

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم علوم المادة



مذكرة ماستر

ميدان علوم المادة
فرع الفيزياء
تخصص فيزياء طاقةوية والطاقات المتجددة
رقم: أدخل رقم تسلسل المذكرة

إعداد الطالب:
العواني خيرة
جفافة رميساء
يوم: 26/06/2022

حل معادلة باولي-شرودينغر للهازاز التوافقي في الفضاء المشوه بجبر سنايدر-دي سيتر

لجنة المناقشة:

| | | | |
|--------|-----------------------|--------|-------------|
| رئيسا | جامعة محمد خيضر-بسكرة | أ.مح ب | هدار مبارك |
| مقرر | جامعة محمد خيضر-بسكرة | أ.د | مختار فالتق |
| ممتحنا | جامعة محمد خيضر-بسكرة | أ.م أ | قرقب سعيدة |

السنة الجامعية : 2022-2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)

صدق الله العظيم

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك .. ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ..

ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك .. ولا تطيب الجنة إلا برويتك الله جل جلاله

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين .. سيدنا محمد

صلى الله عليه وسلم

إلى من أحمل اسمه بكل فخر

إلى من جرع الكأس فارغاً ليستقيني قطرة حب

إلى من كلت أنامله ليقدّم لنا لحظة سعادة

إلى من صد الأشواق عن دربي ليهد لي طريق العلم

إلى القلب الكبير *** والدي العزيز ***

إلى حكمتي وعلمي

إلى أدبي وحلمي

إلى طريقي المستقيم

إلى ينبوع الصبر والتفائل والأمل

إلى كل من في الوجود بعد الله ورسوله *** أمي العالمة ***

إلى سندي وقوتي وملاذي بعد الله

إلى من آثروني على أنفسهم

إلى من علموني علم الحياة

إلى من أظهروا لي ما هو أجمل من الحياة *** إخوتي ***



ر و ت ق د ر

الحمد لله الذي أدار لنا درجـة العلم والمعرفة وأعاننا على أداء هذا الواجب ووفقنا إلى إنجاز هذا العمل

أتوجه بجزيل الشكر والامتنان إلى كل من ساعدنا من قريب أو من بعيد على إنجاز هذا العمل، نخص بالذكر الأستاذ المشرف *****فائق مختار***** الذي لم يبخل علينا بتوجيهاته ونصائحه القيمة التي كانت عوناً لنا في إتمام هذا البحث.

ولا يفوتنا أن نشكر الأخ العزيز الذي كان سنداً لنا في إعداد هذا العمل

" شك لـخـصـر "

الفهرس

فهرس

الإهداء

شكر وتقدير

الفهرس

قائمة الثوابت

قائمة الأشكال

1..... مقدمة عامة

الفصل الأول: ميكانيك الكم غير النسبي بوجود السبين ومبدأ الشك لهايزنبرغ الموسع

1.1. نبذة تاريخية عن معادلة باولي 4

2.1. معادلة باولي في ميكانيك الكم 7

3.1. أهم علاقات ميكانيكا الكم المشوهة في نموذج سنايدر-دي سيتر 9

الفصل الثاني: معادلة باولي للهزاز في فضاء الزخم العادي

1.2. مقدمة 12

2.2. حل معادلة باولي بوجود الهزاز التوافقي 13

3.2. الخصائص الترموديناميكية 18

الفصل الثالث: معادلة باولي للهزاز التوافقي في فضاء الزخم المشوه بجبر سنايدر-دي سيتر

1.3. مقدمة 25

2.3. التشوه في الفيزياء الكمية 25

3.3. الحل الدقيق لمعادلة باولي بوجود الهزاز التوافقي في فضاء سنايدر-دي سيتر... 26

37..... خاتمة عامة

39..... قائمة المراجع

ملخص

قائمة الثوابت

$$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

ثابت بلانك (Planck's constant):

$$c = 2.99972 \times 10^8 \text{ m/s}$$

سرعة الضوء:

$$m_e = 9.10939 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

كتلة الإلكترون:

$$-e = -1.60218 \times 10^{-19} \text{ C}$$

شحنة الإلكترون:

$$k_B = 1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

ثابت بولتزمان (Boltzmann constant):

$$\chi \uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الدالة الموجية المعتمدة على مكان الجسيم (الإلكترون):

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

جهد المتجه:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مصفوفات باولي:

$$\vec{\sigma} = \frac{2}{\hbar} \vec{S}$$

معامل العزم المغزلي:

قائمة الأشكال

| الصفحة | عنوان الشكل | الرقم |
|--------|--|-------|
| 5 | تجربة ستيرن جيرلاش [Stern-Gerlach] | 1.1 |
| 13 | تمثيل معمم لهزاز الكم التوافقي | 1.2 |
| 20 | برنامج WOLFRAM MATHEMATICA 11.3 | 2.2 |
| 20 | محاكاة دالة التقسيم في برنامج MATHEMATICA | 3.2 |
| 20 | دالة التقسيم Z بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B | 4.2 |
| 21 | طاقة الحركة F بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B | 5.2 |
| 21 | طاقة الداخلية U بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B | 6.2 |
| 22 | السعة الحرارية النوعية C بدلالة الدرجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B | 7.2 |
| 23 | دالة الانتروبي S بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B | 8.2 |
| 32 | قيم الحالة الأساسية S من أجل $\tau = +1$ بدلالة العدد الكمي n من أجل قيم مختلفة لمعامل للتشوه | 1.3 |
| 33 | قيم الحالة الأساسية S من أجل $\tau = -1$ بدلالة العدد الكمي n من أجل قيم مختلفة لمعامل للتشوه | 2.3 |
| 33 | اختلاف في قيم الحالة الأساسية S من أجل $\tau = \pm 1$ بدلالة العدد الكمي n من أجل قيم مختلفة لمعامل للتشوه | 3.3 |

مقدمة عامة

مقدمة عامة

ميكانيك الكم هي نظرية رياضية وفيزيائية تصف البنية والتطور في الزمان والمكان للظواهر الفيزيائية على المستوى الذري وما أدناه. تم اكتشافها عندما أراد الفيزيائيون وصف الذرات وتبادل الطاقة بين الضوء والمادة (1922-1927). حيث تمثلت الخطوة الأولى لتطوير ميكانيك الكم غير النسبية في ابتكار معادلة موجية يمكن لها أن تصف السلوك الخفي الشبيه بالموجة لجسيم كمي. هذه المعادلة سميت باسم مبتكرها بمعادلة شرودينغر [Schrödinger].

بالإضافة إلى معادلة ديراك [Dirac] التي تدرس حركة الجسيمات الفيرميونات (الإلكترونات) ذات السبين $1/2$ في إطار ميكانيك الكم النسبي، توجد معادلة باولي [Pauli] التي تعتبر موضوعا ذا أهمية كبيرة في الفيزياء، التي تصف حركة الإلكترونات من خلال تحديد معادلة الموجة غير النسبية [1-4]. لتفسير العديد من النتائج التجريبية، مما أدى إلى تغير كثافة احتماله لتشمل مصطلحا إضافيا يعتمد على فعل السبين الذي يعرف باسم تيار السبين [5-7]. وتظهر معادلة باولي في أنها الحد غير النسبي لمعادلة ديراك [8-12]. من الناحية التاريخية، قدم باولي مصفوفاته المغزلية الشهيرة لتعديل معادلة شرودينغر [Schrödinger] غير النسبية لتفسير فرضية جودسميث وحلنب [Goudsmit and Uhlenbeck] في 1925 [14-15]. لذلك، قام بتطبيق تحويل لإضافة حد ظاهري للهاميلتون العادي غير النسبي في وجود الحقل الكهرومغناطيسي، طاقة التفاعل للمجال المغناطيسي والعزم المغناطيسي الإلكتروني بالنسبة للزخم الزاوي المغزلي للجوهري للإلكترون. يتطلب وصف هذا الزخم الزاوي المغزلي من خلال مصفوفات السبين استبدال دالة الموجة العددية المعقدة بدالة موجة سبينور مكونة من عنصرين في معادلة الموجة. منذ ذلك الحين، أصبحت دراسة معادلة باولي موضع اهتمام كبير.

في عام 1928، عندما قدم ديراك معادلة الموجة الحرة النسبية بالإضافة إلى الحد الأدنى من استبدال الاقتران ليشمل التفاعلات الكهرومغناطيسية، أظهر أن معادلته تحتوي على مصطلح يتضمن عزما مغناطيسيا للإلكترون يتفاعل مع مجال مغناطيسي [16]، والذي كان هو نفسه الذي تم إدخاله يدويا في معادلة باولي. بعد ذلك، أصبح من الشائع حساب دوران الإلكترون كظاهرة نسبية، ويمكن إدراج مصطلح السبين $1/2$ المقابل للمصطلح في معادلة شرودينغر غير النسبية المغزلية.

من جهة أخرى، كان هناك اهتمام كبير ومتزايد في السنوات الماضية من أجل دراسة مشاكل ميكانيكا الكم التي تتميز بعلاقات التبديل المشوهة، بما في ذلك تلك المتعلقة بعلاقة عدم اليقين سنايدر [Snyder] والتي يمكن أن يحكمها مبدأ عدم اليقين المعمم (GUP) [17]، الذي يسمح بحد أدنى يمكن ملاحظته من الطول، لترتيب مسافة بلانك [Planck] لتلك التي اقترحها كيمف [Kempf] [18] [19].

علاوة على ذلك، في مثل هذا الموقف (GUP)، كان هناك أيضًا اهتمام كبير بتوسيع نظرية المجال الكمي إلى الزمكان المنحني والذي يمكن اعتباره أول تقريب للجاذبية الكمية عبر مبدأ عدم اليقين الممتد (EUP) [20] [21] من أجل استيعاب اللانهايات التي تبطل نظرية الكم القياسية. النتيجة المهمة المستخلصة من هذا الامتداد هي أنه في الجاذبية الكمومية، يوجد أيضًا حد أدنى يمكن ملاحظته من أجل مسافة بلانك [Planck]. لهذا السبب، خلال العقد الماضي، تم تكريس قدر كبير من الجهود لتوسيع مبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ [Heisenberg] المقترح في سياق (EUP)، والذي يصف مفهوم الحد الأدنى من الزخم القابل للقياس في ميكانيكا الكم [20] [22] [23].

الهدف من هذه مذكرة هو دراسة معادلة باولي-شرودينغر [Schrodinger-Pauli] ثم قمنا بدراسة نفس هذا النظام في حالة تشوه.

هذه المذكرة مقسمة إلى ثلاث فصول، مبينة كالاتي:

في الفصل الأول، قمنا بضبط بعض المفاهيم الأساسية لميكانيكا الكم غير النسبي بوجود السبين ومبدأ الشك لهايزنبرغ الموسع (EUP) لمعادلة باولي-شرودينغر في الحالة العادية وكتابة المعادلة في فضاء القطبي ثنائي الأبعاد ذو المتغيرات (P, φ) . بالإضافة إلى ذلك تطرقنا إلى العلاقة بين ميكانيكا الكم المشوهة في نموذج Snyder-de Sitter غير النسبي، ومنه يتم تحديد جبر هايزنبرغ المشوه في الحالة ثلاثية الأبعاد من خلال علاقة التبديل.

في الفصل الثاني، قمنا بحل معادلة باولي-شرودينغر لهزاز توافقي في الحالة العادية (بدون تشوه) في إطار ميكانيكا الكم غير النسبية في فضاء الزخم، وبحسابات عادية وجدنا الحل لهذا النظام أين حددنا عبارتي الطاقة E_n ودالة الموجة $\Psi(P, \varphi)$ المرفقة لها وهذه الأخيرة تعطى بدلالة Polynomials Laguerre. كما قمنا بدراسة الخصائص الترموديناميكية لعبارة الطاقة لتحديد طاقة الحرة، طاقة داخلية، سعة النوعية الحرارية، والانتروبي بدلالة دالة التقسيم.

وفي الفصل الثالث، وهو موضوع عملنا الرئيسي، قمنا بدراسة نفس النظام السابق بإدخال التشوهات وفقًا لجبر سنايدر-دي ستر في نفس الفضاء. وبنفس الطريقة تم إيجاد عبارة الطاقة المشوه ودالة الموجة المرفقة لها والتي تعطى بدلالة كثير حدود جاكوبي (Polynomials Jacobi). في الأخير قمنا بمقارنة النتائج الخاصة بالطاقات مع الحالة العادية.

الفصل الأول

ميكانيك الكم غير النسبي بوجود السبين ومبدأ الشك
لهايزنبرغ الموسع (EUP)

الفصل الأول

ميكانيك الكم غير النسبي بوجود السبين

ومبدأ الشك لهايزنبرغ الموسع

1.1. نبذة تاريخية عن معادلة باولي

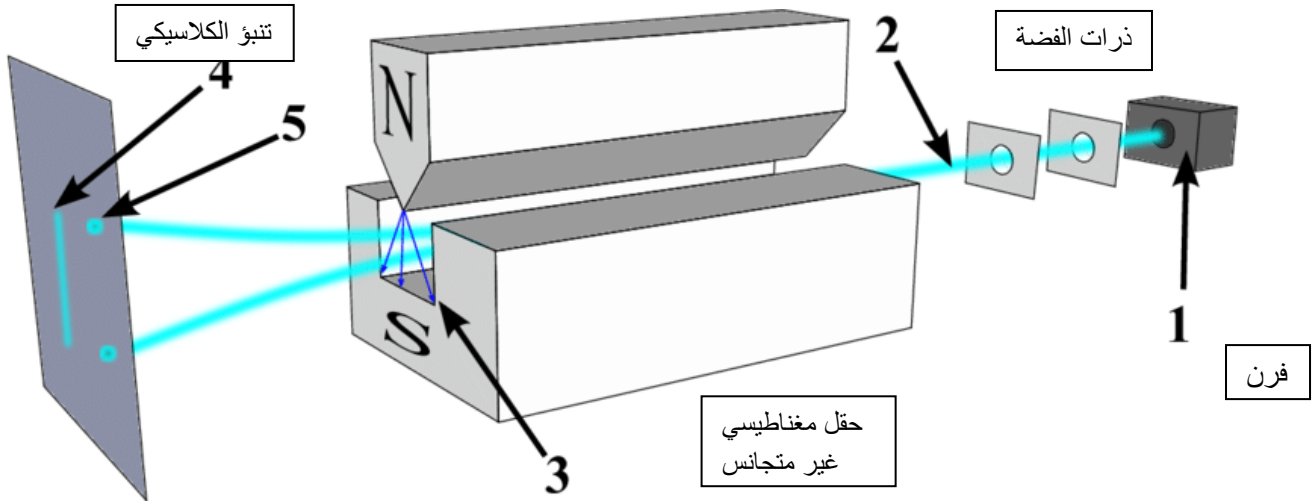
كان التكوين الإلكتروني وشرح خطوط انبعاث الذرات في مجال مغناطيسي، الذي لاحظته زيمان [Zeeman]، من الموضوعات الرئيسية في فيزياء الكم الناشئة وموضوع الجدل في عام 1920. على الرغم من النجاح في شرح سلسلة بالمر وريديبرغ [Balmer and Rydberg] والجهود التي بذلها فيزيائيون من مثل أرنولد سومرفيلد [around] لإضفاء الطابع الرسمي على نموذج بور [Bohr]، كانت نظرية الكم شبه الكلاسيكية القديمة غير قادرة على تفسير خطوط انبعاث الذرات في المجالات المغناطيسية بالإضافة إلى المشاكل الذرية الأخرى، استمرت جهود العديد من الفيزيائيين لقبول نظريات والافتراضات، من بين المجتهدين كان اوتوستيرن [Otto Stern]، الذي كان مساعد أينشتاين [Einstein] في زيورخ، كان ستيرن [Stern] ذو خبرة في إنتاج حزم من الذرات. في عام 1921 قرر دراسة ديناميكيات الذرات في وجود مجال خارجي، لم يكن هدفه العثور على أدلة على الدوران، ولكن تصور تكميم الفضاء، كما تم تسميته في تلك الأيام، تكميم العزم المغناطيسي، والذي هو في الأساس نفس تكميم الزخم الزاوي، من المعروف من النظرية الكهرومغناطيسية أن الجسم ذي العزم المغناطيسي μ ، في وجود مجال مغناطيسي غير متجانس، يكون تحت تأثير قوة مساوية لتدرج طاقته الكامنة $-\mu \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{F} = \nabla(\mu \cdot \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

إذا كان المجال على طول المحور \hat{z} ، و $\mu = \mu_B \hat{L}$ فإن القوة المؤثرة على الذرات هي:

$$F_Z = \mu_B \hat{L}_Z \frac{\partial B}{\partial z} \quad (2.1)$$

وبالتالي، فإن المسارات التي يمكن أن تتبعها الذرات كانت أكبر عدد ممكن من القيم المحتملة للعدد الكمي m_Z بحيث $m_Z = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$ لهذا السبب يمكننا أن نتوقع ملاحظة آثار الترتيب $2l + 1$ في تجربة ستيرن جيرلاش [Stern-Gerlach]، كما هو موضح في الشكل 1.1:



الشكل 1.1: تجربة ستيرن جيرلاش [Stern-Gerlach]

تجربة: تعمل القوة المغناطيسية لمجال مغناطيسي غير متجانس على انحراف ذرات الفضة التي تتحرك عبرها. الأثران اللذان تمت ملاحظتهما، بدلاً من الثلاثة التي تنبأت بها الحجج النظرية لتلك السنوات، أدت إلى اكتشاف فعل السبين.

لم يتغير اتجاه **B** كثيراً ولكن حجمه تغير من نقطة إلى أخرى.

بعد عدة محاولات، وجدوا أنه ظهر أثران فقط. قدمت هذه النتيجة مزيداً من الارتباك ولكن أيضاً حججاً جديدة لتبريرها. لم يكن الأمر كذلك حتى عام 1926، عندما أعاد جودسميث وحلنب [Goudsmit and Uhlenbeck]، تفسير تجربة [Stern-Gerlach]، وقدموا الإلكترون كزخم زاوي جوهري، حتى أصبحت النتائج التجريبية واضحة. إن سبين الإلكترون \hat{S} هو كمية فيزيائية تتكون من عنصرين على طول المجال المغناطيسي. مثل الزخم المغناطيسي الجوهري $\hat{\mu}_L = g_L \frac{e\hbar}{2mc} \hat{L}$. الزخم المغناطيسي الجوهري μ_e يتناسب مع الحركة الزاوية الجوهريّة \hat{S} . في عام 1921، كان كومبتون [Compton]، أول من اقترح إمكانية وجود الزخم الزاوي الجوهري نصف عدد صحيح لدوران الإلكترون، يبدو أيضاً أنه في 1925، اقترح كرونيج [Kronig]، على باولي [Pauli]، فكرة دوران الإلكترون. من المعروف أن باولي [Pauli]، افترض لاحقاً في عام 1925 وجود خاصية كمومية ثنائية القيمة بدون نظير كلاسيكي ومبدأ استبعاد لمنع احتمال أن يكون لإلكترونين، في نفس الذرة، نفس الأرقام الكمية.

إذا كان الإلكترون يمتلك، بالإضافة إلى الزخم المداري $\hat{\mu}_L$ ، زخماً مغناطيسياً جوهرياً يعرف بـ:

$$\mu_e = gS\mu_B\hat{S} \quad (3.1)$$

تعرف الطاقة الكامنة:

$$E_P = -\frac{\mathbf{B} \cdot \mu_e}{\hbar} \quad (4.1)$$

الذي يجب إضافته إلى هاملتوني في معادلة شرودينغر [Schrödinger] لذلك، علينا أن نأخذ في الاعتبار، بالنسبة للذرات في المجال المغناطيسي، المعادلة:

$$\left(\frac{-\hbar}{2m} \nabla^2 + gL \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{B} \hat{L} + gS \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{B} \cdot \hat{S} \frac{q^2 B^2}{c^2 4} (x^2 + y^2) + V(\mathbf{r}) \right) \phi(\mathbf{r}, s) = E\phi(\mathbf{r}, s) \quad (5.1)$$

حيث $V(\mathbf{r})$ يمثل الكمون.

إن إدراج مصطلح في معادلة شرودينغر يعتمد على الزخم الزاوي \mathbf{S} يضاف إلى درجات الحرية المكانية، ودرجة حرية الدوران. هذه الحقيقة، المشار إليها صراحة في الدالة الموجية (\mathbf{r}, s) ، تتوافق مع الجداء:

$$\phi(\mathbf{r}, s) = \varphi(\mathbf{r})\chi(s) \quad (6.1)$$

حيث $\varphi(\mathbf{r})$ هي دالة الموجة المعتادة و $\chi(s)$ المتجه المعتمد على الدوران، المسمى سبين. السبينور

بشكل عام عبارة عن تركيبة خطية من حالتين: $\chi \uparrow$ و $\chi \downarrow$ التي تتوافق مع إسقاطات الدوران، الموازية والمضادة للتوازي مع المجال. عادة ما يتم تمثيل هذه الدوال الذاتية لـ S_z بالمتجهات (السبينورات):

$$\begin{cases} \chi \uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \chi \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.1)$$

مصفوفات باولي:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

من السهل التحقق من ذلك [24]:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

الزخم الزاوي:

في الميكانيك الكلاسيكي الزخم الزاوي أو كمية الحركة الزاوية لجسيم له كتلة m ، حيث الزخم وشعاع الموضع يتحرك دائريا حول محور ما يكتب بالعلاقة:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (10.1)$$

يكون الزخم الزاوي في ميكانيكا الكم التي تعالج الأنظمة الذرية وما دونها قيمة كمومية. فيمكن أن تكون قيمته عددا صحيحا مضروبا في ثابت بلانك المخفض، ويزداد بمقدار أعداد صحيحة. يعبر عنه في الحسابات الرياضية في ميكانيكا الكم بمؤثر الزخم الزاوي:

حيث تعطى مركباته في الاحداثيات الكروية بالشكل:

$$L = i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (11.1)$$

2.1. معادلة باولي في ميكانيك الكم

تعود معادلة باولي في ميكانيك الكم إلى العالم الفيزيائي النمساوي ولفجانج باولي وهي تصف حركة جسيم ذو عزم مغزلي مساوي $1/2$ ، مثل الإلكترون يتحرك ببطء في مجال كهرومغناطيسي بحيث تكون كل من طاقة المجال وطاقة الحركة صغيرتان بالمقارنة بكتلة السكون للإلكترون.

فبالإضافة إلى معادلة شرودينغر وأجزائها التي تحتوي على مواصفات جسيمات بدون عزم مغزلي:

$$H\Psi = E\Psi \quad (12.1)$$

حيث يمثل كل من E و Ψ على الترتيب الطاقة ودالة الموجة، حيث تعطى في الاحداثيات الكارتيزية $\Psi(\vec{r}) = \Psi(x, y, z)$ ، أما H فيمثل الطاقة الكلية، والمعروف في الفيزياء الكمية بالمؤثر الهاميلتوني.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad (13.1)$$

وقد أظهر أن استبدال المتجه بمصفوفة $P = \sigma P$ ، يحسب بالعلاقة التالية:

$$(\sigma \cdot \vec{P})(\sigma \cdot \vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{P} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} \times \vec{P}) \quad (14.1)$$

تدل هذه العلاقة أنه إذا قمنا بتغيير المتجه فإن المعادلة الجديدة هي نفسها معادلة شرودينغر (12.1):

$$\left[\frac{(\sigma P)^2}{2m} + V(r) \right] \Psi = E\Psi \quad (15.1)$$

ولكن عند وجود مجال مغناطيسي خارجي يصبح الزخم الحركي من الشكل:

$$\vec{\pi} = \vec{P} - e\vec{A} \quad (16.1)$$

وعليه تصبح المعادلة (15.1) بالشكل التالي:

$$\left[\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + V(r) \right] \Psi = E\Psi \quad (17.1)$$

$$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r} \text{ حيث}$$

ومن العلاقة (14.1) نستنتج المعادلة التالية:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + i\sigma \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\pi}) \quad (18.1)$$

بحيث $\vec{\sigma} = \sigma_x \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \sigma_z \vec{k}$ تمثل مصفوقات باولي:

نختار اتجاه المجال المغناطيسي على طول المحور z، وبتعويض عبارة $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$ في (16.1)، نجد:

$$\vec{\pi} = \left(P_x + \frac{eB}{2}y \right) \vec{i} + \left(P_y - \frac{eB}{2}x \right) \vec{j} \quad (19.1)$$

باستخدام العلاقة (18.1) نجري الجداء السلمي:

$$\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} = \left(P_x + \frac{eB}{2}y \right)^2 + \left(P_y - \frac{eB}{2}x \right)^2 \quad (20.1)$$

نقوم بتبسيط العبارة (18.1) لنتحصل على:

$$\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} = (P_x^2 + P_y^2) + \left(\frac{eB}{2} \right)^2 (x^2 + y^2) + \frac{eB}{2} 2(-xP_y + yP_x) \quad (21.1)$$

حيث يعرف الزخم الزاوي $L_z = (xP_y - yP_x)$

$$\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} = P^2 + \left(\frac{eB}{2} \right)^2 r^2 - eBL_z \quad (22.1)$$

باستعمال العلاقة (18.1) نجري الجداء الشعاعي:

$$\vec{\pi} \times \vec{\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \pi_x & \pi_y & 0 \\ \pi_x & \pi_y & 0 \end{vmatrix} = (\pi_x \pi_y - \pi_y \pi_x) \vec{k} \quad (23.1)$$

بحساب مباشر نجد:

$$\vec{\pi} \times \vec{\pi} = \left[P_x P_y - \frac{eB}{2} P_x x + \frac{eB}{2} y P_y - \left(\frac{eB}{2} \right)^2 yx - \left(P_y P_x + \frac{eB}{2} P_y y - \frac{eB}{2} x P_x - \left(\frac{eB}{2} \right)^2 xy \right) \right] \vec{k} \quad (24.1)$$

بالتبسيط نتحصل على:

$$\vec{\pi} \times \vec{\pi} = i\hbar eB \quad (25.1)$$

بتعويض (22.1) و(25.1) في العلاقة (18.1)، نتحصل على:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = P^2 + \left(\frac{eB}{2} \right)^2 r^2 - eB L_z - \sigma \hbar eB \quad (26.1)$$

تعرف $\vec{\sigma}$ في ميكانيك الكم بدلالة السبين بالعلاقة:

$$\vec{\sigma} = \frac{2}{\hbar} \vec{S} \quad (27.1)$$

بتعويض العلاقة (27.1) في المعادلة (26.1) نجد:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = P^2 + \left(\frac{eB}{2} \right)^2 r^2 - eB \cdot L_z - 2eB \cdot S \quad (28.1)$$

لنصل في الأخير إلى معادلة باولي-شرودينغر من الشكل التالي:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(P^2 + \left(\frac{eB}{2} \right)^2 r^2 - eB \cdot L_z - 2eB \cdot S \right) + V(r) \right] \Psi = E \Psi \quad (29.1)$$

3.1. أهم علاقات ميكانيكا الكم المشوهة في نموذج سنايدر-دي سيدر

في نموذج Snyder-de Sitter غير النسبي، يعرف جبر هايزنبرغ المشوه في الحالة ثلاثية الأبعاد من

خلال علاقة التبديل التالية [20] [21] [25]:

$$[X_i, P_j] = i\hbar (\delta_{ij} \alpha_1 X_i X_j + \alpha_2 P_i P_j + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (X_i P_j + P_i X_j)) \quad (30.1)$$

$$[X_i, X_j] = i\hbar \alpha_2 \xi_{ijk} L_k, [P_i, P_j] = i\hbar \alpha_2 \xi_{ijk} L_k \quad (31.1)$$

حيث α_1 و α_2 متغيرات موجبة صغيرة تحدد التشوهات فضاء دي سيدر وجبر سنايدر، على التوالي،

و $L_k = \varepsilon_{ijk} X_i P_j$ يشير إلى مؤثر الزخم الزاوي الذي يحقق الجبر المعتاد:

$$[L_i, X_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} X_k, [L_i, P_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} P_k, [L_i, L_j] = i \varepsilon_{ijk} L_k \quad (32.1)$$

بنفس الطريقة كما في ميكانيكا الكم العادية، تؤدي علاقة التبديل (30.1) إلى علاقات هايزنبرغ:

$$\Delta X_i \Delta P_j = \frac{\hbar}{2} (\delta_{ij} + \gamma_{ij} + \alpha_1 (\Delta X_i)^2 + \alpha_2 (\Delta P_i)^2 - 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \Delta X_i \Delta P_i),$$

$$i = 1, 2, 3 \quad (33.1)$$

$$\gamma_{ij} = \left(\sqrt{\alpha_1} (X_i) + \sqrt{\alpha_2} (P_j) \right)^2 \geq 0 \text{ حيث}$$

تشير العلاقة (31.1) إلى ظهور حد أدنى من عدم اليقين في قياس الموضع بالإضافة إلى الزخم:

$$(\Delta X)_{min} = \hbar \sqrt{\frac{\alpha_2(1+\gamma)}{1+2\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}}, \quad (\Delta P)_{min} = \hbar \sqrt{\frac{\alpha_1(1+\gamma)}{1+2\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}} \quad (34.1)$$

المؤثرات غير التبادلية P_i و X_i ، التي تخدم جبر Snyder-de Sitter (30.1) تؤدي إلى إعادة قياس علاقة عدم اليقين (33.1) في الموضع وفضاء الزخم. من أجل دراسة المشكلات الميكانيكية الكمومية، فإننا نمثل هذين المؤثرين كدوال للمؤثرين p_i و x_i مما تخدم علاقات التبديل المعتادة لميكانيكا الكم العادية. ولكن بسبب العلاقات غير التبادلية (31.1)، لا يوجد فضاء أو تمثيل للزخم. نكتب P_i و X_i ، وفقاً ل p_i و ∂_{p_i} ، مع التحويلات التالية ونستخدم مصطلح "تمثيل الزخم" لهذه التحويلات:

$$P_i = -i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \partial_{p_i} + (1 - \lambda) \frac{p_i}{\sqrt{1 - \alpha_2 p^2}} \quad (35.1)$$

$$X_i = i\hbar \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \partial_{p_i} + \lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{p_i}{\sqrt{1 - \alpha_2 p^2}} \quad (36.1)$$

حيث p تتغير في المجال $[1/\sqrt{\alpha_2}, 1/\sqrt{\alpha_2}] - 1$ و λ هو ثابت حقيقي عشوائي.

الفصل الثاني

معادلة باولي للهزاز التوافقي في فضاء الزخم العادي

الفصل الثاني

معادلة باولي للهزاز التوافقي

في فضاء الزخم العادي

1.2. مقدمة

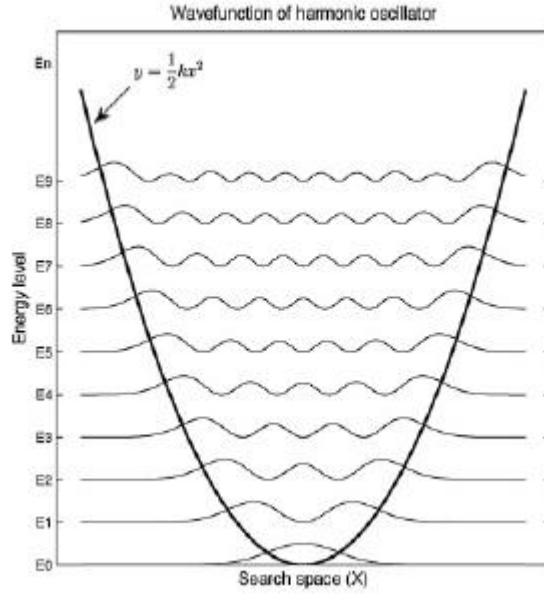
يعتبر الهزاز التوافقي أحد الأنظمة الأساسية في مجال الفيزياء وموجود في جميع جوانب الفيزياء. ولا يزال السبب غير معروف لنا، لكن من الطبيعي جدا بالنسبة لنا أن نفهم أنه عندما يتم إثارة النظام من حالة الطاقة الدنيا مرة أخرى، يميل النظام إلى التارجح. هذه هي الطريقة التي يعمل بها الهزاز التوافقي بالمعنى الكلاسيكي. ومن ثم، فإن الأمر يستحق البحث عن مثل هذا النظام في عالم الكم أيضا [26]. وبالتالي، يصف الهزاز التوافقي الكمومي في ميكانيكا الكم مثلما يصف الهزاز التوافقي الميكانيكا الكلاسيكية، يختلف الهزاز التوافقي الكلاسيكي بشكل أساسي على أساس ثلاثة أسباب:

أولا، حالة الطاقة الدنيا لهزاز التوافقي الكمومي غير الصفريه بسبب وجود تقلبات نتيجة لمبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ [27].

ثانيا، يمكن العثور على جسيم في جهد الهزاز التوافقي الكمومي خارج المجال $-A \leq x \leq +A$ مع احتمال غير الصفري.

ثالثا، توزيعات الكثافة الاحتمالية لهزاز كمي في حالة الطاقة المنخفضة هي الأكبر عند وسط البئر الكموني [26]. يستخدم بشكل شائع كنموذج لدراسة اهتزازات الجسيمات الذرية والجزيئات تحت تأثير الهزاز الكلاسيكي مثل الجهد الذي يعد أحد النماذج القابلة للحل بالضبط في مجال ميكانيكا الكم التي لها حلول في شكل كثيرات حدود هيرميتية ويمكن تعميمها على أبعاد. لا يقتصر تطبيقه على دراسة الجزيء ثنائي الذرة البسيط فقط [29]، ولكنه في الواقع يمتد ليشمل مجالات مختلفة من الفيزياء، على سبيل المثال. في دراسة الأنماط المعقدة للاهتزاز في الجزيئات المعقدة، نظرية السعة الحرارية، كمحرك حراري ديناميكي حراري [30]، إلخ

في هذا الفصل سنقوم بدراسة معادلة باولي بوجود الهزاز التوافقي ثنائي البعد من أجل إيجاد طيف الطاقة ودالة الموجة المرفقة له باستعمال طريقة مباشرة في الحساب. وفي الأخير نقيم الخصائص الحرارية للنظام المدروس.



الشكل (1.2): تمثيل معمم لهزاز الكم التوافقي [26]

2.2. حل معادلة باولي بوجود الهزاز التوافقي

تعتمد دراسة نظام مجهري على حل معادلة تفاضلية غير نسبية، وفي دراستنا هذه سنقوم بحل معادلة باولي-شرودينغر للهزاز التوافقي ثنائي الابعاد.

حيث تكتب عبارة الكمون كالتالي:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \quad (1.2)$$

وبالتالي نكتب معادلة باولي بالاعتماد على المعادلة (1.2):

$$\left[\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \right] \Psi = E\Psi \quad (2.2)$$

انطلاقاً من المعادلة (28.1) وبالتعويض في (2.2) نجد:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(P^2 + \left(\frac{eB}{2} \right)^2 r^2 - eB \cdot L_z - 2eB \cdot S \right) + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \right] \Psi = E\Psi \quad (3.2)$$

وبالتبسيط نتحصل على:

$$\left[P^2 + \left(\left(\frac{eB}{2} \right)^2 + m^2 \omega^2 \right) r^2 + eB L_z - 2eB S_z - 2mE \right] \Psi(\vec{P}) = 0 \quad (4.2)$$

من أجل حل النظام (4.2) نستعمل الاحداثيات القطبية:

$$P_x = P \cos \varphi ; P_y = P \sin \varphi \quad (5.2)$$

باشتقاق (5.2) نجد:

$$\begin{cases} P_x = P \cos \varphi \\ P_y = P \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dP_x = \cos \varphi dP - P \sin \varphi d\varphi \\ dP_y = \sin \varphi dP + P \cos \varphi d\varphi \end{cases} \quad (6.2)$$

ليكن:

$$dF(P, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial P} dP + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \quad (7.2)$$

من جهة أخرى لدينا $dF(P_x, P_y) = dF(P, \varphi)$ ، بالتالي:

$$\begin{cases} dP = \cos \varphi dP_x + \sin \varphi dP_y \\ d\varphi = -\frac{1}{2} \sin \varphi dP_x + \frac{1}{2} \cos \varphi dP_y \end{cases} \quad (8.2)$$

نعوض (8.2) في (7.2) وبالتبسيط نجد:

$$dF(P, \varphi) = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial P} - \frac{1}{P} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) dP_x + \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{P} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) dP_y \quad (9.2)$$

حيث:

$$\frac{\partial}{\partial P_x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial P} - \frac{1}{P} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (a.10.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{P} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (b.10.2)$$

في الفيزياء الكمية، الموضع عبارة عن مؤثر كمي يكتب بالشكل:

$$r^2 = -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \nabla^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial P_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial P_y^2} \right) \quad (11.2)$$

حيث المؤثر لابلاسيان Δ [Laplacian] هو مربع المؤثر نابلا ∇^2 [Nabla]

من (11.2) نقوم بحساب المشتقات الجزئية للمؤثر نابلا بالاعتماد على المعادلتين (a.10.2)

و (b.10.2) لنتحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial P_x^2} f &= \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f}{\partial P_x} \right) = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial P^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{P} \frac{\partial}{\partial P} - \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{P} \frac{\partial^2}{\partial P \partial \varphi} + \\ &\quad \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{P^2} \frac{\partial^2}{\partial P \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{P^2} \frac{\partial^2}{\partial P^2} \end{aligned} \quad (12.2)$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\frac{\partial^2}{\partial P_y^2} f = \frac{\partial}{\partial P_y} \left(\frac{\partial f}{\partial P_y} \right) = \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial P^2} - \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{P^2} \frac{\partial^2}{\partial P \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{P} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{P} \frac{\partial^2}{\partial P \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{P^2} \frac{\partial^2}{\partial P^2} \quad (13.2)$$

بجمع العلاقتين (12.2) و(13.2) وتبسيطهما، ثم نقوم بتعويضيهما في المعادلة (11.2) نجد:

$$r^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial P^2} + \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{P^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (14.2)$$

نعلم من خواص ميكانيك الكم:

$$L_Z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad S_Z \Psi = \hbar m_s \Psi \quad m_e = 0, \pm 1, \pm \dots \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

وبتعويض r^2 في (4.2) وباستعمال خواص ميكانيك الكم نكتب معادلة باولي في الفضاء القطبي:

$$\left[\left(\frac{e^2 B^2}{4} + m^2 \omega^2 \right) (-\hbar^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial P^2} + \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{P^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + P^2 - ieB\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2eB\hbar m_s - 2mE \right] \Psi = 0 \quad (15.2)$$

باستعمال عبارة فصل المتغيرات التالية:

$$\Psi(\vec{P}) = \Psi(P, \varphi) = e^{-im_l \varphi} \cdot R_{m_l}^\tau(P) \cdot \chi_\tau \quad (16.2)$$

تصبح معادلة من الشكل:

$$\left[-\hbar^2 \left(\frac{e^2 B^2}{4} + m^2 \omega^2 \right) \left(\frac{d^2}{dP^2} + \frac{1}{P} \frac{d}{dP} + \frac{m_l}{P^2} \right) + P^2 + eB\hbar m_l - eB\hbar \tau - 2mE \right] R_{m_l}^\tau(P) = 0 \quad (17.2)$$

لتسهيل الحساب نضع $\tilde{\omega} = \frac{eB}{2m}$ و $\varepsilon^\tau = 2mE - 2m\hbar\tilde{\omega}(m_l - \tau)$

$$\left[- \left(\frac{d^2}{dP^2} + \frac{1}{P} \frac{d}{dP} - \frac{m_l^2}{P^2} \right) m^2 \hbar^2 (\tilde{\omega}^2 + \omega^2) + P^2 - \varepsilon^\tau \right] R_{m_l}^\tau(P) = 0 \quad (18.2)$$

بالقسمة على $-m^2 \hbar^2 (\tilde{\omega}^2 + \omega^2)$

$$\left[\frac{d^2}{dP^2} + \frac{1}{P} \frac{d}{dP} - \frac{m_l^2}{P^2} - \frac{P^2}{m^2 \hbar^2 (\tilde{\omega}^2 + \omega^2)} + \frac{\varepsilon^\tau}{m^2 \hbar^2 (\tilde{\omega}^2 + \omega^2)} \right] R_{m_l}^\tau(P) = 0 \quad (19.2)$$

لحل المعادلة (19.2) فإننا نقترح تحويل الدالة $R_{m_l}^\tau(P) = \frac{1}{\sqrt{P}} f_{m_l}^\tau(P)$ ما يعطينا كالاتي:

$$\frac{dR}{dP} = -\frac{1}{2} P^{-2/3} f + \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{df}{dP} = -\frac{1}{2P\sqrt{P}} + \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{d}{dP} = \frac{1}{\sqrt{P}} \left(\frac{d}{dP} - \frac{1}{2P} \right) f(P)$$

$$\frac{d^2 R}{dP^2} = \frac{1}{\sqrt{P}} \left(\frac{d^2}{dP^2} - \frac{1}{P} \frac{d}{dP} + \frac{3}{4P^2} \right) f \quad (20.2)$$

بتعويض العبارات (20.2) في (19.2) نحصل على:

$$\left[\frac{d^2}{dP^2} - \frac{(m_l^2 - \frac{1}{4})}{P^2} - \frac{P^2}{m^2 \hbar^2 (\tilde{\omega}^2 + \omega^2)} + \frac{\varepsilon^\tau}{m^2 \hbar^2 (\tilde{\omega}^2 + \omega^2)} \right] f_{m_l}^\tau(P) = 0 \quad (21.2)$$

لتسهيل الحساب نضع $a^2 = m \hbar \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \omega^2}$ ونضع التغيير التالي $\rho = \frac{P^2}{a^2}$:

$$d\rho = \frac{2}{a^2} P dP \quad (22.2)$$

$$\frac{d}{dP} = \frac{d\rho}{dP} \frac{d}{d\rho} = \frac{2P}{a^2} \frac{d}{d\rho}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dP^2} &= \frac{d}{dP} \left(\frac{2P}{a^2} \frac{d}{d\rho} \right) = \frac{2}{a^2} \left(\frac{d}{d\rho} + P \frac{d}{dP} \frac{d}{d\rho} \right) = \frac{2}{a^2} \left(\frac{d}{d\rho} + P \left(\frac{2P}{a^2} \right) \frac{d}{d\rho^2} \right) \\ &= \frac{4P^2}{a^4} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{a^2} \frac{d}{d\rho} = \frac{4\rho}{a^2} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{a^2} \frac{d}{d\rho} \end{aligned} \quad (23.2)$$

لنحصل على:

$$\left[\frac{4\rho}{a^2} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{a^2} \frac{d}{d\rho} - \frac{(m_l^2 - \frac{1}{4})}{\rho a^2} - \frac{\rho a^2}{a^4} + \frac{\varepsilon^\tau}{a^4} \right] f(\rho) = 0 \quad (24.2)$$

وبالتالي:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} - \frac{(m_l^2 - \frac{1}{4})}{4\rho} - \frac{\rho}{a^4} + \frac{\varepsilon^\tau}{4a^2} \right] f(\rho) = 0 \quad (25.2)$$

$$f(\rho) = \rho^k \cdot e^{-\rho/2} \cdot w(\rho) \quad (26.2)$$

لتكن قيمة k عشوائية.

مع:

$$\frac{df(\rho)}{d\rho} = \rho^k e^{-\rho/2} \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k}{\rho} - \frac{1}{2} \right) w(\rho)$$

$$\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} = \rho^k e^{-\rho/2} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \left(\frac{2k}{\rho} - 1 \right) \frac{d}{d\rho} + \left(\frac{k(k-1)}{\rho^2} - \frac{k}{\rho} + \frac{1}{4} \right) \right) w(\rho) \quad (27.2)$$

بتعويض عبارتي (27.2) في (25.2) نجد:

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(2k + \frac{1}{2} - \rho \right) \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left(k^2 - \frac{k}{2} - \frac{(m_l^2 - \frac{1}{4})}{4\rho} \right) + \left(\frac{\varepsilon^\tau}{4a^2} - k - \frac{1}{4} \right) \right) w(\rho) = 0 \quad (28.2)$$

نثبت قيمة k للحصول على شكل المعادلة التفاضلية *Laguerre associée* وبالتالي نعدم معامل $\frac{1}{\rho}$ في المعادلة التفاضلية (28.2):

$$k^2 - \frac{k}{2} - \frac{(m_l^2 - \frac{1}{4})}{4\rho} = 0 \quad (29.2)$$

يمكن الحصول على k بوضع مميز المعادلة أعلاه مساويا للصفر:

$$\Delta = \frac{1}{4} + 4\alpha = \frac{1}{4} + m_l^2 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{m_l}{2} \right) \text{ مقبول} \\ k_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{m_l}{2} \right) \text{ مرفوض} \end{cases} \quad (30.2)$$

لتصبح المعادلة (28.2) من أجل قيمة k مقبولة:

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(2k + \frac{1}{2} - \rho \right) \frac{d}{d\rho} + \left(\frac{\varepsilon^\tau}{4a^2} - \frac{1}{2}(m_l + 1) \right) \right) w(\rho) = 0 \quad (31.2)$$

مع تحقيق الشرط $n = \frac{\varepsilon^\tau}{4a^2} - \frac{1}{2}(m_l + 1)$ ، من أجل إيجاد طيف الطاقة:

$$\varepsilon^\tau = 4a^2 \left(n + \frac{1}{2}(m_l + 1) \right) \quad (32.2)$$

وباستعمال عبارتي a^2 و ε^τ المذكورتين سابقا، نتحصل على:

$$E_{n,m_l} = \hbar \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \omega^2} (2n + m_l + 1) + \hbar \tilde{\omega} (m_l - \tau) \quad (33.2)$$

يمكننا مناقشة طيف الطاقة المتحصل عليه كما يلي:

- في غياب الحقل المغناطيسي ($B=0$)، نجد عبارة الطاقة كالتالي:

$$E_{n,m_l} = \hbar \omega (2n + m_l + 1) \quad (34.2)$$

تكتب دالة الموجة في النظام المدروس بالشكل التالي:

$$w(\rho) = C F_1(-n, m_l + 1, \rho) \quad (35.2)$$

وبالتالي يمكننا كتابة المعادلة (26.2) على النحو الآتي

$$f(P) = C e^{-\frac{P^2}{2a^2}} \left(\frac{P}{a} \right)^{2k} F_1 \left(-n, m_l + 1, \frac{P^2}{a^2} \right) \quad (36.2)$$

ومنه يصبح شكل الدالة $R_{m_l}^\tau(P)$ بالشكل الموالي

$$R_{m_l}^\tau(P) = \frac{C}{a^{2k}} e^{-\frac{P^2}{2a^2}} P^{\frac{2k-1}{2}} F_1 \left(-n, m_l + 1, \frac{P^2}{a^2} \right) \quad (37.2)$$

ومنه نكتب الشكل العام لدالة الموجة $\Psi(P, \varphi)$:

$$\Psi(P, \varphi) = \frac{C}{a^{2k}} e^{-\frac{P^2}{2a^2}} P^{2k-\frac{1}{2}} F_1 \left(-n, m_l + 1, \frac{P^2}{a^2} \right) e^{-im_l \varphi} \chi_\tau \quad (38.2)$$

حيث C ثابت العيارية.

3.2. الخصائص الترموديناميكية:

في هذا القسم، سنقوم بدراسة الخصائص الديناميكية الحرارية لمعادلة باولي للهزاز التوافقي عند درجة حرارة محدودة. لهذا، نعتبر أن النظام في حالة توازن عند درجة حرارة ثابتة، T ، ثم نستخدم التعريف المعروف لدالة التقسيم:

$$Z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(E_n - E_0)} \quad (39.2)$$

حيث: $\beta = \frac{1}{K_B T}$ و K_B هو ثابت بولتزمان.

عبارة الطاقة المحصل عليها في معادلة (33.2) يمكن التعبير عنها:

$$E_n = \alpha n + \lambda \quad (40.2)$$

حيث: $\alpha = 2\hbar\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \omega^2}$ و $\lambda = \hbar\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \omega^2}(m_l + 1) + \hbar\tilde{\omega}(m_l - \tau)$

نظرًا لأن E_0 هي طاقة الحالة الأساسية، أي $E_0 = \lambda$ ، فإننا نجد على الفور $E_n - E_0 = \alpha n$

لذلك فإننا نعبر عن دالة التقسيم:

$$Z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \alpha n} \quad (41.2)$$

من أجل حساب دالة التقسيم، اولر-ماكلوران [Maclaurin-Euler]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)} B_{2p} f^{(2p-1)}(0) \quad (42.2)$$

حيث يشير B_{2p} إلى أعداد برنولي $B_2 = \frac{1}{6}$ ، $B_4 = \frac{1}{30}$

هنا تشير $f^{(2p-1)}$ إلى مشتق برتبة $(2p - 1)$ ، لتتحصل على:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\alpha x)} dx = \frac{1}{\beta\alpha} \quad (43.2)$$

$$f^{(1)}(0) = -\beta\alpha$$

$$f^{(3)}(0) = -\beta^3\alpha^3 \quad (44.2)$$

بذلك نحصل على دالة التقسيم بالشكل التالي [32]:

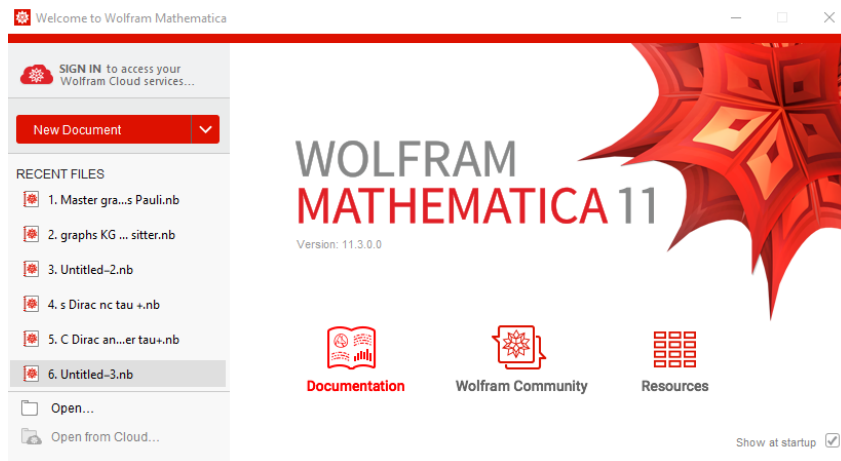
$$Z(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{\alpha} + \frac{\alpha}{12\theta} - \frac{\alpha^3}{120\theta^3} \quad (45.2)$$

حيث $\theta = \frac{1}{\beta}$.

باستعمال الوحدات التالية: $\omega = \hbar = m = e = K_B = 1$

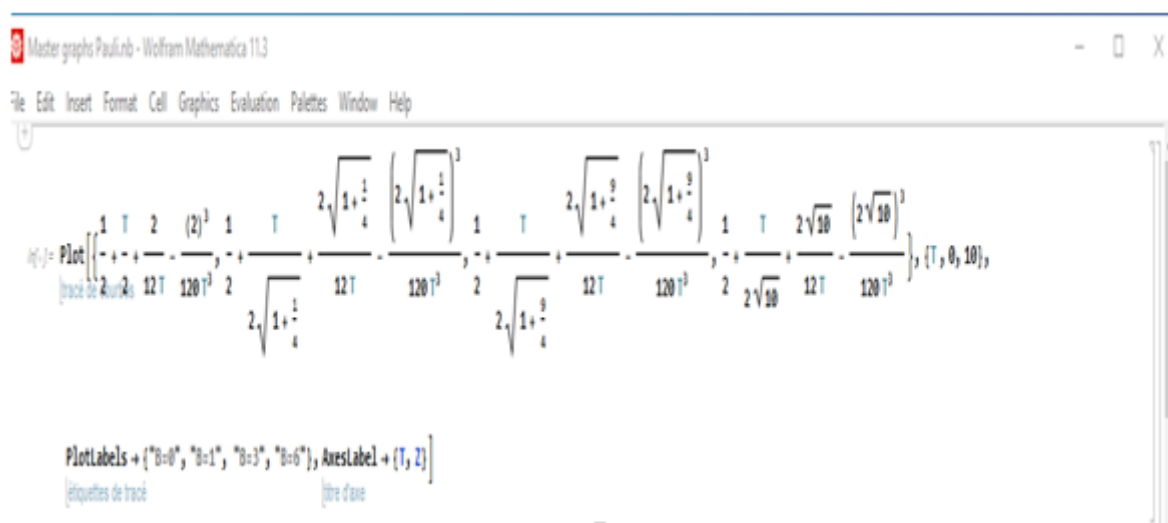
وأخذ قيم شدة المجال المغناطيسي $B = 0T ; B = 1T ; B = 3T ; B = 6T$

من أجل رسم منحنيات دالة التقسيم نستخدم برنامج WOLFRAM MATHEMATICA 11.3



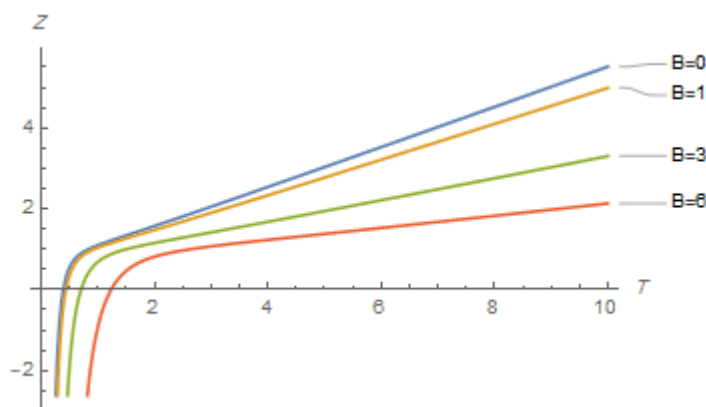
الشكل (2.2): برنامج WOLFRAM MATHEMATICA 11.3

ويمكننا كتابة دالة التقسيم في البرنامج بالشكل التالي:



الشكل (3.2): عبارة دالة التقسيم في برنامج MATHEMATICA

وبالضغط على Ctrl + Entrée في نفس الوقت نتحصل على:



الشكل (4.2): دالة التقسيم Z بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B

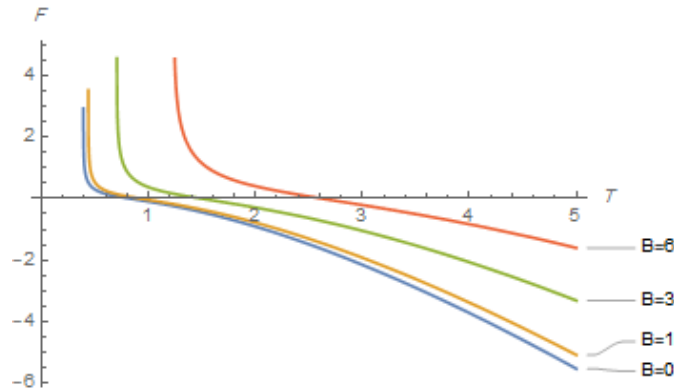
يمثل الشكل (4.2) تغيرات دالة التقسيم Z بدلالة الحرارة T في مختلف القيم للحقل المغناطيسي B

حيث نلاحظ أنه بزيادة درجة الحرارة وقيم الحقل المغناطيسي تتناقص دالة التقسيم Z.

بعد ذلك نستخدم دالة التقسيم لتقييم الدوال الحرارية، في البداية يمكننا الحصول على الطاقة الحرة من

خلال العبارة التالية:

$$F = -\theta \ln(Z) \quad (46.2)$$



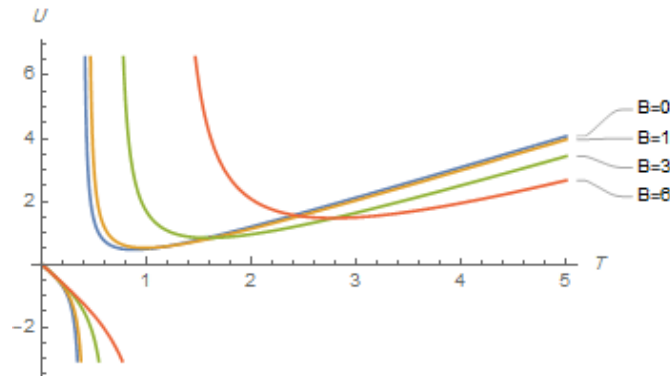
الشكل (5.2): طاقة الحرة F بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B

يمثل الشكل (5.2) تغيرات دالة الطاقة الحرة F بدلالة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل

المغناطيسي B حيث نلاحظ أنه زيادة قيم الطاقة الحرة تتناسب طردياً مع زيادة كل من درجة الحرارة وشدة الحقل المغناطيسي.

ثم نقوم بحساب الطاقة الداخلية من خلال عبارة التالية:

$$U = \theta^2 \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \theta} = \frac{120\theta^5 - 10\alpha^2\theta^3 + 3\alpha^4\theta}{60\alpha\tau\theta^3 + 120\theta^4 + 10\alpha^2\theta^2 - \alpha^4} \quad (47.2)$$



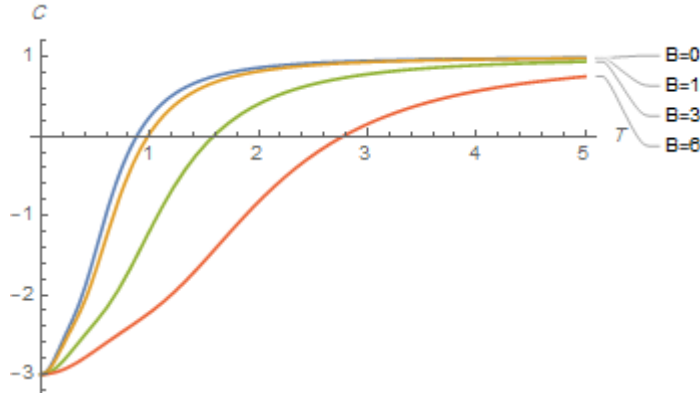
الشكل (6.2): طاقة الداخلية بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B

يمثل الشكل (6.2) تغيرات طاقة الداخلية U بدلالة الحرارة T في مختلف القيم للحقل المغناطيسي B

حيث نلاحظ أنه بزيادة درجة الحرارة وقيم الحقل المغناطيسي تتناقص طاقة الداخلية.

بعد ذلك، نقوم بتقييم السعة الحرارية النوعية نتحصل على:

$$\frac{C}{K_B} = \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{(14400\theta^8 + 14400\alpha\theta^7 + 4800\alpha^2\theta^6 - 1780\alpha^4\theta^4 - 360\alpha^5\theta^3 - 3\alpha^8)}{(60\alpha\theta^3 + 120\theta^4 + 10\alpha^2\theta^2 - \theta^4)^2} \quad (48.2)$$



الشكل (7.2): السعة الحرارية النوعية C بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B

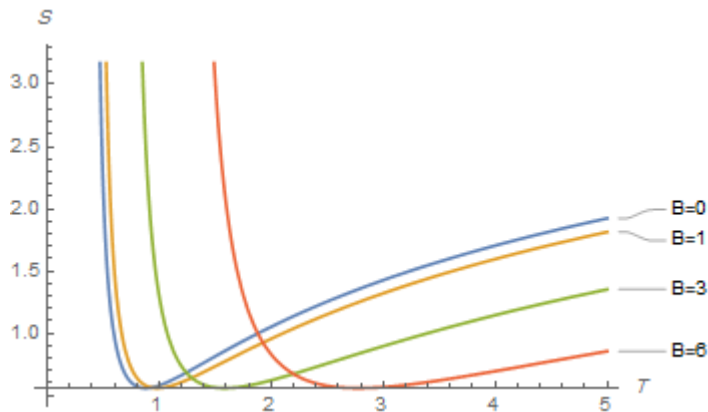
يمثل الشكل (7.2) تغيرات السعة الحرارية النوعية C بدلالة الحرارة T في مختلف القيم للحقل

المغناطيسي B حيث نلاحظ أنه بزيادة قيم درجة الحرارة تتناسب طرديا وتتناسب عكسيا مع قيم الحقل المغناطيسي.

وهذا ما يفسر وجود ظاهرة حيز وقيد على حركة الجسيمات الناتج عن وجود الحقل المغناطيسي

وأخيرا، نتحصل على عبارة الانتروبي التالية:

$$\frac{S}{K_B} = -\frac{\partial F}{\partial \theta} = \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{\alpha} + \frac{\alpha}{12\theta} - \frac{\alpha^3}{120\theta^3} \right) + \left(\frac{120\theta^4 - 10\alpha^2\theta^2 + 3\alpha^4}{60\alpha\theta^3 + 120\theta^4 + 10\alpha^2\theta^2 - \alpha^4} \right) \quad (49.2)$$



الشكل (8.2): دالة الانتروبي S بدلالة درجة الحرارة T من أجل قيم مختلفة للحقل المغناطيسي B

يمثل الشكل (8.2) تغيرات دالة الانتروبي S بدلالة الحرارة T في مختلف القيم للحقل المغناطيسي B حيث نلاحظ أنه بزيادة درجة الحرارة وقيم الحقل المغناطيسي تتناقص دالة الانتروبي.

مع وجود إزاحة لدرجة الحرارة الحرجة T_c (عند انعدام دالة الانتروبي S) متناسبة طردياً مع قيم الحقل المغناطيسي.

الفصل الثالث

معادلة باولي للهزاز التوافقي في فضاء الزخم المشوه

بجبر سنايدر-دي سيتر

3 الفصل الثالث

معادلة باولي للهاز التوافقي

في فضاء الزخم المشوه بجبر سنايدر-دي ستر

1.3 مدخل

النسبية العامة هي نظرية للجاذبية، أين توصف بأنها خاصية هندسة الزمكان. علمًا أنه بالنسبة للكون، وُجد أن الكتلة التي فيه تسبب انحناء الزمكان 4D (رباعي البعد، ثلاث أبعاد المكان + الزمن) وينتج عن ذلك قوة جاذبية تعمل على تقريب الكون من بعضه (تميل لإبطاء معدل التوسع العالمي).

يمكن أن يكون هناك سبب آخر لانحناء الزمكان، وهو ما يسمى الثابت الكوني. هذا جزء من مصطلح آخر في معادلة حقل آينشتاين للجاذبية التي تم اعتباره بشكل عام حتى عام 1998. ليكون معدومة. وهكذا، حتى قبل 20 عامًا أو نحو ذلك، تم حذفه بشكل عام من أي حسابات نسبية عامة. لكن الملاحظات الفلكية منذ ذلك الوقت كشفت أن هذا المصطلح ليس معدومًا.

التشوه في الفيزياء الكمية:

تمديدًا لنظرية المجال الكمومي إلى الزمكان المنحني الذي يمكن اعتباره أول تقريب للجاذبية الكمية. فقد اجتذب اهتمامًا كبيرًا نظرًا لوجود دوافع قوية لامتصاص اللانهاية الكامنة في نظريات النموذج القياسي. في مثل هذه الحالة من الزمكان المنحني، نتعامل مع هيكل مضطرب من قبل مجال الجاذبية. هذه التعديلات يمكن العثور عليها أيضًا في نموذج سنايدر [Snyder] حيث القياسات في ميكانيكا الكم الغير تبادلية يمكن أن يحكمها مبدأ عدم اليقين المعمم (GUP) [33]. حيث يعتبر هذا النموذج بمقياس طول أساسي من المفترض أن يكون من رتبة طول بلانك، وهذا ما يعادل لحد الأدنى من عدم اليقين في قياس الموضع [34] [35] [36] نظرًا لوجود العديد من الحجج التي تبين أن الجاذبية الكمية تنطوي أيضًا على أدنى من الطول القابل للقياس وفقًا لترتيب طول بلانك [Planck]، فإن قدرًا كبيرًا من الجهود تم تخصيصها لتمديد دراسة ميكانيكا الكم إلى الزمكان المنحني عبر مبدأ عدم اليقين الممتد (EUP) [37].

3.3. الحل الدقيق لمعادلة باولي بوجود الهاز التوافقي في فضاء سنايدر-دي سيدر

تعطى معادلة باولي-شرودينغر المشوهة التي تصف الجسيم المغزلي المشحون غير النسبي مع كتلته m محصورة في المجال الكهرومغناطيسي الخارجي وذلك في وجود الهاز التوافقي في فضاء الزخم ثنائي الأبعاد مع علاقات التبديل المشوهة المذكورة في الفصل الأول (31.1) و (32.1):

$$\left(\frac{(\sigma\pi)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2\right)\Psi(\mathbf{P}) = E\Psi(\mathbf{P}) \quad (1.3)$$

نلاحظ هنا الدالة الموجية $\Psi(\mathbf{P})$ تحتوي على المركبتين (ψ_2, ψ_1) الموضحة في العبارة (7.1)

ومصفوفات باولي σ المذكورة في العبارة (8.1) بينما $\pi = \mathbf{P} - e\mathbf{A}$ تعرف بالزخم الحركي.

$$(\sigma\pi)^2 = \pi^2 + i\sigma(\pi \times \pi) \quad (2.3)$$

للتبسيط، نختار اتجاه المجال المغناطيسي على طول المحور Z ويتم تثبيت المقياس على النحو التالي:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \quad (3.3)$$

حيث B تمثل شدة الحقل المغناطيسي.

في الفضاء ثنائي الأبعاد، يتم تعريف جبر سنايدر-دي سيدر Snyder -de Sitter المشوه المؤدي إلى EUP بواسطة علاقات الإبدال التالية:

$$[X, Y] = -i\hbar\alpha_2 L_Z, [P_X, P_Y] = -i\hbar\alpha_1 L_Z \quad (4.3)$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\lambda(\lambda + i\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2})\frac{p^2}{1-\alpha_2 p^2} + (1 - \alpha_2 p^2)r^2 + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(2\lambda - i\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2})\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + 2i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\lambda \quad (5.3)$$

$$Y P_X - X P_Y = (1 - i\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2})L_Z, P_X Y - P_Y X = (1 + i\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2})L_Z \quad (6.3)$$

$$[X, P_X] = i\hbar(1 + (\sqrt{\alpha_1}X + \sqrt{\alpha_2}P_X)^2) = i\hbar\left(1 + \frac{\alpha_2 p_x^2}{1-\alpha_2 p^2}\right) \quad (7.3)$$

$$[Y, P_Y] = i\hbar(1 + (\sqrt{\alpha_1}X + \sqrt{\alpha_2}P_X)^2) = i\hbar\left(1 + \frac{\alpha_2 p_y^2}{1-\alpha_2 p^2}\right) \quad (8.3)$$

$$[X, Y] = -i\hbar\alpha_2 L_Z, [P_X, P_Y] = -i\hbar\alpha_1 L_Z \quad (9.3)$$

وعليه يمكننا القيام بمختلف الحسابات التالية:

$$\left(\vec{P} - \frac{e}{2}(B \times r)\right)^2 \quad (10.3)$$

$$\vec{B} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & B \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (-By\vec{i} + Bx\vec{j}) = B(-y\vec{i} + x\vec{j}) \quad (11.3)$$

$$= \left[\left(P_x + By\frac{e}{2}\right)\vec{i} + \left(P_y + Bx\frac{e}{2}\right)\vec{j}\right] \left[\left(P_x - By\frac{e}{2}\right)\vec{i} + \left(P_y + Bx\frac{e}{2}\right)\vec{j}\right] \quad (12.3)$$

$$= \left(P_x^2 + \frac{e}{2}BP_xy + \frac{e}{2}ByP_x + \frac{B^2e^2}{4}y^2\right) + P_y^2 - \frac{eB}{2}P_yx - \frac{eB}{2}xP_y + \frac{e^2B^2}{4}x^2 \quad (13.3)$$

لنحسب العبارة التالية:

$$P = P_x^2 + P_y^2 \quad (14.3)$$

$$P_x^2\Psi = P_x(P_x\Psi) = \left(-i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\sqrt{1-\alpha_2P^2}\frac{\partial}{\partial P_x} + (1-\lambda)\frac{P_x}{\sqrt{1-\alpha_2P^2}}\right) \left(-i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\sqrt{1-\alpha_2P^2}\frac{\partial\Psi}{\partial P_x} + (1-\lambda)\frac{P_x\Psi}{\sqrt{1-\alpha_2P^2}}\right) \quad (15.3)$$

$$P_x^2 = -i\hbar^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\sqrt{1-\alpha_2P^2}\left(\frac{\partial}{\partial P_x}\left(\sqrt{1-\alpha_2P^2}\frac{\partial\Psi}{\partial P_x}\right) - i\hbar(1-\lambda)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\sqrt{1-\alpha_2P^2}\frac{\partial}{\partial P_x}\frac{P_x\Psi}{\sqrt{1-\alpha_2P^2}}\right) - i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(1-\lambda)\frac{P_x}{\sqrt{1-\alpha_2P^2}}\frac{\partial\Psi}{\partial P_x} + (1-\lambda)^2\frac{P_x^2\Psi}{1-\alpha_2P^2} \quad (16.3)$$

$$P_x^2 = -\hbar^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\sqrt{1-\alpha_2P^2}\left(\frac{-2\alpha_2P_x}{2\sqrt{1-\alpha_2P^2}}\frac{\partial\Psi}{\partial P_x} + \sqrt{1-\alpha_2P^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial P_x^2}\right) - i\hbar(1-\lambda)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\sqrt{1-\alpha_2P^2}\left(\alpha_2\frac{P_x^2}{(1-\alpha_2P^2)^{\frac{3}{2}}}\Psi + \frac{P_x}{\sqrt{1-\alpha_2P^2}}\frac{\partial\Psi}{\partial P_x}\right) - i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(1-\lambda)P_x\frac{\partial\Psi}{\partial P_x} + (1-\lambda)^2\frac{P_x^2}{1-\alpha_2P^2}\Psi \quad (17.3)$$

أين نجد الحد P_x^2 :

$$P_x^2 = ((1-\lambda)^2 - i\hbar(1-\lambda)\sqrt{\alpha_1\alpha_2})\frac{P_x^2}{1-\alpha_2P^2}\Psi - \hbar^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\alpha_2P^2)\frac{\partial^2\Psi}{\partial P_x^2} + \left(\hbar^2\alpha_1 2i\hbar(1-\lambda)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right)P_x\frac{\partial\Psi}{\partial P_x} - i\hbar(1-\lambda)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\Psi \quad (18.3)$$

لنحسب الحد P_y^2 :

$$P_y^2 \Psi = \left(-i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \sqrt{(1 - \alpha_2 P^2)} \frac{\partial}{\partial P_y} + (1 - \lambda) \frac{P_y}{\sqrt{1 - \alpha_2 P^2}} \right) \left(-i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \sqrt{(1 - \alpha_2 P^2)} \frac{\partial}{\partial P_y} + (1 - \lambda) \frac{P_y}{\sqrt{1 + \alpha_2 P^2}} \right) \quad (19.3)$$

$$P_y^2 \Psi = ((1 - \lambda)^2 - i\hbar(1 - \lambda)\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}) \frac{P_y^2}{\sqrt{1 - \alpha_2 P^2}} \Psi - \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 - \alpha_2 P^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial P_y^2} + \left(\alpha_1 \hbar^2 \alpha_1 - 2i\hbar(1 - \lambda) \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right) P_x \frac{\partial \Psi}{\partial P_x} - i\hbar(1 - \lambda) \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (20.3)$$

بجمع (18.3) و (20.3)، نجد:

$$P_X^2 + P_Y^2 = (1 - \lambda)(1 - \lambda - i\hbar\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}) \frac{p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 - \alpha_2 p^2) r^2 + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} (2(1 - \lambda) - i\hbar\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}) \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - 2i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} (1 - \lambda) \quad (21.3)$$

يمكننا إعادة كتابة هذه المعادلة في الفضاء المشوه على الشكل التالي:

$$\left[(\chi' - \alpha_2 eBS_z) \frac{p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \frac{\xi}{\alpha_2} (1 - \alpha_2 p^2) r^2 + \left(2 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \Omega - i\hbar \xi \right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \left(eB + 2 \left(\alpha_1 + \frac{e^2 B^2}{4} \alpha_2 \right) S_z \right) L_z - 2eBS_z \right] \Psi = \varepsilon' \Psi \quad (22.3)$$

حيث:

$$\chi' = 1 - \lambda(1 - \Omega) + i\hbar\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \Omega, \varepsilon' = 2mE - 2i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \Omega \quad (23.3)$$

$$\Omega = \frac{\xi}{\alpha_1} \lambda - 1, \xi = \alpha_1 + \left(m^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4} \right) \alpha_2 \quad (24.3)$$

نلاحظ أنه بالإضافة إلى التفاعل المغناطيسي ومعادلة شرودينغر المشوهة، نجد حد السبين النقي $2eBS_z$ وجزئين إضافيين ينبعان أساساً من تأثير تشوه الفضاء. يظهر أحدهما في جزء الهاز التوافقي (αp^2) كحد تفاعل $\alpha_2 eBS_z$ والحد الآخر من نوع الدوران المغزلي $2(\alpha_1 + e^2 B^2 \alpha_2 / 4) S_z L_z$ ، كل هذه المصطلحات بسبب وجود السبين في هذه الدراسة.

من أجل الحصول على الحل الدقيق للمعادلة (22.3)، نقدم الاحداثيات القطبية في فضاء الزخم (p, φ) ، المتعلقة بالإحداثيات الكارتيزية من خلال العلاقة:

$$p_x = p \cos \varphi, \quad p_y = p \sin \varphi \quad (25.3)$$

بهذه الطريقة، ستكون المعادلة (22.3):

$$\left[-\hbar^2 \frac{\xi}{\alpha_2} \left(\left(\sqrt{(1 - \alpha_2 p^2)} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + \left(-\alpha_2 p^2 \right) \left(\frac{\partial}{p \partial p} - \frac{l^2}{p^2} \right) \right) 2i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \Omega \frac{p \partial}{\partial p} + \left(1 - \lambda(1 - \Omega) + i\hbar \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \Omega - \frac{\alpha_2 e B \hbar}{2} \tau \right) \frac{p^2}{1 - \alpha_2 p^2} - \epsilon^\tau \right] R_l^\tau(p) = 0 \quad (26.3)$$

حيث $\epsilon^\tau = \epsilon' - 2m\tilde{\omega}\hbar(l - \tau) - \hbar^2(\alpha_1 + e^2 B^2 \alpha_2 / 4)\tau l$ وقد استخدمنا الشكل المنفصل التالي:

$$\Psi(p, \varphi) = e^{-i l \varphi} R_l^\tau(p) \chi_\tau \quad (27.3)$$

حيث $\tau = \pm 1$ ، على التوالي، القيم الذاتية للزخم الزاوي وعوامل السبين.

و $\chi_{-1}^T = (0, 1)$ ، $\chi_{+1}^T = (1, 0)$ هي دوال السبين.

الآن، من أجل حل المعادلة نستخدم التحويل التالي:

$$p \rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} \arcsin(\sqrt{\alpha_2} p) \quad (28.3)$$

حيث $\kappa = \hbar \sqrt{\xi}$ ثم تصبح المعادلة:

$$\kappa \rho = \arcsin(\sqrt{\alpha_2} p) \Rightarrow \sqrt{\alpha_2} p = \sin(\kappa \rho)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha_2} dp = \kappa \cos(\kappa \rho) d\rho$$

$$\frac{d}{dp} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\kappa \cos(\kappa \rho)} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

حيث $(1 - \alpha_2 p^2) = \cos^2(\kappa \rho)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left(\kappa \cot(\kappa p) - \frac{2\delta}{k} \tan(\kappa p) \right) \frac{\partial}{\partial p} - \kappa^2 l^2 \cot^2(\kappa p) - \eta \tan^2(\kappa p) + \varepsilon^\tau \right] R_l^\tau(p) = 0 \quad (29.3)$$

$$\delta = i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \Omega \quad \text{و} \quad \eta = \frac{1-\lambda}{\alpha_2} - \frac{eB\hbar}{2} \tau + \left(\frac{\lambda}{\alpha_2} + i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right) \Omega \quad (30.3)$$

نستخدم تحويل التالي:

$$R_l^\tau(q) = (1 - q^2)^{\frac{\mu}{2}} q^l f_l^\tau(q) \quad (31.3)$$

حيث μ ثابت يتعين تحديده و $q = \sin(\kappa\rho)$

عن طريق التعويض المعطى بواسطة المعادلة (31.3)، تختصر المعادلة التفاضلية $f_l^\tau(q)$:

$$\left[(1 - q^2) \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \left(\frac{2l+1}{q} - 2(\mu + l + \delta + 1)q \right) \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\varepsilon^\tau}{\kappa^2} - l(2\mu + 2\delta + 1) - 2\mu \right] f_l^\tau(q) = 0 \quad (32.3)$$

حيث μ تحقق:

$$\mu^2 - \left(1 - \frac{2\delta}{\kappa^2} \right) \mu - \frac{\eta_\tau}{\kappa^2} = 0 \quad (33.3)$$

من أجل تجنب القيم الذاتية المركبة ε ذات الطابع المركب (الجزء الأول)، يجب أن نفرض الشرط $\Omega = 0$

لإزالة الجزء التخيلي في المعادلة (24.3)، يعمل هذا على تعديل قيمة المعامل λ :

$$\lambda = \frac{\alpha_1}{\left(m^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4} \right) \alpha_2 + \alpha_1} \quad (34.3)$$

من العلاقة (33.3)، $f_l^\tau(q)$ يجب أن تكون غير فردية من أجل $q = \pm 1$. والذي يختار لتحقيق القيمة

المقبولة ل μ :

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\eta}{\kappa^2}} \quad (35.3)$$

الآن لاختصار هذه المعادلة لمعادلة تفاضلية متعدد حدود معروفة الحل نقوم بإجراء التغيير التالي

$z = 2q^2 - 1$ ونفرض الشرط التالي:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon^\tau}{\kappa^2} - l(2\mu + 2\delta + 1) - 2\mu \right) = n(n + a + b + 1) \quad (36.3)$$

حيث n عدد صحيح غير سالب و a, b معرفان كالتالي:

$$a = \mu_\tau + \delta - \frac{1}{2} \text{ و } b = l \quad (37.3)$$

بالتعويض في (32.3) نجد الشكل التالي:

$$\left[(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} + ((b - a) - (a + b + 2)z) \frac{d}{dz} + n(n + a + b + 1) \right] f_{nl}^\tau(z) = 0 \quad (38.3)$$

والتي يعطى حلها بكثير حدود جاكوبي:

$$f_{nl}^\tau(z) = P_N^{(a,b)}(z) \quad (39.3)$$

بالعودة الى المتغير السابق p تعطى دالة الموجة

$$R_l^\tau(p) = C_\tau (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\mu_\tau}{2}} (\alpha_2 p^2)^{\frac{l}{2}} P_n^{\left(\mu_\tau + \delta - \frac{1}{2}, l\right)} (2\alpha_2 p^2 - 1) \quad (40.3)$$

حيث C_τ ثابت العيارية.

كنتيجة لذلك نكتب دالة الموجة $\Psi(p, \varphi)$

$$\Psi(p, \varphi) = C_\tau e^{-il\varphi} (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\mu_\tau}{2}} (\alpha_2 p^2)^{\frac{l}{2}} P_n^{\left(\mu_\tau - \frac{1}{2}, l\right)} (2\alpha_2 p^2 - 1) \chi_\tau \quad (41.3)$$

بتطبيق المعادلات (35.3) و (37.3) في المعادلة الثانية ل (37.3) نجد طيف الطاقة $E_{N,l}^\tau$ لمعادلة

شرودينغر باولي للهازز سنايدر بالشكل المرافق

$$E_{N,l}^\tau = \frac{1}{2m} \left[(N + 1) \sqrt{\kappa^4 - 4m\tilde{\omega}\hbar\tau\kappa^2 + 4\hbar^2 m^2 (\omega^2 + \tilde{\omega}^2)} + \kappa^2 ((N + 1)^2) - l^2 + 2m\tilde{\omega}\hbar(l - \tau) + \hbar^2 (\alpha_1 + m^2 \tilde{\omega}^2 \alpha_2) \tau l \right] \quad (42.3)$$

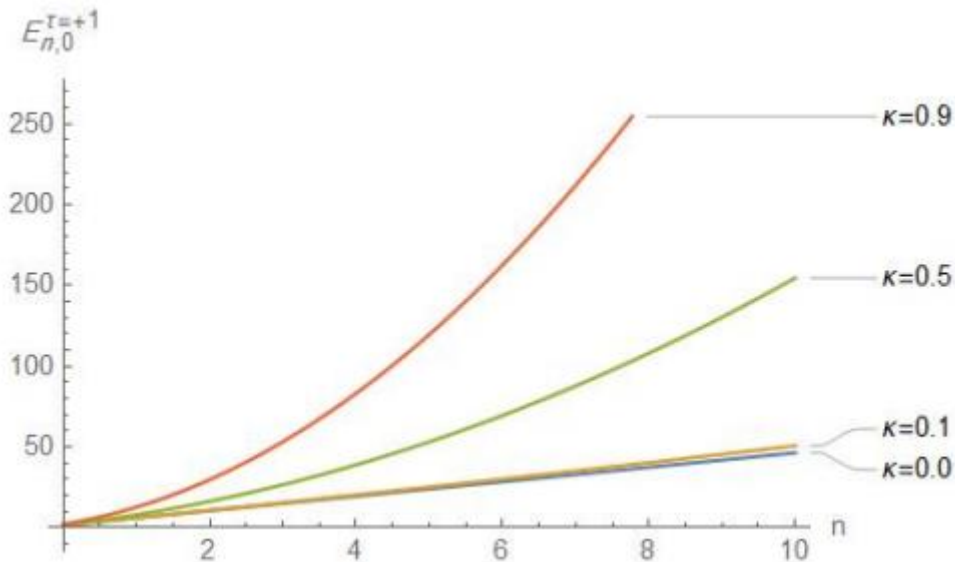
حيث $N = 2n + l$ العدد الكمي الأساسي واستعملنا التعريف التالي $\tilde{\omega} = \frac{eB}{2m} = \frac{\omega_c}{2}$ حيث ω_c

يعرف بالتردد السكلتروني.

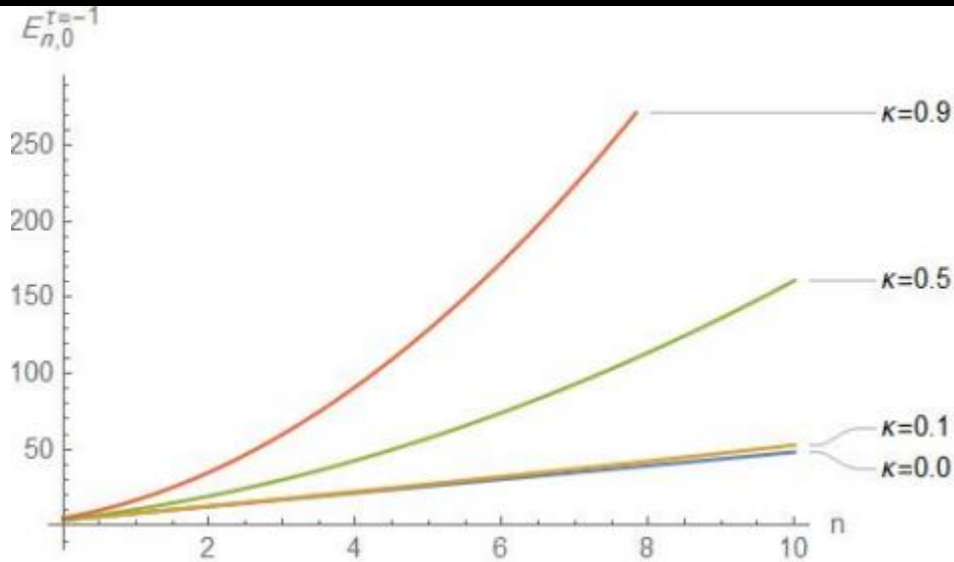
نلاحظ ان مستويات الطاقة للنظام المدروس تعتمد أساسا على عوامل التشوه α_1, α_2 . والذي يعتبر امر ملحوظ كنتيجة لجبر هايزنبرغ المعدل. هنا، تجدر الإشارة إلى أنه وفقاً لاعتماد للطاقات N^2 ، والذي يتوافق مع التقييد في منطقة الطاقة العالية، فإن نتيجتنا تعادل طاقة دوران جسيم كمي غير نسبي $1/2$ في كمون بئر مربعة، في حالتنا، يتم وضع حدود البئر في $\pm \pi/2 \sqrt{\alpha_1 + m^2(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)} \alpha_2$. من ناحية أخرى، يُعرف هذا التعبير في النظرية غير التبادلية، حيث يؤثر تشوه الفضاء على نتائج الفيزيائية.

من أجل إظهار تأثيرات الفضاء المشوه في جبر سنايدر-دي سيتر على هزاز سنايدر-دي سيتر، نرسم منحنيات مستويات الطاقة E للحالات S بدلالة الرقم الكمي n لقيم مختلفة لمعاملات التشوه. اخترنا

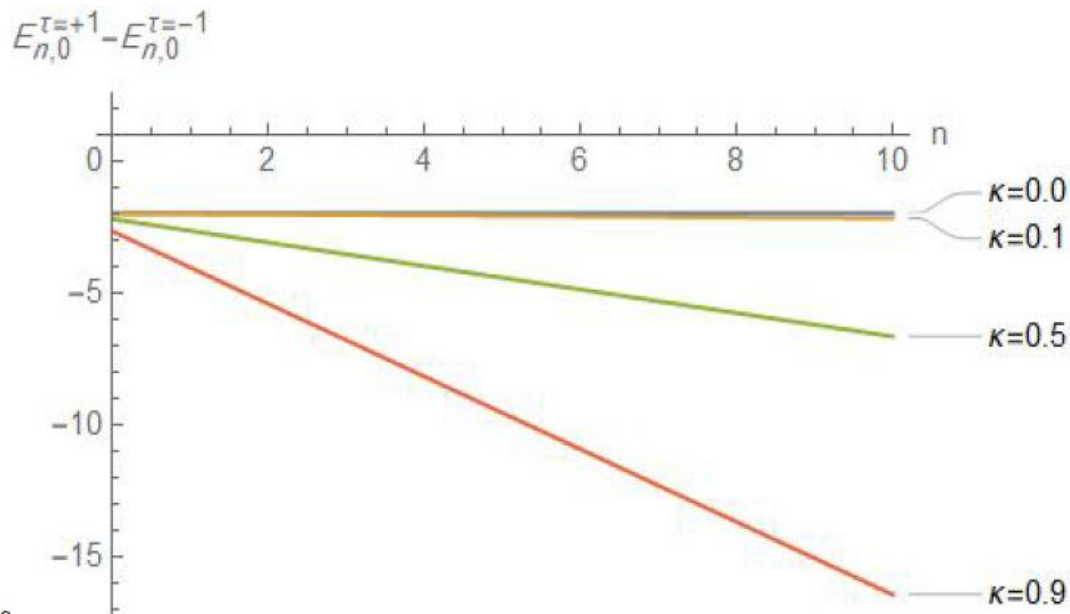
$B = \omega = 1$ ونستخدم وحدات Hartree الذرية $m = e = 1$ والتي تعطينا نفس التعبير الطاقوي (42.3)



الشكل (1.3): قيم الحالة الأساسية s من أجل $\tau = +1$ بدلالة العدد الكمي n من أجل قيم مختلفة لمعامل للتشوه



الشكل (2.3): قيم الحالة الأساسية s من أجل $\tau = -1$ بدلالة العدد الكمي n من أجل قيم مختلفة لمعامل للتشوه



الشكل 3.3: اختلاف في قيم الحالة الأساسية s من أجل $\tau = \pm 1$ بدلالة العدد الكمي n من أجل قيم مختلفة لمعامل للتشوه

نرى من النتائج الموضحة في الشكل (1.3) والشكل (2.3) أنه من أجل قيمة τ ، تزيد مساهمة جبر Snyder-de Sitter من قيمة مستويات الطاقة E للحالات S بشكل متناسب مع معامل التشوه κ . علاوة على ذلك، لتوضيح تأثير الدوران النظام المدروس. يمكننا أن نلاحظ في الشكل (3.3) أن قيمة التباعد

بين مستويات الطاقة اعتمادًا على القيمة الذاتية للدوران $E^+ \downarrow \tau = +1$ أصغر من قيمة $E^- \downarrow \tau = -1$ والتي تصبح أصغر مع زيادة قيمة معامل التشوه.

قبل الانتهاء من هذا الجزء، نقترح تحديد ثابت العيارية C_τ :

للقيام بذلك، نطبق الصيغة

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}} \frac{2\pi p dp}{(1-\alpha_2 p^2)^{\frac{1}{2}}} \Psi_1^* \Psi_1 = 1 \quad (43.3)$$

بعد ذلك نستخدم العلاقة

$$\int_{-1}^{+1} dy (1-y)^a (1+y)^b \left[P_n^{(a,b)}(y) \right]^2 = \frac{2^{a+b+1} \Gamma(a+n+1) \Gamma(b+n+1)}{n! (a+b+1+2n) \Gamma(a+b+n+1)} \quad (44.3)$$

لنحصل على ثابت العيارية

$$C_+ = 2 \left[\frac{\pi}{\alpha_2 n!} \frac{\Gamma(l+n+1) \Gamma(\mu+n+\frac{1}{2})}{(\mu+l+2n+\frac{1}{2}) \Gamma(\mu+l+n+\frac{1}{2})} \right]^{-1/2} \quad (45.3)$$

الآن من المهم دراسة الحالات التالية

• في حالة غياب التشوه ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$):

لنتحقق من دراسة نتائج هذه الحالة بوضع النهاية ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) للعبارة (41.3). نستعمل

العلاقات التالية:

$$P_n^{(\alpha,B)}(-x) = (-1)^n P_n^{(B,\alpha)}(x), \lim_{\mu \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha,B)} \left(1 - \frac{2x}{\mu} \right) = L_n^\alpha(x)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(v+a)}{\Gamma(v)} v^{-a} = 1, e^x = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{\mu} \right)^\mu \quad (46.3)$$

وكذلك نستخدم نشر تايلور بالرتبة الأولى ل α_2 $\left(\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\mu_+}{2}} = \exp \left(-\frac{\Lambda}{2} p^2 \right) \right)$

حيث $\Lambda = (\hbar m \sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}^2})$ ، $\mu_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_2} \left(\Lambda - \frac{eB\hbar\Lambda}{4} \alpha_2 + o(\alpha_2^2) \right)$ لنحصل ببساطة على

القيم الذاتية لفضاء الزخم للهازز باولي العادي بدون تشوه

$$\Psi_1(p, \varphi) = 2(-1)^n \sqrt{\frac{n! \Lambda^{l+1}}{\pi \Gamma(l+n+1)}} e^{-i l \varphi} \exp \left(-\frac{\Lambda}{2} p^2 \right) p^l L_n^l(p^2) \quad (47.3)$$

وكذلك عبارة الطاقة (42.3) لتصبح:

$$E_{N,l}^{\tau} = \hbar \left[(N+1)\sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)} + \tilde{\omega}(l - \tau) \right] \quad (48.3)$$

الذي يمثل الطيف ثنائي الأبعاد لجسيم مشحون غير نسبي من الدوران محصور في هزاز توافقي مع وجود مجال مغناطيسي منتظم في ميكانيكا الكم العادية.

• في حالة غياب نموذج سنايدر ($\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$)

في حالة عدم وجود تشوه لنموذج سنايدر، مع أخذ الحد ($\alpha_2 \rightarrow 0$) ونقتصر على الرتبة الأولى من α_2 من التعبير (41.3)، نحصل مباشرة على القيم الذاتية لفضاء الزخم لهزاز باولي المشوه مع جبر دي سينتر:

$$\Psi_1(p, \varphi) = 2(-1)^n \sqrt{\frac{n!}{\pi\Gamma(l+n+1)}} e^{-il\varphi} p^l L_n^l(p^2) \quad (49.3)$$

وبالتالي يصبح طيف الطاقة:

$$E_{N,l}^{\tau} = \hbar \left[(N+1)\sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}^2 - \frac{\tilde{\omega}\hbar\alpha_1}{m} + \frac{\hbar^2\alpha_1^2}{4m^2}} + \tilde{\omega}(l - \tau) + \frac{\hbar\alpha_1}{2m} \left((N+1)^2 - l(l - \tau) \right) \right] \quad (50.3)$$

نلاحظ أنه في قيم المجال المغناطيسي الحرجة، حيث يتلاشى معامل L_z ، يكون تأثير الفضاء المشوه قادرًا على مواجهة تأثير زيمان الطبيعي. من أجل تحديد قيم المجال المغناطيسي الحرجة، نضع المعامل L_z من المعادلة (22.3) مساويًا للصفر. نجد:

$$B = \frac{-\hbar\tau\alpha_1}{e} \quad (51.3)$$

من جهة أخرى، عندما نهمل $\omega = 0$ نلاحظ أن الحالة الأساسية تختفي $0 \rightarrow E_{0,0}^{\tau}$ من أجل القيم ($\alpha_1 = \frac{2m\tilde{\omega}\tau}{\hbar}$) مما يؤدي إلى نفس قيمة شدة الحقل المغناطيسي الحرج B في اتجاهات معاكسة مما تفسر بنقاط الرنين.

خاتمة عامة

خاتمة عامة

في هذه المذكرة قمنا بحل معادلة باولي-شرودينغر للهزاز التوافقي في الفضاء المشوه بجبر سنايدر-دي ستر بوجود الحقل المغناطيسي في إطار ميكانيكا الكم غير النسبية، حيث قمنا: في الفصل الأول بتقديم تذكيراً عاماً لمعادلة باولي-شرودينغر للهزاز التوافقي والتشوه الفضائي لجبر سنايدر-دي ستر.

في الفصل الثاني قمنا بحل معادلة باولي-شرودينغر لهزاز توافقي في الحالة العادية (بدون تشوه) في إطار ميكانيكا الكم غير النسبية في فضاء الزخم، وبحسابات عادية استخرجنا عبارات طيف الطاقة ودالة الموجة الموافقة للنظام المدروس، ثم درسنا الخصائص الديناميكية الحرارية كطاقة الحرة، طاقة الداخلية، السعة الحرارية النوعية والانتروبي بدلالة دالة التقسيم.

في الفصل الثالث، قمنا بعرض حل تحليلي دقيق لمعادلة باولي المشوهة ثنائية الأبعاد مع تفاعل الهزاز التوافقي في فضاء الزخم مع علاقات تبديل سنايدر-دي ستر مما يؤدي إلى عدم وجود حد أدنى من عدم اليقين في قياس الموضع وكذلك الزخم نسبياً لجسيم مشحون سبين $1/2$ تحت تأثير مجال مغناطيسي ثابت. يتم الحصول على الحل الدقيق حيث تم التعبير عن دوال الموجة للنظام بدلالة كثير حدود جاكوبي وتم استنتاج الطاقة الذاتية المقابلة مع تصحيح إضافي، والذي يتعلق بمعاملات التشوه، α_1 و α_2 ويزداد انحرافه بسرعة مع N التي يمكن أن تكون مرتبطة بالحجز (confinement). إلى جانب ذلك، أدى وجود الدوران في هذه الدراسة إلى وجود مصطلحات تصحيحية مضافة إلى تلك الآتية من التشوه. وهكذا، تمكنا من الحصول على المصطلحات التصحيحية التي تمثل تأثيرات السبين وتفاعلاته المعتادة والمشوهة مع المجال المغناطيسي ومصطلح "سبين-مدار" جديد يمثل تفاعل الدوران مع العزم المداري وتشوه الفضاء. في نفس الوقت. لذلك من خلال هذا التفاعل الجديد، يعزز نموذج سنايدر-دي ستر مصطلح السبين-المدار بمساهمة تتناسب مع معاملات التشوه.

قائمة المراجع

قائمة المراجع

- [1] De Martino, A., Dell'Anna, L., & Egger, R. (2007). Magnetic confinement of massless Dirac fermions in graphene. *Physical review letters*, 98(6), 066802.
- [2] Novoselov, K. S., Geim, A. K., Morozov, S. V., Jiang, D., Katsnelson, M. I., Grigorieva, I., ... & Firsov, A. (2005). Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. *nature*, 438(7065), 197-200.
- [3] Arjona, V., Castro, E. V., & Vozmediano, M. A. (2017). Collapse of Landau levels in Weyl semimetals. *Physical Review B*, 96(8), 081110.
- [4] Zhang, Y., Tan, Y. W., Stormer, H. L., & Kim, P. (2005). Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene. *nature*, 438(7065), 201-204.
- [5] Bolotin, K. I., Ghahari, F., Shulman, M. D., Stormer, H. L., & Kim, P. (2009). Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene. *Nature*, 462(7270), 196-199.
- [6] Andrade, F. M., Silva, E. O., Ferreira Jr, M. M., & Rodrigues, E. C. (2014). On the κ -Dirac oscillator revisited. *Physics Letters B*, 731, 327-330.
- [7] Seiberg, N., & Witten, E. (1999). String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, 1999(09), 032.
- [8] Gingrich, D. M. (2010). Noncommutative geometry inspired black holes in higher dimensions at the LHC. *Journal of High Energy Physics*, 2010(5), 1-21.
- [9] Gracia-Bondia, J. M. (2010). Notes on "quantum gravity" and noncommutative geometry. In *New Paths Towards Quantum Gravity* (pp. 3-58). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [10] Nicolini, P. (2009). Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A*, 24(07), 1229-1308.
- [11] Haouam, I. (2019). On the Fisk-Tait equation for spin-3/2 fermions interacting with an external magnetic field in noncommutative space-time. *arXiv preprint arXiv:1910.06763*.
- [12] Szabo, R. J. (2003). Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, 378(4), 207-299.
- [13] Haouam, I. (2019). Analytical solution of (2+ 1) dimensional Dirac equation in time-dependent noncommutative phase-space. *arXiv preprint arXiv:1910.05833*.

- [14] Haouam, I. (2020). Two-dimensional pauli equation in noncommutative phase-space. *arXiv preprint arXiv:2012.06986*.
- [15] Haouam, I. (2019). The non-relativistic limit of the DKP equation in non-commutative phase-space. *Symmetry*, 11(2), 223.
- [16] Harko, T., & Liang, S. D. (2019). Energy-dependent noncommutative quantum mechanics. *The European Physical Journal C*, 79(4), 1-22.
- [17] Snyder, H. S. (1947). Quantized space-time. *Physical Review*, 71(1), 38.
- [18] Kempf, A. (1994). Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, 35(9), 4483-4496.
- [19] Kempf, A., Mangano, G., & Mann, R. B. (1995). Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D*, 52(2), 1108.
- [20] Mignemi, S. (2011). Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model. *Physical Review D*, 84(2), 025021.
- [21] Ghosh, S., & Mignemi, S. (2011). Quantum mechanics in de Sitter space. *International Journal of Theoretical Physics*, 50(6), 1803-1808.
- [22] Sek, L., Falek, M., & Moumni, M. (2021). 2D relativistic oscillators with a uniform magnetic field in anti-de Sitter space. *International Journal of Modern Physics A*, 36(17), 2150113.
- [23] Chung, W. S., & Hassanabadi, H. (2019). Extended uncertainty principle and thermodynamics. *International Journal of Modern Physics A*, 34(06n07), 1950041.
- [24] Le Bellac, M. (2011). *Quantum physics*. Cambridge University Press.
- [25] Stetsko, M. M. (2015). Dirac oscillator and nonrelativistic Snyder-de Sitter algebra. *Journal of Mathematical Physics*, 56(1), 012101.
- [26] Tah, R. (2020). Simulating a Quantum Harmonic Oscillator by introducing it to a Bosonic System.
- [27] Bezverkhniy, V. (2021). Heisenberg's Uncertainty Principle and Wave-Particle Dualism. Available at SSRN 3865301.
- [28] Bayındır, C. (2020). Rogue quantum harmonic oscillations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 547, 124462.

- [29] Rezek, Y. (2004). *The quantum harmonic oscillator as a thermodynamic engine* (Doctoral dissertation, Master's thesis, Hebrew University, Jerusalem, Israel, 2004, retrieved from <https://www.researchgate.net>).
- [30] Heddar, M., Falek, M., Moumni, M., & Lütfüoğlu, B. C. (2021). Pauli oscillator in noncommutative space. *Modern Physics Letters A*, 36(40), 2150280.
- [31] Snyder, H. S. (1947). Quantized space-time. *Physical Review*, 71(1), 38.
- [32] Kempf, A. (1994). Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, 35(9), 4483-4496.
- [33] Kempf, A., Mangano, G., & Mann, R. B. (1995). Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D*, 52(2), 1108.
- [34] Mendes, R. V. (2017). The geometry of noncommutative space-time. *International Journal of Theoretical Physics*, 56(1), 259-269.
- [35] Chung, W. S. (2019). The new type of extended uncertainty principle and some applications in deformed quantum mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 58(8), 2575-2591.
- [36] Merad, M., & Hadj Moussa, M. (2018). Exact solution of Klein–Gordon and Dirac equations with Snyder–de Sitter algebra. *Few-Body Systems*, 59(1),

المخلص:

في هذا العمل، درسنا بدقة نظام هزاز باولي-شرود نغر في إطار ميكانيكا الكم غير النسبية المشوهة بنموذج سنيدر دي-سيتر. أولاً قدمنا تذكيراً عامًا لمعادلة باولي-شرود نغر والتشوه الفضائي. في الخطوة الثانية، استخرجنا عبارات طيف الطاقة ودالة الموجة الموافقة للنظام المدروس، ثم درسنا الخصائص الديناميكية الحرارية لهزاز باولي شرودنغر غير النسبي في ميكانيكا الكم العادية. أخيرًا، قمنا بتعميم نفس هذه الدراسة في سياق التشوه الفضائي الناجم عن مبدأ عدم اليقين العام لهايزنبرغ، حيث حددنا عبارات الدالة الموجية وطيف الطاقة الموافق لها.

الكلمات المفتاحية: معادلة باولي-شرود نغر، هزاز توافقي، تشوه سنيدر دي سيتر.

Abstract:

In this work, we have studied exactly the Pauli-Schrödinger oscillator system in the context of deformed non-relativistic quantum mechanics via the Snyder De-Sitter model. We first provided a general reminder of the Pauli-Schrödinger equation and spatial deformation. In a second step, we extracted the terms of the energy spectrum and the wave function corresponding to the considered system then we studied the thermodynamic properties of the non-relativistic Pauli-Schrödinger oscillator in ordinary quantum mechanics. Finally, we generalized the same study in the context of spatial deformation caused by the generalized Heisenberg uncertainty principle, where we determined the expressions of the wave function and the corresponding energy spectrum.

Keywords: Pauli-Schrödinger equation, harmonic oscillator, Snyder De-Sitter deformation.

Résumé :

Dans le cadre de ce travail, nous avons étudié exactement le système d'oscillateur de Pauli-Schrödinger dans la mécanique quantique non relativiste déformée via le modèle de Snyder De-Sitter. Nous avons d'abord fourni un rappel général de l'équation de Pauli-Schrödinger et de la distorsion spatiale. Dans un second temps, nous avons extrait les termes du spectre d'énergie et la fonction d'onde correspondant au système considéré puis nous avons étudié les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Pauli-Schrödinger non relativiste en mécanique quantique ordinaire. Enfin, nous avons généralisé la même étude dans le contexte de la déformation spatiale causée par le principe d'incertitude de Heisenberg généralisé, où nous avons déterminé les expressions de la fonction d'onde et du spectre d'énergie correspondant.

Mots clés : équation de Pauli-Schrödinger, l'oscillateur harmonique, la déformation de Snyder De-Sitter.