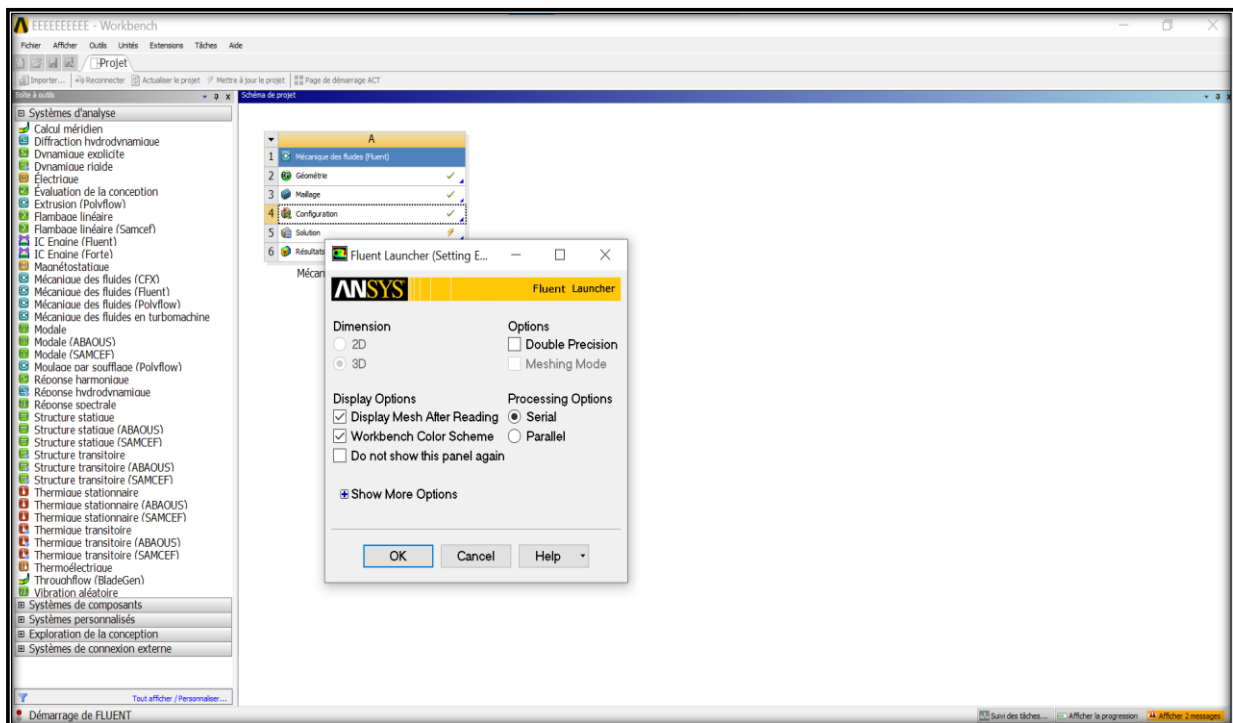


Figure V.2.la fenêtre de lancement du fluent.

Les différentes étapes :

- **Géométrie** : Utilisé pour importer ou de créer ou de modifier ou de mettre à jour un modèle qui peut être utilisé pour l'analyse.
- **Maillage** : Cette cellule est liée à la définition de la géométrie, systèmes de coordonnées et réseau de communication dans le module de simulation mécanique.
- **Configuration** : Permet de définir les charges et conditions aux limites et une autre configuration pour l'analyse.
- **Solution** : La solution cellulaire permet d'accéder aux données.
- **Résultats** : Cette cellule combine les résultats de l'analyse.






| | | |
|---|--------------------------------------|-----------------------------|
|  Géométrie | <i>Création de la géométrie</i> | <i>ANSYS Design Modeler</i> |
|  Maillage | <i>Maillage</i> | <i>ANSYS Meshing</i> |
|  Configuration | <i>Mise en données et simulation</i> | <i>ANSYS fluent</i> |
|  Solution | <i>Résultats CFD</i> | |
|  Résultats | <i>Post-processus</i> | <i>CFD-Post</i> |

Tableau V.1. Les étapes de Modélisation et les sous-programmes qui en sont responsables.

Pour créer une géométrie avec ANSYS Work bench double clique sur géométrie pour ouvrir le module de création géométrique « Design Modeler ». Il faut préciser que l'on va travailler en 2D ou 3D. La géométrie étudié est composée respectivement de :

Ailette rectangulaire :

$$L = 3 \text{ cm} \Rightarrow 3 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$e = 1 \text{ cm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$w = 2 \text{ cm} \rightarrow 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

- La température $T_0 = 50^\circ\text{C}$.
- La température ambiante $T_\infty = 40^\circ\text{C}$.
- Le flux de chaleur quand $x = 2\text{cm}$ c'est à dire le flux à la sortie est égale 0.
- Convection forcé
- Régime non permanent $\frac{dT}{dt} \neq 0$.

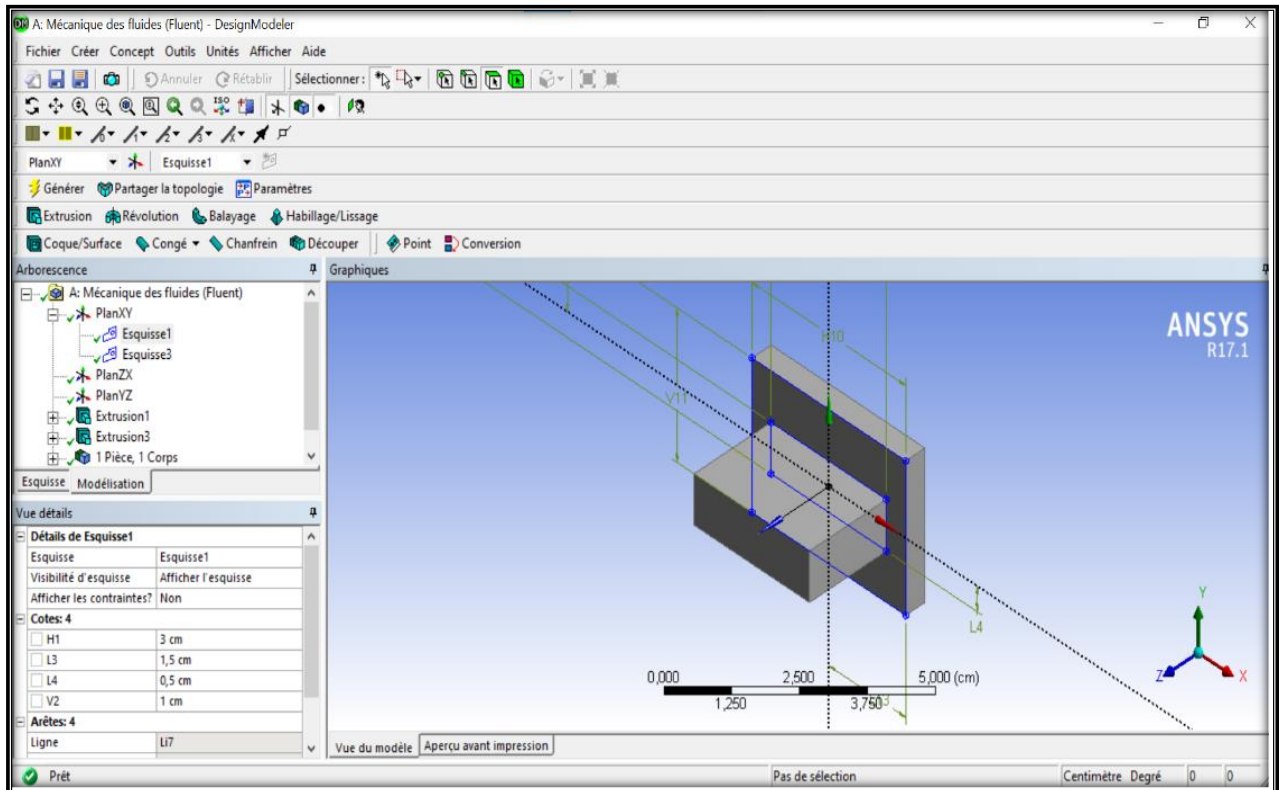


Figure V.3. L'interface d'ANSYS Design Modeler et la géométrie

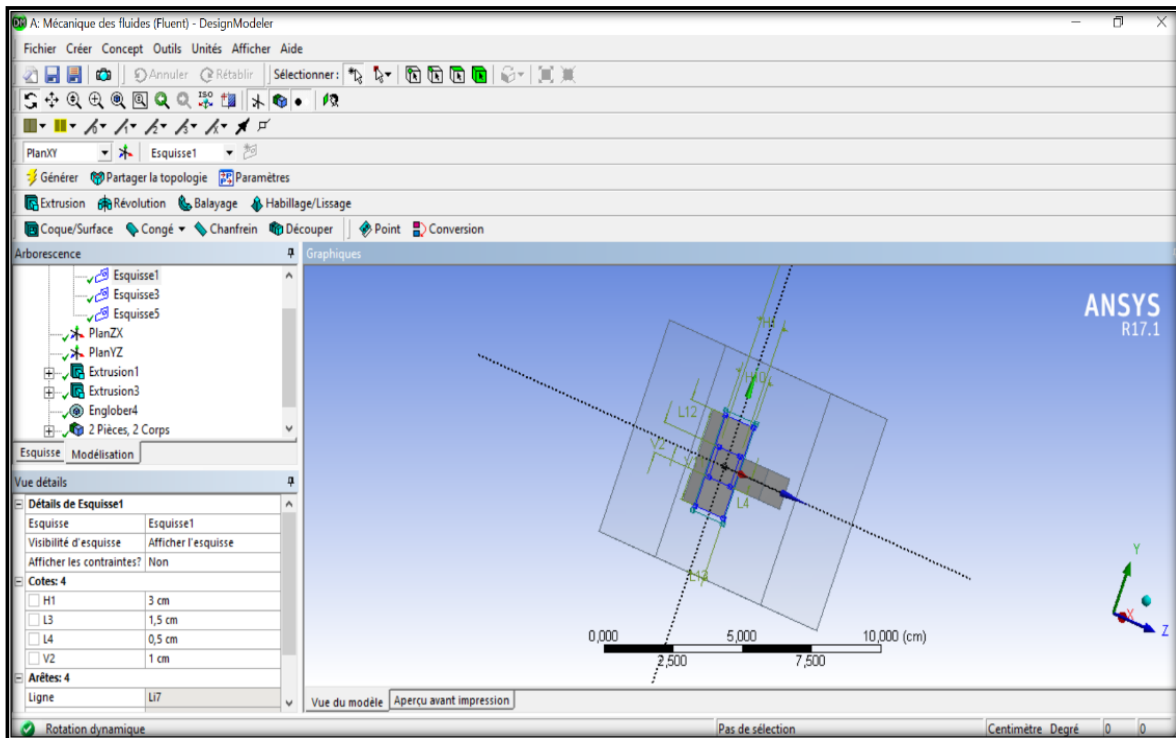


Figure V.4.L'interface d'ANSYS Design Modeler et la géométrie (volume de contrôle)

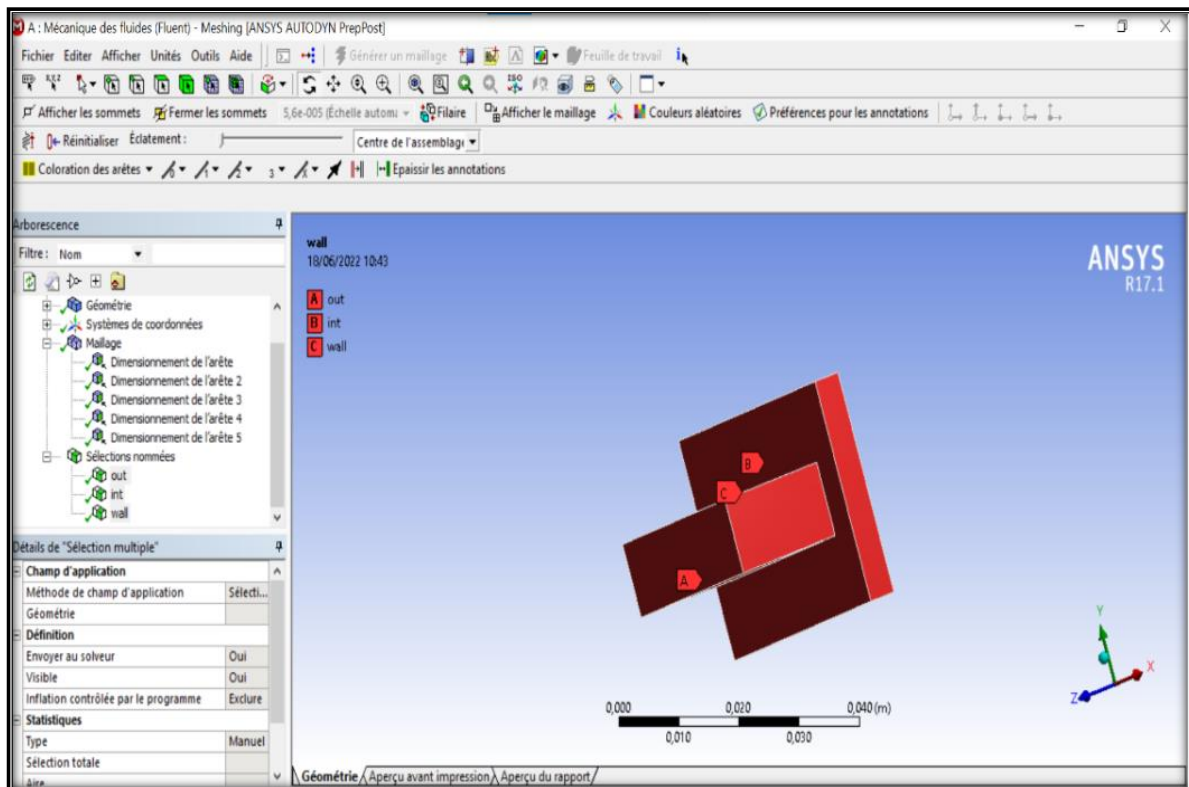


Figure V.5.L'interface d'ANSYS meshing

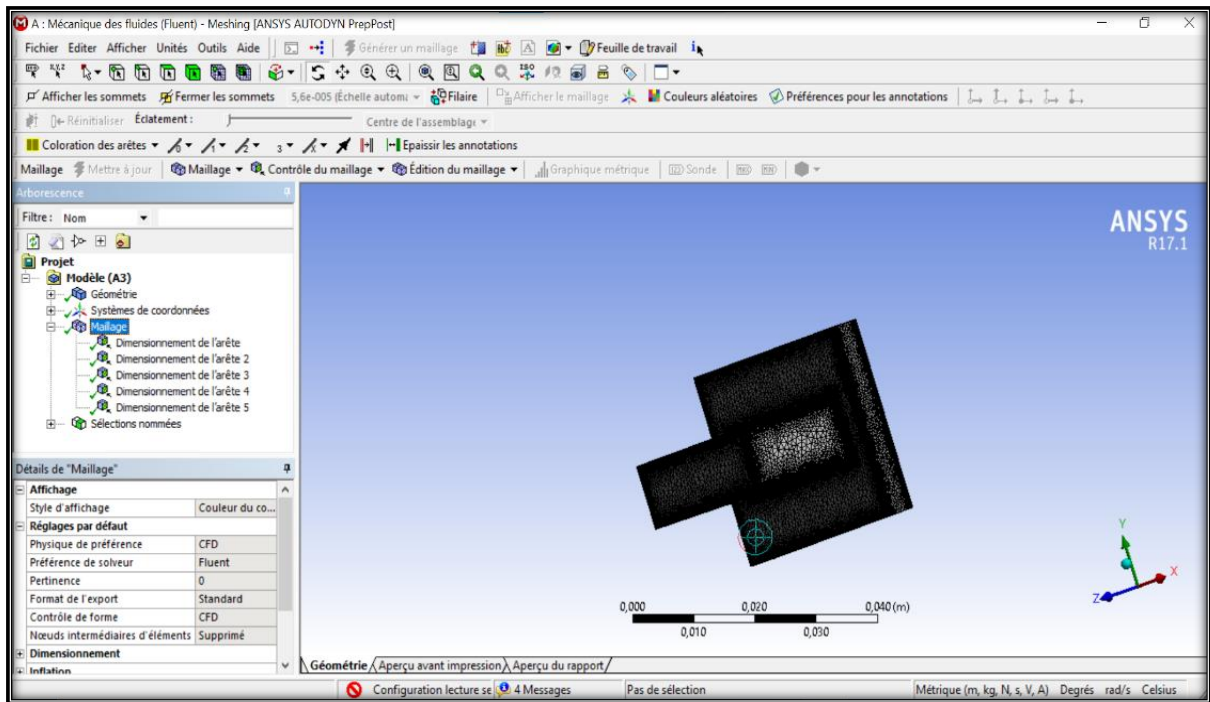


Figure V.6. L'interface d'ANSYS meshing et maillage

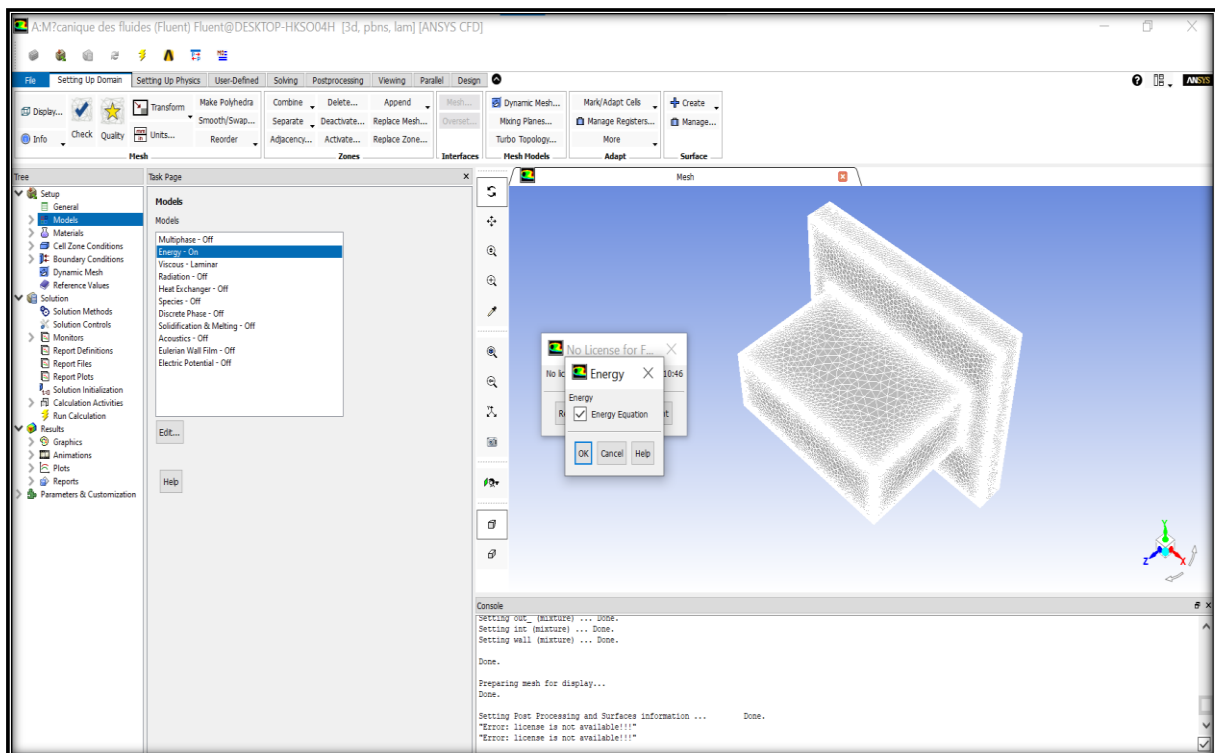


Figure V.7.établir les équations d'énergie

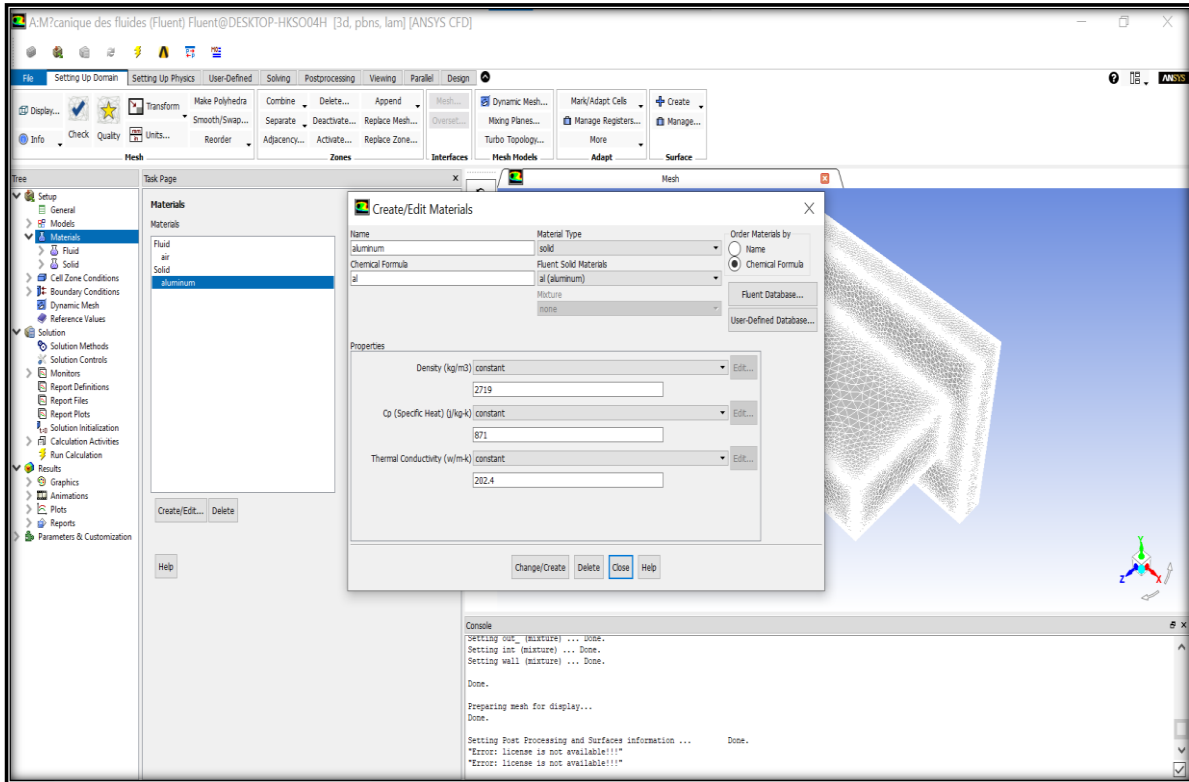


Figure V.8.spécification de la matière utilisée (aluminium)

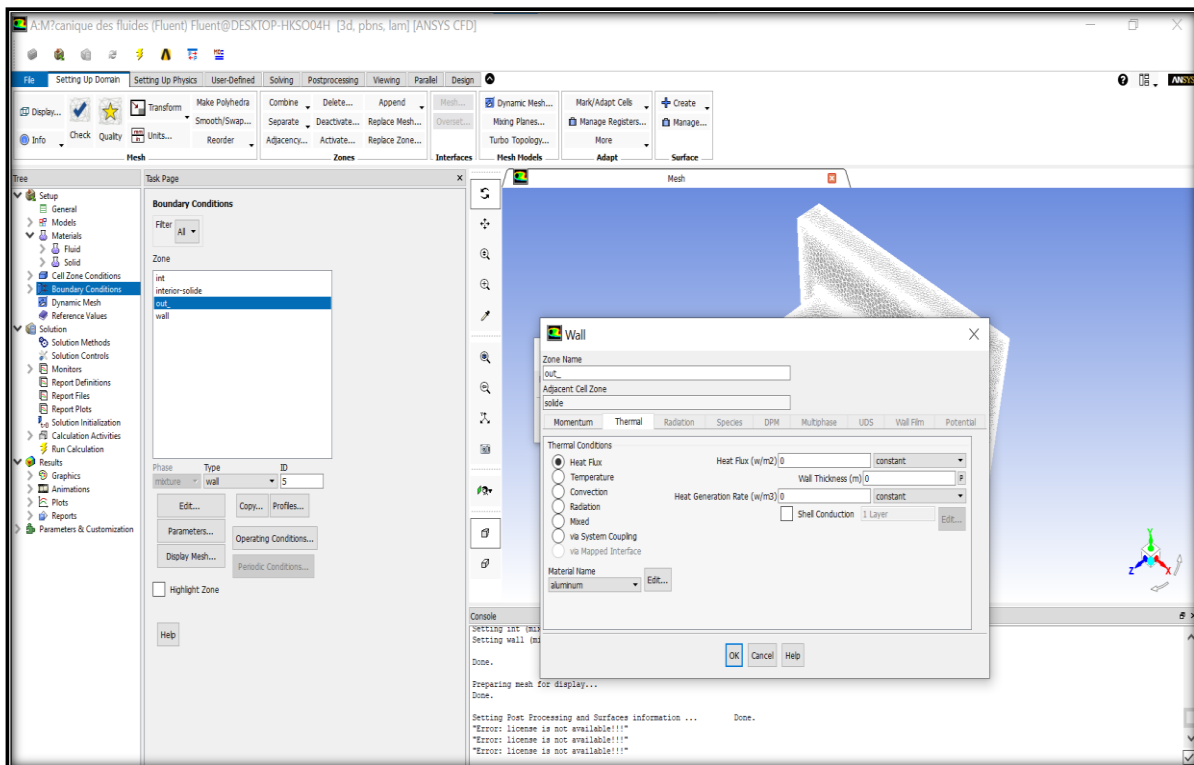


Figure V.9.initialisation et itérations

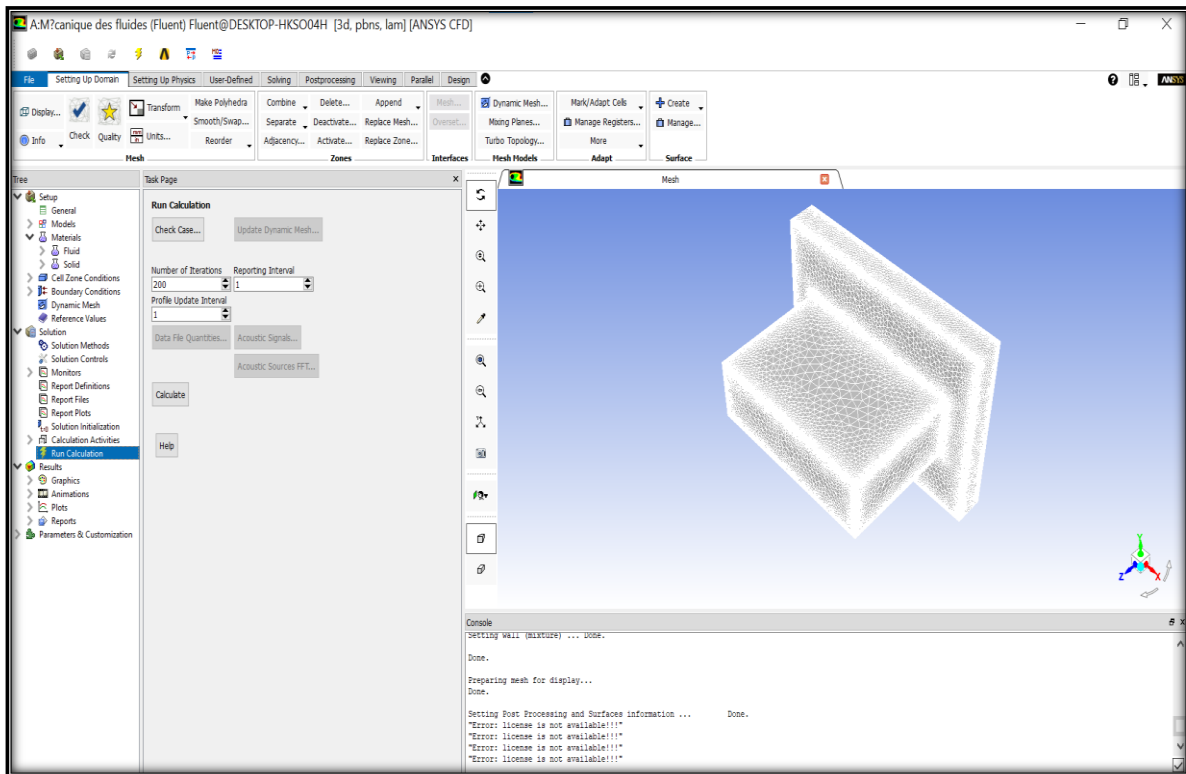


Figure V.10. Condition aux limites (le flux)

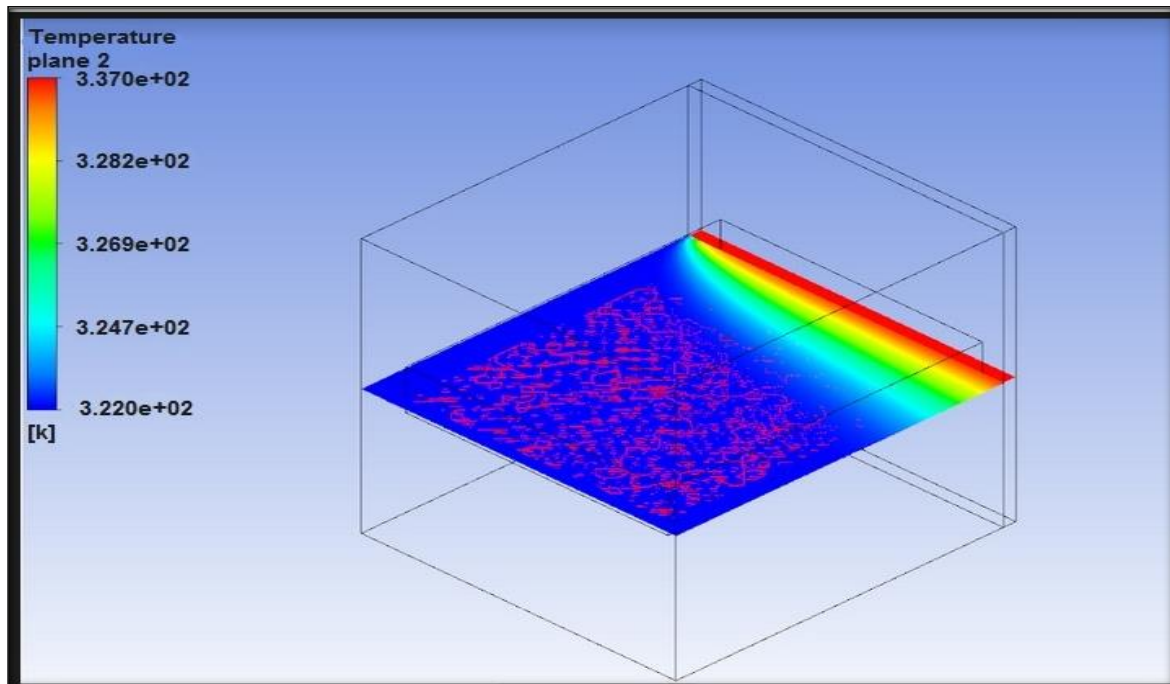


Figure V.11. La variation de température dans une coupe d'ailette rectangulaire

V.2. Comparaison et validation

Pour la comparaison et validation ont utilisé le logiciel «work bench » qui est basé la méthode de volume finie pour résoudre l'équation la place avec la sélection du model de transfert forcé aux types (conduction, convection) et pour la visualisation volume d'air.

L'outil de simulation work bench (ansys) work bench est un logiciel qui permet de créer des maillages pouvant être utilise en particulier sous fluent.

Le meilleur est un prétraitement au logiciel de simulation .il permet de générer un maillage structuré ou non structuré en coordonnées cartésiennes ou axisymétriques.

Il peut réaliser des maillages complexes en deux ou trois dimensions avec des mailles de types rectangles.

V.3. Construction d'un maillage

Pour construire un maillage, il est bon suivre la démarche suivante :

- Définir la géométrie
- Réaliser le maillage
- Définir les paramètres des zones de calcul

La géométrie comprend les positions physiques de point caractéristique définissent la zone que l'on a à mailler : cordonnés spatiales des quatre sommets d'un carré ; du point de départ du point d'arrivée d'une ligne

Il faut pouvoir représenter la zone à étudier par un ensemble de figures géométrique simples raccordées les unes aux autres.

Pour des maillages structurés, on peut faire la liaison entre la géométrie et le maillage, aussi avant de réaliser le maillage il faut spécifier par écrit d'une part la géométrie adaptée pour définir la zone à mailler, d'autre part les numéros des mailles correspondant aux point caractéristique de la géométrie .un nœud pourra être repéré ces coordonnées physiques x, y et z

Par ailleurs, il peut être avantageux de définir des points intermédiaires qui ne sont pas indispensables à la définition de la géométrie mais qui permettent de délimiter les zones dans lesquelles les mailles seront adaptées pour raffiner le maillage près des parois par exemple ou bien pour épousée au mieux la forme des obstacles parois ou autres

V.4. Notice d'utilisation de (ansys)

Ce logiciel est utilisé pour définir et créer le modèle d'étude (surface ou volume) et de la maille

Suivant le bon vouloir de l'utilisateur, les différentes étapes d'utilisation de (ansys) sont définies dans la notice suivante :

| La température (k) | $T_{1.1}$ | $T_{5.2}$ | $T_{10.4}$ |
|--|-----------|-----------|------------|
| Résultats obtenus par logiciel (ansys) | 336 | 325 | 324 |
| Résultats obtenus manuel | 335 | 323.4 | 322.8 |

Tableau V.2. Comparaison entre la valeur obtenue par logiciel et manuel.

NOTE : le tableau nous observons que les valeurs des résultats obtenus par logiciel (ansys) et les résultats obtenus manuel sont très proches

V.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié numériquement l'évolution de la température dans une ailette rectangulaire. Les calculs présentés sont réalisés avec un maillage 3D.

Les résultats obtenus montrent que l'évolution de température à l'ailette rectangulaire par le validation sont très proche à les résultats manuels.

Conclusion générale

Conclusion générale

En raison de l'importance des ailettes (particulièrement en aluminium) dans le domaine industriel et de la diversité de leurs utilisations et lieux de leur présence, que ce soit dans les machines ou comme accessoires ou bien comme élément important dans une structure industrielle ou automatique. Nous avons décidé pour étudier analytiquement et numériquement le comportement thermique d'une ailette. Cette étude réalisée en convection forcée.

L'objectif principal traité par cette étude était suivi l'évolution de la température et l'importance de son effet sur une ailette.

La démarche suivie pour aboutir à cet objectif a divisé ce travail en deux parties. D'une part, a été consacrée pour une compréhension élargie des axes formant le sujet étudié (transfert de chaleur, méthode des différences finies). D'autre part, concrétise la solution proposée à travers une étude graphique, une simulation numérique et une discussion des résultats obtenus. Et nous constatons que les résultats sont similaires.

Finalement, grâce à cette étude, nous avons trouvé une méthode simple et précise pour étudier le changement de température dans une ailette dans le but de l'utiliser dans de nombreux domaines.

Référence Bibliographique.

ChpN°01

[1] S. MERGUI. Transferts thermiques. Licence de mécanique 2^{ème} année. Module 2a101. Université de Sorbonne.

[2]N. NADJI. Étude des performances d'un capteur solaire plan à conversion thermique. Thèse de master. Option énergétique et environnement. Université Badji Mokhtar. Annaba, (2017/2018).

[3]PH. MARTY. Cours de transferts thermiques conduction et rayonnement. Option génie des procédés licence L3. Université Joseph Fourier. Grenoble, Version 9 Juillet (2012).

[4]SMEA. BEKKOUCHE. Modélisation du comportement thermique de quelques dispositifs solaires. Thèse de doctorat. Option électronique et modélisation. Université Abou-Bakr Belkaïd. Tlemcen, (2008/2009).

[5]A. GUEDIRA, A. BENALLOU. Procédure de qualification des capteurs plans sous ensoleillement naturel au Maroc. Revue des Energies Renouvelables. Journées de thermique, PP[79-84], (2001).

[6]R. BERNARD, G. MENGUY, M. SCHWARTZ. Le rayonnement solaire conversion thermique et applications. Technique et documentation. Paris, (1983).

[7]A. BRAHIMI. Etude de performances d'un capteur solaire plan à eau. Génie des procédés. Hal-01825548, (2016).

[8]PH. MARTY. Transferts thermiques convectifs. Option génie des procédés master 2. Université Joseph Fourier. Grenoble, Version modifiée le 9 Juillet (2012).

[9]G.BLANC.Refroissement éolien ou windchill. http://www.gblanc.fr/spip.php?page=forum&id_article=718&lang=fr, (2019).

[10]L. MONSAINGEON. Analyse Numérique. ENSEM 1A, ANA-1 ISN, IECL, (2017).

[11] M. S. BOUCHOUICHA. Étude des instabilités thermo-convective dans une enceinte différentiellement chauffée munie d'une ailette conductrice et adiabatique.

Référence Bibliographique.

Thèse de doctorat. Option énergétique. Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf. Oran, (2017/2018).

[12] T. OUKSEL. Cours de transferts thermiques. Département de Génie Mécanique licence L3 Energétique. Université Larbi Ben M'hidi. Oum El Bouaghi, (2016/2017).

[13] P. YVES. Transferts thermiques dans les fluides. Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées. Cours MF202. Université Sorbonne, (2018/2019).

[14] N. Chouchane et al. Modèles empiriques de calcul des pertes de charge dans un conduit rectangulaire muni de rugosités artificielles – Cas des isolateurs à air. Revue des Energies Renouvelables Vol. 12 N°3 (2009) 385 – 394

[15] Aoues K., Moumami N., Zellouf M., Moumami A., Labeled A., Achouri E., Benchabane A., (2009), "Amélioration des performances thermiques d'un capteur solaire plan à air", Etude expérimentale dans la région de Biskra, Revue des Energies Renouvelables, vol 12, N°2, p 237-248.

[16] Kumar A., Kumar R., Maithani R., Chauhan R., Sethi M., Kumari A., Kumar S. Correlation development for Nusselt number and friction factor of a multiple type V-pattern dimpled obstacles solar air passage. Renew Energy 2017;109:461–79

[17] Deo N.S., Chander S., Saini J.S. Performance analysis of solar air heater duct roughened with multigap V-down ribs combined with staggered ribs. Renew Energy 2016;91:484–500.

[18] Deo N.S., Chander S., Saini J.S. Performance analysis of solar air heater duct roughened with multigap V-down ribs combined with staggered ribs. Renew Energy 2016;91:484–500.

[19] Prasad, B.N., et Saini, J.S.(1988). Effect of artificial roughness on heat transfer and friction factor in a solar air heater. Solar Energy, 41(6), 555–560.

[20] Varun, Saini, R.P. et Singal, S. K.(2008). Investigation of thermal performance of solar air heater having roughness elements as a combination of inclined and transverse ribs on the absorber plate. Renewable Energy, 33(6), 1398–1405.

Référence Bibliographique.

- [21] Gawande V.B., Dhoble A.S., Zodpe D.B., Chamoli S. Experimental and CFD investigation of convection heat transfer in solar air heater with reverse L shaped ribs. Sol Energy 2016;131:275–95
- [22] Saini, S.K. et Saini, R.P.(2008). Development of correlations for Nusselt number and friction factor for solar air heater with roughened duct having arcshaped wire as artificial roughness. Solar Energy, 82(12), 1118–1130.
- [23] Aoues K., Moumami N., Zellouf M., Labed A., Achouri E. ,(2008), " Etude de l'influence des rugosités artificielles sur les performances thermiques descapteurs solaires plans à air", Revue des Energies Renouvelables, vol 11,N°2, p 219 227.
- [24] Bahria S.,Amirat M., (2013), "Influence de l'adjonction des chicanes longitudinales sur les performances d'un capteur solaire plan à air", Revue des énergies Renouvelables Vol.16 N°1, pp51-63.
- [25] LICENCE DE MECANIQUE 2EME ANNEE MODULE 2A101 Sophie Mergui.
- [26] Webb R.L., and Bergels A. E., and junkhan G., "Bibliography of U.S parent littérature.
- [27] Holman J.P., "heat transfert. A particalapproach".2nd Edition, (1997), p47-59.

ChpN°2

- [28]M. Kadja. « Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Méthodes des différences finies », Cours et exercices résolus. Les éditions de l'université 2000/2001.
- [29] le site web :<https://www.unige.ch/~wanner/teaching/Numi/Numi2.pdf>
- [30]Karima MEBARKI1. AnalyseNumérique (Cours, 2ème annéelicencemathématiques), UniversitéAbderrahmane Mira de Bejaïa. Site web :
<https://elearning.univ-bejaia.dz/mod/resource/view.php?id=47203>.
- [31] Jean-François Burnol. L305 : ANALYSE COMPLEXE, Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006), Université Lille 1 — UFR de Mathématiques.
- [32] le site web : https://www.math.univ-paris13.fr/~halpern/teaching/MACS1_2010/ch5.pdf
- [33] H. YAMINA. Méthodesnumériques I « Méthodes des différencesfinies», Cours1ère Année Master Energétique. UniversitéLarbi Ben M'Hidi - Oum-El-Bouaghi. AnnéeUniversitaire 2015-2016

Référence Bibliographique.

[34] **Eric Goncalvès da Silva.** Méthodes et Analyse Numériques, Submitted on 18 Jan 2011, Site web : <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00556967> .

[35] **Besseghir Safia, Hachani Assia.** Schéma aux différences finies pour l'équation des ondes, Mémoire de fin d'étude, Université Echahid HAMMA LAKHDAR EL OUED, Année universitaire 2018 – 2019.

[36] **Méthodes numériques II** (Notes de cours « Sup Galilée, Ingénieurs Energétique 1ère année »), Site web :

https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/Energetique/MethNumII/16-17/MethNumII_24mai2016_lignes.pdf

[37] **J.-F. Scheid.** Méthodes numériques pour la dynamique des fluides, Année 2011-2012.

[38] **Jean-François Babadjian.** Equations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires, Master de Mathématiques et Applications, Université Paris-Sud, site web :

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~babadjian/files/Poly-EDP-elliptiques2019.pdf>

ChpN°04

[39] **Benameur, O.K.B.A. (2016).** ETUDE DE L'IMPACT D'UN FRAICHISSEMENT DES FONTAINES D'EAU DANS LES MAISONS A PATIO, CAS DES ZONES SAHARIENNES (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider Biskra).

[40] **Versteeg, H., and Weeratunge M.,** An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. Pearson éducation, 2007.

[41] MODELISATION NUMERIQUE EN MECANIQUE DES FLUIDES PRISE EN MAIN ANSYS/FLUENT.

Résumé

Les travaux présentés dans le Master Note visent à suivre le modèle de changement de température au niveau des ailettes adaptées à la technologie car il s'agit d'une surface étendue qui aide à augmenter le taux de transmission de la chaleur de et vers l'environnement par convection naturelle. L'impact de la nageoire sur la performance thermique de la surface violente et l'application de la méthode des différences finis nous ont permis de calculer la température à chaque point de la nageoire de manière précise et scientifique (expérimentale) étant des solutions théoriques et numériques (étude graphique et simulée par le code de fluent) Il est un peu compliqué car il est difficile de modéliser des surfaces désinvoltes et de résoudre des équations de continuité et d'énergie

Mots clés : convection, coefficient de convection, ailette, méthode des différences finis.

Abstract

The work presented in the Master Note aims to follow the model of temperature change at the level of fins adapted to the technology because it is an extensive surface that helps to increase the rate of heat transmission from and to the environment by convection natural. The impact of the fin on the thermal performance of the violent surface and the application of the finite differences method allowed us to calculate the temperature at each point of the fin in a precise and scientific (experimental) way being theoretical and numerical solutions (graphic study and simulated by fluent code) It is a bit complicated because it is difficult to model casual surfaces and to solve continuity and energy equations

Keywords: convection, coefficient of convection, fin, finite difference method.

ملخص

إن العمل الذي تم عرضه في مذكرة الماستر، يهدف إلى تتبع نمط تغير درجة الحرارة على مستوى الزعانف المكيفة مع التكنولوجيا حيث هي عبارة عن سطح ممتد يساعد على زيادة معدل انتقال الحرارة من وإلى البيئة عن طريق الحمل الحراري الطبيعي. فتم دراسة تأثير الزعنف على الأداء الحراري لسطح المزعنف وبتطبيق طريقة الفروق المحددة سمحت لنا بحساب درجة الحرارة في كل نقطة من الزعنف بطريقة دقيقة وعلمية (تجريبية) لكون الحلول النظرية والعديدية (دراسة بيانية ومحاكاة بواسطة (code de ansys) تكون معقدة بعض الشيء حيث من صعوبة نمذجة السطوح المزعنف وحل المعادلات الاستمرارية والطاقة

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري، معامل الحمل الحراري، الزعنف، طريقة الفروق المحدودة