

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Génie Civil et Hydraulique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية و الري
المرجع:

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en sciences en : Génie Civil

Option : Modélisation des matériaux et structures

**Contribution à l'étude numérique des coques
par des éléments de type solide-coque,
applications linéaires et non linéaires**

Présentée par :
Bachir LABIODH

Soutenue publiquement le : 03/06/2021

Devant le jury composé de :

Pr. CHEBILI Rachid	Professeur	Président	Université de Biskra
Pr. HAMADI Djamel	Professeur	Directeur de thèse	Université de Biskra
Pr. KADID Abdelkarim	Professeur	Examineur	Université de Batna 2
Pr. MAALEM Toufik	Professeur	Examineur	Université de Batna 2

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- Mes très chers parents. Que Dieu les garde

- Ma femme et mes filles Malak et Maïssa et mon fils

Abderraouf ,

-Mes frères et mes sœurs,

-Toute ma famille et ma belle-famille,

-A mes camarades de classe

-A tous mes amis

Bachir

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département de génie civil et hydraulique de l'université Mohamed Khidher de Biskra.

Tout d'abord, j'exprime mes sincères et profonds remerciements et reconnaissances à mon directeur de thèse, Monsieur **HAMADI Djamal**, Professeur à l'Université de Biskra, pour avoir su donner des orientations pertinentes à ce travail, pour ses conseils et pour m'avoir apporté une vision toujours très claire dans ce domaine. Merci d'avoir pris le temps de me convaincre quand j'avais tort.

J'adresse un remerciement chaleureux à Monsieur **ZATAR Abdallah**, Maître de conférences à l'université de Biskra pour ses commentaires précieux concernant la rédaction de cette thèse.

Je remercie chaleureusement Monsieur **CHEBILI Rachid**, Professeur à l'Université de Biskra qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance, je tiens à lui exprimer ma plus profonde gratitude.

J'exprime mes sincères remerciements aux membres de jury, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir corriger avec attention ce travail :

Monsieur **KADID Abdelkarim**, Professeur à l'Université de Batna 2

Monsieur **MAALEM Toufik**, Professeur à l'Université de Batna 2

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et adresser mes vifs remerciements aux enseignants du département de génie civil et hydraulique de l'université de Biskra, et à tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

RESUME

L'utilisation des structures en coques dans le domaine de l'ingénierie est très fréquente. Vu la complexité géométrique et le comportement de ces structures, l'étude se fait généralement avec la modélisation numérique, notamment la méthode des éléments finis et avec des éléments de type coque à deux dimensions. Cependant l'existence d'autres types de structures volumiques (raidisseurs, semelles, supports ...), pouvant être raccordées avec ces structures pose un problème de liaison entre deux types d'éléments (2D et 3D). Donc, l'utilisation des éléments finis solide-coque qui peut à la fois représenter plus efficacement le comportement de ces structures et assurer la jonction entre les éléments solides 3D et les éléments coques 2D, est devenue importante. Ces éléments permettent d'une part, d'allier les caractéristiques d'éléments solides volumiques, tels que la description géométrique, les degrés de liberté et les lois de comportement 3D, au modèle mécanique qui fait appel aux théories des coques et d'autre part en pratique lorsque l'ouvrage ayant une géométrie complexe et soumis à des charges importantes, ces dernières risquent de provoquer des grands déplacements ce qui nécessite soit d'intégrer des raidisseurs pour minimiser les déplacements ou bien de tenir en compte de l'analyse non linéaire géométrique. Malgré les recherches effectuées pour éliminer les différents problèmes de blocage numérique rencontrés pour les éléments finis type solide-coque, certains verrouillages sévères persistent encore.

Dans ce travail nous proposons, comme contribution à l'étude numérique des structures en coques, deux éléments finis, le premier est un élément coque sans degré de liberté rotationnelle et le second est un nouvel élément fini de type solide-coque applicable pour ce type de structures en comportement linéaires et non linéaires. Des tests de validation des éléments développés sont présentés, les résultats obtenus sont comparés avec les solutions de références et avec ceux donnés par d'autres éléments disponibles dans la littérature, cette comparaison confirme l'efficacité et la précision des éléments proposés.

Mots clés: Modélisation numérique, élément solide, degré de liberté rotationnelle, jonction, élément solide-coque.

ABSTRACT

The use of shell structures in engineering is very common. Due the geometric complexity and the behaviour of these structures, the study is generally done with numerical modelling, in particular the finite element method and with two-dimensional shell type elements. However, the existence of other types of solid structures (stiffeners, foundation, supports, etc.) that can be connected with these structures poses a problem of connection between two types of elements (2D and 3D). So the use of solid-shell finite elements, which can be more efficient represent the behaviour of these structures and provide the junction between 3D solid elements and 2D shell elements, has become important. These elements make it possible, on one hand, to combine the characteristics of solid elements such as the geometric description, degrees of freedom and 3D constitutive laws, with the mechanical model which uses shells theories. On the other hand, in practice where the structure having a complex geometry and significant applied t loads, these latter risks causing a large displacement which requires either to integrate stiffeners to minimize the displacements or to take into account the nonlinear geometric analysis. Despite the research carried out to eliminate the various numerical locking problems encountered for solid-shell finite elements, certain severe locking still persist.

In this work, we propose as a contribution to the numerical study of shell structures two finite elements, the first it is a shell element without rotational degree of freedom, and the second it is a new finite element of solid-shell type applicable for this type of structures in linear and nonlinear behaviour. Validation tests of the developed elements are presented. The results obtained are compared with the reference solutions and with other elements available in the literature, this comparison confirms the efficiency and accuracy of the proposed elements.

Keywords: Numerical modelling, solid element, rotational degree of freedom, junction, solid-shell element.

ملخص

إن استخدام الهياكل القشرية في الهندسة الإنشائية منتشر جدًا. ونظرًا للتعقيدات الهندسية وسلوك هذه الهياكل، يتم عموماً إجراء الدراسة باستخدام النمذجة العددية، ولا سيما طريقة العناصر المحدودة و باستعمال عناصر قشرية ثنائية الأبعاد. ومع ذلك، فإن وجود أنواع أخرى من العناصر الإنشائية الحجمية (الدعامات، والأساسات، والدعامات، إلخ....) والتي تكون مرتبطة بهذه الهياكل، يطرح مشكلة في المعالجة التحليلية للربط بين نوعين من العناصر الثنائية والثلاثية الأبعاد (2D and 3D). لهذا، فقد أصبح استخدام العناصر المحدودة من نوع قشرة - حجمية من الحلول الفعالة لتمثيل سلوك هذه الهياكل بمقاربة جيدة. تتيح هذه العناصر من جهة، إمكانية الجمع بين خصائص العناصر الحجمية مثل الخصائص الهندسية، درجات الحرية و قوانين السلوك الثلاثي الأبعاد هذا من جانب. ومن جانب آخر، و من الناحية العملية، حيث يكون الشكل الهندسي معقد والحمولات المطبقة معتبرة، فإن هذه الأخيرة يمكن أن تكون السبب في حدوث إزاحات كبيرة والتي تتطلب إما إضافة دعامات لتقليل الانتقالات أو باستعمال التحليل الهندسي غير الخطي لدراسة هذه الهياكل. على الرغم من البحوث التي أجريت لتجاوز مشكلات التوقف العددي المختلفة والتي تواجه العناصر المحدودة من نوع قشرية- حجمية، إلا أن بعضاً منها لا يزال قائماً.

في هذا العمل نقترح كمساهمة في الدراسة العددية للهياكل القشرية تطوير عنصرين محدودين، الأول هو عنصر قشري بدون درجة حرية دورانية، والثاني عنصر محدود جديد من نوع قشري- حجمي قابل للتطبيق في دراسة هذا النوع من الهياكل في السلوك الخطي واللاخطي هندسياً. لقد تم تقديم اختبارات التحقق من فعالية العنصرين المطورين، كما أن النتائج المتحصل عليها تمت مقارنتها بالنتائج المرجعية وتلك النتائج المتحصل عليها من عناصر محددة أخرى والمتوفرة في الأبحاث المنجزة، هذه المقارنة أكدت فعالية و جودة العناصر المقترحة.

الكلمات المفتاحية: النمذجة العددية، العنصر الحجمي، درجة حرية دورانية، الربط،

عنصر قشري- حجمي

Table des matières

Résumé

Liste des figures

Liste des tableaux

Notations

Introduction générale

Introduction	2
Objectifs de la thèse	2
Plan de la thèse	3

Chapitre 1 : Recherche bibliographique

1.1. Introduction	7
1.2. Notions générales sur la MMC et la MEF	7
1.2.1. Cinématique des milieux continus	7
1.2.2. Tenseur des contraintes	9
1.2.3. Tenseur des déformations	11
1.2.4. Equations d'équilibre	12
1.2.5. Relation de comportement	12
1.2.6. Problèmes d'élasticité 3D	13
1.2.7. Méthode des éléments finis	14
1.2.7.1 Introduction	14
1.2.7.2 Formulation intégrale	14
1.2.7.3 Modèle déplacement	15
1.2.7.4 Principes variationnels mixtes	17
1.2.7.4.1 Principe variationnel général	17
1.2.7.4.2 Principes mixtes (type Hellinger – Reissner).....	18
1.2.8. Procédure de l'analyse par la méthode des éléments finis	18
1.3. Synthèse bibliographique des éléments finis coques existants	21
1.3.1. Eléments finis solides tridimensionnels	21
1.3.2. Eléments coques conventionnels	22
1.3.2.1 L'approche par facettes planes	22
1.3.2.2 L'approche par éléments de coques courbes	23
1.3.2.3 Eléments finis coques sans degrés de liberté de rotation	25
1.3.2.4 Le verrouillage	25
1.3.2.4.1 Traitement du verrouillage	25
1.3.2.4.2 Approximations de plus haut ordre et champs compatibles	26
1.3.2.4.3 Intégration réduite/sélective et méthodes mixtes	26
1.3.2.4.4 Méthodes des déformations "modifiées"	27
1.3.3. Eléments finis coque volumique et solides-coques	27
1.3.3.1 Eléments de coques 3D dégénérés	27
1.3.3.2 Famille d'éléments finis solides-coques SHB	28
1.4. Conclusion	29

Chapitre 2 : Théorie des coques

2.1. Introduction	31
2.2. Surface moyenne	31
2.2.1. Géométrie de la surface moyenne	32
2.2.2. Courbure normale	33
2.2.3. Lignes de courbure	34
2.3. Plaques planes de Love-Kirchhoff	34
2.3.1. Comportement général des plaques	35
2.3.2. Champs des déformations - Relations cinématiques	35
2.3.3. Champs des contraintes	36
2.3.4. Equations d'équilibre	38
2.3.5. Equation gouvernante de la flexion	40
2.3.6. Energie de Déformation	41
2.4. Plaques épaisses en Théorie de Reissner-Mindlin	41
2.4.1. Cinématique et déformations	42
2.4.2. Relations contraintes-déformations	43
2.4.3. Energie de Déformation	45
2.5. Comportement membranaire	46
2.6. Conclusion	47

Chapitre 3 : Formulation d'un élément fini coque à facette plane sans DDL de rotation

3.1. Introduction	49
3.2. Formulation de l'élément DKT18RF	49
3.2.1. Définition du repère local	50
3.2.2. Variables cinématiques	52
3.2.3. Déformation de membrane	52
3.2.4. Déformation de flexion	53
3.2.5. Forme discrétisée de W_{int}^e	54
3.2.6. Matrice de rigidité dans le repère global	55
3.3. Mise en œuvre numérique de l'élément DKT18RF sur Matlab	56
3.3.1. Introduction	56
3.3.2. Présentation du programme élément fini DKT18RF	58
3.3.3. Description du programme	59
3.4. Validation de l'élément DKT18RF	60
3.4.1. Cylindre pincé avec diaphragme	60
3.4.2. Cylindre pincé à bord libre	63
3.5. Conclusion	65

Chapitre 4 : Nouvel élément solide-coque basé sur la formulation DKT

4.1. Introduction	68
4.2. Formulation de l'élément SB6-18	68
4.2.1. Variables cinématiques et interpolation	69
4.2.2. Déformation de membrane	70
4.2.3. Déformation de flexion	70
4.2.4. Forme discrétisée de W_{int}^e	73
4.2.5. Matrice de masse	75

4.2.6. Expression de W^e dans le repère global	76
4.3. Validation de l'élément SB6–18	77
4.3.1. Cylindre pincé à bord libre	77
4.3.2. Poutre console de Macneal	79
4.3.3. Panneau fuselé	81
4.3.4. Plaque carrée soumise à une charge uniformément répartie	82
4.3.5. Poutre en flexion avec divers élancements	84
4.3.6. Poutre soumise à une charge uniformément répartie	86
4.3.7. Plaque carrée soumise à une charge concentrée	88
4.3.8. Vibrations libres d'une Plaque encastrée	89
4.4. Conclusion	90

Chapitre 5 : Elément finis SB6–18 en non linéaire

5.1. Introduction	92
5.2. Formulation de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique	92
5.2.1. Principe incrémental de la description lagrangienne totale	93
5.2.2. Matrice linéaire incrémentale des déplacements	94
5.2.3. Matrice tangente	96
5.3. Méthode de résolution	97
5.4. Validation de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique	99
5.4.1. Panneau cylindrique soumis à une force ponctuelle	99
5.4.2. Coque sphérique sous une charge concentrée	101
5.5. Conclusion	102

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale	104
Perspectives	105

Références bibliographiques

Annexes

Annexe A	119
Annexe B	122
Annexe C	127
Annexe D	129

Liste des Figures

Chapitre 1 :

Figure 1.1.	Cinématique des milieux continus	8
Figure 1.2.	Facette de normale n	9
Figure 1.3.	Composantes du tenseur σ	10
Figure 1.4.	Relations entre système d'équations différentielles, formes intégrales et fonctionnelles [DHA81]	15
Figure 1.5.	Éléments finis solides tridimensionnels	21
Figure 1.6.	Éléments de coques à facettes planes	23
Figure 1.7.	Élément courbe	24
Figure 1.8.	Modèles coques 3D d'Ahmad.....	28
Figure 1.9.	Élément de référence SHB6, SHB15 et SHB20 et ses points d'intégration	29

Chapitre 2 :

Figure 2.1.	Élément structural mince (t est l'épaisseur) : (a) surface moyenne Σ et sa normale ; (b) dimensions caractéristiques (L , a , r) [FRE03]	32
Figure 2.2.	Surface et ses lignes de coordonnées [FRE03].....	33
Figure 2.3.	Courbe v de courbure normale $1/r_n$ au point A , section normale de Σ par P [FRE03]	33
Figure 2.4.	Élément de surface limité par des lignes de courbure [FRE03].....	34
Figure 2.5.	Schéma d'une plaque mince avant et après déformation [UGU18]	35
Figure 2.6.	Contraintes appliquées sur un tronçon de plaque [UGU18]	37
Figure 2.7.	Résultantes positives et charge sur un élément de plaque [UGU18].....	39
Figure 2.8.	Définition de l'état supposé de la déformée dans la direction Y	42
Figure 2.9.	Contraintes dans une plaque	44
Figure 2.10.	Moments de flexion et efforts de cisaillement dans une plaque	45
Figure 2.11.	Efforts de membrane.....	46

Chapitre 3 :

Figure 3.1.	Construction de l'élément DKT18RF	50
Figure 3.2.	Blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis.....	57
Figure 3.3.	Description du programme élément fini DKT18RF	58
Figure 3.4.	Cylindre pincé avec diaphragmes rigides	61
Figure 3.5.	Déformée du cylindre pincé avec diaphragmes (maillage 6x6).....	62

Figure 3.6.	Cylindre pincé à bord libre	63
Figure 3.7.	Déformée du cylindre à bord libre (maillage 9x3)	65

Chapitre 4 :

Figure 4.1.	Elément de référence SB6-18 et ses points d'intégration	69
Figure 4.2.	Elément SB6-18 : les nœuds d'interpolations pour les deux faces supérieure et inférieure du prisme	71
Figure 4.3.	Poutre console sollicitée à son extrémité par: (1) un effort de cisaillement (2) moment de flexion	79
Figure 4.4.	Courbe de convergence de déplacement au point A : cas (1)	80
Figure 4.5.	Courbe de convergence de déplacement au point A : cas (2)	80
Figure 4.6.	Panneau fuselé soumis à un effort de cisaillement, maillage (2 X 2 X 1) X 2	81
Figure 4.7.	Plaque carrée soumise à une charge répartie (maillage 24 éléments)	82
Figure 4.8.	Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre en flexion simple avec divers élancements; maillage (10x3x1)x2	84
Figure 4.9.	Poutre soumise à une charge uniformément répartie	86
Figure 4.10.	Maillage (12x4x1)x2 = 96 éléments	86
Figure 4.11.	Flèche d'une poutre sur appui simple uniformément chargée	87
Figure 4.12.	Distribution des contraintes transversales	87
Figure 4.13.	Plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge concentrée (la géométrie et les données)	88
Figure 4.14.	Vibrations libres d'une plaque encastree (maillage 8 éléments)	89
Figure 4.15.	Erreur sur ω^2 (premier mode)	90

Chapitre 5 :

Figure 5.1.	Configurations initiale C_0 , du pas p C_p et à l'itération i C_i [MOU04]	93
Figure 5.2.	Panneau cylindrique soumis à une force ponctuelle	100
Figure 5.3.	Déplacement vertical du point D	100
Figure 5.4.	Coque sphérique sous une charge concentrée	101
Figure 5.5.	Courbe charge/Déplacement de la coque sphérique	101

Liste des tableaux

Chapitre 3 :

Tableau 3.1.	Indices k et m	54
Tableau 3.2.	Valeurs de P_K et P_m	54
Tableau 3.3.	Intégration numérique (3 points de Hammer)	55
Tableau 3.4.	Valeur de la flèche $W_C = -E h W_C/p$	61
Tableau 3.5.	Valeur de $V_D = E h V_D/p$	62
Tableau 3.6.	Valeur de W_C 1 ^{er} cas : $F1=100$; $h1=0,094$	64
Tableau 3.7.	Valeur de W_C 2 ^{ème} cas : $F2=0,1$; $h2=0,01548$	64

Chapitre 4 :

Tableau 4.1.	Indices k et m	72
Tableau 4.2.	Valeurs de P_K et P_m	72
Tableau 4.3.	Indices k et m	73
Tableau 4.4.	Valeurs de P_K et P_m	73
Tableau 4.5.	Intégration numérique (5 points de Gauss-Legendre).....	74
Tableau 4.6.	Intégration numérique (1×2 points de Gauss-Hammer).....	76
Tableau 4.7.	Valeur de W_C 1 ^{er} cas : $F1=100$; $h1=0,094$	78
Tableau 4.8.	Valeur de W_C 2 ^{ème} cas : $F2=0,1$; $h2=0,01548$	78
Tableau 4.9.	Valeur de déplacement vertical normalisé au point C.....	82
Tableau 4.10.	Déplacement W au point A; moment de flexion M_x au point A et B.....	83
Tableau 4.11.	Valeur de déplacement vertical normalisé au point A	85
Tableau 4.12.	Déplacement W au point A	88
Tableau 4.13.	Coefficient de fréquence propre (premier mode de vibration).....	89

Notations

u_q	Champ de déplacement d'un point q
X, Y, Z	Coordonnées cartésiennes
u, v, w	Composantes du vecteur déplacement
ε	Tenseur des déformations
σ	Tenseur des contraintes
χ	Courbures de flexion
e	Déformation de membrane
Π_{int}, Π_{ext}	Fonctionnelle, énergie potentielle interne, externe
PTV	Principe des travaux virtuels
W_{int}, W_{ext}	Tavail virtuel interne, externe
N, M	Effort normal et moment de flexion
E	Module de yong
ν	Coefficient de poisson
$[H_m], [H_f]$	Matrice de comportement homogénéisées de membrane, et de flexion
L, C	Opérateurs différentielles
Ψ	Fonction de pondération
δ	Symbole de calcul des variations
V^e	Volume élémentaire
$p(x), p(\xi)$	Base polynomiale de l'approximation espace réel, paramétrique
$N(x)$	Fonction de forme
$\{a\}$	Variable généralisées de l'approximation
$\{u(x)\}$	Variabes généralisés
$[B]$	Matrice reliant les déformations aux variables nodales
$[\partial]$	Matrice des dérivées partielles
$\{f_n\}$	Vecteur des forces nodales
$[K], [F]$	Matrice de rigidité et vecteur des forces
$[B_m] [B_f]$	Matrices définissant les déformations de membrane, et de flexion
ρ	Masse volumique
V	Volume
h	Epaisseur suivant n
$\{u_n\}$	Vecteur déplacements nodales
$[T]$	Matrice de changement de base
F	tenseur gradient de transformation

C	matrice de comportement
r_n	rayon de courbure
$1/r_n$	courbure normale
r_{max}, r_{min}	rayons de courbure principaux
M_x	moment de flexion par rapport à l'axe x
D	la rigidité flexionnelle de la plaque
Q_x	force de cisaillement suivant l'axe x
k	facteur de correction du cisaillement transversal
N	effort normal
ξ, η	coordonnées paramétriques
a_1, a_2	vecteurs de base
A	surface de l'élément
β	la rotation
$V_{réf}$	volume de l'élément de référence
m	nombre de points d'intégration
$\langle u_n \rangle_{glob}$	variables nodales de l'élément dans le repère global
$[K]_{glob}$	matrice de rigidité dans le repère global
C_t	configuration actuelle
FLT	Formulation Lagrangienne Totale
FLAP	Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas
FLAI	Formulation Lagrangienne Actualisée a chaque Itération
C_0	configuration initiale
E_{gl}^*	première variation du tenseur des déformations de Green-Lagrange
S	tenseur de Piola-Kirchhoff
K_T	matrice tangente
K_L	matrices tangentes linéaire
K_σ	matrices géométrique
$R\{U\}$	vecteur résidu
RBM	rigid body mode

Introduction générale

Sommaire

Introduction	2
Objectifs de la thèse	2
Plan de la thèse	3

Introduction

Ces dernières années de nombreux travaux de recherche ont été consacrés au développement d'éléments finis capables de modéliser des structures complexes composées d'un ensemble d'éléments massifs ainsi que des éléments minces, on peut citer comme exemples le cas de raidisseur sous une coupole et la tour de refroidissement de la centrale nucléaire reposant sur des supports massifs. Ce raccordement nous impose de faire une liaison entre deux types d'éléments finis différents : des éléments à deux dimensions pour les coques ainsi que des éléments massifs 3D pour les structures tridimensionnelles. Sachant que les éléments finis volumiques ne contiennent que des degrés de liberté de translation et les éléments finis de type coque comportent des variables nodales de rotations, alors les degrés de liberté ne sont pas compatibles dans la zone de jonction entre ces deux types de structures et ceci provoque évidemment une grande difficulté lors de la résolution numérique du problème.

Cette problématique constitue l'origine de la naissance des éléments finis de type solide-coque, qui représente aujourd'hui une alternative intéressante aux éléments finis solides et coques conventionnels. En effet, les éléments finis solide-coque combinent les avantages des formulations des éléments solides et des éléments coques. Leurs principales caractéristiques, qui les rendent très attrayants, peuvent être résumées comme suit :

- ✓ L'utilisation des lois constitutives tridimensionnelles sans l'hypothèse des contraintes planes.
- ✓ Connexion facile avec des éléments solides conventionnels puisque les déplacements sont les seuls degrés de liberté considérés.
- ✓ Considération naturelle du contact sur les deux faces de l'élément.
- ✓ Aptitude à modéliser avec précision des structures minces avec une seule couche d'élément fini et peu de points d'intégration dans la direction de l'épaisseur.

Objectifs de la thèse

L'objectif de ce travail est la formulation d'un nouvel élément fini de type solide-coque, qui sera utilisé pour l'analyse linéaire et non linéaire des structures minces et épaisses. Pour obtenir cet élément, on doit passer par les deux grandes étapes suivantes:

- La première consiste à développer un élément fini triangulaire sans degré de liberté en rotation à partir de l'élément triangulaire de type facette plane DKT18, développé par Batoz et Dhett [BAT92], ce dernier est obtenu par superposition de l'élément triangulaire de membrane CST qui contient deux degrés de liberté par nœud et l'élément de flexion des plaques DKT qui possède trois degrés de liberté par nœud, soit un degré de translation verticale (w) plus deux rotations. L'idée principale est de modifier l'opérateur matriciel B_f relatif aux déformations de flexion de l'élément DKT pour avoir uniquement que des termes qui correspondent à la composante de déplacement w , la superposition de l'élément DKT modifié et l'élément de membrane CST nous donne l'élément fini triangulaire nommé DKT18RF¹ avec uniquement trois translations par nœud.
- La seconde étape représente le but principal de notre travail qui se traduit par le développement d'un élément fini prismatique à six nœuds de type solide-coque nommé SB6-18², basé sur la formulation DKT (Discret Kirchhoff Triangle). Notant que pour les deux faces supérieure et inférieure constituant le prisme, la formulation utilisée est similaire à celle de l'élément triangulaire DKT18RF développé dans l'étape précédente, les opérateurs de déformation de membrane B_m et de flexion B_f seront déterminés en suivant le même principe que celui de l'élément DKT18RF, la loi constitutive pour cet élément est une loi de comportement 3D modifiée pour prendre en considération l'hypothèse des contraintes planes décrite par la théorie des coques.

Plan de la thèse

Pour répondre à la problématique de la thèse, nous avons structuré le manuscrit en cinq chapitres principaux qui suivent l'ordre chronologique de notre travail, et qui sont décrits comme suit :

Dans le premier chapitre qui fait l'objet d'une recherche bibliographique, on commence par un rappel sur les théories de base de la mécanique des milieux continus ainsi que le principe général de la méthode des éléments finis. Ensuite on fait état d'une revue bibliographique sur les différentes méthodes de développement des éléments finis coques volumiques réalisées par des recherches durant ces dernières années.

¹ Discrete Kirchhoff triangle rotation free element with 18 dof.

² Shell Brick, avec six nœuds et 18 degrés de liberté.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la théorie des coques. Dans cette section nous présentons les relations associées à la description géométrique des coques, ainsi que les principaux modèles cinématiques existants, le modèle de Love-Kirchhoff pour les coques minces et celui de Reissner-Mindlin pour les coques épaisses. Pour chaque modèle on donne le champ de déformation, les contraintes, la relation contraintes-déformations et les équations d'équilibre.

Dans le troisième chapitre, on donne une formulation théorique détaillée de l'élément triangulaire sans degrés de liberté de rotation DKT18RF développé à partir de l'élément de type facette plane DKT18. Dans cette formulation le champ de déplacement et les déformations sont exposés, l'expression des travaux virtuels permet de déterminer la matrice de rigidité élémentaire, ainsi que les efforts résultants. Enfin, cet élément est programmé sous MATLAB et afin de tester sa performance et sa fiabilité on utilise les cas tests reconnus dans le domaine.

Le quatrième chapitre décrit en premier lieu, la formulation de l'élément fini solide-coque SB6-18, nous développons ainsi un élément fini de géométrie prismatique à six nœuds basé sur l'approche DKT, les comportements de membrane et de flexion sont définis au niveau des surfaces inférieure et supérieure de l'élément prismatique, vu que cet élément est basé sur l'hypothèse des contraintes planes, alors la loi de comportement utilisée dans ce cas est une loi de comportement 3D modifiée. Des exemples de validation seront donnés pour mettre en évidence la validité de la procédure de construction de l'élément proposé et la bonne programmation de l'élément développé.

Pour finir, le dernier chapitre concerne l'extension en non linéaire géométrique de l'élément fini solide-coque SB6-18. Dans ce chapitre nous allons présenter une version non linéaire de cet élément, qui sera basé sur une formulation similaire à celle présentée par Mouronval [MOU04] pour l'élément de type facette plane DKT18. Une formulation Lagrangienne totale, qui prend comme configuration de référence la configuration initiale C_0 , a été adoptée. Cette formulation nous a conduit à la détermination des efforts internes ainsi que la matrice de rigidité tangente. La méthode itérative de Newton-Raphson a été utilisée pour la résolution du système non linéaire. Les cas tests étudiés dans cette section

ont pour objectif de vérifier le bon comportement et la bonne programmation de l'élément que nous avons développé.

Enfin, les principales conclusions et perspectives concernant ce travail sont présentées dans la partie conclusion générale de ce manuscrit.

Chapitre 1

Recherche bibliographique

Sommaire

1.1. Introduction	7
1.2. Notions générales sur la MMC et la MEF	7
1.2.1. Cinématique des milieux continus	7
1.2.2. Tenseur des contraintes	9
1.2.3. Tenseur des déformations	11
1.2.4. Equations d'équilibre	12
1.2.5. Relation de comportement	12
1.2.6. Problèmes d'élasticité 3D	13
1.2.7. Méthode des éléments finis	14
1.2.7.1 Introduction	14
1.2.7.2 Formulation intégrale	14
1.2.7.3 Modèle déplacement	15
1.2.7.4 Principes variationnels mixtes	17
1.2.7.4.1 Principe variationnel général	17
1.2.7.4.2 Principes mixtes (type Hellinger – Reissner).....	18
1.2.8. Procédure de l'analyse par la méthode des éléments finis	18
1.3. Synthèse bibliographique des éléments finis coques existants	21
1.3.1. Eléments finis solides tridimensionnels	21
1.3.2. Eléments coques conventionnels	22
1.3.2.1 L'approche par facettes planes	22
1.3.2.2 L'approche par éléments de coques courbes	23
1.3.2.3 Eléments finis coques sans degrés de liberté de rotation	25
1.3.2.4 Le verrouillage	25
1.3.2.4.1 Traitement du verrouillage	25
1.3.2.4.2 Approximations de plus haut ordre et champs compatibles	26
1.3.2.4.3 Intégration réduite/sélective et méthodes mixtes	26
1.3.2.4.4 Méthodes des déformations "modifiées"	27
1.3.3. Eléments finis coque volumique et solides-coques	27
1.3.3.1 Eléments de coques 3D dégénérés	27
1.3.3.2 Famille d'éléments finis solides-coques SHB	28
1.4. Conclusion	29

1.1. Introduction

Plusieurs modèles des éléments finis sont proposés pour la modélisation des structures. Ainsi, pour des structures minces, on dispose d'éléments de type coque, plaque, etc. D'autres éléments finis, dits solides ou volumiques, sont dédiés à l'étude des structures plus épaisses. Cependant, lorsque l'on se retrouve face à des structures comportant des géométries très contrastées, à l'instar d'une tour de centrale nucléaire (assimilable à une structure coque) reposant sur une fondation épaisse (structure 3D), l'une des difficultés principales est de connecter les éléments finis coques aux éléments finis solides. Cette difficulté réside dans l'incompatibilité géométrique des deux types d'éléments finis représentant les deux structures (mince et épaisse). Une alternative consiste en l'utilisation d'un maillage complètement 3D, ceci se révèle très coûteux en temps de calcul. Pour pallier à cela, des modèles combinant les avantages de ces deux types d'éléments ont été développés récemment, montrant ainsi leur intérêt. Dans l'objectif de développer des éléments solides-coques performants, nous allons présenter brièvement certaines techniques et modélisations d'éléments finis issus de la littérature proches de notre objectif.

Nous commençons ce chapitre par un rappel sur les théories de base de la mécanique des milieux continus (MMC) ainsi que le principe général de la méthode des éléments finis (MEF). Ensuite on fait état d'une revue bibliographique sur les différentes méthodes de développement des éléments finis coques réalisées par des recherches durant ces dernières années.

1.2 Notions générales sur la MMC et la MEF

Nous allons présenter brièvement dans cette section, les théories de base de la mécanique des milieux continus, ainsi que le principe général de la méthode des éléments finis, le contenu de cette section est inspiré des références suivantes : Batoz et Dhatt [BAT90], Dhatt et Touzot [DHA81], Trinh [TRI09], Craveur [CRA08], Lemosse [LEM00].

1.2.1 Cinématique des milieux continus

Considérons un corps solide quelconque à l'état initial appelé configuration initiale Ω_0 . Ce corps qui est soumis à différentes sollicitations statiques et/ou dynamiques, se transforme au cours du temps t . À un instant t quelconque, il arrive à un nouvel état appelé configuration actuelle Ω_t (voir Figure 1.1).

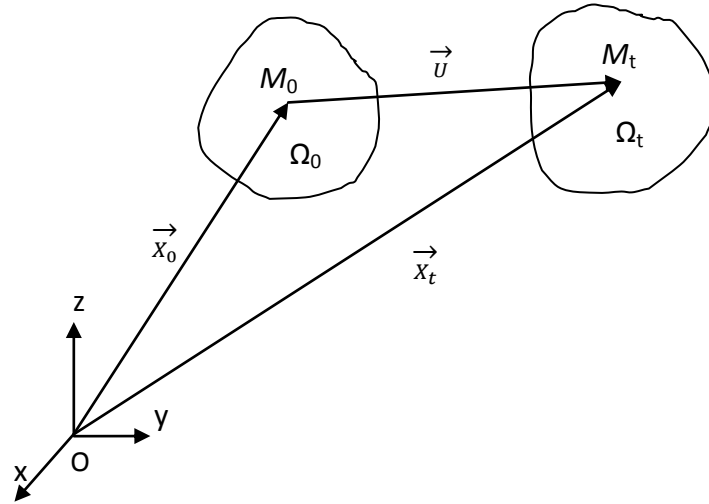


Figure 1.1. Cinématique des milieux continus

Afin de décrire cette transformation, nous utilisons un repère cartésien global $O(x, y, z)$. Donc, un point matériel M_0 quelconque appartenant à Ω_0 est repéré par le vecteur des coordonnées $\vec{X}_0(x_0, y_0, z_0)$. À l'instant t , le point M_0 devient un nouveau point M_t appartenant à Ω_t qui est maintenant repéré par le vecteur des coordonnées $\vec{X}_t(x_t, y_t, z_t)$. Dans le cadre d'une description lagrangienne, nous pouvons écrire :

$$\vec{X}_t = \vec{X}_0 + \vec{M}_0\vec{M} = \vec{X}_0 + \vec{U} \quad (1.1)$$

Où le vecteur \vec{U} est appelé le déplacement du point M_0 .

L'équation (1.1) peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X_0 + u = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} dX = \left[\frac{\partial X}{\partial X_0} \right] dX_0 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u_{,x_0} & u_{,y_0} & u_{,z_0} \\ v_{,x_0} & 1 + v_{,y_0} & v_{,z_0} \\ w_{,x_0} & w_{,y_0} & 1 + w_{,z_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} \\ &= F \cdot dX_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

La matrice F est appelée le tenseur gradient de transformation. Nous écrivons également :

$$F = I + L_0 \quad ; \quad L_0 = D_0 + W_0$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} u_{,x_0} & u_{,y_0} & u_{,z_0} \\ v_{,x_0} & v_{,y_0} & v_{,z_0} \\ w_{,x_0} & w_{,y_0} & w_{,z_0} \end{bmatrix}; \quad D_0 = \frac{1}{2}[L_0 + L_0^T] = \begin{bmatrix} u_{,x_0} & \frac{1}{2}(u_{,y_0} + v_{,x_0}) & \frac{1}{2}(u_{,z_0} + w_{,x_0}) \\ & v_{,y_0} & \frac{1}{2}(v_{,z_0} + w_{,y_0}) \\ \text{sym} & & w_{,z_0} \end{bmatrix}$$

$$W_0 = \frac{1}{2}[L_0 - L_0^T] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } \theta_x = \frac{1}{2}(w_{,y_0} - v_{,z_0}); \quad \theta_y = \frac{1}{2}(u_{,z_0} - w_{,x_0}); \quad \theta_z = \frac{1}{2}(v_{,x_0} - u_{,y_0})$$

Où θ_x , θ_y , θ_z représentent des rotations infinitésimales autour des axes x , y , z , ne produisant aucune déformation. D_0 est le tenseur des déformations linéaires, ou petites déformations.

1.2.2 Tenseur des contraintes

Considérons un solide subissant des forces surfaciques F et volumiques f et divisé en deux par un plan imaginaire (voir figure 1.2). Un élément de surface ΔS autour de point M et de vecteur normal n subit une force résultante ΔF . Si ΔS est infiniment petit, le rapport $\Delta F/\Delta S$ devient dF/dS . Le vecteur dF/dS est par définition le vecteur de contrainte $T^{(n)}$ au point M associé au plan de vecteur normal n :

$$T^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta S} \right) = \frac{dF}{dS} \quad (1.4)$$

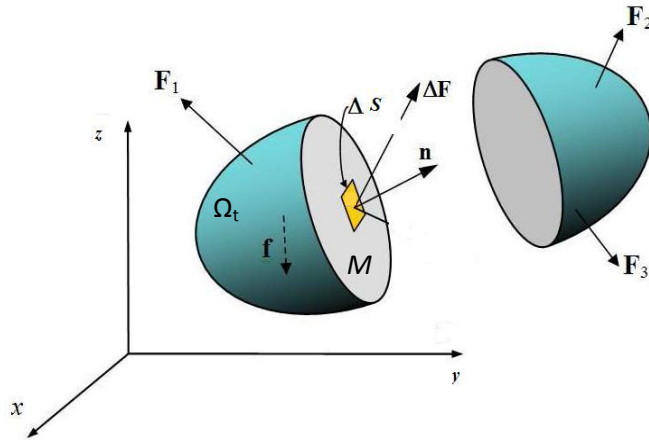


Figure 1.2. Facette de normale n

Le vecteur de contrainte $T^{(n)}$ n'est pas nécessairement colinéaire à n et peut donc être scindé en trois composantes. L'état de contrainte en un point peut être défini par tous les vecteurs de contrainte $T^{(n)}$ associés à tous les plans qui intersectent ce point. On se satisfait dans la pratique de la connaissance des vecteurs de contrainte associés aux plans orthogonaux de vecteurs normaux e_1 , e_2 et e_3 .

La décomposition des vecteurs de contrainte $T^{(e_1)}$, $T^{(e_2)}$ et $T^{(e_3)}$ selon les directions des axes de coordonnées cartésiennes (voir figure 1.3) est :

$$\begin{aligned} T^{(e_1)} &= \sigma_{xx}e_1 + \sigma_{xy}e_2 + \sigma_{xz}e_3 \\ T^{(e_2)} &= \sigma_{yx}e_1 + \sigma_{yy}e_2 + \sigma_{yz}e_3 \\ T^{(e_3)} &= \sigma_{zx}e_1 + \sigma_{zy}e_2 + \sigma_{zz}e_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy au point M est défini par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Les composantes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} sont appelées contraintes normales; σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{yx} , σ_{zx} , σ_{zy} sont les contraintes de cisaillement. Les composantes cartésiennes sont représentées positivement sur la figure 1.3. Elles décrivent l'état de contrainte au point M .

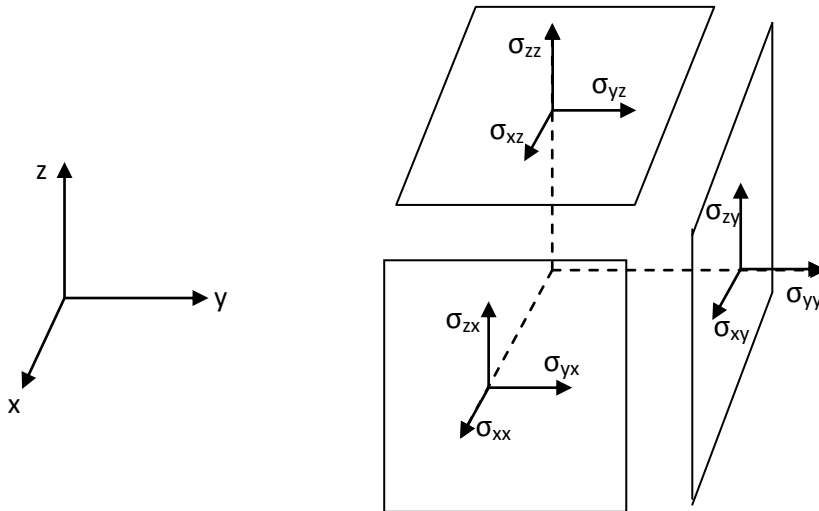


Figure 1.3. Composantes du tenseur σ

L'équilibre des moments autour des axes passant par M , en l'absence de couples répartis à l'intérieur et à la surface du solide conduit à :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad ; \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad ; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (1.7)$$

Nous définissons ainsi le vecteur des contraintes σ à six composantes :

$$\sigma = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}] \quad (1.8)$$

1.2.3 Tenseur des déformations

Le tenseur des déformations, dit de Green-Lagrange est défini en fonction du tenseur gradient des transformations par :

$$E = \frac{1}{2}[F^T \cdot F - I] \quad (1.9a)$$

Dans la théorie linéaire classique de l'élasticité, les gradients des déplacements sont supposés petits. Les produits et les carrés des premières dérivées sont négligeables :

$$E = D_0 = \frac{1}{2}[L_0 + L_0^T] \quad (1.9b)$$

Dans le cas de l'hypothèse de linéarité géométrique, c'est-à-dire de petites rotations et de petites déformations, on définit les déformations ε_{ij} par la formule classique de la mécanique linéaire, u_k est le déplacement dans la direction k :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.10)$$

Les déformations sont symétriques du fait de la commutativité de l'addition des nombres réels.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (1.11)$$

En mécanique linéaire, la quantité γ_{ij} (distorsion angulaire) représente la variation d'angle entre les directions i et j . C'est le double de la déformation angulaire ε_{ij} . On définit le tenseur des déformations en un point par :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.12a)$$

Le tenseur des déformations est lui aussi entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement par :

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] \quad (1.12b)$$

Où $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$; $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$; $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$

1.2.4 Equations d'équilibre

Le solide dans la configuration actuelle Ω_t est soumis à des sollicitations comme des forces surfaciques f_s appliquées sur une partie de la frontière $\partial_T \Omega_t$, des déplacements imposés u_d appliqués sur une partie de la frontière $\partial_u \Omega_t$, et des forces volumiques f_v (qui peuvent contenir des termes d'inertie). La somme des parties de la frontière $\partial_T \Omega_t$ et $\partial_u \Omega_t$ représente la frontière totale fermée $\partial \Omega_t$ de Ω_t . L'équilibre du système s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma) + f_v = 0 & \forall M \in \Omega_t \\ u(M) = u_d & \forall M \in \partial_u \Omega_t \\ \sigma(M) \cdot n = f_s & \forall M \in \partial_T \Omega_t \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\text{Où } \operatorname{div} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

1.2.5 Relation de comportement

Pour un matériau donné, sa relation de comportement ou sa loi constitutive permet de déterminer les contraintes en fonction des déformations, des variables internes. Pour les matériaux dits élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations se traduisent sous la forme simple générale :

$$\sigma = H \cdot \varepsilon + \sigma_0 \quad (1.14)$$

Où H est un tenseur de comportement d'ordre 4 dont les composantes font intervenir les caractéristiques physiques du matériau, σ_0 est le tenseur de contrainte à l'état initial (pour simplifier l'écriture du problème, nous supposons que $\sigma_0 = 0$ dans la suite).

Les tenseurs σ et ε étant symétriques, nous avons :

$$H_{ijkl} = H_{jikl} \quad \text{et} \quad H_{ijkl} = H_{ijlk} \quad (1.15)$$

En notation de Voigt, nous écrivons ainsi :

$$\sigma = H \cdot \varepsilon \quad (1.16)$$

Où H est une matrice de comportement 6×6 , σ et ε sont donnés en (1.8) et (1.12b).

En élasticité tridimensionnelle, la matrice de comportement d'un matériau élastique linéaire homogène et isotrope est de la forme suivante :

$$H = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ sym & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Où E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson

1.2.6 Problèmes d'élasticité 3D

Résoudre un problème d'élasticité 3D consiste à déterminer, en tout point de la structure en équilibre, 15 grandeurs :

Six contraintes : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$

Six déformations : $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$

Trois déplacements: u, v, w

Ces grandeurs doivent vérifier :

Trois relations d'équilibre : $\sigma_{ij,i} + f_j = 0$ dans Ω_t

Six relations contraintes/déformations : $\sigma_{ij} = H_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$ dans Ω_t

Six relations déformations/déplacements : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ dans $\Omega_t ; \forall i, j \in 1,2,3$

Auxquelles il convient d'ajouter les conditions aux limites de type déplacement imposé, nul ou non : $u_i = u_{di}$ sur $\partial_u \Omega_t$

Et les conditions aux limites de type équilibrent : $\sigma_{ij} n_j = f_{si}$ sur $\partial_T \Omega_t$

1.2.7 Méthode des éléments finis

1.2.7.1 Introduction

La mécanique des solides permet de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations, elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques, elle fait appel aux trois domaines suivants :

- La mécanique des solides pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

1.2.7.2 Formulation intégrale

La méthode des résidus pondérés qui, en utilisant des fonctions de pondération, permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale, l'intégration par parties fournit des formulations intégrales modifiées dites faibles qui sont plus faciles à utiliser. En mécanique des solides, la notion de fonctionnelle est utilisée pour construire directement une formulation intégrale en utilisant le principe de stationnarité de la fonctionnelle d'énergie (voir figure 1.4).

Le comportement d'un système continu est décrit par les équations aux dérivées partielles :

$$\mathcal{L}(u) + f_v = 0 \quad \text{sur un domaine } V$$

$$\mathcal{C}(u) = f_s \quad \text{sur la frontière } S \text{ de } V$$

Où: \mathcal{L} et \mathcal{C} sont des opérateurs différentiels caractérisant le système

u fonctions inconnue (déplacement)

f_v et f_s fonctions connues dites sollicitations (forces volumiques et surfaciques)

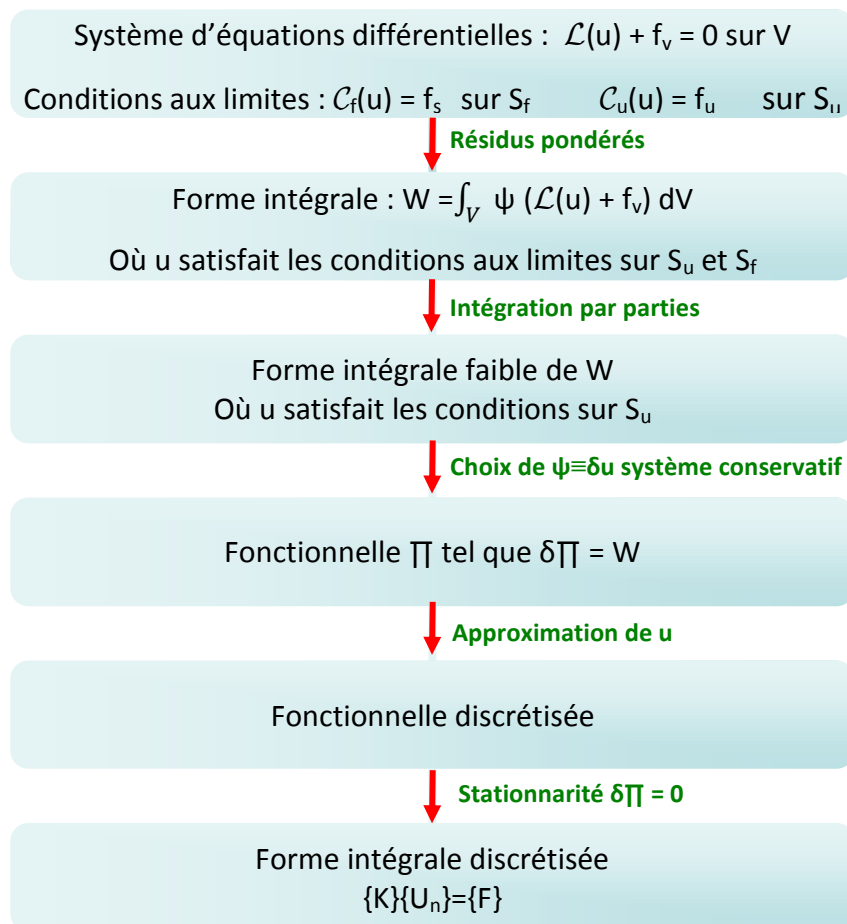


Figure 1.4. Relations entre système d'équations différentielles, formes intégrales et fonctionnelles [DHA81]

1.2.7.3 Modèle déplacement

Un problème d'élasticité est décrit par un ensemble de relations aux dérivées partielles faisant intervenir les contraintes σ , les déformations ε et les déplacements u , le modèle variationnel en déplacement tient compte :

- Des équations d'équilibre sur V et aux limites sur S_f sous une forme variationnelle
- Des équations cinématiques sous forme explicite en chaque point de V
- Des équations de comportement sous forme explicite en chaque point de V
- Des conditions aux limites sous forme explicite en chaque point de S_u

La forme variationnelle (dans le cas des sollicitations statiques uniquement) associée à l'équation d'équilibre obtenue par la méthode des résidus pondérés :

$$W = \int_V \psi R(u) dV = \int_V \psi (\text{div} \sigma + f_V) dV = 0 \quad (1.18)$$

$$\forall \{u^*\} \quad \text{avec } \{u^*\} = \{0\} \text{ et } \{u\} = \{\bar{u}\} \text{ sur } S_u$$

Avec : $\text{div} \sigma + f_V$ représente l'équation d'équilibre

Nous choisissons le champ de déplacement virtuel comme fonction de pondération $\psi = u^*$ ce qui conduit à un cas particulier de la méthode de Galerkin, nous obtenons la forme variationnelle :

$$W = \int_V u^* (\text{div} \sigma + f_V) dV = 0 \quad (1.19)$$

En intégrant par partie nous obtenons la forme faible de W :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall u^* \quad (1.20)$$

Où:

$$W_{int} = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle [\sigma] dV \quad \text{avec } [\sigma] = [H] \{\varepsilon\} \quad (1.21)$$

$$W_{ext} = \int_V \langle u^* \rangle \{f_V\} dV + \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{f_S\} dS \quad (1.22)$$

Donc l'expression du principe des travaux virtuels (PTV) s'écrit :

$$W(u^*, u) = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{\varepsilon\} dV - \int_V \langle u^* \rangle \{f_V\} dV - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{f_S\} dS = 0 \quad (1.23)$$

$$\forall \{u^*\} \quad \text{avec } \{u^*\} = \{0\} \text{ et } \{u\} = \{\bar{u}\} \text{ sur } S_u$$

Un problème d'élasticité consiste ainsi à trouver $\{u\}$ satisfaisant cette dernière expression, cette forme variationnelle sert de base pour construire les modèles déplacements en éléments finis.

En admettant que les fonctions de pondération u^* et les fonctions solutions u appartiennent au même espace de fonctions (mêmes bases de représentation) on obtient la formulation de type Galerkin conduisant aux modèles déplacements en éléments finis. Les déplacements virtuels u^* sont alors définis comme les variations des déplacements réels :

$$u^* = \delta(u) = \delta u$$

Où $\delta(u)$ représente la variation de la fonction u , l'expression de type Galerkin est alors :

$$W(u) = \int_V \langle \delta \varepsilon \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV - \int_V \langle \delta u \rangle \{ f_V \} dV - \int_{S_f} \langle \delta u \rangle \{ f_S \} dS = 0 \quad (1.24)$$

$\forall \{ \delta u \}$ avec $\{ \delta u \} = \{ 0 \}$ et $\{ u \} = \{ \bar{u} \}$ sur S_u

On peut définir un fonctionnelle Π appelée énergie potentielle totale telle que :

$$W = \delta(\Pi(u)) = 0$$

$$\text{Avec } \Pi(u) = \Pi_{\text{int}}(u) - \Pi_{\text{ext}}(u) \quad (1.25)$$

Où Π_{int} est l'énergie interne de déformation :

$$\Pi_{\text{int}} = \int_V \frac{1}{2} \langle \varepsilon(u) \rangle [H] \{ \varepsilon(u) \} dV \quad (1.26)$$

et Π_{ext} est le potentiel des forces de volume et de surface :

$$\Pi_{\text{ext}} = \int_V \langle u \rangle \{ f_V \} dV + \int_{S_f} \langle u \rangle \{ f_S \} dS \quad (1.27)$$

La seconde variation de Π est donnée par :

$$\delta^2 \Pi(u) = \int_V \langle \delta \varepsilon \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV > 0 \quad \forall \{ \delta u \} \neq 0 \quad (1.28)$$

La solution $\{ u \}$ du problème d'élasticité correspond ainsi à un minimum de l'énergie potentielle totale. Le principe du minimum de l'énergie potentielle totale s'énonce ainsi : Parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles celui qui rend Π minimum correspond à la solution du problème.

1.2.7.4 Principes variationnels mixtes

L'application des formulations dites mixtes ou hybrides permet dans de nombreuses situations comme les poutres, les plaques et les coques de définir des modèles éléments finis très performants (voire exacte pour les poutres droites ou courbes)

1.2.7.4.1 Principe variationnel général

On peut définir un modèle général où toutes les relations du problème d'élasticité sont représentées sous forme variationnelle, les fonctions u^* , σ^* , ε^* sont des fonctions de

pondération ou fonctions tests. Dans la formulation de type Galerkinge, ces fonctions appartiennent aux mêmes espaces que les fonctions solutions u , σ , ε . Nous pouvons construire une forme faible de W en contrainte ou en déplacement après une intégration par partie.

1.2.7.4.2 Principes mixtes (type Hellinger – Reissner)

L'expression du fonctionnelle est fonctions des deux variables indépendantes σ et u :

$$\Pi(u, \sigma) = \int_V -\frac{1}{2} \langle \sigma \rangle [C] \langle \sigma \rangle + \langle \sigma \rangle \langle \varepsilon(u) \rangle dV - \int_V \langle u \rangle \langle f_V \rangle dV - \int_{S_f} \langle u \rangle \langle f_S \rangle dS \quad (1.29)$$

Avec $\{u\} = \{\bar{u}\}$ sur S_u et $[C] = [H]^{-1}$

En intégrant par partie le second terme, on obtient la forme faible en déplacement.

1.2.8 Procédure de l'analyse par la méthode des éléments finis

- Représentation du domaine de volume V par un ensemble de sous domaines de volume V^e dits éléments finis :

$$V = \sum V^e \quad W = \sum W^e \quad (1.30)$$

- Approximation du champ de déplacement $u(x)$ sur l'élément:

$$\{u(x)\} = [p(x)]\{a\} \text{ (espace réel)} \quad (1.31a)$$

$$\{u(\xi)\} = [p(\xi)]\{a\} \text{ (espace paramétrique)} \quad (1.31b)$$

$p(x)$: base polynomiale de l'approximation

$\{a\}$: variables généralisées de l'approximation

- Construction de la fonction d'interpolation $N(x)$:

$$\{u(x)\} = [p(x)][p_n]^{-1}\{u_n\} \quad (1.32a)$$

$$\{u(x)\} = [N(x)]\{u_n\} \quad (1.32b)$$

$\{u_n\}$: variables nodales

- Approximation du champ de déformation ε sur l'élément :

En utilisant la relation déformation-déplacement on peut écrire les déformations sous la forme :

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u(x)\} = [\partial][N(x)]\{u_n\} = [B]\{u_n\} \quad (1.33)$$

$[\partial]$ matrice des dérivées partielles

- Construction de la matrice de rigidité élémentaire $[k]$:

En utilisant le PTV :

$$W^e = \int_{V^e} \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{\varepsilon\} dV - \int_{V^e} \langle u^* \rangle \{f_V\} dV - \int_{S_f^e} \langle u^* \rangle \{f_S\} dS = 0 \quad (1.34)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_n\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon^*\} = [B]\{u_n^*\}$$

W^e s'écrit sous forme matricielle :

$$\langle u_n^* \rangle ([k]\{u_n\} - \{f_n\}) = 0$$

$$[K] = \int_{V^e} [B]^T [H] [B] dV \quad (1.35)$$

$\{f_n\}$: Vecteur des forces (équivalentes) élémentaires dues aux forces de volume et de surface

- Assemblage (construction de $[K]$ et $[F]$) :

$[K]$: Matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires

$[F]$: Vecteur global des sollicitations obtenu par assemblage des vecteurs sollicitations élémentaires

- Résolution :

Le problème se ramène à résoudre le système linéaire :

$$[K][U] - [F] = 0 \quad (1.36)$$

Pour les problèmes non-linéaires, l'état de la configuration à l'instant $t+1$ dépend de celui à l'instant t . Donc, la matrice de rigidité dépend également des variables que l'on cherche. Le problème ne peut donc pas être résolu explicitement. On va donc le résoudre de façon itérative par l'intermédiaire d'une suite de problèmes linéaires. Nous présentons ici le principe de la méthode de Newton–Raphson par exemple :

- Supposons que l'on ait U_t à l'instant t tel que :

$$[K(U_t)].U_t - F = R(U_t) \neq 0 \quad (1.37)$$

- On cherche $U_{t+1} = U_t + \Delta U$ vérifiant :

$$[K(U_{t+1})].U_{t+1} - F = R(U_{t+1}) = 0 \quad (1.38)$$

- En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} R(U_{t+1}) &= R(U_t + \Delta U) = R(U_t) + \left[\frac{\partial R}{\partial U} \Big|_{U_t} \right] \cdot \Delta U + O^2 \\ &\approx R(U_t) - [K_T(U_t)].\Delta U \end{aligned} \quad (1.39)$$

- On a alors le problème linéaire $[K_T(U_t)].\Delta U = R(U_t)$ à résoudre. Une fois trouvé ΔU , on remet à jour $U_{t+1} = U_t + \Delta U$ et ainsi de suite.

1.3. Synthèse bibliographique des éléments finis coques existants

Nous présentons dans cette partie une analyse bibliographique des approches théoriques utilisées dans la modélisation des coques, elle résulte d'une synthèse des références suivantes : Wang [WAN17], Kaddah [KAD95], Vieille [VIE03], Boulier [BOU14] et Kpeky [KPE16].

1.3.1 Eléments finis solides tridimensionnels

Les éléments finis solides sont généralement utilisés pour la modélisation tridimensionnelle des structures massives sans aucune simplification géométrique. La géométrie des éléments finis solides est complètement définie par les coordonnées des nœuds, et les déplacements nodaux permettent l'interpolation des déplacements à l'intérieur de l'élément dans toutes les directions. De plus, des équations constitutives entièrement tridimensionnelles sont adoptées pour ces éléments finis solides, ce qui permet une description réaliste des différents phénomènes sans l'utilisation d'hypothèses restrictives (par exemple, l'hypothèse des contraintes planes).

Grâce à leurs formulations entièrement 3D, les éléments finis solides possèdent de nombreux avantages, et sont conçus pour être des éléments finis à usage général. Dans la majorité des situations non linéaires, les éléments finis solides de bas degrés (à interpolation linéaire) sont préférés en raison de leur faible coût de calcul. Cependant, ils présentent souvent de mauvaises performances et souffrent de plusieurs phénomènes de verrouillage dans la simulation des structures minces, en particulier, dans les problèmes de flexion (voir, par exemple, Adam et al. [ADA14], [ADA15]).

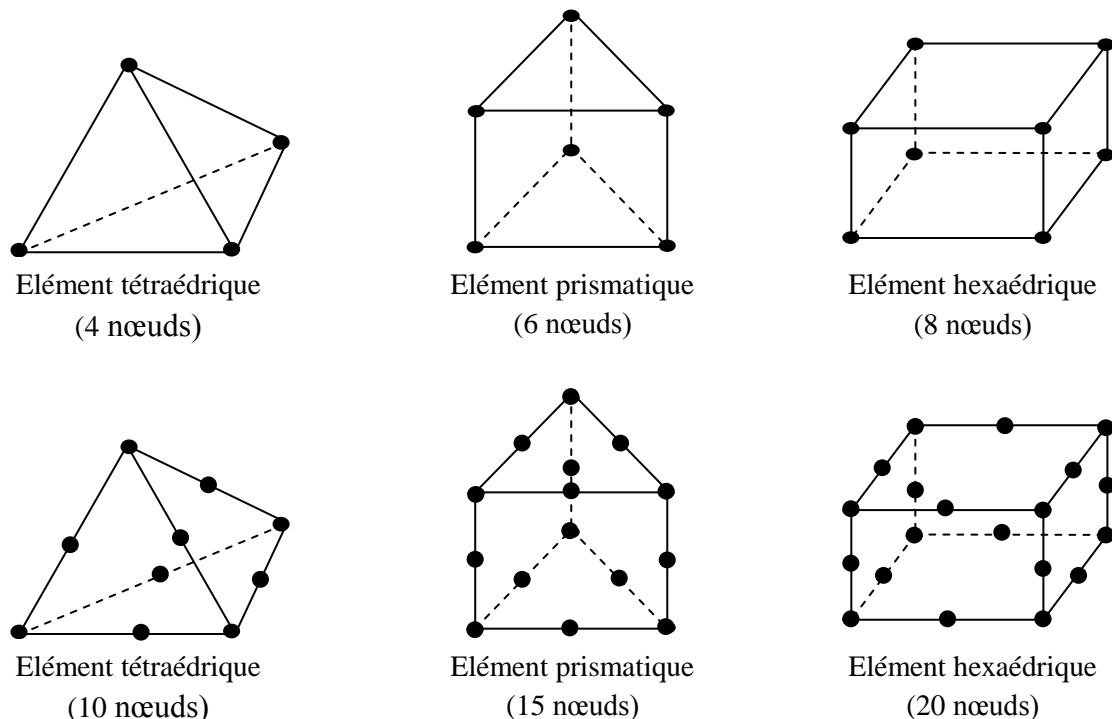


Figure 1.5. Eléments finis solides tridimensionnels

1.3.2 Éléments coques conventionnels

Le développement des éléments coques est directement lié à l'approche théorique utilisée et à la formulation variationnelle adoptée (déplacement, mixte, hybride). On peut citer deux approches théoriques distinctes:

1.3.2.1 L'approche par facettes planes

L'approche par facettes planes consiste à remplacer la géométrie de la coque par un assemblage d'éléments plans dont les nœuds sont situés sur la surface moyenne. L'élément coque résultant est constitué par la superposition d'un élément de flexion et d'un élément de membrane, le couplage étant réalisé par le passage aux degrés de liberté globaux. Beaucoup d'éléments dans la littérature ont été construits suivant cette modélisation. On peut citer par exemple les éléments DKT18 et DST18 (Batoz et Dhatt [BAT92]) où la partie membrane est décrite par l'élément triangulaire CST et la partie flexion par les éléments DKT (Batoz et al. [BAT80]) et DST (Lardeur [LAR90]). Cette approche est très attrayante par sa simplicité. En effet, elle permet d'étendre directement le calcul des plaques au calcul des coques, de même il suffit de peu de données pour décrire la géométrie de la coque. Elle se prête aussi bien au calcul des structures plissées. Cette approche présente d'autres avantages, notamment la bonne convergence des résultats et la bonne représentation des modes rigides.

Les avantages précédents s'accompagnent d'un certain nombre d'inconvénients. En effet, la polygonisation de la coque nécessite un maillage relativement fin pour assurer une bonne convergence, si non, on a une déviation par rapport à la géométrie réelle. De même, cette polygonisation crée des arêtes artificielles responsables de l'apparition des sollicitations parasites. Ces dernières s'atténuent normalement avec la finesse du maillage. L'assemblage en un nœud du réseau d'éléments coplanaires nécessite l'introduction d'une rigidité fictive pour la rotation normale, si non, des singularités risquent d'apparaître au niveau de la matrice globale. Cette rigidité fictive peut être évitée par la construction d'éléments de membrane possédant des degrés de liberté de rotation (drilling rotations). On peut citer dans ce domaine, les travaux d'Allman ([ALL84], [ALL88]), Bergan et Felippa ([BER85], [BER86]), Ibrahimbegovic et al. [IBR90], Ibrithimbégovic et al. [IBR93].

Cette approche, tout en évitant l'introduction de la rigidité fictive, améliore considérablement le comportement membranaire de l'élément. Elle permet aussi une connexion aisée de la coque à d'autres éléments de structures, par exemple, les problèmes rencontrés dans l'étude des coques avec raidisseurs, des jonctions colonne-plaque et mur-poutre. Cependant, il est important de s'assurer qu'un élément construit suivant cette technique est libre de tout blocage en membrane.

En effet, un certain blocage en membrane a été constaté (vitesse de convergence lente) dans des problèmes où la flexion est importante (Carpenter et al. [CAR85], Nygard [NYG86], Aminpour [AMI92]).

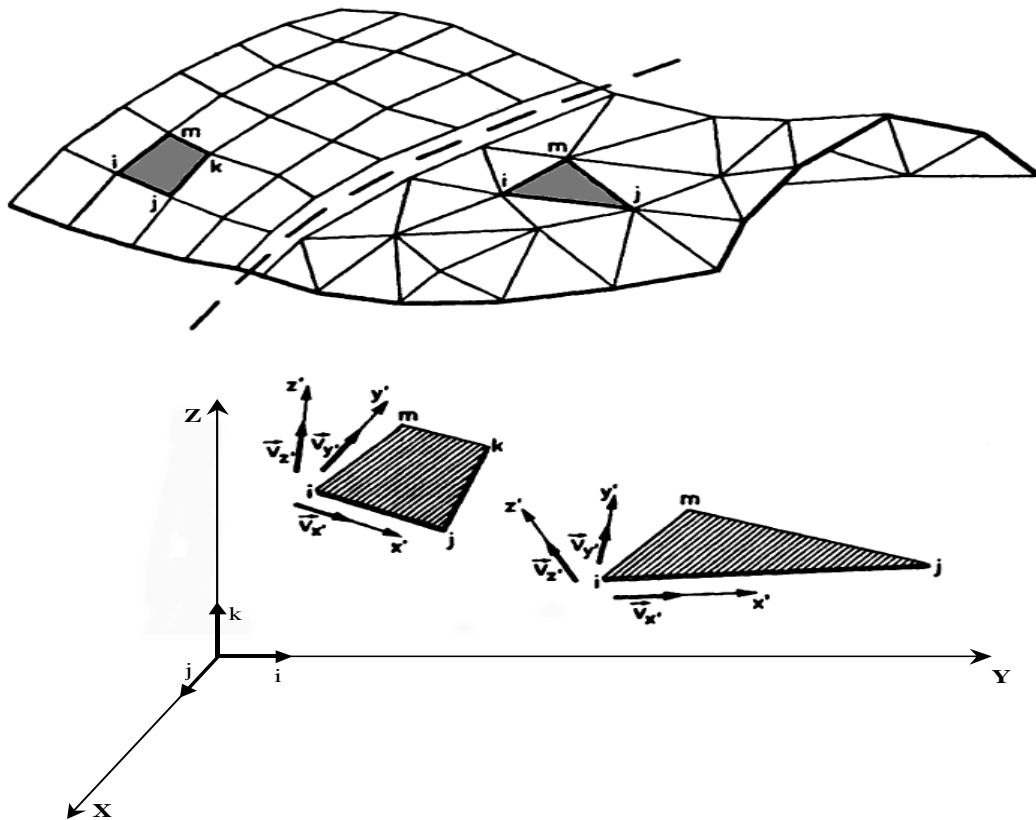


Figure 1.6. Eléments de coques à facettes planes

1.3.2.2 L'approche par éléments de coques courbes

L'approche par éléments de coques courbes est en général décrite dans le cadre de la théorie classique des coques; nous distinguons en général deux modèles:

- 1) le modèle dit de Koïter-Sanders (Koïter [KOI60], [KOI66] et [KOI70]; Sanders [SAN63]) basé sur les hypothèses de Love-Kirchhoff. Ce modèle a été utilisé par plusieurs auteurs (Argyris [ARG86], Bernadou [BER86], Cowper et al. [COW86]).
- 2) le modèle dit de Reissner-Nagdi où l'influence des déformations de cisaillement transversal est prise en compte (Nagdi [NAG57], [NAG63] et [NAG72]; Reissner [REI52], [REI69] et [REI74]). Ce modèle sert de base pour construire des éléments courbés où les hypothèses de Kirchhoff sont prises sous forme discrète (Batoz [BAT77], Batoz et Dhett [BAT78], Dhett [DHA70] et Wempner [WEM68]).

La formulation de ces éléments est élégante, mais délicate, on peut exprimer le champ de déplacement de deux façons :

- A) par les composantes curvilignes de déplacements de la surface moyenne, elle même définie analytiquement par le vecteur rayon. Cette solution permet de modéliser la surface moyenne avec exactitude sans introduire d'arêtes artificielles aux frontières, mais ne permet généralement pas l'exacte représentation des modes rigides. De même le risque de blocage en membrane est élevé si les approximations des déplacements ne sont pas cohérentes;
- B) par les composantes cartésiennes des déplacements de la surface moyenne, elle même définie par une fonction $Z = Z(x,y)$ par rapport au plan de référence (x,y) . Cette solution permet une exacte représentation des modes rigides, mais fait apparaître, des arêtes artificielles aux frontières, à cause de l'idéalisation de la surface par une forme prédéterminée.

D'un point de vue pratique, ces éléments sont d'un emploi laborieux (spécification très lourde des données), ils nécessitent souvent une description analytique de la coque et ne se prêtent pas ou se prêtent mal, au calcul des intersections des coques.

Au vu des difficultés, certains chercheurs ont proposés des simplifications en utilisant une approche intermédiaire entre les approches par facettes planes et les éléments courbes. Il s'agit de la théorie des coques surbaissées (shallow shells) ou théorie de Marguerre [MAR38] où chaque élément coque est décrit par un petit déplacement normal à partir d'un plan de référence.

Les deux approches curviligne et cartésienne décrites précédemment s'appliquent à la théorie des coques surbaissées. L'approche curviligne est très peu recommandée, car la solution peut converger vers une solution différente de la vraie solution, si la coque est profonde, par contre l'approche cartésienne converge vers la bonne solution que la coque soit profonde ou quasi plate (Frey et Jirousek [FRE92]). Cependant, malgré la popularité de l'approche cartésienne, un blocage en membrane peut apparaître à cause de la géométrie initiale courbe, il peut être traité par la méthode de la décomposition modale (Ibrahimbégovic et Frey [IBR94]; Chahrou [CHA91]).

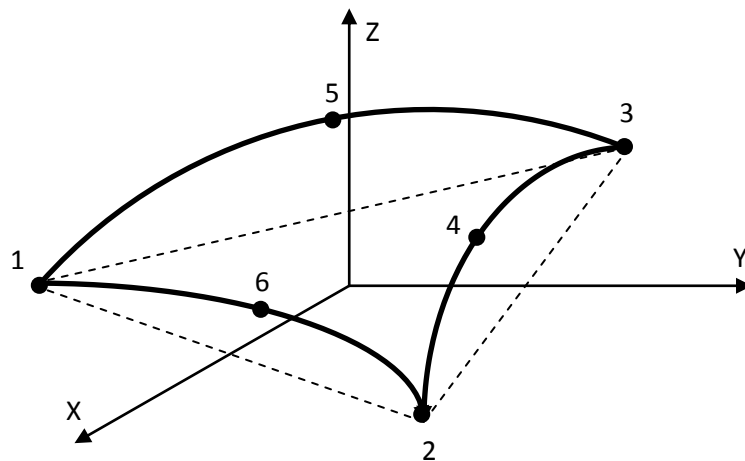


Figure 1.7. Élément courbe

1.3.2.3 Eléments finis coques sans degrés de liberté de rotation

Les éléments de type coque sans degrés de liberté de rotation constituent une alternative séduisante aux éléments coques classiques, en plus de l'avantage de la cohérence des degrés de liberté entre les éléments coques et solides, ces éléments présentent un nombre de degrés de liberté deux fois moindre d'où un gain de temps de calcul et ne souffrent pas de phénomène de blocage cisaillement-flexion, ils présentent aussi l'avantage d'un conditionnement de la raideur qui s'améliore à mesure que l'épaisseur diminue (voir Couëdo et al. [COU09]), un exemple de ce type d'élément est l'élément DKTRF de Guo et al. [GUO02] qui est un élément obtenu à partir de l'élément triangulaire DKT12 (batoz et Dhatt [BAT92]) où les rotations des nœuds milieux sont exprimées dans les termes des 18 degrés de liberté de translation nodale, il y a aussi l'élément S3 présenté la première fois par Crisfield et al. [CRI92] et ensuite plus détaillé par Sabourin et Brunet [SAB06], cet élément est construit à partir de l'élément triangulaire de Morley [MOR71], Onate et al. [ONA89] ont introduit la flexion dans un élément triangulaire de membrane sans adjonction de degré de liberté de rotation, cette stratégie a été développée et utilisée par Rio [RIO93] ainsi que Brunet et Sabourin ([BRU93], [BRU94]), Mercier [MER98] a utilisé l'élément triangulaire DKT12 obtenu par superposition des éléments CST et DKT6 pour aboutir à un élément qui travaille en membrane-flexion sans rotations, les trois rotations milieux des cotés de l'élément DKT6 sont éliminées, d'autres éléments finis de types coques sans rotations sont publiés dans les travaux de Oñate et Flores [ONA05], Oñate et al. [ONA07].

1.3.2.4 Le verrouillage

En coque, le verrouillage se manifeste d'autant plus que la structure est sujette à la flexion. En effet, les fonctions d'interpolation peuvent se retrouver incapables de reproduire correctement la flexion sans cisaillement et la flexion sans membrane (ou flexion inextensible) des coques minces. Dans ce cas, des contraintes supplémentaires résultant de termes erronés de cisaillement et membrane apparaissent et absorbent la majeure partie de l'énergie de déformation alors que c'est justement ces contributions qui devraient être quasiment nulles. En d'autres termes, la solution aura plutôt tendance à se bloquer sur la solution de cisaillement ou de membrane plutôt que décrire le comportement de flexion. Les verrouillages associés sont appelés verrouillage en cisaillement et verrouillage en membrane respectivement. Il en résulte une sous-estimation de la déformation de la coque et une surestimation des contraintes.

1.3.2.4.1 Traitement du verrouillage

L'idée principale de toutes les méthodes est de modifier les termes relatifs aux énergies de cisaillement et de membrane afin de relâcher les nombreuses contraintes en trop imposées par ceux-ci.

1.3.2.4.2 Approximations de plus haut ordre et champs compatibles

On peut par exemple augmenter le degré polynomial des fonctions d'approximation du déplacement (approximations de plus haut ordre, [ASH76] [MEC80] [RAN98]). En particulier, il a pu être montré dans Rank et al. [RAN 98] qu'un degré $p > 6$ est suffisant pour éliminer le verrouillage en cisaillement des plaques minces avec le modèle de Reissner-Mindlin. Une seconde stratégie simple est de prendre un ordre d'approximation différent pour chaque composante de la solution recherchée de sorte que les déformations de cisaillement et de membrane deviennent compatibles (approche des champs compatibles, voir [BAB86] [BAB87] [ISH12]). Le souci de ces deux méthodes est qu'elles ne font qu'atténuer le verrouillage sans vraiment le faire disparaître.

1.3.2.4.3 Intégration réduite/sélective et méthodes mixtes

Parmi les méthodes originales et populaires pour véritablement éliminer le verrouillage, on peut trouver les techniques dites d'intégration réduite et sélective ([ZIE71] [PAW71] [HUG77a] [HUG77b] [FLA81] [STO82] [PRA82] [BEL84] [LIU84]), qui consistent simplement à intégrer les rigidités avec moins de points d'intégration que nécessaire. Ces méthodes sont intéressantes car elles sont simples à mettre en œuvre et réduisent le coût de calcul. Le point auquel il faut faire attention est qu'elles mènent la plupart du temps à des instabilités traduites par des modes parasites que l'on appelle modes de hourglass ou modes sablier. Ce sont des modes de déformation à énergie quasi-nulle qui vont souvent de pair avec le traitement du verrouillage puisqu'ils résultent d'une "relaxation" trop importante des contraintes de verrouillage. Face à ce problème, Hughes [HUG77a] a mis en place des règles d'intégration réduite sélective, c'est-à-dire qu'il a effectué l'intégration réduite seulement pour les termes de membrane et de cisaillement (les autres termes étant intégrés avec la règle usuelle complète), tandis que Flanagan et Belytschko [FLA81] ont proposé un contrôle en ajoutant une rigidité artificielle de stabilisation. Alternativement à ces techniques d'intégration réduite et sélective, des éléments basés sur les méthodes mixtes ont aussi été envisagés (voir [HER65] [MAL78] [NOO81] [PIA82] [CHE87] [BRE91]). Le principe de ceux-ci est de rechercher dans le même temps les inconnues cinématiques et statiques.

Ceci permet d'avoir des interpolations indépendantes pour les contraintes et déformations ce qui offre plus de flexibilité. Cependant, le choix des espaces d'approximation entre le déplacement et la contrainte ne peut être arbitraire. Il faut vérifier la condition de Ladyzenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) [BRE91] pour assurer la stabilité et la convergence optimale. Malkus et Hughes [MAL78] ont prouvé l'équivalence d'une classe de modèles mixtes avec des éléments à un seul champ (déplacement) intégrés avec des règles d'intégration réduite. Ceci a permis de légitimer les techniques d'intégration réduite et sélective.

1.3.2.4.4 Méthodes des déformations "modifiées"

Plus récemment, le développement d'approches simples, purement en déplacement, qui pourraient simultanément étendre les procédures d'intégration réduite à des cas plus complexes (axisymétrie et anisotropie) tout en atteignant la cohérence théorique des formulations mixtes, a donné naissance à des méthodes de déformations assumées, à savoir la Enhanced Assumed Strain method "EAS" ([SIM90] [SIM92] [KAS00]) et l'Assumed Natural Strain method "ANS" (voir [HUG81] [DVO84] [BUC93]), à des méthodes de type Discrete Shear Gap "DSG" ([BLE00] [KOS05]) et, à des méthodes de projections des déformations B (voir [HUG80] [SOU96] [SOU05]). Ces stratégies sont basées sur la modification du lien entre les déplacements et les déformations. L'opérateur de gradient discret diffère de son expression usuelle. Plus précisément, les déformations peuvent être enrichies à l'aide de modes (la méthode des modes incompatibles de Wilson et al. [WIL73] pour l'origine des méthodes EAS), ou imposées sous une forme discrète à l'aide de collocations (ANS et DSG), ou encore projetées sur un espace approprié (méthodes B). À noter peut-être parmi ces méthodes l'avantage de la procédure B qui offre un formalisme suffisamment général pour être applicable facilement à tout type d'élément (triangles et quadrangles) et quelque soit le degré polynomial. Elle résulte seulement en la construction d'une matrice déformation-déplacement modifiée sans degrés de liberté supplémentaires ou définition de points de collocation.

1.3.3 Eléments finis coque volumique et solides-coques

En général, pour la modélisation des structures minces on utilise les éléments finis de type coque basés sur l'hypothèse des contraintes planes. Mais souvent ces structures minces sont raboutées à d'autres plus épaisses. Un problème de raccordement, des maillages 2D pour les structures à faible épaisseur et des maillages 3D adaptés aux pièces massives, se pose donc. D'où l'objet de développement des éléments de type solide coque qui ont une cinématique relativement facile à mettre en œuvre et permettent un calcul correct de la variation de l'épaisseur et une connexion directe aux éléments solides classiques puisque les déplacements sont les seuls degrés de liberté avec un traitement naturel des conditions de contact sur les deux faces de la structure.

1.3.3.1 Eléments de coques 3D dégénérés

Les éléments 3D dégénérés sont apparus à la fin des années 60 pour l'analyse linéaire des coques d'épaisseur modérée. Ils sont isoparamétriques et de continuité C^0 . Leur simplicité et leurs avantages ont motivé de nombreux travaux visant à les améliorer : extension aux coques minces, prise en compte des effets non-linéaires, extension aux grandes rotations et aux matériaux composites [AHM71] [BAT86a] [BAT86b] [DVO84].

L'utilisation de ce type d'élément n'est pourtant pas dénuée d'un certain nombre de problèmes. En effet, la restriction de la coque à sa surface de référence n'est pas prise en compte de manière analytique mais numériquement avec une intégration dans l'épaisseur

de la coque quelle que soit la nature du problème considéré (élastique, plastique, linéaire ou non). Ainsi, la formulation des éléments implique un coût en termes de temps de calcul, du fait de cette intégration, que sa simplicité parvient à compenser partiellement. Mais la vraie lacune des éléments dégénérés se situe au niveau du verrouillage qui altère considérablement leurs performances.

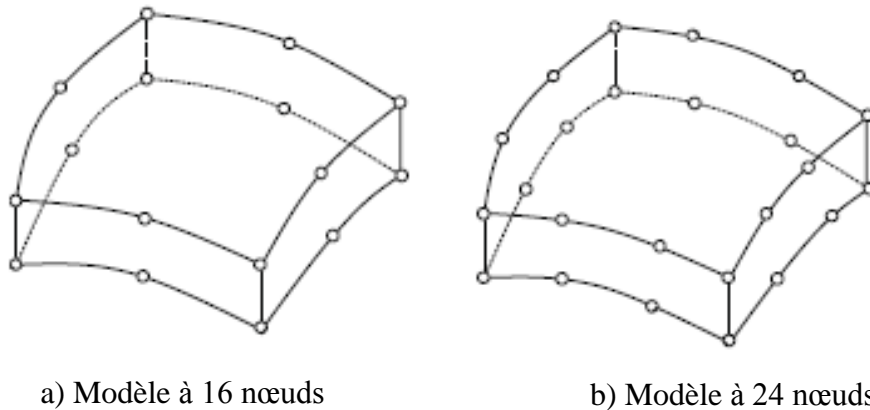


Figure 1.8. Modèles coques 3D d'Ahmad

1.3.3.2 Famille d'éléments finis solides–coques SHB

Le premier élément fini solides–coques, qui a été développé au sein de cette famille d'éléments SHB, a été initialement formulé par Abed-Meraim et Combescure [ABE02] et consiste en un élément fini hexaédrique à huit nœuds dénoté SHB8PS. Sa formulation a ensuite été améliorée par Abed-Meraim et Combescure [ABE09], notamment en termes de réduction de verrouillage, tandis que les modes de sablier « *hourglass modes* » ont été efficacement contrôlés par une nouvelle procédure de stabilisation. La performance de l'élément SHB8PS a été démontrée à travers de cas tests de référence ainsi que par la simulation de procédés de mise en forme des tôles minces (voir Abed-Meraim et Combescure [ABE09]; Salahouelhadj et al. [SAL12]). Par la suite, un élément prismatique à six nœuds dénoté SHB6 a été développé par Trinh et al. [TRI11], en complément de l'élément SHB8PS pour la modélisation de géométries complexes. Bien que la performance de l'élément SHB6 soit raisonnablement bonne en général, sa rapidité de convergence reste moins bonne que celle du SHB8PS, et il nécessite des maillages plus fins pour obtenir des solutions précises. Plus récemment, les homologues quadratiques des éléments solides–coques SHB ont été développés par Abed-Meraim et al. [ABE13], afin d'améliorer la performance globale et la rapidité de convergence. Ces versions quadratiques consistent en un élément hexaédrique à vingt nœuds, dénoté SHB20, et un élément prismatique à quinze nœuds, dénoté SHB15. De même, leur formulation est basée sur une approche entièrement tridimensionnelle avec une intégration réduite dans le plan.

La performance de ces éléments quadratiques a été évaluée par Abed-Meraim et al. [ABE13] dans le cadre de cas tests élastiques en petites déformations.

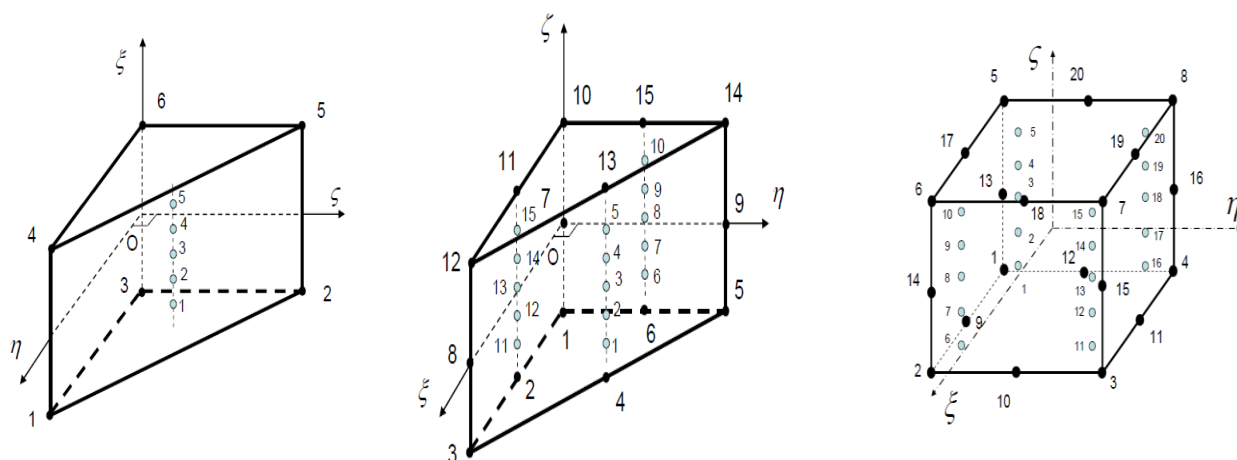


Figure 1.9. Élément de référence SHB6, SHB15 et SHB20 et ses points d'intégration

1.4. Conclusion

Ce premier chapitre a été consacré à la présentation des principes généraux et des théories de bases nécessaires pour aborder notre problématique. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions générales concernant la mécanique des milieux continus et la méthode des éléments finis, ainsi qu'une revue de la littérature sur les approches théoriques et les différents modèles d'éléments finis utilisés pour l'étude du comportement des coques.

A travers cette analyse bibliographique, il a été révélé que les modèles classiques existants (solides et coques conventionnels) destinés à l'étude des structures minces peuvent présenter plusieurs phénomènes de verrouillage. Afin d'améliorer leurs performances, des techniques numériques supplémentaires doivent être associées aux formulations de base des éléments finis. Parallèlement, le concept d'éléments finis solide-coque est apparu comme une alternative intéressante aux éléments finis solide et coque. Ce type d'éléments finis combine les avantages des formulations d'éléments solides et coques. Afin d'atténuer les phénomènes de verrouillage dans les éléments finis solide-coque, des techniques numériques avancées sont associées à leurs formulations, telles que la méthode EAS ou ANS. En générale, la formulation des éléments finis solide-coque est basée sur une approche purement tridimensionnelle, avec les déplacements comme étant les seuls degrés de liberté. Les éléments finis solide-coque sont généralement efficaces, puisqu'une seule couche d'éléments et un nombre arbitraire de points d'intégration à travers l'épaisseur sont nécessaires pour la modélisation tridimensionnelle de structures minces.

Chapitre 2

Théorie des coques

Sommaire

2.1. Introduction	31
2.2. Surface moyenne	31
2.2.1. Géométrie de la surface moyenne	32
2.2.2. Courbure normale	33
2.2.3. Lignes de courbure	34
2.3. Plaques planes de Love-Kirchhoff	34
2.3.1. Comportement général des plaques	35
2.3.2. Champs des déformations - Relations cinématiques	35
2.3.3. Champs des contraintes	36
2.3.4. Equations d'équilibre	38
2.3.5. Equation gouvernante de la flexion	40
2.3.6. Energie de Déformation	41
2.4. Plaques épaisses en Théorie de Reissner-Mindlin	41
2.4.1. Cinématique et déformations	42
2.4.2. Relations contraintes-déformations	43
2.4.3. Energie de Déformation	45
2.5. Comportement membranaire	46
2.6. Conclusion	47

2.1. Introduction

Plusieurs théories des coques ont été proposées dans la littérature et chacune a ses domaines d'application et ses limitations. En général, il y a deux groupes d'hypothèses fondamentales sur lesquelles les théories des coques sont basées. Le premier groupe comprend les hypothèses pour les théories des coques minces où le cisaillement est négligé (modèle de Kirchhoff-Love, de Novozhilov-Donnell, de Koiter, de flexion pure ou de membrane), Le deuxième groupe concerne les théories des coques d'épaisseur modérée où le cisaillement transverse est pris en compte. Il contient toutes les hypothèses de la théorie des plaques de Mindlin-Reissner.

Pour l'analyse des structures de type coque, on peut utiliser les éléments finis de coque d'épaisseur mince ou modérée suivants :

- ✓ Eléments de coque à surface moyenne courbe (à forte courbure en général, surbaissée parfois), basés sur l'une des théories générales (Love-Koiter ou Reissner-Naghdi).
- ✓ Eléments de coque surbaissée, basés sur une théorie de coque surbaissée (Donnell, Marguerre, etc.).
- ✓ Eléments plans, dits plaques-membranes, dont l'état flexionnel est basé sur la théorie des plaques minces (Kirchhoff) ou d'épaisseur modérée (Mindlin).
- ✓ Eléments dits du type tridimensionnel dégénéré, ordinairement courbes, se rattachant à une formulation théorique de type Reissner-Mindlin.

Dans le cadre de cette thèse, et dans le chapitre 3 nous développerons un élément fini coque sans degré de liberté en rotation à partir de l'élément triangulaire de type facette plane DKT18, ce dernier est obtenu par superposition de l'élément triangulaire de membrane CST et l'élément de flexion des plaques DKT, pour cela nous présenterons dans ce chapitre uniquement la théorie linéaire des plaques minces et celle des plaques épaisses, ainsi que l'état membranaire, qui sont exposées en détail dans plusieurs ouvrages et références parmi lesquelles on peut citer: [FRE03] [UGU18] [CRA08] [VEN01] [DEB11].

2.2. Surface moyenne

La théorie des coques est l'étude des solides déformables surfaciques, elle est adaptée à l'étude des solides déformables dont la géométrie est assimilable à une surface avec une épaisseur. Comme en théorie des poutres qui est l'étude des solides déformables linéiques (une courbe avec une épaisseur), cette géométrie va permettre d'établir une théorie simplifiée dans laquelle on dira qu'on connaît suffisamment les déplacements en

connaissant seulement ceux de la surface moyenne. Dans l'étude théorique des coques, la surface moyenne Σ , la normale n et le segment BC (figure 2.1) jouent un rôle essentiel. Le segment correspond, dans la théorie des coques, à la section droite dans la théorie des poutres de Bernoulli.

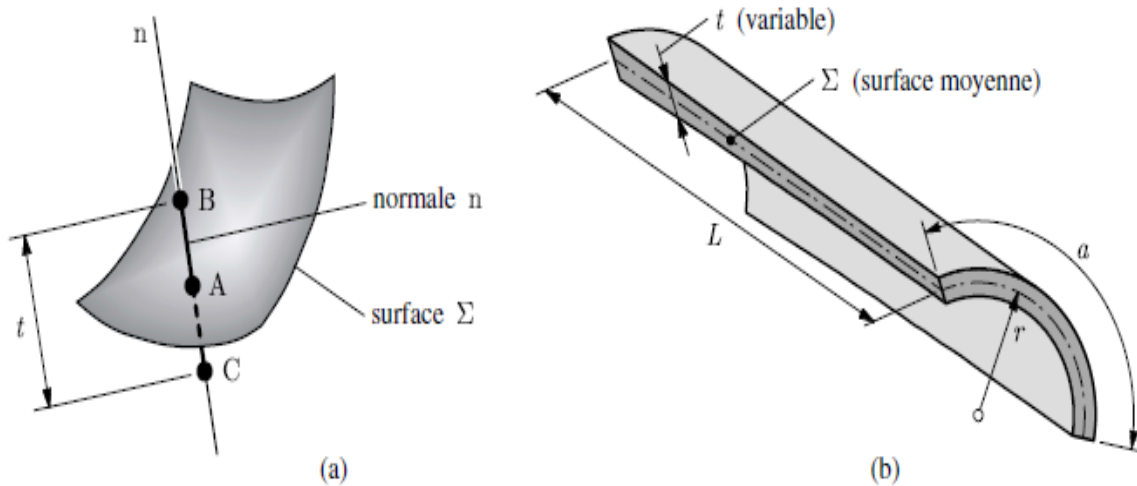


Figure 2.1. Elément structural mince (t est l'épaisseur) : (a) surface moyenne Σ et sa normale ; (b) dimensions caractéristiques (L , a , r) [FRE03]

2.2.1. Géométrie de la surface moyenne

Dans un système d'axes cartésiens orthogonaux (X , Y , Z), les équations paramétriques :

$$X = X(\alpha, \beta) \quad Y = Y(\alpha, \beta) \quad Z = Z(\alpha, \beta) \quad (2.1)$$

définissent une surface Σ . A toute valeur constante C_β du paramètre β correspond une ligne sur la surface, dite ligne de coordonnée α ; de même, $\alpha = C_\alpha$ définit une ligne de coordonnée β . L'ensemble forme les lignes de coordonnées et (α, β) sont les coordonnées curvilignes de la surface (figure 2.2).

Le vecteur position est défini par :

$$OA = x(\alpha, \beta) = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 \quad (2.2)$$

Où e_1, e_2, e_3 sont les vecteurs unités dans (X , Y , Z).

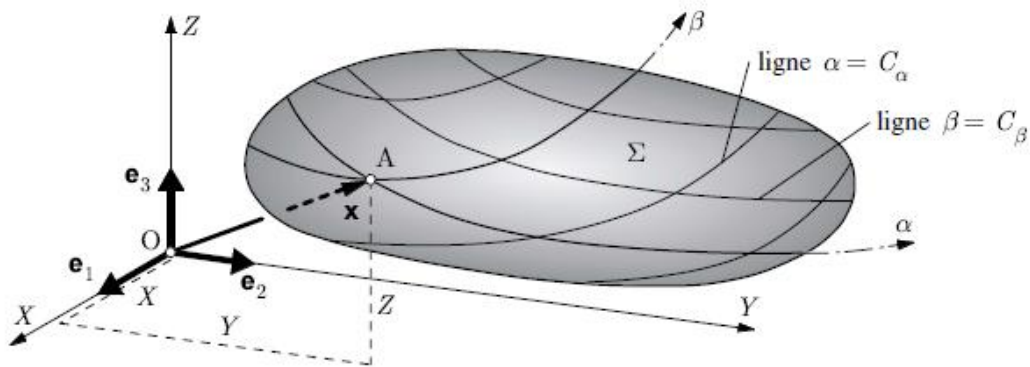


Figure 2.2. Surface et ses lignes de coordonnées [FRE03]

2.2.2. Courbure normale

Soit n la normale élevée au point A d'une surface Σ (figure 2.3), on dit qu'un plan P contenant n réalise une section normale de la surface, cette section se traduit par une courbe plane v tracée sur Σ . Au point A de cette courbe, on désigne par r_n le rayon de courbure, son inverse $1/r_n$ est la courbure normale.

Lorsque le plan P tourne autour de n , r_n et $1/r_n$ varient entre deux valeurs extrêmes appelées rayons de courbure principaux r_{\max} , r_{\min} et courbures principales $1/r_{\min}$, $1/r_{\max}$; les plans P correspondants sont perpendiculaires.

La trace de ces deux plans dessine, au voisinage immédiat du point A , une petite croix sur la surface Σ , les bras de cette croix sont les directions principales, les courbes enveloppes de ces directions en tous les points de Σ , constituent un réseau orthogonal de deux familles de lignes, appelées les lignes de courbure principales, ou simplement lignes de courbure.

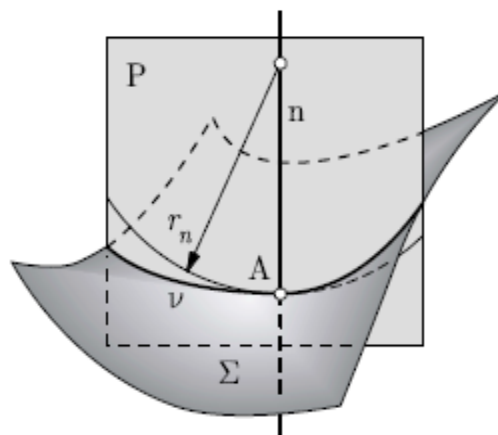


Figure 2.3. Courbe v de courbure normale $1/r_n$ au point A , section normale de Σ par P [FRE03]

2.2.3. Lignes de courbure

Le réseau des lignes de courbure d'une surface peut être utilisé avantageusement comme système de lignes de coordonnées curvilignes (α, β) pour exprimer les équations des coques, outre l'orthogonalité, ce réseau possède la propriété essentielle suivante : le long d'un tronçon ds_α (ou ds_β) d'une ligne de courbure, la normale reste dans le plan contenant la section normale et passe par le centre de courbure de ce tronçon (figure 2.4), grâce à cette propriété, on peut isoler un fragment de coque d'épaisseur t par des sections droites, c'est-à-dire des coupes planes et normales à la surface moyenne. Seules les lignes de courbures présentent cette particularité.

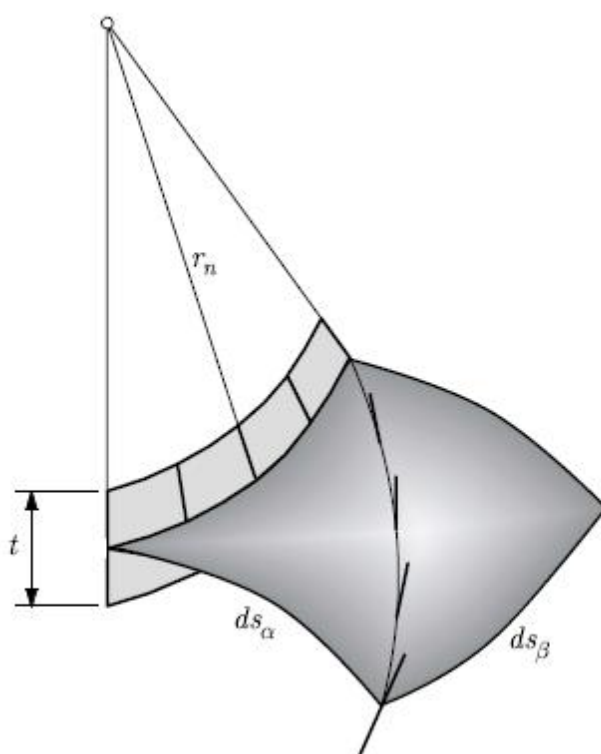


Figure 2.4. Élément de surface limité par des lignes de courbure [FRE03]

2.3. Plaques planes de Love-Kirchhoff

Dans le cas des plaques de Love-Kirchhoff, le cisaillement transverse est négligé, principalement du fait que l'épaisseur est supposée très petite devant la plus petite dimension transversale de la plaque, cette théorie s'applique donc en premier lieu aux plaques minces.

2.3.1. Comportement général des plaques

Considérons la plaque non chargée de la figure 2.5(a) pour laquelle le plan xy coïncide avec le plan moyen et donc l'ordonnée z est égale à zéro. Les composantes du déplacement en un point, suivant les directions x , y et z , sont dénotées u , v et w , respectivement. Quand une charge latérale engendre une déformation de la plaque, la surface médiane à un point $A (x_a, y_a)$ se déplace de w (figure 2.5(b)). Les hypothèses fondamentales de la théorie de flexion avec petites déformations des plaques minces, isotropes, homogènes et élastiques sont basées sur la géométrie des déformations. Ces hypothèses peuvent s'énoncer comme suit:

1. La flèche de la surface médiane w est très faible par rapport à l'épaisseur de la plaque h . La pente de la surface fléchie est par conséquent très petite et le carré de la pente est une quantité négligeable devant l'unité.
2. Le plan moyen reste indéformé pendant la flexion. ($u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$).
3. Une section de la plaque normale à son plan moyen reste plane après déformation. Cela veut dire que les déformations de cisaillement vertical γ_{xz} et γ_{yz} sont négligeables. Il est aussi déduit que la déformation normale ϵ_z résultant des charges transversales peut être omise.
4. La contrainte normale σ_z , sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée.

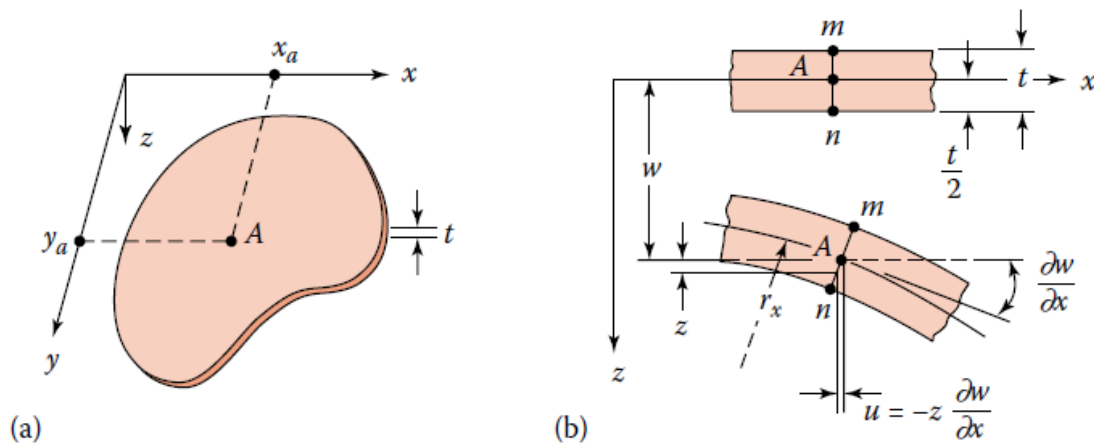


Figure 2.5. Schéma d'une plaque mince avant et après déformation [UGU18]

2.3.2. Champs des déformations - Relations cinématiques

Afin d'aborder le problème de flexion des plaques, nous nous intéressons en premier lieu à la géométrie des déformations. En conséquence à l'hypothèse 3 du paragraphe précédent, les relations déformation-déplacement peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

L'hypothèse 3, cité ci-dessus, permet de dire que la flèche w ne varie pas le long de l'épaisseur de la plaque. De plus les déformations γ_{xz} et γ_{yz} étant nulles, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
w &= w(x, y) \\
u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\
v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

En remplaçant les expressions de l'équation (2.4) dans les équations (2.3) nous obtenons:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad ; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.5}$$

Soit en fonction des courbures :

$$\varepsilon_f = -z \{\chi\} \quad \text{avec} \quad \{\chi\}^T = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \tag{2.6}$$

2.3.3. Champs des contraintes

Dans le cas général d'un état de contraintes tridimensionnelles, les contraintes et les déformations sont liées par la loi de Hooke généralisée, valable pour un matériau isotrope homogène:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

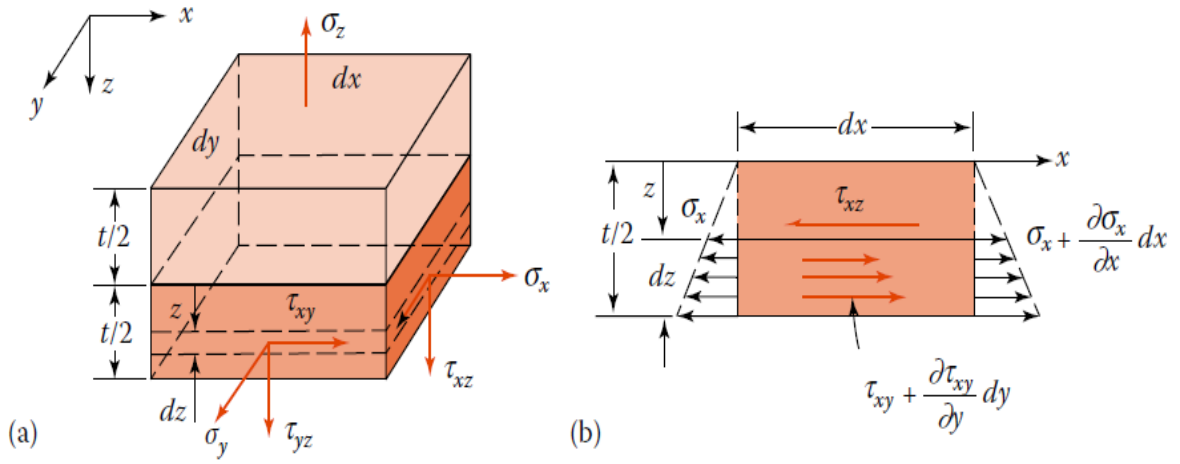


Figure 2.6. Contraintes appliquées sur un tronçon de plaque [UGU18]

Dans ces équations: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ($i, j = x, y, z$), les constantes E , ν et G représentent le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement élastique respectivement. La relation entre ces quantités s'écrit :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.8)$$

En considérant que $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$, les équations (2.7) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.9)$$

En considérant les relations cinématiques, les contraintes peuvent alors s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.10)$$

On observe à la base de ces formules que les contraintes sont nulles dans le plan moyen et varient linéairement sur l'épaisseur de la plaque. Les contraintes distribuées sur l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion, des moments de torsion et des forces verticales de cisaillement. Les résultantes (moments et forces) par unité de longueur peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (2.11)$$

Avec $M_{xy} = M_{yx}$. De même :

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} dz \quad (2.12)$$

En substituant les équations (2.10) dans les équations (2.11), nous obtenons les expressions suivantes pour les moments de flexion et de torsion en fonction de la flèche:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le paramètre D étant la rigidité flexionnelle de la plaque :

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.14)$$

Les composantes de contraintes peuvent s'écrire en fonction des moments de la manière suivante:

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3} \quad (2.15)$$

2.3.4. Equations d'équilibre

Les composantes des différentes contraintes (et leurs résultantes) varient généralement d'un point à l'autre d'une plaque chargée. Ces variations sont gouvernées par les équations d'équilibre de la statique.

Considérons un élément $dx dy$ de la plaque uniformément chargée de la figure 2.7.

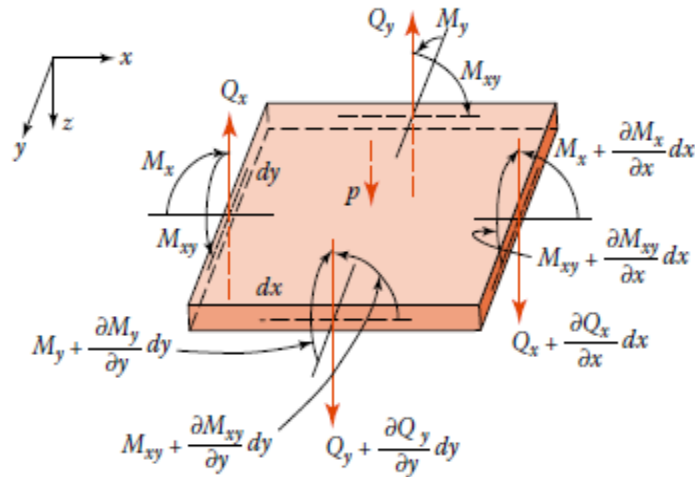


Figure 2.7. Résultantes positives et charge sur un élément de plaque [UGU18]

La somme des forces dans la direction z est nulle, ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0 \quad (2.16)$$

Ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (2.17)$$

L'équilibre des moments autour de l'axe x s'écrit :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (2.18)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.19)$$

Dans ces expressions, le produit des quantités infinitésimales, comme le moment dû à p et le moment dû à la variation de Q_y sont omis. De la même manière, l'équilibre des moments autour de l'axe y , nous permet d'écrire que :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (2.20)$$

Finalement, en introduisant les expressions de Q_x et Q_y , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (2.21)$$

Cette expression représente l'équation différentielle de l'équilibre des plaques minces. Les expressions des forces de cisaillement peuvent alors s'écrire en fonction de la flèche w , en se basant sur les équations (2.19) et (2.20) :

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \quad (2.22)$$

On a trois équations d'équilibre pour cinq grandeurs inconnues (M_x , M_y , M_{xy} , Q_x et Q_y). Le problème est hyperstatique et pour lever l'indétermination il faut tenir compte des déformations.

2.3.5. Equation gouvernante de la flexion

L'équation différentielle qui gouverne la flexion des plaques peut être obtenue en introduisant les expressions de M_x , M_y et M_{xy} dans l'équation (2.21) :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (2.23)$$

Cette équation présentée par Lagrange en 1811, peut s'écrire sous la forme compacte suivante:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (2.24)$$

L'équation de Lagrange est l'équation différentielle gouvernante de la flexion des plaques minces. Pour déterminer la flèche w , il est nécessaire d'intégrer cette équation en utilisant les conditions aux limites appropriées.

2.3.6. Energie de Déformation

L'énergie potentielle totale s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (2.25)$$

En tenant compte des équations de σ et ε :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(z\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2z\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dV \quad (2.26)$$

Nous pouvons également récrire l'expression (2.26) en termes des moments et les courbures correspondantes :

$$U = \frac{1}{2} \int_A (M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy}) dA \quad (2.27)$$

Qu'on peut l'écrire aussi sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{M\}^T \{\chi\} dA \quad (2.28)$$

2.4. Plaques épaisses en Théorie de Reissner-Mindlin

Nous avons présenté dans la section 2.3 les plaques de Love-Kirchhoff, dont l'épaisseur est faible devant les dimensions caractéristiques du plan de la plaque. Dans le cas des plaques dites plaques épaisses, cette théorie est mise en défaut et s'éloigne des solutions de la mécanique 3D. En effet, le cisaillement transverse devient essentiel dans ces plaques.

La théorie de Mindlin se base sur les quatre hypothèses suivantes :

1. La déformation transversale ε_z est nulle (pas de variation d'épaisseur).
2. La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres composantes.
3. Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
4. L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

2.4.1. Cinématique et déformations

Dans le cadre des petites déplacements, l'hypothèse de Mindlin (sections droites restent droites) permet de définir les composantes de déplacements d'un point quelconque de coordonnées x, y, z .

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Où:

w est le déplacement transverse de la surface moyenne.

$\theta_x = -\beta_y$ est la rotation de la fibre normale suivant x .

$\theta_y = \beta_x$ est la rotation de la fibre normale suivant y .

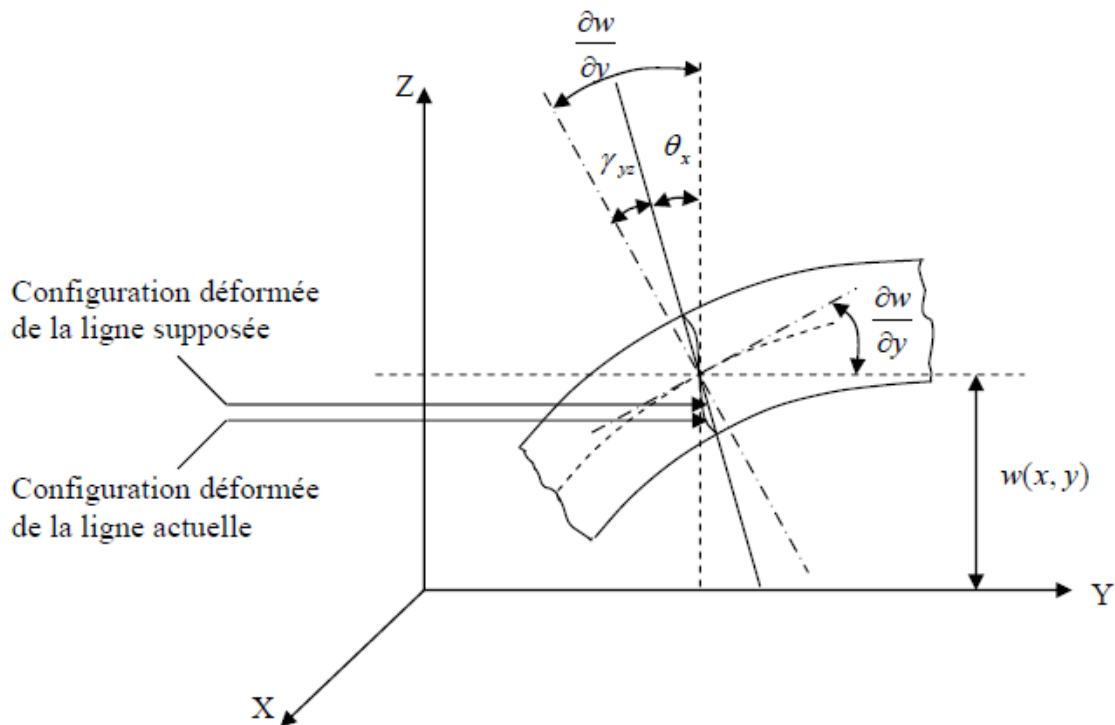


Figure 2.8. Définition de l'état supposé de la déformée dans la direction Y

Les relations déformations-déplacements s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Le vecteur de déformation peut être décomposé en deux parties, l'une indépendante de z traduisant les déformations de cisaillement notée γ , et l'autre partie ε dépendante de z et qui représente les déformations de flexion, comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \{\chi\} \tag{2.31}$$

$$avec \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{2.32}$$

Et :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \tag{2.33}$$

2.4.2. Relations contraintes-déformations :

Les relations contraintes-déformations pour un matériau isotrope sont données par :

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_x + \nu \chi_y) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_y + \nu \chi_x) \\
\sigma_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = Gz\chi_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Le vecteur de déformation peut être décomposé en deux parties, l'une indépendante de z traduisant les déformations de cisaillement notée $\{\varepsilon_c\}$, et l'autre partie $\{\varepsilon_f\}$ dépendante de z et qui représente les déformations de flexion, comme suit :

- Pour la flexion, la loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma_f\} = [D_m]\{\varepsilon_f\} = z[D_m]\{\chi\} \quad (2.35)$$

$$\{\sigma_f\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \quad \{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} ; \quad [D_m] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

- Pour le cisaillement transverse on aura:

$$\{\sigma_c\} = Gk[I]\{\varepsilon_c\} \quad (2.36)$$

Où :

$$\{\sigma_c\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} ; \quad \{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} ; \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Les contraintes, moments de flexion et de torsion et efforts de cisaillement sont représentés dans les figures (2.9) et (2.10).

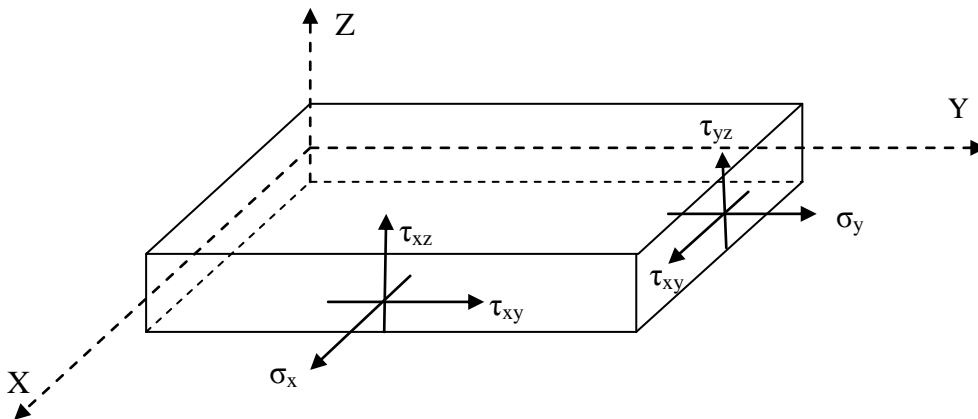


Figure 2.9. Contraintes dans une plaque

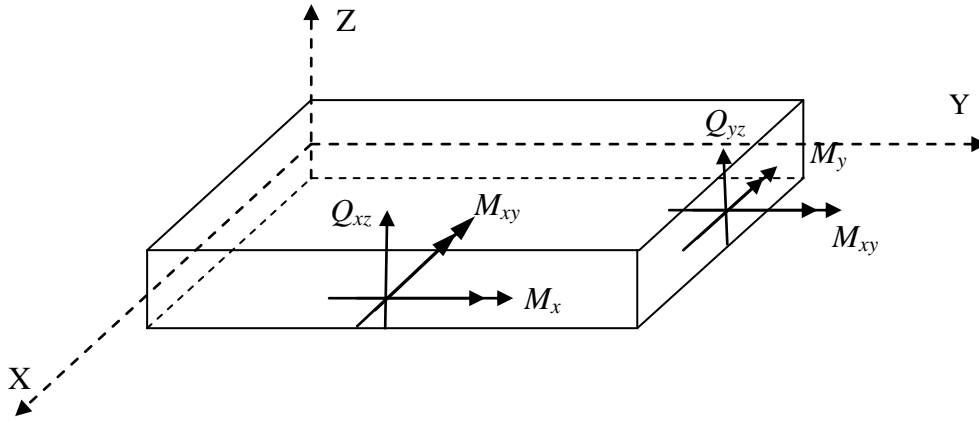


Figure 2.10. Moments de flexion et efforts de cisaillement dans une plaque

En utilisant les relations de comportement (2.35) et (2.36), on définit les forces et les moments résultants par :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = [D_f] \{\chi\}$$

$$\text{avec } [D_f] = \int_{-t/2}^{t/2} [D_m] z^2 dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$Q = \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = [D_c] \{\varepsilon_c\}$$

$$\text{avec } [D_c] = \int_{-t/2}^{t/2} Gk[I] dz = \frac{Ekt}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Où M_x , M_y et M_{xy} sont les moments de flexion par unité de longueur, Q_{xz} et Q_{yz} sont les efforts dus au cisaillement transversal par unité de longueur, k facteur de correction du cisaillement transversal, t épaisseur de la plaque, D_f et D_c sont respectivement les rigidités de flexion et de cisaillement de la plaque.

2.4.3. Energie de Déformation

L'énergie de déformation est égale à :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V (\{\varepsilon_f\}^T \{\sigma_f\} + \{\varepsilon_c\}^T \{\sigma_c\}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_A (\{\chi\}^T [D_f] \{\chi\} + \{\varepsilon_c\}^T [D_c] \{\varepsilon_c\}) dA \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.5. Comportement membranaire

L'état membranaire s'associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les efforts normaux et les efforts tangentiels résultent de l'état plan de contrainte (voir figure 2.11).

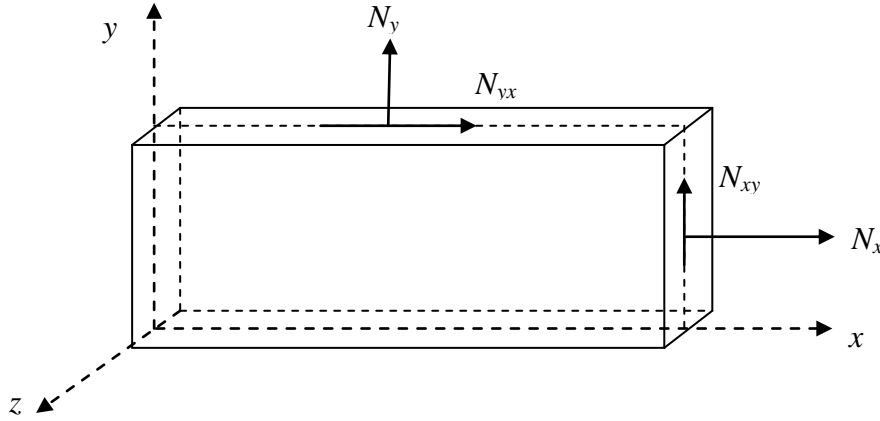


Figure 2.11. Efforts de membrane

Le champ de déformation est défini par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Relation contraintes-déformations :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

Les efforts de membrane :

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

(2.40)

2.6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la géométrie des coques, outil indispensable au développement de la théorie des coques, ainsi que les principaux modèles cinématiques existants, le modèle de Love-Kirchhoff pour les coques minces et celui de Reissner-Mindlin pour les coques épaisses. Pour chaque modèle le champ de déformation, les contraintes, la relation contraintes-déformations et les équations d'équilibre ont été exposées.

Chapitre 3

Formulation d'un élément fini coque à facette plane sans DDL de rotation

Sommaire

3.1. Introduction	49
3.2. Formulation de l'élément DKT18RF	49
3.2.1. Définition du repère local	50
3.2.2. Variables cinématiques	52
3.2.3. Déformation de membrane	52
3.2.4. Déformation de flexion	53
3.2.5. Forme discrétisée de W_{int}^e	54
3.2.6. Matrice de rigidité dans le repère global	55
3.3. Mise en œuvre numérique de l'élément DKT18RF sur Matlab	56
3.3.1. Introduction	56
3.3.2. Présentation du programme élément fini DKT18RF	58
3.3.3. Description du programme	59
3.4. Validation de l'élément DKT18RF	60
3.4.1. Cylindre pincé avec diaphragme	60
3.4.2. Cylindre pincé à bord libre	63
3.5. Conclusion	65

3.1. Introduction

Dans le présent chapitre nous allons développer un élément fini triangulaire de type coque sans degrés de liberté de rotation obtenu à partir de l'élément coque de type facette plane DKT18 (Discret Kirchhoff Triangle, avec 18 degrés de liberté [BAT90]). Cet élément nommé DKT18RF (DKT rotation free element, avec 18 degrés de liberté) est l'élément obtenu par la superposition de l'élément triangulaire de membrane CST (Constant Strain Triangle) qui contient deux degrés de liberté par nœud et l'élément de flexion des plaques DKT modifié. La modification se fera sur l'opérateur matriciel B_f relatif aux déformations de flexion de l'élément DKT pour avoir uniquement que des termes qui correspondent à la composante de déplacement w . Cette stratégie a été utilisée par Mercier [MER98] pour obtenir un élément de membrane-flexion sans degré de liberté de rotation à partir de l'élément DKT12. L'élément DKT18RF est programmé sous MATLAB afin de tester leurs performances et leur fiabilité en utilisant les cas tests reconnus dans le domaine.

3.2. Formulation de l'élément DKT18RF

En se basant sur l'élément triangulaire de type facette plane DKT18, qui est obtenu par superposition de l'élément membranaire CST (déformations constantes) qui comporte comme variables nodales les deux composantes de membrane (u,v) , et l'élément DKT de type Kirchhoff discret ayant trois variables nodales (w, θ_x, θ_y) , en lui rajoutant une rotation fictive θ_z , les variables nodales après assemblage sont les déplacements (U, V, W) des trois nœuds et les rotations $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ autour des axes globaux X, Y et Z . Nous allons formuler l'élément triangulaire DKT18RF, en suivant le même principe, c'est à dire la partie membrane est représentée par l'élément linéaire CST qui comporte les variables nodales (u,v) et la partie flexion par l'élément DKT comportant une seule variable nodale (w) , les déformations de cisaillements transverses sont considérées nulles pour les éléments de type DKT. Ces étapes sont illustrées dans la figure 3.1. Pour cet élément, seule l'analyse en statique est présentée.

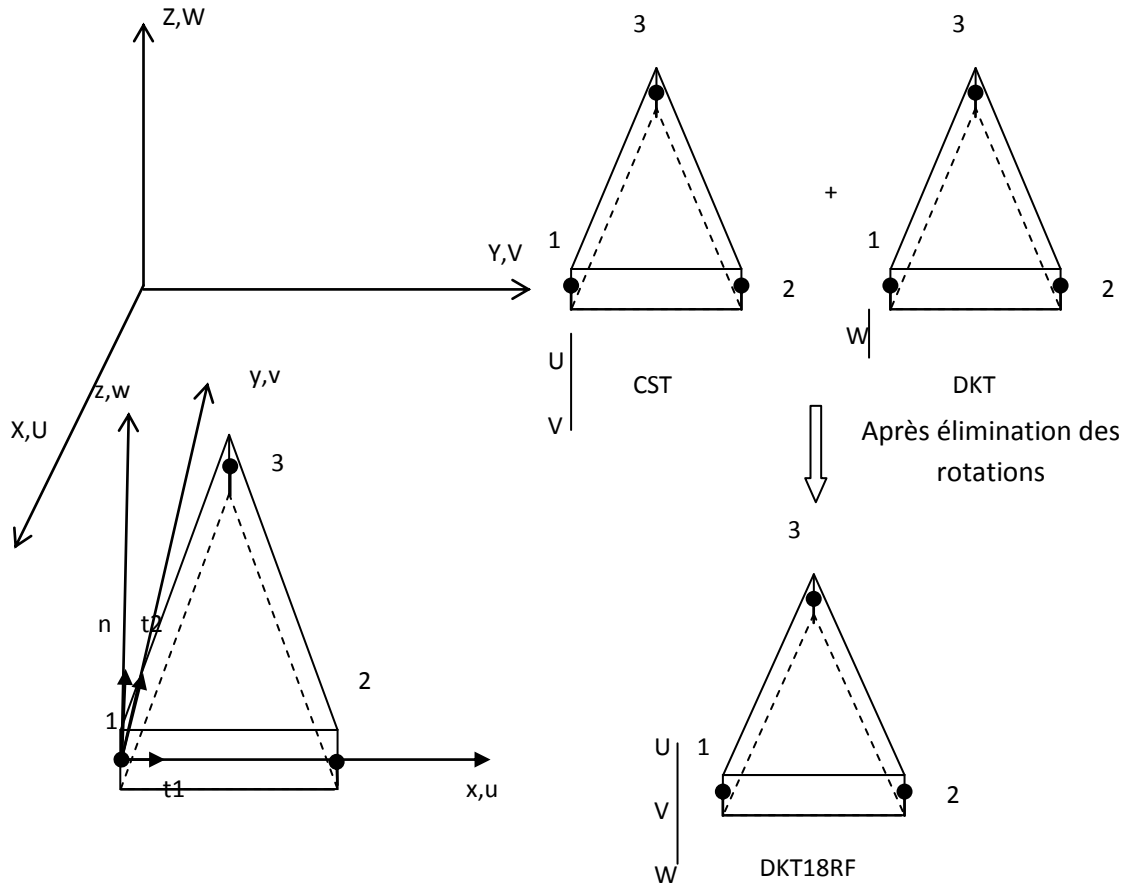


Figure 3.1. Construction de l'élément DKT18RF

3.2.1. Définition du repère local

La surface de référence de l'élément est définie par :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Les fonctions d'interpolation N_i :

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta \quad (3.2)$$

Avec : ξ et η coordonnées paramétriques de l'élément de référence.

Les vecteurs de base a_1 et a_2 sont :

$$\{a_1\} = \{x_{p,\xi}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix}, \quad \{a_2\} = \{x_{p,\eta}\} = \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

On peut définir un repère local :

$$[Q] = [t_1 : t_2 : n] \quad (3.4)$$

$$n = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}, \quad t_1 = \frac{a_1}{L_{21}}, \quad t_2 = n \wedge t_1 \quad (3.5)$$

$$L_{21} = (X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Où

$$X_{21} = X_2 - X_1, \quad Y_{21} = Y_2 - Y_1, \quad Z_{21} = Z_2 - Z_1$$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21} \\ Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21} \\ X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

La surface de l'élément A :

$$2A = ((Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21})^2 + (Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21})^2 + (X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21})^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

t_1 et t_2 peuvent être calculés aussi par :

$$\langle t_1 \rangle = \langle n_z + \frac{n_y^2}{a} \quad \frac{-n_x n_y}{a} \quad -n_x \rangle \quad (3.9)$$

$$\langle t_2 \rangle = \langle \frac{-n_x n_y}{a} \quad n_z + \frac{n_x^2}{a} \quad -n_y \rangle \quad (3.10)$$

Avec :

$$a = 1 + n_z$$

Un point q dans l'épaisseur est défini par :

$$\{x_q\} = \{x_p\} + Z\{n\} \quad (3.11)$$

Les coordonnées des nœuds 1,2, 3 dans le repère local d'origine 1 sont :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [t_1 \quad t_2]^T \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = [t_1 \quad t_2]^T \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Les coordonnées d'un point p de la surface moyenne sont :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Expression du travail virtuel interne W^e dû à la membrane et à la flexion dans le repère local :

$$W_{int}^e = W_{int}^m + W_{int}^f = \int \langle e^* \rangle N dA + \int \langle \chi^* \rangle M dA \quad (3.14)$$

3.2.2. Variables cinématiques

Le champ de déplacement d'un point q est défini par :

$$u_q^* = u_p^* + z\beta^* \quad , \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.15)$$

Avec h épaisseur de la coque et β la rotation

$$\begin{Bmatrix} u_q^* \\ v_q^* \\ w_q^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Déplacements de membrane obtenus par l'élément CST :

$$u^* = \langle N_u \rangle \{u_n^*\} \quad , \quad v^* = \langle N_v \rangle \{u_n^*\} \quad (3.17)$$

$\{u_n^*\}$ vecteur des variables nodales de l'élément :

$$\{u_n^*\} = \langle \dots (u_i^* \quad v_i^* \quad w_i^*) \dots i \text{ varie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (3.18)$$

Les rotations β_x et β_y relatives à l'élément DKT sont :

$$\beta_x = \langle N_x \rangle \{u_n^*\} \quad , \quad \beta_y = \langle N_y \rangle \{u_n^*\} \quad (3.19)$$

3.2.3. Déformation de membrane

Les déformations virtuelles de membrane en fonction des déplacements nodaux sont données par :

$$\{e^*\} = [B_m] \{u_n^*\} \quad (3.20)$$

$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^* \\ v_{,y}^* \\ u_{,y}^* + v_{,x}^* \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Avec :

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{u,\xi} \rangle - y_2 \langle N_{u,\eta} \rangle \\ -x_3 \langle N_{v,\xi} \rangle + x_2 \langle N_{v,\eta} \rangle \\ -x_3 \langle N_{u,\xi} \rangle + x_2 \langle N_{u,\eta} \rangle + y_3 \langle N_{v,\xi} \rangle - y_2 \langle N_{v,\eta} \rangle \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$N_u = \langle \dots N_i \quad 0 \quad 0 \dots i \text{ varie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (3.23)$$

$$N_v = \langle \dots 0 \quad N_i \quad 0 \dots i \text{ varie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (3.24)$$

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_3 + y_2 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & -y_3 + y_2 & 0 & -x_3 & y_3 & 0 & x_2 & -y_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

3.2.4. Déformation de flexion

Les courbures virtuelles

$$\{\chi^*\} = [B_f] \{u_n^*\} \quad (3.26)$$

$$\{\chi^*\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x}^* \\ \beta_{y,y}^* \\ \beta_{x,y}^* + \beta_{y,x}^* \end{Bmatrix}, [B_f] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes qui correspondent au déplacement vertical w sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^x \rangle \quad (3.28)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^y \rangle \quad (3.29)$$

N_{11}^x N_{21}^x N_{31}^x et N_{11}^y N_{21}^y N_{31}^y sont donnés par :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (3.30)$$

Les indices k et m sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet i point commun (voir tableau 3.1), les fonctions P_k et P_m sont définies par le tableau 3.2.

Tableau 3.1. Indices k et m

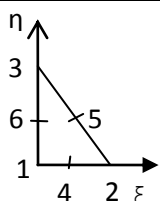
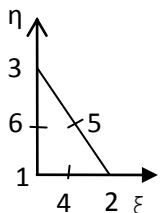
	Nœud sommet i	Côté k (i - j)	Côté m (i - j)
	1	4 (1-2)	6 (3-1)
	2	5 (2-3)	4 (1-2)
	3	6 (3-1)	5 (2-3)

Tableau 3.2. Valeurs de P_k et P_m

	P_k
	($k=4$ à 6)
	$P_4=4 \xi \lambda$
	$P_5=4 \xi \eta$
	$P_6=4 \lambda \eta$

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k}, \quad S_k = \frac{y_{ij}}{L_k}, \quad L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

Les détails de calcul de la matrice B_f sont exposés dans l'Annexe A.

3.2.5. Forme discrétisée de W_{int}^e

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [K] \{u_n\} \quad (3.32)$$

La matrice de rigidité élémentaire:

$$[K] = [K_m] + [K_f] \quad (3.33)$$

La rigidité de membrane relative à l'élément CST est constante sur l'élément :

$$[K_m] = A[B_m]^T [H_m] [B_m] \quad (3.34)$$

La rigidité de flexion relative à l'élément DKT est obtenue par intégration numérique en utilisant 3 points de Hammer (voir tableau 3.3) :

$$[K_f] = \int_A [B_f]^T [H_f] [B_f] dA \quad (3.35)$$

$$[K_f] = \int_{A_{réf}} \left([B_f]^T [H_f] [B_f] \right) \det J d\xi d\eta \quad (3.36)$$

$$[K_f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \omega_j \left([B_f]^T [H_f] [B_f] \det J \right) \quad (3.37)$$

$A_{réf}$: surface de l'élément de référence.

m : représente le nombre de points d'intégration (PI) dans les directions ξ , η

Tableau 3.3. Intégration numérique (3 points de Hammer)

PI	ξ	η	Ω
1	0.5	0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0	0.5	1/6

Avec H_m et H_f : matrice de comportement homogénéisé de membrane et de flexion.

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$[H_m] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de poisson.

Les efforts résultants (effort normal et moment de flexion):

$$[N] = [H_m]\{e\} \quad , \quad [M] = [H_f]\{\chi\} \quad (3.40)$$

3.2.6. Matrice de rigidité dans le repère global

Les déplacements dans le repère global U , V , W sont reliés aux quantités locales par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

$$[Q]^T = \begin{Bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Les composantes de $[Q]^T$ sont données explicitement par (3.7), (3.9) et (3.10).

Soient $\langle u_n^* \rangle_{glob}$ et $\langle u_n \rangle_{glob}$, les variables nodales de l'élément dans le repère global :

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle \dots : U_i \quad V_i \quad W_i : i = 1,2,3 \dots \rangle \quad (3.43)$$

Nous avons, en utilisant (3.18), (3.42) et (3.43) :

$$\{u_n\} = [T]\{u_n\}_{glob} \quad ; \quad \{u_n^*\} = [T]\{u_n^*\}_{glob} \quad (3.44)$$

Avec :

$$[T]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q]^T \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Les relations (3.32) et (3.44) permettent de définir la matrice de rigidité dans le repère global :

$$[K]_{glob} = [T]^T [K] [T] \quad (3.46)$$

3.3 Mise en œuvre numérique de l'élément DKT18RF sur Matlab

3.3.1 Introduction

Tous programmes basés sur la méthode des éléments finis incluent quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (module d'élasticité...etc), les sollicitations et conditions aux limites.
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel de variables additionnelles (contrainte, réactions...etc).

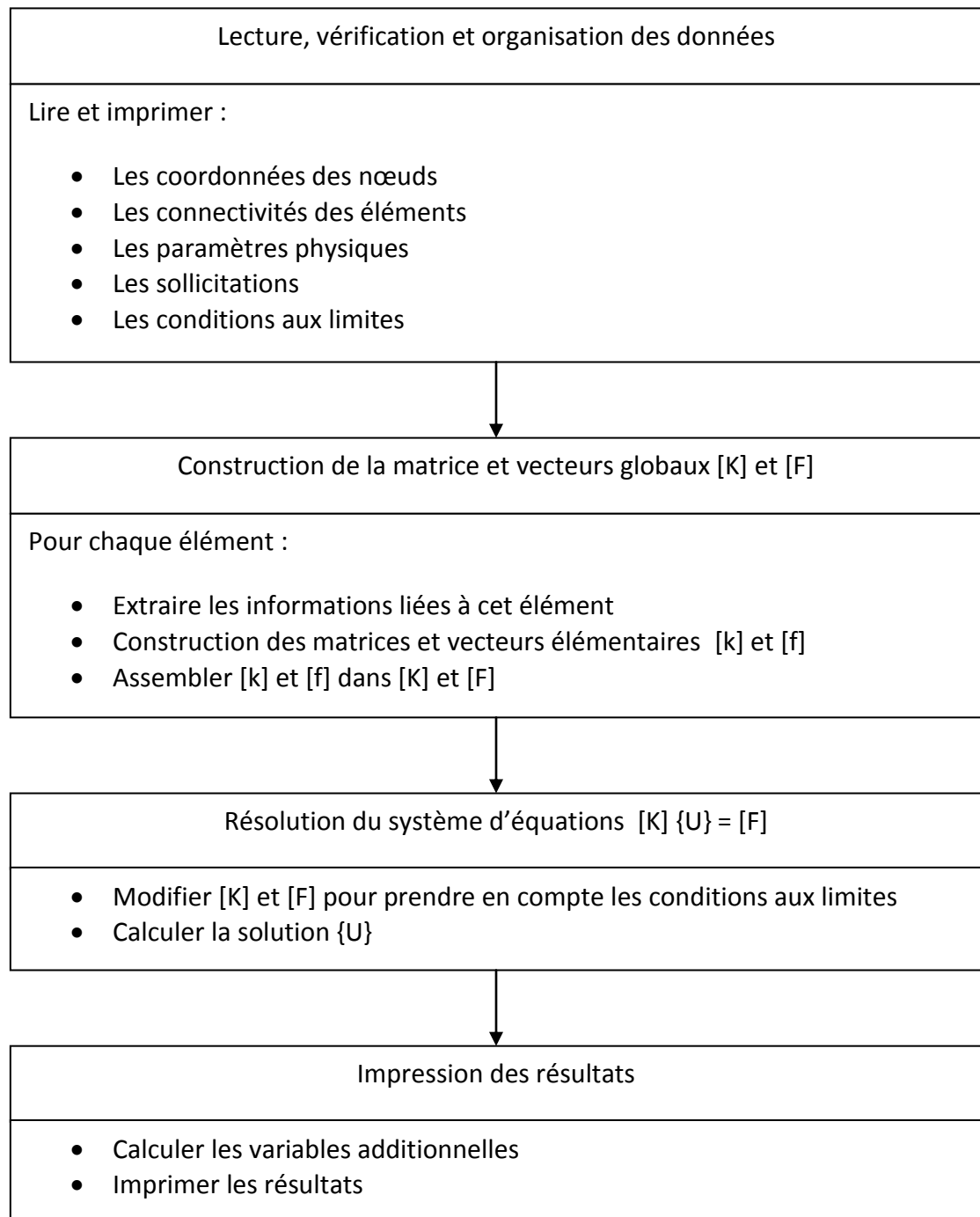


Figure 3.2. Blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis [DHA81]

Les programmes éléments finis qu'on a élaborés dans le cadre de cette thèse sont relatifs à l'élément fini DKT18RF, et aux éléments SB6-18 en linéaire et SB6-18 en non linéaire qui seront présentés dans les chapitres 4 et 5 respectivement. Ces programmes sont écrits sous le langage MATLAB, chaque programme est constitué d'une fonction (fonction) principale qui représente le programme principal et un ensemble des fonctions (fonctions) secondaires (qui jouent le même rôle des sous-routines).

3.3.2 Présentation du programme élément fini DKT18RF

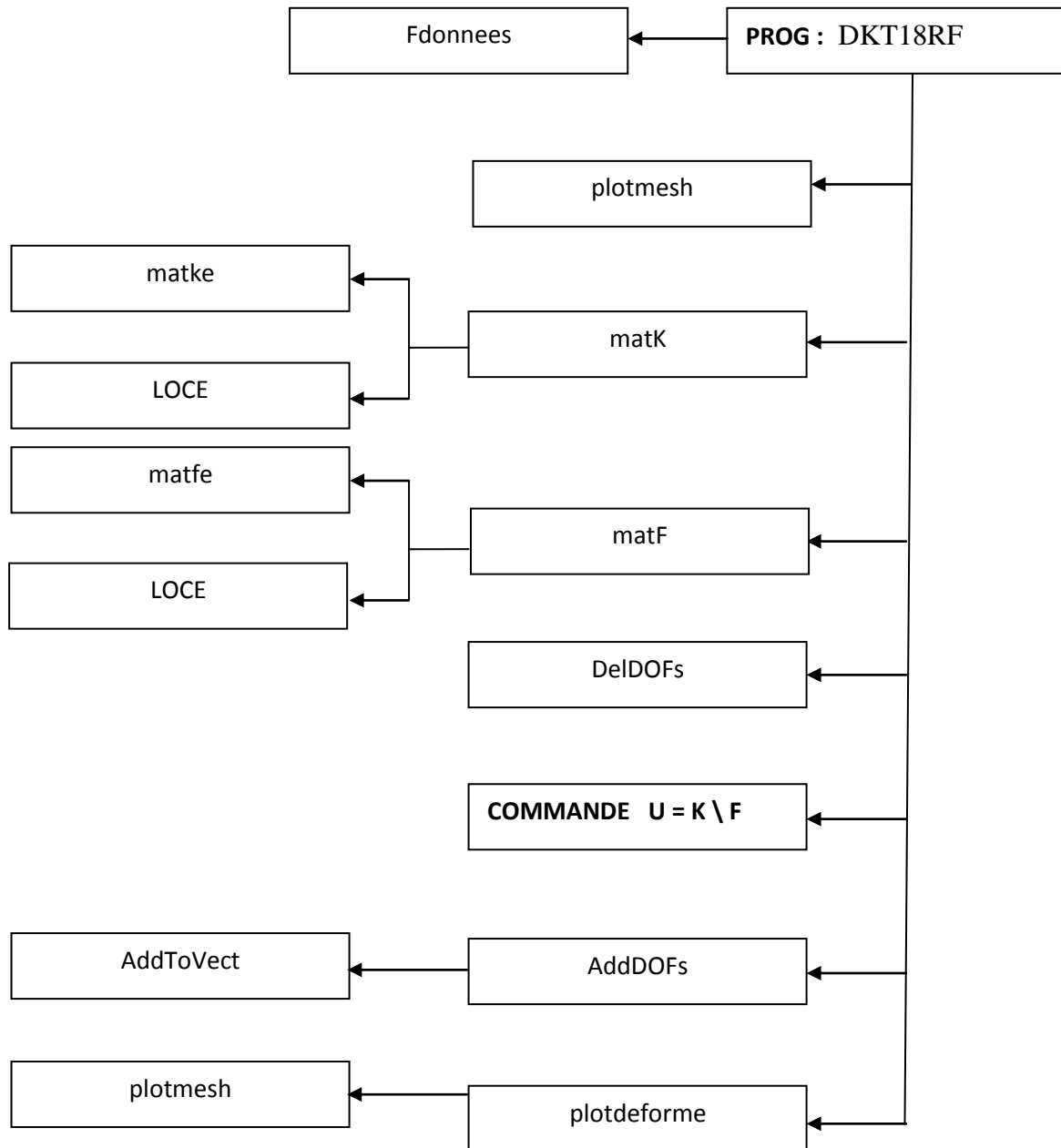


Figure 3.3. Description du programme élément fini DKT18RF

3.3.3 Description du programme

- **Programme principal DKT18RF**

Il fait appel aux différentes fonctions secondaires nécessaires aux calculs d'une structure en utilisant la formulation décrite dans ce chapitre.

- **Fonction donnees :**

C'est un fichier fonction qui permet d'introduit toutes les données relatives au problème :

- tableau des coordonnées des nœuds
- tableau de connectivité des éléments
- épaisseur des éléments
- module d'élasticité
- coefficient de poisson
- conditions aux limites (numéros des degrés de liberté bloquées)
- vecteurs sollicitations

La commande Matlab : [les données] = feval(str2func(Nom du fichier des données)); ouvre le fichier des données et permet aux différentes fonction existant dans le programme principal de lire les données.

- **Fonction plotmesh :**

Cette fonction nous donne un affichage graphique du maillage, les coordonnées et la numérotation des nœuds, ce qui permet, avec le tracer la structure saisie, une vérification visuelle des données (tableaux des coordonnées et connectivité).

- **Fonction matK :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires K_e fournit par la fonction matke, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction LOCE qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont nécessaires pour le stockage des termes de la matrice élémentaire dans la matrice de rigidité globale.

- **Fonction LOCE :**

A partir de la table de connectivité des éléments existant dans le fichier des données, cette fonction Fournit la table de localisation (numéros) des degrés de liberté pour chaque élément.

- **Fonction matke:**

Permet le calcul de la matrice de rigidité pour chaque élément.

- **Fonction matF :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des vecteurs des sollicitations élémentaires f_e fournit par la fonction matfe, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction LOCE qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont

nécessaires pour le stockage des termes des vecteurs de forces élémentaire dans le vecteur global.

- **Fonction matfe:**

Permet d'introduire le vecteur des forces pour chaque élément.

- **Fonction DelDOFs :**

Les conditions aux limites sont l'ensemble des déplacements nuls aux niveaux des appuis, un vecteur e dans le fichier de données est utilisé pour spécifier les degrés de liberté à bloquer. Pour appliquer cette condition on élimine les lignes et les colonnes correspondantes au vecteur e de la matrice K et du vecteur des sollicitations F (puisque le chargement est saisi pour tous les noeuds y compris ceux d'appuis).

- **Commande $U = K \setminus F$:**

Une fois les conditions aux limites sont appliquées, il nous reste qu'à résoudre le système discret, La solution en déplacement (aux noeuds) s'obtient avec la commande MATLAB $U = K \setminus F$, qui remplace les méthodes classiques pour résoudre les systèmes d'équations linéaires (méthode de factorisation de cholesky Pour une matrice symétrique définie positive).

- **Fonction AddDOFs :**

Avec cette fonction on ajoute au vecteur déplacement les degrés de liberté des noeuds bloqués qui ont été supprimés par la fonction DelDOFs, la boucle se fait sur les numéros des degrés de liberté à ajouter en utilisant la fonction AddToVect.

- **Fonction AddToVect:**

Permet d'obtenir le vecteur de déplacement résultant pour chaque degré de liberté ajouté.

- **Fonction plotdeforme:**

Cette fonction dessine la structure déformée, elle trace les solutions obtenues sur le schéma déjà obtenu par la fonction plotmesh.

3.4. Validation de l'élément DKT18RF

Pour valider l'élément développé DKT18RF, nous utilisons un ensemble de tests bien connus dans la littérature. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence, et d'autre part, avec la solution donnée par des éléments finis existants dans la littérature.

3.4.1. Cylindre pincé avec diaphragme

Un cylindre, soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées, est supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités. Le détail de la géométrie, le chargement, le

matériau et les conditions aux limites et de symétrie sont donnés dans la figure 3.4. Ce cas test classique est fréquemment utilisé pour évaluer le comportement de l'élément fini de coque à simuler des états de membranes complexes avec une part importante de la flexion sans extension de la surface moyenne, un huitième de la coque est modélisé par l'élément fini DKT18RF en utilisant un maillage régulier avec $N=2, 4, 6$. Les résultats des déplacements W_C et V_D aux points C et D (voir tableaux 3.4 et 3.5) sont comparés avec la solution de référence donnée par Lindberg et al [LIN69]. Ces résultats sont également comparés à ceux des éléments DKT12 et DKT18.

La figure 3.5 montre la déformée du cylindre sous chargement.

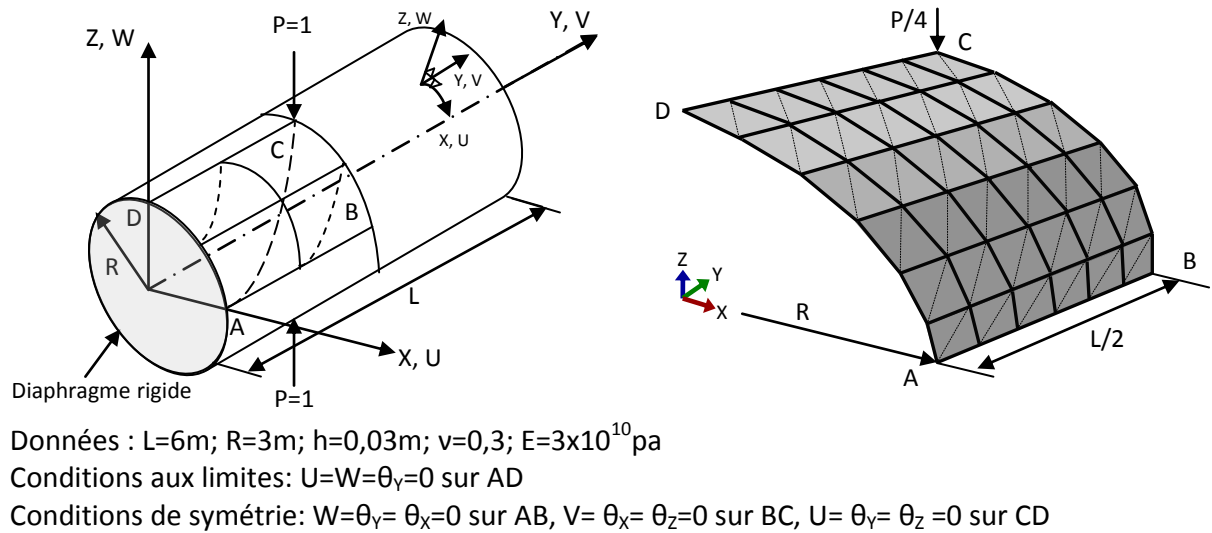


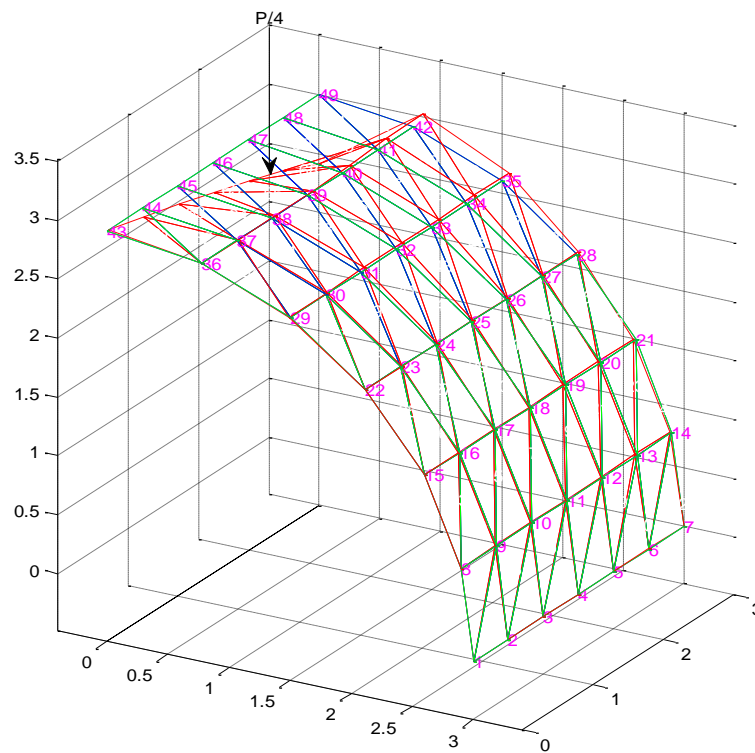
Figure 3.4. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides

Tableau 3.4. Valeur de la flèche $W_C=-E h W_C/p$

Maillages	DKT18RF	DKT18 ([BAT90])	DKT12 ([BAT90])
2X2	10,71	10,65	10,72
4X4	125,34	80,86	114,03
6X6	150,14	122,13	196,44
Solution de référence ([LIN69])		164,24	

Tableau 3.5. Valeur de $V_D = E h V_D/p$

Maillages	DKT18RF	DKT18 ([BAT90])	DKT12 ([BAT90])
2X2	1,02	1,01	1,02
4X4	6,21	4,11	5,68
6X6	4,37	4,17	6,06
Solution de référence ([LIN69])		4,11	

**Figure 3.5.** Déformée du cylindre pincé avec diaphragmes (maillage 6x6)

L'analyse des résultats obtenus par l'élément DKT18RF pour ce cas test montre une convergence monotone de la valeur du déplacement vertical au point C, ce qui indique une bonne performance de l'élément étudié.

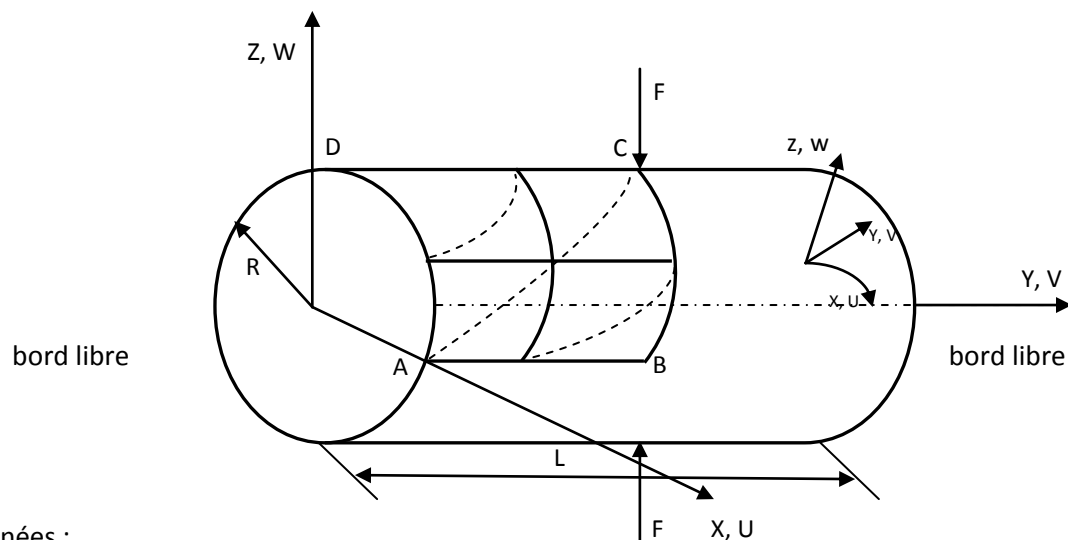
3.4.2. Cylindre pincé à bord libre

Un autre cas test très utilisé pour étudier les éléments finis de coque, est celui du cylindre pincé à bord libre, ce cas test permet d'évaluer les bonnes propriétés de convergence et la représentation du mode de corps rigide.

Un huitième de la coque est étudié par l'élément DKT18RF avec différents types de maillage. La géométrie, les caractéristiques du matériau ainsi que les conditions aux limites et de symétrie sont exposés dans la figure 3.6. Deux cas de chargement et d'épaisseur différents seront étudiés.

Les résultats du déplacement vertical W au point C , présentés dans les tableaux 3.6 et 3.7, sont comparés avec la solution de référence donnée par Macneal et Harder [MAC85] ainsi que les résultats obtenus par d'autres éléments finis Hamadi et al. [HAM16], Belarbi [BEL00], Cantin et Clough [CAN68], Bogner et al [BOG67], Ashwell et Sabir [ASH72], Sabir et Lock [SAB72]).

La figure 3.7 montre la déformée du cylindre.



Données :

$L=10,35$; $R=4,953$; $E=10,5 \cdot 10^6$; $\nu=0,3125$

1^{er} cas : $F_1=100$; $h_1=0,094$

2^{ème} cas : $F_2=0,1$; $h_2=0,01548$

Figure 3.6. Cylindre pincé à bord libre

Tableau 3.6. Valeur de W_C 1^{er} cas : $F1=100$; $h1=0,094$

Maillages	[BOG67]	[CAN68] with RBM	[CAN68] without RBM	ACM_SBQ4 [BEL00]	ACM_RSBE5 [HAM16]	DKT18RF
1 x 1	0.0025	–	–	0.0860	0.08763	2,7500
1 x 3	0.1026	0.0297	0.0009	0.1041	0.1060	0,7255
1 x 4	0.1087	–	–	–	0.1100	–
1 x 5	–	0.0769	0.0021	0.1090	0.1116	0,4077
1 x 7	–	0.0987	0.0035	0.1102	0.1129	0,2666
1 x 8	–	–	–	–	0.1132	0,2209
1 x 9	–	0.1057	0.0051	0.1115	0.1134	0,1852
2 x 9	–	–	–	–	–	0,1449
3 x 9	–	–	–	–	–	0,1153
Solution de référence ([MAC85])				0,1139		

Tableau 3.7. Valeur de W_C 2^{ème} cas : $F2=0,1$; $h2=0,01548$

Maillages	[ASH72]	[CAN68]	[SAB72]	ACM_SBQ4 [BEL00]	ACM_RSBE5 [HAM16]	DKT18RF
1 x 1	0.02301	0.00001	0.00001	0.01922	0.0196	0,61673
1 x 3	0.02302	0.00001	0.00001	0.02302	0.02343	0,16161
1 x 4	0.02403	0.00074	0.00063	–	–	–
1 x 5	–	–	–	0.02387	–	0,08830
1 x 7	–	–	–	0.02418	–	0,05539
2 x 4	0.02409	0.00070	0.00064	–	–	–
3 x 4	0.02414	0.00068	0.00065	–	–	–
2 x 7	–	–	–	–	–	0,03488
3 x 7	–	–	–	–	–	0,02539
Solution de référence ([MAC85])				0.02439		

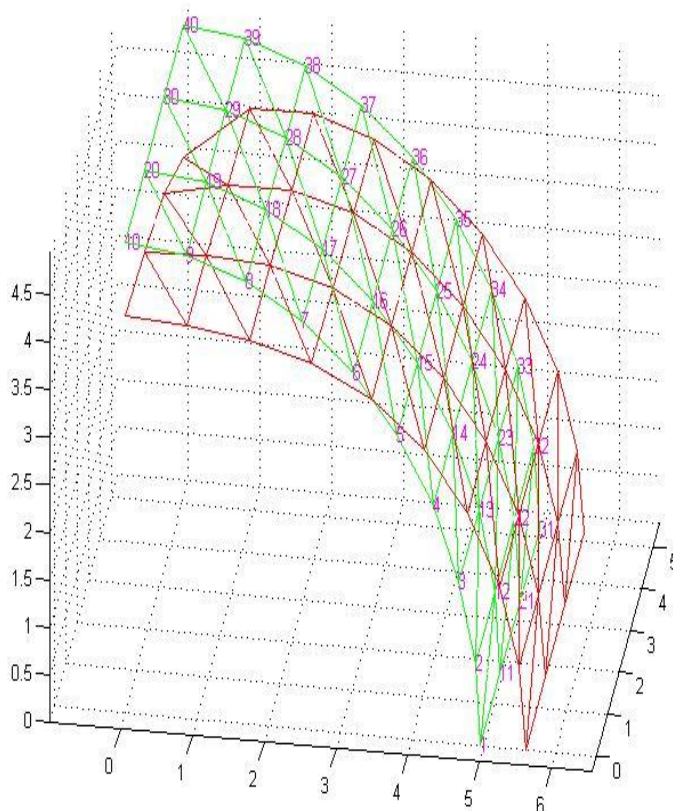


Figure 3.7. Déformée du cylindre à bord libre (maillage 9x3)

Les résultats obtenus par l'élément DKT18RF pour ce cas test peuvent être considérés comme satisfaisants dans les deux cas, vu que la convergence de l'élément vers la solution de référence est garantie si le maillage est raffiné.

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, un élément fini de coque sans degrés de liberté de rotation a été développé. Cet élément est obtenu par la superposition de l'élément membranaire CST à déformations constantes qui contient les variables nodales (u, v) , et l'élément DKT de type Kirchhoff discret qui a été modifié pour avoir uniquement une seule variable nodale (w) , ce qui nous donne un élément fini avec trois translations par nœud (u, v, w) .

La bonne performance de cet élément, nommé DKT18RF, a été mise en évidence à travers des tests de validation présentés dans la section 3.4. La convergence monotone vers la solution de référence a été clairement observée, néanmoins dans le cas test 3.4.2, on peut

remarquer qu'il est nécessaire de raffiner le maillage pour se rapprocher de la solution de référence.

A partir de ces résultats, on peut dire que l'élément étudié présente une bonne performance, cet élément est principalement conçu pour résoudre le problème de raccordement dans la zone de jonction entre les structures minces et épaisses. En se basant sur cet élément on peut construire un élément fini prismatique à six nœuds de type solide-coque qui sera présenté dans le chapitre 4.

Chapitre 4

Nouvel élément solide-coque basé sur la formulation DKT

Sommaire

4.1. Introduction	68
4.2. Formulation de l'élément SB6–18	68
4.2.1. Variables cinématiques et interpolation	69
4.2.2. Déformation de membrane	70
4.2.3. Déformation de flexion	70
4.2.4. Forme discrétisée de W_{int}^c	73
4.2.5. Matrice de masse	75
4.2.6. Expression de W^c dans le repère global	76
4.3. Validation de l'élément SB6–18	77
4.3.1. Cylindre pincé à bord libre	77
4.3.2. Poutre console de Macneal	79
4.3.3. Panneau fuselé	81
4.3.4. Plaque carrée soumise à une charge uniformément répartie	82
4.3.5. Poutre en flexion avec divers élancements	84
4.3.6. Poutre soumise à une charge uniformément répartie	86
4.3.7. Plaque carrée soumise à une charge concentrée	88
4.3.8. Vibrations libres d'une Plaque encastree	89
4.4. Conclusion	90

4.1. Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter le développement d'un nouvel élément fini prismatique à six nœuds de type solide-coque nommé SB6-18 (Shell Brick, avec six nœud et 18 degrés de liberté), basé sur la formulation DKT (Discret Kirchhoff Triangle). Notant que pour les deux faces supérieures et inférieures constituant le prisme, l'approche utilisée est similaire à celle de l'élément triangulaire DKT18RF exposé dans le chapitre précédent. Les opérateurs de déformation de membrane B_m et de la flexion B_f seront déterminés en suivant le même principe que celui de l'élément DKT18RF et les déformations de cisaillements transverses sont considérées nulles pour les éléments de type DKT.

Il est important de signaler que Xiong [XIO17], et Xiong et al. [XIO18] [XIO19], ont adopté la même approche pour développer un élément de type solide-coque à six nœuds, L'élément développé appartient à la famille des éléments de type Kirchhoff discrets et il est basé sur la formulation de l'élément DKT6 pour la flexion. Un autre élément de type solide-coque a été développé par Flore [FLO17]. Pour cet élément, les comportements de membrane et de flexion sont définis au centre des surfaces inférieure et supérieure de l'élément prismatique.

Vu que l'élément SB6-18 est basé sur l'hypothèse des contraintes planes, alors la loi de comportement utilisée dans ce cas est une loi de comportement tridimensionnel modifiée. Des tests de validation seront réalisés par la suite, ces tests mettent en évidence l'efficacité de l'élément proposé et permettent aussi de vérifier l'exactitude de la mise en œuvre numérique de l'élément SB6-18 (le programme est réalisé sous Matlab).

4.2. Formulation de l'élément SB6-18

L'élément SB6-18 est formulé dans les axes locaux du plan moyen. Les directions x, y, z sont respectivement parallèles aux axes ξ, η, ζ de l'espace de référence. La figure 4.1 représente la géométrie d'un élément de référence SB6-18 et ses points d'intégration.

Par souci de concision, seules les relations qui n'ont pas été mentionnées dans le chapitre précédent sont exposées.

$$N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \xi)\eta \\ (1 - \xi)\zeta \\ (1 - \xi)(1 - \eta - \zeta) \\ (1 + \xi)\eta \\ (1 + \xi)\zeta \\ (1 + \xi)(1 - \eta - \zeta) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

L'origine du repère est confondue avec le coin droit du triangle du plan médian de l'élément (celui qui possède un angle droit, voir Figure 4.1). Ces fonctions de forme transforment un prisme régulier dans l'espace (ξ, η, ζ) en un prisme quelconque dans l'espace (x, y, z) .

Sous l'hypothèse de petits déplacements où le découplage des effets de membrane et de flexion est effectif, les déformations se caractérisent par l'opérateur de déformation discrétisé de membrane et de flexion.

4.2.2. Déformation de membrane

Les déformations de membrane en fonction des déplacements nodaux sont données par :

$$\{e\} = [B_m]\{u_n\} \quad (4.5)$$

Avec :

$$[B_m] = [[B_{m1}], [B_{m2}]] \quad (4.6)$$

Les matrices B_{m1} et B_{m2} représentent l'opérateur de déformation de membrane qui relie le déplacement à la déformation pour les deux faces triangulaires supérieure et inférieure du prisme respectivement, et qui sont définies suivant la formulation de l'élément triangulaire CST.

$$[B_{m1}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_3 + y_2 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & -y_3 + y_2 & 0 & -x_3 & y_3 & 0 & x_2 & -y_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[B_{m2}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_6 + y_5 & 0 & 0 & y_6 & 0 & 0 & -y_5 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 - x_5 & 0 & 0 & -x_6 & 0 & 0 & x_5 & 0 \\ x_6 - x_5 & -y_6 + y_5 & 0 & -x_6 & y_6 & 0 & x_5 & -y_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.2.3. Déformation de flexion

$$\{\chi\} = [B_f]\{u_n\} \quad (4.9)$$

Avec :

$$[B_f] = [[B_{f1}], [B_{f2}]] \quad (4.10)$$

Les matrices B_{f1} et B_{f2} représentent l'opérateur de déformation de flexion qui relie le déplacement à la déformation pour les deux faces triangulaires supérieure et inférieure du prisme respectivement, et qui sont définies suivant la formulation de l'élément triangulaire DKT (voir figure 4.2).

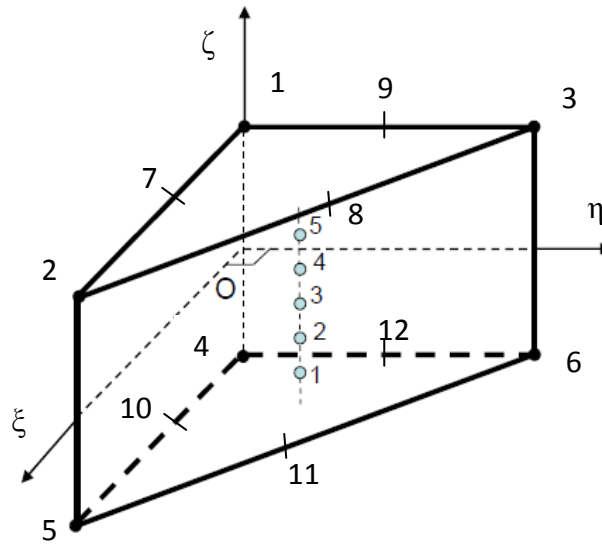


Figure 4.2. Élément SB6–18 : les nœuds d'interpolations pour les deux faces supérieure et inférieure du prisme

Face supérieure :

$$[B_{f1}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes de la flexion sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^x \rangle \quad (4.12)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^y \rangle \quad (4.13)$$

N_{11}^x N_{21}^x N_{31}^x et N_{11}^y N_{21}^y N_{31}^y sont donnés par :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (4.14)$$

Les indices k et m sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet i point commun (voir tableau 4.1), les fonctions P_k et P_m sont définies par le tableau 4.2.

Tableau 4.1. Indices k et m

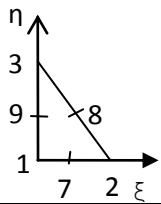
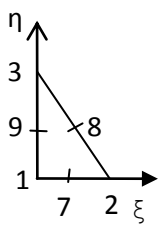
	Nœud sommet i	Côté k (i-j)	Côté m (i-j)
	1	7 (1-2)	9 (3-1)
	2	8 (2-3)	7 (1-2)
	3	9 (3-1)	8 (2-3)

Tableau 4.2. Valeurs de P_k et P_m

	P _k
	(k= 7 à 9)
	P7=4 ξ λ
	P8=4 ξ η
	P9= 4 λ η

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k}, \quad S_k = \frac{y_{ij}}{L_k}, \quad L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

Face inférieure :

$$[B_{f2}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_6 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_6 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes de la flexion sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{51}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{61}^x \rangle \quad (4.17)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{51}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{61}^y \rangle \quad (4.18)$$

$N_{41}^x N_{51}^x N_{61}^x$ et $N_{41}^y N_{51}^y N_{61}^y$ sont donnés par :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (4.19)$$

Les indices k et m sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet i point commun (voir tableau 4.3), les fonctions P_k et P_m sont définies par le tableau 4.4.

Tableau 4.3. Indices k et m

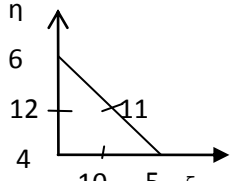
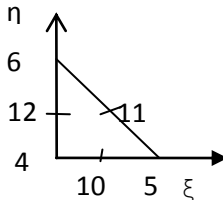
	Nœud sommet i	Côté k (i-j)	Côté m (i-j)
	4	10 (4-5)	12 (6-4)
	5	11 (5-6)	10 (4-5)
	6	12 (6-4)	11 (5-6)

Tableau 4.4. Valeurs de P_k et P_m

	P_k
	(k= 10 à 12)
	$P_{10}=4 \xi \lambda$
	$P_{11}=4 \xi \eta$
	$P_{12}= 4 \lambda \eta$

C_k , S_k et L_k sont donnés par la relation (4.15).

Les détails du calcul de la matrice B_f sont exposés dans l'Annexe B.

4.2.4. Forme discrétisée de W_{int}^e

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [K] \{u_n\} \quad (4.20)$$

La matrice de rigidité élémentaire est:

$$[K] = [K_m] + [K_f] \quad (4.21)$$

Les rigidités de membrane et de flexion sont obtenues par intégration numérique en utilisant 5 points d'intégration qui se trouvent sur la même droite suivant l'épaisseur.

Leurs coordonnées (ξ, η, ζ) et leurs poids d'intégration sont les racines du polynôme de Gauss-Legendre données dans le tableau 4.5 :

Pour la membrane :

$$[K_m] = \int_V [B_m]^T [H_m] [B_m] dV \quad (4.22)$$

$$[K_m] = \int_{V_{réf}} ([B_m]^T [H_m] [B_m]) detJ d\xi d\eta d\zeta \quad (4.23)$$

$$[K_m] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_i \omega_j \omega_k ([B_m]^T [H_m] [B_m] detJ) \quad (4.24)$$

Pour la flexion :

$$[K_f] = \int_V [B_f]^T [H_f] [B_f] dV \quad (4.25)$$

$$[K_f] = \int_{V_{réf}} ([B_f]^T [H_f] [B_f]) detJ d\xi d\eta d\zeta \quad (4.26)$$

$$[K_f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_i \omega_j \omega_k ([B_f]^T [H_f] [B_f] detJ) \quad (4.27)$$

$V_{réf}$: volume de l'élément de référence.

m : représente le nombre de points d'intégration (PI) dans les directions ξ, η, ζ .

Tableau 4.5. Intégration numérique (5 points de Gauss-Legendre)

PI	ξ	η	ζ	$\omega(\xi, \eta, \zeta)$
1	1/3	1/3	-0.906179845938664	0.236926885056189
2	1/3	1/3	-0.538469310105683	0.478628670499366
3	1/3	1/3	0	0.568888888888889
4	1/3	1/3	0.538469310105683	0.478628670499366
5	1/3	1/3	0.906179845938664	0.236926885056189

Avec H_m et H_f : matrice de comportement homogénéisé de membrane et de flexion.

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$[H_m] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson.

Les efforts résultants (effort normal et moment de flexion):

$$[N] = [H_m]\{e\} \quad , \quad [M] = [H_f]\{\chi\} \quad (4.30)$$

Suite aux nombreux tests numériques effectués, les matrices k_m et k_f ont été multipliées par les coefficients : $c_1 = 1.15\sqrt{h}$ et $c_2 = 0.60808h\sqrt{h/12}$ respectivement, le rôle de ces deux coefficients est d'améliorer l'approximation de déplacement en membrane et en flexion. Cette technique a été utilisée par Wang [WAN17], Trinh [TRI09], et Flanagan et Belytschko [FLA81].

4.2.5. Matrice de masse

La matrice de masse a la forme classique suivante :

$$m = \int_V [N_q]^T \rho [N_q] dV = \int_{V_{réf}^e} [N_q]^T \rho [N_q] detJ dV_r \quad (4.31)$$

Où ρ est la masse volumique du matériau

N_q : les fonctions de forme de l'élément SB6-18

$$N_q = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

En substituant la relation précédente dans l'équation (4.31), on obtient la matrice de masse de dimensions (18 x 18):

$$m = \int_{V_{réf}^e} \rho \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \cdots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \cdots & N_6 N_6 \end{bmatrix} & [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \cdots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \cdots & N_6 N_6 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \cdots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \cdots & N_6 N_6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} detJ dV_r$$

Pour déterminer la matrice de masse de l'élément SB6–18 on utilise un schéma d'intégration de 1×2 points de Gauss-Hammer (tableau 4.6).

$$m = \sum_{i=1}^{NPI} \omega_i ([N_q]^T \rho [N_q] detJ) \quad (4.32)$$

Tableau 4.6. Intégration numérique (1×2 points de Gauss-Hammer)

PI	Ξ	η	ζ	$\omega(\xi, \eta, \zeta)$
1	1/3	1/3	0.577350269189625	0.5
2	1/3	1/3	-0.577350269189625	0.5

4.2.6. Expression de W^e dans le repère global

Les déplacements dans le repère global U, V, W sont reliés aux quantités locales par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q_1]^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

$$[Q_1]^T = \begin{Bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Les composantes de $[Q_1]^T$ relatives au triangle de la face supérieure du prisme sont données explicitement par les équations (3.7), (3.9) et (3.10). Les composantes de $[Q_2]^T$ relatives au triangle de la face inférieure sont obtenues par les mêmes relations qui définissent $[Q_1]^T$ en remplaçant les nœuds 1, 2, 3 par les nœuds 4, 5, 6.

Soit $\langle u_n \rangle_{glob}$, les variables nodales de l'élément dans le repère global :

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle \dots : U_i \quad V_i \quad W_i : i = \text{varie de 1 à 6} \dots \rangle \quad (4.35)$$

Nous avons donc :

$$\{u_n\} = [T]\{u_n\}_{glob} \quad (4.36)$$

Avec :

$$[T]_{(18 \times 18)} = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] \\ [0] & [T_2] \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$[T_1]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q_1]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q_1]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q_1]^T \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$[T_2]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q_2]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q_2]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q_2]^T \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

La matrice de rigidité et la matrice de masse dans le repère global :

$$[K]_{glob} = [T]^T [K] [T] \quad (4.40)$$

$$[m]_{glob} = [T]^T [m] [T] \quad (4.41)$$

4.3. Validation de l'élément SB6–18

Pour tester la performance et l'efficacité de l'élément SB6–18, des exemples d'applications en comportement linéaires sont effectués. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence, et d'autre part, à la solution donnée par des éléments finis existants dans la littérature.

4.3.1. Cylindre pincé à bord libre

Nous reprenons les mêmes données du test 3.4.2. Ce cas test permet d'évaluer les bonnes propriétés de convergence et la représentation du mode de corps rigide. Les résultats obtenus de déplacement vertical W au point C pour les deux cas de chargements et d'épaisseurs, sont reportés sur les tableaux 4.7 et 4.8.

Tableau 4.7. Valeur de W_C 1^{er} cas : $F1=100$; $h1=0,094$

Maillage	[CAN68]	Maillage	ACM_SBQ4 [BEL00]	Maillage	ACM_RSBE5 [HAM16]	Maillage	SB6–18
1 x 1	–	1 x 1	0.0860	1 x 1	0.0876	2 x 3	0,0174
1 x 3	0.0297	1 x 3	0.1041	1 x 3	0.1060	2 x 5	0,0191
1 x 4	–	1 x 4	–	1 x 4	0.1100	2 x 6	0,0235
1 x 5	0.0769	1 x 5	0.1090	1 x 5	0.1116	2 x 7	0,0310
1 x 7	0.0987	1 x 7	0.1102	1 x 7	0.1129	2 x 9	0,0589
1 x 8	–	1 x 8	–	1 x 8	0.1132	2 x 10	0,0813
1 x 9	0.1057	1 x 9	0.1115	1 x 9	0.1134	2 x 11	0,1106
Solution de référence ([MAC85])				0,1139			

Tableau 4.8. Valeur de W_C 2^{ème} cas : $F2=0,1$; $h2=0,01548$

Maillage	[CAN68]	Maillage	ACM_SBQ4 [BEL00]	Maillage	ACM_RSBE5 [HAM16]	Maillage	SB6–18
1 x 1	0.00001	1 x 1	0.01922	1 x 1	0.0196	1 x 1	–
1 x 3	0.00001	1 x 3	0.02302	1 x 3	0.02343	1 x 3	0,00156
1 x 4	0.00074	1 x 4	–	1 x 4	–	1 x 4	–
2 x 4	0.00070	1 x 5	0.02387	1 x 5	–	1 x 5	0,00357
3 x 4	0.00068	1 x 7	0.02418	1 x 7	–	1 x 7	0,00984
4 x 4	–	1 x 9	–	1 x 9	–	1 x 9	0,02355
Solution de référence ([MAC85])				0.02439			

Les résultats obtenus par l'élément SB6–18 pour ce cas test sont en bon accord avec la solution de référence de Macneal et Harder [MAC85], et avec ceux obtenus par les modèles d'éléments finis de Hamadi et al [HAM16], Belarbi [BEL00], Cantin et Clough [CAN68].

4.3.2. Poutre console de Macneal

Une poutre console est encadrée à une extrémité et chargée à l'autre extrémité libre comme le montre la figure 4.3, les valeurs de la charge, le module de young, le coefficient de poisson et l'épaisseur sont mentionnées sur la même figure, Ce cas test est un problème standard pour tester la fiabilité des éléments finis (Macneal et Harder [MAC85]).

On considère deux cas de chargement : un effort de cisaillement $P = 1$ et un moment de flexion $M = 10$.

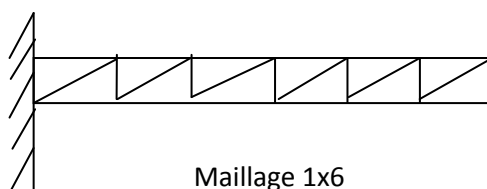
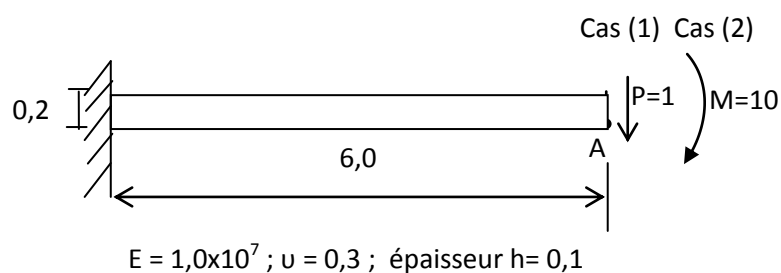


Figure 4.3. Poutre console sollicitée à son extrémité par:
(1) un effort de cisaillement (2) moment de flexion

Dans les figures 4.4 et 4.5 on a présenté les résultats obtenus de la flèche au point A, ces valeurs sont calculées par l'utilisation de différents types de maillage par l'élément SB6-18, la comparaison se fait avec la solution de référence donnée par Macneal et Harder [MAC85], ainsi que d'autres éléments finis :

L'élément isoparamétrique à quatre nœuds Q4.

L'élément SBRIE2 proposé par Sabir et Sfeidji [SAB 95]).

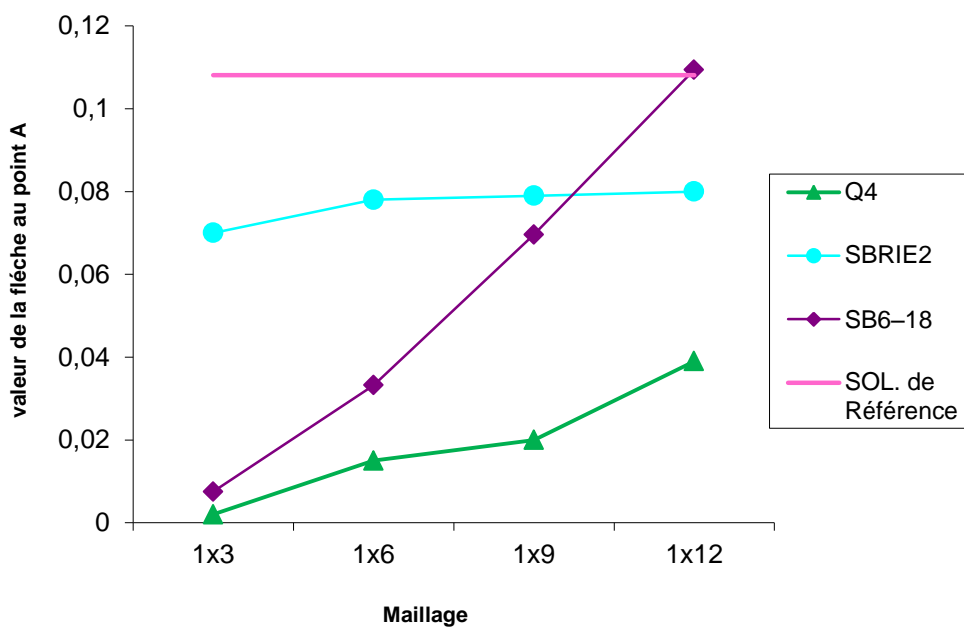


Figure 4.4. Courbe de convergence de déplacement au point A : cas (1)

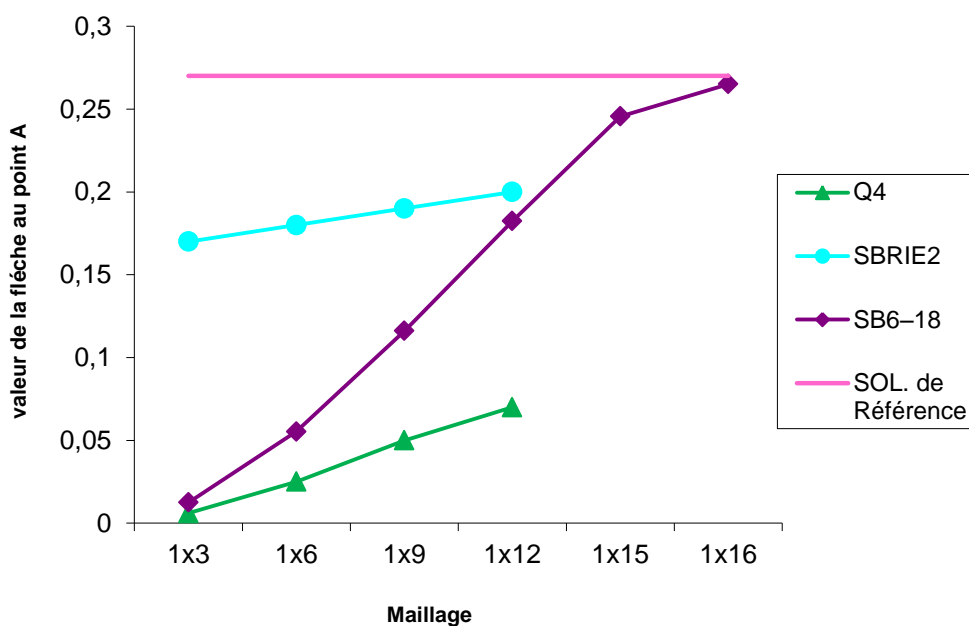
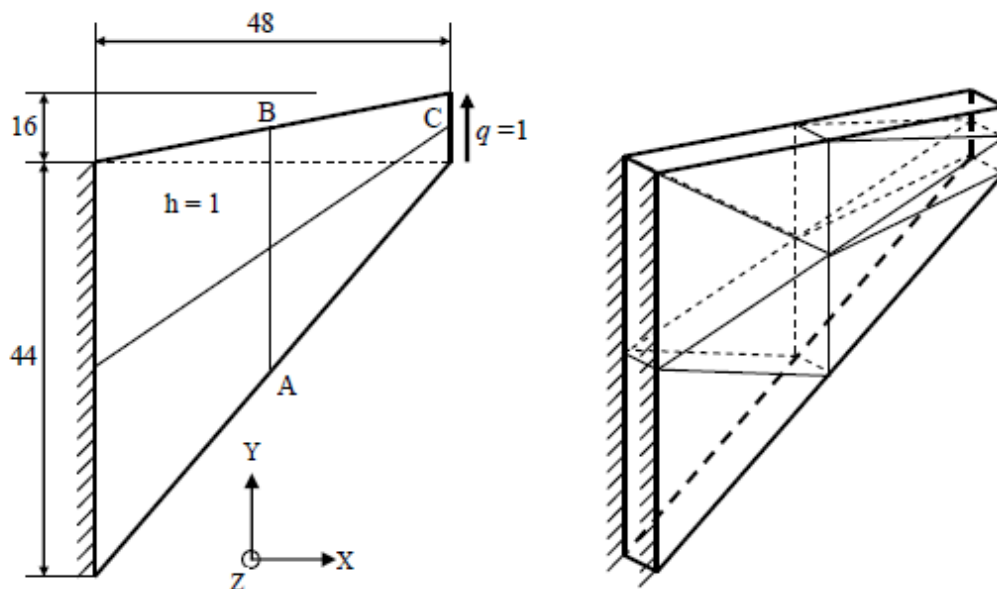


Figure 4.5. Courbe de convergence de déplacement au point A : cas (2)

Les courbes des figures 4.4 et 4.5 représentent les déplacements du point A du problème sous forme graphique. Nous remarquons que l'élément SB6-18 converge vers la solution de référence mieux que les éléments Q4 et SBRIE2.

4.3.3. Panneau fuselé

Le panneau fuselé proposé par Cook et al. [COO87] et Bergan et Felippa. [BER85] (voir figure 4.6), est fixé sur le bord gauche et soumis à un chargement de cisaillement distribué uniformément le long du bord droit. Il s'agit de calculer le déplacement vertical au point C. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en maillage distordu et aussi dans les problèmes de cisaillement-dominant. Deux maillages ont été particulièrement étudiés (un des cas de ces maillages est illustré dans la figure 4.6). Les résultats obtenus avec l'élément SB6-18, présentés dans le tableau 4.9, sont comparés avec la solution de référence de Bergan et Felippa [BER85] pour un maillage 32×32 , et les résultats obtenus avec l'élément membranaire CST et l'élément volumique W6 ainsi que l'élément proposé par Bergan et Felippa. [BER85].



$$E = 1 \quad ; \quad \nu = 1/3 \quad ; \quad h = 1$$

Conditions aux limites : $U = V = 0$ (à l'encastrement).

Figure 4.6. Panneau fuselé soumis à un effort de cisaillement ; maillage $(2 \times 2 \times 1) \times 2$

Tableau 4.9. Valeur de déplacement vertical normalisé au point C

Eléments	Valeur de V_c	
	Maillage (2x2)	Maillage (4x4)
Q4	0,49	0,76
[BER 85]	0,85	0,93
W6	0,49	0,75
CST	0,49	0,75
SB6-18	0,54	1,02
Référence [BER 85] maillage (32x32) ; $V_c = 23,90$	1,00	1,00

Les résultats du déplacement vertical normalisé au point C, présentés dans le tableau 4.9, montrent que la performance de notre élément est très satisfaisante comparée avec l'élément prismatique standard W6, et aussi par rapport aux éléments membranaire Q4 et CST, ainsi que l'élément développé par Bergan et Felippa. [BER85].

4.3.4. Plaque carrée soumise à une charge uniformément répartie

Une plaque carrée isotrope a été étudiée par Rocky et al. [ROC79], la plaque est encadrée le long de ses quatre bords et soumise à une charge uniformément répartie q , on a modélisé la plaque par différents types de maillage pour déterminer le déplacement vertical au point A et le moment de flexion M_x au point A et B.

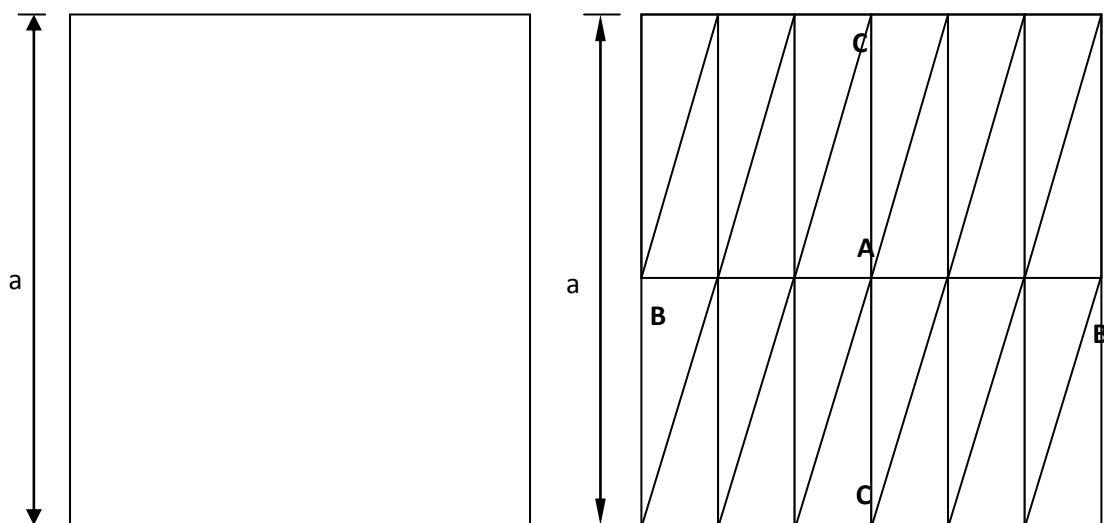
**Figure 4.7.** Plaque carrée soumise à une charge répartie (maillage 24 éléments)

Tableau 4.10. Déplacement W au point A; moment de flexion M_x au point A et B

[ROC79]				SB6-18			
maillage	w	M_{xA}	M_{xB}	maillage	w	M_{xA}	M_{xB}
4	0,00148	0,0462	-0,0355	24	0,00140	0,7154	0,4697
8	0,00144	0,0363	-0,0418	32	0,00135	0,5642	0,2836
16	0,00140	0,0278	-0,0426	48	0,00131	0,3892	0,1351
64	0,00130	0,0240	-0,0503	64	0,00129	0,2954	0,0787
				80	-	-	0,0514
				816	-	0,0235	-
Solution exacte	0,00126	0,0231	-0,0513	Solution Exacte	0,00126	0,0231	-0,0513
Coeff. multiplicateur	qa^4/D	qa^2	qa^2	Coeff. multiplicateur	qa^4/D	qa^2	qa^2

Avec : $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$

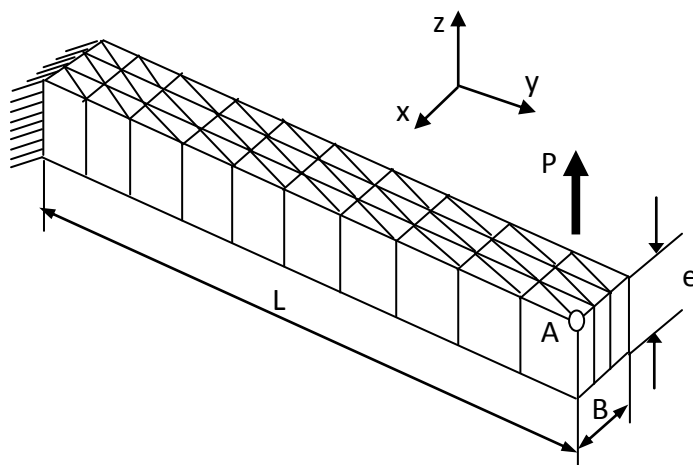
Les valeurs du déplacement vertical W obtenues par l'élément SB6-18 (tableau 4.10) sont meilleures que celles trouvées par [ROC79], et cela pour un maillage de 64 éléments. Le moment de flexion au point B est obtenu avec une très bonne précision pour un maillage de 80 éléments, tandis que le moment au point A, nécessite un nombre d'éléments plus élevé. Ceci, confirme encore une fois, les bonnes performances de l'élément SB6-18.

4.3.5. Poutre en flexion avec divers élancements

Ce test proposé par Trinh [TRI09], représente un calcul quasi-statique d'une poutre en flexion, encadrée à une extrémité et sollicitée par une force verticale à l'autre extrémité. Ce test permet de valider un calcul élastique linéaire et pour cinq valeurs d'élancement (longueurs variables).

Les déplacements obtenus sont comparés à la solution analytique élastique d'une poutre en flexion. Ce test permet également de montrer les limites de l'élément SB6-18 en termes d'élancement.

À l'extrémité droite, la poutre est soumise à un effort tranchant $P = 1000 \text{ N}$ dans la direction verticale Oz . Ce chargement est réparti de façon adéquate aux nœuds de l'extrémité droite. On simule un encastrement parfait à l'extrémité gauche de la poutre. Les données de géométrie, matériau et de chargement du problème sont exposées dans la figure 4.8.



Largeur	$B=300 \text{ mm}$
Epaisseur	$e=400 \text{ mm}$
Module de Young	$E=2 \times 10^5 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu=0,3$
Chargement	$P=1000 \text{ N}$

Figure 4.8. Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre en flexion simple avec divers élancements; maillage $(10 \times 3 \times 1) \times 2$

Le déplacement de référence du point A suivant la direction Oz est déterminé par la formule suivante :

$$w = \frac{PL^3}{3EI} \text{ où } I = \frac{Be^3}{12}$$

Les résultats de calcul du déplacement du point A suivant la direction Oz sont donnés dans le tableau 4.11.

Tableau 4.11. Valeur de déplacement vertical normalisé au point A

Longueur L(mm)	Maillages	Solution-Référence W_{ref} (mm)	SB6-18 W (mm)	$\frac{W}{W_{\text{ref}}}$
2000	(10x3x1)x2	$8,30 \times 10^{-3}$	$8,28 \times 10^{-3}$	1,00
2100	(10x3x1)x2	$9,60 \times 10^{-3}$	$9,40 \times 10^{-3}$	0,98
2200	(10x3x1)x2	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,06 \times 10^{-2}$	0,95
2300	(10x3x1)x2	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,20 \times 10^{-2}$	0,94
2400	(10x3x1)x2	$1,44 \times 10^{-2}$	$1,34 \times 10^{-2}$	0,93

Nous trouvons que l'élément SB6-18 possède une très bonne convergence vers la solution de référence, les résultats de déplacement vertical au point A pour les différentes valeurs de longueur de la poutre sont en bon accord avec le déplacement de référence.

4.3.6. Poutre soumise à une charge uniformément répartie

Considérons la poutre étudiée par Rocky et al. [ROC79], cette poutre est chargée uniformément et repose sur deux appuis simples à ses extrémités (voir figure 4.9), pour cet exemple on peut obtenir une solution exacte en utilisant la théorie de l'élasticité. La condition d'appui simple est obtenue en annulant les déplacements verticaux de tous les nœuds des extrémités de la poutre. Trois types de maillages (un des cas de ces maillages est illustré dans la figure 4.10), en utilisant l'élément SB6-18, ont été effectués pour étudier cette poutre (96, 150 et 600 éléments respectivement).

La figure 4.11 montre la déformation de la poutre en utilisant la simple théorie de la flexion qui néglige les déformations de cisaillement, puis en utilisant la théorie de l'élasticité, on a donné aussi les résultats obtenus par l'élément SB6-18.

La figure 4.12 montre les courbes correspondantes pour la variation des contraintes transversales.

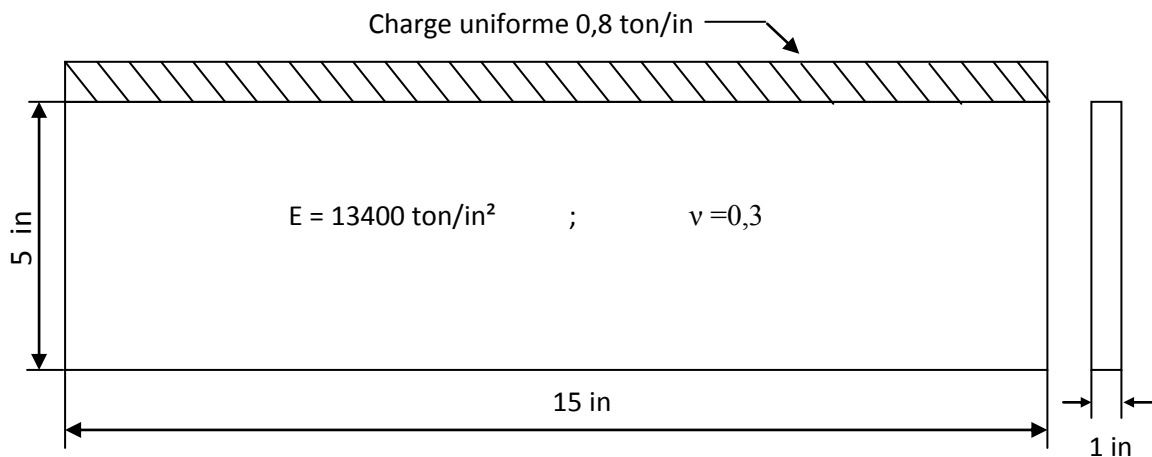


Figure 4.9. Poutre soumise à une charge uniformément répartie

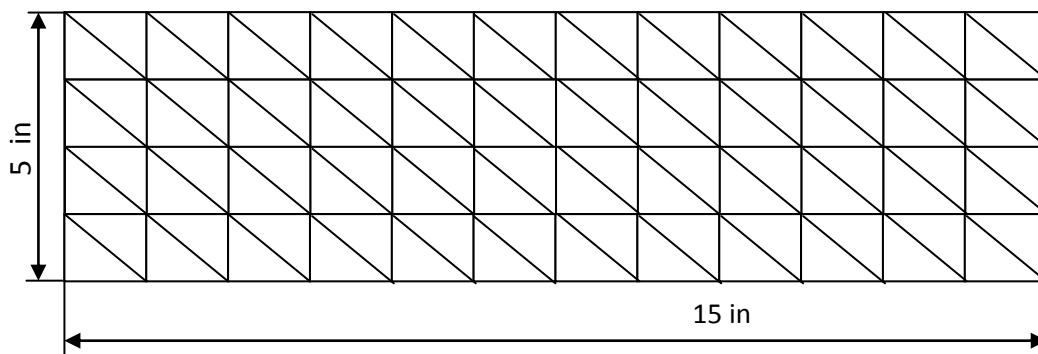


Figure 4.10. Maillage $(12 \times 4 \times 1) \times 2 = 96$ éléments

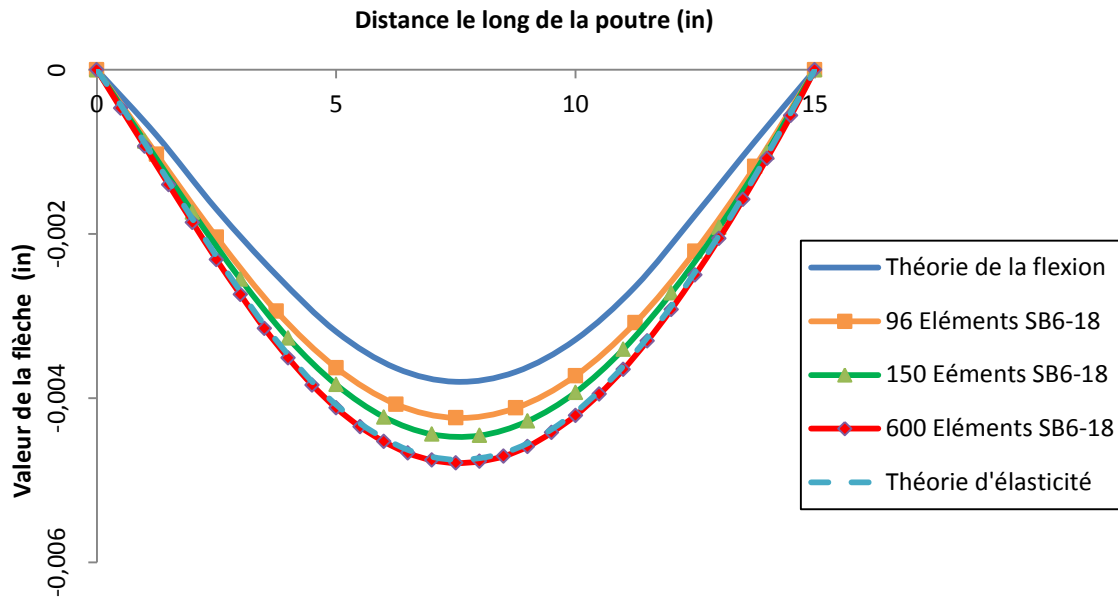


Figure 4.11. Flèche d’une poutre sur appui simple uniformément chargée

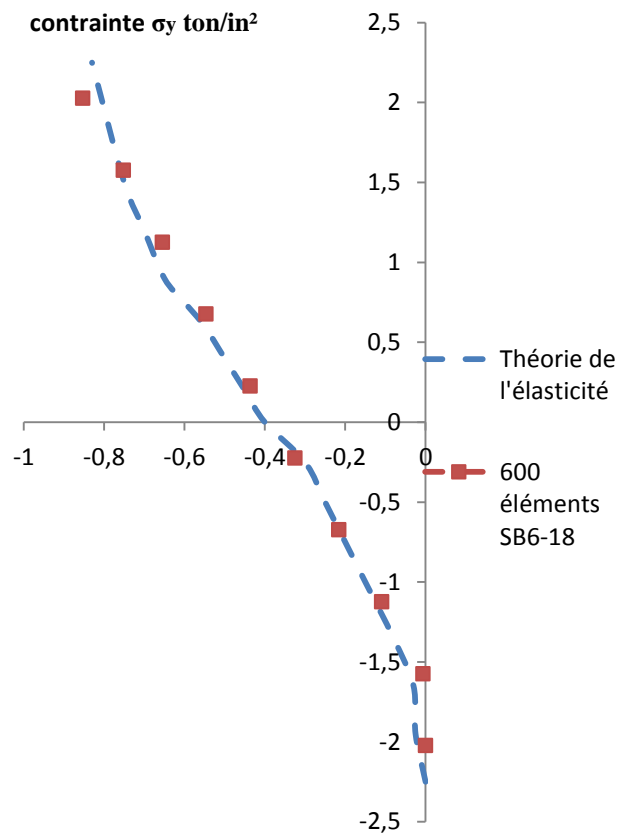
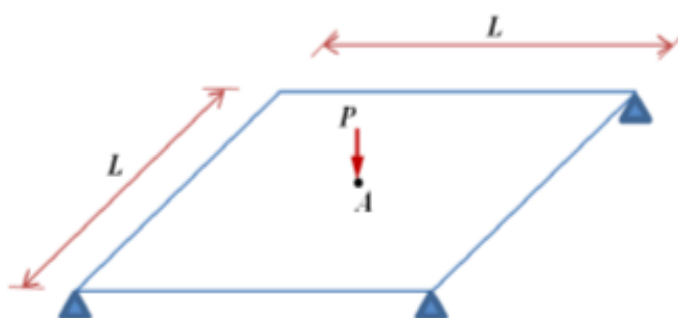


Figure 4.12. Distribution des contraintes transversales

Les deux graphes ci-dessus montrent que notre élément SB6–18 est en excellent accord avec la solution donnée par la théorie de l’élasticité pour les valeurs de la flèche ainsi que les contraintes transversales et cela pour un maillage de 600 éléments.

4.3.7. Plaque carrée soumise à une charge concentrée

On considère dans cet exemple une plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge concentrée $P = 10 \text{ KN}$ (voir figure 4.13), ce cas test a été étudié par Argyris et al. [ARG02], cette plaque a été modélisée par l'élément SB6-18, en utilisant différents maillages, les valeurs de déplacement au centre de la plaque (point A), sont présentées dans le tableau 4.12, ces résultats sont comparés avec les valeurs trouvées par l'élément DKMQ proposé par Katili [KAT93], la solution de référence est donnée par un maillage de (48x48).



$$L = 10 \text{ m} ; \text{ épaisseur } h = 0,1 \text{ m} ; E = 10,92 \times 10^5 \text{ KN/m}^2 ; \nu = 0,3$$

Figure 4.13. Plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge concentrée (la géométrie et les données)

Tableau 4.12. Déplacement W au point A

Eléments	Maillage (6x6)	Maillage (12x12)	Maillage (20x20)	Maillage (22x22)	Maillage (24x24)
SB6-18	3,5134	1,1187	0,4677	0,3966	-
DKMQ	0,3705	0,3859	-	-	0,3900
Solution.Référence Maillage (48x48)			0,3910		

Le tableau 4.12 nous permet de constater que les résultats trouvés par l'élément SB6-18 sont en bon accord avec la solution de référence et ceux trouvés par l'élément DKMQ proposé par Katili [KAT93].

4.3.8. Vibrations libres d'une plaque encadrée

Pour tester la capacité de l'élément SB6-18 pour pouvoir effectuer l'analyse dynamique des structures, on prend le cas test d'une plaque carrée encadrée proposée par Batoz et Dhatt [BAT90] (voir figure 4.14), un quart de la plaque est maillé par l'élément SB6-18 avec 2, 8, 32, 128 éléments, les valeurs de coefficient de fréquence propre, relatif au premier mode de vibration calculées pour chaque maillage, sont présentées dans le tableau 4.13. La valeur théorique de référence :

$$\omega^2 = 1295D/\rho Lh^4$$

La courbe de la figure 4.15 permet de faire une comparaison entre les résultats trouvés par l'élément SB6-18, et ceux obtenus par le modèle élément fini HSM (hybrid stress model), et l'élément DKT présentés dans [BAT90].

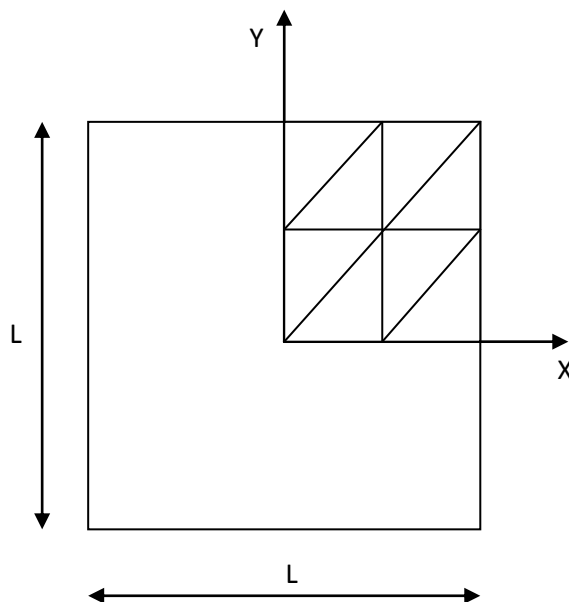


Figure 4.14. Vibrations libres d'une plaque encadrée (maillage 8 éléments)

Tableau 4.13. Coefficient de fréquence propre (premier mode de vibration)

	2 Eléments	8 Eléments	32 Eléments	128 Eléments
$\omega^2 / \left(\frac{D}{\rho L h^4} \right)$	298,3	1165,9	1208,5	1293,1
L'erreur en (%)	-76,9	-9,97	-6,68	-0,15

Avec : $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$

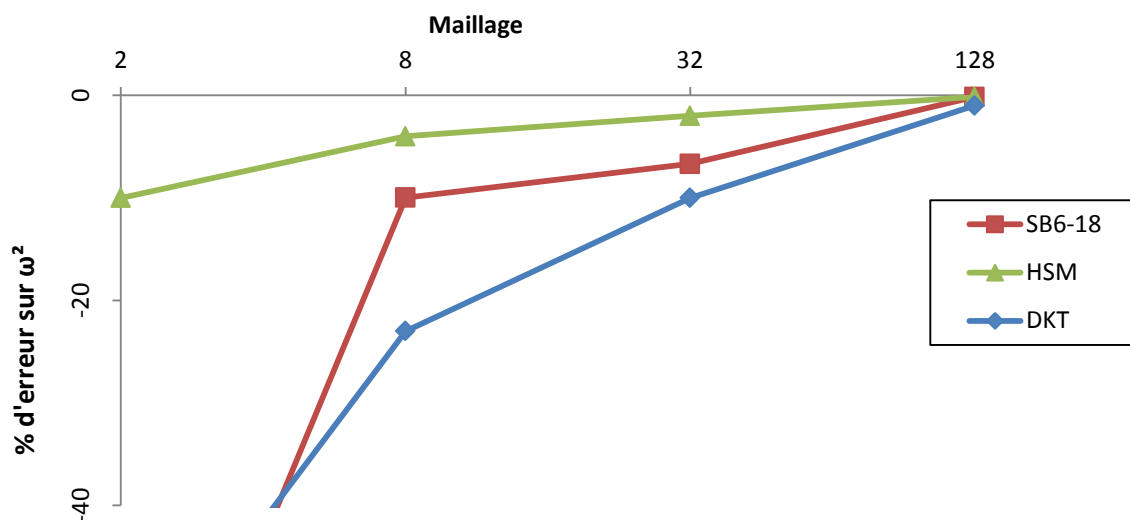


Figure 4.15. Erreur sur ω^2 (premier mode)

On remarque que les trois modèles permettent d'obtenir une convergence rapide vers la valeur de référence, de plus on peut noter que l'élément SB6-18 se comporte mieux que l'élément DKT pour les maillages 8 et 32 éléments et présente aussi des valeurs proches de celles trouvées par l'élément HSM.

4.4. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la formulation de l'élément fini de type solide-coque SB6-18. L'élément développé est un élément fini de géométrie prismatique à six nœuds basé sur l'approche DKT. Les comportements de membrane et de flexion sont définis au niveau des faces inférieure et supérieure de l'élément prismatique.

Les applications étudiées dans ce chapitre permettent de mettre en évidence la performance de l'élément fini SB6-18. Les cas tests choisis dans cette section ont montré les bonnes propriétés de convergence de l'élément SB6-18 pour le calcul des déplacements, les contraintes ainsi que les moments. Le dernier exemple nous a permis de tester la capacité de l'élément SB6-18 à étudier les structures en vibration libre, et les résultats pour ce cas test ont été très satisfaisants.

Chapitre 5

Elément finis SB6–18 en non linéaire

Sommaire

5.1. Introduction	92
5.2. Formulation de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique	92
5.2.1. Principe incrémental de la description lagrangienne totale	93
5.2.2. Matrice linéaire incrémentale des déplacements	94
5.2.3. Matrice tangente	96
5.3. Méthode de résolution	97
5.4. Validation de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique	99
5.4.1. Panneau cylindrique soumis à une force ponctuelle	99
5.4.2. Coque sphérique sous une charge concentrée	101
5.5. Conclusion	102

5.1. Introduction

En pratique si les ouvrages possèdent une géométrie complexe et/ou des charges importantes, cela va provoquer des grands déplacements ce qui nécessite alors de tenir en compte l'analyse non linéaire géométrique. Dans ce chapitre nous allons présenter une version non linéaire de l'élément SB6–18, qui sera basé sur une formulation similaire à celle présentée par Mouronval [MOU04] pour l'élément de type facette plane DKT18.

Nous commençons par la formulation de cet élément en non linéaire géométrique, on doit faire donc le choix d'une description lagrangienne totale ou actualisée, dans notre cas on va utiliser une description lagrangienne totale, ensuite on donne la matrice linéaire incrémentale des déplacements qui ne sera pas différente de celle présentée dans le chapitre 4 dans le cas linéaire, le développement de la matrice tangente constitue l'étape la plus importante dans la formulation non linéaire.

Nous aborderons également les étapes principales à suivre pour la résolution des problèmes non linéaire, l'analyse numérique nous offre plusieurs méthodes de résolution, parmi celle-ci on trouve la méthode classique de Newton-Raphson.

Dans la dernière partie de ce chapitre nous allons réaliser deux cas tests de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique.

5.2. Formulation de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique

Nous avons vu au chapitre 1 que l'équilibre global du solide dans la configuration actuelle C_t peut être exprimé par le principe des travaux virtuels sous la forme standard (équation (1.23)):

$$W = W_{int} - W_{ext} = \int_{V_t} \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV_t - \int_{S_{ft}} \vec{u}^* \vec{f}_s dS_t - \int_{V_t} \vec{u}^* \vec{f}_v dV_t = 0$$

Le principe des travaux virtuels s'exprime avec des contraintes, des déformations, des volumes et des surfaces se rapportant à la configuration C_t , qui est inconnue a priori. On doit donc se ramener à des configurations connues, plusieurs types de configurations lagrangiennes peuvent être utilisées pour l'analyse non-linéaire (figure 5.1):

La Formulation Lagrangienne Totale (FLT)

La Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas (FLAP)

La Formulation Lagrangienne Actualisée a chaque Itération (FLAI)

Pour notre élément on adopte une formulation lagrangienne Totale FLT, qui prend comme configuration de référence, la configuration initiale C_0 .

Remarque : les termes déjà définis dans les chapitres précédents ne seront pas exposés ici.

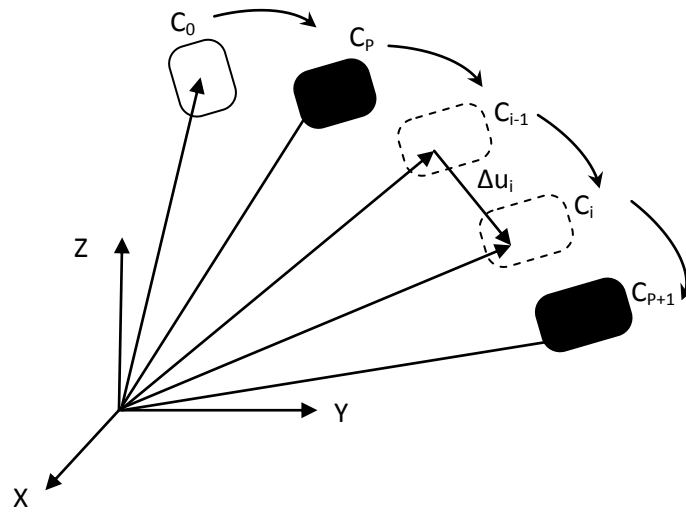


Figure 5.1. Configurations initiale C_0 , du pas p C_p et à l'itération i C_i [MOU04]

5.2.1 Principe incrémental de la description lagrangienne totale

La forme variationnelle exprimée dans la configuration C_0 s'écrit :

$$W = \int_{V_0} Tr([E_{gl}^*] [S]) dV_0 - \int_{S_0} \vec{u}^* \vec{f}_{S_0} dS_0 - \int_{V_0} \vec{u}^* \vec{f}_{v_0} dV_0 \quad (5.1)$$

Avec : E_{gl}^* est la première variation du tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$[E_{gl}^*] = \frac{1}{2} ([F^*]^T [F] + [F]^T [F^*])$$

S est le tenseur de Piola-Kirchhoff de second espèce transporté dans la configuration C_0 et relié au tenseur des contraintes de Cauchy $[\sigma]$ dans la configuration actuelle C_i suivante :

$$[\sigma] = \frac{1}{|F|} [F][S][F]^T \quad ; \quad |F| = det[F]$$

La forme incrémentale du PTV s'écrit :

$$\Delta W = \Delta W_{int} = \int_{V_0} Tr([\Delta E_{gl}^*] [S]) + Tr([E_{gl}^*] [\Delta S]) dV_0 \quad (5.2)$$

Discrétisation de la forme incrémentale du PTV

$$\Delta W^e = \Delta W_{int}^e = \int_{V_0^e} Tr([\Delta E_{gl}^*] [S]) dV_0 + \int_{V_0^e} Tr([E_{gl}^*] [\Delta S]) dV_0 \quad (5.3)$$

5.2.2 Matrice linéaire incrémentale des déplacements

La forme élémentaire de W_{int} se décompose en membrane et flexion suivant :

$$W_{int}^e = W_{int}^m + W_{int}^f \quad (5.4)$$

Partie membrane :

Les déformations de membrane, nécessaire au calcul des efforts normaux :

$$\{e\}_{(3 \times 1)} = \begin{Bmatrix} 1/2 (\langle a \rangle \{a\} - 1) \\ 1/2 (\langle c \rangle \{c\} - 1) \\ \langle a \rangle \{c\} \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Avec :

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 + u_{,x0} \\ v_{,x0} \\ w_{,x0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{,x}^u \\ N_{,x}^v \\ N_{,x}^w \end{bmatrix} \{u_n\} + \{e_x\} = [B_{ma}] \{u_n\} + \{e_x\}$$

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} u_{,y0} \\ 1 + v_{,y0} \\ w_{,y0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{,y}^u \\ N_{,y}^v \\ N_{,y}^w \end{bmatrix} \{u_n\} + \{e_y\} = [B_{mc}] \{u_n\} + \{e_y\}$$

Où $\langle e_x \rangle = \langle 1 \ 0 \ 0 \rangle$ et $\langle e_y \rangle = \langle 0 \ 1 \ 0 \rangle$

Les matrices déformation-déplacement pour les deux faces supérieures et inférieures sont exprimées en fonction des dérivées en ξ et η :

$$[B_{ma1}]_{(3 \times 9)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^u \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ y_3 \langle N_{,\xi}^v \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ y_3 \langle N_{,\xi}^w \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix}; [B_{ma2}]_{(3 \times 9)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_6 \langle N_{,\xi}^u \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ y_6 \langle N_{,\xi}^v \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ y_6 \langle N_{,\xi}^w \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$[B_{mc1}]_{(3 \times 9)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} -x_3 \langle N_{,\xi}^u \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^v \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^w \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix}; [B_{mc2}]_{(3 \times 9)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} -x_6 \langle N_{,\xi}^u \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^v \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^w \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

avec $[B_{ma}]_{(3 \times 18)} = [[B_{ma1}][B_{ma2}]]$ et $[B_{mc}]_{(3 \times 18)} = [[B_{mc1}][B_{mc2}]]$

Le détail de calcul des matrices B_{ma} et B_{mc} sera exposé dans l'annexe C.

Une fois $\{e\}$ calculé, les efforts généralisés de membrane se déduisent de (4.30), d'autre part les déformations de membrane virtuelles $\{e^*\}$:

$$\{e^*\}_{(3 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \langle a \rangle \{a^*\} \\ \langle c \rangle \{c^*\} \\ \langle c \rangle \{a^*\} + \langle a \rangle \{c^*\} \end{Bmatrix}$$

$$\{a^*\} = \begin{Bmatrix} u_{,x0}^* \\ v_{,x0}^* \\ w_{,x0}^* \end{Bmatrix} = [B_{ma}] \{u_n^*\} \quad ; \quad \{c^*\} = \begin{Bmatrix} u_{,y0}^* \\ v_{,y0}^* \\ w_{,y0}^* \end{Bmatrix} = [B_{mc}] \{u_n^*\}$$

Sont reliées aux variables nodales virtuelles selon :

$$\{e^*\} = \begin{bmatrix} \langle a \rangle [B_{ma}] \\ \langle c \rangle [B_{mc}] \\ \langle c \rangle [B_{ma}] + \langle a \rangle [B_{mc}] \end{bmatrix} \{u_n^*\} = [B_m]_{(3 \times 18)} \{u_n^*\} \quad (5.8)$$

Cette dernière relation implique :

$$W_{int}^m = \langle u_n^* \rangle \{f_{int}^m\} = \langle u_n^* \rangle \int_{V_e} [B_m]^T \{N\} dV = \int_{V_e} [B_m]^T [H] [B_m] dV$$

Donc la matrice de rigidité due à l'effet de membrane K_m :

$$K_m = \int_{V_e} [B_m]^T [H] [B_m] dV$$

Un schéma d'intégration numérique de 5 points de Gauss–Legendre est utilisé pour évaluer K_m et K_f (voir le tableau 4.5) :

$$K_m = \sum_{i=1}^5 \omega_i ([B_m]^T [H] [B_m] J)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \quad (5.9)$$

Pour la partie de flexion :

$$W_{int}^f = \langle u_n^* \rangle \{f_{int}^f\} = \langle u_n^* \rangle \int_{V_e} [B_f]^T \{M\} dV = \int_{V_e} [B_f]^T [H] [B_f] dV$$

$$K_f = \int_{V_e} [B_f]^T [H] [B_f] dV$$

$$K_f = \sum_{i=1}^5 \omega_i ([B_f]^T [H] [B_f] J)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \quad (5.10)$$

5.2.3 Matrice tangente

Cette matrice provient de la forme incrémentale (5.3) qui fait intervenir une matrice dite tangente K_T :

$$\Delta W^e = \langle u_n^* \rangle [\bar{K}_T] \{ \Delta u_n \} \quad (5.11)$$

La matrice tangente K_T peut être décomposée en matrices tangentes linéaire K_L et géométrique K_σ .

$$K_T = K_L + K_\sigma \quad \text{avec } K_L = K_L^m + K_L^f \quad \text{et } K_\sigma = K_\sigma^m + K_\sigma^f$$

L'incrément du terme relatif aux efforts internes s'écrit :

$$\Delta W_{int}^e = \Delta W_{int}^m + \Delta W_{int}^f$$

- La partie membrane :

$$\Delta W_{int}^m = \Delta W_{int}^{ml} + \Delta W_{int}^{mll}$$

$$\Delta W_{int}^m = \langle u_n^* \rangle [K_L^m] \{ \Delta u_n \} + \langle u_n^* \rangle [K_\sigma^m] \{ \Delta u_n \} \quad (5.12)$$

L'équation (5.9) nous donne la rigidité de membrane dans le cas linéaire :

$$[K_L^m] = K_m = \sum_{i=1}^5 \omega_i ([B_m]^T [H] [B_m] J)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i}$$

Pour évaluer la matrice géométrique, l'incrément des déformations virtuelle Δe^* s'exprime selon :

$$\begin{aligned} \{ \Delta e^* \} &= \left\{ \begin{array}{l} \langle \Delta a \rangle [B_{ma}] \{ u_n^* \} \\ \langle \Delta c \rangle [B_{mc}] \{ u_n^* \} \\ (\langle \Delta a \rangle [B_{mc}] + \langle \Delta c \rangle [B_{ma}]) \{ u_n^* \} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \langle \Delta u_n \rangle [B_{ma}]^T [B_{ma}] \{ u_n^* \} \\ \langle \Delta u_n \rangle [B_{mc}]^T [B_{mc}] \{ u_n^* \} \\ \langle \Delta u_n \rangle ([B_{ma}]^T [B_{mc}] + [B_{mc}]^T [B_{ma}]) \{ u_n^* \} \end{array} \right\} \quad (5.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta W_{int}^{mII} &= \langle u_n^* \rangle [K_\sigma^m] \{ \Delta u_n \} \\ &= \langle u_n^* \rangle \int_{V_e} [B_{ma}]^T [B_{ma}] N_x + [B_{mc}]^T [B_{mc}] N_y \\ &\quad + ([B_{ma}]^T [B_{mc}] + [B_{mc}]^T [B_{ma}]) N_{xy} dV \{ \Delta u_n \}\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}[K_\sigma^m]_{(18 \times 18)} &= \int_{V_e} [B_{ma}]^T [B_{ma}] N_x + [B_{mc}]^T [B_{mc}] N_y \\ &\quad + ([B_{ma}]^T [B_{mc}] + [B_{mc}]^T [B_{ma}]) N_{xy} dV\end{aligned}\quad (5.14)$$

Une intégration numérique à 5 points de Gauss–Legendre est utilisée pour déterminer k_σ . Les efforts normaux N_x , N_y et N_{xy} sont donnés par la relation (4.30).

- La partie flexion :

$$\Delta W_{int}^f = \langle u_n^* \rangle [K_L^f] \{ \Delta u_n \} + \langle u_n^* \rangle [K_\sigma^f] \{ \Delta u_n \} \quad (5.15)$$

La partie non linéaire des déformations de flexion ayant été négligée :

$$\text{donc } [K_\sigma^f] = 0$$

L'équation (5.10) nous donne la rigidité de flexion dans le cas linéaire :

$$[K_L^f] = K_f = \sum_{i=1}^5 \omega_i ([B_f]^T [H] [B_f] J)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i}$$

5.3. Méthode de résolution

L'approche générale pour l'analyse non-linéaire, en utilisant la technique de solution incrémentale itérative et la description lagrangienne, comprend trois étapes principales suivantes:

- A) Evaluer la rigidité globale de la structure afin de trouver les déplacements incrémentaux (stage de prédiction).
- B) Déterminer les forces nodales exactes de chaque nœud (stage de correction).
- C) Comparer les forces nodales avec les forces appliquées pour trouver les forces résiduelles dans la configuration déformée et vérifier la condition d'équilibre pour voir si l'on a encore besoin d'itérations (stage de détection).

Les méthodes numériques de résolution sont basées sur des processus incrémentaux d'une manière générale, elles consistent à appliquer le niveau de charge totale par incrément

successifs, et trouver à chaque incrément la réponse de la structure. Cette réponse est obtenue après linéarisation sur chaque incrément des équations d'équilibres, en pratique il existe plusieurs méthodes qui sont conçues pour résoudre les systèmes non linéaires, Dhatt et Touzot donnent une présentation détaillée sur ses méthodes [DHA81], dans ce qui suit nous allons présenter uniquement la méthode de Newton-Raphson :

La méthode des éléments finis conduit à une formulation discrétisée des problèmes non linéaires qui peut s'écrire sous la forme :

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([K(U_n)]\{U_n\} - \{F\}) = 0 \quad \text{pour tout } \langle \delta U_n \rangle$$

Pour simplifier les notations, on remplace U_n par U :

$$[K(U)]\{U\} = \{F\} \quad \text{ou} \quad \{R(U)\} = \{F\} - [K(U)]\{U\} = 0 \quad (5.16)$$

Résoudre le système non linéaire (5.16), c'est chercher un vecteur $\{U\}$ qui rend le résidu $\{R\{U\}\}$ aussi proche que possible de zéro, la solution exacte rend $\{R\{U\}\}$ nul.

Ce vecteur résidu peut aussi s'interpréter comme la différence entre les efforts intérieurs et les efforts extérieurs imposés :

$$\{R(U)\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\} = 0$$

Supposons qu'à l'itération $(i - 1)$ nous ayons obtenu une approximation U^{i-1} de la solution telle que le résidu ne soit pas nul.

$$\{R(U^{i-1})\} = \{F\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \neq 0 \quad (5.17)$$

A l'itération i nous cherchons une approximation U^i de la solution telle que :

$$\{R(U^i)\} = \{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} \approx 0$$

L'algorithme est obtenu en développant ce résidu en série de Taylor au voisinage de U^{i-1} :

$$\{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} = \{R(U^{i-1})\} + \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{U=U^{i-1}} \{\Delta U^i\} + \dots = 0 \quad (5.18)$$

D'où en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$- \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right] \{\Delta U^i\} = \{R(U^{i-1})\}$$

Où :

$$[K_T(U^{i-1})]\{\Delta U^i\} = \{R(U^{i-1})\} \quad \text{et} \quad \{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\} \quad (5.19)$$

La méthode incrémentale consiste à remplacer la résolution de :

$$[K(U)]\{U\} = \lambda\{F_0\} = \{F\} \quad (5.20)$$

Par la résolution successive de :

$$[K(U_j)]\{U_j\} = \lambda_j\{F_0\} \quad \text{où} \quad \lambda_j = \lambda_1, \lambda_2, \dots \quad (5.21)$$

La solution initiale utilisée pour calculer U_j est la solution U_{j-1} obtenue à l'étape précédente. Chaque étape constitue un problème non linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations de la méthode de Newton-Raphson.

Afin de satisfaire la condition d'équilibre, les forces hors équilibres doivent être éliminées à travers une procédure itérative. Si R est plus petit qu'une certaine norme, le processus d'itérations s'arrête et la résolution continue avec un autre chargement incrémentale. On peut utiliser, soit la norme de déplacements, soit la norme de forces, ou celle de l'énergie :

$$\frac{\|\{\Delta U\}_i\|}{\|\{U\}_i^j\|} < \varepsilon_1 \quad \frac{\|\{R\}_i\|}{\|\{R\}_0^j\|} < \varepsilon_2 \quad \frac{\|\{R\}_i\langle \Delta U \rangle_i\|}{\|\{R\}_0^j\langle U \rangle_i\|} < \varepsilon_3$$

Les tolérances ε_1 , ε_2 , ε_3 sont en général prises égales à 0.1%.

Dans l'annexe D, on présente un algorithme général qui permet l'implémentation de la méthode itérative de Newton-Raphson dans un code élément finis, pour notre élément ce code est réalisé sous Matlab.

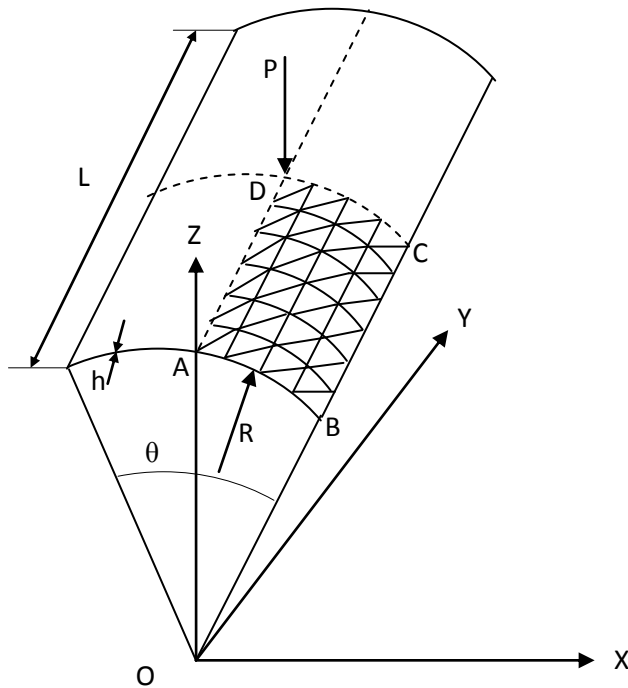
5.4. Validation de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique

Dans cette section, nous allons tester la validité de l'élément SB6–18 sur des cas tests non linéaires géométriques, dans le premier test nous étudions un panneau cylindrique soumis à une force ponctuelle, dans le second, une coque sphérique sous une charge concentrée sera étudiée. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé à la solution de référence.

5.4.1 Panneau cylindrique soumis à une force ponctuelle

On présente ici le calcul non-linéaire géométrique d'un panneau cylindrique (figure 5.2). Ce cas est traité par Batoz et Cantin dans [BAT78]. Etant donné la symétrie du problème, seulement un quart de la structure est maillé. Le panneau est encastré sur les deux arêtes courbées, et libre sur les arêtes droites. Le calcul est effectué avec un maillage $(4 \times 6 \times 1) \times 2$, la charge totale P est appliquée par incréments successifs en douze pas. La figure 5.3 présente les courbes charge-déplacement vertical du point central D. Les résultats obtenus par l'élément SB6–18 seront comparés avec la solution de référence [BRE80] et ceux obtenus par [BAT78].

Ce test met en évidence une performance acceptable de l'élément SB6-18 par rapport à la solution de référence, la même courbe montre aussi que notre élément donne des résultats meilleurs que ceux trouvés par [BAT78].



Données de géométrie et de matériau :

$$R=2.5$$

$$L=6$$

$$h=0.01$$

$$\theta=45$$

$$E=10^7$$

$$\nu=0.3$$

Figure 5.2. Panneau cylindrique soumis à une force ponctuelle

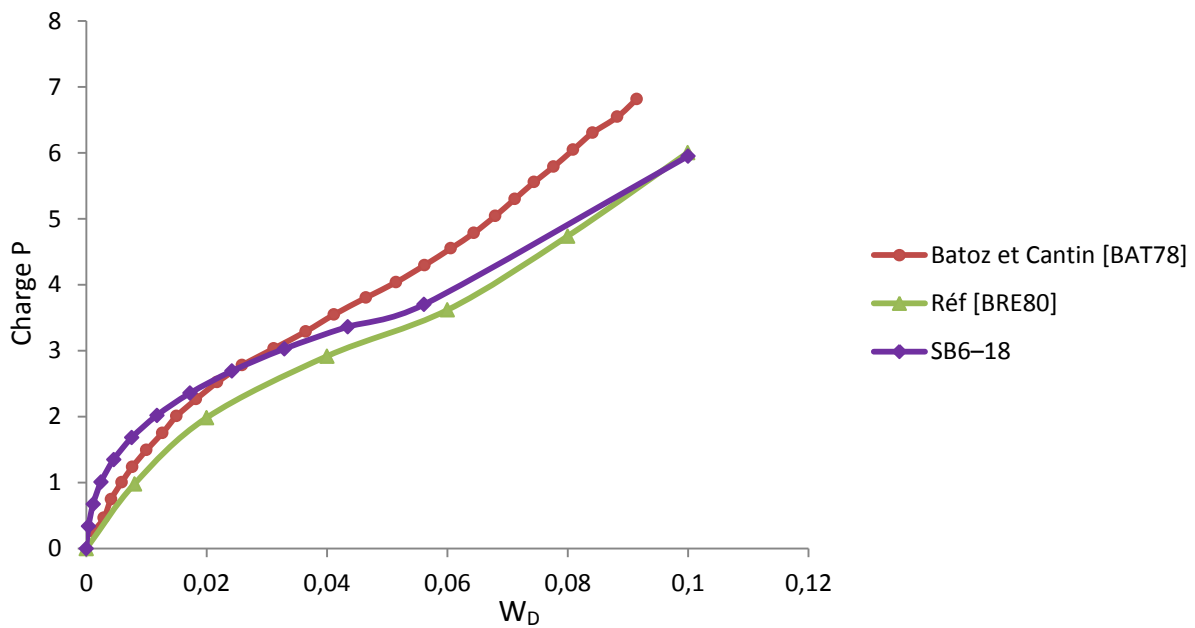


Figure 5.3. Déplacement vertical du point D

5.4.2 Coque sphérique sous une charge concentrée

La figure 5.4 montre une coque sphérique soumise à une charge concentrée, ce cas test a été étudié par Crisfield et al. [CRI94], Du fait de la symétrie du problème, seul un huitième de la coque a été considéré, un maillage de 36 éléments a été employé. D'autre part, la charge totale P est appliquée par incréments successifs en 10 pas, nos résultats seront comparés avec la solution analytique de référence proposée par Taber [TAB82], ainsi que les résultats trouvés par Crisfield et al. [CRI94].

A travers la courbe charge-déplacement représenté sur la figure 5.5, on peut constater le bon comportement de l'élément SB6-18 par rapport la solution analytique, ce comportement est presque identique à celui décrit par [CRI94].

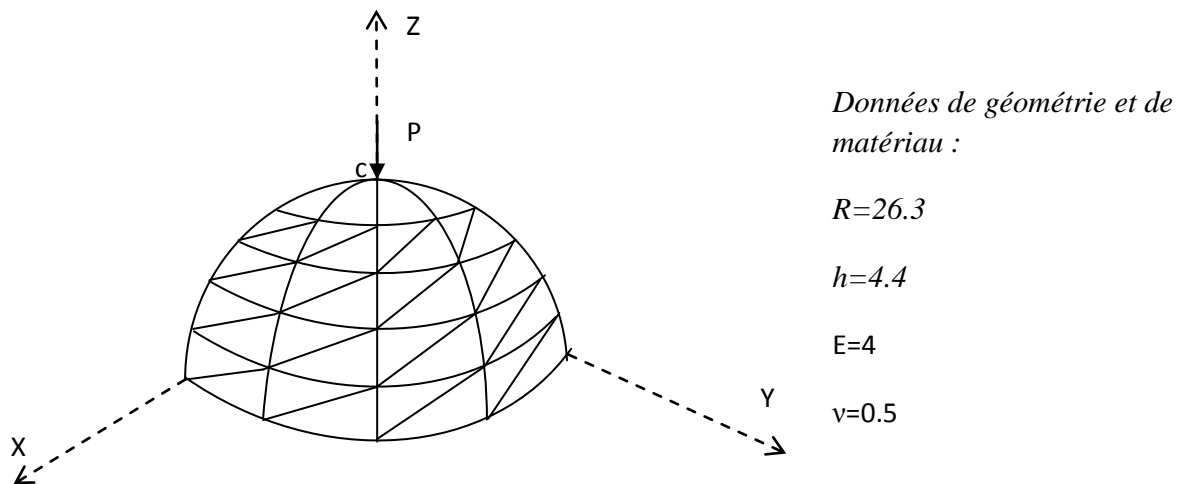


Figure 5.4. Coque sphérique sous une charge concentrée

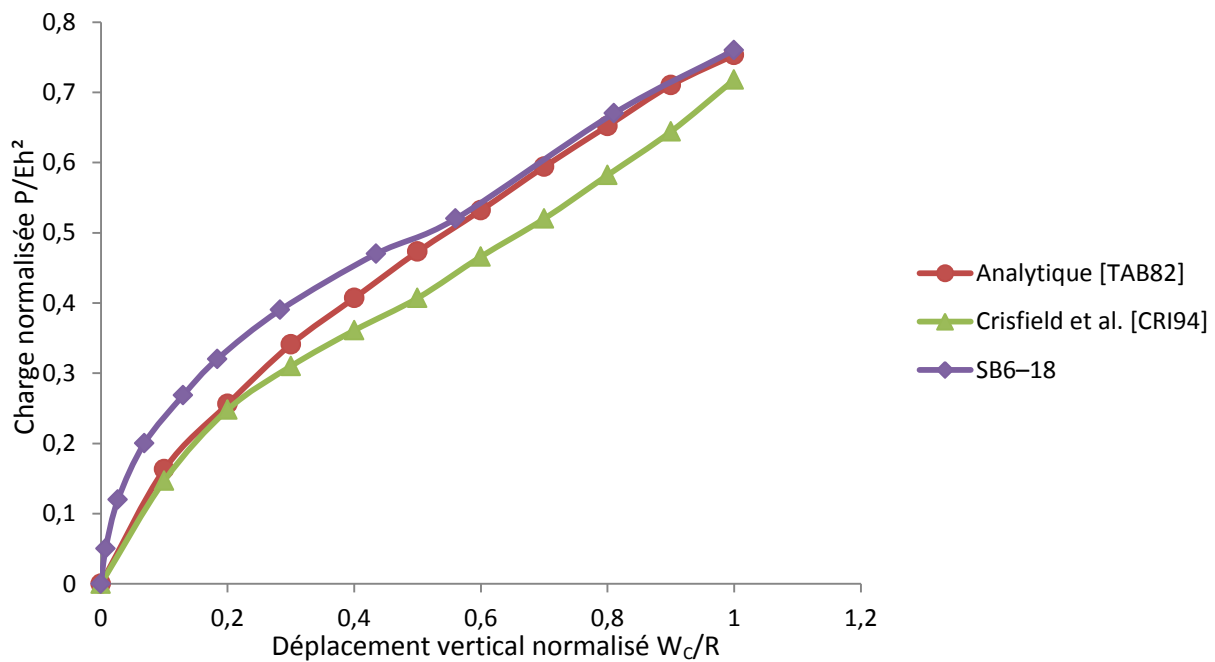


Figure 5.5. Courbe charge/Déplacement de la coque sphérique

5.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une extension de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique. Une formulation Lagrangienne totale, qui prend comme configuration de référence la configuration initiale C_0 , a été adoptée, cette formulation nous a conduits à la détermination des efforts internes ainsi que la matrice de rigidité tangente. La méthode itérative de Newton-Raphson a été utilisée pour la résolution du système non linéaire.

Les cas tests étudiés dans cette section ont pour objectif de vérifier le bon comportement et la bonne programmation de l'élément que nous avons développé, l'analyse de ces résultats nous a permis de conclure que l'élément SB6–18 non-linéaire développé donne de très bons résultats.

Conclusion générale et perspectives

Sommaire

Conclusion générale	104
Perspectives	105

Conclusion générale

Le présent travail s'inscrit dans le contexte de la contribution à l'étude numérique des coques par des éléments finis de type solide-coque. Sachant que les structures coques sont souvent raccordées aux autres structures épaisses qui sont modélisées par des éléments finis volumiques 3D, la difficulté à modéliser ce type de structures complexes constitue à l'heure actuelle un sujet de recherche très attrayant, cela nous a amené à rechercher des nouveaux éléments finis qui peuvent répondre à cette problématique. Ce travail de recherche nous a permis de développer deux éléments finis :

Le premier est un élément fini coque triangulaire sans degrés de liberté de rotation construit à partir de l'élément coque triangulaire de type facette plane DKT18, ce dernier est obtenu par superposition de l'élément triangulaire de membrane CST ayant deux degrés de liberté par nœud (u et v) et l'élément de flexion des plaques DKT qui possède trois degrés de liberté par nœud, un degré de translation vertical (w) plus deux rotations (θ_x et θ_y). L'idée principale est de modifier l'opérateur matriciel B_f relatif aux déformations de flexion de l'élément DKT pour avoir uniquement des termes qui correspondent aux composantes de déplacement w , la superposition de l'élément DKT modifié et l'élément de membrane CST nous donne un nouvel élément fini triangulaire baptisé DKT18RF avec seulement trois translations par nœud.

Le second élément, présenté dans ce travail, est un nouvel élément fini appartenant aux éléments de type solide-coque, ces éléments représentent aujourd'hui une alternative intéressante aux éléments finis solides et coques conventionnels. En effet, les éléments finis solide-coque combinent les avantages des formulations des éléments solides et des éléments coques. L'élément développé est un élément prismatique à six nœuds, nommé SB6-18, basé sur une formulation DKT, cet élément ayant 3 translations par nœud et donc un nombre total de degrés de liberté égal à 18, en effet pour les deux faces supérieure et inférieure constituant le prisme, la formulation utilisée est similaire à celle de l'élément triangulaire DKT18RF, les opérateurs de déformation de membrane B_m et de flexion B_f seront déterminés en suivant le même principe que celui de l'élément DKT18RF. Les déformations de cisaillement transversal sont considérées nulles pour les éléments de type DKT et la loi constitutive pour cet élément est une loi de comportement 3D modifiée pour

prendre en considération l'hypothèse des contraintes planes décrite par la théorie des coques.

Les deux éléments finis développés dans ce travail ont été mis en œuvre sous le logiciel de programmation MATLAB, la validation a été faite à travers une série des tests reconnus dans le domaine, et les résultats obtenus ont montré les bonnes propriétés de convergence des deux éléments pour le calcul des déplacements, des contraintes ainsi que les moments. Un exemple sur l'analyse dynamique a été étudié dans le but de tester la capacité de l'élément SB6–18 de pouvoir étudier des structures en vibration libre, et les résultats ont été très satisfaisants.

La dernière partie dans cette thèse a été consacrée à l'extension de l'élément SB6–18 en comportement non linéaire géométrique. Une formulation Lagrangienne totale, qui prend comme configuration de référence la configuration initiale C_0 , a été adoptée. Cette formulation nous a conduit à la détermination des efforts internes ainsi que la matrice de rigidité tangente. La méthode itérative de Newton-Raphson a été utilisée pour la résolution du système non linéaire. Les cas tests étudiés dans cette section ont montré le bon comportement et la bonne programmation de l'élément développé.

Perspectives

La formulation mise en place au long de cette thèse s'est montrée prometteuse, ce travail ouvre plusieurs perspectives intéressantes pour le futur. Les propositions suivantes constituent des extensions possibles de ce travail:

- La formulation des nouveaux éléments finis sans degrés de liberté de rotation en suivant le même principe utilisé dans la formulation de l'élément DKT18RF et en utilisant des éléments finis de type facette plane triangulaire et quadrilatérale par exemple l'élément finis DKT12.
- Le développement des nouveaux éléments finis de type solide-coque en se basant sur la même stratégie utilisée pour formuler l'élément SB6–18, en utilisant les éléments finis de coque sans degrés de liberté de rotation existants.

- Vu que la seule limitation de notre élément fini développé SB6–18 est la diminution de la précision des résultats dans le cas où l'épaisseur de la structure est grande, les deux points précédents peuvent être proposés aussi pour les éléments finis basés sur la théorie de Mindlin qui prend en considération l'effet de cisaillement transversal, ce qui permet donc de construire des éléments finis de type solide-coque applicables aux structures épaisses.
- Vu l'efficacité des éléments finis à champ de déformation on recommande alors d'utiliser cette approche pour développer des nouveaux éléments finis de type coque sans degrés de liberté de rotation et des éléments de type solide-coque.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [ABE02] Abed-Meraim F, Combescure A. SHB8PS, a new adaptive, assumed strain continuum mechanics shell element for impact analysis. *Computers & Structures* 80:791–803, 2002.
- [ABE09] Abed-Meraim F, Combescure A. An improved assumed strain solid–shell element formulation with physical stabilization for geometric non-linear applications and elasticplastic stability analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 80:1640–1686, 2009.
- [ABE13] Abed-Meraim F, Trinh VD, Combescure A. New quadratic solid–shell element and their evaluation on linear benchmark problems. *Computing* 95:373–394, 2013.
- [ADA14] Adam C, Bouabdallah S, Zarroug M, Maitournam H. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 279:128, 2014.
- [ADA15] Adam C, Bouabdallah S, Zarroug M, Maitournam H. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part II: Plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284:106137, 2015.
- [AHM71] Ahmad S, Irons BM, Zienkiewicz OC. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 27, p.271-283, 1971.
- [ALL84] Alleman DJ. "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity problems". *Comp. Struct*, Vol. 19, pp 1-8, 1984.
- [ALL88] Alleman DJ. "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity problems". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 26, pp 717-739, 1988.
- [AMI92] Aminpour MA. "An assumed-stress hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 33, pp 19-38, 1992.
- [ARG86] Argyris JH, Mlejnek HP. "Die methode der finite element". Band 1, II, III, Viewg,Ed, 1986.
- [ARG02] Argyris J, Papadrakakis M, Stefanou G. Stochastic finite element analysis of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 4781-4804, 2002.

- [ASH72] Ashwell DG, Sabir AB. A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 14, 171–183, 1972.
- [ASH76] Ashwell DG, Gallagher R. *Finite elements for thin shells and curved members*. Wiley, London, 268 pages, 1976.
- [BAB86] Babu C, Prathap G. A linear thick curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 55, p. 379-386, 1986.
- [BAB87] Babu C, Subramanian G, Prathap G. Mechanics of fields consistency in finite element analysis – a penalty function approach. *Computers and Structures*, vol. 25, p. 161-173, 1987.
- [BAT77] Batoz JL. "Analyse non lineaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés". Thèse de Doctorat es sciences, Département de Génie civil, Université Laval, Québec, 1977.
- [BAT78] Batoz, JL, Dhatt G. "Eléments triangulaires simples avec hypothèse de Kirchhoff-Love sous forme discrète pour l'analyse linéaire et non linéaire des plaques, coques surbaissées et coques profondes". *Congrès du G~MNI*, Paris 17-1111-12, 1978.
- [BAT80] Batoz JL, Bathe KJ, Ho LW. "A study of three-node triangular plate bending elements". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, pp 1771-1812, 1980.
- [BAT86a] Bathe KJ, Dvorkin EN. Formulation of general shell elements – The use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:697–722, 1986.
- [BAT86b] Bathe KJ, Dvorkin EN. A four node plate bending element based on Mindlin/ Reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:697–722, 1986.
- [BAT90] Batoz JL, Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis*, Vols 1, 2, 3, Hermès 1990.
- [BEL00] Belarbi MT. Développement de nouveaux éléments finis basés sur le modèle en déformation. Application linéaire et non linéaire [Development of new finite elements based on the strain model: application to linear and nonlinear problems] (Thèse de Doctorat d'état). Université de Constantine, Algérie, 2000.
- [BEL84] Belytschko T, Ong JJ, Liu W, Kenedy J. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 43, p. 251-276, 1984.
- [BER85] Bergan PG and Fellipa CA. "A triangular membrane element with rotational

- degrees of freedom". *Comp. Methods. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp 25-60, 1985.
- [BER86a] Bergan PG and Felippa CA. "Efficient Implementation of a triangular membrane with drilling freedoms". Chap. 5 : Finite element methods for plate and shell structures, Vol. 1, Hughes and Hinton Eds, pp 128-152, 1986.
- [BER86b] Bernadou M. "Some finite element approximations of thin shell problems, in *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*". Vol. 1, Element Technology (Hughes et Hinton Eds), Pineridge Press, pp 62-84, 1986.
- [BLE00] Bletzinger KU, Bischoff M, Ramm E. A unified approach for shear locking free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers and Structures*, vol. 75, p. 321-334, 2000.
- [BOG67] Bogner FK, Fox RL, Schmit LA. A cylindrical shell discrete element. *AIAA Journal*, 5, 745–750, 1967.
- [BOU14] Bouclier R. *Eléments finis iso-géométriques massifs coque sans verrouillage pour des simulations en mécanique non linéaire des solides*. Thèse de doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2014.
- [BRE91] Brezzi F, Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 350 pages, 1991.
- [BRU94] Brunet M, Sabourin F. Prediction of necking and wrinkles with a simplified triangular shell element in sheet forming. In *Proceedings on the Int. Conf. on Metal Forming Process Simulation in Industry*, p75-93, Baden-Baden, Germany, 1994.
- [BRU95] Brunet M, Sabourin F. A simplified triangular shell element with a necking criterion for 3-D sheet-forming analysis. *Journal of Materials Processing Technology*, 50(1-4), 238-251, 1995.
- [BUC93] Bucalem ML, Bathe KJ. Higher-order MITC general shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, p. 3729-3754, 1993.
- [CAN68] Cantin G, Clough RW. A curved, cylindrical-shell, finite element. *AIAA Journal*, 6, 1057–1062, 1968.
- [CAR85] Carpenter N, Stolarsky M, Belytschko T. "A flat triangular shell element with improved membrane interpolation". *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 1, pp 161-168, 1985.
- [CHA91] Chahrouh I. *Contribution à l'analyse non-linéaire matérielle et géométrique des coques en béton armé*". Thèse de doctorat en génie civil présentée

- devant l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1991.
- [CHE87] Chen WJ, Cheung Y. A new approach for the hybrid element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, p. 1697-1709, 1987.
- [COU09] Couëdo S, Rio G, Duigou L. Un nouvel élément fini triangulaire coque sans degré de liberté de rotation: insensible à la distorsion du maillage et adapté aux transformations finies. 9^e Colloque national en calcul des structures, May 2009, Giens, France.
- [COW71] Cowper GR, Lindberg GM, Oison MD. "Comparaison of two high precision triangular finite elements of arbitrary deep shells". *Proc., Third Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.*, WPAFB, pp 277-344, 1971.
- [CRA08] Craveur JC. *Modélisation des éléments finis cours et exercices corrigés*. 3e édition DUNOD, 2008.
- [CRI92] Crisfield MA, Peng X. Efficient nonlinear shell formulations with large rotations and plasticity. DRJ Owen et al. *Computational plasticity: models, software and applications, Part, 1*, 1979-1997, 1992.
- [DEB11] Debard Y. *Elasticité*, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique, 24 mars 2006 - 31 mai 2011.
- [DHA70] Dhatt G. "An efficient triangular shell element". *AIAA*, Vol. 8, N° 11, pp 2100-2102, 1970.
- [DHA81] Dhatt G, Touzot G. *Une présentation de la méthode des éléments finis: Maloine Québec: Presses de l'Université Laval; 1981.*
- [DVO84] Dvorkin EN, Bathe KJ. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations*, vol. 1, p. 77-88, 1984.
- [FRE92] Frey F, Jirousek J. "Structures tridimensionnelles à parois minces". *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, 1992.
- [FRE03] Frey F, Studer MA. *Analyse des structures et milieu continue volume 5, Presses polytechniques et universitaires romandes*, 2003.
- [FLA81] Flanagan D, Belytschko T. A Uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, p. 679-706, 1981.
- [FLO17] Flores FG, Nallim LG, Oller S. Formulation of solid-shell finite elements with large displacements considering different transverse shear strains approximations. *Finite elements in analysis and design* 130, 39-52, 2017.

- [GUO02] Guo YQ, Gati W, Naceur H, Batoz JL. An efficient DKT rotation free shell element for springback simulation in sheet metal forming. *Computers & structures*, 80(27-30), 2299-2312, 2002.
- [HAM06] Hamadi, D. analysis of structures by non-conforming finite elements, these de doctorat de l'université de biskra, Algérie , 2006.
- [HAM16] Hamadi D, Ashref A, Ounis A. A new flat shell finite element for the linear analysis of thin shell structures, *European Journal of Computational Mechanics*, 2016.
- [HER65] Herrmann LR. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variationnal theorem. *AIAA Journal*, vol. 3, p. 1896-1900, 1965.
- [HUA89] Huang HC. *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells Theory, Software and Applications* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1989.
- [HUG77a] Hughes TJR. Equivalence of finite elements for nearly incompressible elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, p. 181-183, 1977.
- [HUG77b] Hughes TJ R. Taylor RL. Kanoknukulchai W. A simple and efficient finite element for plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, p. 1529-1543, 1977.
- [HUG80] Hughes TJR. Generalization of selective integration procedure to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, p. 1413-1418, 1980.
- [HUG81] Hughes TJR, Tezduyar TE. Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the fournode bilinear isoparametric element. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, p. 587-596, 1981.
- [IBR90] Ibrahimbegovic A, Taylor RL, Wilson EL. "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom", *Int. j. numer. methods eng.*, 30, 445-457, 1990.
- [IBR93] Ibrahimbegovic A, Frey F, Rebora B. "Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes : les éléments finis avec degré de liberté de rotation". *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 2, pp 257-286, 1993.
- [IBR94] Ibrahimbegovic A, Frey F. "Stress resultant geometrically non-linear shell theory with drilling rotations. Part ID: linearized kinematics". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 37, pp 3659-3683, 1994.
- [ISH12] Ishaquddin M, Raveendranath P, Reddy JN. Flexure and torsion locking phenomena in out-of-plane deformation Timoshenko curved beam element. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 51, p. 22-30, 2012.

- [KAD95] Kaddah F. Etude numérique d'éléments de plaques et coques minces et épaisses pour des applications en génie civil. Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lille, 1995.
- [KAS00] Kasper EP, Taylor RL. A mixed-enhanced strain method, Part I: Geometrically linear problems. *Computers and Structures*, vol. 75, p. 237-250, 2000.
- [KAT93] Katili I. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields—part II: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1885-1908, 1993.
- [KOI60] Koiter WT. "A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells", *Proc. Symp. On theory of thin Elastic Shells*, North-Rolland, 12-33, 1960.
- [KOI66] Koiter WT. "On the nonlinear theory of thin elastic shells". *Proc. Konink. Ned. Akad. Wetensch. Ser. B69 (1)* pp 1-54, 1966.
- [KOI70] Koiter WT. "On the foundation of the linear theory of thin elastic shells". *Proc. Konink. Ned. Akad. Wetensch.*, B73, pp 169-197, 1970.
- [KOS05] Koschnick F, Bischoff M, Camprubi N, Bletzinger KU. The discrete strain gap method and membrane locking. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, p. 2444-2463, 2005.
- [KPE16] Kpeky F. Formulation et modélisation des vibrations par éléments finis de type solide-coque : application aux structures sandwichs viscoélastiques et piézoélectriques. Thèse de doctorat de l'Université de Lorraine, 2016.
- [LAR90] Lardeur P. "Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal". Thèse de Doctorat, Univers. de Technologie de Compiègne, 1990.
- [LEM00] Lemosse D. Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces: Thèse de doctorat, Ecole Doctorale SPMI/INSA-Rouen; 2000.
- [LIN69] Lindberg GM, Olson MD, Cowper GR. New development in the finite element analysis of shells, *Q. Bull. Div. Mech. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada*, Vol. 4, 1969.
- [LIU84] Liu W, Belytschko T. Efficient linear and non linear heat conduction with a quadrilateral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, p. 931-948, 1984.

- [MAC85] Macneal H, Harder L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite elements in Analysis and Design*, 1:3-20, 1985.
- [MAL78] Malkus DS, Hughes TJR. Mixed finite element methods - Reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 15, p. 63-81, 1978.
- [MAR38] Marguerre K. "Zur theorie der gekrümmten platte grosser formänderung". *Proc. 5th Int. Cong. Appl. Mech.*, Berlin, pp 93-101, 1938.
- [MEC80] Meck HR. An accurate polynomial displacement function for finite ring elements. *Computers and Structures*, vol. 11, p. 265-269, 1980.
- [MEF13] Meftah K. Modélisation numérique des solides par éléments finis volumiques basés sur le concept SFR (Space Fiber Rotation). Thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider-Biskra, 2013.
- [MER98] Mercier F. Contribution à la modélisation de l'emboutissage de tôles minces par l'approche inverse. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1998.
- [MOR71] Morley LSD. The constant-moment plate-bending element. *Journal of Strain Analysis*, 6(1), 20-24, 1971.
- [MOU04] Mouronval AS. Etude numérique des phénomènes aéroélastiques en aérodynamique supersonique. Application aux tuyères propulsives. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, 2004.
- [NAG57] Naghdi PM. "On the theory of thin elastic shells". *Q. Appl. Math.*, Vol. 14, pp 369-380, 1957.
- [NAG63] Naghdi PM. "Foundations of elastic shell theory, in progress in solid Mechanics". Vol. IV, Chapter 1 (ed. 1. N. Sneddon and R. Hill), North-Rolland, 1963.
- [NAG72] Naghdi PM. "The theory of shells and plates, Handbuch der Physik". Vol. VI, A2 (Flügge Ed.), Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [NOO81] Noor AK, Peters JM. Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear analysis of curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, p. 615-631, 1981.
- [NYG86] Nygard MK. "The free formulation for non linear finite element formulation with applications to shells". Report No. 86-2, Division of Structural Mechanics, The Norwegian institute of technology, Trondheim, Norway, Dec, 1986.
- [ONA89] Onate E, Agelet de Saracibar C, Dalin JB. Finite element analysis of sheet metal forming problems using a selective voided viscous shell membrane

- formulation. In Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes: NUMIFORM (Vol. 89, pp. 23-30), 1989.
- [ONA05] Oñate E, Flores FG. Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(21-24), 2406-2443, 2005.
- [ONA07] Onate E, Flores FG, Neamtu L. Enhanced rotation-free basic shell triangle. Applications to sheet metal forming. In *Computational Plasticity* (pp. 239-265). Springer, Dordrecht, 2007.
- [PAW71] Pawsey S, Clough R. Improved numerical integration of thick shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, p. 575-586, 1971.
- [PIA82] Pian THH, Chen DP. Alternative ways for formulation of hybrid stress elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, p. 1679-1684, 1982.
- [PRA82] Prathap G, Bhashyam G. Reduced integration and the shear-flexible beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, p. 195-210, 1982.
- [RAN98] Rank E, Krause R, Preusch K. On the accuracy of p-version elements for the Reissner–Mindlin plate problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, p. 51-67, 1998.
- [REI52] Reissner E. "Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells". *J. Math. Phys.*, Vol. 31, pp 109-119, 1952.
- [REI69] Reissner E. "On finite symmetrical deformations of thin shells of revolution". *JAM*, Vol. 36, pp 267-270, 1969.
- [REI74] Reissner E. "Linear and nonlinear theory of shells, in *Thin Shell Structures*". (Fung and Sechler Eds.), Prentice Hall, pp 29-44, 1974.
- [RIO93] Rio G, Tathi B, Horkay F. Introducing bending rigidity in a finite element membrane sheet metal forming model. *Int. Sem. Mecamat*, 91, 449, 1993.
- [ROC79] Rockey C, Evans HR, Griffiths DW, Nethercot DA. *Introduction à la méthode des éléments finis*. EYROLLES 1979.
- [SAB72] Sabir, AB, Lock AC. A curved cylindrical shell finite element. *IJMS*, 14, 125–135, 1972.
- [SAB86] Sabir AB, Salhi HY. A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *Res. Mechanica* 19, pp. 1-16, 1986.

- [SAB95] Sabir AB, Sfendji A. Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. *Thin-walled Structures* 21.pp 225-232, 1995.
- [SAB06] Sabourin F, Brunet M. Detailed formulation of the rotation-free triangular element “S3” for general purpose shell analysis. *Engineering computations*, 23(5), 469-502, 2006.
- [SAL12] Salahouelhadj A, Abed-Meraim F, Chalal H, Balan T. Application of the continuum shell finite element SHB8PS to sheet forming simulation using an extended large strain anisotropic elastic–plastic formulation. *Archive of Applied Mechanics* 82:1269–1290, 2012.
- [SAN63] Sanders JL. "Nonlinear theories for thin shells". *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 21, N° 1, pp 21-36, 1963.
- [SIM90] Simo JC, Rifai M. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, p. 1595-1638, 1990.
- [SIM92] Simo JC, Armero F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, p. 1413-1449, 1992.
- [SOU96] De souza neto EA, Peric D, Dutko M, Owen DRJ. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, page 3277–3296, 1996.
- [SOU05] De souza neto EA, Pires FMA, Owen DJR. F-bar based linear triangles and tetrahedra for finite strain analysis of nearly incompressible solids. Part I : formulation and benchmarking. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, p. 353-383, 2005.
- [STO82] Stolarski H, Belytschko T. Membrane locking and reduced integration for curved element. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 49, p. 172-178, 1982.
- [TRI09] Trinh VD. Formulation, développement et validation d’éléments finis de type coques volumiques sous intégrés Stabilisés utilisables pour des problèmes a cinématique et comportement non linéaires. Thèse de doctorat de l’Ecole Doctorale, ENSAM-Paris, 2009.
- [TRI11] Trinh VD, Abed-Meraim F, Combescure A. A new assumed strain solid–shell formulation “SHB6” for the six-node prismatic finite element. *Journal of Mechanical Science and Technology* 25:2345–2364, 2011.
- [UGU18] Ugural AC, *Plates and shells: theory and analysis*. Fourth edition. CRC Press, 2018.
- [VEN01] Ventsel E. *Thin Plates and Shells Theory, Analysis and Applications*. The

- Pennsylvania State University Marcel Dekker, Inc, 2001.
- [VIE03] Vieille B. De l'élaboration d'un modèle numérique à la prédiction du comportement de structures minces en alliage à mémoire de forme. Thèse de doctorat de l'Université de FRANCHE-COMTÉ, 2003.
- [WAN17] Wang P. Solid-shell finite element for quasi-static and dynamic analysis of 3D thin structures: Application to sheet metal forming processes. Thèse de doctorat de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers ParisTech - Campus de Metz, 2017.
- [WEM68] Wempner GA, Oden JT, Kross DA. "Finite element analysis of thin shells". Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 94, EM6, pp 1273-1294, 1968.
- [WIL73] Wilson E, Taylor R, Doherty W, Ghaboussi J. Incompatible displacement models (isoparametric finite elements in solid and thick shell structural analysis). Numerical and computer methods in structural mechanics. (A 74-17756 06-32) New York, Academic Press, p. 43-57, 1973.
- [XIO17] Xiong H. Simulation of forming compaction and consolidation of thermoplastic composites based on solid shell elements. Thèse de doctorat de l'universite de lyon, 2017.
- [XIO18] Xiong H, Maldonado EG, Hamila N, Boisse P. A prismatic solid-shell finite element based on a DKT approach with efficient calculation of through the thickness deformation. Finite Elements in Analysis and Design, 151, 18-33, 2018.
- [XIO19] Xiong H, Maldonado EG, Hamila N, Boisse P. Élément fini solide-coque prismatique pour la simulation de la consolidation des composites thermoplastiques. Comptes Rendus des JNC 21 – Bordeaux INP – 1-3 juillet 2019.
- [ZIE71] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Too JM. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 3, p. 275-290, 1971.

Annexes

Sommaire

Annexe A	119
Annexe B	122
Annexe C	127
Annexe D	129

Annexe A

Détails de calcul de la matrice B_f de l'élément DKT18RF

$$[B_f] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Les vecteurs N sont donnés par :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^x \rangle \quad (A.2)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^y \rangle \quad (A.3)$$

Leurs dérivées par rapport à ξ et η :

$$N_{,\xi}^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11,\xi}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21,\xi}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31,\xi}^x \rangle \quad (A.4)$$

$$N_{,\xi}^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11,\xi}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21,\xi}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31,\xi}^y \rangle \quad (A.5)$$

$$N_{,\eta}^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11,\eta}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21,\eta}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31,\eta}^x \rangle \quad (A.6)$$

$$N_{,\eta}^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11,\eta}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21,\eta}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31,\eta}^y \rangle \quad (A.7)$$

Calcul de N_{11}^x N_{21}^x N_{31}^x et N_{11}^y N_{21}^y N_{31}^y :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m \quad , \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (A.8)$$

Donc pour les trois nœuds (1,2,3), on aura :

$$N_{11}^x = \frac{3}{2L_4} P_4 C_4 - \frac{3}{2L_6} P_6 C_6 \quad , \quad N_{11}^y = \frac{3}{2L_4} P_4 S_4 - \frac{3}{2L_6} P_6 S_6 \quad (A.9)$$

$$N_{21}^x = \frac{3}{2L_5} P_5 C_5 - \frac{3}{2L_4} P_4 C_4 \quad , \quad N_{21}^y = \frac{3}{2L_5} P_5 S_5 - \frac{3}{2L_4} P_4 S_4 \quad (A.10)$$

$$N_{31}^x = \frac{3}{2L_6} P_6 C_6 - \frac{3}{2L_5} P_5 C_5 \quad , \quad N_{31}^y = \frac{3}{2L_6} P_6 S_6 - \frac{3}{2L_5} P_5 S_5 \quad (A.11)$$

Avec :

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k} , S_k = \frac{y_{ij}}{L_k} , L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (A.12)$$

Ce qui nous donne :

$$L_4 = (x_{21}^2 + y_{21}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_5 = (x_{32}^2 + y_{32}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_6 = (x_{13}^2 + y_{13}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$C_4 = \frac{x_{21}}{L_4} , S_4 = \frac{y_{21}}{L_4} \quad (A.13)$$

$$C_5 = \frac{x_{32}}{L_5} , S_5 = \frac{y_{32}}{L_5}$$

$$C_6 = \frac{x_{13}}{L_6} , S_6 = \frac{y_{13}}{L_6}$$

Les fonctions P_4 , P_5 et P_6 sont données par :

$$P_4 = 4 \xi \lambda$$

$$P_5 = 4 \xi \eta \quad (A.14)$$

$$P_6 = 4 \lambda \eta$$

Avec :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

Leurs dérivées par rapport à ξ et η :

$$P_{4,\xi} = 4(1 - 2\xi - \eta) , P_{4,\eta} = -4 \xi$$

$$P_{5,\xi} = 4 \eta , P_{5,\eta} = 4 \xi \quad (A.15)$$

$$P_{6,\xi} = -4 \eta , P_{6,\eta} = 4(1 - 2\eta - \xi)$$

La dérivée des composantes du vecteurs N par rapport à ξ et η se calcule par :

$$N_{11,\xi}^x = \frac{3}{2L_4} P_{4,\xi} C_4 - \frac{3}{2L_6} P_{6,\xi} C_6 \quad , \quad N_{11,\xi}^y = \frac{3}{2L_4} P_{4,\xi} S_4 - \frac{3}{2L_6} P_{6,\xi} S_6 \quad (A.16)$$

$$N_{21,\xi}^x = \frac{3}{2L_5} P_{5,\xi} C_5 - \frac{3}{2L_4} P_{4,\xi} C_4 \quad , \quad N_{21,\xi}^y = \frac{3}{2L_5} P_{5,\xi} S_5 - \frac{3}{2L_4} P_{4,\xi} S_4 \quad (A.17)$$

$$N_{31,\xi}^x = \frac{3}{2L_6} P_{6,\xi} C_6 - \frac{3}{2L_5} P_{5,\xi} C_5 \quad , \quad N_{31,\xi}^y = \frac{3}{2L_6} P_{6,\xi} S_6 - \frac{3}{2L_5} P_{5,\xi} S_5 \quad (A.18)$$

$$N_{11,\eta}^x = \frac{3}{2L_4} P_{4,\eta} C_4 - \frac{3}{2L_6} P_{6,\eta} C_6 \quad , \quad N_{11,\eta}^y = \frac{3}{2L_4} P_{4,\eta} S_4 - \frac{3}{2L_6} P_{6,\eta} S_6 \quad (A.19)$$

$$N_{21,\eta}^x = \frac{3}{2L_5} P_{5,\eta} C_5 - \frac{3}{2L_4} P_{4,\eta} C_4 \quad , \quad N_{21,\eta}^y = \frac{3}{2L_5} P_{5,\eta} S_5 - \frac{3}{2L_4} P_{4,\eta} S_4 \quad (A.20)$$

$$N_{31,\eta}^x = \frac{3}{2L_6} P_{6,\eta} C_6 - \frac{3}{2L_5} P_{5,\eta} C_5 \quad , \quad N_{31,\eta}^y = \frac{3}{2L_6} P_{6,\eta} S_6 - \frac{3}{2L_5} P_{5,\eta} S_5 \quad (A.21)$$

Annexe B

Détails de calcul de la matrice B_f de l'élément SB6-18

$$[B_f] = [[B_{f1}], [B_{f2}]] \quad (B.1)$$

$$[B_{f1}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Les vecteurs N sont données par :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^x \rangle \quad (B.3)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^y \rangle \quad (B.4)$$

Leurs dérivées par rapport à ξ et η :

$$N_{,\xi}^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11,\xi}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21,\xi}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31,\xi}^x \rangle \quad (B.5)$$

$$N_{,\xi}^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11,\xi}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21,\xi}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31,\xi}^y \rangle \quad (B.6)$$

$$N_{,\eta}^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11,\eta}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21,\eta}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31,\eta}^x \rangle \quad (B.7)$$

$$N_{,\eta}^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11,\eta}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21,\eta}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31,\eta}^y \rangle \quad (B.8)$$

Calcul de N_{11}^x N_{21}^x N_{31}^x et N_{11}^y N_{21}^y N_{31}^y :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m \quad , \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (B.9)$$

On à alors pour les trois nœuds (1,2,3) :

$$N_{11}^x = \frac{3}{2L_7} P_7 C_7 - \frac{3}{2L_9} P_9 C_9 \quad , \quad N_{11}^y = \frac{3}{2L_7} P_7 S_7 - \frac{3}{2L_9} P_9 S_9 \quad (B.10)$$

$$N_{21}^x = \frac{3}{2L_8} P_8 C_8 - \frac{3}{2L_7} P_7 C_7 \quad , \quad N_{21}^y = \frac{3}{2L_8} P_8 S_8 - \frac{3}{2L_7} P_7 S_7 \quad (B.11)$$

$$N_{31}^x = \frac{3}{2L_9} P_9 C_9 - \frac{3}{2L_8} P_8 C_8 \quad , \quad N_{31}^y = \frac{3}{2L_9} P_9 S_9 - \frac{3}{2L_8} P_8 S_8 \quad (B.12)$$

Avec :

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k} , S_k = \frac{y_{ij}}{L_k} , L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (B.13)$$

Ce qui nous donne :

$$L_7 = (x_{21}^2 + y_{21}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_8 = (x_{32}^2 + y_{32}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_9 = (x_{13}^2 + y_{13}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$C_7 = \frac{x_{21}}{L_7} , S_7 = \frac{y_{21}}{L_7} \quad (B.14)$$

$$C_8 = \frac{x_{32}}{L_8} , S_8 = \frac{y_{32}}{L_8}$$

$$C_9 = \frac{x_{13}}{L_9} , S_9 = \frac{y_{13}}{L_9}$$

Les fonctions P_7 , P_8 et P_9 sont données par :

$$P_7 = 4 \xi \lambda$$

$$P_8 = 4 \xi \eta \quad (B.15)$$

$$P_9 = 4 \lambda \eta$$

Avec :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

Leurs dérivées par rapport à ξ et η :

$$P_{7,\xi} = 4(1 - 2\xi - \eta) , P_{7,\eta} = -4 \xi$$

$$P_{8,\xi} = 4 \eta , P_{8,\eta} = 4 \xi \quad (B.16)$$

$$P_{9,\xi} = -4 \eta , P_{9,\eta} = 4(1 - 2\eta - \xi)$$

La dérivée des composantes du vecteurs N par rapport à ξ et η se calcule par :

$$N_{11,\xi}^x = \frac{3}{2L_7} P_{7,\xi} C_7 - \frac{3}{2L_9} P_{9,\xi} C_9 \quad , \quad N_{11,\xi}^y = \frac{3}{2L_7} P_{7,\xi} S_7 - \frac{3}{2L_9} P_{9,\xi} S_9 \quad (B.17)$$

$$N_{21,\xi}^x = \frac{3}{2L_8} P_{8,\xi} C_8 - \frac{3}{2L_7} P_{7,\xi} C_7 \quad , \quad N_{21,\xi}^y = \frac{3}{2L_8} P_{8,\xi} S_8 - \frac{3}{2L_7} P_{7,\xi} S_7 \quad (B.18)$$

$$N_{31,\xi}^x = \frac{3}{2L_9} P_{9,\xi} C_9 - \frac{3}{2L_8} P_{8,\xi} C_8 \quad , \quad N_{31,\xi}^y = \frac{3}{2L_9} P_{9,\xi} S_9 - \frac{3}{2L_8} P_{8,\xi} S_8 \quad (B.19)$$

$$N_{11,\eta}^x = \frac{3}{2L_7} P_{7,\eta} C_7 - \frac{3}{2L_9} P_{9,\eta} C_9 \quad , \quad N_{11,\eta}^y = \frac{3}{2L_7} P_{7,\eta} S_7 - \frac{3}{2L_9} P_{9,\eta} S_9 \quad (B.20)$$

$$N_{21,\eta}^x = \frac{3}{2L_8} P_{8,\eta} C_8 - \frac{3}{2L_7} P_{7,\eta} C_7 \quad , \quad N_{21,\eta}^y = \frac{3}{2L_8} P_{8,\eta} S_8 - \frac{3}{2L_7} P_{7,\eta} S_7 \quad (B.21)$$

$$N_{31,\eta}^x = \frac{3}{2L_9} P_{9,\eta} C_9 - \frac{3}{2L_8} P_{8,\eta} C_8 \quad , \quad N_{31,\eta}^y = \frac{3}{2L_9} P_{9,\eta} S_9 - \frac{3}{2L_8} P_{8,\eta} S_8 \quad (B.22)$$

$$[B_{f2}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_6 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_6 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (B.23)$$

Les vecteurs N sont données par :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{51}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{61}^x \rangle \quad (B.24)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{51}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{61}^y \rangle \quad (B.25)$$

Leurs dérivées par rapport à ξ et η :

$$N_{,\xi}^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41,\xi}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{51,\xi}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{61,\xi}^x \rangle \quad (B.26)$$

$$N_{,\xi}^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41,\xi}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{51,\xi}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{61,\xi}^y \rangle \quad (B.27)$$

$$N_{,\eta}^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41,\eta}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{51,\eta}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{61,\eta}^x \rangle \quad (B.28)$$

$$N_{,\eta}^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41,\eta}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{51,\eta}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{61,\eta}^y \rangle \quad (B.29)$$

Calcul de N_{41}^x N_{51}^x N_{61}^x et N_{41}^y N_{51}^y N_{61}^y :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m \quad , \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (B.30)$$

On à alors pour les trois nœuds (4,5,6) :

$$N_{41}^x = \frac{3}{2L_{10}} P_{10} C_{10} - \frac{3}{2L_{12}} P_{12} C_{12} \quad , \quad N_{41}^y = \frac{3}{2L_{10}} P_{10} S_{10} - \frac{3}{2L_{12}} P_{12} S_{12} \quad (B.31)$$

$$N_{51}^x = \frac{3}{2L_{11}} P_{11} C_{11} - \frac{3}{2L_{10}} P_{10} C_{10} \quad , \quad N_{51}^y = \frac{3}{2L_{11}} P_{11} S_{11} - \frac{3}{2L_{10}} P_{10} S_{10} \quad (B.32)$$

$$N_{61}^x = \frac{3}{2L_{12}} P_{12} C_{12} - \frac{3}{2L_{11}} P_{11} C_{11} \quad , \quad N_{61}^y = \frac{3}{2L_{12}} P_{12} S_{12} - \frac{3}{2L_{11}} P_{11} S_{11} \quad (B.33)$$

Avec :

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k} \quad , \quad S_k = \frac{y_{ij}}{L_k} \quad , \quad L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (B.34)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} L_{10} &= (x_{54}^2 + y_{54}^2)^{\frac{1}{2}} \\ L_{11} &= (x_{65}^2 + y_{65}^2)^{\frac{1}{2}} \\ L_{12} &= (x_{46}^2 + y_{46}^2)^{\frac{1}{2}} \\ C_{10} &= \frac{x_{54}}{L_{10}} \quad , \quad S_{10} = \frac{y_{54}}{L_{10}} \\ C_{11} &= \frac{x_{65}}{L_{11}} \quad , \quad S_{11} = \frac{y_{65}}{L_{11}} \\ C_{12} &= \frac{x_{46}}{L_{12}} \quad , \quad S_{12} = \frac{y_{46}}{L_{12}} \end{aligned} \quad (B.35)$$

Les fonctions P_{10} , P_{11} et P_{12} sont données par :

$$\begin{aligned} P_{10} &= 4 \xi \lambda \\ P_{11} &= 4 \xi \eta \\ P_{12} &= 4 \lambda \eta \end{aligned} \quad (B.36)$$

Avec :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

Leurs dérivées par rapport à ξ et η :

$$\begin{aligned} P_{10,\xi} &= 4(1 - 2\xi - \eta) & , & & P_{10,\eta} &= -4\xi \\ P_{11,\xi} &= 4\eta & , & & P_{11,\eta} &= 4\xi \end{aligned} \quad (B.37)$$

$$P_{12,\xi} = -4\eta \quad , \quad P_{12,\eta} = 4(1 - 2\eta - \xi)$$

La dérivée des composantes du vecteurs N par rapport à ξ et η se calcule par :

$$N_{41,\xi}^x = \frac{3}{2L_{10}} P_{10,\xi} C_{10} - \frac{3}{2L_{12}} P_{12,\xi} C_{12} \quad , \quad N_{41,\xi}^y = \frac{3}{2L_{10}} P_{10,\xi} S_{10} - \frac{3}{2L_{12}} P_{12,\xi} S_{12} \quad (B.38)$$

$$N_{51,\xi}^x = \frac{3}{2L_{11}} P_{11,\xi} C_{11} - \frac{3}{2L_{10}} P_{10,\xi} C_{10} \quad , \quad N_{51,\xi}^y = \frac{3}{2L_{11}} P_{11,\xi} S_{11} - \frac{3}{2L_{10}} P_{10,\xi} S_{10} \quad (B.39)$$

$$N_{61,\xi}^x = \frac{3}{2L_{12}} P_{12,\xi} C_{12} - \frac{3}{2L_{11}} P_{11,\xi} C_{11} \quad , \quad N_{61,\xi}^y = \frac{3}{2L_{12}} P_{12,\xi} S_{12} - \frac{3}{2L_{11}} P_{11,\xi} S_{11} \quad (B.40)$$

$$N_{41,\eta}^x = \frac{3}{2L_{10}} P_{10,\eta} C_{10} - \frac{3}{2L_{12}} P_{12,\eta} C_{12} \quad , \quad N_{41,\eta}^y = \frac{3}{2L_{10}} P_{10,\eta} S_{10} - \frac{3}{2L_{12}} P_{12,\eta} S_{12} \quad (B.41)$$

$$N_{51,\eta}^x = \frac{3}{2L_{11}} P_{11,\eta} C_{11} - \frac{3}{2L_{10}} P_{10,\eta} C_{10} \quad , \quad N_{51,\eta}^y = \frac{3}{2L_{11}} P_{11,\eta} S_{11} - \frac{3}{2L_{10}} P_{10,\eta} S_{10} \quad (B.42)$$

$$N_{61,\eta}^x = \frac{3}{2L_{12}} P_{12,\eta} C_{12} - \frac{3}{2L_{11}} P_{11,\eta} C_{11} \quad , \quad N_{61,\eta}^y = \frac{3}{2L_{12}} P_{12,\eta} S_{12} - \frac{3}{2L_{11}} P_{11,\eta} S_{11} \quad (B.43)$$

On peut récrire la relation (B.1), en utilisant les relations (B.2) et (B.23) :

$$[B_f] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \langle y_3 \langle N_\xi^x \rangle - y_2 \langle N_\eta^x \rangle \rangle & \langle y_6 \langle N_\xi^x \rangle - y_5 \langle N_\eta^x \rangle \rangle \\ \langle -x_3 \langle N_\xi^y \rangle + x_2 \langle N_\eta^y \rangle \rangle & \langle -x_6 \langle N_\xi^y \rangle + x_5 \langle N_\eta^y \rangle \rangle \\ \langle -x_3 \langle N_\xi^x \rangle + x_2 \langle N_\eta^x \rangle + y_3 \langle N_\xi^y \rangle - y_2 \langle N_\eta^y \rangle \rangle & \langle -x_6 \langle N_\xi^x \rangle + x_5 \langle N_\eta^x \rangle + y_6 \langle N_\xi^y \rangle - y_5 \langle N_\eta^y \rangle \rangle \end{bmatrix}$$

Annexe C
Détails de calcul des matrices B_{ma} et B_{mc} de l'élément SB6–18 en non linéaire géométrique

$$[B_{ma}]_{(3 \times 18)} = [[B_{ma1}][B_{ma2}]] \quad (C.1)$$

$$[B_{mc}]_{(3 \times 18)} = [[B_{mc1}][B_{mc2}]] \quad (C.2)$$

B_{ma1} et B_{ma2} sont données par :

$$[B_{ma1}]_{(3 \times 9)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^u \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ y_3 \langle N_{,\xi}^v \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ y_3 \langle N_{,\xi}^w \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$[B_{ma2}]_{(3 \times 9)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_6 \langle N_{,\xi}^u \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ y_6 \langle N_{,\xi}^v \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ y_6 \langle N_{,\xi}^w \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

B_{mc1} et B_{mc2} sont données par :

$$[B_{mc1}]_{(3 \times 9)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} -x_3 \langle N_{,\xi}^u \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^v \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^w \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

$$[B_{mc2}]_{(3 \times 9)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} -x_6 \langle N_{,\xi}^u \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^v \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^w \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

Les vecteurs N sont données par :

$$N^u = \langle N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ N_3 \ 0 \ 0 \ N_4 \ 0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6 \ 0 \ 0 \rangle \quad (C.7)$$

$$N^v = \langle 0 \ N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ N_3 \ 0 \ 0 \ N_4 \ 0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6 \ 0 \rangle \quad (C.8)$$

$$N^w = \langle 0 \ 0 \ N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ N_3 \ 0 \ 0 \ N_4 \ 0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6 \rangle \quad (C.9)$$

Avec :

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\eta$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\xi$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)(1 - \eta - \xi)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1 + \zeta)\eta \tag{C.10}$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 + \zeta)\xi$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \zeta)(1 - \eta - \xi)$$

Leurs dérivées par rapport à ξ et η :

$$N_{1,\xi} = 0 \quad , \quad N_{1,\eta} = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$$

$$N_{2,\xi} = \frac{1}{2}(1 - \zeta) \quad , \quad N_{2,\eta} = 0$$

$$N_{3,\xi} = -\frac{1}{2}(1 - \zeta) \quad , \quad N_{3,\eta} = -\frac{1}{2}(1 - \zeta)$$

$$N_{4,\xi} = 0 \quad , \quad N_{4,\eta} = \frac{1}{2}(1 + \zeta) \tag{C.11}$$

$$N_{5,\xi} = \frac{1}{2}(1 + \zeta) \quad , \quad N_{5,\eta} = 0$$

$$N_{6,\xi} = -\frac{1}{2}(1 + \zeta) \quad , \quad N_{6,\eta} = -\frac{1}{2}(1 + \zeta)$$

Annexe D

Algorithme de résolution en non linéaire géométrique

Algorithme de résolution en non linéaire géométrique

Initialisation des déplacements $U = U_0$

Initialisation des résidus $R = \Delta P$

Initialisation de compteur de nombre de pas à zéro $i = 0$

while $i \leq (\text{Nbr de pas})$

Initialisation de compteur de nombre des itérations à zéro $\text{iter} = 0$

Initialisation de la norme des résidus $\text{Norm}_R = 1$

Calcul de la matrice tangente $\text{KNL}(U)$

while $(\text{iter} \leq \text{itermax} \ \& \ \text{Norm}_R \geq 10^{-3})$

$u = \text{inv}(\text{KNL}) \times R$

calcul de $\text{KNL}(u)$

calcul de $\text{Fint}(u)$ Fint : le vecteur des forces intérieures

$R = R - \text{Fint}$

Calcul de la norme des résidus Norm_R

$\text{Iter} = \text{iter} + 1$ incrémentation du nombre d'itérations

end while

$U = U + u$ calcul du nouveau vecteur de déplacement

$i = i + 1$ incrémentation du nombre de pas de chargement

end while
