



*République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences de des technologies
Département de Genie civil et hudraulique*

MÉMOIRE DE MASTER

Option

Structure

l'analyse numérique du comportement statique des plaques FGM

Présenté par : Elhaiba Ahmed Souleiman

Sous la direction de : Pr.Tati Abdoulwahab

Devant le jury composé de :

Dr Belarabi wajdi: Rapporteur

Pr. Bourazzan: Président

Pr.Tati Abdoulwahab: Examineur

Année universitaire : 2021 2022

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon Dieu tout puissant **ALLAH** qui m'a donné La santé, le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail.

Je remercie particulièrement mon encadreur, **Monsieur Abdelouahab TATI**, Professeur au département de génie civil université Mohamed Khider de Biskra, D'avoir accepté de diriger ce travail avec beaucoup de disponibilité et d'efficacité, Pour m'avoir fait partager son expérience, pour les conseils et encouragements qu'il a sus me prodiguer pendant toute la durée de ce travail.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury pour la bonne discussion De ce travail.

Je remercie très chaleureusement Mon père, ma mère, mes frères, ma sœur Et toute ma famille.

Un grand remerciement a tous les enseignants du département de génie civil Université Mohamed Khider de Biskra et mes collègues et tous mes amis.

En dernier, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la Réalisation de ce modeste travail surtout le doctorant **Amira sadgui**.

Dédicace

Je dédie ce travail à mon père, mon exemple, bien aimé.

A ma mère, source d'affection de courage et d'inspiration, pour son soutien et pour ce qu'elle est.

A mes frères et ma sœur

A mes proches

A toute la promo 2022, et à tous mes amis sans exception.

Je le dédie aussi aux sœurs et frères de mon père et ma mère dont le soutien moral et matériel ne m'a jamais fait défaut.

Résumé

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l'épaisseur. Ce travail a pour but d'étudier le comportement statique des Plaques FGM, en utilisant un élément fini avec cinq degrés de liberté par nœud. La performance et la fiabilité de l'élément utilisé a été évaluées à travers des tests de validation. Par ailleurs, une étude paramétrique a été présentée pour mettre en évidence l'influence des certains paramètres.

Les résultats numériques des déplacements et des moments des plaques FGM ont été présentés et discutés.

On peut conclure que la présente étude est précise, et simple pour étudier le comportement statique des plaques fonctionnellement graduées soumises à un chargement mécanique avec diverses conditions aux limites.

Abstract

Functionally graded materials (FGM) are a new kind of composite materials with a gradual and continuous variation of the volume fractions of each of the constituents (usually metal and ceramic) through the thickness, inducing changes, as a consequence of the global mechanical properties of the structural element they constitute.

This work aims to study the static behaviour of FGM plates, using a finite element with five degrees of freedom per node, the performance and reliability of the element used has been evaluated through validation tests. In addition, a parametric study was presented to highlight the influence of some Parameters.

Numerical results of displacements and moments of FGM plates have been presented and discussed.

It can be concluded that the present theory is accurate, and simple to study the static behaviour of functionally graded plates subjected to mechanical loading with various boundary conditions.

ملخص

التدرج الوظيفي أو المواد المتدرجة وظيفياً (FGM) هي مجموعة جديدة من المواد المركبة التي لها تباين تدريجي ومستمر لأجزاء الحجم لكل المكونات (بشكل عام، المعدن والسيراميك) من خلال السماكة، إحداث تغييرات، نتيجة الخواص الميكانيكية الكلية للعنصر الهيكلي الذي يشكلونه.

يهدف هذا العمل إلى دراسة السلوك الثابت لألواح المتدرجة وظيفياً (FGM)، باستخدام عنصر محدود مع خمس درجات من الحرية لكل عقدة، وقد تم تقييم أداء وموثوقية العنصر المستخدم من خلال اختبارات التحقق من الصحة. علاوة على ذلك، تم تقديم دراسة تحليلية لتبسيط الضوء على تأثير بعض المعلمات.

تم عرض ومناقشة النتائج العددية لحالات النزوح ولحظات لوحات تشويه المواد المتدرجة وظيفياً (FGM). يمكن استنتاج أن النظرية الحالية دقيقة وبسيطة لدراسة السلوك الثابت للوحات المتدرجة وظيفياً المعرضة للتحميل الميكانيكي في بشروط حدية مختلفة.

Sommaire

Remerciements	I
Dédicace	II
Résumé	III
Sommaire	IV
Liste des figures	VI
Liste des tableaux	VII
Introduction Générale.....	VIII
Conclusion Générale	33
Rréférences.....	34

CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES PLAQUES FGM

1.1 Introduction :	1
1.2 Définition des matériaux FGM :	1
1.3 Concept des matériaux fonctionnellement gradués :	2
1.4 Idée générale du développement des FGM :	4
1.5. Les Modèles de FGM.....	5
1.5.1. Modèle Voigt.....	5
1.5.2. Modèle Reuss	5
1.5.3. Modèle Tamura.....	6
1.5.4. Modèle Mori-Tanaka.....	6
1.5.5. Comparaison des modèles micromécaniques	6

CHAPITRE 2 : LES DIFFERENTES THEORIES DES PLAQUES

2.1 Introduction	9
2.2 Configuration géométrique :	9
2.3 La théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT) :	9
2.4 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) :	10
2.5 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :	11
2.6 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :	12
2.7 Loi de mélange en puissance (P-FGM)	14
2.8 Conclusion :	14

CHAPITRE 3 : PRESENTATION DE L'ELEMENT FINI UTILISE

3.1 Introduction :	15
3.2. Historique sur La méthode des éléments finis :	15
3.3. Formulation des éléments finis :	16
3.3.1 Description de l'élément fini utilisé :	16

3.4. Champ des Déplacements et cinématique :	16
3.5 Les efforts résultants :	18
3.6. Le principe de l'énergie potentielle totale :	18
3.7. Fonction d'interpolation :	19
3.8. Présentation du programme :	20
3.8.1 Introduction :	20
3.8.2 Présentation de l'organigramme du programme :	21
3.9. Validation numérique d'élément fini dans l'analyse dynamique des plaques :	22
3.10. Conclusion :	23

CHAPITRE 4 : ETUDE PARAMETRIQUE

4.1 Introduction :	24
4.2 Problématique du maillage :	24
4.2.1 plaques FGM :	24
4.2.1.1 Effet de rapport de la dimension de la plaque (Ll) :	24
4.2.2.2 Effet du rapport d'épaisseur sur la flèche centrale non dimensionnelle :	29
4.3. Conclusion :	32

Liste des figures

CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES PLAQUES FGM

Figure 1.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Houari, 2011].	3
Figure 1.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [Houari, 2011].	4
Figure 1.3 : Module de Young efficace en fonction de la fraction volumique de la céramique pour plusieurs modèles micromécaniques.	7
Figure 1.4 : Coefficient de Poisson effectif en fonction de la fraction volumique de céramique pour plusieurs modèles micromécaniques.	8

CHAPITRE 2 : COMPORTEMENT DES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES

Figure 2.1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM	9
Figure 2.2 : Illustration de la plaque de Love- Kirchhoff	10
Figure 2.3 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997).	11
Figure 2.4 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques.	12

CHAPITRE 3 : PRESENTATION DE L'ELEMENT FINI UTILISE

Figure 3.1 : Géométrie et variables nodales de l'élément fini	16
Figure 3.2 : Organigramme du programme.	22

CHAPITRE 4 : ETUDE PARAMETRIQUE

Figure 4.1 : variation de la flèche centrale sans dimensions \hat{W} en fonction du rapport Ll . Cas d'une plaqueFGM soumise à un chargement uniforme suivant l'épaisseur $lh = 1$	25
Figure 4.2 : variation de la flèche centrale sans dimensions \hat{W} en fonction du rapport Ll . Cas d'une plaqueFGM soumise à un chargement sinusoïdal suivant l'épaisseur $lh = 1$	26
Figure 4.3 : variation de la flèche centrale sans dimensions \hat{W} en fonction du rapport Ll . Cas d'une plaqueFGM encastree soumise à un chargement uniforme suivant l'épaisseur $lh = 1$	28
Figure4.4 : Variation deLa flèche centrale sans dimensions \hat{W} en fonction du rapport d'épaisseur lh pour une plaque FGM encastree et soumise à une charge uniforme avec $Ll = 1$	30
Figure 4.5 : variation de La flèche central sans dimension \hat{W} En fonction du rapport d'épaisseur lh pour une plaque FGM simplement appuies et soumise à une charge uniforme avec $Ll = 1$	31

Liste des tableaux

CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES PLAQUES FGM

Tableau 1.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal..... 2

CHAPITRE 3 : PRESENTATION DE L'ELEMENT FINI UTILISE

Tableau 3.1: Fonctions des sous-routines. 20

Tableau 3.2 : La flèche \widehat{W} pour une plaque FGM carré $Ll = 1$ simplement appuyées et soumise à un chargement sinusoïdal avec une épaisseur $lh = 10$ 23

Tableau 3.3 : La flèche \widehat{W} pour une plaque FGM carré $Ll = 1$ simplement appuyées et soumise à un chargement uniforme avec une épaisseur $lh = 10$ 23

CHAPITRE 4 : ETUDE PARAMETRIQUE

Tableau 4.1. Les caractéristiques mécaniques des plaques FGM 24

Tableau 4.2. : La flèche \widehat{W} en fonction du rapport Ll pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à un chargement uniforme avec une épaisseur $lh = 10$ 25

Tableau 4.3. : La valeur du moment en fonction du rapport Ll pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à un chargement uniforme avec une épaisseur $lh = 1$ 26

Tableau 4.4. : La flèche en fonction du rapport Ll pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à une charge sinusoïdale avec une épaisseur $lh = 1$ 26

Tableau 4.5. : La valeur du moment en fonction du rapport Ll pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à une charge sinusoïdale avec une épaisseur $lh = 1$ 27

Tableau 4.6. : La flèche \widehat{W} en fonction du rapport Ll pour une plaque FGM encadrée et soumise à un chargement uniforme avec une épaisseur $lh = 10$ 27

Tableau 4.7. : La valeur du moment en fonction du rapport Ll pour une plaque FGM encadrée et soumise à une charge uniforme avec une épaisseur $lh = 1$ 28

Tableau 4.8 : La flèche en fonction du rapport d'épaisseur lh pour une plaque FGM encadrée et soumise à une charge uniforme avec $Ll = 1$ 29

Tableau 4.9 : La valeur du moment en fonction du rapport d'épaisseur lh pour une plaque FGM encadrée et soumise à une charge uniforme avec $Ll = 1$ 30

Tableau 4.10 : La flèche en fonction du rapport d'épaisseur lh pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à une charge uniforme avec $Ll = 1$ 31

Tableau 4.11 : La valeur du moment en fonction du rapport d'épaisseur lh pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à une charge uniforme avec $Ll = 1$ 32

Introduction générale :

Dans le monde industriel, l'évolution se fait de façon continue afin d'avoir une meilleure optimisation sur la qualité et le prix des concepts technologiques. Et c'est la raison pour laquelle le laboratoire de recherche doit impérativement être lié au secteur de l'industrie puisque la recherche scientifique permet l'avancée des techniques de l'industrie en permettant de concevoir des procédés nouveaux pour le développement de l'industrie.

L'étude du matériau est primordiale pour mieux maîtriser la bonne tenue de la pièce constituée par tel ou tel matière ; c'est le chemin d'une recherche qui amène au terminus d'une révolution technologique prometteuse ; puisque la recherche dans cette discipline technologique tente à développer un effort pour améliorer le comportement du matériau vis-à-vis différentes sollicitations, en fonction du problème posé ; c'est-à-dire en dépendance du besoin technologique spécifique.

Du fait que les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines, puisque leur tenue aux contraintes thermique est très limitée ; donc, le soucis des chercheurs et orientés vers la recherche de matériaux avec un rapport résistance/poids assez élevé ; donc des matériaux, composé de plus d'une matière, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques avant d'être appliquées dans le domaine du génie civil.

Ces matériaux sont appelés matériaux composites qui sont venus apporter quelques solutions à ces limites.

Ce type de matériau est généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes et disposée sous forme de stratifié dont l'association aboutit à un assemblage avec des performances supérieures à celles des composants pris séparément.

Cependant, l'interface de ces couches pose un problème majeur qui est la discontinuité des propriétés et des contraintes à ce niveau. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, un décollement entre les couches dus à un passage brusque dans la composante matérielle. Une technique a été élaborée par un groupe de chercheurs japonais pour surmonter ces effets nuisibles ; il consiste à utiliser un matériau fonctionnellement gradué (Functionally Graded Material) FGM.

L'idée de ce matériau ainsi que son procédé d'industrialisation sont relativement nouvelles dans le domaine de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites particuliers ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant,

donnant des changements des propriétés mécaniques d'un point à un autre, éliminant les problèmes d'interfaces Tandis que les caractéristiques des matériaux constitutants restent intactes.

A travers son épaisseur un changement s'opère en fraction matérielle pour avoir un matériau avec deux facettes, une métallique est une deuxième céramique ; le changement s'effectue entre ces deux facettes par une loi décrivant le procédé de fabrication du matériau. C'est ainsi soit combiné la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur et à l'oxydation de la céramique.

Problématique

Les matériaux fonctionnellement gradués sont des matériaux ayant des propriétés qui varient d'une manière continue selon l'épaisseur. Ces types de matériaux peuvent être classés parmi les matériaux composites spéciaux. En effet ils sont constitués d'un mélange de céramique et de métal et par conséquent ils peuvent résister à des environnements extrêmes de haute température, tout en conservant leur intégrité structurale.

En effet, le comportement mécanique des éléments de structure avec les FGM est d'une importance considérable dans les domaines à la fois de recherche et d'industrie. Cependant ces investigations ne sont relativement qu'à leur début et par conséquent requiert davantage d'analyse et de recherche.

Objectif :

L'objectif de ce travail est l'analyse du comportement statique des plaques en matériaux fonctionnellement gradués en utilisant la méthode des éléments finis.

Organisation des chapitres :

Nous avons divisé notre travail en quatre chapitres :

Le premier chapitre a pour but de présenter une bibliographie qui comporte des généralités sur les matériaux composites ainsi que des spécificités sur les plaques FGM.

Dans le deuxième chapitre on va présenter les différentes théories des plaques.

Nous sommes intéressés essentiellement dans Le troisième chapitre à présenter l'élément fini utilisé ainsi qu'une programmation avec le langage FORTRAN

Le programme sera ensuite validé par comparaison avec les résultats analytiques.

Le dernier chapitre concerne une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la variation des flèches centrales non dimensionnelle des plaques

Ce mémoire sera achevé par une conclusion générale.

CHAPITRE 1 :

RECHERCHE

BIBLIOGRAPHIQUE SUR

LES PLAQUES FGM

CHAPITRE 1 : Recherche bibliographique sur les plaques FGM

1.1 Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ") ; est un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ce type de matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. Compte tenu de l'augmentation significative de l'activité de recherche et de publications dans les FGMs et les structures au cours des dernières années, le présent chapitre est une tentative d'identifier et de mettre en évidence les sujets qui sont les plus pertinents pour les structures FGMs. En raison de la croissance extensive des connaissances en FGMs dans les deux dernières décennies, il est prudent de réduire l'examen à un niveau acceptable en se concentrant sur les problèmes des plaques FGMs seulement.

1.2 Définition des matériaux FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une forme de composite où les propriétés changent progressivement avec la position. Le gradient peut être adapté pour répondre aux besoins spécifiques grâce à l'utilisation d'éléments composites. Le changement dans la propriété du matériau est provoqué par une composition chimique dépendant de la position, la microstructure ou de l'ordre atomique.

Un type de composite vise à renforcer les propriétés des matériaux en mélangeant une phase dispersée de façon homogène dans la matrice. Un autre type de composite est caractérisée par des caractéristiques différentes de matériaux sur des surfaces séparées ou dans des parties séparées. La plupart des FGM ont une composition graduellement variée entre les différents constituants. Ceci élimine l'inadéquation des propriétés des matériaux ; ainsi les contraintes thermiques (résiduelles) dans des pièces qui peuvent causer de la fatigue peuvent être diminuées de façon significative. Dans le même temps, les propriétés d'un FGM sont conçues pour répondre aux différentes exigences, lorsque ces exigences sont plus difficiles à satisfaire complètement à travers l'approche des matériaux composites ou des méthodes de traitement des matériaux conventionnels.

CHAPITRE 1 : Recherche bibliographique sur les plaques FGM

1.3 Concept des matériaux fonctionnellement gradués :

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai.

L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion.

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des Barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc....

Généralement, les FGM sont fabriqués à partir des matériaux isotropes tels que les céramiques et les métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau 1.1

Tableau 1.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure 1.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch et al., 1986].

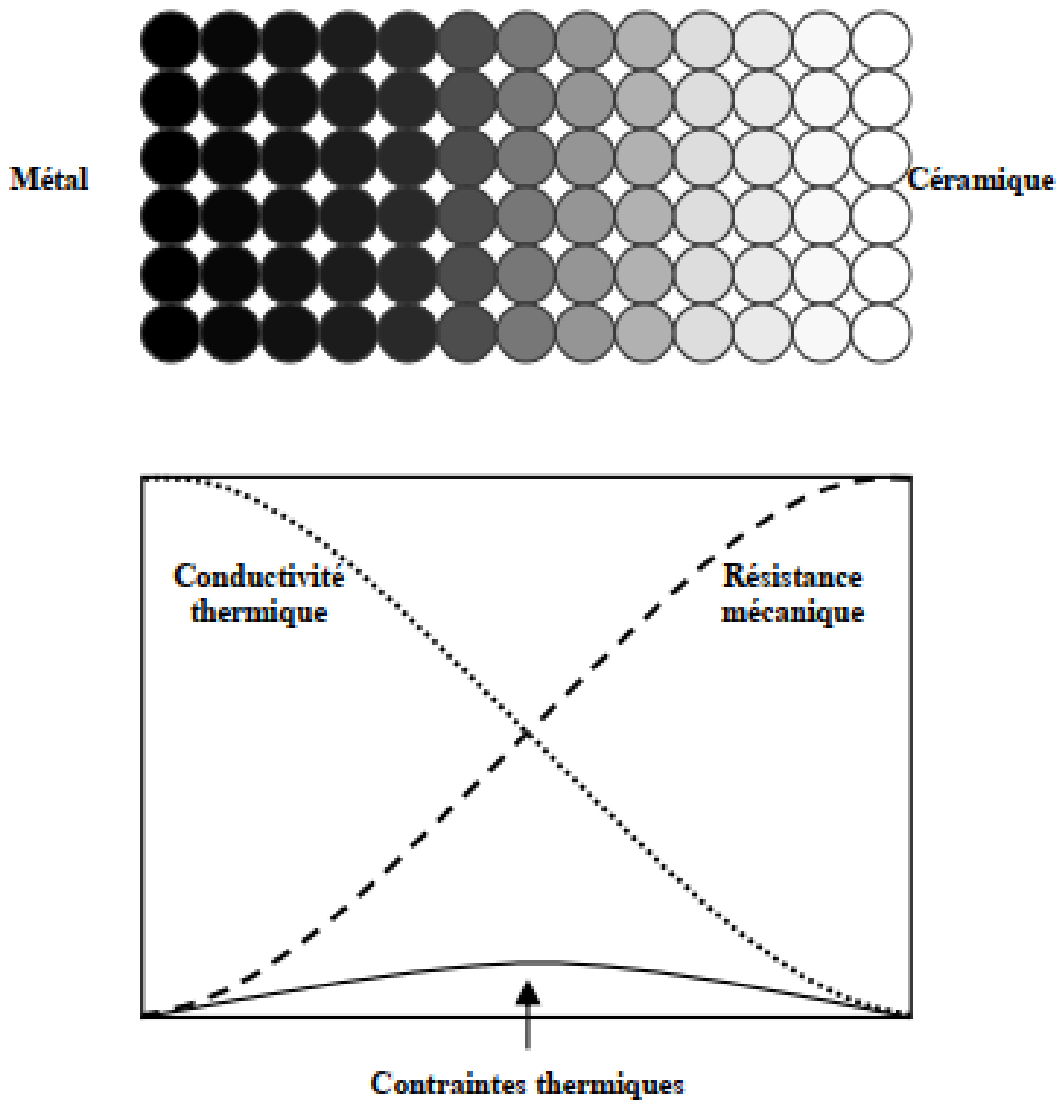


Figure 1.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Houari, 2011].

La figure 1.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

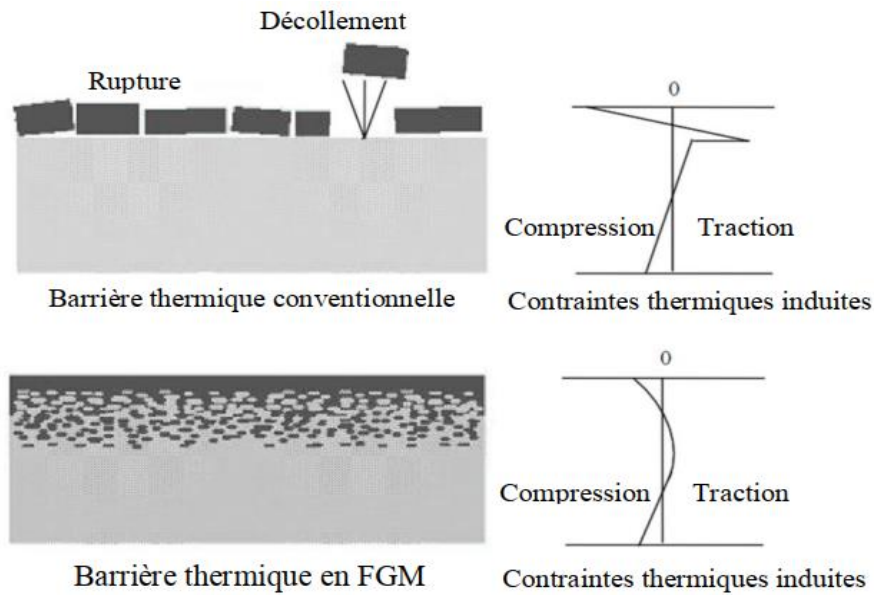


Figure 1.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [Houari, 2011].

1.4 Idée générale du développement des FGM :

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur La technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et L'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer Des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les Programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont Appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de Température de l'ordre de 1300°C . A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu Pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus Grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé Pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi Élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc.

1.5. Les Modèles de FGM

1.5.1. Modèle Voigt

Le modèle Voigt, introduit à l'origine par Voigt [Voigt, 1889], est un modèle d'homogénéisation bien connu et généralement utilisé pour prédire les propriétés élastiques efficaces pour les différents types de matériaux composites. Le modèle Voigt est relativement simple ; ce modèle est fréquemment utilisé Pour estimer les propriétés effectives des composites biphasés, ce modèle suppose que la déformation n'est pas modifiée dans le chargement des coordonnées du matériau [Gasik, 1998]. Sur la base de l'hypothèse, le module de Young effectif E et le rapport de Poisson des composites biphasés peut être prédit par

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad 1.1a$$

$$V = V_c V + V_m (1 - V) \quad 1.1b$$

1.5.2. Modèle Reuss

L'hypothèse de base pour les propriétés effectives dérivées par Reuss [Reuß, 1929], stipule que la contrainte moyenne totale à une échelle macroscopique est considérée comme identique dans chaque phase sous une contrainte uniforme équivalente. En d'autres termes, ce modèle est connu comme la règle inverse du modèle de Voigt [Akbarzadeh, 2015].

Ainsi, le module d'Young effectif et le coefficient de Poisson se présentent comme suit :

$$E(z) = \frac{E_c E_m}{E_c (1 - V_c) + E_m V_c} \quad 1.2a$$

$$V = \frac{v_c v_m}{v_c (1 - V) + v_m V} \quad 1.2b$$

1.5.3. Modèle Tamura

Le modèle Tamura utilise en fait une règle linéaire de mélanges, introduisant un paramètre d'ajustement empirique connu

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad 1.3$$

Les estimations pour $q = 0$ correspondent à la règle de Reuss et avec $q = \infty$ à la règle de Voigt, étant indifférente à la considération de quelle phase est matrice et laquelle est particulière [Bouiadjra, 2018].

CHAPITRE 1 : Recherche bibliographique sur les plaques FGM

Certes, la méthode Tamura dépend fortement des valeurs de q et il faut tenir compte du fait que les FGMs doivent généralement avoir une plage de ces valeurs, variant selon l'épaisseur du matériau [Gasik, 2003]. Même lorsqu'un composite homogène (non gradué) est considéré, les valeurs de q changent avec le degré de déformation plastique. Le module de Young effectif se présente comme suit :

$$E(z) = \frac{(1-V_c)E_m(q-E_c) + V_cE_c(q-E_m)}{(1-V_c)(q-E_c) + V_cE_c(q-E_m)} \quad 1.4$$

1.5.4. Modèle Mori-Tanaka

Le schéma de Mori-Tanaka est un modèle d'homogénéisation bien connu et généralement utilisé pour prédire les propriétés élastiques efficaces pour les différents types de FGM. Selon le modèle de Mori-Tanaka, les modules de cisaillement effectif (G) et de volume (K) peuvent être énoncés dans la forme. Cette méthode basée sur l'hypothèse qu'un matériau composite biphasé constitué d'une matrice renforcée par des particules sphériques, réparties aléatoirement dans l'assiette. Selon le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka, le module de masse effectif (K) et le module de cisaillement effectif (G) sont donnés par [Mori, 1973].

$$K(z) = K_m + \frac{V_c(K_c - K_m)}{1 + (1-V_c)3(K_c - K_m) / (3K_m + 4K_c)} \quad 1.6a$$

$$G(z) = G_m + \frac{V_c(G_c - G_m)}{1 + (1-V_c)(G_c - G_m) / (G_m + f_1)} \quad 1.6b$$

$$f_1 = \frac{G_m(9k_m + 8G_m)}{6(k_m + 2G_m)} \quad 1.6c$$

À l'aide des modules de cisaillement et de volume, le module de Young effectif et le coefficient de Poisson sont alors exprimés comme :

$$E_z = \frac{9k_z G_z}{3k_z + G_z} \quad 1.6d$$

$$V = \frac{3k_z - 2G_z}{2G_z + 3K_z} \quad 1.6e$$

1.5.5. Comparaison des modèles micromécaniques

Les estimations du module d'Young et du coefficient de Poisson d'un composite biphasé renforcé de particules, à l'aide des six modèles micromécaniques susmentionnés, sont comparées aux figures I.4/5. Le composite biphasé considéré est un composite à matrice métallique constitué d'une matrice d'aluminium et d'inclusions céramiques sphériques parfaitement liées. Les résultats estimés sont représentés en fonction de la fraction volumique des inclusions (céramique).

CHAPITRE 1 : Recherche bibliographique sur les plaques FGM

Il convient de mentionner que le groupement de particules (agglomération), l'état d'interface de la matrice et des particules, et la taille des particules pourraient affecter les propriétés multifonctionnelles des composites renforcés de particules. Comme observé dans, ces paramètres ont des effets significatifs sur la déformation plastique ainsi que dans les composites contenant des particules nanométriques [Fu, 2008]. L'influence de l'agrégation des particules, des paramètres interfaciaux et de l'effet de la taille sur les propriétés élastiques efficaces est négligée.

Comme le montrent la figure 1.3, les approximations de Voigt et de Reuss tracent les limites supérieures et inférieures pour l'estimation du module de Young. Alors que l'estimation de Reuss pour le module de Young pourrait être 48% inférieure à l'estimation de Voigt pour la fraction volumique de $V = 0,5$, les limites de Hashin-Shtrikman fournissent une capture de bande d'estimation réduite par les limites supérieure et inférieure. Par exemple, l'estimation du module de Young en utilisant la borne inférieure (LB) Hashin-Shtrikman est 30% inférieure à son homologue utilisant la borne supérieure

(UB) Hashin-Shtrikman. Comme le montre la figure 1.4, les estimations faites par SCM, LRVE et Tamura ($q_T = -100\text{GPa}$) se situent dans les limites de Hashin-Shtrikman.

Il est à noter que les estimations de Tamura dépendent fortement de la valeur de q_T . La figure 1.4 révèle que le coefficient de Poisson n'obéit pas à la règle du mélange de type Voigt ou Reuss qui est cohérente avec les résultats de Zimmerman [Muller, 2013].

Bien que les FGMs soient généralement considérées comme des combinaisons de métal et de céramique en fait, elles peuvent être fabriquées par tout autre matériau différent. Ici, les variations de matériaux sont supposées être dans le sens de l'épaisseur de la micro poutre.

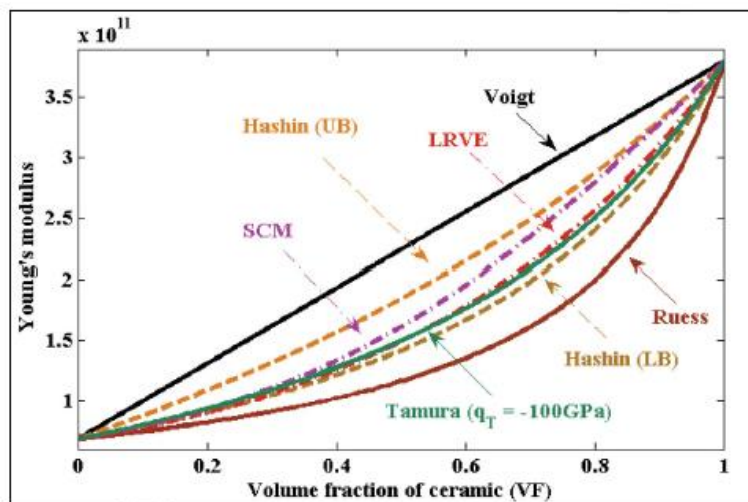


Figure 1.3 : Module de Young efficace en fonction de la fraction volumique de la céramique pour plusieurs modèles micromécaniques.

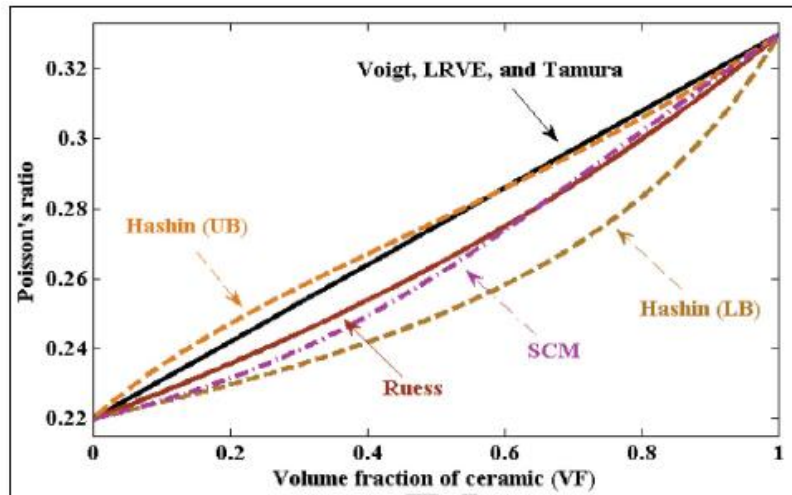


Figure 1. 4 : Coefficient de Poisson effectif en fonction de la fraction volumique de céramique pour plusieurs modèles micromécaniques.

Le volume fraction des armatures est modifié dans la direction z selon trois modèles différents: (a) modèles de loi de puissance (P-FGM), (b) Sigmoïde (S-FGM) et (c) modèles exponentiels (E-FGM).

CHAPITRE 2 :
LES DIFFERENTES
THEORIE DES PLAQUES

2.1 Introduction

La modélisation d'une structure ou d'un élément de structure est un moyen de transcrire son comportement et les lois qui le régissent. Il existe de nombreuses possibilités de modélisation qu'elle soit analytique, numérique.

Dans ces dernières années beaucoup de recherches ont été effectuées pour répondre aux problèmes liés à la modélisation des structures avec une forte anisotropie. Ce chapitre présente une revue bibliographique sur les différents types de modèles ou approches employés et les théories qui s'y rattachent. En général, ces hypothèses permettent la réduction d'un problème en trois dimensions à un problème bidimensionnelle.

2.2. Configuration géométrique :

Considérons une plaque rectangulaire d'une longueur a , largeur b et d'épaisseur h . La plaque est supposée être soumise à une charge mécanique transversale à la surface supérieure la figure. 2.1. Montre la Géométrie d'une plaque FGM

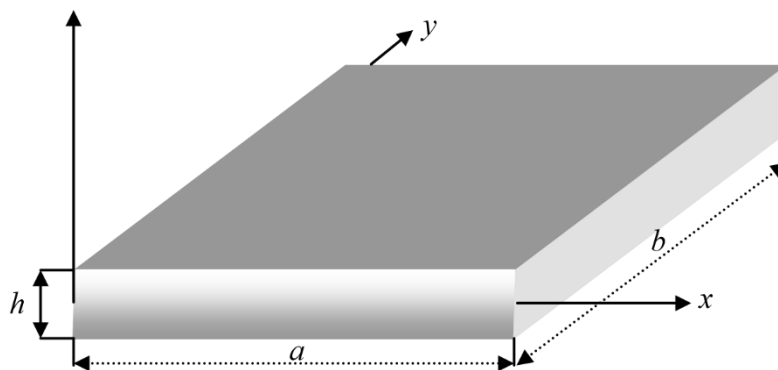


Figure 2.1 Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM

2.3. La théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT) :

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h). La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure 2.2), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

CHAPITRE 2 : Les différentes théories des plaques

Le champ de déplacement est donné par :

$$U(x, y, z) = U_0(x, y) - z \frac{\delta w_0}{\delta x} \quad 2-1a$$

$$V(x, y, z) = V_0(x, y) - z \frac{\delta w_0}{\delta x} \quad 2-1b$$

$$W(x, y, z) = W_0(x, y) \quad 2-1c$$

Avec (U_0, V_0, W_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$)

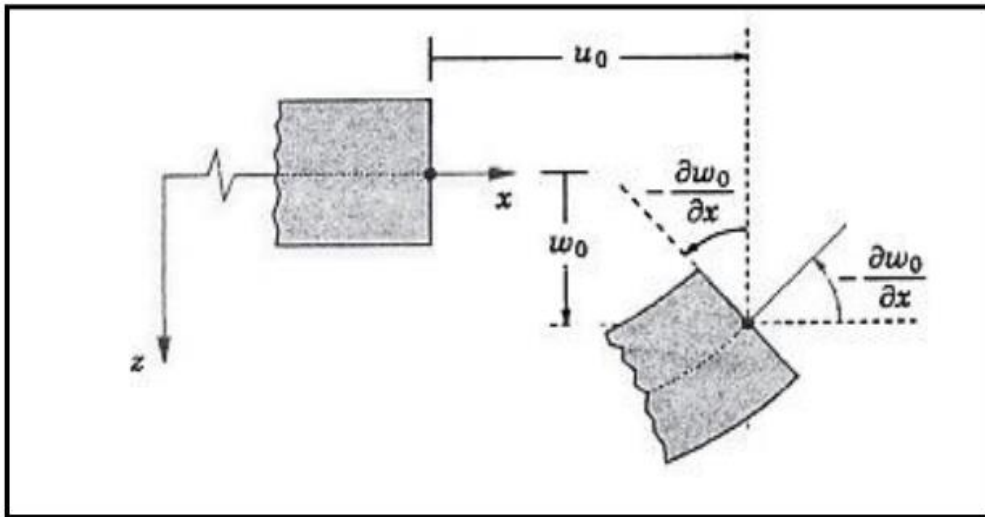


Figure 2.2 : Illustration de la plaque de Love- Kirchhoff

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

2.4 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre est l'extension de la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouvées dans les références (Reissner 1945 ; Mindlin 1951).

CHAPITRE 2 : Les différentes théories des plaques

La théorie du premier ordre est basé sur le champ de déplacement suivant :

$$U(x, y, z) = U_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad 2-2a$$

$$V(x, y, z) = V_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad 2-2b$$

$$W(x, y, z) = W_0(x, y) \quad 2-2c$$

Avec : (U_0, V_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane W_0 est le déplacement transversal et les rotations autour des axes y et x, respectivement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

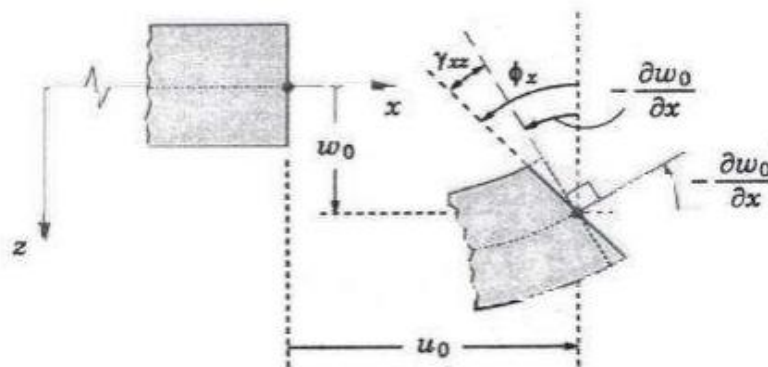


Figure 2.3 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997)

2.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al. 1949 ; Naghdi 1957 ; Reissner, 1975 ; Reddy 1984 ; Kantet Swaminathan 2002). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques matériaux à gradient de propriétés.

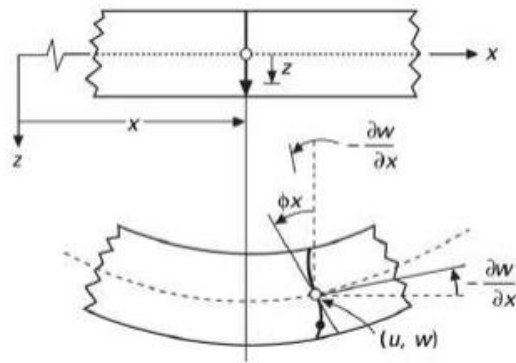


Figure 2.4: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$U(x, y, z) = U_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + \frac{z^2}{2}\psi_x(x, y) \quad 2-3a$$

$$V(x, y, z) = V_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + \frac{z^2}{2}\psi_y(x, y) \quad 2-3b$$

$$W(x, y, z) = W_0(x, y) + z\phi_z(x, y) \quad 2-3c$$

Avec : (U_0, V_0, W_0) sont les déplacements en membrane

2.6 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II-3) (M. Touratier 1991, Whitney. J.M, 1973, Nelson. R. B & D.R. Lorch, 1974 et, Lo. K.H & R.M. Christensen, 1977). Nous citons en particulier :

-L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan. S.A, 1969) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad 2-4$$

CHAPITRE 2 : Les différentes théories des plaques

-L'approche de Reissner (Reissner.E, 1945), Panc et Kaczkowski) avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad 2-5$$

-L'approche de Reddy (Reddy J.N. 1987), Levinson et Murthy (Murthy. M.V.V, 1981) avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad 2-6$$

Dans le modèle de Reddy (Reddy J.N. 1987), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier (M. Touratier 1991) avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad 2-7$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\pi h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad 2-8$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. On obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur. Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (Reddy. J.N, 1984).

CHAPITRE 2 : Les différentes théories des plaques

Récemment, Afaq et al (2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad 2-9$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

2.7 Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad 2-10$$

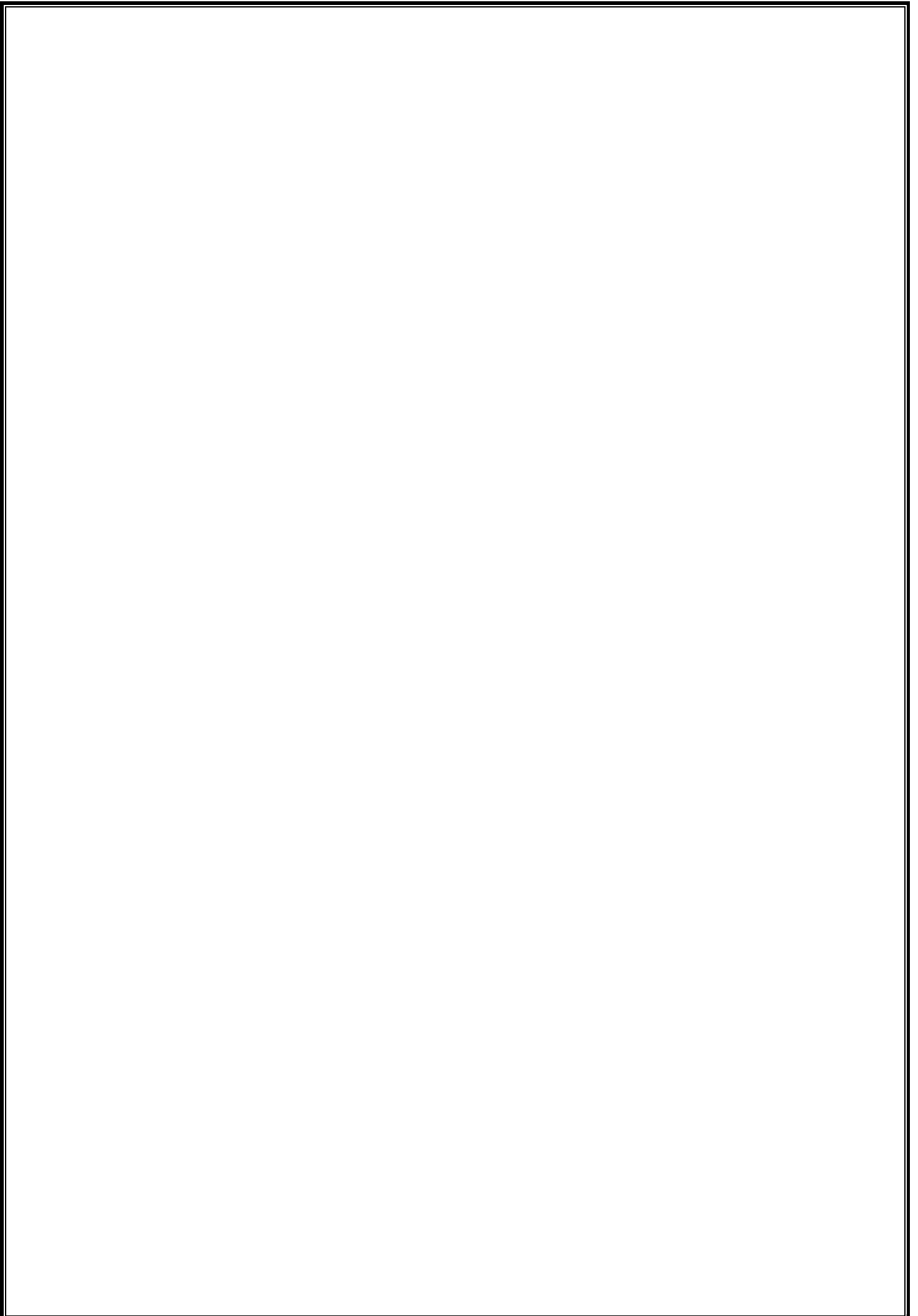
Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [36].

$$E(z) = (E_c + E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad 2-11$$

2.8. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les différents modèles de calcul des plaques minces et épaisses. A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

CHAPITRE 3 :
PRESENTATION DE
L'ELEMENT FINI
UTILISE



3.1 Introduction :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques

3.2. Historique sur La méthode des éléments finis :

Le mathématicien Courant décrivait une solution polynomiale par morceaux pour le problème de la torsion. Son travail ne fut pas remarqué par les ingénieurs et la procédure était impossible à l'époque en raison du manque d'ordinateurs. Dans les années 1950, le travail dans l'industrie aéronautique a introduit la méthode MEF aux ingénieurs en exercice. Un article classique décrivait le travail de la MEF qui était motivé par le besoin d'analyser les ailes delta, qui sont trop courtes pour que la théorie des faisceaux soit fiable. Le nom « élément fini » a été inventé en 1960. En 1963, la validité mathématique de la méthode MEF a été reconnue et la méthode a été étendue de ses débuts structurels pour inclure le transfert de chaleur, l'écoulement des eaux souterraines, les champs magnétiques et d'autres zones. De grands logiciels MEF d'utilisation générale ont commencé à apparaître dans les années 1970. À la fin des années 1980, le logiciel était disponible sur micro-ordinateurs, avec des graphiques en couleur et des préprocesseurs et post-processeurs. Vers le milieu des années 1990, environ 40 000 articles et livres sur la méthode MEF et ses applications avaient été publiés [16]

3.3. Formulation des éléments finis :

Cet élément finis traite la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre élevée. En outre, on utilise principalement les idées derrière la nouvelle FSDT Mantari et Granados, [19] que les auteurs incluent des termes intégrés indéterminés pour modéliser l'effet de gauchissement des théories de la déformation du cisaillement. Dans le présent travail, on combine cette idée pour développer la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre élevée avec le champ de déplacement modifié à son optimisation. La théorie actuelle ne contient que quatre variables et quatre équations gouvernantes, mais elle satisfait les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans nécessiter des facteurs de correction de cisaillement. Dans ce travail, d'autres suppositions simplifiées sont adoptées dans la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre élevée afin que le nombre de variables soit réduit.

3.3.1 Description de l'élément fini utilisé :

Dans ce travail l'élément choisi est un élément de forme rectangulaire à 4 nœuds (R4) avec cinq degré de liberté ($\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \phi_X, \phi_Y$) par nœud trois déplacements \mathcal{U}, \mathcal{V} et \mathcal{W} et deux rotations ϕ_X et ϕ_Y (figure 3.1)

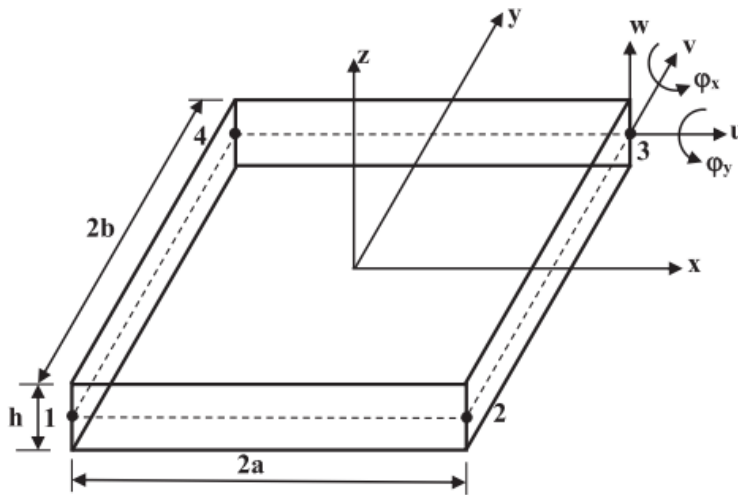


Figure 3.1:Géométrie et variables nodaes de l'élément fini

3.4. Champ des Déplacements et cinématique :

Le déplacement d'un point de coordonnées (x,y,z) est donnée par :

$$U(x, y, z) = U_0(x, y) + Z\phi_x(x, y)$$

$$V(x, y, z) = V_0(x, y) + Z\phi_y(x, y)$$

$$W(x, y, z) = f(Z) \times W_0(x, y) + (f(Z) - 1) \times G(x, y)$$

Chapitre 3 : Présentation de l'élément fini utilisé

Avec (U_0, V_0) sont les composantes du vecteur de déplacement dans le plan en un point quelconque de l'axe neutre dans les directions x et y, respectivement.

W_0 est le déplacement transversal des points du plan neutre de la plaque. Et ϕ_y est la contribution de l'étirement du déplacement dans la direction transversale.

La variable ϕ_y sera éliminée dans l'hypothèse d'une contrainte de cisaillement nulle aux surfaces supérieure et inférieure.

Des contraintes de cisaillement transversales sont distribuées quadratiquement dans l'épaisseur.

Les composantes de vecteur déformation sont donnés par :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + zk_y$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = f(z)\gamma_{xz}^0; \gamma_{yz} = f(z)\gamma_{yz}^0$$

$$f(z) = C\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix}$$

$$\{\gamma_z\} = f(z)\{\gamma_z^0\} \quad 3-1$$

$$\{\gamma_z\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = f(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta u_0}{\delta x} \\ \frac{\delta v_0}{\delta x} \\ \frac{\delta u_0}{\delta y} + \frac{\delta v_0}{\delta x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\delta^2 w_b}{\delta x^2} \\ -\frac{\delta^2 w_b}{\delta y^2} \\ -2\frac{\delta^2 w_b}{\delta x \delta y} \end{Bmatrix} \quad 3-2$$

Les relations linéaires constitutives de la plaque FG peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. k est un facteur de correction de cisaillement qui est analogue à un facteur de correction de cisaillement proposée par Mindlin (1951).

En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation précédente, les coefficients de rigidités, Q_{ij} , peuvent être exprimés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} 3-3a$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} 3-3b$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} 3-3c$$

3.5 Les efforts résultants :

Pour éviter la flexion de la membrane causée par l'asymétrie de la plaque en fonction de l'épaisseur, la force et les moments sont calculés par rapport au plan neutre qui ne coïncide pas avec le plan médian de la plaque, comme illustré.

$$Z_{NP} = Z - e$$

La force de membrane due à la flexion au niveau du plan neutre doit être nulle, ce qui conduit à l'expression de la position du plan neutre.

$$e = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) z dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz}$$

Les résultantes des efforts, N , M et S sont Exprimées par :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})(z-e) dz \\ (S_{xz}, S_{yz}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \end{aligned}$$

3.6. Le principe de l'énergie potentielle totale :

L'énergie potentielle totale d'une plaque FGM peut être exprimée comme suit :

$$\Pi = U - W$$

Où U et W sont l'énergie potentielle de déformation et le travail des forces externes par rapport au plan neutre Z_{N-P}

$$U = \frac{1}{2} \int (\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} + \{\gamma_z\}^T \{\tau_z\}) dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int (\{\varepsilon_0\}^T [A] \{\varepsilon_0\} + \{K\}^T [D] \{K\}) dV + \{\gamma_z^0\} [A_s] \{\gamma_z^0\} d\Omega$$

Où V et Ω sont respectivement le volume et la surface supérieure de la plaque.

[A],[D] et [As] sont les matrices de rigidité réduites par rapport au plan neutre. Ils peuvent être écrits comme suit :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = A_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1-\nu^2)} dz$$

$$A_{12} = A_{21} = \nu A_{11}$$

$$A_{66} = A_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1-\nu^2)} dz$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = D_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1-\nu^2)} (z-e)^2 dz$$

$$D_{12} = \nu D_{11}$$

$$D_{66} = D_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1-\nu^2)} (z-e)^2 dz$$

$$[A_s] = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix}$$

Le travail externe de la force de chargement distribuée $q(x, y)$ d'une plaque FGM peut être donné par :

$$W = \int q(x, y) w_0(x, y) d\Omega$$

3.7. Fonction d'interpolation :

Le champ de déplacements d'un point M (x, y) dans l'élément peut être défini par :

$$\delta_i(x, y) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(x, y) \delta_i^{\alpha} \quad (i= 1, 2, 3, 4, 5)$$

Où $\delta_i(x, y)$ est le vecteur de déplacement d'un point donné.

M (x, y) à l'intérieur de l'élément ; δ_i^{α} et $N_{\alpha}(x, y)$ sont des vecteurs de déplacement et les fonctions de forme de Lagrange bilinéaires associées au nœud α , respectivement. Au nœud α , respectivement.

$$\delta^{\alpha} = u_0^{\alpha}, v_0^{\alpha}, w_0^{\alpha}, \varphi_x^{\alpha}, \varphi_y^{\alpha} \quad (\alpha=1, 2, 3, 4)$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4ab} (a-x)(b-y)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{4ab} (a+x)(b-y)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{4ab} (a+x)(b+y)$$

$$N_4(x, y) = \frac{1}{4ab} (a-x)(b+y)$$

La déformation-déplacement peut être donnée par la relation contrainte-déplacement :

$$\{\varepsilon_0\} = [B_m] \{q\}$$

$$\{k\} = [B_b] \{q\}$$

$$\{\gamma_z^0\} = [B_s] \{q\}$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} N_{\alpha,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{\alpha,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{\alpha,y} & N_{\alpha,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\alpha= 1, 2, 3, 4)$$

$$[B_b] = \begin{bmatrix} 000N_{\alpha,x} & 0 \\ 000N_{\alpha,y} & \\ 000N_{\alpha,y}N_{\alpha,x} & \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 00 & N_{\alpha,x}N_{\alpha} & 0 \\ 00 & N_{\alpha,y} & 0N_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

3.8. Dérivation des matrices de rigidité élémentaires :

Le principe de l'énergie potentielle totale a été utilisé pour dériver

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément.

L'expression de l'énergie potentielle totale peut être écrite comme suit :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\{q\}^T ([B_m][A_m] + [B_b]^T [D][B_b] + [B_s]^T [A_s][B_s]) \{q\} dydx - \int_{-b}^b \int_{-a}^a q(x,y) \{q\}^T \{N(x,y)\}^T dx dy$$

L'annulation de la première variation de l'énergie potentielle totale par rapport aux valeurs nodales {q} conduit à l'équation d'équilibre suivante :

$$[k_e] \{q\} = \{F_e\}$$

$$[k_e] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_m][A] + [B_m]^T [D][B_b] + [B_s]^T [A_s][B_s]) dydx$$

$$\{F_e\} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a q(x,y) \{N(x,y)\}^T dx dy$$

3.9 Présentation du programme :

3.9.1 Introduction :

Dans cette étude on a utilisé un programme en langage FORTRAN77, pour calculer les déplacements et les moments des plaques FGM rectangulaire.

3.9.2 Description des « subroutines » du programme :

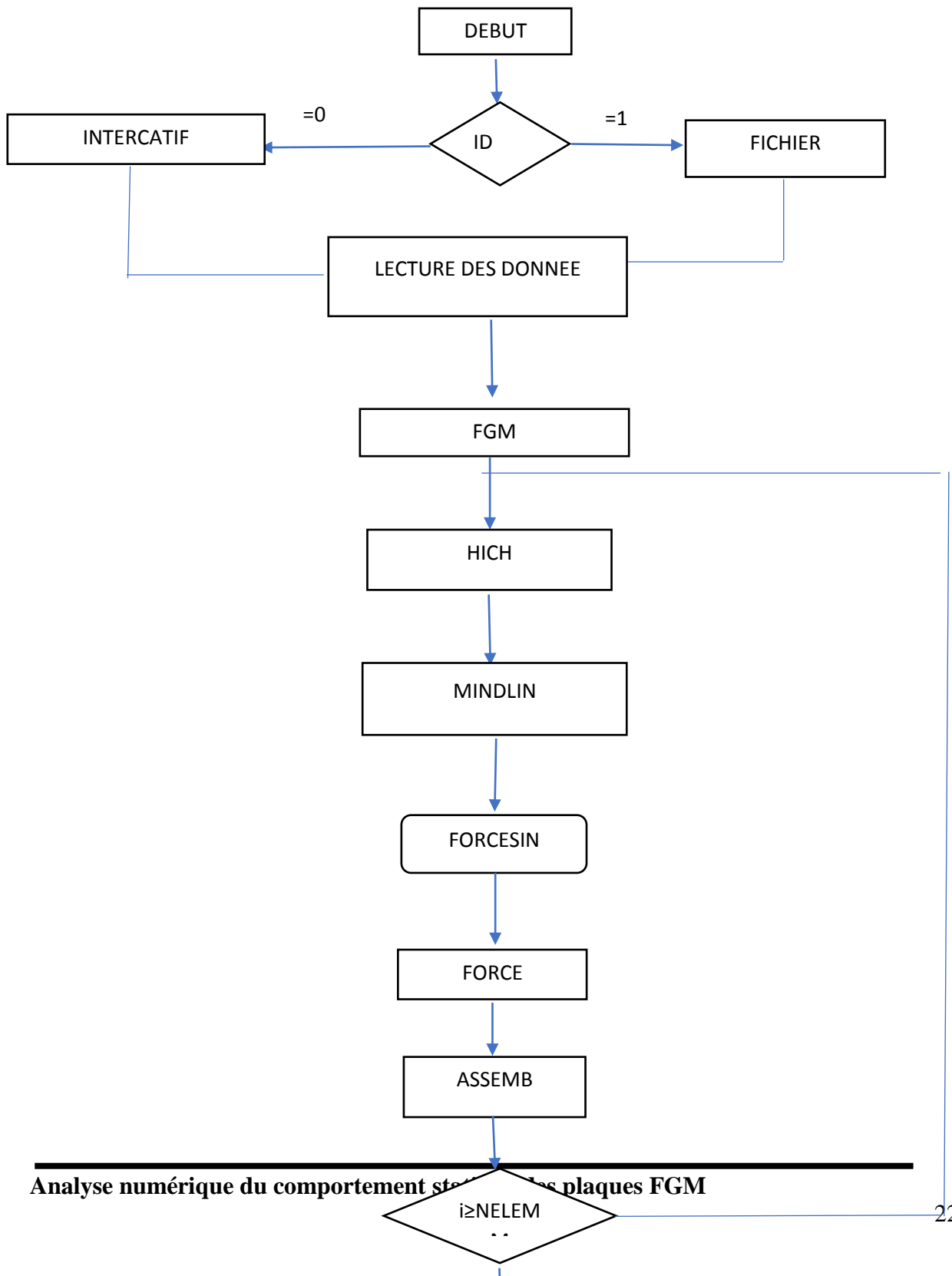
Tableau 3.1: Fonctions des subroutines.

Subroutines	Fonction
FGM	Calcul les caractéristiques du matériau
Hich	Création des tableaux de localisation
MINDLIN	Calcul des matrices de rigidité élémentaires
Force	Calcul des vecteurs force élémentaires due à une charge uniforme
Forcesin	Calcul des vecteurs force élémentaires due à une charge sinusoïdale
ASSEM	Assemblage des matrices et des vecteurs force
Limit1	Introduction des conditions des limites

Chapitre 3 : Présentation de l'élément fini utilisé

Gauss	Résolution du système d'équation et calcul des déplacements nodaux
Contrainte	Calcul des efforts et des moments

3.9.3 Présentation de l'organigramme du programme :



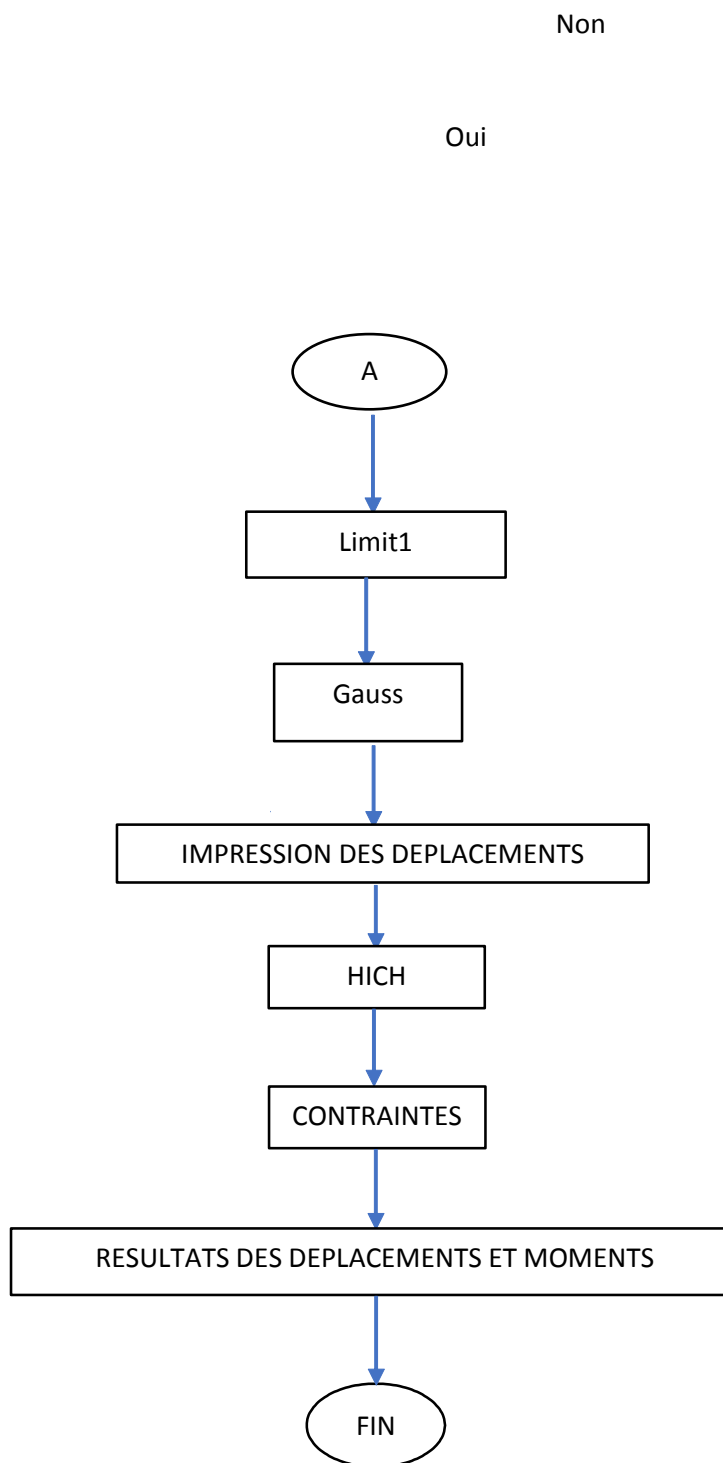


Figure 3.2 :Organigramme du programme.

3.10. Validation numérique d'élément fini dans l'analyse dynamique des plaques :

Dans cette section, deux exemples numériques sont présentés pour vérifier la précision de la présente théorie. À fin de voir l'efficacité du modèle présenté dans ce mémoire, Les propriétés des matériaux utilisés sont les suivantes :

- Céramique : $E_c = 380 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$
- Métal : $E_m = 70 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$

Tableau 3.2 : La flèche \widehat{W} pour une plaque FGM carré $\frac{L}{l} = 1$ simplement appuyées et soumise à un chargement sinusoïdal avec un épaisseur $\frac{l}{h} = 10$

\widehat{W}				
P	8 × 8	12 × 12	16 × 16	Zenkour et Al
0	0.2938	0.2951	0.2955	0.2960
1	0.5844	0.5870	0.5878	0.5889
2	0.7526	0.7558	0.7570	0.7573
4	0.8778	0.8815	0.8827	0.8819
5	0.9080	0.9118	0.9131	0.9118
10	1.0064	1.0104	1.0118	1.0089

Tableau 3.3 : La flèche \widehat{W} pour une plaque FGM carré $\frac{L}{l} = 1$ simplement appuyées et soumise à un chargement uniforme avec un épaisseur $\frac{l}{h} = 10$

\widehat{W}				
P	8 × 8	12 × 12	16 × 16	Zenkour et Al
0	0.4646	0.4655	0.4662	0.4665
1	0.9247	0.9270	0.9278	0.9287
2	1.1904	1.1933	1.1944	1.1940
4	1.3868	1.3900	1.3911	1.3890
5	1.4340	1.4373	1.4383	1.4356
10	1.5881	1.5916	1.5929	1.5876

3.10. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié la formulation et la validité de l'élément utilisé pour analyser le comportement statique des plaques FGM. En particulier, nous sommes intéressés à calculer le déplacement de cette dernière. Pour ce faire, les résultats obtenus par notre élément ont été comparés avec ceux obtenus analytiquement par **Zenkour**. Les différents résultats (Tableau 3.2 et 3.3) ont montré la rapidité de convergence et la stabilité de l'élément utilisé.

CHAPITRE 4 :

ETUDE PARAMETRIQUE

Chapitre 4 : Etude Paramétrique

4.1 Introduction :

Après avoir validé l'élément fini utilisé (chapitre III) et s'être assuré du bon fonctionnement de notre programme, on procède à une étude paramétrique, qui consiste à varier différents paramètres pour mettre en évidence l'effet de chaque paramètre sur le comportement statique des plaques FGM.

Dans cette étude, un maillage de (16×16) a été adopté.

4.2.1 plaques FGM :

4.2.1.1 Effet de rapport de la dimension de la plaque ($\frac{L}{l}$) :

On considère une plaque FGM carrée avec différentes dimension ($L ; l$) le rapport d'épaisseur $\frac{l}{h} = 10$ les caractéristiques mécaniques sont ceux présentés dans **Le tableau 4.1.**

Les conditions aux limites considérées sont :

- Plaque simplement appuyé (SSSS)
- Plaque encastree (EEEE)
- Type de chargement : uniforme et sinusoidal

Les valeurs des flèches centrales non-dimensionnelles sont normalisée par la relation suivante

$$: \hat{W} = \frac{10h^3 E_c}{L^4 q_0} w\left(\frac{L}{2}, \frac{l}{2}\right)$$

Tableau 4.1. Les caractéristiques mécaniques des plaques FGM

Propriétés mécaniques	Ec	Em	V
	380 GPa	70 GPa	0.3

Tableau 4.2. : La flèche \hat{W} en fonction du rapport $\frac{L}{l}$ pour une plaque FGM simplement appuyés et soumise à un chargement uniforme avec un épaisseur $\frac{l}{h} = 10$

\hat{W}				
Type	$\frac{L}{l}=1$	$\frac{L}{l}=1.5$	$\frac{L}{l}=2$	$\frac{L}{l}=2.5$
P=0	0.4662	0.092	0.030	0.013

Chapitre 4 : Etude Paramétrique

P=1	0.9278	0.109	0.037	0.016
P=2	1.1944	0.119	0.042	0.018
P=5	1.4383	0.128	0.045	0.023
P=10	1.5929	0.133	0.049	0.020

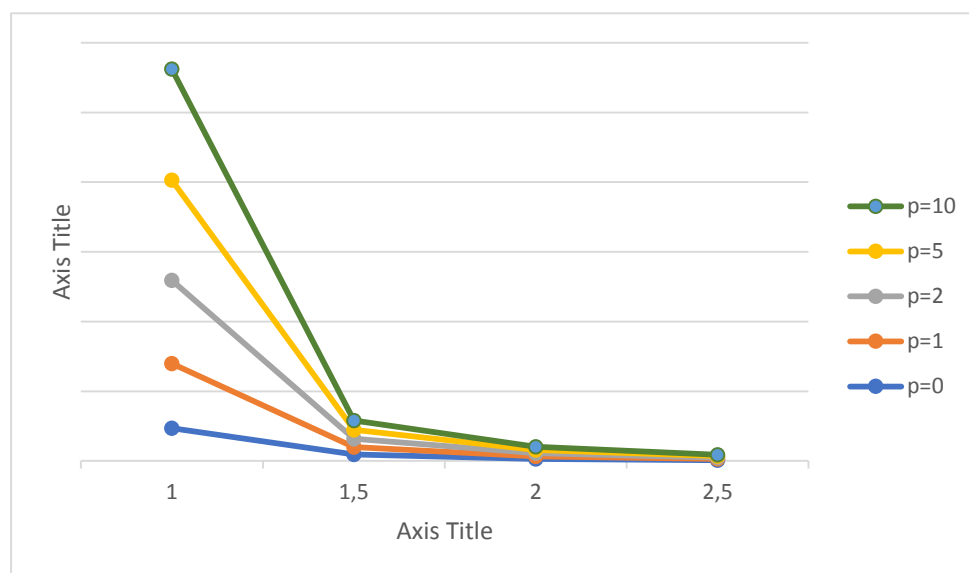


Figure 4.1. : variation de la flèche centrale sans dimensions \widehat{W} en fonction du rapport $\frac{L}{l}$. Cas d'une plaque FGM soumise à un chargement uniforme suivant l'épaisseur $\frac{l}{h} = 1$

Tableau 4.3. : La valeur du moment en fonction du rapport $\frac{L}{l}$ pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à un chargement uniforme avec un épaisseur $\frac{l}{h} = 1$

Moments												
P	$\frac{L}{l} = 1$			$\frac{L}{l} = 1.5$			$\frac{L}{l} = 2$			$\frac{L}{l} = 2.5$		
	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	$M_x \cdot 10^{-3}$	M_y	M_{xy}
0	0.73	0.73	-1.18	0.042	0.082	-0.105	0.012	0.026	-0.034	4.7	0.011	-0.014

Chapitre 4 : Etude Paramétrique

1	0.73	0.73	-1.18	0.042	0.082	-0.105	0.012	0.026	-0.034	4.7	0.011	-0.014
2	0.73	0.73	-1.18	0.042	0.082	-0.105	0.012	0.026	-0.034	4.7	0.011	-0.014
5	0.73	0.73	-1.18	0.042	0.082	-0.105	0.012	0.026	-0.034	4.7	0.011	-0.014
10	0.73	0.73	-1.18	0.042	0.082	-0.105	0.012	0.026	-0.034	4.7	0.011	-0.014

Tableau 4.4. : La flèche en fonction du rapport $\frac{L}{l}$ pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à une charge sinusoïdale avec un épaisseur $\frac{l}{h} = 1$

\widehat{W}				
Type	$L/l=1$	$L/l=1.5$	$L/l=2$	$L/l=2.5$
P=0	0.2955	0.086	0.028	0.011
P=1	0.5878	0.096	0.032	0.014
P=2	0.7570	0.103	0.035	0.015
P=5	0.9131	0.108	0.037	0.016
P=10	1.0118	0.112	0.039	0.017

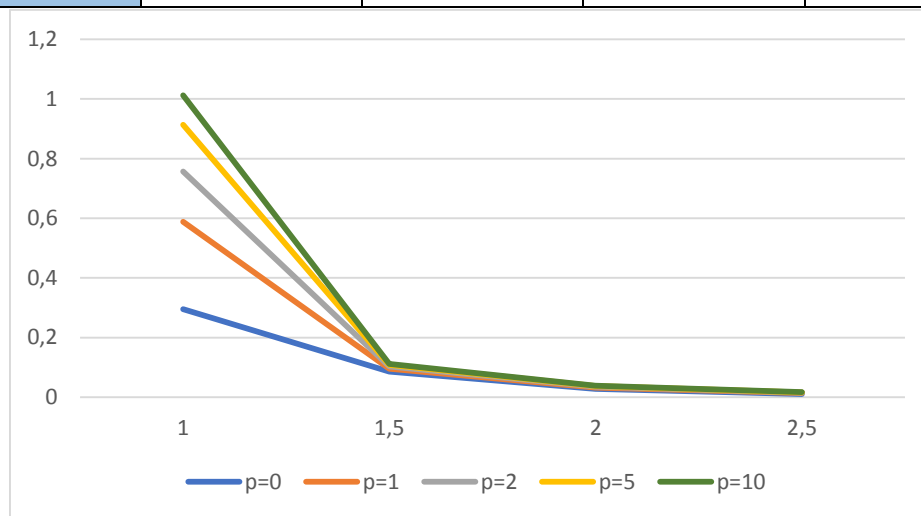


Figure 4.2. : variation de la flèche centrale sans dimensions \widehat{W} en fonction du rapport $\frac{L}{l}$. Cas d'une plaque FGM soumise à un chargement sinusoïdal suivant l'épaisseur $\frac{l}{h} = 1$

Tableau 4.5. : La valeur du moment en fonction du rapport $\frac{L}{l}$ pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à une Charge sinusoïdale avec un épaisseur $\frac{l}{h} = 1$

Moments												
P	$\frac{L}{l} = 1$			$\frac{L}{l} = 1.5$			$\frac{L}{l} = 2$			$\frac{L}{l} = 2.5$		
	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	$M_x \cdot 10^{-3}$	M_y	M_{xy}	$M_x \cdot 10^{-3}$	$M_y \cdot 10^{-3}$	M_{xy}
0	1.18	1.18	-0.66	0.026	0.04	-0.091	8.2	0.016	-0.29	3.2	7.4	-0.0117

Chapitre 4 : Etude Paramétrique

1	1.18	1.18	-0.66	0.026	0.04	-0.091	8.2	0.016	-0.29	3.2	7.4	-0.0117
2	1.18	1.18	-0.66	0.026	0.04	-0.091	8.2	0.016	-0.29	3.2	7.4	-0.0117
5	1.18	1.18	-0.66	0.026	0.04	-0.091	8.2	0.016	-0.29	3.2	7.4	-0.0117
10	1.18	1.18	-0.66	0.026	0.04	-0.091	8.2	0.016	-0.29	3.2	7.4	-0.0117

Tableau 4.6. : La flèche \widehat{W} en fonction du rapport $\frac{L}{l}$ pour une plaque FGM encastree et soumise à un chargement uniforme avec un épaisseur $\frac{l}{h} = 10$

\widehat{W}				
Type	$L/l=1$	$L/l=1.5$	$L/l=2$	$L/l=2.5$
P=0	0.1638	0.0542	0.0196	0.0082
P=1	0.3206	0.0856	0.0276	0.0113
P=2	0.4216	0.0888	0.0287	0.0117
P=5	0.4321	0.0921	0.0299	0.0122
P=10	0.4387	0.0942	0.0306	0.0126

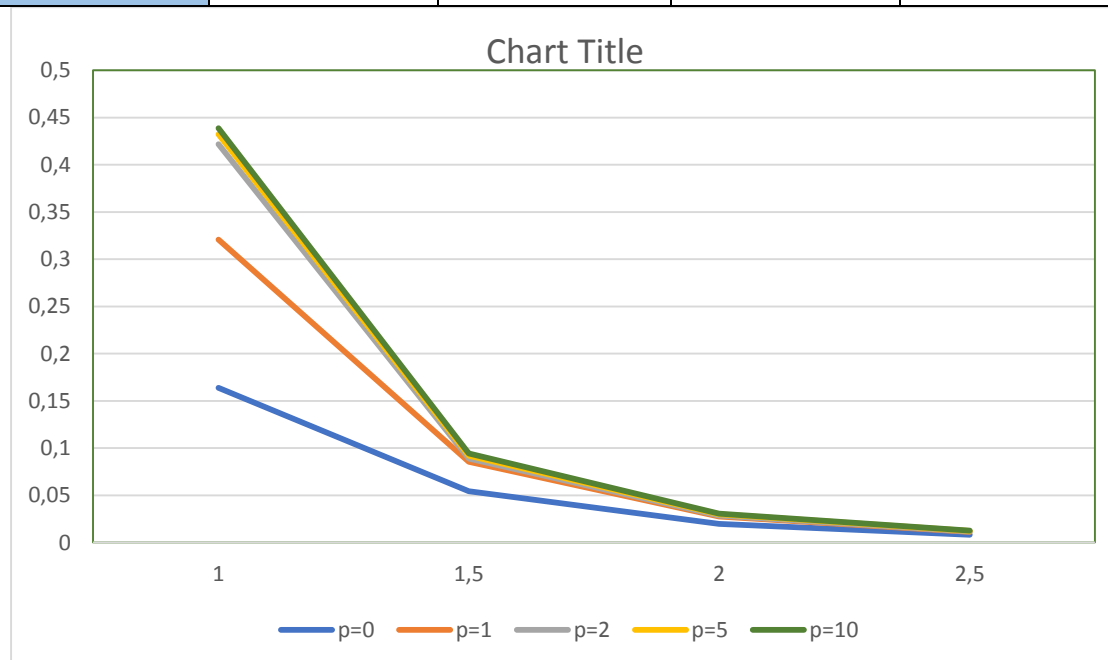


Figure IV.3. : variation de la flèche centrale sans dimensions \widehat{W} en fonction du rapport $\frac{L}{l}$. Cas d'une plaque FGM encastree soumise à un chargement uniforme suivant l'épaisseur $\frac{l}{h} = 10$

Chapitre 4 : Etude Paramétrique

Tableau 4.7. : La valeur du moment en fonction du rapport $\frac{L}{l}$ pour une plaque FGM encastree et soumise à une Charge uniforme avec un épaisseur $\frac{l}{h} = 1$

Moments												
P	$\frac{L}{l} = 1$			$\frac{L}{l} = 1.5$			$\frac{L}{l} = 2$			$\frac{L}{l} = 2.5$		
	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}
1	0.4670	0.4670	-0.0758	0.0910	0.1222	-0.018	0.0275	0.0334	-0.0063	0.0109	0.0137	-0.0027
2	0.4671	0.4671	-0.0787	0.0910	20.122	-0.093	0.0275	0.0334	-0.0065	0.0109	0.0137	-0.0028
5	0.4674	0.4674	-0.0891	0.0910	0.1022	-0.021	0.0275	0.0334	-0.0073	0.0109	0.0137	-0.0031
0	0.4672	0.4672	-0.0808	0.0910	0.1022	-0.019	0.0275	0.0334	-0.0067	0.0109	0.0137	-0.0029
10	0.4675	0.4675	-0.0933	0.0910	0.1022	-0.022	0.0275	0.0334	-0.0076	0.0109	0.0137	-0.0033

La variation de la flèche non dimensionnelle en fonction de rapport $\frac{L}{l}$ d'une plaque FGM sollicitée par différents chargement (uniforme et sinusoïdal) est indiquée sur les figures IV-1, IV-2 et IV-3. Il est a constaté que pour toutes les valeurs de p, la flèche non dimensionnelle tant vers la même valeur si le type de chargement est uniforme à partir de rapport $\frac{L}{l} = 2.5$. Lorsque la charge est sinusoïdale la flèche non dimensionnelle tant vers la même valeur à partir du rapport $\frac{L}{l} = 1.5$.

Pour les plaques encastrees d'après le Tableau IV-6 et la Figure IV-3 on constate que pour p=0 et p=1 la variation de la flèche est importante alors que pour p=2, p=5 et p=10 la valeur de flèche varie lentement jusqu'à le rapport $\frac{L}{l}$ atteint la valeur 2 en ce moment, pour toutes les valeurs de P, les courbes de la flèche ont pratiquement la même allure

4.2.2.2 Effet du rapport d'épaisseur sur la flèche centrale non dimensionnelle :

Dans cet exemple on considère une plaque FGM carré $\frac{L}{l} = 1$ pour montrer l'effet du rapport d'épaisseur sur la variation des flèches pour deux cas d'appuis :

- Plaque simplement appuyé (SSSS)

Chapitre 4 : Etude Paramétrique

- Plaque encadrée (EEEE)

Tableau 4.8 : La flèche en fonction du rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$ pour une plaque FGM encadrée et soumise à une charge uniforme avec $\frac{L}{l} = 1$

\widehat{W}					
P	$\frac{l}{h} = 5$	$\frac{l}{h} = 10$	$\frac{l}{h} = 20$	$\frac{l}{h} = 50$	$\frac{l}{h} = 100$
0	0.4080	0.1638	0.0619	7.46×10^{-3}	1.27×10^{-3}
1	0.4448	0.3206	0.0762	8.86×10^{-3}	1.41×10^{-3}
2	0.5921	0.4216	0.0845	9.47×10^{-3}	1.49×10^{-3}
5	0.8076	0.4321	0.0920	9.54×10^{-3}	1.56×10^{-3}
10	0.9426	0.4387	0.0999	9.95×10^{-3}	1.57×10^{-3}

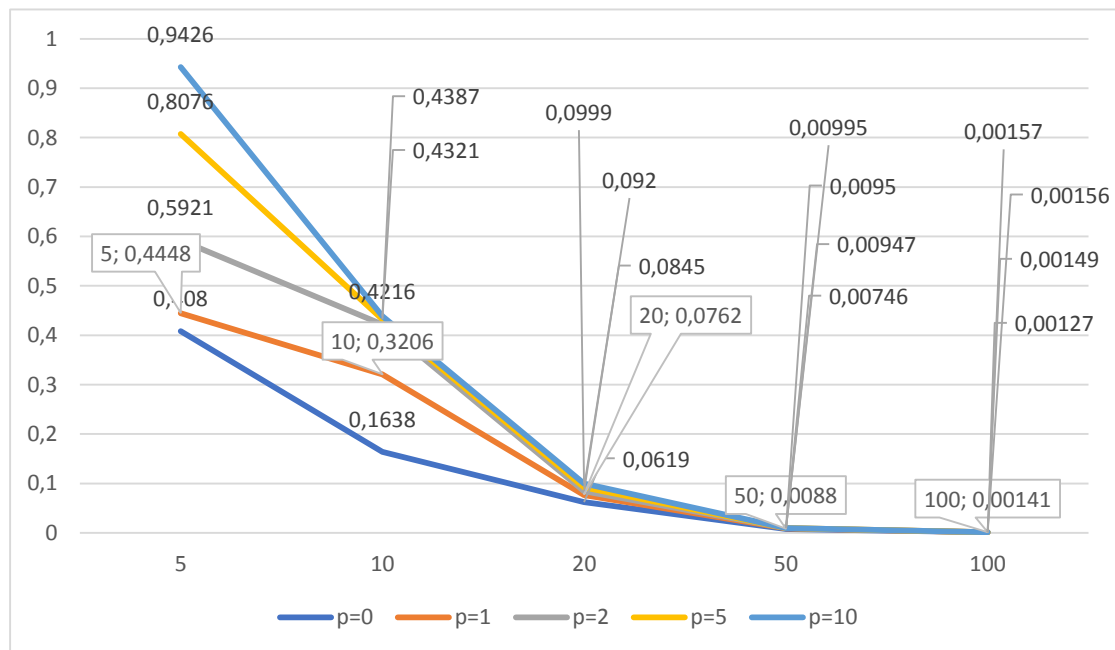


Figure 4.4 : Variation de la flèche centrale sans dimensions \widehat{W} en fonction du rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$ pour une plaque FGM encadrée et soumise à une charge uniforme avec $\frac{L}{l} = 1$

Tableau 4.9 : La valeur du moment en fonction du rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$ pour une plaque FGM encadrée et soumise à une charge uniforme avec $\frac{L}{l} = 1$

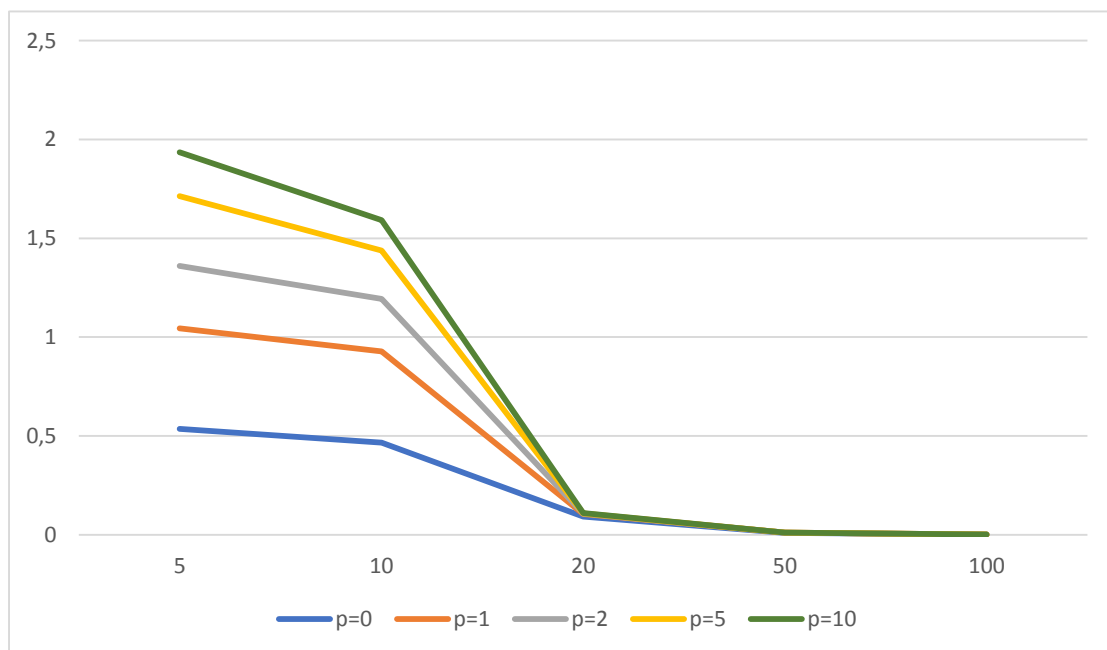
Moments					
	$\frac{l}{h} = 5$	$\frac{l}{h} = 10$	$\frac{l}{h} = 20$	$\frac{l}{h} = 50$	$\frac{l}{h} = 100$

Chapitre 4 : Etude Paramétrique

P	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	$M_x \cdot 10^{-3}$	$M_y \cdot 10^{-3}$	$M_{xy} \cdot 10^{-3}$	M_x	M_y	M_{xy}
0	3.74	3.74	1.02	0.46	0.46	0.08	0.58	0.58	6.28	3.72	3.72	5.95	4.66	4.66	7.21
1	3.74	3.74	0.97	0.46	0.46	0.075	0.58	0.58	5.99	3.72	3.72	5.91	4.66	4.66	7.19
2	3.74	3.74	1	0.46	0.46	0.078	0.58	0.58	6.16	3.72	3.72	5.93	4.66	4.66	7.2
5	3.74	3.74	1.09	0.46	0.46	0.089	0.58	0.58	6.8	3.72	3.72	6.02	4.66	4.66	7.23
10	3.74	3.74	1.28	0.46	0.46	0.09	0.58	0.58	7.08	3.72	3.72	6.07	4.66	4.66	7.24

Tableau 4.10 : La flèche en fonction du rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$ pour une plaque FGM simplement appuyée et soumise à une charge uniforme avec $\frac{l}{l} = 1$

\widehat{W}					
P	$\frac{l}{h} = 5$	$\frac{l}{h} = 10$	$\frac{l}{h} = 20$	$\frac{l}{h} = 50$	$\frac{l}{h} = 100$
0	0.5352	0.4655	0.0923	9.56×10^{-3}	1.56×10^{-3}
1	1.0446	0.9270	0.1039	0.010	1.60×10^{-3}
2	1.3601	1.1933	0.1065	0.0102	1.63×10^{-3}
5	1.7126	1.4373	0.1086	0.0104	1.65×10^{-3}
10	1.9350	1.5916	0.1100	0.0106	1.66×10^{-3}



Chapitre 4 : Etude Paramétrique

Figure 4.5 : variation de La flèche central sans dimension \widehat{W} En fonction du rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$ pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à une charge uniforme avec $\frac{l}{l} = 1$

Tableau 4.11 : La valeur du moment en fonction du rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$ pour une plaque FGM simplement appuyées et soumise à une charge uniforme avec $\frac{l}{l} = 1$

Moments															
P	$\frac{l}{h} = 5$			$\frac{l}{h} = 10$			$\frac{l}{h} = 20$			$\frac{l}{h} = 50$			$\frac{l}{h} = 100$		
	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	$M_x \cdot 10^{-3}$	$M_y \cdot 10^{-3}$	$M_{xy} \cdot 10^{-3}$	$M_x \cdot 10^{-4}$	M_y	$M_{xy} \cdot 10^{-4}$
0	4.48	4.48	3.99	0.73	0.73	-1.18	0.07	0.07	0.06	4.48	4.48	3.99	5.6	5.6	4.98
1	4.48	4.48	3.99	0.73	0.73	-1.18	0.07	0.07	0.06	4.48	4.48	3.99	5.6	5.6	4.98
2	4.48	4.48	3.99	0.73	0.73	-1.18	0.07	0.07	0.06	4.48	4.48	3.99	5.6	5.6	4.98
5	4.48	4.48	3.99	0.73	0.73	-1.18	0.07	0.07	0.06	4.48	4.48	3.99	5.6	5.6	4.98
10	4.48	4.48	3.99	0.73	0.73	-1.18	0.07	0.07	0.06	4.48	4.48	3.99	5.6	5.6	4.98

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV.9) et la (figure IV.5) on observe que la valeur de La flèche central sans dimension \widehat{W} pour une plaque carrée simplement appuyée, la flèche diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$.

Pour le rapport $\frac{l}{h} = 20$, la valeur de la flèche est constante pour toutes les valeurs de P.

Ce pendant que pour les plaques encastées, pour toutes les valeurs de P la flèche tant vers une seule valeur si le rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$ vaut 20

Chapitre 4 : Etude Paramétrique

4.3. Conclusion :

Ce chapitre a été consacré à l'étude des plaques FGM, en simulant leur comportement statique par l'application de la méthode des éléments finis. Certains résultats montrent que P n'influe pas sur les moments.

Dans le cas d'une plaque simplement appuyée la flèche diminue avec l'augmentation du rapport $\frac{l}{h}$ dans le cas d'une plaque encadrée la flèche augmente avec l'augmentation du rapport

CONCLUSION GENERALE

Pour l'analyse du comportement statique des plaques FGM, nous avons présenté un élément fini rectangulaire à 4 nœuds et 5 degrés de liberté par nœud. La cinématique adoptée est celle de la théorie d'ordre élevée. Cette théorie tient en compte des déformations dues au cisaillement transverse. La performance et l'efficacité d'élément utilisé sont démontrées à travers une série d'applications avec différentes conditions aux limites. La dernière partie de ce travail a été consacrée à une étude paramétrique, pour montrer l'influence des différents paramètres sur les valeurs des flèches centrale non-dimensionnelles et les moments fléchissant dans les plaques FGM. Les résultats ont montré que :

- Pour une plaque FGM simplement appuyée pour toutes les valeurs de p , la flèche non dimensionnelle tant vers la même valeur si le type de chargement est uniforme et lorsque le rapport $\frac{L}{l}$ dépasse 2.5. Ce pendant que si la charge est sinusoïdale la flèche non dimensionnelle tant vers la même valeur lorsque le rapport $\frac{L}{l}$ dépasse 1.5.
- Pour les plaques encastées, $p=0$ et $p=1$ la variation de la flèche est importante alors que pour $p=2$, $p=5$ et $p=10$ la valeur de flèche varie lentement jusqu'à le rapport $\frac{L}{l}$ atteint 2 en ce moment, pour toutes les valeurs de P , la flèche tant vers une seule valeur
- Pour les plaques carrées simplement appuyée, la valeur de La flèche central sans dimension \hat{W} diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$.

Pour le rapport $\frac{l}{h} = 20$, la valeur de la flèche est constante pour toutes les valeurs de P . et les moments restent constant

- pour les plaques encastées, pour toutes les valeurs de P la flèche tant vers une seule valeur si le rapport d'épaisseur $\frac{l}{h}$ vaut 20

REFERENCE

✚ INTRODUCTION GÉNÉRALE

Lanhe, W. (2004), “Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate”, *Compos Struct*, **64**, 211–218.

Matsunaga, H. (2009), “Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory”, *Compos Struct*, **90**, 76–86.

Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2012) “Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory”, *Journal of thermal Stresses*, **35**, 677–694.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **14**(1), 5-33.

Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013) “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Structural Engineering and Mechanics*, **48**, 547 – 567.

Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M. and Tounsi, A. (2013), “Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model”, *Steel and Composite Structures*, **15**(4), 399-423.

Duc, N.D., Tung, H.V. (2011) “Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations”, *Composite Structures*, **93**, 2874–2881.

Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2013), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942.

✚ CHAPITRE 1

Koizumi M. (1992), The concept of FGM. *Ceramic transaction, functionally graded materials* **34**, 3-10.

Kieback, B., Neubrand, Riedel, A. H. (2003), Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science and Engineering A362* 81–105.

Moya, J. S., Sanchez-Herencia, A. J., Requena, J. & moreno, R. (1992), Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters*, Vol. **14**, p.333-35.

Abdizadeh, H., (1997), Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'Alumine, Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon IFrance, 212p.

Mori T, Tanaka T1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting Inclusions. Acta Metall ;21 :571–4.

CHAPITRE 2

Afaq. K.S, (2003). Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.

Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory», Applied Mathematics and Mechanics, 925–942.

Kirchhoff. G, (1950). über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheid. Journal für reine und angewandte Mathematik, Vol .40, pages 51-88.

Lo. K.H & R.M. Christensen, (1977). A higher order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plates. journal of applied mechanics, Vol.44, N° 4, pages 663-668/669-676.

Murthy. M.V.V, (1981). An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA.

Reissner.E, (1945). The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77.

Hilderband, F.B, Reissner, E., Thomas, G.G. (1949), "Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N° 1833.

Kant.T, K. Swaminathan, (2002). Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite. Structure; 56 (4): 329-344

Reissner. E, (1975). On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures; 25 (5):495-502

Reddy. J.N, (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752.

M. Touratier 1991, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916.

Ambartsumyan. S.A, (1969). Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co.

Afaq. K.S, (2003).Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.

Reddy. J.N, (1999). Theory and Analysis of Elastic plates. Taylor & Francis, Philadelphia.

Reissner. E & Y. Stavesky, (1961). Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plate. Journal of Applied Mechanics. Vol.28, pages 402-408.

CHAPITRE 3

Zenkour M, Alghanmi RA (2018) Bending of functionally graded plates via a reined quasi-3D shear and normal deformation theory. Curved Layer Struct 5:190–200

Praveen GN, Reddy JN (1998) Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. Int J Solids Struct 35:4457–4476

Najaizadeh MM, Eslami MR (2002) Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression. Int J Mech Sci 44:2479–2493

Zhang D-G, Zhou Y-H (2008) A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. Comput Mater Sci 44:716–720

Prakash T, Singha MK, Ganapathi M (2009) Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates. Comput Mech 43(3):341–350

Article Title A five unknowns high-order shear deformation finite element model for functionally graded plates bending behavior analysis