

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Référence :2021...../2022



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية و الري
المرجع2021.../2022

Mémoire de Master

Filière : ... Génie civil

Spécialité :...structure.....

Thème

Effet de l'humidité de la température sur l'endommagement des plaques composites menues des singularités géométriques

Nom et Prénom de l'étudiant :
...Belaid Radja

Encadreur : KHECHAI Abdelhak
.....

Promotion: Juin 2022

Dédicaces

*Nous remercions Allah de nous avoir donné la force et la
volonté pour Pouvoir finir ce mémoire de fin d'études
Je dédie ce modeste effort :*

*A tous ceux qui ont de loin ou de près contribués à ce
travail A tous ceux qui m'ont encouragé soutenus et
aidés*

A mes parents

A mes frère

A ma sœur

A mon encadreur

Merci à tous et à toutes

Remerciements

En premier lieu, le Bon Dieu, le Tout Puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.

Mon encadreur le docteur Abdelhak khechai , je lui exprime ici mon attachement et ma profonde reconnaissance de m'avoir proposé un sujet de recherche très riche puis de m'avoir laissé aller jusqu'au bout de mes idées.

Je tiens à remercier ma famille, mes parents et ma petite sœur et mes frères pour le soutien continu qu'elle m'a apporté tout aux longs de ces années d'études.

Resumé

La mise en forme et l'usinage des plaques en matériaux composites (par enlèvement de la matière) restent toujours un problème ouvert pour la recherche, car l'usinage fait apparaître des dommages de natures différentes dans la structure et l'apparition des ouvertures au sein de la plaque affecte la distribution des contraintes et la rigidité dans cette dernière.

Le présent travail a pour but d'étudier le comportement membranaire des plaques anisotrope et composites (orthotrope) munies de singularité géométrique.

Les calculs ont été effectués numériquement en utilisant un élément fini

La formulation de l'élément est basée sur la théorie de premier ordre de cisaillement transverse (FSDT). Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions analytiques et ceux obtenus avec des modèles éléments finis numérique

La validation a été effectuée en comparant les résultats obtenus à ceux obtenus analytiquement

Notre travail consiste en l'analyse du comportement mécanique des plaques minces bidimensionnelle en matériaux isotrope et anisotrope (orthotrope) munies des singularités géométriques sous l'effet des efforts extérieurs utilisant les méthodes numériques et de modélisations en se basant sur la méthode des éléments finis (M.E.F).

Mots clés

plaques stratifiées, endommagement, élément fini, température, humidité, ouverture.

Introduction général

L'utilisation des matériaux composites est devenue de plus en plus fréquente dans plusieurs domaines industriels tels que l'aéronautique, l'aérospatiale, l'automobile, le nucléaire, la marine et le génie civil. Cette utilisation est due au fait que ces matériaux présentent plusieurs avantages, parmi lesquels on note la haute résistance et la grande rigidité par rapport à leur poids, une maintenance réduite, un temps de fabrication le plus court possible, ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques, ainsi que la capacité de changer des orientations des fibres pour répondre à des exigences de conception. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension de leurs comportements tels que la flexion, le flambage, la distribution des contraintes au voisinage des singularités géométrique, etc

Malgré les avantages précités, l'utilisation de ce type de matériaux reste limitée dans les structures de génie civil. Cela revient principalement au coût élevé et au manque de familiarité des ingénieurs de génie civil avec les propriétés et les méthodes d'analyse.

Les matériaux composites trouvent un grand intérêt dans une grande variété de structures complexes, ces structures nécessitent des outils numériques qui permettent des analyses précises des contraintes de toutes natures. En fait, de nos jours, beaucoup de codes commerciaux des éléments finis renferment des éléments plaques et coques stratifiées. Cependant, la modélisation propre des plaques stratifiées n'est pas une tâche facile et peut toujours être considéré comme un problème de recherche ouvert et cela comme conséquence à leur complexité.

Dans plusieurs situations, les ouvertures sont nécessaires dans les plaques stratifiées pour différentes raisons. Ces raisons peuvent être mécaniques (exemple gain de poids) ou électriques (exemple accès pour des installations électriques). Ces ouvertures qui sont des singularités géométriques, ont une importante influence sur la distribution des contraintes à travers la plaque et par conséquent sur le comportement mécanique de la plaque sous les actions statiques ou dynamiques.

Pour les travaux ultérieurs, un vieillissement en humidité relative à différents pourcentages en humidité et à différentes températures serait un complément scientifique permettant de prédire l'effet du vieillissement hygrothermique pour n'importe quelles sollicitations mécaniques imposées sur le composite étudié.

Objetif

L'objectif du présent travail est d'étudier numériquement, en utilisant un élément fini, le comportement à la rupture des plaques stratifiées soumises à des chargements

Hygrothermiques.

nous allons utiliser l'un des critères de

rupture disponible dans la littérature afin de comprendre l'effet de présence des trous sur le comportement des plaques composites dans un milieu hygrothermique.

D'autre part,

plusieurs paramètres, tels que l'orientation des fibres, la stratification des couches et la taille

du trou, seront étudiés afin de déterminer leurs influences sur le comportement à la rupture de ce structure

Nous avons divisé notre travail en cinq chapitres :

-

Le premier chapitre a pour but de présenter une bibliographie qui comporte des généralités sur les matériaux composites ainsi que des spécificités sur les plaques stratifiées.

Ensuite, nous allons consacrer **le deuxième chapitre** à une étude théorique générale sur le comportement mécanique des plaques stratifiées, où on présente les principaux types des matériaux composites.

Nous nous sommes intéressés essentiellement dans **Le troisième chapitre** à présenter les différentes approches proposées pour analyser le comportement des plaques stratifiées trouées

Le quatrième chapitre : comportera une formulation en élément fini, dans laquelle on utilisera un élément membranaire, ainsi qu'une programmation avec le langage FORTRAN, le programme sera ensuite validé par comparaison avec les résultats analytiques.

Dans le dernier chapitre, on va analyser et exploiter les résultats donnés par le programme

Référence

- [1] étude numérique de l'effet des singularités géométriques sur les comportement des plaques stratifiées ,mémoire de magister ,université A .MIRA de bejaia
- [2] these de doctorat en sciences ;Modélisation numérique de la propagation de l'endommagement et la rupture dans les matériaux composites stratifiés sous sollicitation thermomécaniques et cycliques ,université hadj lakhdar de Batna par BREK SAMIR
- [3] étude et simulation d'un composite Aéronautique à base de fibre de carbone et matrice époxy ,université BLIDA1
- [4] these de doctorat en 3 ème cycle « Analyse mécanique des structures composites :étude comparative entre les différentes théories des plaques ,université SIDI Bel ABBES
- [5] etude expérimentale et Numérique du comportement des plaques Trouées en Matériaux composites “Doctorat LMD en génie mécanique BISKRA
- [6] étude numérique du comportement mécanique des plaques en matériaux composites munies de trou circulaire ,génie Mécanique ,université M'SILA
- [7]étude numérique de l'effet du rapport d'épaisseur sur la flexion des plaques composites stratifiées ‘ ’ université Biskra
- [8] Bahi-Eddine lahouel « vibration des plaques composites trouées » thèse doctorat,université El –hadj lakhdar Batna ,2015
- [9] caractertion et laboration d'un Matériaux composite jute (Deches) /polyster ,université Mohamed Boudiaf –M'sila
- [10] introduction aux cours Matériaux composites partie :Anisotropie et mécanique des stratifiés
- [11] Bahi-Eddine el AHOUEL ‘ ’vibration des plaques composites trouée ,thèse doctorat université Batna Hadj Lakhdar
- [12] caracterection et laboration d'un matériaux composite jute (Deches/polyster) université Msila
- [13] Dynamique des structures composites sandwiches ‘ ’Teguia Mohamed salh université Biskra Ansarir ,torabij, Hassani R(2019) thermal buckling analysis of temperature dependent FG –CNTRC quadrilateral plates coumput Math appl 7(5) 1294-1311
- [14] doctor khechai abdelhak Etude numérique de l'effet des singularité géométrique sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées
- [15] Mutapha ASSARR’’ etude Exprémentale et modolisation du comportement dynamique des composites stratifiés et sandwich
- [16] Bahi –Eddine LAHOUEL « vibration des plaques composites trouées université Batna
- [17] Analyse numérique du comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées (Bennai manel) université Biskra
- [18] Bennia Manel « analyse numérique du comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées

[19] BEN MESSAOUD YOUSRA étude numérique de l'effet du rapport d'épaisseur sur la flexion des plaques composites stratifiées

Sommaire

introduction générale	I
objectif	II
chapitre I: introduction générale sur les matériaux composites	
I-1 –introduction	2
I-2 -définition générale des composites	2
I-3-constituants des matériaux composites	3
➤ Matrices	4
• Les résines thermodurcissables	5
• Les résines thermoplastiques	5
• . Résine époxyde	6
• . Résines thermostables	6
➤ Renfort	6
a) Différent types de renforts	6
• Les fibres longue	6
• Les fibres courtes	7
➤ Les fibres	7
a) Fibre de verre	7
b) Fibre de carbone	7
I-4- Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation	8
I-5- . Domaine d'utilisation des matériaux composites	8
I-6- Architecture des matériaux composites	8
I-6-1 . Les stratifiés à base de tissus unidirectionnel	9
I-6-2 Les sandwich.	10
I-7- Mise en œuvre des matériaux composites.	11
I-8- les avantages et les inconvénient des matériaux composites	11
I-8-1 avantage des matériaux	11
I-8-2 inconvénients des matériaux	12

I-9 Classification selon l'utilité	12
I-9 -1 les composites à grande diffusionGD	12
I-9-2 les composites à haute performances HP	12
I-10- . Classification des matériaux composites	12
I.- 11. Conclusion	13

Chapitre II : comportement mécanique et hygrothermique des plaques stratifiées 14

II-1-introduction	15
II-2 - -Définition d'une plaque	15
II-3- Equations constitutive de la monocouche	16
II-3-1 Caractéristiques mécaniques et modules d'élasticité	16
II-3-2 module d'young longitudinal	17
II-3-3 module d' young transversal	19
II-3-4 module de cisaillement longitudinal	21
II-3-5 coefficient de poisson longitudinal	22
II-4- différents types des matériaux	22
II-4-1 matériaux anisotropes	;22
II-4-2 matériaux orthotropes	23
II-4-3 matériaux transversalement isotropes	26
II-4-4 matériaux isotropes	27
II-4-5-.Relation contrainte-déformation plane :	27,28
II -4-6 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres	;28
II-5- Théorie classique Love-Kirchhoff	30
II-5-1 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre	31
II-5-2 . Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur.....	32
II-6- Théories de déformations des plaques	33
II-6-1 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT)....	34
II-6-2-Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT)	34
II-7- . Le comportement mécanique du pli UD	35

II-7-1. Le comportement mécanique dans les directions d'orthotrope36

II-7-2 . Le comportement mécanique dans une direction quelconque.....36

Chapitre III :étude théorique sur les différents critères d'endommagement ...37

III-1- introduction	38
III-2-les critères de rupture des matériaux composies	38
III-2-1 critères en contraintes maximales	39
Critères dans les axes principaux	39
Critères de rupture en-dehors des axes principaux	40
III-2-2 critères en déformation maximales	41
Critère dans les axes principaux	41
Critère en-dehors des axes principaux	42
III-2-3 critère mixte	42
III-2-4 critère Tsai-wu	42
III-3 comportement flexionnel	42
III-3-1 champ de déplacement	43
III-3-2 le déplacement adimensionnel	44
III-4- Rupture des matériaux composites stratifiés	44
III-4-1. Fissuration transverse	;44
III-4-2 Fissuration longitudinale	44
III-4-3. Rupture des fibres	44

Chapitre IV :formulation élément fini et programmation 46

IV- 1 introduction	47
IV-2 principe de la méthode des élément fini	48
IV--3 types des élément finis	48
IV-4 Modélisation par la méthode des éléments fini	48
IV-5 L'élément plaque	49
IV-5-1-Fonctions d'interpolation de l'élément de référence	49

IV-5-2 Fonctions d'interpolation de l'élément réel	49
IV-6 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis	49
IV-7- Validation d'élément fini dans l'analyse des plaque	50
IV-9- formulation de l'élément fini	51
IV-10-1 Validation d'élément	61
Chapitre V :etude paramétrique	68
V-1 introduction	69
V-2 --Comportement Membranaire	69
V-3-- Plaque plein composite stratifiée	69
V-4- Plaque trouée composite stratifiée	89
Coclusion générale	95
Références Bibliographiques	96

chapitre I.:introduction générale sur les matériaux

composites

I.-1 -introduction

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'une des avancées technologiques la plus prometteuse, de nos jours, dans le domaine des matériaux sont les "matériaux composites".

En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante, grande adaptabilité aux fonctions que requière une structure et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont vu une expansion extraordinaire. Par conséquent, leur utilisation prend, de jour en jour, de l'ampleur vis-à-vis des matériaux traditionnels, dans pratiquement tous les domaines industriels, en l'occurrence : l'aéronautique, l'aérospatial, les constructions automobiles et navales, génie civil, etc.

I.-2 -définition générale des composites

Par définition, selon la norme ASTM D3878 (American Standards of Technical Material), les composites sont des matériaux structuraux qui se composent de deux ou plusieurs constituants non miscibles combinés au niveau macroscopique. Le but de ce mélange est d'avoir un matériau dont les performances sont meilleures que celles de ces composants pris séparément. L'un des constituants est appelé "renfort" et celui qui l'enveloppe est appelé "matrice". La phase de renfort fournit la majorité de la résistance et de la rigidité du composite, elle peut être en forme de fibres, de particules ou d'écaille. La matrice représente, en général, la matière de liaison, qui soutient et protège la phase de renfort (Ounis 2015)

La définition générale des matériaux composites est : « un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion) et de nature différente, se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont les performances globales sont améliorées, vis-à-vis d'un besoin spécifique, par rapport à celles de ses constituants élémentaires ». Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées « renforts » et « matrice ». Chacun des deux constituants jouent un rôle particulier dans la tenue mécanique du matériau. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à recevoir toutes les sollicitations et répartir les efforts dans tout le matériau afin de protéger le renfort. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues, leur rôle est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts, et confère à la matrice des propriétés qu'elle ne possède pas seule. L'arrangement des fibres, leur orientation permet de renforcer les propriétés mécaniques de la structure [1].

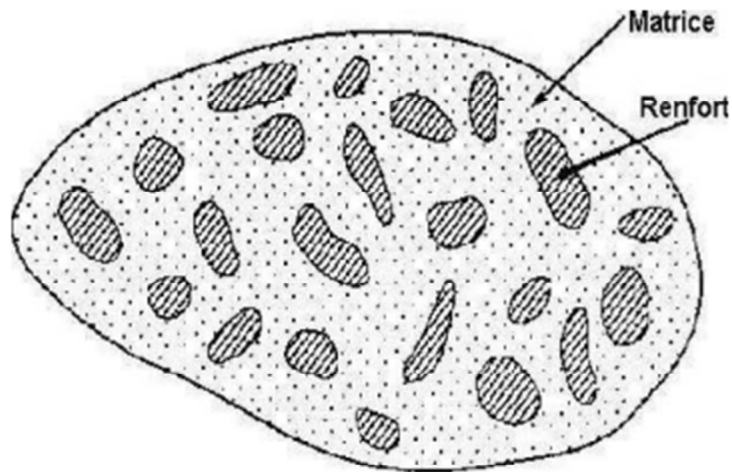


Figure I.1 : Schéma illustratif d'un matériau composite.

I.- -3-constituants des matériaux composites

Nous présentons les différents types des éléments constituant un matériau composite employés dans l'industrie. Pour un matériau composite plastique c'est l'association de deux constituants qui sont les renforts et les matrices

Le renfort se présente sous forme de fibres continues ou discontinues qui a dont le rôle est d'assurer la résistance mécanique du matériau composite. La matrice assure la protection chimique et la répartition de la charge mécanique appliquée à la structure. Ces deux éléments constituant principaux reçoivent des additifs ou charges qui sont des produits qui peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût (catalyseur, durcisseur etc...) [2].

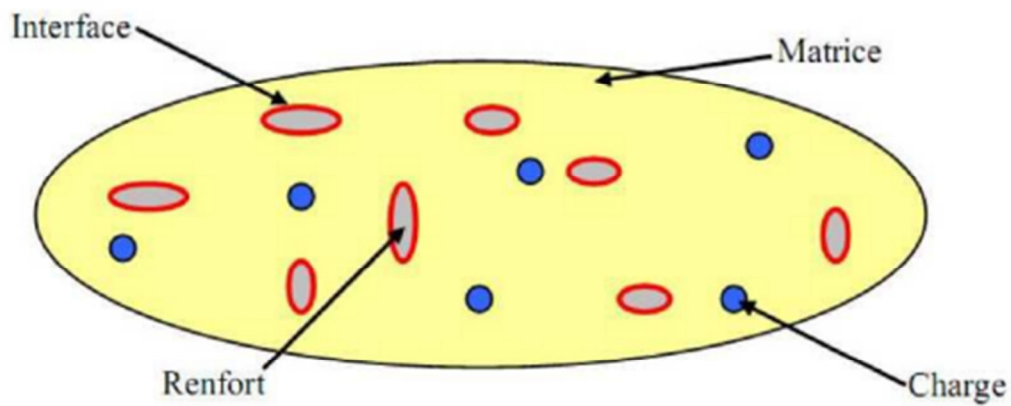


Figure I.2: matériaux composites. [02]

➤ **Matrices**

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, d'assurer une répartition spatiale homogène des renforts, transmettre aux renforts les efforts extérieurs et de les répartir, apporter la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit, figure (1.3)

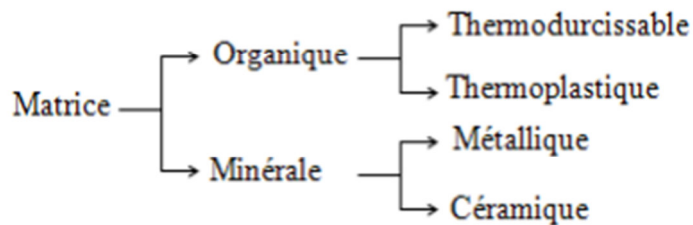


Figure I.3 classification des matrices

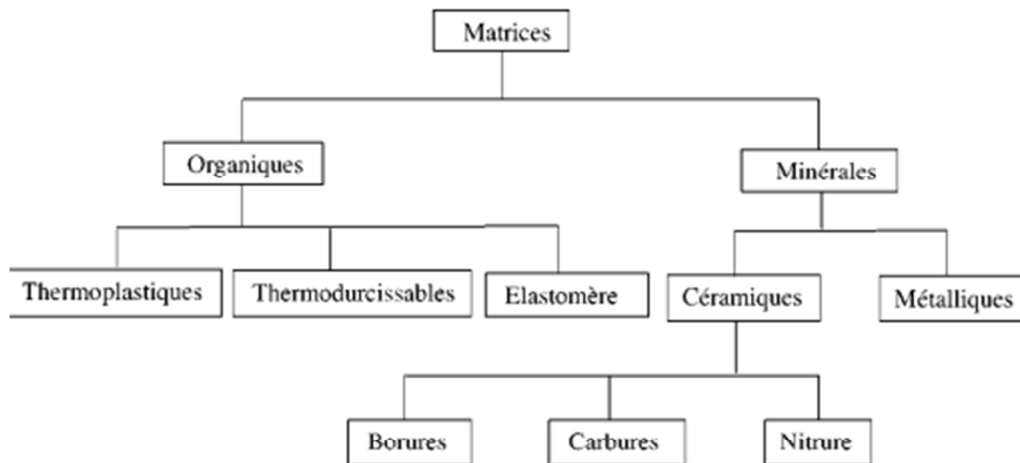


Figure I.4 : Différentes familles de matrices

- **Les résines thermodurcissables**

Les deux principales résines utilisées sont les polyesters (environ 70%) et les époxy (25%). D'autres familles comme les résines phénoliques, les polyuréthanes ou les polyimides sont également rencontrées. Ces matrices se présentent sous forme d'une résine initialement à l'état de liquide visqueux, composée de molécules longues et indépendantes. Ces molécules établissent alors des liaisons, et ces réactions sont déclenchées le plus souvent grâce à l'action conjointe d'un durcisseur et de la température.

Il se forme ainsi une structure solide tridimensionnelle. Cette réaction est irréversible

Les principaux avantages de ces résines sont leur facilité de mise en œuvre, leur réticulation rapide sans élimination de produits secondaires, leurs bonnes propriétés mécaniques et leur résistance chimique. En revanche, elles ont un retrait important et un mauvais comportement au feu (Thomas 2011).

- **Les résines thermoplastiques**

Ce sont des polymères qui se présentent sous forme solide (granulés, plaques...) et nécessitent une transformation à très haute température (Boudjema 2016). Les matrices thermoplastiques possèdent de faibles propriétés mécaniques. Leur renforcement (le plus souvent par des fibres courtes) confère une meilleure résistance mécanique, une bonne stabilité dimensionnelle, ainsi qu'un accroissement de la tenue en température (Hami 2018).

- **. Résine époxyde**

Le terme époxydes désigne une grande variété de pré-polymères comportant un ou plusieurs motifs époxydiques dont les principales applications concernent les matériaux composites (matrice époxyde avec des renforts en fibre de verre ou de carbone). [06]

- **. Résines thermostables**

Elles se distinguent essentiellement des autres résines par leurs performances thermiques. Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace. [08]

- **Renfort**

Les renforts sont tous produit qui permet d'améliorer les propriétés de la matrice (mécanique, thermique, chimique...) et assurer des meilleures propriétés mécaniques du matériau composite à élaborer

Les fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tridirectionnel ou plus). Les différents classements des renforts sont indiqués sur la figure 1.4 [2].

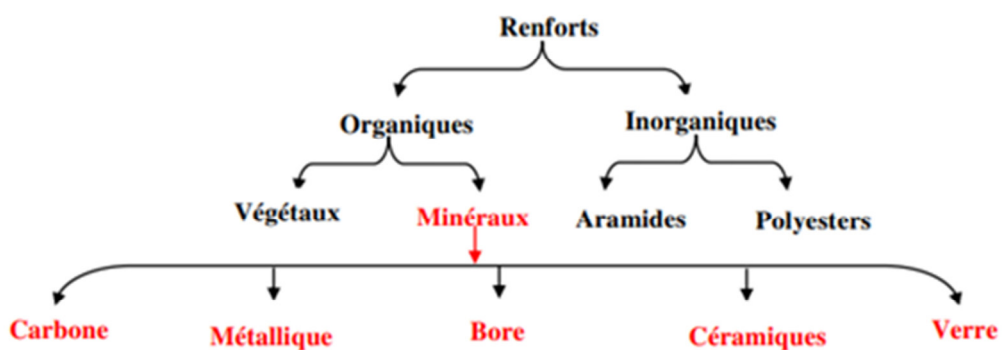


Figure I.5 : Différent types de renforts

a) Différent types de renforts

Les fibres longue

fibres longues noyées dans une matrice isotrope avec orientation établie; comportement macroscopique anisotrope

Les fibres courtes

fibres dispersées dans une matrice isotrope, généralement sans orientation préférentielle; comportement macroscopique isotrope

➤ **Les fibres**

➤ **Fibre de verre**

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix. C'est les renforts les plus utilisés actuellement dans la construction de structures composites. On distingue trois types de fibres de verre [1] :

Verre E : pour les composites à grande diffusion.

Verre S : pour les applications d'électricité.

Verre R : pour les composites à haute performance.

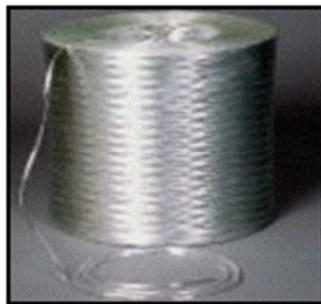


Figure I.6 : Bobine de fibre de verre

➤ **Fibre de carbone**

C'est la fibre la plus utilisées dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres

fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C.

fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.



Figure I.7 : Bobine de fibre carbone.

I.-4- Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation

L'orientation de la fibre est choisie de façon adaptable avec les directions d'efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu'elles résistent aux efforts de traction et de compression. Pour résister aussi à l'effet de cisaillement, on met deux fibres orthogonales de façon à ce que l'une d'elle supporte l'effet de compression ou traction et l'autre l'effet de cisaillement

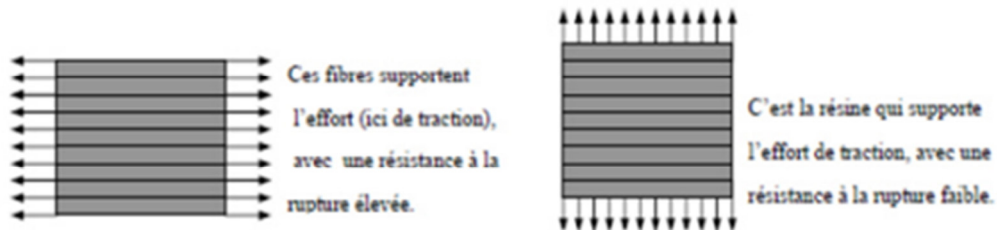


Figure I.8 orientation des fibres à 90° . Essai de traction-compression

I.-5- . Domaine d'utilisation des matériaux composites

- L'industrie aérospatiale.
- Le transport aérien, routier et ferroviaire.
- domaine militaire : Hélicoptère, Fusée, Avions ...etc.
- canalisation.
- Construction navales.
- Sports et loisirs. [4]

I.-6- Architecture des matériaux composites

Les matériaux composites existent sous divers aspects (Figure I.8), allant du simple empilement de couches primaires, on parle alors de composite multicouche, à des géométries plus complexes comme les structures en nid d'abeille (NIDA) ou les composites tissés.

Une réflexion approfondie sur les matériaux utilisés et le design de ces structures permet de leur induire des propriétés particulières afin de répondre à divers besoins dans des domaines variés (orthotrope mécanique, amortissement vibratoire, conduction thermique, isolation électrique) parfois inconciliables à partir de matériaux classiques (Wassereau 2016) .

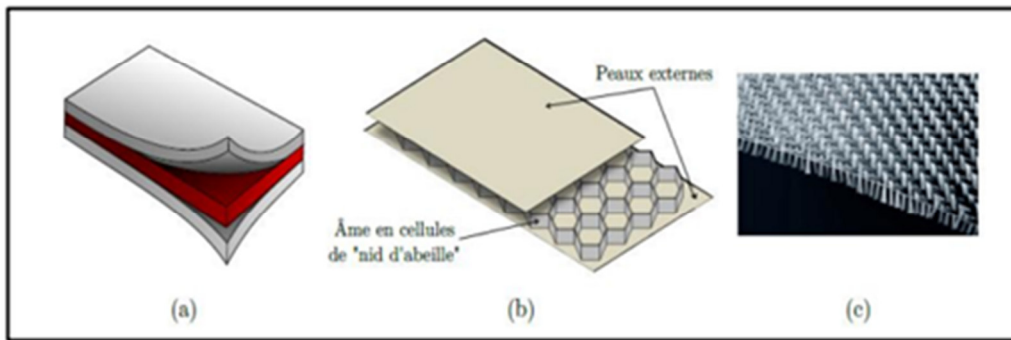


Figure I.9

Représentation de quelques matériaux composites (a) Schéma d'un composite che (b) Empilement d'un matériau composite à âme en nid d'abeille (NIDA)) Photographie d'un tissage en fibres de carbone (Wassereau 2016)

I.- 6-1 . Les stratifiés à base de tissus unidirectionnel

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié (Jao Jules 2001)

L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure (Bakhti 2017)

Les principaux inconvénients des stratifiés en matériaux composites renforcés par des fibres sont leurs coûts parfois prohibitifs (temps, coûts, étude et mise en œuvre), le délaminage et le décollement des fibres.

La délamination est causée par l'incompatibilité des propriétés du matériau entre les couches, ce qui produit des contraintes de cisaillement entre les couches « contraintes d'interfaces », en particulier aux bords d'un stratifié. Le décollement de la fibre est causé par l'incompatibilité des propriétés des matériaux entre la matrice et la fibre. De même, lors de la fabrication de stratifiés, des défauts de matériau tels que des vides inter laminaire, une délamination, une orientation incorrecte,

I. -6-2 Les sandwich.

Selon Laurent Gornet [2] les structures composites subissant des sollicitations de type flexion ou torsion sont généralement construites en matériaux sandwichs. Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites.

L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la figure 1.10

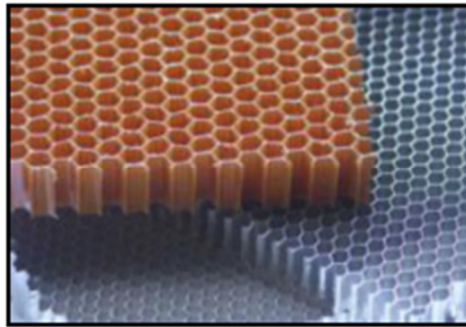


Figure I.10 :Nid d'abeilles

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et en torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan. Les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan. Les figures 1.9 et 1.10 présentent quelques types de sandwichs.

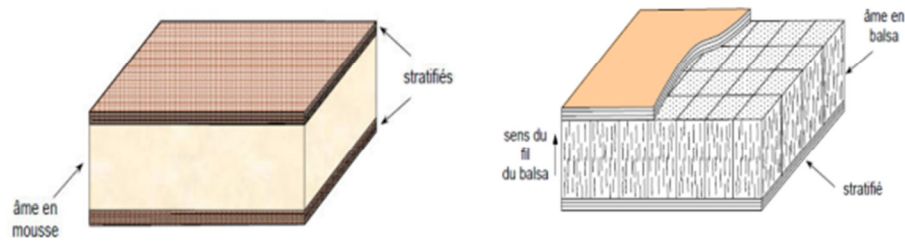


Figure 1.9 : Matériaux sandwichs à âmes pleines [1].

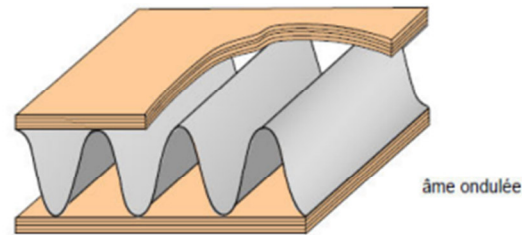


Figure 1.10 : Matériaux sandwichs à âmes creuses [1].

I.- 7- Mise en œuvre des matériaux composites.

Le but de cette partie est de connaître les principes des différents processus de mise en œuvre des matériaux composites. La plupart des techniques de mise en œuvre consistent à élaborer des pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort. Cette technique générale appelée la stratification, conduit à l'élaboration de stratifiés, cela nous amènera ensuite à nous intéresser à l'architecture des matériaux composites [1]. Il existe de nombreuses méthodes et variantes de fabrication des matériaux composites.

I.- 8- les avantages et les inconvénient des matériaux composites

I.- 8-1 avantage des matériaux

- ✓ Réduire la masse des produits, ce qui entraîne une économie de carburant. }
Meilleures caractéristiques mécaniques et hautes rigidités spécifiques (E/ρ)
résistances } spécifiques (σ/ρ).
- ✓ Faible vieillissement sous l'action de réaction chimique. }
- ✓ Insensibles aux produits chimiques comme les graisses, huiles, liquides }
hydrauliques, peintures, pétrole.
- ✓ Obtention de formes complexes (Réduction des coûts d'assemblages). }

I. -8-2 inconvénients des matériaux

- ✓ Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts
- ✓ . Une petite faille peut engendrer de grosses déformations
- ✓ . La détection de ces problèmes est difficile ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.
- ✓ La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.

I.-9 Classification selon l'utilité

I.-9 -1 les composites à grande diffusionGD

Les plus courants, Ils représentent actuellement les plus gros volumes d'emploi (représentent 95% des composites utilisés) avec un bon compromis performance/coût voisin du coût du matériau de base. En général, ce sont des plastiques armés ou des plastiques renforcés dont le taux volumique de renfort avoisine 30 %, l'anisotropie n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters avec des fibres de verre.

I I.-9-2 les composites à haute performances HP

Ils sont principalement utilisés dans l'aéronautique et sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues dont le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des matériaux conventionnels (ex. : métaux),

I.-10- . Classification des matériaux composites

La nature du matériau constituant la matrice permet de répertorier trois grandes classes de composites, considérées ici par ordre croissant de tenue en température : les composites (CMP), les composites (CMM) et les composites (CMC). Il est alors possible d'associer à ces trois types de matrice soit des renforts discontinus, dont toutes les dimensions sont très inférieures aux dimensions de la pièce, soit des renforts continus, dont au moins une dimension est du même ordre de grandeur qu'une dimension de la pièce.

Les matériaux utilisés comme renforts présentent de bonnes propriétés mécaniques intrinsèques (carbone, alumine, silice, bore, kevlar. acier, nitrure et carbure de silicium...). Parmi les renforts discontinus, on trouve des fibres courtes monocristallines d'une longueur comprise entre 20 et 100 micromètres et des particules (billes, plaquettes, éclats...) caractérisées par un rapport d'élancement inférieur à 5 et une taille qui peut varier du micromètre à quelques centaines de micromètres. Les renforts continus ou fibres longues ont quant à eux un diamètre qui varie selon leur nature entre quelques micromètres à plus d'une centaine de micromètres [2]. Selon l'application envisagée, l'assemblage de ces fibres longues peut être unidimensionnel (plis unidirectionnels). Bidimensionnel (plis tissés, mats à fibres coupées de quelques centimètres ou à fibres continues) ou tridimensionnel (tissus multidimensionnels)

La fabrication des composites (CMP) emploie deux types de matrices : les résines thermodurcissables qui représentent 75% des (CMP) actuels (époxyde, polyester, vinylester.

polyuréthane...), et les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide...) qui sont moins utilisées

Les matrices polymères renforcées par des fibres de verre, employées notamment dans les produits de grande diffusion, sont d'une grande importance industrielle. Les fibres de carbone et de kevlar sont utilisées dans une moindre mesure pour des applications hautes performances dans l'aéronautique et l'aérospatiale. D'autres types de renforts sont employés tels que des billes (verre, élastomère ...) et des charges (fibres broyées, écailles, poudres...). L'utilisation des (CMP) reste limitée au domaine de températures inférieures à 200°C

Pour des applications plus haute température, on fait appel aux composite (CMM) jusqu'à 600°C. Les métaux ou alliages métallique utilisés dans la fabrication des (CMM) sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé. Ainsi, l'aluminium le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utilisés

Les (CMM) présentent de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en température et aux chocs thermiques ainsi qu'une bonne résistance à l'usure et à l'abrasion. Toutes ces aptitudes sont mises à profit dans la fabrication de pièces de structure (carters, inserts...) et d'organes fonctionnels (bielles, soupapes...) travaillant à haute température Enfin, lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composites à matrice céramique. Dans ce type de comporte, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium assemblées par tissage multidimensionnel. Ce renfort poreux est infiltré par la matrice (carbone, silice, carbure de silicium) qui se trouve soit en phase liquide soit en phase gazeuse. La dernière étape d'élaboration consiste à densifier le composite par frittage sous haute pression à haute température. Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique (disques de frein, tuyères, volets, tuiles ablatives...) en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique [2]

I.- 11. Conclusion

La présente description nous permettra de donner une idée générale sur les matériaux composites.

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, Une bonne isolation électrique

*Chapitre II : comportement mécanique et hygrothermique des
plaques stratifiées*

II-1-introduction

Le comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysé par la théorie des plaques stratifiées, prenant en compte le cisaillement transverse qui est basé sur une évaluation des champs des déplacements qui considère qu'une normale au plan moyen d'un stratifié reste un segment de droite lors de la déformation. Cette déformée ne restant toutefois pas normale à la déformée du plan moyen.

La théorie des stratifiés avec cisaillement transverse et la théorie des plaques sandwichs sont les outils qui peuvent être utilisés usuellement pour analyser le comportement élastique des structures en matériaux composites : soit par une approche analytique ou par une analyse par éléments finis [16]

Une plaque ou une paroi mince, est le solide découpé dans un prisme ou un cylindre par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance mesurant l'épaisseur de la plaque est petite par rapport aux autres dimensions. Géométriquement, un tel corps est défini par son épaisseur et son contour trace du cylindre. [29]

Dans ce chapitre nous allons mentionner les différentes théories et approches qui concernent l'étude d'une plaque isotrope ou composite, pleine ou avec un trou rectangulaire, centré. Cette étude comprend les deux comportements, membranaire et flexionnel.

II-2-Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur (notée $h(x, y)$) petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur (figure II.1)). Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Elle est considérée un milieu continu ayant une dimension très petite par rapport aux deux autres [17].

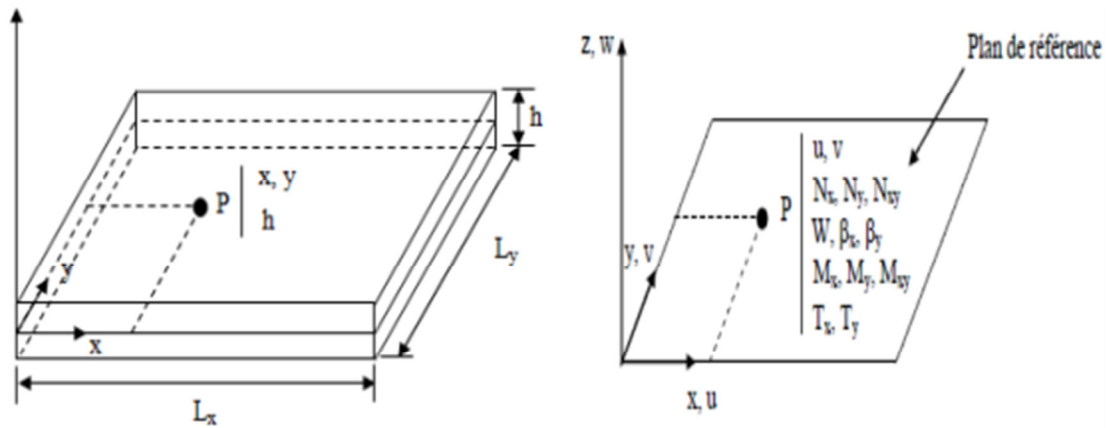


Figure II.1 Description d'une plaque.

II-3-- Equations constitutive de la monocouche

II-3-1 Caractéristiques mécaniques et modules d'élasticité

La détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules en fonction des modules d'élasticité de la matrice et des fibres (E_m , E_f), fraction volumique de la matrice et de fibres (V_m , V_f), les coefficients de Poisson (ν_m , ν_f), longueur des fibres, etc. La résolution de ce problème n'est pas simple et la solution n'est pas unique. Néanmoins, il existe une approche simplifiée du comportement

mécanique de la cellule élémentaire du matériau qui fournit des expressions pratiques des modules

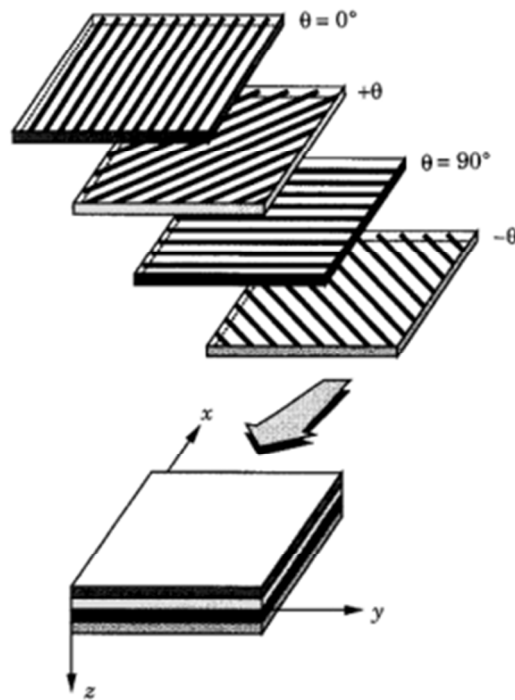


Figure 2.1 *Stratifié avec différentes orientations de fibres* [35]

II -3-2 module d'young longitudinal

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal (figure 2.2). L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme dans la fibre et dans la matrice. Cette hypothèse conduit à la formule suivante :

Le lien élastique linéaire implique

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m, \quad \sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f, \quad \sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l$$

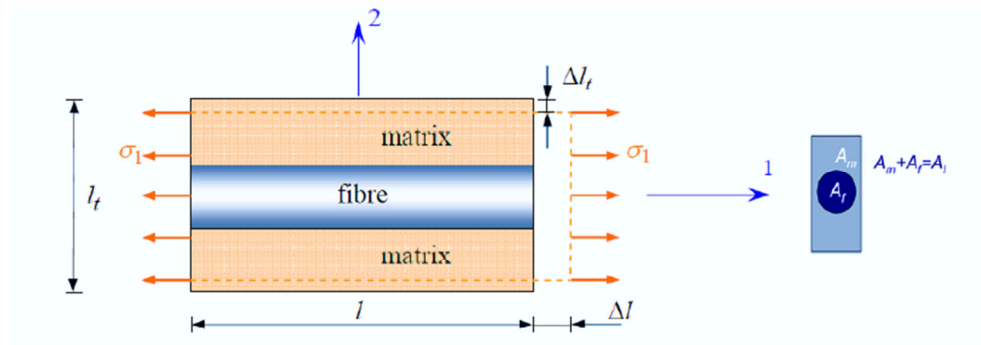


Figure II.2 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale.

L'hypothèse d'adhérence parfaite a comme conséquence que la déformation est la même partout (en particulier, les sections droites restent planes):

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (2.3)$$

Où l'indice (m) indique une quantité relative à la matrice, (f) à la fibre et (l) à la couche.

$$\sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l = E_1 \varepsilon_1^f = E_1 \varepsilon_1^m$$

L'équilibre impose la relation :

$$\begin{aligned} \sigma_1^l A_l &= \sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m = E_1^f \varepsilon_1^f A_f + E_1^m \varepsilon_1^m A_m \\ &= E_1^f \varepsilon_1^l A_f + E_1^m \varepsilon_1^l A_m = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \end{aligned}$$

La loi de comportement de l'unidirectionnelle s'écrit :

$$\sigma_1^l A_l = E_1 \varepsilon_1^l A_l$$

$$\text{Donc} \quad E_1 \varepsilon_1^l A_l = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \Rightarrow E_1 = \frac{E_1^f A_f + E_1^m A_m}{A_l}$$

avec $V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{A_f}{A_l}$ et $V_m = 1 - V_f = \frac{A_m}{A_l}$

Donc l'expression du module de Young longitudinal est :

$$E_1^l = E_1^f V_f + (1 - V_f) E_1^m$$

Relation très bien vérifiée dans la direction des fibres. Cette dernière est la célèbre *loi des mélanges*, qui donne la valeur homogénéisée du module d'Young en direction longitudinale (celle des fibres). E dépend linéairement de V_f , à savoir de la quantité de fibres présentes.

Le modèle utilisé pour trouver E est un modèle de type *parallèle*: matrice et fibres travaillent en parallèle, pour le champ de contraintes appliqué

II-3-3 module d'young transversal

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversale (figure II.3). Dans cet essai, on suppose que la contrainte transversale est la même dans la fibre et dans la matrice. Cette hypothèse conduit à la formule suivante :

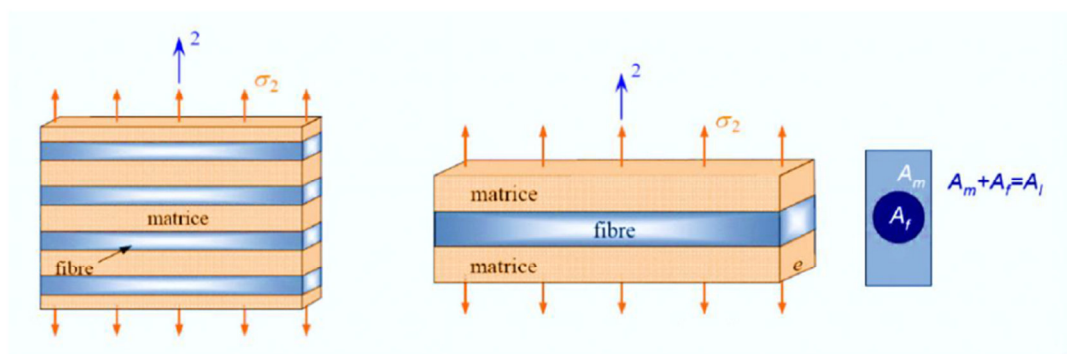


Figure II.3 : Schéma simplifié d'une traction transversale.

Comparé aux données expérimentales, le module obtenu par l'équation (2.2) n'est pas trop précis et il est généralement considéré comme une limite inférieure.

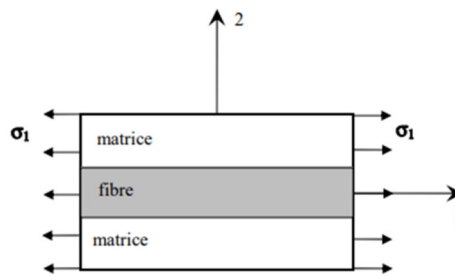


Figure 2.2 Essai de traction longitudinale

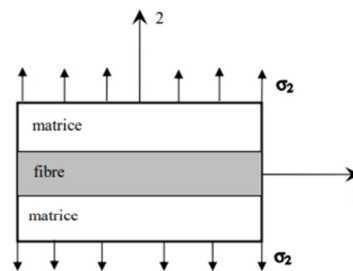


Figure 2.3 Essai de traction transversale

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que la contrainte est constante dans une section droite.

$$\sigma_2^l = \sigma_2^m = \sigma_2^f$$

La compatibilité de la déformation implique. L'expression du module de Young transversal est

$$\begin{aligned}
 V\varepsilon_2^l &= \varepsilon_2^f V_f + (1-V_f)\varepsilon_2^m \\
 \Rightarrow V \frac{\sigma_2^l}{E_2} &= V_f \frac{\sigma_2^f}{E_2^f} + (1-V_f) \frac{\sigma_2^m}{E_2^m} \\
 \text{Donc} \quad \frac{1}{E_2} &= \frac{V_f}{E_2^f} + \frac{(1-V_f)}{E_2^m}
 \end{aligned}$$

L'expression du module de Young transversal est

$$E_2 = \frac{E_2^f E_2^m}{V_f E_2^m + (1 - V_f) E_2^f} \quad (2.7)$$

II-3-4 module de cisaillement longitudinal

Le module de cisaillement longitudinal est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal (figure 2.4). Pour déterminer ce module, l'approche de la mécanique des matériaux considère que les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales. Cette hypothèse conduit à la formule suivante

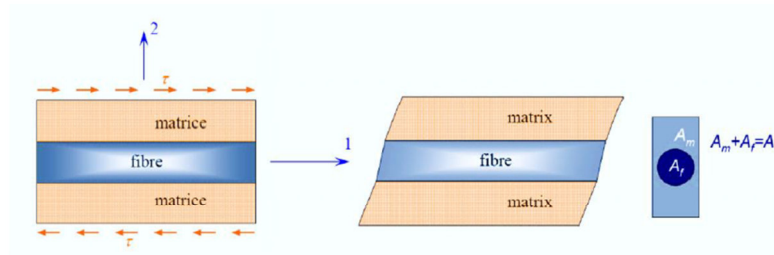


Figure II.4 : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal.

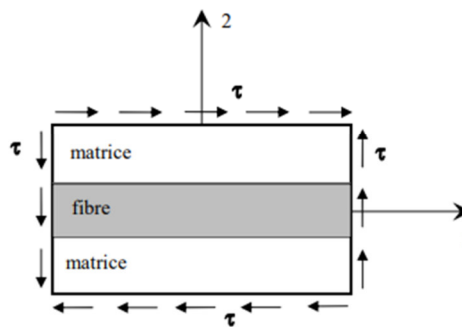


Figure 2.4 Essai de cisaillement longitudinal

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que ce soit :

$$\tau^l = \tau^m = \tau^f \quad (2.11)$$

Tandis que par le lien élastique on a :

$$\tau^m = G_m \varepsilon_6^m, \quad \tau^f = G_f \varepsilon_6^f, \quad \tau^l = G_{12} \varepsilon_6^l \quad (2.12)$$

II-3-5 coefficient de poisson longitudinal

Le coefficient de Poisson longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal. En utilisant l'approche du comportement mécanique du matériau, le coefficient de Poisson dans le plan est donné par la formule suivante :

La compatibilité, en moyenne, de la déformation à cisaillement prescrit que ce soit :

$$\begin{aligned} V \varepsilon_6^l &= \varepsilon_6^f V_f + (1-V_f) \varepsilon_6^m & \Rightarrow \frac{\tau^l}{G_{12}} &= \frac{\tau^f}{G_f} V_f + \frac{\tau^m}{G_m} (1-V_f) \\ \Rightarrow G_{12} &= \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1-V_f) G_f} \end{aligned} \quad (2.13)$$

II-4- différents types des matériaux

II-4-1 matériaux anisotropes

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes (relations 1.2 et 1.3). Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Lorsque le matériau est quelconque et ne présente pas de symétrie élastique, il est dit anisotrope

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries comme les matériaux composites à fibres ou tissus.

La *loi de Hooke* peut être exprimée par:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et} & \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et} & \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{cases}$$

Application du théorème des travaux virtuels :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \Leftrightarrow C_{ijkl} = C_{klij}$$

:

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

La forme inverse de l'équation (2.19), est écrite sur la forme:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

II – 4 – 2 matériaux orthotropes

On appelle matériau orthotrope un matériau élastique homogène présentant en tout point deux symétries du comportement mécanique, chacune par rapport à un plan, les deux plans étant orthogonaux

Le nombre de constants élastiques indépendants est réduit à 9. La loi de comportement exprimée dans les axes dits « d'orthotropie », définis au moyen du trièdre construit sur les deux plans orthogonaux et leur intersection, peut s'écrire sous la forme suivante [15]:

Donc, Le nombre des coefficients indépendants est réduit à 9.

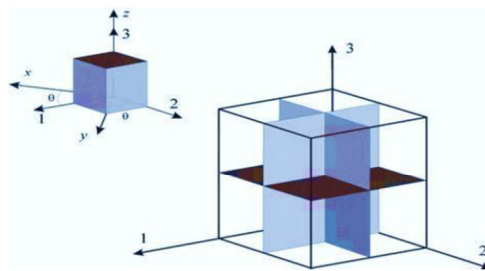


Figure II.5 : Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.

Donc, Le nombre des coefficients indépendants est réduit à 9.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{cases} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{cases} \quad (2.22)$$

La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante:

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} \Rightarrow \frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} ; \frac{v_{13}}{E_1} = \frac{v_{31}}{E_3} ; \frac{v_{23}}{E_2} = \frac{v_{32}}{E_3}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{12}}{E_1} & -\frac{v_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{v_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{13}}{E_1} & -\frac{v_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{cases} \quad (2.23)$$

Les composantes de la matrice de rigidité du matériau, sont obtenues par inversion de la matrice de souplesse

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - v_{23}v_{32}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{22} &= \frac{1 - v_{13}v_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - v_{12}v_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12} \\ C_{12} &= \frac{v_{12} - v_{23}v_{32}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{13} &= \frac{v_{13} - v_{12}v_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{23} &= \frac{v_{23} - v_{21}v_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ \Delta &= \frac{1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{aligned}$$

II-4-3 matériaux transversalement isotropes

On appelle matériau isotrope transverse un matériau linéairement élastique, homogène, pour lequel tout plan contenant une direction privilégiée est un plan de symétrie mécanique. La loi de comportement ne fait intervenir que cinq coefficients élastiques indépendants. La figure II-6

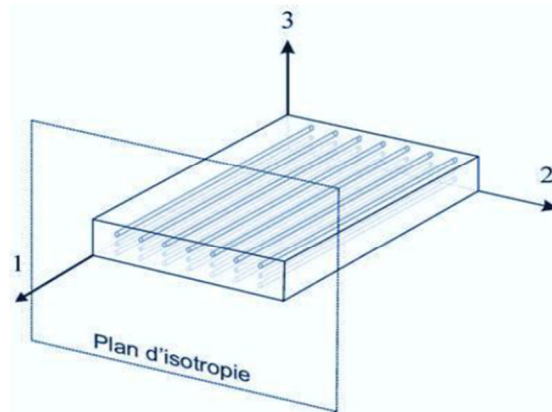


Figure II.6 : Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope.

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc:

$$C_{22} = C_{33} \quad C_{12} = C_{13} \quad C_{55} = C_{66} \quad C_{44} = \frac{C_{22} - C_{33}}{2}$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité (E_1 , E_2 , ν_{12} , et ν_{23} , G_{12}).

II-4-4 matériaux isotropes

Un matériau pour lequel, en un point quelconque, les composantes du tenseur C_{ijkl} sont identiques dans toutes les directions est un matériau isotrope. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, un tel matériau est fonction uniquement de deux paramètres caractéristiques

indépendants. On peut démontrer qu'un matériau isotrope correspond en fait à un matériau orthotrope possédant de plus une symétrie de révolution autour de chacun de ces axes d'orthotropie. [25]

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2. Ainsi la loi de comportement prend la forme suivante :

$$E_1=E_2=E_3=E ; \nu_{12}=\nu_{23}=\nu_{13}=\nu \text{ et } G_{12}=G_{31}=G_{23}=G$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

II -4-5-.Relation contrainte-déformation plane

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de *contrainte plane*, La relation contrainte déformation peut être donnée par [3] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ \text{sym} & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}$$

Les coefficients Q_{ij} sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte plane :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (\text{II.27})$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité (E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12}), qui sont déjà déterminés à partir des essais de laboratoire tel que les essais de traction uniaxiale ou de cisaillement pur

II -4-6 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres

Selon Berthelot [3], les stratifiés sont élaborés par l'empilement de couche successive dont la direction des fibres est variable d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre *un système d'axe de référence* pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence

Un pli composite unidirectionnel est classiquement assimilé à un matériau orthotrope

dont les axes principaux d'orthotrope sont définis à partir du repère local $(0, x_1, x_2, x_3)$ $1, 2, 3 = (0, 1, 2, 3)$. En règle générale, l'axe (x_1) est contenu dans le plan du pli et parallèle aux fibres. L'axe (x_2) est lui aussi contenu dans le plan du pli mais perpendiculaire à la fibre. Enfin, l'axe (x_3) est perpendiculaire au plan du pli (voir figure II.7). Il est question de caractériser les propriétés élastiques de la couche en les exprimant dans le système d'axes de référence (x, y, z) du stratifié, la direction des fibres fait un angle $(\cdot \cdot \cdot)$ avec la direction x [2].

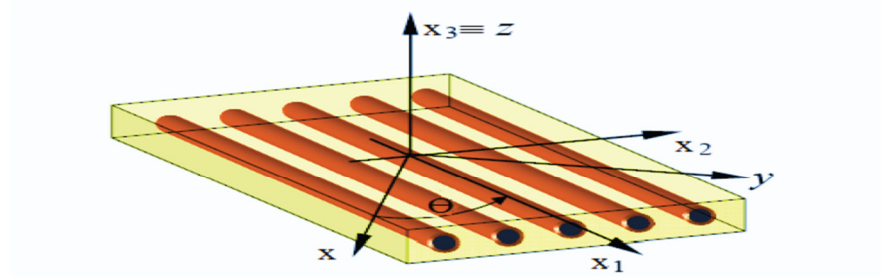


Fig. II.7 : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [3]

Les matrices d'élasticité C et de souplesse S dans le système de référence sont obtenues en appliquant aux matrices d'élasticité et de souplesse C et S les relations de **changement de base** suivantes :

$$[\bar{C}] = [T]^{-1} [C] [T] \quad (II.28)$$

$$\text{Et} \quad [\bar{S}] = [T]^{-1} [S] [T] \quad (II.29)$$

Avec T est la matrice de changement de base, donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

Avec $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$

$$\text{Et} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.31)$$

De même pour les déformations, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (II.32)$$

Nous pouvons également montrer que les contraintes dans le repère (x, y, z) sont définies en fonction des déformations par :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = [\bar{Q}] \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Il faut toutefois noter que \bar{Q}_{16} et \bar{Q}_{26} ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. Ils impliquent un couplage entre les contraintes normales et les déformations en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales [2].

II-4 Théorie classique Love-Kirchhoff

Le modèle classique Love-Kirchhoff se base sur l'hypothèse que la section transverse reste plane et perpendiculaire à la section moyenne après avoir été déformée fig. (I.9). Cela

revient à dire que le cisaillement transverse est négligé. Le champ de déplacement d'une plaque de Love-Kirchhoff s'écrit :

$$U(x,y,z)=U_0(x,y)-z\frac{\delta w_0}{\delta x}$$

$$V(x,y,z)=V_0(x,y)-z\frac{\delta w_0}{\delta y}$$

$$W(x,y,z)=W_0(x,y)$$

Où :

x,y,z : les directions dans le plan de la plaque

u_0, v_0, w_0 : les composantes des déplacements dans le plan moyen.

$\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$: les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les deux directions.

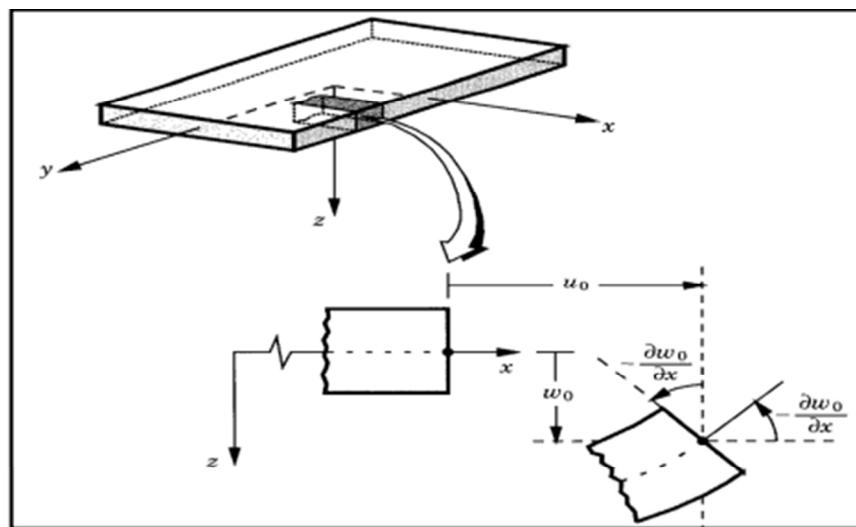


Figure. I.10 Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [14].

II-5-1 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

Pour introduire le cisaillement transverse, on fait l'hypothèse cinématique [15] que la section reste plane mais n'est plus normale à la section moyenne dans la configuration déformée (Fig. I.10).

Les champs de déplacements de la plaque de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y)$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \quad (I.2)$$

$$W(x, y, z) = w_0(x, y)$$

φ_x et φ_y sont les rotations de la normale autour des axes (x, y) , respectivement.

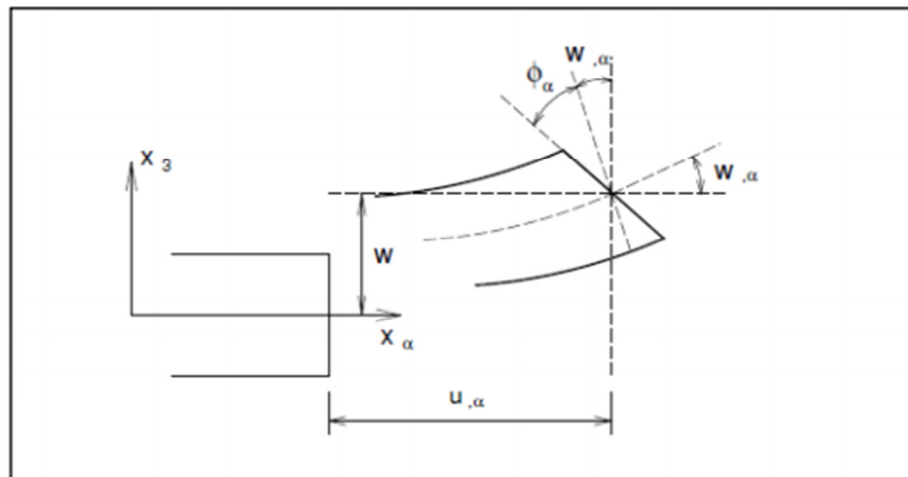


Figure. I.11 Cinématique de Reissner-Mindlin [14].

II-5-2 . Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur

Plusieurs auteurs ont proposé des théories plus élaborées pour franchir les limites des théories CLT et FSDT, parmi lesquelles on a la théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur HSDT. Celle-ci adopte une variation cubique pour le champ des déplacements au long de l'épaisseur du stratifié. Dans cette théorie, il n'est pas nécessaire d'introduire les facteurs de correction de cisaillement, car la distribution des déformations de CT a la forme parabolique le long de l'épaisseur et qui est similaire à la condition réelle prévue par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Le champ de déplacement considéré est :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^3 \Psi_x(x, y)$$

$$V(x,y,z)=v_0(x,y)+z\varphi(x,y)+\frac{z^2}{2}\Psi(x,y) \quad (I.3)$$

$$W(x,y,z)=w_0(x,y)+z\varphi_z(x,y)$$

Où (Ψ_x, Ψ_y) sont des termes de second ordre.

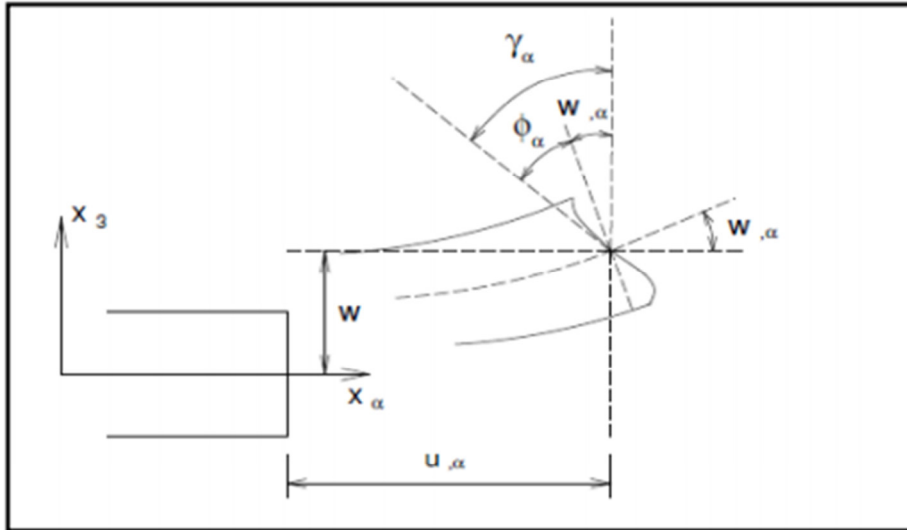


Figure I.12 Cinématique d'ordre supérieur [14].

II-6- Théories de déformations des plaques

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de KirchhoffLove). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées

en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D)

II-6-1 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT)

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire (Rayleigh 1945). En 1877, Rayleigh a affirmé qu'il est important d'inclure les inerties de rotation dans toute analyse vibratoire des systèmes. Quarante ans plus tard, les travaux de (Timoshenko 1921, 1922) montrent que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transverse affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonance calculées, en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système. Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement transverse est proposée par (Reissner en 1945) dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par (Uflyand en 1948). C'est cependant l'article de (Mindlin 1951), publié trois ans plus tard qui fera date. Vers 1970, (Whitney 1969), (Whitney et Sun 1973), (Pagano 1970) et (Srinivas et Rao 1970) ont montré, grâce à leurs travaux respectifs, que les effets du cisaillement sont plus importants pour les plaques stratifiées que pour les plaques isotropes.

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformation.

II-6-2-Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT)

Pour éviter l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par (Reddy 1984), (Reddy et Phan 1985), (Reddy 1999,2000), (Iyengar, Chadrashekhara et al. 1974)], (Iyengar et Pandya 1982), (Kuznetsov et Kartashov 1981), (Vlasov 1957), (Krishna Murty 1977,1986,1987), (Krishna Murty et Vellaichamy 1987)].

Elles sont basées sur le développement des déplacements en série de puissance à travers l'épaisseur (selon Reddy 1990, Mallikarjuna et Kant 1993). Les hypothèses qui sont à la base du développement de ces théories sont :

- ✓ Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque,
- ✓ Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- ✓ La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable,
- ✓ La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable

La plupart des théories d'ordre supérieur (HSDPT) sont basées sur les approches de Reissner, de Henchy-Mindlin et d'Ambartsumyan. Parmi ces théories, nous pouvons citer celles de: (Levinson 1980), (Reddy 1984), (Iyengar, Chadrashekhara et al. 1974), (Iyengar et Pandya 1982)], (Kuznetsov et Kartashov 1981), (Vlasov 1957), (Krishna Murty 1977, 1986,1987), (Krishna Murty et Vellaichamy 1987), (Bhimaraddi et Stevens 1984), (Kant et Pandya 1988), (Librescu 1967), (Ren 1986), (Touratier 1988). Les théories de (Whitney et Sun 1973), (Reddy 1984), (Kant 1982), (Karama, Afaq et al. 2003), (Karama, Harb et al. 1998), (Lo, Christensen et al. 1977), (Lo, Christensen et al. 1977), (Nelson et Lorch 1974), (Pagano et Soni 1983), (Prokopov 1965),

II-7- . Le comportement mécanique du pli UD

Pour étudier le comportement d'un stratifié constitué de plusieurs plis d'orientations différentes, il est nécessaire de connaître le comportement de chaque pli qui le compose, et ce dans des directions autres que les directions d'orthotropie du pli, figure (2.6) [15]

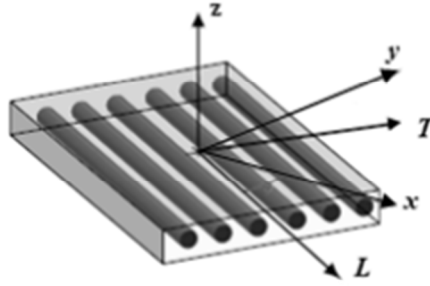


Figure 2.6. Axes principaux et de référence du pli (UD).

II-7-1. Le comportement mécanique dans les directions d'orthotrope

Pour un pli UD on utilise le comportement isotrope transverse, limité au comportement plan dans le plan (L,T).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{El} & -\frac{\theta_{tl}}{Et} & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{El} & \frac{1}{Et} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta l \\ \delta t \\ \tau_{lt} \end{pmatrix}$$

II-7-2 . Le comportement mécanique dans une direction quelconque

La relation de comportement mécanique peut ainsi être exprimée sous forme technique dans les axes (x, y) faisant l'angle (θ) avec les axes (L, T) (équation 2.77).

On y a fait apparaître les modules élastiques et coefficients de poisson relatif à ces direction

*Chapitre III:étude théorique sur les
différents critères d'endommagement*

-III 1- introduction

Dans les différents domaines de technologie de pointe, les matériaux composites ont de nombreuses applications en raison d'un rapport résistance/poids très élevé. Les plaques stratifiées à bases des fibres longues de verre et à matrice époxyde ont été largement utilisés au cours des 30 dernières années. Même s'ils présentent des propriétés mécaniques intéressantes, ils sont aussi caractérisés par des inconvénients indéniables tels que la forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) qui constituent des maillons faibles au sein de la structure.

Dans une plaque composite, et pour différentes raisons pratiques, la présence d'un trou conduit à un affaiblissement de la structure en raison de sur-contrainte locale appelée concentrations de contrainte.

Jian (1998) [27] a défini ce phénomène comme une augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Il apparaît dans une discontinuité de la pièce ou d'une structure avec la présence d'une entaille après l'usinage par exemple. La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage des fissures de fatigue mais peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile

III-2-les critères de rupture des matériaux composites

L'étude de la résistance à la rupture des matériaux composites est d'une complexité bien plus grande que l'analyse des propriétés d'élasticité ou de viscoélasticité. En effet, lors d'un chargement mécanique ou thermique, des microfissures apparaissent dans la matrice, des fibres se rompent (rupture fragile ou ductile), des décohésions se créent aux interfaces, des plastifications apparaissent sans entraîner la ruine de la pièce.

Les processus de rupture des composites sont donc d'une grande diversité et ne peuvent être décrits que si l'on connaît [7,36]:

- Le critère de résistance de chaque phase.
- L'état des contraintes et des déformations dans le matériau.
- Les phénomènes de propagation de fissure dans la microstructure.
- La nature de l'interface entre la matrice et le renfort.

L'approche du comportement d'un milieu par un critère stipule que ce milieu conserve sa propriété tant que les grandeurs motrices ne dépassent pas des valeurs ultimes. Un critère de résistance est caractérisé par une fonction scalaire du tenseur des contraintes : $f(\sigma)$. Il n'y a pas rupture du matériau tant que les contraintes au sein de ce matériau ne dépassent pas les contraintes ultimes. Un critère de rupture est donc une condition de type $f(\sigma) \leq 1$

$$f(\sigma) \geq 1 \rightarrow \text{rupture}$$

$$f(\sigma) < 1 \rightarrow \text{pas de rupture}$$

Lorsque $f(\sigma) = 1$, la limite à la rupture est atteinte, d'où le nom de « surface limite » ou « enveloppe de rupture ». Cette approche de la rupture ne tient pas compte des effets évolutifs d'endommagement, Figure (3.1).

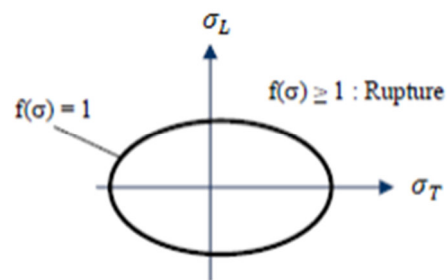


Figure (3.1). critère de rupture

L'application d'un critère de rupture nécessite la connaissance des contraintes ultimes, paramètres qui peuvent être déterminés uniquement par voie expérimentale. Dans le cas des composites stratifiés à fibres longues, anisotropes par leur nature, les essais élémentaires à réaliser sont :

- Traction dans le sens long pour déterminer la résistance à la rupture en traction sens fibres.
- Compression dans le sens long pour déterminer la résistance à la rupture en compression dans le sens des fibres
- . - Traction sens travers pour déterminer la résistance à la rupture en traction sens travers.
- Compression dans le sens travers pour déterminer la résistance à la rupture en compression dans le sens travers.
- Cisaillement de la matrice pour déterminer la résistance à la rupture en cisaillement. Ces essais unis axiaux permettent de formuler des critères de rupture pour prédire la rupture du pli élémentaire

III -2-1 critères en contraintes maximales

Critères dans les axes principaux

Les critères en contraintes maximales font intervenir:

X_t, X_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression.

Y_t, Y_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression.

SLT: la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche

. Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement

Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes dans des axes principaux, figure (3.7), les critères en contrainte maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes aux quelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante. Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme [14]:

$$-X_c < \sigma_L < X_t \quad (3.2)$$

$$-Y_c < \sigma_T < Y_t \quad (3.3)$$

$$-S_l < \tau_{LT} < S_{LT} \quad (3.4)$$

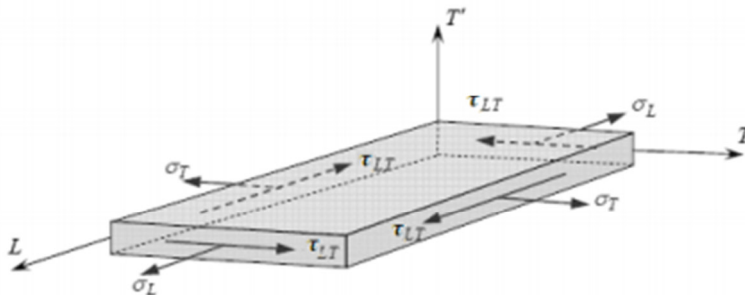


Figure (3.2) contraintes dans les axes principaux d'une couche

Critères de rupture en-dehors des axes principaux

Dans le cas où l'état de contraintes est exprimé dans des axes de référence (x,y,z), figure(3.8), il est nécessaire de se ramener aux axes principaux par une rotation d'angle (θ). Les contraintes exprimées dans les axes principaux s'écrivent [14]:

$$\sigma_L = \sigma_{xx} (\cos \theta)^2 + \sigma_{yy} (\sin \theta)^2 + 2\sigma_x \sin \theta \cos \theta \quad (3.5)$$

$$\sigma_T = \sigma_{xx} (\sin \theta)^2 + \sigma_{yy} (\cos \theta)^2 - 2\sigma_x \sin \theta \cos \theta \quad (3.6)$$

$$\tau_{LT} = \sigma_{xy} \sin 2\theta + \sigma_x \cos 2\theta - \sigma_y \sin 2\theta \quad (3.7)$$

Les critères (3.2), (3.3) et (3.4) en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$-XC < \sigma_{xx} (\cos \theta)^2 + \sigma_{yy} (\sin \theta)^2 + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < Xt \quad (3.8)$$

$$-YC < \sigma_{xx} (\sin \theta)^2 + \sigma_{yy} (\cos \theta)^2 - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < Yt \quad (3.9)$$

$$-SL < \sigma_{yy} - \sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos \theta)^2 - \sigma_x (\sin \theta)^2 < SL \quad (3.10)$$

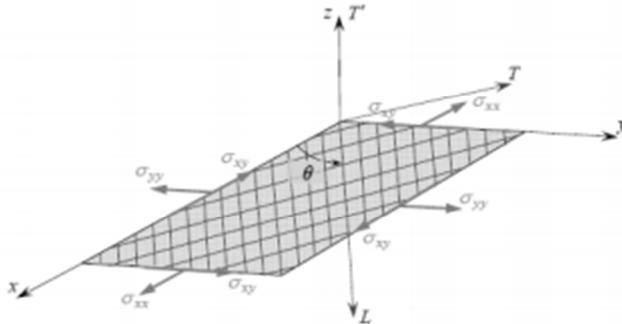


Figure (3.3) : contraintes en -dehors des axes principaux d'une couche

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes principaux, les relations des contraintes (3.5), (3.6) et (3.7) se réduisent par:

$$\sigma_L = \sigma_x (\cos \theta)^2 \quad (3.11)$$

$$\sigma_T = \sigma_x (\sin \theta)^2 \quad (3.12)$$

$$\tau_{lt} = -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta \quad (3.13)$$

III-2-2 critères en déformation maximales

Critère dans les axes principaux

Critère peu utilisé car en bureau d'études les concepteurs raisonnent plutôt en contraintes (ou comment sont transmis les efforts). Il est utilisé couplé avec le critère de contrainte maximale.

Les critères en déformation maximale sont transposés des critères en contraintes maximales, les déformations étant bornées, au lieu des contraintes. Les critères en déformations principales font intervenir:

$X_{\epsilon t}$ ($X_{\epsilon c}$): la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe longitudinal.

$Y_{\epsilon t}$ ($Y_{\epsilon c}$): la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe transversal.

SL_{ϵ} : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche (pli).

La résistance mécanique est alors considérée comme étant atteinte, lorsque l'une des déformations principales atteint la déformation à la rupture correspondante. Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme [14]:

$$-X\varepsilon < \varepsilon_L < X\varepsilon \quad (3.14)$$

$$-Y\varepsilon < \varepsilon_T < Y\varepsilon \quad (3.15)$$

$$-SL < \gamma_L < SL \quad (3.16)$$

Critère en-dehors des axes principaux

Dans le cas d'une traction ou compression en-dehors des axes principaux, les déformations principales sont [14]:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E_l} ((\cos\theta)^2 - \nu_l t (\sin\theta)^2) \sigma_{xx} \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_T = \frac{1}{E_t} ((\sin\theta)^2 - \nu_T (\cos\theta)^2) \sigma_{xx} \quad (3.18)$$

$$\gamma_L = \frac{1}{G_{lt}} \sin\theta \cos\theta \sigma_{xx} \quad (3.19)$$

III-2-3 critère mixte

Il s'agit d'un couplage entre les deux critères précédents : déformation maximale appliquée dans la direction des fibres, et contraintes maximale appliquée dans la direction transverse et en cisaillement. Il ne distingue pas les différents modes de rupture de l'unidirectionnelle

III-2-4 critère Tsai-wu

Ce critère, tenant compte de diverses inadéquations du critère précédent de Hill-Tsai, postule une surface de rupture dans l'espace des contraintes de la forme [40]:

$$F_j \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1..6 \quad (3.35)$$

Cette surface est compliquée dans le cas général, cette théorie se ramène, dans le cas d'un matériau orthotrope sous chargement plan :

$$F_1 \sigma_L + F_2 \sigma_T + F_6 \tau_L + F_{11} \sigma_L^2 + F_{22} \sigma_T^2 + F_6 \tau_L^2 + 2F_{12} \sigma_L \sigma_T = 1 \quad (3.36)$$

Les paramètres F_i et F_{ij} peuvent être exprimés à l'aide des contraintes à la rupture, mesurées dans divers essais. Dans le cas de la compression, il faut toute fois tenir compte des phénomènes d'instabilité, et les modes de rupture associés sont nombreux et complexes : flambage structural du composite, cisaillement des fibres en compression, fissuration de la matrice, suivie de l'instabilité des fibres, micro flambage des fibres et délaminage d'une partie du composite, entraînant la ruine de l'ensemble.

III-3 comportement flexionnel

En 1828 Poisson et Cauchy ont étudié le problème des plaques en supposant que toutes les composantes qui peuvent être déduites (forces, déplacement, ...) sont exprimées en fonction des puissances de la distance déterminée à partir de la surface moyenne. Les

équations différentielles sont alors formulées en fonction du déplacement transversal. Et pour tenir compte des conditions aux limites Poisson a égalisé la résultante des forces et couples appliqués au bord aux forces et couples déduits des déformations. Mais par la suite, en 1850, KIRCHHOFF critiqua les conditions aux limites de Poisson et montra qu'elles sont nombreuses et qu'en général elles ne sont pas vérifiées. Sa théorie (appelée actuellement la théorie de Kirchhoff) est relative aux plaques minces (le rapport de la plus petite dimension de la plaque sur l'épaisseur est supérieur ou égal à 20) qui revient à ne pas prendre en compte le cisaillement transverse et reposait sur deux hypothèses fondamentales : [30]

- a) Les filaments linéaires de la plaque qui, initialement sont normaux à la surface moyenne restent droits et normaux à cette surface après déformation (figure 3.4).
- b) La longueur de la surface moyenne reste constante avant et après déformation.

Ces deux hypothèses l'ont conduit à exprimer l'énergie potentielle d'une plaque fléchie en fonction des courbures produites dans la surface moyenne. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites ont été ensuite déduites en utilisant le principe des travaux virtuels

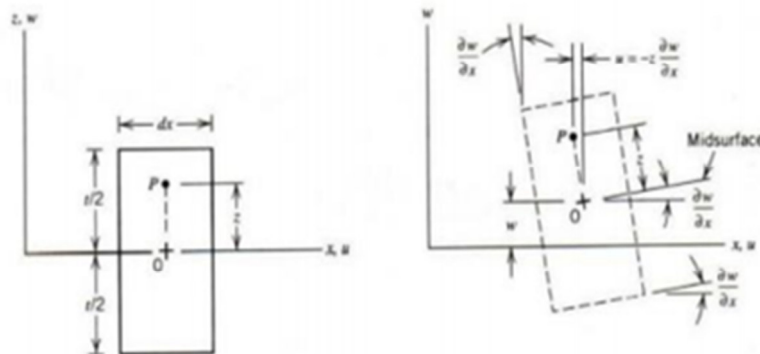


Figure (3.4) :vue de déflexion de la surface neutre de plaque de kirchhoff

III-3-1 champ de déplacement

Les déplacements peuvent être exprimés en fonction de w_0 en posant que :

$$U(x,y,z) = U_0(x,y) - z \frac{\delta w_0}{\delta x}$$

$$V(x,y,z)=V_0(x,y)-z\frac{\delta w}{\delta y} \quad (2.36)$$

$$W(x,y,z)=W_0(x,y)$$

III-3-2 le déplacement adimensionnel \bar{W}

La solution analytique de déplacement adimensionnel est donnée par la formule :

$$\bar{W}=w\left(\frac{100Eh^3}{qa^4}\right) \quad (2.37)$$

III-4- Rupture des matériaux composites stratifiés

L'évolution des dégradations dans les stratifiés composites est un phénomène complexe qui résulte de différents modes d'endommagements souvent couplés, comme la fissuration matricielle, le délaminage entre les couches, la rupture des fibres, etc...

Dans un stratifié à fibres longues, sous l'influence de sollicitations monotones ou cycliques, mécaniques ou thermiques, la « fissuration transverse » est en général le premier endommagement observé dans la matrice du pli le plus désorienté par rapport à l'axe de sollicitation. Des fissures transverses peuvent apparaître très tôt dans la durée de vie de la structure et elles peuvent constituer des zones d'amorçage pour d'autres mécanismes d'endommagement plus dangereux. La connaissance de la fissuration transverse est donc un préalable indispensable aux études ayant pour but d'assurer l'intégrité de la structure.

Les principaux modes d'endommagement, dans un stratifié à fibres longues, peuvent être classés en quatre catégories [15,16, 22] :

III-4-1. Fissuration transverse

Il s'agit de fissures qui traversent toute l'épaisseur des couches les plus désorientées par rapport à l'axe de sollicitation. Des micro-défauts au sein du matériau (comme des vides, des fibres cassées, le décollement fibre/matrice ou des microfissures de la matrice) peuvent être à l'origine de ces fissures amorcées par une forte concentration de contrainte locale. Ces fissures sont assez rectilignes et généralement perpendiculaires aux interfaces entre les couches adjacentes, figure (3.1-a).

III-4-2 Fissuration longitudinale

Il s'agit de fissures qui sont analogues aux précédentes, apparaissent toujours dans la matrice et sont perpendiculaires aux interfaces des couches, mais qui traversent toute l'épaisseur des couches orientées à 0° par rapport à l'axe de sollicitation, figure (3.1-b).

III-4-3. Rupture des fibres

C'est un dernier mécanisme qui va généralement conduire à la rupture finale du matériau, figure (3.1-c).

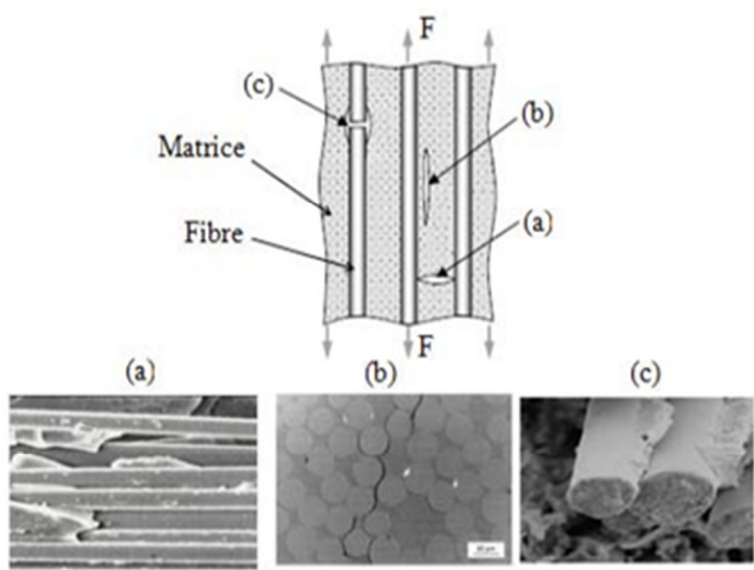


Figure (3.5) Modes d'endommagements dans les stratifiés

Chapitre IV

Formulation élément fini et programmation

IV- Introduction

Si la structure présente un comportement trop complexe ou un système continu défini par un nombre infini de paramètres, il devient très difficile d'analyser ou de trouver la solution analytiquement. Cependant, la méthode des éléments finis pousse la possibilité de trouver la solution la plus parfaite possible, en remplaçant le système continu par un système discret, caractérisé par un nombre fini de paramètres [5].

Alors la MEF base sur une idée simple: subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de formes géométriques simples (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds [18

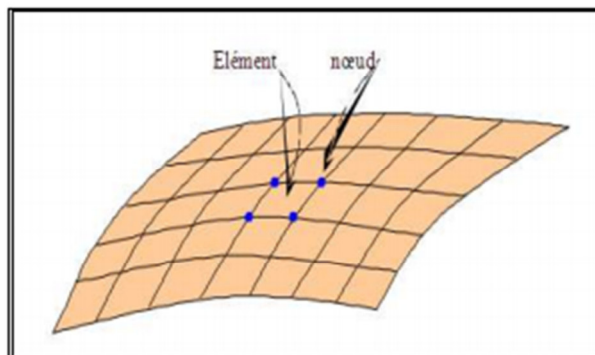


Fig.4.1 : Découpage d'une structure par des éléments finis [5].

L'analyse du comportement d'une structure par la méthode des éléments finis consiste à découper (mailler ou discrétiser) la structure considérée en éléments (Fig.4.1) et à établir aux nœuds du maillage les relations force-déplacement, en tenant compte des conditions de charges et d'appuis imposées à la structure. On obtient alors un système d'équations linéaires de grande dimension, dont la résolution numérique conduit à la valeur du

déplacement en chacun des nœuds. Le champ des contraintes est ensuite déterminé à partir du champ des déplacements.

Pour définir "géométriquement" ces petits supports (les mailles), on est donc amené à subdiviser en petits morceaux polygonaux en faisant attention de ne créer ni de recouvrement ni de trou, ce qui donne une discrétisation ou un maillage. De manière plus précise, un maillage est un ensemble des sous-domaines fermés de formes géométriques polygonales [18]

IV-2 principe de la méthode des élément fini

La méthode des éléments finis consiste à mailler la structure à étudier en un certain nombre d'éléments finis de géométrie simple (segment de droite ou arc pour une structure linéique ; triangle ou quadrangle pour une structure surfacique ; tétraèdre, prisme ou hexaèdre pour une structure volumique, etc.). Le champ des déplacements en un point quelconque est ensuite évalué par interpolation des valeurs des déplacements aux nœuds du maillage, qui constituent les variables nodales du problème. Les équations de l'élasticité permettent ensuite d'exprimer en fonction des variables nodales l'énergie de déformation, l'énergie cinétique et le travail des actions mécaniques exercées sur la structure. L'application du théorème de l'énergie potentielle totale conduit enfin au système d'équations dont les variables nodales sont solutions.

IV-3 types des élément finis

,On distingue plusieurs classes d'élément finis suivant leur géométrie :

Les éléments unidirectionnels (1D) : sont utilisés de façon individuelle ou associée à des plaques pour modéliser les raidisseurs. Par exemple poutre rectiligne ou courbe, barre...

Les éléments bidimensionnels (2D) : élasticité plane : (déformation ou contrainte plane).

Par exemple : coques courbes, plaque en flexion, les éléments axisymétriques. Les

éléments tridimensionnels (3D) : élément de volume, ou coques épaisse

IV-4Modélisation par la méthode des éléments fini

Le logiciel de calcul des structures par la méthode des élément fini ANSYS [45]a été utilisé pour analyser le probleme de concentration des contraintes dans la plaque isotrope munie d'un trou .En raison du double symétrie ,un quart de la plaque a été considéré .la géométrie considérée est maillée par l'élément PLANE 183 de forme rectangulaire 2D

(figure 4) cet élément possède huit nœuds à six degrés de liberté (trois translations et trois rotations) d'après l'étude de la convergence, la taille de l'élément est adaptée à 1 mm les conditions aux limites et les charges appliquées sont assimilées à celle d'un test de traction et de compression pure

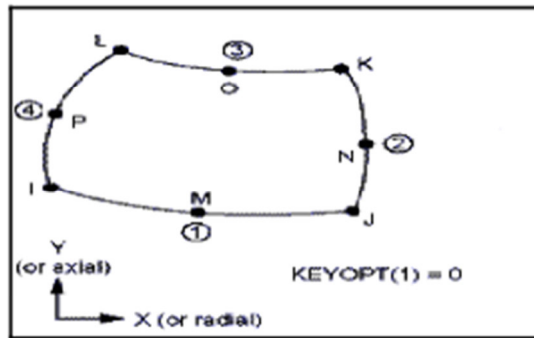


Figure 4.4: Géométrie de l'élément PLANE 183 [45].

IV-5L'élément plaque

IV-5-1-Fonctions d'interpolation de l'élément de référence

L'approximation nodale du champ du déplacement hors plans $w(\xi, \eta)$ d'un point de coordonnées (ξ, η) d'un élément rectangulaire de haute précision de type Hermite de premier ordre est donnée par [38] et [36].

$$w(\xi, \eta) = H00w_i + H10\frac{\delta w_i}{\delta \xi} + H01\frac{\delta w_i}{\delta \eta} + H11\frac{\delta^2 w_i}{\delta \xi \delta \eta}$$

IV-5-2 Fonctions d'interpolation de l'élément réel

Les dérivées des fonctions d'interpolation géométriques seront calculées par la formule suivante :

$$\frac{\delta N_i}{\delta x} = \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \frac{\delta \xi}{\delta x} + \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta x}$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta y} = \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \frac{\delta \xi}{\delta y} + \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta y}$$

IV-6-Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis

De toutes les méthodes permettant de résoudre de manière approximative un problème aux limites (séries, différences finies, ...), la méthode des éléments finis présente de tels

avantages qu'elle est la plus utilisée (parfois même exagérément), sauf cas particuliers. Ces avantages sont essentiellement les suivants :

- 1/ La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse.
- 2/ Elle peut être applicable à une variété de problèmes physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque.
- 3/ Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite.
- 4/ Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).
- 5/ La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients.
- 6/ Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique

IV-6 Validation de l'élément :

Dans cette section, nous allons mettre en œuvre l'extension de l'élément proposée (Q4) et montrer qu'il est efficace pour étudier plus tard le comportement des plaques composites trouées. Les deux plaques tests qui ont été choisies pour cette validité sont une plaque isotrope et une plaque composite monocouche

Nous avons choisis pour ces tests des plaques pleines puisqu'il n'existe pas de solution analytique exacte du champ des déplacements pour un problème de traction sur une plaque composite trouée.

Un troisième test est aussi proposé afin d'étudier l'influence de l'orientation des fibres. Et finalement, on propose d'étudier une plaque stratifiée pour voir l'effet de l'empilement des couches sur le comportement des plaques.

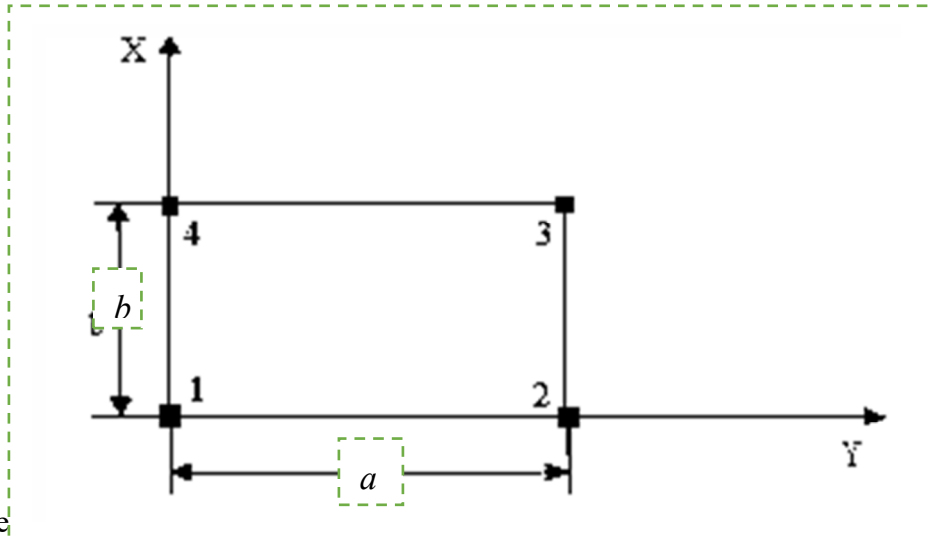
Pour ces différents tests, nous allons comparer les résultats du déplacement obtenu en utilisant le programme et le l'élément S4R d'Abaqus avec les résultats obtenus analytiquement

En ce qui concerne les résultats analytiques, on a fait appel à des programmes de calcul, pour faciliter les tâches

IV IV -5- formulation de l'élément fini

IV.5.2. Elément utilisé

L'élément utilisé est un élément rectangulaire de (24) degrés de liberté. La figure montre la géométrie de l'élément utilisé, les dimensions (a et b) et l'épaisseur (t).



Figure

IV.5.2.1 Fonctions de déplacements de l'élément:

L'élément possède quatre (4) nœuds avec (6) degrés de liberté chacun, ces degrés de liberté sont :

- ✓ deux degrés de liberté dans le plan (x, y) qui sont (u, v).
- ✓ quatre degrés de liberté hors plan qui sont : $(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})$.

✚ **En membrane :**

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \quad (4.10)$$

On peut écrire ces équations sous forme matricielle:

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\text{Nœud (1) : } (x=0, y=0) \rightarrow \begin{cases} u_1 \\ v_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (2) : } (x=a, y=0) \rightarrow \begin{cases} u_2 \\ v_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (3) : } (x=a, y=b) \rightarrow \begin{cases} u_3 \\ v_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (4) : } (x=0, y=b) \rightarrow \begin{cases} u_4 \\ v_4 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\{\delta_m^e\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8} \{\alpha_i\}_{8 \times 1} \Rightarrow \{\alpha_i\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8}^{-1} \{\delta_m^e\}_{8 \times 1} \text{ et } \{\delta_m^e\} = \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{bmatrix} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{\delta_m^e\} \quad (4.12)$$

Calcul les déformations:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \{\alpha_i\} \Rightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = [Q] \{\alpha_i\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [Q][X]^{-1} \{\delta_m^e\} \Rightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = [B_m] \{\delta_m^e\} \quad (4.13)$$

Alors :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice $[B_m]$ relie les déformations membranaires avec les déplacements nodaux.

✚ **En flexion :**

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \\ \alpha_{12} x^2 y^2 + \alpha_{13} xy^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3 \end{bmatrix}$$

$$w(x, y) = \{P(x, y)\} \{\alpha\}^T$$

avec

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{15} \alpha_{16}\}$$

$$\{P(x, y)\} = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ x^2 y^2 \ xy^3 \ x^3 y^2 \ x^2 y^3 \ x^3 y^3\}$$

L'élément plaque nécessite donc quatre degrés de liberté par nœud

$$\{w_i\} = \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}, i = 1, 4$$

ce qui explique l'introduction de la dérivée seconde par rapport à x et y .

$$\left\{ \begin{array}{c} w(x, y) \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^3y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & 2xy^2 & y^3 & 3x^2y^2 & 2xy^3 & 3x^2y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2x^2y & 3xy^2 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 3x^3y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6x^2y & 6xy^2 & 9x^2y^2 \end{bmatrix}$$

Nœud (1) : (x=0, y=0) →

$$\left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1, 16$$

Nœud (2): (x=a, y=0) →

$$\left\{ \begin{array}{l} w_2 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,16$$

Nœud (3): (x=a, y=b) →

$$\left\{ \begin{array}{l} w_3 \\ \frac{\partial w_3}{\partial x} \\ \frac{\partial w_3}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & a^3b^2 & a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & 2ab^2 & b^3 & 3a^2b^2 & 2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 2a^2b & 3ab^2 & 2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 3a^2 & 4ab & 3b^2 & 6a^2b & 6ab^2 & 9a^2b^2 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}$$

Nœud (4): (x=0, y=b) →

$$\left\{ \begin{array}{l} w_4 \\ \frac{\partial w_4}{\partial x} \\ \frac{\partial w_4}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_4}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,16$$

$$\{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [X]_{16 \times 16} \{\alpha_i\}_{16 \times 1} \Rightarrow \{\alpha_i\}_{16 \times 1} = [X]_{16 \times 16}^{-1} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1}$$

$$\{w(x, y)\} = \{P(x, y)\} [X]^{-1} \{\delta_f^e\}$$

$$\triangleright w^*_1(x, y) = \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_1 + \left(-x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x1}$$

+

$$(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{y1} + (-x(\frac{x}{a} - 1)^2) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{xy1}$$

$$\triangleright w^*_2(x, y) = (3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}) (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}) w_2 + (-x(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a})) (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}) \theta_{x2} +$$

$$(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{y2} + (-x(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a})) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{xy2}$$

$$\triangleright w^*_3(x, y) = (3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}) (3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}) w_3 + (-x(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a})) (3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}) \theta_{x3} +$$

$$(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}) y(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}) \theta_{y3} + (-x(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a})) y(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}) \theta_{xy3}$$

$$\triangleright w^*_4(x, y) = (1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}) (3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}) w_4 + (-x(\frac{x}{a} - 1)^2) (3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}) \theta_{x4} +$$

$$(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}) y(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}) \theta_{y4} + (-x(\frac{x}{a} - 1)^2) y(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}) \theta_{xy4}$$

$$\{w(x, y)\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad \dots \quad N_{13} \quad N_{14} \quad N_{15} \quad N_{16}] \{\delta_f^e\} \text{ et}$$

$$\{\delta_f^e\}^T = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{xy1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad \theta_{xy4}\}$$

• **Relation cinématiques:**

L'élément utilisé est basé sur la théorie de Kirchoff, alors les déplacements dans le plan et hors le plan sont données par :

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

Les déformations sont données par

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = zk_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = zk_y$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = zk_{xy}$$

Avec k_x , k_y et k_{xy} sont les courbures.

$$\{k(x, y)\} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{P(x, y)\} [X]^{-1} \{\delta_f^e\} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \{P(x, y)\}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \{P(x, y)\}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \{P(x, y)\}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_f^e\}$$

$$\{k(x, y)\} = [Q]_{3 \times 16} [X]_{16 \times 16}^{-1} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [B_f]_{3 \times 16} \{\delta_f^e\}$$

1. Loi de comportement :

D'après Berthelot, les résultantes des forces, les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B \\ B & D \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix}$$

2. Détermination de la matrice de rigidité

L'énergie potentielle totale de déformation d'une plaque soumise à un chargement transversal répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\Pi = U + V'$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation.

$$\delta\Pi = \delta U + \delta V = 0$$

3. Travail virtuels des efforts :

$$\iint \{\partial\delta\}^T \left\{ [B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_f] + [B_f]^T [B][B_m] + [B_f]^T [D][B_f] \right\} \{\delta\} ds$$

On pose

$$[K^e] = \iint \left\{ [B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_f] + [B_f]^T [B][B_m] + [B_f]^T [D][B_f] \right\} ds$$

La matrice $[K^e]$ peut être écrite sous la forme :

$$[K^e] = [K_1^e] + [K_2^e] + [K_3^e] + [K_4^e]$$

Avec :

$$[K_1^e] = [B_m]^T [A][B_m] : \text{Matrice de rigidité élémentaire membranaire.}$$

$$[K_2^e] = [B_m]^T [B][B_f] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion.}$$

$$[K_3^e] = [B_f]^T [B][B_m] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de couplage flexion-membrane.}$$

$$[K_4^e] = [B_f]^T [D][B_f] : \text{Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle.}$$

Le travail virtuel s'écrit:

$$\delta U = \{\partial\delta\}^T [K^e] \{\delta\}$$

$[K^e]$ est la matrice de rigidité élémentaire; la matrice de rigidité globale de la structures'obtient par assemblage des matrices de rigidité élémentaires.

4. Travail virtuels des forces extérieures

Soit $\{\partial\delta\}$ le vecteur des déplacements virtuel, alors le travail des forces appliquées à l'élément est donné par :

$$\delta V = \{\partial\delta\}^T \{f^e\}$$

En équilibre, les travaux virtuels sont égaux, alors on aura :

$$\delta U = \delta V$$

$$\{\partial\delta\}^T [K^e] \{\delta\} = \{\partial\delta\}^T \{f^e\}$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation d'équilibre suivante:

$$[K^e] \{\delta\} = \{f^e\}$$

Après assemblage, on obtient l'équation d'équilibre globale

$$[K_G]\{\delta_G\} = \{f_G\}$$

Où $[K_G]$ est la matrice de rigidité globale, $\{\delta_G\}$ est le vecteur déplacement global et $\{f_G\}$ est le vecteur force global.

1. Calculer les valeurs de la matrice de rigidité réduite $[Q]$ pour chaque pli, à l'aide de ses quatre modules élastiques E_1, E_2, ν_{12} , and G_{12} .
2. Trouver les valeurs de la matrice de rigidité réduite transformée $[\bar{Q}]$ pour chaque pli, en utilisant la matrice calculée à l'étape 1 et l'angle du pli.
3. Avoir l'épaisseur, t_k , de chaque pli, trouver les coordonnées de la surface supérieure et inférieure h_i , $i = 1 \dots, n$, de chaque pli en utilisant l'équation suivante :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$

L'emplacement du plan médian est $h/2$, à partir de la surface supérieure ou inférieure du stratifié. La coordonnée z de chaque surface de pli k (supérieure et inférieure) est donné par :

1. Pli 1 :

$$h_0 = -h/2 \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_1 = -h/2 + t_1 \text{ (Surface inférieure).}$$

2. Pli k : ($k= 2, 3, \dots, n-2, n-1$)

$$h_{k-1} = -h/2 + \sum_{i=1}^{k-1} t_i \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_k = -h/2 + \sum_{i=1}^k t_i \text{ (Surface inférieure).}$$

3. Pli n :

$$h_{n-1} = h/2 - t_n \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_n = h/2 \text{ (Surface inférieure).}$$

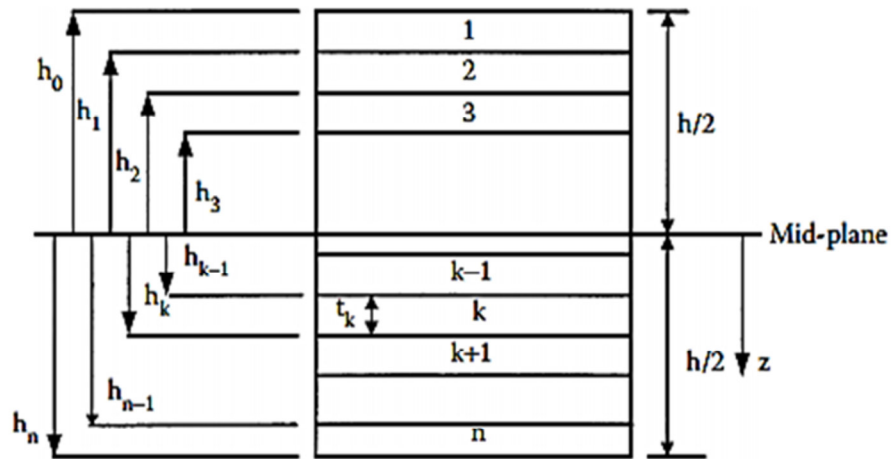


FIGURE 4.6
Coordinate locations of plies in a laminate.

Considérons un stratifié composé de n couches comme illustré à la Figure 4.6. Chaque couche a une épaisseur t_k . Donc, l'épaisseur totale de ce stratifié ' h ' est :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$

4. Utiliser les matrices de rigidité transformée de l'étape 2 et l'emplacement de chaque couche, de l'étape 3, pour trouver les trois matrices de rigidité $[A]$, $[B]$ et $[D]$.
5. Remplacer les valeurs de la matrice de rigidité trouvées à l'étape 4 et les forces et moments appliqués dans l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix}$$

6. Résolvez les six équations simultanées pour trouver les déformations et les courbures du plan moyen.
7. Maintenant que l'emplacement de chaque couche est connu, trouver les déformations globale dans chaque couche en utilisant l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

8. Pour trouver les contraintes globales, utilisez la relation contrainte-

$$\text{déformation : } \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

9. Pour trouver les déformations locales, utilisez l'équation de transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}$$

10. Pour trouver les contraintes locales, utilisez l'équation de transformation

$$\text{suivante : } \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

IV-5-1 Validation d'élément

Introduction

Dans cette étude, on procède des différents tests sur l'élément utilisé afin de vérifier la précision et la converge des résultats. Les résultats qui sont les flèches et les moments de flexion, seront comparés à ceux obtenus analytiquement. Ces tests permettent aussi de déterminer le maillage approprié qui permet de donner les meilleurs résultats

Plaque simplement appui (symetrie) (0,90,0)

Cette application consiste à étudier une plaque carrée en flexion avec diverses conditions:

Conditions de chargements

• Plaque carrée sous charge uniforme ($q=1 \text{ N}$)

• Le module de YOUNG: 174.6 Mp $a/h= 0.333$

• Le module de cisaillement 7 $h=1$

• Coefficient de poisson : 0.25

• $G=3.5$

$$\bar{w} = \frac{w E 2 . h^3}{q . a^4} * 10$$

La première structure test est une plaque carrée pleine anisotrope, chargée par une charge de flexion à l'extrémité libre, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau IV.1).

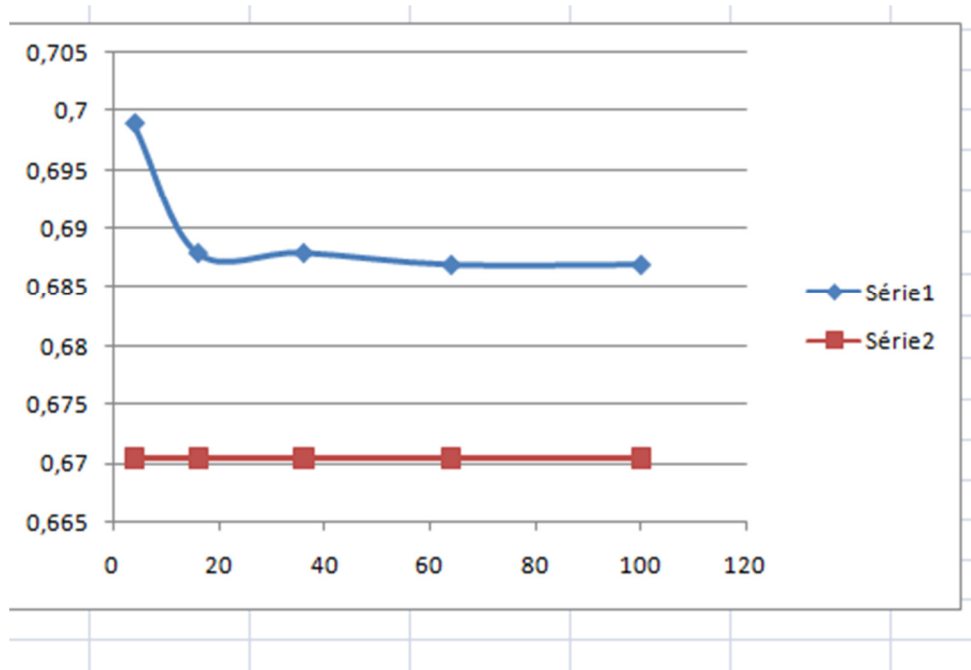
E1	E2	G12	V12	a/h	e
174.6	7	0.25	0.25	100	0.333

Cas d'une charge uniforme

Tableau III.1 : La flèche max d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée et uniformément chargée.

Maillage	Déplacement \bar{w}	Erreur %
2*2	0.699	0.042
4*4	0.688	0.026
6*6	0.688	0.026
8*8	0.687	0.024
10*10	0.687	0.024

Analytique :	0.6705
---------------------	---------------



D'après les résultats donnés par l'étude analytique du déplacement et les résultats obtenus par notre élément, on peut constater que les résultats sont proches.

. exemple 2

Plaque composite stratifiée sous une charge thermique

Dans cet exemple, on considère une plaque stratifiée croisé symétrique constitué de 3 couches unidirectionnelles de 1 mm d'épaisseur et simplement appuyée 2 cotés, avec une stratification [0/90/0].

Les dimensions géométriques et les propriétés mécaniques de cette plaque sont regroupées au (tableau IV.3).

La seconde structure test est une plaque composite (), simplement appui à côté et libre à l'autre côté, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau IV.3).

Tableau IV.3 : Propriétés géométriques et mécaniques de la deuxième plaque test

EL	Et	Glt	Vlt	B	H	αl	αt
45	10	4.5	0.31	20	3	$5 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^{-6}$

La polymérisation du stratifié a été effectuée à une température de 120 °C. Nous voulons déterminer les contraintes résiduelles à la température d'utilisation de 20 °C.

L'application numérique conduit à:

$$N^*x=733.7 \Delta t N^*y=806.7 \Delta t \Delta t = 1$$

Pour un maillage de 10x4, les déplacements obtenus sont regroupés dans le tableau (IV-4)

Tableau IV.4 : Comparaison des efforts obtenus numériquement et analytiquement

Maillage	10*4	Effort Nx^*	Effort Ny^*	Erreur %
Présent élément		733.3	806.7	0
Analytique		733.3	806.7	0

D'après les résultats donnés par l'étude théorique des efforts et les résultats obtenus par notre

élément, on peut constater que les résultats sont identiques. Ces résultats montrent la performance de l'élément utilisé.

Example 3

La troisième structure test est une plaque carrée pleine anisotrope, chargée par une charge de flexion à l'extrémité libre, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont

Tableau IV -5 : Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque test (0.90.0)

E1	E2	G12	V12	Nx	L	h	B	L'orientation de vibre
141000	9340	4500	0.35	100	1000	4	100	[0.90]s

Xt	Yt	Xc	Yc	Sc
15000	180	1000	240	150

Dans cet exemple, notre plaque soumise à une charge de flexion varie de 100 à 3500 N/m

Tableau V.5 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	3357,2163		×
	bot 1	3357,2163		×
	top 2	5678,898		×
	bot 2	5678,898		×
	top 3	3357,2163		×
	bot 3	3357,2163		×

$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$\tau_{ \perp}$	Failure Criteria	RF _{min}	Failure Type
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure

Tableau V.3 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée

charge rupture	couche	coeff	
		oui	non
	top 1	0.959	×
	bot 1	0.959	×
	top 2	1.623	
	bot 2	1.623	
	top 3	1.623	×
	bot 3	1.623	×
	Top4	0.959	×
	Bot4	0.959	×

$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$\tau_{ \perp}$	Failure Criteria	RF _{min}	Failure Type
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure

D'après les tableaux, on peut observer que :

La charge de rupture est 3500 N/mm, pour une plaque composite [0/90]_s et le déplacement correspondant est 11.56802.

Les couches endommagées sont les couches numéro 1 et 4.

Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques.

Chapitre V : étude paramétrique

V-1 introduction

Dans ce chapitre nous allons procéder à une étude paramétrique pour mettre en évidence l'effet de certains paramètres sur la concentration de contrainte K_t et sur le rapport de la flèche U_z/U_z

* dans les plaques orthotropes munies d'une ouverture rectangulaire centré. Donc cette étude comporte deux parties, dans la première on considère le comportement membranaire et dans la deuxième on considère le comportement flexionnel des plaques sous l'action de chargement transversale uniformément répartie.

V-2-Comportement Membranaire

Dans cette partie on distingue deux comportements : la première c'est la variation de K_t autour de trou pour différentes orientation des fibres et la deuxième c'est l'effet du rapport d'anisotropie E_1/E_2 sur la valeur de K_t

Exemple 1

Un autre valeur de l'umidité nous avons appliqué sur la plaque c'est $T = 50$ est un nombre constant

Pour une variation de température $\Delta t = 50$ c°

$$\Delta h = 0.02$$

Tableau V-1 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 50 et humidité 0.02

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	3.1852		×
	bot 1	3.1852		×
	top 2	2.6844		×
	bot 2	2.6844		×
	top 3	3.1852		×
	bot 3	3.1852		×

Pour une variation de température $\Delta t = 50 \text{ c}^\circ$

$\Delta h = 0.03$

Tableau V-2 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 50 et humidité 0.03

charge rupture	couche	coeff		
			oui	non
	top 1	2.2645		×
	bot 1	2.2645		×
	top 2	1.9084		×
	bot 2	1.9084		×
	top 3	2.2645		×
	bot 3	2.2645		×

Pour une variation de température $\Delta t = 50 \text{ c}^\circ$

$\Delta h = 0.04$

Tableau V-3 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 50 et humidité 0.04

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.7567		×
	bot 1	1.7567		×
	top 2	1.4805		×
	bot 2	1.4805		×
	top 3	1.7567		×
	bot 3	1.7567		×

Pour une variation de température $\Delta t = 50 \text{ c}^\circ$
 $\Delta h = 0.05$

Tableau V-4 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 50 et humidité 0.05

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.4349		×
	bot 1	1.4349		×
	top 2	1.2093		×
	bot 2	1.2093		×
	top 3	1.4349		×
	bot 3	1.4349		×

Pour une variation de température $\Delta t = 50 \text{ c}^\circ$

$$\Delta h = 0.06$$

Tableau V-5 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 50 et humidité 0.06

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.2128		×
	bot 1	1.2128		×
	top 2	1.0221		×
	bot 2	1.0221		×
	top 3	1.2128		×
	bot 3	1.2128		×

Pour une variation de température $\Delta t = 50 \text{ c}^\circ$

$$\Delta h = 0.062$$

Tableau V-6 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 50 et humidité 0.062

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.1764		×
	bot 1	1.1764		×
	top 2	0.9914	×	
	bot 2	0.9914	×	
	top 3	1.1764		×
	bot 3	1.1764		×

Les nom

Exemple 2

Un autre valeur de l'umidité nous avons appliqué sur la plaque c'est $T = 100$ est un nombre constant

Pour une variation de température $\Delta t = 100 \text{ c}^\circ$

$$\Delta h = 0.02$$

Tableau V-1 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 100 et humidité 0.02

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	2.6838		×
	bot 1	2.6838		×
	top 2	2.2619		×
	bot 2	2.2619		×
	top 3	2.6838		×
	bot 3	2.6838		×

Pour une variation de température $\Delta t = 100 \text{ c}^\circ$

$$\Delta h = 0.03$$

Tableau V-2 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 100 c° et humidité 0.03

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.9990		×
	bot 1	1.9990		×
	top 2	1.6847		×
	bot 2	1.6847		×
	top 3	1.9990		×
	bot 3	1.9990		×

Pour une variation de température $\Delta t = 100 \text{ c}^\circ$

$$\Delta h = 0.04$$

Tableau V-3 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 100 et humidité 0.04

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.5926		×
	bot 1	1.5926		×
	top 2	1.3422		×
	bot 2	1.3422		×
	top 3	1.5926		×
	bot 3	1.5926		×

Pour une variation de température $\Delta t = 100 \text{ c}^\circ$

$$\Delta h = 0.05$$

Tableau V-4 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 100 et humidité 0.05

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.3235		×
	bot 1	1.3235		×
	top 2	1.1154		×
	bot 2	1.1154		×
	top 3	1.3235		×
	bot 3	1.3235		×

Pour une variation de température $\Delta t = 100 \text{ c}^\circ$

$$\Delta h = 0.057$$

Tableau V-5 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 100 et humidité 0.057

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.1836		×
	bot 1	1.1836		×
	top 2	0.9975	×	
	bot 2	0.9975	×	
	top 3	1.1836		×
	bot 3	1.1836		×

On observe

- Les couches endommagées sont les couches numéro 2
- Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques
- la valeur de la température 100a cassé la plaque

Example 3

Pour une variation de température $\Delta t = 150 \text{ c}^\circ$

$$\Delta h = 0.02$$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	2.3188		×
	bot 1	2.3188		×
	top 2	1.9542		×
	bot 2	1.9542		×
	top 3	2.3188		×
	bot 3	2.3		×

Pour une variation de température $\Delta t = 150$

$$\Delta h = 0.03$$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.7892		×
	bot 1	1.7892		×
	top 2	1.5079		×
	bot 2	1.5079		×
	top 3	1.7892		×
	bot 3	1.7892		×

Pour une variation de température $\Delta t = 150$

$\Delta h = 0.04$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.4566		×
	bot 1	1.4566		×
	top 2	1.2275		×
	bot 2	1.2275		×
	top 3	1.4566		×
	bot 3	1.4566		×

Pour une variation de température $\Delta t = 150 \text{ c}^\circ$

$\Delta h = 0.05$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.2282		×
	bot 1	1.2282		×
	top 2	1.0351		×
	bot 2	1.0351		×
	top 3	1.2282		×
	bot 3	1.2282		×

Pour une variation de température $\Delta t = 150 \text{ c}^\circ$

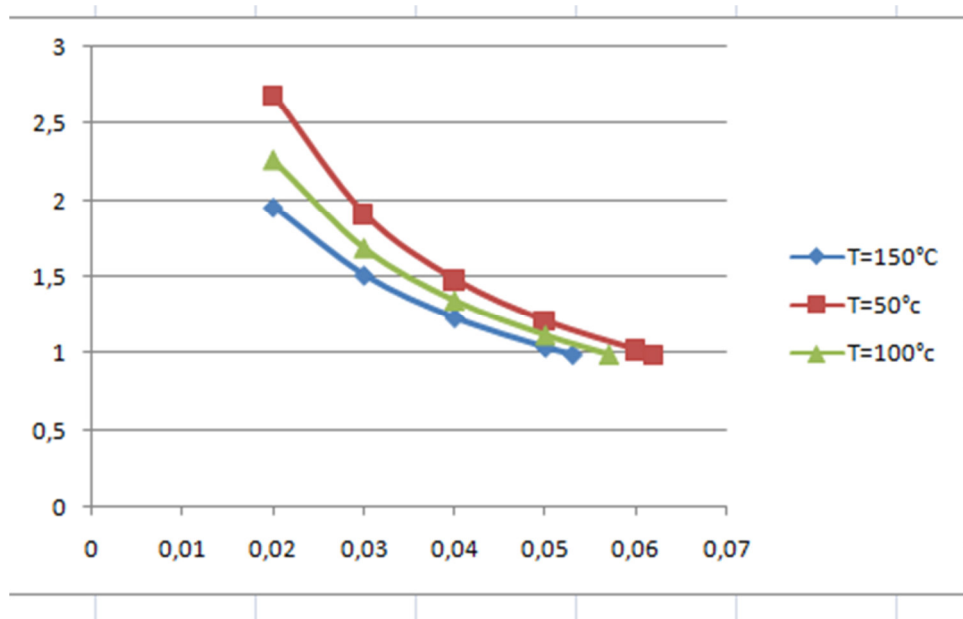
$\Delta h = 0.053$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.1730		×
	bot 1	1.1730		×
	top 2	0.9886	×	
	bot 2	0.9886	×	
	top 3	1.1730		×
	bot 3	1.1730		×

On observe ;

- Les couches endommagées sont les couches numéro 2
- Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques
- la valeur de la température 150 a cassé la plaque

La figure 1



La figure (1) montre la variation de la température en fonction de la force pour un type de plaque anisotrope.

2^{ème} cas

Un autre valeur de l'humidité nous avons appliqué sur la plaque c'est $H = 0.03$ est un nombre constant

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.03$

$$\Delta t = 50 \text{ c}^\circ$$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	2.2645		×
	bot 1	2.2645		×
	top 2	1.9084		×
	bot 2	1.9084		×
	top 3	2.2645		×
	bot 3	2.2645		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.03$

$\Delta t = 100 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.9990		×
	bot 1	1.9990		×
	top 2	1.6847		×
	top2	1.6847		×
	top 3	1.9990		×
	bot 3	1.9990		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.03$

$\Delta t = 150 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.7892		×
	bot 1	1.7892		×
	top 2	1.5097		×
	bot 2	1.5097		×
	top 3	1.7892		×
	bot 3	1.7892		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.03$

$\Delta t = 200 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.6193		×
	bot 1	1.6193		×
	top 2	1.3647		×
	bot 2	1.3647		×
	top 3	1.6193		×
	bot 3	1.6193		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.03$

$\Delta t = 300 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.3605		×
	bot 1	1.3605		×
	top 2	1.1469		×
	bot 2	1.1469		×
	top 3	1.3605		×
	bot 3	1.3605		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.03$

$\Delta t = 393 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.1849		×
	bot 1	1.1849		×
	top 2	0.9986	×	
	bot 2	0.9986	×	
	top 3	1.1849		×
	bot 3	1.1849		×

On observe

- Les couches endommagées sont les couches numéro 2
- Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques
- la valeur de l'humidité 0.03 a cassé la plaque

Un autre valeur de l'umidité nous avons appliqué sur la plaque c'est $H = 0.04$ est un nombre constant

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.04$

$$\Delta t = 50 \text{ c}^\circ$$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.7567		×
	bot 1	1.7567		×
	top 2	1.4805		×
	bot 2	1.4805		×
	top 3	1.7567		×
	bot 3	1.7567		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.04$

$$\Delta t = 100 \text{ c}^\circ$$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.5926		×
	bot 1	1.5926		×
	top 2	1.3422		×
	bot 2	1.3422		×
	top 3	1.5926		×
	bot 3	1.5926		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.04$

$\Delta t = 150 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.4566		×
	bot 1	1.4566		×
	top 2	1.2275		×
	bot 2	1.2275		×
	top 3	1.4566		×
	bot 3	1.4566		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.04$

$\Delta t = 200 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.3419		×
	bot 1	1.3419		×
	top 2	1.1309		×
	bot 2	1.1309		×
	top 3	1.3419		×
	bot 3	1.3419		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.04$

$\Delta t = 250 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.2440		×
	bot 1	1.2440		×
	top 2	1.0484	×	
	bot 2	1.0484	×	
	top 3	1.2440		×
	bot 3	1.2440		×

On observe ;

- Les couches endommagées sont les couches numéro 2
- Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques
- la valeur de l'humidité 0.04 a cassé la plaque

Un autre valeur de l'umidité nous avons appliqué sur la plaque c'est $H = 0.05$ est un nombre constant

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.05$

$\Delta t = 50 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1.4349		×
	bot 1	1.4349		×
	top 2	1.2093		×
	bot 2	1.2093		×
	top 3	1.4349		×
	bot 3	1.4346		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.05$

$\Delta t = 100 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1,3235		×
	bot 1	1,3235		×
	top 2	1,1154		×
	bot 2	1,1154		×
	top 3	1,3235		×
	bot 3	1,3235		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.05$

$\Delta t = 150 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1,2282		×
	bot 1	1,2282		×
	top 2	1,0351		×
	bot 2	1,0351		×
	top 3	1,2282		×
	bot 3	1,2282		×

Pour une variation de humidité $\Delta h = 0.05$

$\Delta t = 200 \text{ c}^\circ$

charge	couche	coeff	rupture	
			oui	non
	top 1	1,146		×
	bot 1	1,146		×
	top 2	0.966	×	
	bot 2	0.966	×	
	top 3	1.146		×
	bot 3	1.146		×

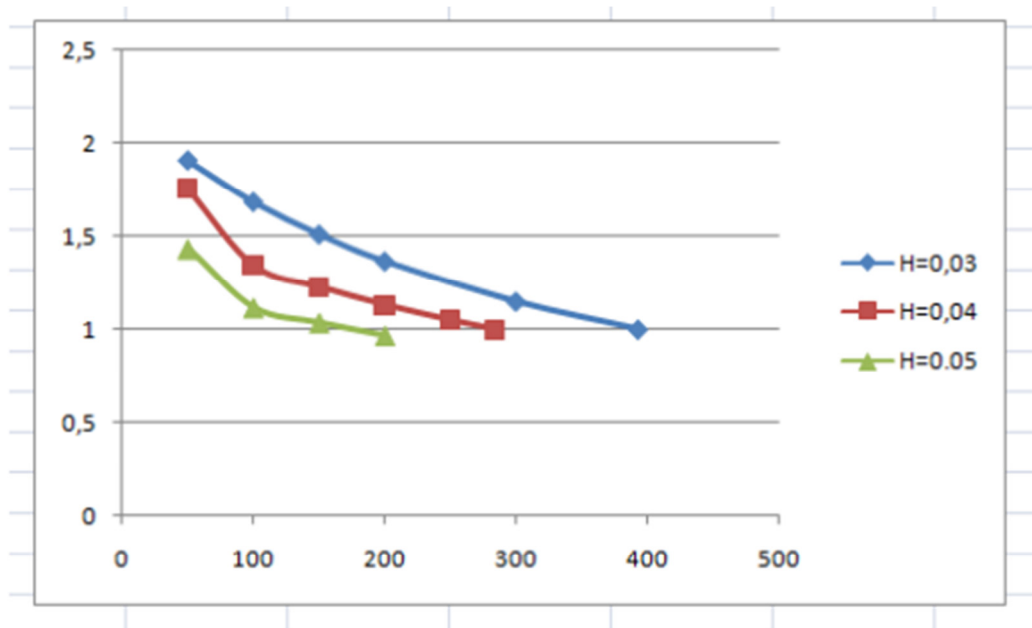
On observe ;

- Les couches endommagées sont les couches numéro 2

- Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques

-- la valeur de l'humidité 0.05 a cassé la plaque

Figure 2



La figure (2) montre la variation de la humidité en fonction de la force pour un type de plaque anisotrope

Plaque trouée composite stratifiée sous une charge thermique

Dans cet exemple, on considère une plaque trouée stratifiée croisée symétrique constituée (figure IV.1)

De 4 couches unidirectionnelles de 1 mm d'épaisseur et simplement appuyée 2 cotés, avec une stratification [0/0/0/0]

Les dimensions géométriques et les propriétés mécaniques de cette poutre sont regroupées (tableau IV.1).

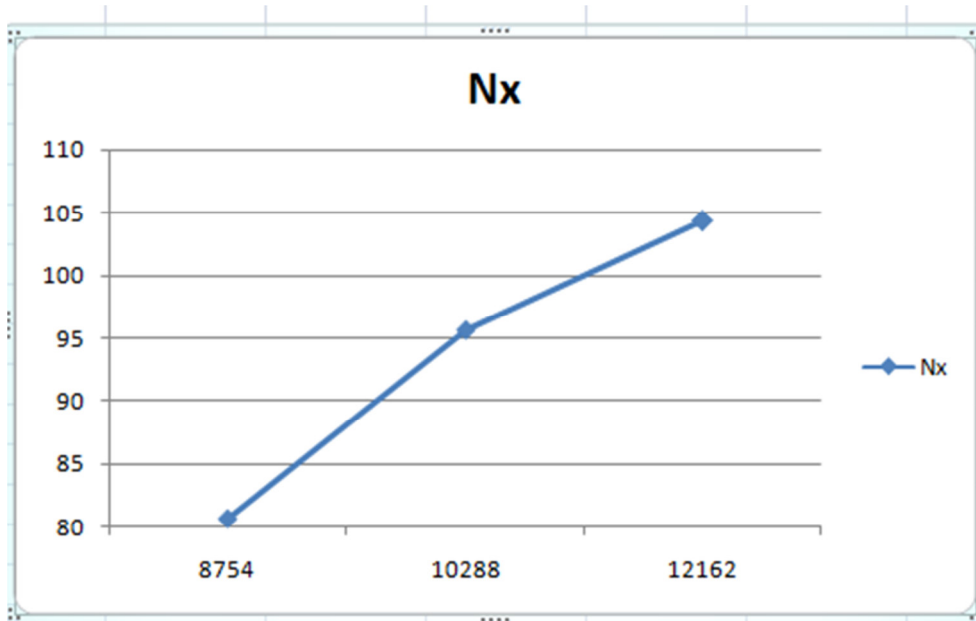
Tableau IV.1 : Propriétés géométriques de plaque trouée test.

EI	ET	Glt	vlt	b	h	αl	αt
141000	9340	4500	0.35	20	0.1	1^{E-1}	3.5^{E-5}

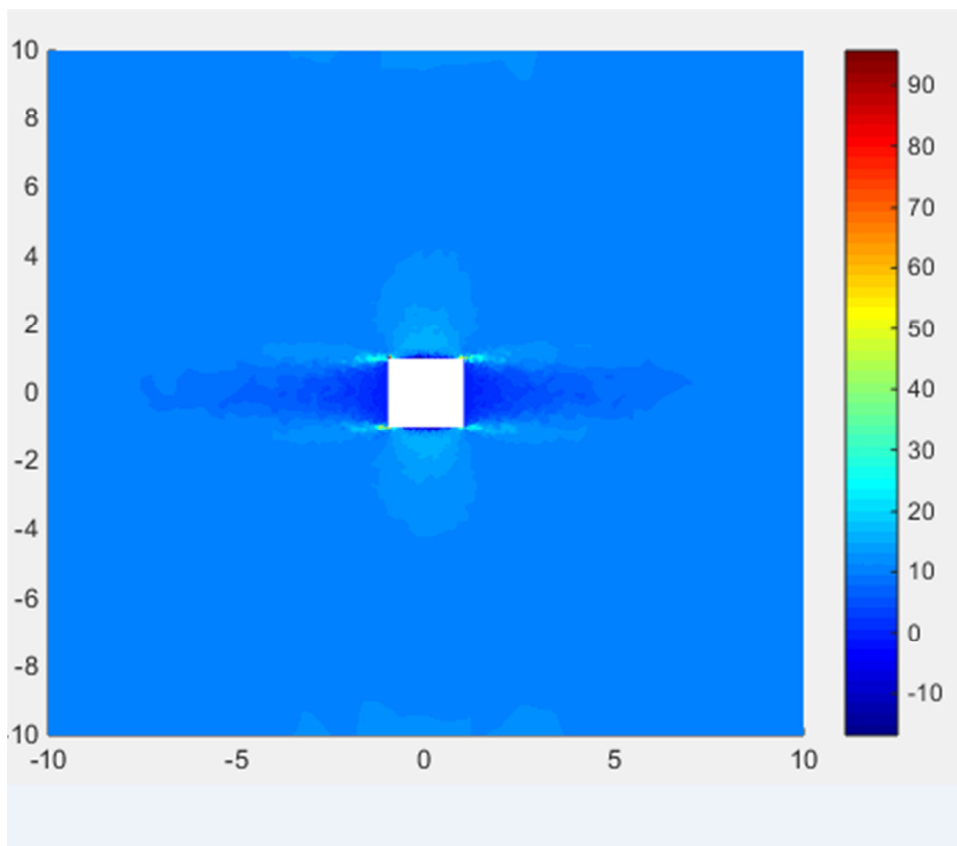
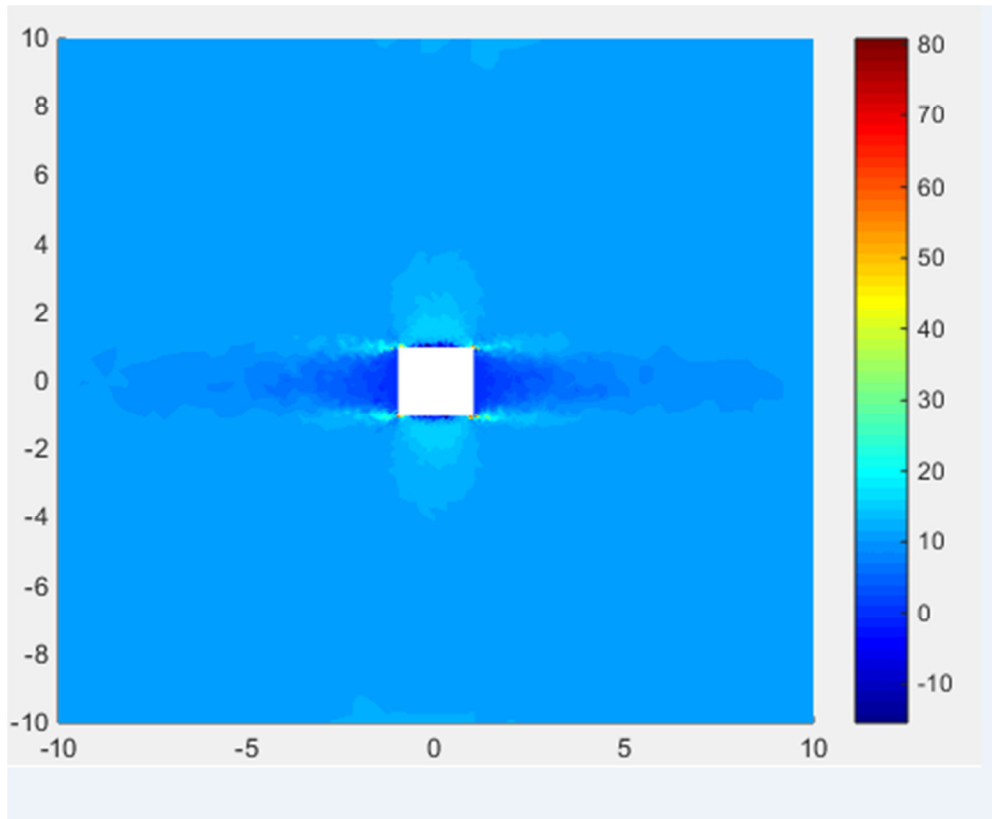
1^{ere} test

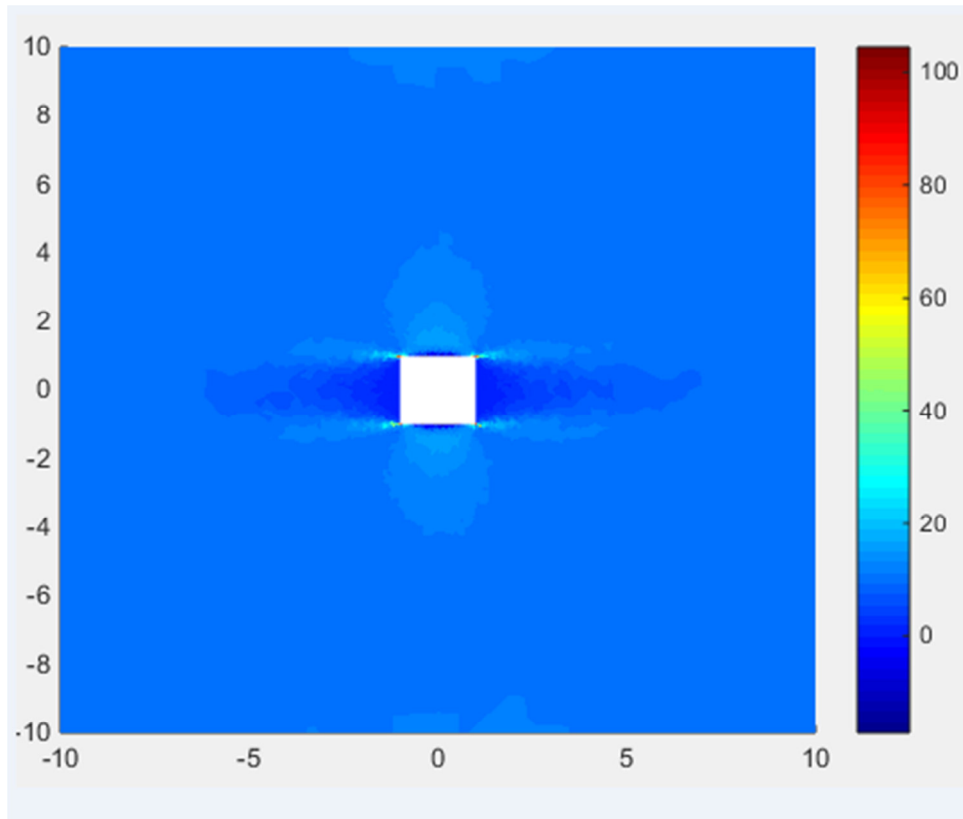
. Pour un maillage de 20x20, les déplacements obtenus sont regroupés dans le tableau (IV-2).

Maillage (20*20=	Effort Nx*	Effort Mx*
1	80.73	47.32
2	95.65	51.74
3	104.38	56.369



On observe ;
Plus un élément augmente , plus il augmente effort



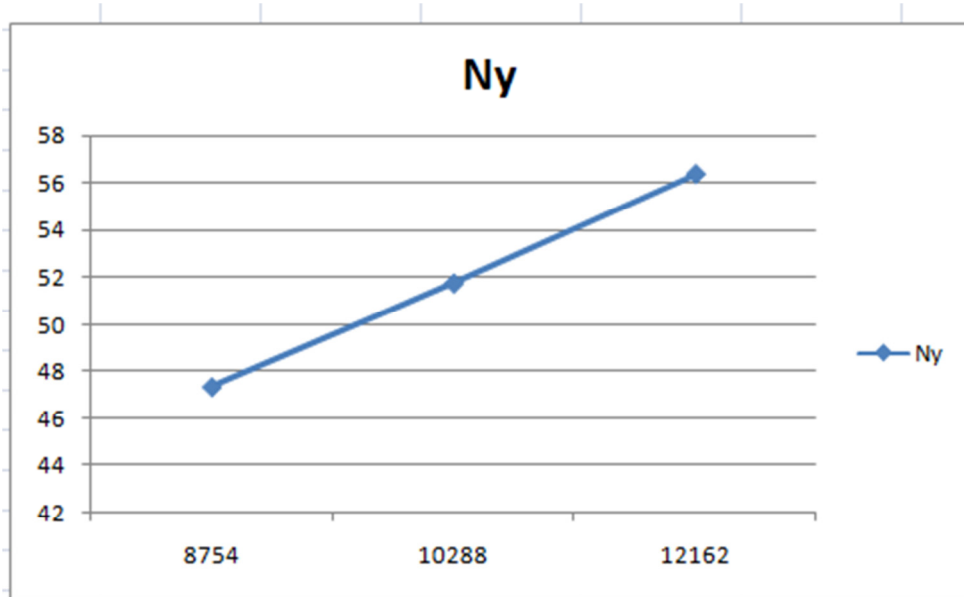


2^{ème} test

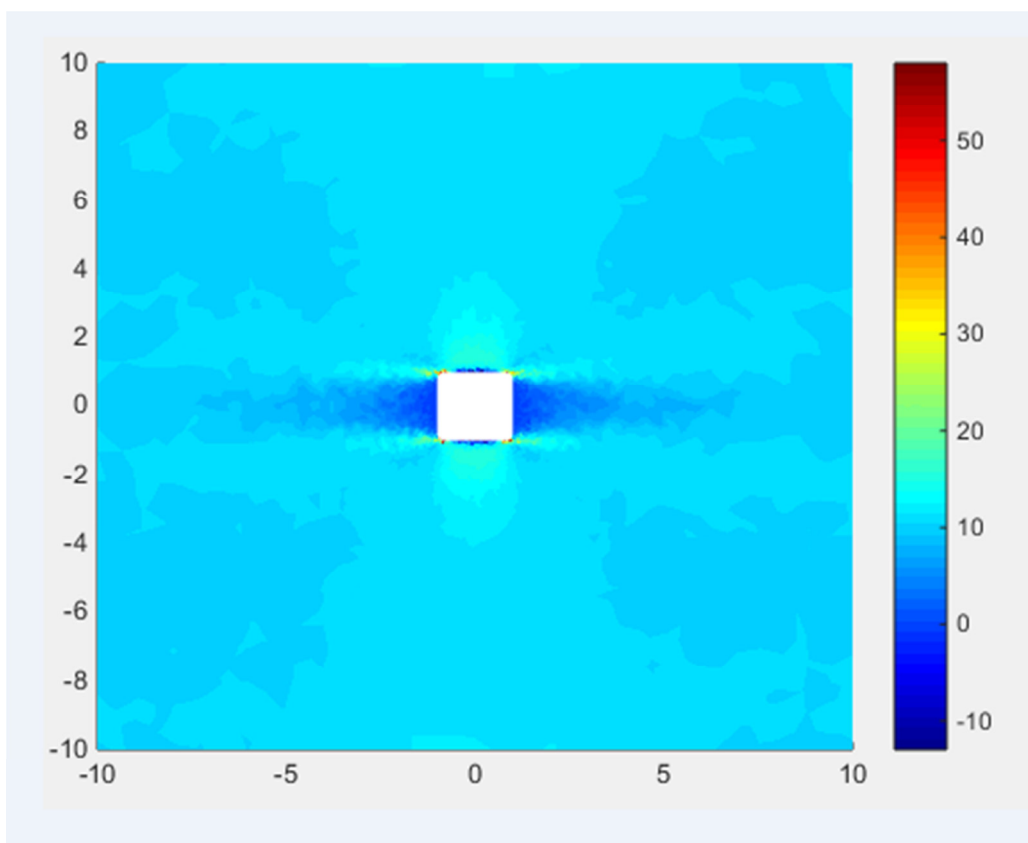
. Pour un maillage de 20x20, les déplacements obtenus sont regroupés dans le tableau (IV-3

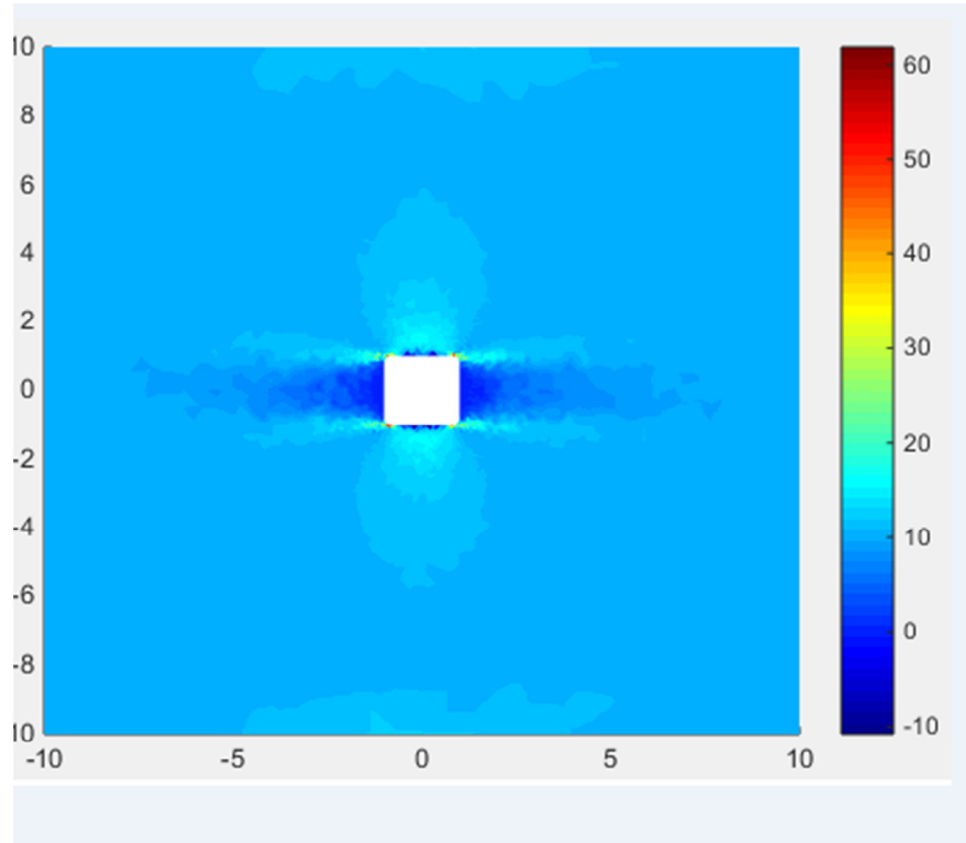
Maillage (20*20)	Effort N_x^*	Effort M_x^*
1	61.83	37.87
2	58.01	37.54

).



On observe ;
 Plus un élément augmente , plus il augmente effort





Conclusion générale

Dans ce travail nous avons présenté une étude numérique des plaques anisotrope, composites, et stratifiées menues d'ouvertures centrés

Le travail est une analyse numérique a été présentée afin de déterminer, le comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées. En utilisant un élément fini basée le critère de rupture de « Tsai-Wu ».

Cette étude concerne la validation de l'élément rectangulaire à quatre noeuds. Avec six degré de liberté, pour analyse le comportement mécanique des plaques anisotrope et stratifiées à la rupture en flexion. Les résultats obtenus seront comparés avec les résultats des solutions analytiques et d'autre modèle d'élément fini disponible dans la littérature. A travers des comparaisons, on observe que notre élément donne des résultats pratiquement identiques aux ceux obtenus analytiquement, convergence et la stabilité de l'élément utilisé.

Une étude paramétrique a été considérée sur le comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées, l'étude qui consiste à varier différent paramètres, tels que l'orientation des fibres, la stratification des couches et les types de supports, conditions aux limites, pour voir l'influence de celle-ci.

Les résultats ont montré que l'effet de la stratification des couches sur la charge de rupture dans certaines conditions d'appuis

Au final, on remarque qu'il y a un effet de la température et de l'humidité sur la plaque trouée perforée, ce qui conduit à la rupture

NOTATIONS

TD	Thermodurcissables
TP	Thermoplastiques
C_{ijkl}	Composantes du tenseur d'ordre 4 des rigidités du matériau
δ_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes du second ordre
ϵ_{kl}	Composantes du tenseur des déformations du second ordre
S	Constantes de souplesse
λ, μ	Coefficients de Lamé
Δl	Allongement de la cellule
L	Longueur initiale de la cellule considérée
lt	Largeur initiale de la cellule considérée
σ_f	Contrainte dans la fibre
σ_m	Contrainte dans la matrice
S_f	Aire de section droite de la fibre
S_m	Aire de section droite de la matrice
S	Aire de la section droite de la cellule moyenne
V_f	Fraction volumique de fibres
E_l	Module d'Young longitudinal
E_t	Module d'Young transversal
E_f, E_m	Modules d'Young de la fibre et de la matrice
ν_l	Coefficient de Poisson longitudinal
ν_f, ν_m	Coefficients de Poisson de la fibre et de la matrice
G_l	Module de cisaillement longitudinal
τ	Contrainte de cisaillement
γ_f, γ_m	Déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice
σ_f, σ_m	Déformations induites dans la fibre et la matrice
(1, 2, 3)	Directions principales (axes principaux)
Q	Matrice de rigidité réduite
Q'	Matrice de rigidité réduite hors axes
Q_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité d'une couche k
$N_{x, y}$	Champ des résultantes en membrane
$\sigma_k(M)$	Matrice des contraintes en membrane
$Q(x, y)$	Résultantes en cisaillement

$M_f(x, y)$	Moments de flexion et de torsion
$\varphi(x, x)$	Rotation de la section suivant l'axe x
$\varphi(y, y)$	Rotation de la section suivant l'axe y
$W(x, y)$	déplacement transversal
\bar{W}	Déplacement adimensionnel
SSSS	Plaque simplement appuyée