

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie Civil et Hydraulique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم : الهندسة المدنية و الري
المرجع :

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat LMD en Génie Civil

Option : Modélisation numérique en génie civil

Eléments finis membranaires et flexionnels à champ de déformation pour l'analyse des structures

Présentée par :

BELOUNAR Abderahim

Soutenue publiquement le : 26/06/2019

Devant le jury composé de :

Pr. Tati Abdelouhab	Professeur	Président	Université de Biskra
Pr. Benmebarek Sadok	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Pr. Belounar Lamine	Professeur	Co-rapporteur	Université de Biskra
Dr. Messameh Abdelhamid	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Biskra
Dr. Gueraiche Khelifa	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Batna 2

À mes parents et mes frères et soeur

ma famille

et mes amis.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements à mon directeur de thèse, Professeur Sadok **BENMEBAREK**, qui m'a dirigé durant la période de la thèse avec grande patience et bonne humeur. Je tiens en particulier le remercier pour sa motivation et son enthousiasme constants à nous faire partager ses connaissances, son expérience et ses projets.

Je remercie également à mon co-directeur de thèse, Professeur Lamine **BELOUNAR** pour sa confiance sa disponibilité pendant les quatre années de travail de thèse de doctorat.

Je tiens à remercier, Professeur Abdelouhab **TATI**, d'avoir accepté de présider cette soutenance. Ainsi que les membres de jury Dr. Khelifa **GUERAICHE** de l'Université de Batna, et Dr. Abdelhamid **MESSAMEH**, qui ont accepté d'être examinateurs. Je les remercie très sincèrement.

J'exprime mes vifs remerciements aux enseignants du département de Génie Civil de l'Université de Biskra.

Des remerciements chaleureux vont aussi aux membres du laboratoire MN2I2S en particulier Pr. Naima **BENMEBAREK**, Dr. Mohamed Nabil **HOUHOU**, Dr. Mohamed Saddek **REMADNA**, ainsi que mes collègues doctorants, Lemmouchi **BOUZIDI**, Abderraouf **MESSAI**, Lahcen **FORTAS**, Abdelkader **DRAM**, Houssam **KHIOUANI**, Abdeljalil **REMADNA**.

Résumé

Ce travail concerne la formulation et l'évaluation d'éléments finis de type membrane, plaque en flexion avec CT et coque pour l'analyse des structures. Ces éléments sont basés sur l'approche en déformation et ne possèdent que des degrés de liberté essentiels. La première partie de la thèse concerne le développement d'un élément de membrane quadrilatère avec rotation (θ_z) dans le plan pour l'étude statique et en vibration libre. Cet élément nommé SBQM à cinq nœuds possède 3ddl par nœud (U, V et θ_z) pour les quatre nœuds de coin et seulement 2ddl (U et V) au nœud central. La technique de condensation statique est utilisée pour l'élimination des 2ddl du nœud central.

La deuxième partie consiste à la formulation et la validation d'éléments plaque type Mindlin SBTMP (triangle à 3 nœuds et 3 ddl/nœud), SBTP4 (triangle à 4 nœuds et 3ddl/nœud) et SBQP (quadrilatère à 4 nœuds et 3ddl/nœud). Pour l'élément SBTMP, les courbures (κ_x , κ_y et κ_{xy}) du champ des déformations imposé varient linéairement par contre les déformations de CT (γ_{xz} et γ_{yz}) sont constantes et découplées des courbures. Les deux autres éléments (SBTP4 et SBQP) ont le même champ de déformation imposé dont les courbures (κ_x , κ_y et κ_{xy}) et les déformations du cisaillement transversal (γ_{xz} et γ_{yz}) sont indépendantes et varient tous (κ_x , κ_y , κ_{xy} , γ_{xz} et γ_{yz}) linéairement. Les trois éléments formulés ont vérifié le test de blocage en CT et passent le patch-test des modes rigides et le patch-test mécanique. Ces éléments ont permis d'obtenir des résultats performants pour tous les exemples de plaque isotrope traités. D'autre part, un élément rectangulaire à quatre nœuds basé sur la théorie du premier ordre (FSDT) a été formulé pour l'étude statique et en vibration libre des plaques en matériaux composites. Cet élément nommé SBRLP est une combinaison d'un élément membranaire basé sur l'approche en déformation SBRIE à deux ddl (u, v) par nœud et de l'élément flexionnel développé SBQP à trois ddl (w , β_x , et β_y) par nœud.

L'approche par facettes planes est retenue pour formuler un élément coque rectangulaire SBRS à quatre nœuds et six ddl/nœud ou l'élément quadrilatère plaque Mindlin SBQP est superposé à l'élément membranaire SBRIE. Cet élément contenant seulement les six degrés de liberté essentiels par nœud (U, V, W, θ_x , θ_y et θ_z) est destiné à l'analyse statique des coques cylindriques isotropes. Des cas-tests de coque, considérés comme outils de validation d'éléments de coque, sont traités.

Mots clés: Approche en déformation, Vibration libre, Flambement, Élément Mindlin, Rotation dans le plan, Élément coque

Abstract

This work deals with the formulation and the evaluation of finite elements of type membrane, plate in bending and shell for the analysis of structures. These elements based on the strain approach possess only essential degrees of freedom. The first part of the thesis concerns the development of a quadrilateral membrane element with in-plane rotation (θ_z) around the normal for static and free vibration. This five-node element named SBQM has 3ddl per node (U, V and θ_z) for the four corner nodes and 2 ddl (U and V) at the central node. The static condensation technique is used for the elimination of the two ddl of the central node.

The second part concerns the formulation and the validation of Mindlin plate elements SBTMP (triangle with 3 nodes and 3 dof/node), SBTP4 (triangle with 4 nodes and 3dof/node) and SBQP (quadrilateral with 4 nodes and 3dof/node). For the SBTMP element, the curvatures (κ_x , κ_y and κ_{xy}) of the imposed strains vary linearly, whereas transverse shear strains (γ_{xz} and γ_{yz}) are constant and decoupled from the curvatures. The two other elements (SBTP4 and SBQP) have the same imposed strains field where curvatures (κ_x , κ_y and κ_{xy}) and transverse shear strains (γ_{xz} and γ_{yz}) are independent and all (κ_x , κ_y , κ_{xy} , γ_{xz} and γ_{yz}) vary linearly. The three formulated elements have verified the shear locking test and pass the patch-test of the rigid modes and the mechanical patch-test. These elements have allowed to obtain powerful results for all examples of isotropic plate treated. On the other hand, a four-node rectangular element based on the first-order theory (FSDT) has been formulated for static and free-vibration analysis of laminated composite plates. This element named SBRLP is a combination of the membrane element SBRIE with two dof (u, v) per node and the developed plate element SBQP with three dof (w, β_x , and β_y) per node.

The planar facet approach is used to formulate a four-node rectangular shell element (SBRS) with six dof/node where the quadrilateral Mindlin plate element (SBQP) is superposed with the membrane element (SBRIE). This element having only the six essential degrees of freedom per node (U, V, W, θ_x , θ_y and θ_z) is intended for the static analysis of isotropic cylindrical shells. Benchmark tests, considered as validation tools of shell elements, are treated.

Keywords: Strain approach, Free vibration, Buckling, Mindlin plate, Drilling rotation, shell element

ملخص

يتعلق هذا العمل بصياغة وتقييم العناصر المحدودة من نوع غشائي، صفيحة الانحناء (CT) وقشرية لتحليل مختلف أنواع السلوكيات الهيكلية (الساكنة، الاهتزاز الحر والالتواء). تستند هذه العناصر على نهج التشوه وتمتلك فقط درجات أساسية من الحرية. يتعلق الجزء الأول من الأطروحة بتطوير عنصر غشاء رباعي مع احتواءه على الدوران (θ_z) كدرجة حرية إضافية لدراسة التحليل الساكن والاهتزاز الحر. هذا العنصر (SBQM) المكون من خمس عقد يحتوي على ثلاث درجات حرية لكل عقدة (U و V و θ_z) من عقده الزوايا الأربع بينما تحتوي العقدة المركزية على الانتقالين (U و V). يتم استخدام تقنية التكنيف الساكن للتخلص من العقدة الداخلية الخامسة.

أما الجزء الثاني فيتعلق بصياغة والتحقق من عناصر من نوع صفيحة Mindlin (SBTMP): (مثلث مع 3 عقد و 3 درجات حرية / عقدة)، SBTP4 (مثلث مع 4 عقد و 3 درجات حرية / عقدة) و SBQP (رباعي الأطراف مع 4 عقد و 3 درجات حرية / عقدة). العنصر (SBTMP) يحتوي على حقل تشوه مفروض يتغير منحنياته ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$) بشكل خطي، بينما تكون تشوهات القص العرضي (γ_{xz} et γ_{yz}) ثابتة ومفصلة على الانحناءات. أما العنصران الآخران (SBQP و SBTP4) فيمتلكان على نفس حقل تشوه مفروض والذي تكون منحنياتها ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$) وتشوهات القص العرضي (γ_{xz} et γ_{yz}) مستقلة وكلها ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}$ et γ_{yz}) تتغير بشكل خطي. تحققنا من أن العناصر الثلاثة المصاغة خالية من قفل القص العرضي وتتمرر اختبار التصحيح للأوضاع المتصلبة واختبار التصحيح الميكانيكي وتجعل من الممكن الحصول على نتائج قوية لجميع الأمثلة العددية للصفائح المتناحية.

من ناحية أخرى، تم صياغة عنصر مستطيل رباعي العقد على أساس نظرية الترتيب الأول (FSDT) للتحليل الساكن والاهتزاز الحر للصفائح المركبة. العنصر المصاغ، SBRLP هو مزيج من عنصر الغشاء SBRIE مع اثنين من درجات الحرية (u, v) لكل عقدة وعنصر الصفيحة المطورة SBQP مع ثلاث درجات الحرية ($w, \beta_x, \text{ et } \beta_y$) لكل عقدة.

بالنسبة للقشريات، يتم استخدام أسلوب وجه المستوي لصياغة عنصر مستطيل مكون من أربع عقد (SBRS) مع ست درجات حرية / عقدة حيث يتم تجميع عنصر الصفيحة الرباعي (SBQP) مع عنصر الغشاء (SBRIE). هذا العنصر الذي يحتوي فقط على ست درجات أساسية من الحرية لكل عقدة ($U, V, W, \theta_x, \theta_y, \text{ et } \theta_z$) مخصص للتحليل الساكن للقشريات الأسطوانية المتناحية. تمت اجراء الاختبارات المعيارية كأدوات التحقق من للعناصر القشرية

الكلمات المفتاحية: مبدأ التشوه، الاهتزاز الحر، الالتواء، صفيحة Mindlin، دوران، عنصر قشرية

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
ملخص	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xiii
Notations	xviii
Introduction générale	1
1. Introduction	1
2. Objectifs de la thèse	2
3. Plan de la thèse	2

Chapitre 1 : Etude bibliographique et équations de base

1.1 Etude bibliographique sur les éléments à champ de déformation	4
1.1.1 Eléments membranaires	4
1.1.2 Eléments flexionnels	5
1.1.3 Eléments coques	5
1.2 Equations de base d'élasticité plane	7
1.2.1 Relation déformations-déplacements (relation cinématiques)	8
1.2.2 Equation d'équilibre	8
1.2.3 Equation de compatibilité	8
1.2.4 Relation contraintes-déformations (équations constitutives)	8
1.3 Théorie des plaques épaisses en flexion (Reissner-Mindlin)	9
1.3.1 Champs de déplacements et de déformations	11
1.3.2 Equations d'équilibre	12
1.3.3 Loi de comportement élastique	12
1.3.4 Formulation variationnelle faible	13
1.4 Aperçu sur les théories de structures stratifiées	14
1.4.1 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre des plaques stratifiées. ..	15
1.4.1.1 Hypothèses cinématiques, et relations déplacements-déformations ..	15
1.4.1.2 Equations constitutives	17

1.4.1.3	Relations efforts résultants-déformations	18
1.5	Blocage en cisaillement transverse (verrouillage en CT)	20
1.5.1	Description de l'aspect analytique du verrouillage	20
1.6	Procédure de la formulation des éléments à champ de déformation	21
1.6.1	Déformations imposées de quelques éléments existants dans la littérature	21
1.6.1.1	Eléments membranaires	21
1.6.1.2	Eléments plaques	23
1.6.1.3	Eléments coques	24

Chapitre 2 : Développement d'un élément fini membranaire basé sur l'approche en déformation

2.1	Introduction	25
2.2	Evaluation du champ des déplacements et des matrices élémentaires de l'élément SBQM	26
2.3	Validation de l'élément SBQM	34
2.3.1	Etude du panneau fuselé de Cook	34
2.3.2	Poutre console soumise à un moment de flexion	35
2.3.3	Flexion plane d'une poutre encastree	36
2.3.4	Poutre console élancée de MacNeal	37
2.3.5	Cylindre épais sous pression interne	38
2.3.6	Poutre console circulaire épaisse sous une charge de cisaillement	39
2.3.7	Poutre console circulaire mince sous un chargement de cisaillement	40
2.3.8	Vibration libre d'un mur console	41
2.3.9	Vibration libre d'une poutre console	41
2.3.10	Vibration libre d'une poutre console à section variable	42
2.3.11	Vibration libre d'un mur avec ouvertures	43
2.4	Conclusion	44

Chapitre 3 : Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini triangulaire de plaque à champ de déformation

3.1	Introduction	45
3.2	Formulation de l'élément SBTMP	46
3.2.1	Dérivation du champ des déplacements	46

3.2.2	Evaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse	48
3.3	Validation numérique	49
3.3.1	Patch-test de modes rigides	49
3.3.2	Patch-test mécanique	49
3.3.3	Plaque carrée en torsion	50
3.3.4	Poutre console soumise à une force concentrée	50
3.3.5	Analyse statique et vibration libre des plaques	51
3.3.6	Plaques carrées	51
3.3.7	Plaque biaise de Morley	57
3.3.8	Plaque biaise encastree	58
3.3.9	Plaque biaise console	59
3.3.10	Plaque biaise avec différentes conditions aux limites	60
3.3.11	Plaque circulaire sous chargement uniforme	61
3.3.12	Vibration libre des plaques carrées	63
3.3.13	Vibration libre d'une plaque biaise	67
3.3.14	Vibration libre des plaques circulaires	68
3.4	Conclusion	70

Chapitre 4 : Amélioration de l'élément fini de plaque SBRP de type Reissner-Mindlin

4.1	Introduction	71
4.2	Formulation des éléments proposés	73
4.2.1	Dérivation du champ des déplacements	73
4.2.2	Matrices élémentaires	77
4.3	Validation numérique des éléments formulés	78
4.3.1	Patch-test de modes rigides	78
4.3.2	Patch-test mécanique	79
4.3.3	Plaque carrée isotrope sous chargement uniforme	80
4.3.4	Plaques biaises	86
4.3.5	Vibration libre des plaques carrées	88
4.3.6	Vibration libre des plaques de parallélogramme	93
4.3.7	Vibration libre d'une plaque circulaire encastree	94
4.3.8	Vibration libre des plaques triangulaires	96

4.3.9	Vibration libre des plaques avec raidisseurs	99
4.3.10	Vibration libre d'une plaque rectangulaire avec un trou central	100
4.3.11	Flambage d'une plaque carrée sous un effort uni-axial	101
4.3.12	Flambage d'une plaque carrée sous un effort biaxial	103
4.4	Formulation et validation de l'élément SBRLP	104
4.4.1	Exemples numériques	107
4.4.1.1	Plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une charge uniforme.	107
4.4.1.2	Plaques carrées stratifiées soumises à une charge uniformément répartie.....	109
4.4.1.3	Vibrations libres des plaques composites stratifiées	110
4.4.1.4	Effet du nombre de couches et du degré d'orthotropie sur la fréquence fondamentale	112
4.5	Conclusion	113

Chapitre 5 : Élément fini de coque rectangulaire à facette plane

5.1	Introduction	115
5.2	Modèle de coque à facette plane	116
5.2.1	Description de l'élément coque formulé SBRS	116
5.2.2	Formulation de l'élément coque SBRS	117
5.2.2.1	Matrice de rigidité de membrane	117
5.2.2.2	Matrice de rigidité de flexion/CT	118
5.2.2.3	Rigidité fictive	118
5.2.2.4	Passage dans le repère global	119
5.3	Validation numérique	120
5.3.1	Panneau cylindrique sous son poids propre	120
5.3.2	Cylindre pincé avec diaphragmes rigides	122
5.3.3	Cylindre pincé court à bord libre	125
5.3.4	Poutre console courbe soumise à des charges statiques	127
5.4	Conclusion	128
	Conclusion générale	129
	Références bibliographiques	131

Liste des figures

Chapitre 1 : Etude bibliographique et équations de base

Figure 1.1 :	Corps solide soumis à des forces de volume (f_i) et de surfaces (ϕ_i)....	7
Figure 1.2 :	Modèle en contrainte plane (a) et modèle en déformation plane (b)...	7
Figure 1.3 :	Description d'une plaque.....	9
Figure 1.4 :	Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène.....	10
Figure 1.5 :	Conventions générales.....	11
Figure 1.6 :	Modélisation d'un stratifié par l'approche monocouche (ESL) et l'approche par-couche (LW).....	14
Figure 1.7 :	Systèmes de coordonnées et positions de couche définis dans un stratifié.....	15
Figure 1.8 :	Géométries déformées et non déformées d'un bord libre d'une plaque sous l'hypothèse du premier ordre (FSDT).....	16

Chapitre 2 : Développement d'un élément fini membranaire basé sur l'approche en déformation

Figure 2.1 :	Elément quadrilatérale membrane avec rotation dans le plan.....	26
Figure 2.2 :	Panneau de Cook modélisé par un maillage (2x2)	29
Figure 2.3 :	Poutre console modélisée avec deux éléments quadrilatéraux.....	35
Figure 2.4 :	Déplacement vertical normalisé au point A de la poutre console.....	36
Figure 2.5 :	Poutre en flexion plane (Données et maillages).....	37
Figure 2.6 :	Poutre console élancée de MacNeal (Données et maillages).....	38
Figure 2.7 :	Cylindre épais sous pression interne (Données et maillage).....	39
Figure 2.8 :	Poutre console circulaire épaisse modélisée avec (4x1) éléments quadrilatéraux.....	39
Figure 2.9 :	Poutre console circulaire mince modélisée avec (6x1) éléments quadrilatéraux.....	40
Figure 2.10 :	Vibrations libres d'un mur en cisaillement.....	41
Figure 2.11 :	Vibrations libres d'une poutre console.....	42
Figure 2.12 :	Vibration libre d'une poutre console trapézoïdale.....	43

Figure 2.13 : Mur en cisaillement avec quatre ouvertures en utilisant 559 éléments.....	44
--	----

Chapitre 3 : Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini triangulaire de plaque à champ de déformation

Figure 3.1 : Élément triangulaire plaque Mindlin.....	46
Figure 3.2 : Patch-test mécanique pour l'élément Mindlin à trois nœuds (E=1000, $\nu=0.3$).....	49
Figure 3.3 : Torsion d'une plaque carrée (L=8, h=1, P=5, E=10000, $\nu=0.3$, $k=10^5$).....	50
Figure 3.4 : Poutre console soumise à une charge concentrée (L=10, b=1, P=0.1, E=1.2x10 ⁶ , $\nu=0$, $k=5/6$).....	51
Figure 3.5 : Plaque carrée avec un maillage de NxN (L=10, E=10.92, $\nu=0.3$, $k=5/6$).....	52
Figure 3.6 : Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha qL^4 / D$) d'une plaque simplement supportée sous charge uniforme.....	53
Figure 3.7 : Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha qL^4 / D$) d'une plaque encastree sous charge uniforme.....	54
Figure 3.8 : Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha PL^2 / D$) d'une plaque simplement supportée sous charge concentrée.....	55
Figure 3.9 : Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha PL^2 / D$) d'une plaque encastree sous charge concentrée.....	56
Figure 3.10 : Plaque biaise avec un maillage NxN (L=2a=10, E=10.92, $\nu=0.3$, $k=5/6$).....	57
Figure 3.11 : Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha qL^4 / D$) d'une plaque biaise simplement supportée sous charge uniforme.....	57
Figure 3.12 : Maillage d'une plaque circulaire (R=5, E=10.92, $\nu=0.3$, t=0.1, q=1).....	62
Figure 3.13 : Convergence de la flèche au centre d'une plaque circulaire sous charge uniforme.....	62
Figure 3.14 : Plaque carrée avec un maillage de NxN.....	63
Figure 3.15 : Quatre premiers modes propres d'une plaque carrée SCSC (h/L =0.1).....	67

Figure 3.16 :	Quatre premiers modes propres d'une plaque carrée CCCF ($h/L=0.01$).....	67
Figure 3.17 :	Quatre premiers modes propres d'une plaque biaise encastree ($h/L=0.001$).....	68
Figure 3.18 :	Maillage d'une plaque circulaire (600 éléments triangulaires).....	69
Figure 3.19 :	Modes propres d'une plaque circulaire simplement supportée ($h/R=0.1$).....	69

Chapitre 4 : Amélioration de l'élément fini de plaque SBRP de type Reissner-Mindlin

Figure 4.1 :	Eléments quadrilatère SBQP et triangulaire SBTP4 de type plaque Reissner Mindlin.....	73
Figure 4.2 :	Patch-test mécanique pour les éléments Mindlin quadrilatère et triangulaire ($E=1000, \nu=0.3$).....	79
Figure 4.3 :	Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$ ($L=10, E=10.92, \nu=0.3,$ $k=5/6$).....	80
Figure 4.4 :	Influence de l'élanement (L/h) d'une plaque encastree sous charge uniforme.....	81
Figure 4.5 :	Convergence de la flèche au centre ($(WD/qL^4)100$) d'une plaque encastree sous charge uniforme.....	83
Figure 4.6 :	Convergence de la flèche au centre ($(WD/qL^4)100$) d'une plaque simplement supportée (SS1) sous charge uniforme.....	84
Figure 4.7 :	Convergence de la flèche au centre ($(WD/qL^4)100$) d'une plaque simplement supportée (SS2) sous charge uniforme.....	85
Figure 4.8 :	Plaques biaises (a Razzaque, b Morley), maillages $N \times N$ ($L=100,$ $E=10.92, \nu=0.3, k=5/6$).....	86
Figure 4.9 :	Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaise (Razzaque).....	87
Figure 4.10 :	Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaise (Morley)...	88
Figure 4.11 :	Fréquences propres d'une plaque carrée simplement supportée avec un maillage 4×4	91
Figure 4.12 :	Fréquences propres d'une plaque carrée encastree avec un maillage 22×22	91

Figure 4.13 :	Modes propres d'une plaque carrée SSSF pour l'élément SBQP	92
Figure 4.14 :	Modes propres d'une plaque carrée CFCF pour l'élément SBTP4 ...	93
Figure 4.15 :	Plaque console biaise avec un maillage $N \times N$	93
Figure 4.16 :	Modes propres d'une plaque console biaise ($h/L=0.2$).....	94
Figure 4.17 :	Maillage d'une plaque circulaire (384 quadrilatères et 384×2 triangles).....	95
Figure 4.18 :	Modes propres d'une plaque circulaire ($h/2R=0.01$).....	96
Figure 4.19 :	Maillage d'une plaque console triangulaire.....	97
Figure 4.20 :	Modes propres d'une plaque console triangulaire ($\alpha=45^\circ$) avec ($h/L=0.001$).....	98
Figure 4.21 :	Plaque carrée simplement supportée avec deux raidisseurs ($E=71200$ MPa, $\rho=2700$ kg/m ³).....	99
Figure 4.22 :	Plaque carrée simplement supportée à épaisseur variable. ($E=71200$ MPa, $\rho=2700$ kg/m ³).....	100
Figure 4.23 :	Modes propres d'une Plaque simplement supportée à section variable ($h_2/h_1=2$).....	100
Figure 4.24 :	Plaque rectangulaire avec un trou central ($a/b=9/8$, $h/a=0.01$, $\nu=0.3$, $k=5/6$).....	101
Figure 4.25 :	Modes propres d'une Plaque rectangulaire avec un trou central.....	101
Figure 4.26 :	Plaque carrée soumise à une compression uni-axiale.....	102
Figure 4.27 :	Convergence de la charge critique du flambement (K^h/ K_{exact}) d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).....	103
Figure 4.28 :	Plaque carrée soumise à une compression bi-axiale.....	104
Figure 4.29 :	Élément de plaque composite rectangulaire.....	104
Figure 4.30 :	Plaque sandwich carrée simplement appuyée sous charge uniforme.....	108

Chapitre 5 : Élément fini de coque rectangulaire à facette plane

Figure 5.1 :	Élément de coque rectangulaire à facette plane SBRS	116
Figure 5.2 :	Panneau cylindrique soumis à son poids propre.....	121
Figure 5.3 :	Convergence du déplacement vertical W_B du Panneau cylindrique soumis à son poids propre.....	121

Figure 5.4 :	Convergence du déplacement vertical W_C du Panneau cylindrique soumis à son poids propre.....	122
Figure 5.5 :	Cylindre pincé avec diaphragmes.....	123
Figure 5.6 :	Convergence de W_C pour un cylindre pincé avec diaphragmes ($R/h=10$).....	123
Figure 5.7 :	Convergence de W_C pour un cylindre pincé avec diaphragmes ($R/h=100$).....	124
Figure 5.8 :	Convergence de V_d pour un cylindre pincé avec diaphragmes ($R/h=100$).....	124
Figure 5.9 :	Cylindre pincé court à bords libres.....	125
Figure 5.10 :	Convergence de W_C pour un cylindre pincé court à bords libres ($h=0.094$).....	126
Figure 5.11 :	Convergence de W_C pour un cylindre pincé court à bords libres ($h=0.01548$).....	126
Figure 5.12 :	Poutre console circulaire mince modélisée avec (6x1) éléments.....	127

Liste des tableaux

Chapitre 1 : Etude bibliographique et équations de base

Tableau 1.1 : Interpolations des déplacements (W , β_x et β_y) et des déformations ($\{\kappa\}$ et $\{\gamma\}$).....	21
---	----

Chapitre 2 : Développement d'un élément fini membranaire basé sur l'approche en déformation

Tableau 2.1 : Liste des éléments de comparaisons	33
Tableau 2.2 : Déplacement vertical normalisé au point C	34
Tableau 2.3 : Déplacement vertical normalisé au point A ($V_A^{\text{ref}} = 100$) de la poutre console	35
Tableau 2.4 : Déplacement vertical V_A d'une poutre en flexion plane	37
Tableau 2.5 : Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre de la poutre de MacNeal	38
Tableau 2.6 : Déplacement vertical normalisé d'un cylindre épais sous pression interne	38
Tableau 2.7 : Déplacement vertical normalisé au point A d'une poutre console circulaire épaisse	40
Tableau 2.8 : Déplacement vertical normalisé au point A d'une poutre console circulaire mince	40
Tableau 2.9 : Cinq premières fréquences propres (Hz) d'un mur en cisaillement.	41
Tableau 2.10 : Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une poutre console ($f_1 = 0.08276 \times 10^4$ Hz)	42
Tableau 2.11 : Quatre premières fréquences propres ($\times 10^3$ rad/s) d'une poutre console trapézoïdale	43
Tableau 2.12 : Six premières fréquences propres (rad/s) d'un mur en cisaillement.	43

Chapitre 3 : Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini triangulaire de plaque à champ de déformation

Tableau 3.1 :	Patch-test mécanique pour l'élément SBTMP	50
Tableau 3.2 :	Torsion d'une plaque carrée.....	50
Tableau 3.3 :	Déplacement vertical (W) à l'extrémité libre d'une poutre console.	51
Tableau 3.4 :	Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaise de Morley.....	58
Tableau 3.5 :	Plaque biaise encastree sous charge uniforme (L=2a).....	58
Tableau 3.6 :	Plaque biaise encastree sous charge concentree (L=2a).....	58
Tableau 3.7 :	Plaque console biaise sous charge uniforme (L=2a).....	59
Tableau 3.8 :	Plaque console biaise sous charge concentree à l'extrémité libre (L=2a).....	60
Tableau 3.9 :	Plaque biaise sous charge concentree avec deux conditions de bords (L=2a).....	61
Tableau 3.10 :	Plaque biaise sous charge uniforme avec deux conditions de bords (L=2a).....	61
Tableau 3.11 :	Convergence de la flèche au centre d'une plaque circulaire sous charge uniforme.....	62
Tableau 3.12 :	Convergence des fréquences propres (λ) d'une plaque carrée encastree (k=0.8601, v=0.3)	63
Tableau 3.13 :	Convergence des fréquences propres (λ) d'une plaque carrée simplement supportée (k=0.8333, v=0.3)	64
Tableau 3.14 :	Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée SSSS (k=0.8333, v=0.3).....	65
Tableau 3.15 :	Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée CCCC avec k=0.8601, v=0.3.....	65
Tableau 3.16 :	Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée SCSC avec k=0.822, v=0.3.....	65
Tableau 3.17 :	Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée CCCF avec k=0.8601, v=0.3.....	66
Tableau 3.18 :	Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée SCSS avec k=0.822, v=0.3.....	66

Tableau 3.19 :	Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée SCSF avec $k=0.822$, $\nu=0.3$	66
Tableau 3.20 :	Fréquences propres ($\lambda=(\omega L^2/\pi^2)(\rho h/D)^{1/2}$) d'une plaque biaise encastrée ($k=5/6$, $\nu=0.3$).....	68
Tableau 3.21 :	Fréquences propres (λ) d'une plaque circulaire ($\nu=0.3$, $k=\pi^2/12$)...	69

Chapitre 4 : Amélioration de l'élément fini de plaque SBRP de type Reissner-Mindlin

Tableau 4.1 :	Résultats du patch-test mécanique.....	79
Tableau 4.2 :	Influence de l'élancement (L/h) sur la flèche d'une plaque encastrée sous charge uniforme.....	80
Tableau 4.3 :	Convergence du déplacement transversal ($(WD/qL^4)100$) d'une plaque encastrée sous charge uniforme.....	82
Tableau 4.4 :	Convergence du déplacement transversal ($(WD/qL^4)100$) d'une plaque simplement supportée (SS1) sous charge uniforme.....	82
Tableau 4.5 :	Convergence du déplacement transversal ($(WD/qL^4)100$) d'une plaque simplement supportée (SS2) sous charge uniforme.....	82
Tableau 4.6 :	Convergence du déplacement transversal d'une plaque biaise (Razzaque).....	87
Tableau 4.7 :	Convergence du déplacement transversal d'une plaque biaise (Morley).....	87
Tableau 4.8 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée mince SSSS ($h/L=0.005$).....	89
Tableau 4.9 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée épaisse SSSS ($h/L=0.1$).....	89
Tableau 4.10 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée mince CCCC ($h/L=0.005$).....	90
Tableau 4.11 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée épaisse CCCC ($h/L=0.1$).....	90
Tableau 4.12 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée mince ($h/L=0.005$) avec différentes conditions aux limites.....	92
Tableau 4.13 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque console biaise (CFFF).....	94

Tableau 4.14 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.01, k=\pi^2/12, \nu=0.3$).....	95
Tableau 4.15 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.1, k=\pi^2/12, \nu=0.3$).....	95
Tableau 4.16 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.001, \nu=0.3$).....	97
Tableau 4.17 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.2, \nu=0.3$).....	98
Tableau 4.18 :	Fréquences propres (ω) d'une plaque simplement supportée avec raidisseurs ($k=5/6, \nu=0.3$).....	99
Tableau 4.19 :	Fréquences propres (ω) d'une plaque simplement supportée à épaisseur variable ($k=5/6, \nu=0.3$).....	100
Tableau 4.20 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque trouée CSCS.....	101
Tableau 4.21 :	Convergence de la charge uniaxiale de flambement (K^h) d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).....	102
Tableau 4.22 :	Charge uniaxiale de flambement (K^h) d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).....	103
Tableau 4.23 :	Charge biaxiale de flambement (K^h) d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).....	104
Tableau 4.24 :	Convergence du déplacement transversal (w) et les contraintes (σ_x) d'une plaque sandwich carrée	108
Tableau 4.25 :	Déplacement transversal (W) des plaques stratifiées carrées à trois, quatre et cinq couches sous charge uniforme.....	110
Tableau 4.26 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque stratifiée encastrée ($a/b=1$) à trois couches (0/90/0).....	111
Tableau 4.27 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque stratifiée simplement appuyée ($a/b=1$) à trois couches (0/90/0).....	111
Tableau 4.28 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque stratifiée encastrée ($a/b=2$) à trois couches (0/90/0).....	112
Tableau 4.29 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque stratifiée simplement appuyée ($a/b=2$) à trois couches (0/90/0).....	112

Tableau 4.30 : Fréquences fondamentales (λ) des plaques stratifiées à trois, cinq et neuf couches pour différents rapports ($E1/E2$).....	113
--	-----

Chapitre 5 : Elément fini de coque rectangulaire à facette plane

Tableau 5.1 : Déplacement à l'extrémité libre d'une poutre console courbe mince suivant les deux axes z et y	127
---	-----

Notations

L	Longueur de la plaque
k	Facteur de correction de cisaillement
ρ	Densité de matériau
ν	Coefficient de Poisson
E	Module d'Young
h	Epaisseur
β	Angle de la plaque biaise
D	Rigidité de flexion $=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$
G	Module de cisaillement $=E/[2(1+\nu)]$;
λ	Fréquence propre non-dimensionnelle
ω	Fréquence angulaire
λ_{cr}	Charge critique de flambage
α_i	Constantes d'interpolation du déplacement
U, V, W	Déplacements dans les directions x, y et z respectivement
β_x, β_y	Rotations autour des axes y et x respectivement
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotations autour des axes x, y et z respectivement
x, y, z	Système des coordonnées cartésiennes
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[M^e]$	Matrice de masse élémentaire
$[K_g^e]$	Matrice géométrique élémentaire
$[K]$	Matrice de rigidité de la structure
$[M]$	Matrice de mass de la structure
$[K_g]$	Matrice géométrique de la structure
$[C]$	Matrice de transformation
$[P]$	Matrice d'interpolation des déplacements
$[Q]$	Matrice d'interpolation des déformations
$[G]$	Matrice géométrique des déformations
$\{F\}$	Vecteur des forces nodales global
$\{q\}$	Déplacements nodaux de la structure
$\{q_e\}$	Déplacements nodaux élémentaire

Introduction générale

1. Introduction

Le domaine de calcul numérique des structures a connu des progrès importants depuis plusieurs années. Dans les premiers développements des méthodes d'éléments finis en analyse des structures, tous les efforts étaient concentrés sur le développement d'éléments finis efficaces pour la résolution de problèmes spécifiques. Après plusieurs années de développement, la méthode des éléments finis est devenue l'un des outils les plus puissants et les plus populaires pour la simulation numérique dans divers domaines des sciences et de l'ingénierie. Les logiciels commerciaux sont actuellement largement utilisés dans la conception technique de systèmes structurels en raison de leur polyvalence pour les structures à géométrie complexe et de leur applicabilité à de nombreux types de problèmes non linéaires.

La préoccupation majeure des chercheurs du secteur industriel est d'avoir un modèle d'élément fini simple, fiable et performant, permettant une très bonne représentation du cisaillement transversal (CT) sans engendrer des difficultés numériques (verrouillage de cisaillement transversal, faux mécanismes,) mais surtout capable de fournir des informations précises sur les contraintes.

Comme alternative aux modèles en déplacements classiques, les formulations basées sur l'approche en déformation ont permis de développer des éléments finis simples et robustes ayant des performances similaires aux éléments d'ordre élevé. Les éléments à champ de déformation présentent plusieurs avantages parmi lesquels, représentation plus facile des modes de déformations constantes et des modes de corps rigide (les deux critères de convergence), découplage des différentes composantes de la déformation et finalement possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans la nécessité de l'introduction des nœuds internes. Ce qui permet d'augmenter la précision et la stabilité des solutions numériques ainsi que d'éliminer les phénomènes de blocage.

2. Objectifs de la thèse (Motivation et objectifs)

L'objectif de ce travail de recherche est de développer de nouveaux modèles d'éléments finis simple et robuste de type membrane, flexion et coque qui remplissent des exigences tels que :

- Bon comportement en flexion.
- Liberté de tout blocage en CT.
- Non-sensibilité à la distorsion de forme.
- Bonne précision même avec des maillages grossiers.
- Simplicité de la formulation et implémentation directe des lois constitutives linéaires/non linéaires.

Dans ce contexte, différents éléments finis ont été formulés sur la base de l'approche en déformation [les variables nodales sont trois translations (u,v,w) et deux rotations (β_x, β_y)].

- Améliorer le comportement de membrane en formulant un nouvel élément membranaire à cinq nœuds avec rotation dans le plan **SBQM** (Strain Based quadrilateral Membrane) basé sur l'approche en déformation. Cet élément contient un nœud interne et la matrice de rigidité a été utilisée après condensation statique.
- Développer des éléments finis triangulaires (**SBTMP** et **SBTP4**) et quadrilatère (**SBQP**) de plaque basés sur l'approche en déformation et la théorie de Rissner Mindlin qui prend en considération l'effet du cisaillement transverse. Ces éléments sont également valables pour des structures minces et très minces. Les éléments de plaque correspondants sont **SBTMP** (Strain Based Triangular Mindlin Plate) pour le triangle à 3 nœuds, **SBTP4** (Strain Based Triangular Plate with four nodes) pour le triangle à 4 nœuds et **SBQP** (Strain Based quadrilateral Plate) pour le quadrilatère à 4 nœuds. Les éléments développés sont destinés à l'analyse des différents types de comportements (statique, vibration libre et flambement) des plaques isotropes. D'autre part, un élément rectangulaire à champ de déformation (SBRLP) basé sur la théorie du premier ordre (FSDT) a été formulé pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques composites.
- Formuler un élément coque rectangulaire à facette plane basé sur l'approche en déformation par superposition des éléments de membrane et de flexion type Mindlin.

3. Plan de la thèse

La thèse est divisée en cinq chapitres

Le premier chapitre expose une étude bibliographique en présentant un aperçu sur les éléments finis basés sur l'approche en déformation ainsi que certaines équations de base utilisées.

Le deuxième chapitre est dédié à la formulation théorique et la validation numérique d'un élément fini quadrilatère à champ de déformation avec rotation dans le plan destiné à l'analyse statique et en vibration libre des structures membranaires.

Le troisième chapitre est consacré au développement d'un nouvel élément fini triangulaire à champ de déformation en statique et en vibration libre des plaques en flexion.

Dans le quatrième chapitre, une amélioration de l'élément fini (SBRP) basé sur l'approche en déformation de type Reissner-Mindlin a été présentée pour l'analyse statique, vibration libre et flambement des plaques isotropes. D'autre part, l'exposition de la formulation d'un élément rectangulaire à champ de déformation (SBRLP) basé sur la théorie du premier ordre (FSDT) a été donnée pour l'étude statique et en vibration libre des plaques composites.

Le cinquième chapitre concerne la modélisation des coques de forme cylindrique en utilisant un élément fini coque rectangulaire à facette plane. Cet élément est obtenu par la superposition d'un élément membranaire et celui de flexion type Mindlin qui sont tous les deux basés sur l'approche en déformation.

Chapitre 1

Etude bibliographique et équations de base

Dans ce chapitre, certaines équations de base utilisées dans la présente étude sont brièvement décrites. Nous avons aussi présenté un aperçu sur l'étude bibliographique des éléments de membrane, de plaque en flexion et de coque qui sont formulés à la base de l'approche en déformation.

1.1 Etude bibliographique sur les éléments à champ de déformation

1.1.1 Eléments membranaires

Les recherches menées à l'université de Cardiff (Grande Bretagne) concernant le développement d'une nouvelle classe d'éléments d'élasticité plane basée sur l'approche en déformation ont été élaborées pour la première fois par Sabir [1-2]. Les éléments cités dans ces références concernent les éléments en coordonnées cartésiennes rectangulaires à deux degrés de liberté par nœud et ceux triangulaire et rectangulaire avec rotation dans le plan (drilling) comme ddl additionnel. L'extension de cette approche pour les problèmes en coordonnées polaires a été établie par Sabir et Salhi [3]. Des éléments secteur (coordonnées polaires) à trois ddl contenant la rotation dans le plan (drilling) comme ddl supplémentaire ont été formulés [4-6].

Sabir et Sfindji [7] ont proposé des éléments membranaires (rectangulaire et triangulaire) à deux ddl / nœud dont le nœud interne est éliminé par condensation statique. D'autres versions des éléments rectangulaires avec un nœud interne ont été formulées par Belarbi and Maalam [8], Hamadi et al [9]. Plus tard un autre élément triangulaire à 4 nœuds avec rotation dans le plan est proposé par Himeur et al. [10] en satisfaisant les fonctions d'airy. Ces deux derniers éléments [9-10] satisfont les équations d'équilibre comme condition supplémentaire. Des améliorations du champ de déplacement pour avoir de nouveaux éléments membranaires avec rotation (drilling) ont été effectuées [11-13]. Le premier élément a été appliqué pour l'analyse statique linéaire par contre les derniers sont procédés pour l'analyse élastique, élasto-plastique

et dynamique. Récemment, un élément triangulaire à 3 nœuds avec rotation dans le plan [14] a été proposé pour l'analyse statique et dynamique des structures membranaires.

1.1.2 Eléments flexionnels

L'approche en déformation a été étendue pour l'analyse statique des plaques par le développement d'un élément fini triangulaire à trois nœuds nommé **SBTP** [15], un élément rectangulaire à quatre nœuds **SBRP** [16] et un élément fini triangulaire à trois nœuds de coin et un nœud interne [17]. Ces éléments possèdent les trois ddl essentiels (W , β_x et β_y) et ils sont basés sur la théorie de Reissner Mindlin qui prend en compte l'effet de cisaillement transverse. Pour les trois éléments, les fonctions imposées de déformations (courbures) κ_x et κ_y varient linéairement par contre κ_{xy} est constante et les déformations de cisaillement transverse γ_{xz} et γ_{yz} contiennent des termes quadratiques. En plus, il existe un couplage entre les déformations de flexion (κ_x et κ_y) et celle de cisaillement (γ_{xz} et γ_{yz}). Plus récemment, Himeur et Guenfoud [18] ont proposé un élément à champ de déformation triangulaire à 4 nœuds basé sur la théorie de Kirchhoff qui néglige l'effet de cisaillement transverse (CT). La technique de condensation statique est utilisée dans la formulation des deux éléments cités dans les références [17-18] afin d'éliminer le quatrième nœud interne.

Afin d'éviter l'utilisation des éléments tridimensionnels d'ordre élevé basés sur le modelé en déplacement (hexaédrique et prismatique), Belarbi et Charif [19] ont proposé un élément hexaédrique simple à huit nœuds et trois degrés de liberté (U , V , W) basé sur l'approche en déformation avec modification de la matrice d'élasticité (en contrainte plane). Dans le même contexte, deux autres versions d'éléments brique 3D [20-21] ont été développées pour l'étude de la flexion des plaques. La première version est un élément à huit nœuds de coin et un nœud central. La technique de condensation statique est utilisée pour l'élimination du nœud central [20]. Tandis que la deuxième contient huit nœuds en imposant un champ de déformations qui satisfait les équations d'équilibre [21]. Messai et al. [22] ont présenté un élément brique 3D à neuf nœuds à champ de déformation. Cet élément a été implémenté dans le code Abaqus pour l'étude du comportement statique et en vibration libre des plaques en flexion.

1.1.3 Eléments coques

La formulation du premier élément fini de coque cylindrique basé sur l'approche en déformation et la théorie des coques profondes a été présentée par Ashwel et Sabir [23] en conditions statiques. L'élément est rectangulaire à quatre nœuds ayant cinq degrés de liberté par nœud. Deux autres éléments de forme quadrilatère et triangulaire ont été proposés par Sabir [24] pour l'étude de la concentration des contraintes des coques cylindriques trouées. Plus tard,

l'élément d'Ashwel et Sabir [23] a été utilisé en vibration libre [25]. Le problème de compatibilité des degrés de liberté de diverses structures (poutre et coque) a motivé les chercheurs de formuler des éléments avec rotation dans le plan (Drilling rotation). Pour cette raison, Bourezane [26] a proposé un élément de coque cylindrique profonde avec rotation dans le plan. L'élément qui est à champ de déformation contient quatre nœuds avec six degrés de liberté par nœud.

Djoudi et Bahai [27-29] ont développé des éléments de coque cylindrique surbaissée basés sur le modèle en déformation. Ces éléments de forme rectangulaire contiennent seulement les 5 degrés de liberté essentiels dans chacun des nœuds de coin. Le premier est destiné pour l'analyse linéaire et non linéaire géométrique. L'effet des trous sur le comportement dynamique des panneaux cylindriques a été étudié en utilisant le deuxième élément. Par contre le troisième élément a été utilisé pour le calcul des fréquences propres des panneaux cylindriques. On doit mentionner que tous les éléments courbe de type coque cylindrique cités ci-dessus sont formulés dans un système de coordonnées curvilignes.

Un élément fini triangulaire à quatre nœuds de coque à facette plane a été proposé par Guenfoud et al [30] qui est la combinaison de deux éléments de membrane et de flexion basés sur l'approche en déformation. Pour chacun des trois nœuds de coin et du nœud interne, l'élément membranaire possède trois degrés de liberté, deux translations et une rotation autour de la normale. L'élément de flexion est de type plaque Kirchhoff à trois degrés de liberté, une translation et les deux rotations. La condensation statique est utilisée pour l'élimination du quatrième nœud interne. L'élément formulé a été utilisé pour l'étude du comportement statique des coques.

1.2 Equations de base d'élasticité plane

Le problème d'élasticité pour les solides revient à déterminer à un point quelconque $M(x,y,z)$ les champs inconnus de déplacements u_i et de contraintes σ_{ij} sous l'effet des forces appliquées de volume (f_i) et de surfaces (ϕ_i) (figure 1.1).

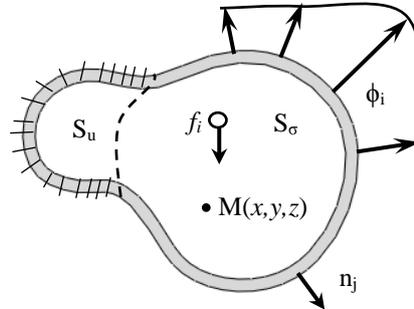


Figure 1.1. Corps solide soumis à des forces de volume (f_i) et de surfaces (ϕ_i).

Le phénomène de déformation des corps solides est régi par des équations de champ aux dérivées partielles avec des conditions aux limites. Les équations de champ et de la théorie de l'élasticité plane (élasticité 2D) sont rappelées ci-dessous. Deux types de problèmes en élasticité 2D sont considérés, le premier est le modèle en contrainte plane (figure 1.2a) définie comme une approximation qui convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan (xy) par des forces de surface et de volume avec l'axe z perpendiculaire au plan de la plaque (hypothèse $\sigma_z=0$), le deuxième est le modèle en déformation plane (figure 1.2b) qui s'applique à un corps solide dans la dimension suivant l'axe z est assez grande par rapport aux autres dimensions (du plan xy) et sollicité par des forces (de surface et de volume) ayant des composantes nulles suivant z (hypothèse $\varepsilon_z=0$).

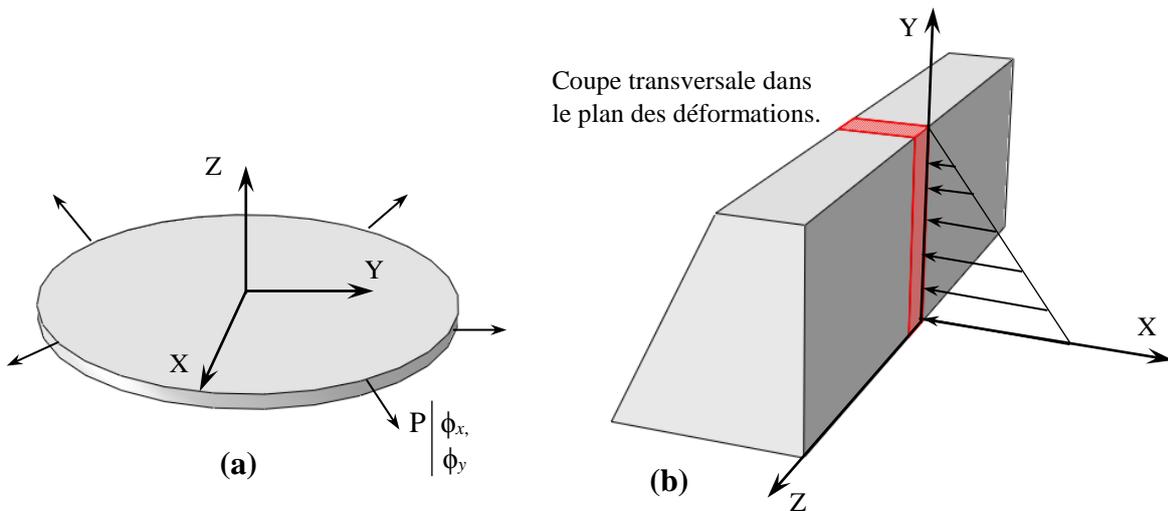


Figure 1.2. Modèle en contrainte plane (a) et modèle en déformation plane (b).

1.2.1 Relation déformations-déplacements (relation cinématiques)

En élasticité linéaire (petits déplacements et déformations) on a :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

1.2.2 Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \quad (1.2)$$

1.2.3 Equation de compatibilité

En élasticité 2D, les six équations de compatibilités en élasticité 3D se réduisent à une seule équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.3)$$

L'équation de compatibilité est la condition d'intégrabilité des déformations qui assure l'unicité des déplacements.

1.2.4 Relation contraintes-déformations (équations constitutives)

Pour le cas des matériaux isotropes à comportement élastique linéaire, on a les relations d'élasticité (loi de Hooke) suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.4)$$

L'équation 1.4 peut être écrite sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1.6)$$

✓ Pour le cas en déformation plane

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.7)$$

✓ Pour le cas en contrainte plane

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.8)$$

1.3 Théorie des plaques épaisses en flexion (Reissner-Mindlin) [31]

Une plaque est un solide 3D élastique dont la dimension de l'épaisseur h (figure 1.3) est petite par rapport aux deux autres et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur (plan moyen S_m , Oxy , $z=0$).

La théorie de Reissner-Mindlin est basée sur les trois hypothèses suivantes :

- Toute section droite perpendiculaire à la surface moyenne non déformée reste droite mais non nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée (hypothèse des sections droites).
- La non variation d'épaisseur, déformation transversale $\varepsilon_z=0$.
- La contrainte σ_z est négligeable devant les autres composantes du tenseur des contraintes.

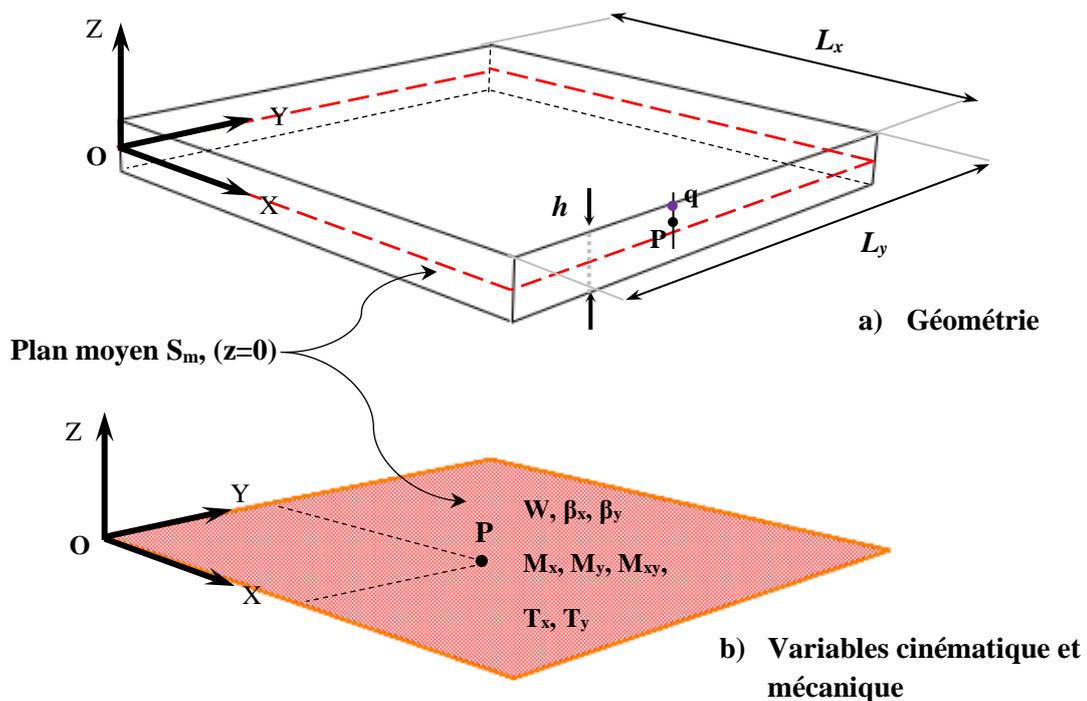


Figure 1.3. Description d'une plaque.

- Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie de plaque retenue dépend des caractéristiques géométriques. On admet généralement les hypothèses de Mindlin si $4 \leq L/h \leq 20$ et celle de Kirchhoff si $L/h > 20$ ou L est une dimension caractéristique dans le plan xy .
- Trois variables cinématiques indépendantes (figure 1.3b) (le déplacement transversal w est les rotations β_x et β_y de la normale à la surface moyenne dans les plans xz et yz respectivement). Trois moments de flexion (M_x, M_y, M_{xy}) et deux efforts tranchants (T_x, T_y) (figure 1.3a).

Contraintes et efforts résultants

Soit un élément différentiel de plaque, soumis à une charge extérieure q suivant l'axe z (figure 1.4) et constitué de matériau homogène linéairement élastique. Les contraintes agissant sur les sections de l'élément sont présentées (figure 1.4).

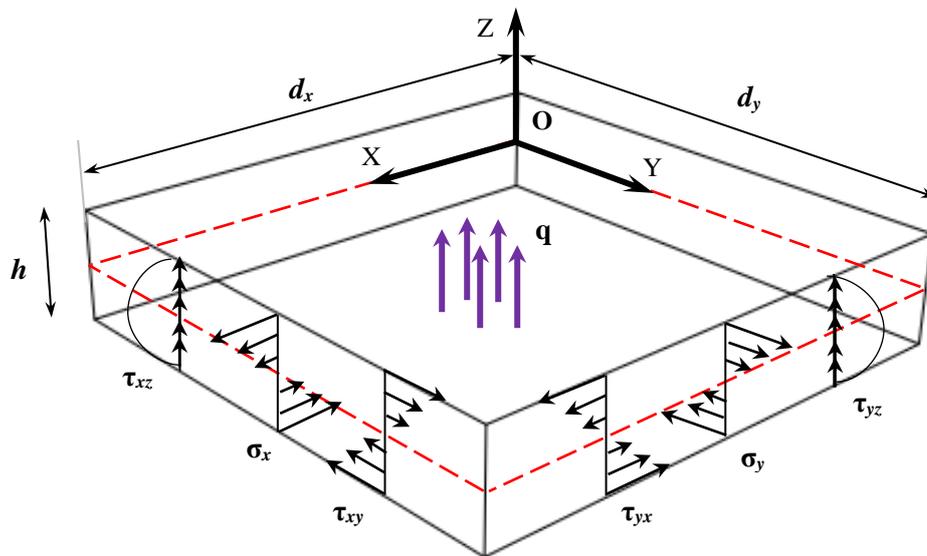


Figure 1.4. Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène.

- Les contraintes normales (σ_x, σ_y) et de cisaillement plan τ_{xy} varient linéairement selon z et sont associées aux moments de flexion (M_x, M_y) et de torsion (M_{xy}) respectivement (figure 1.5).
- Les contraintes de CT τ_{xz} et τ_{yz} varient de façon quadratique selon z et sont associées aux efforts de cisaillement transverse T_x et T_y (figure 1.5).

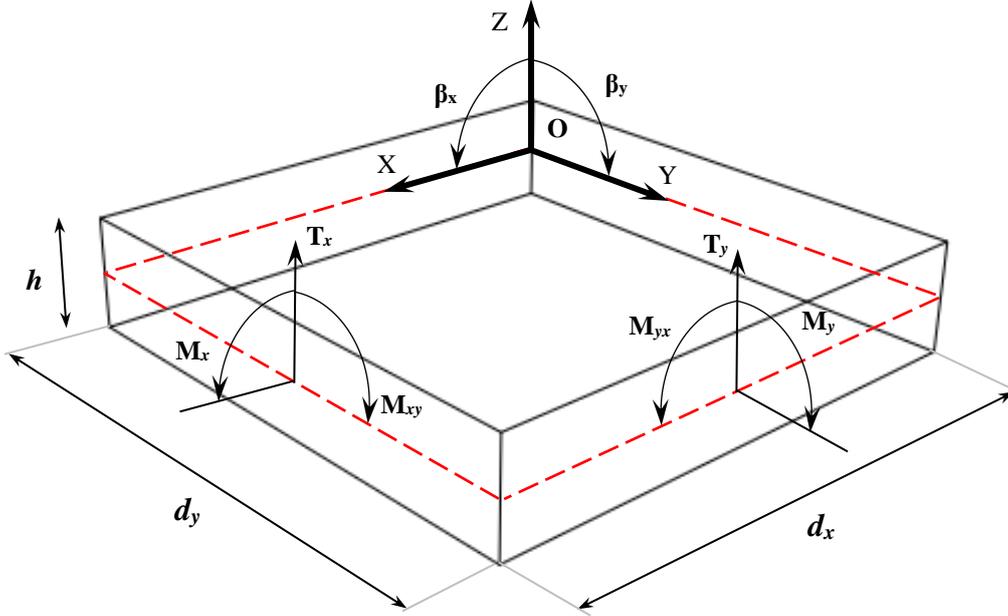


Figure 1.5. Conventions générales.

Les efforts résultants sont définis par :

- ✓ Moments de flexion (Nm/m) :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (1.9)$$

- ✓ Efforts de CT (N/m) :

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; \quad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (1.10)$$

1.3.1 Champs de déplacements et de déformations

Le champ de déplacements d'un point quelconque q (x, y, z) est :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le champ de déformations est défini par :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = z\{\boldsymbol{\kappa}\}; \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (1.12)$$

Avec les courbures de flexion $\{\kappa\}$ et les déformations de cisaillement transversal $\{\gamma\}$ sont données respectivement par :

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

1.3.2 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre d'une plaque s'écrivent :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0; \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y = 0; \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + f_z = 0 \quad (1.14)$$

1.3.3 Loi de comportement élastique

Pour un matériau homogène isotrope, les relations contraintes-déformations (hypothèse des contraintes planes) s'écrivent comme suit :

$$\{\sigma\} = z[H]\{\kappa\} \quad \{\tau\} = [G]\{\gamma\} \quad (1.15)$$

$$\text{Avec} \quad [H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T \quad \{\tau\} = \{\tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T \quad (1.17)$$

Avec $\{\kappa\}$ et $\{\gamma\}$ sont donnés par l'équation (1.13)

En utilisant les équations (1.9) et (1.10), les relations efforts résultants-déformations peuvent être exprimées comme suit :

$$\{M\} = [H_f]\{\kappa\} \quad \{T\} = [H_c]\{\gamma\} \quad (1.18)$$

$$\text{Avec} \quad [H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad [H_c] = \frac{kEh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$\{M\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T \quad \{T\} = \{T_{xz} \quad T_{yz}\}^T \quad (1.20)$$

La relation (1.18) peut être regroupée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} M \\ T \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

Avec la matrice d'élasticité [D] est :

$$[D] = \begin{bmatrix} [H_f] & 0 \\ 0 & [H_c] \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

1.3.4 Formulation variationnelle faible

La forme intégrale faible pour le cas statique et en vibration libre peuvent être exprimées respectivement :

$$\int_{S_e} \delta \{\kappa\}^T \{M\} dS + \int_{S_e} \delta \{\gamma\}^T \{T\} dS = \int_{S_e} \delta \{U_e\}^T \{f_v\} dS \quad (1.23)$$

$$\int_{S_e} \delta \{\kappa\}^T \{M\} dS + \int_{S_e} \delta \{\gamma\}^T \{T\} dS + \int_{S_e} \delta \{U_e\}^T \{\ddot{U}\} dS = 0 \quad (1.24)$$

Pour le flambement, la forme intégrale faible est donnée par :

$$\begin{aligned} & \int_{S_e} \delta \{\kappa\}^T [H_f] \{\kappa\} dS + \int_{S_e} \delta \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} dS + h \int_{S_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} [\sigma_0] \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} dS \\ & + \frac{h^3}{12} \int_{S_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} & \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \end{bmatrix} [\sigma_0] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \end{Bmatrix} dS + \frac{h^3}{12} \int_{S_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} & \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{bmatrix} [\sigma_0] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} dS = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

L'équation (1.25) peut être réécrite comme suit :

$$\int_{S_e} \delta \{\kappa\}^T [H_f] \{\kappa\} dS + \int_{S_e} \delta \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} dS + \int_{S_e} \delta \{\varepsilon^s\}^T [\tau] \{\varepsilon^s\} dS = 0 \quad (1.26)$$

Les matrices $[\sigma_0]$, $[\tau]$ et $[\varepsilon^s]$ sont donnée au chapitre 4 (équation (4.10) et (4.20)).

1.4 Aperçu sur les théories des matériaux stratifiés

Les matériaux composites renforcés de fibres ont été largement utilisés dans diverses applications technologiques telles que les avions, aérospatiales, l'industrie automobile, constructions civiles, infrastructures des autoroutes, etc. Les structures composites stratifiées sont fabriquées de deux ou plusieurs couches avec différents matériaux empilés pour obtenir les propriétés souhaitées (par exemple, les rapports rigidité-poids et résistance-poids élevés, excellente résistance aux substances corrosives, durabilité globale élevée, amortissement, etc.) [32]. L'utilisation intensive de composites stratifiés dans divers types de structures en plaques et en coques a attiré considérablement l'attention des praticiens et chercheurs dans le domaine de la modélisation des structures composites en plaques et en coques.

Il existe un certain nombre d'approches pour modéliser les plaques composites stratifiées. Ces approches peuvent être classées en deux grandes catégories :

- ✓ Approche monocouche équivalente (ESL) dérivée de la théorie d'élasticité 3D dans laquelle un stratifié hétérogène est traité comme une couche unique équivalente à comportement constitutif complexe.
- ✓ Approche par couche (LW) où chaque couche est traitée individuellement avec sa propre identité.

Les deux catégories sont illustrées dans la figure 1.6 [33].

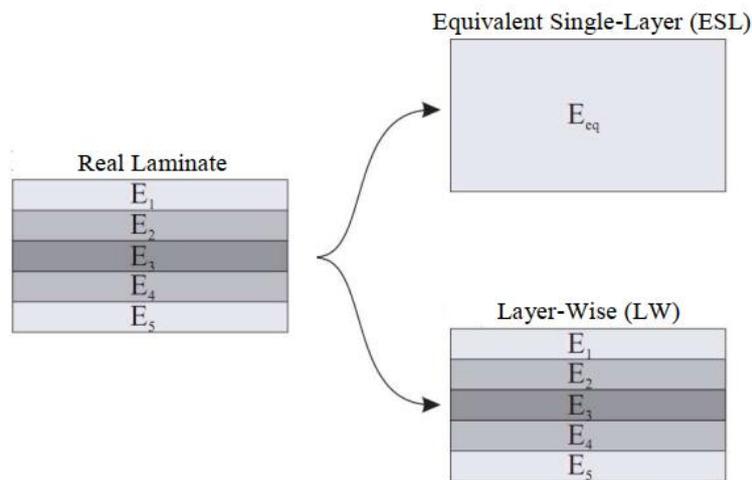


Figure 1.6. Modélisation d'un stratifié par l'approche monocouche (ESL) et l'approche par-couche (LW).

Parmi les deux approches mentionnées ci-dessus, les théories ESL ont été largement utilisées en raison des avantages de simplicité dans la formulation et du faible coût de calcul. De plus, les modèles ESL fournissent souvent une description suffisamment précise de la réponse

globale des stratifiés minces et épais. Pour l'approche monocouche équivalente (ESL), il existe la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). Dans le suivant, nous allons présenter la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) en mettant l'accent sur les hypothèses et les équations de base.

1.4.1 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre des plaques stratifiées [31]

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) des plaques stratifiées est une extension de la théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques épaisses isotropes homogènes.

1.4.1.1 Hypothèses cinématiques, et relations déplacements-déformations

Considérons une plaque en matériau composite (figure 1.7) constituée d'un empilement de couches orthotropes dont les axes d'orthotropie sont L, T et Z avec isotropie d'axe L (dans le plan Tz, fibre dans la direction L).

- ✓ Chaque couche i est définie par les plans $z=z_{i+1}$ et $z=z_i$ dans le sens de l'épaisseur ($z_i \leq z \leq z_{i+1}$).
- ✓ Les directions d'orthotropie L et T varient d'une couche à l'autre, et sont représentées par l'angle Θ_i entre l'axe X et la direction L_i de la couche i (figure 1.7).

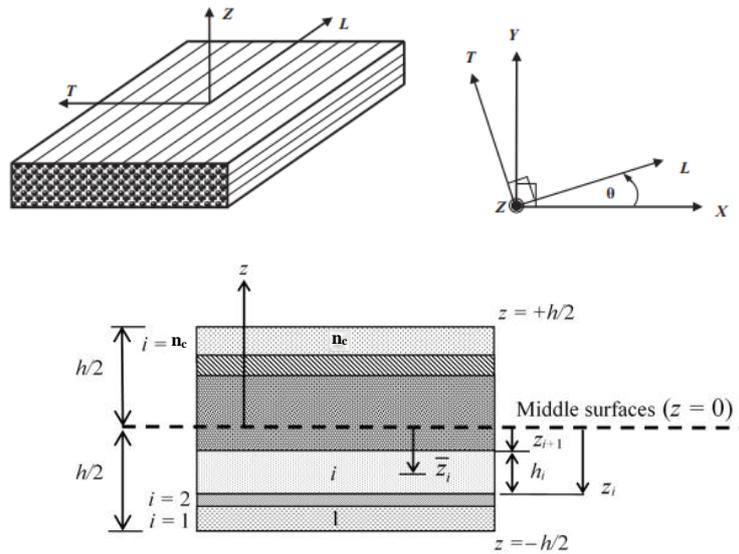


Figure 1.7. Systèmes de coordonnées et positions de couche définis dans un stratifié.

La théorie des plaques est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes :

- Toute section droite perpendiculaire à la surface moyenne non déformée reste droite mais non nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée (figure 1.8).
- La non variation d'épaisseur, déformation transversale $\varepsilon_z=0$.
- La contrainte σ_z est négligeable devant les autres composantes du tenseur des contraintes.
- Le matériau de chaque couche est linéaire élastique et orthotrope.
- Hypothèse d'orthotropie plane pour chaque couche en considérant Z comme axe d'orthotropie de toutes les couches (orthotropie dans le plan LT).

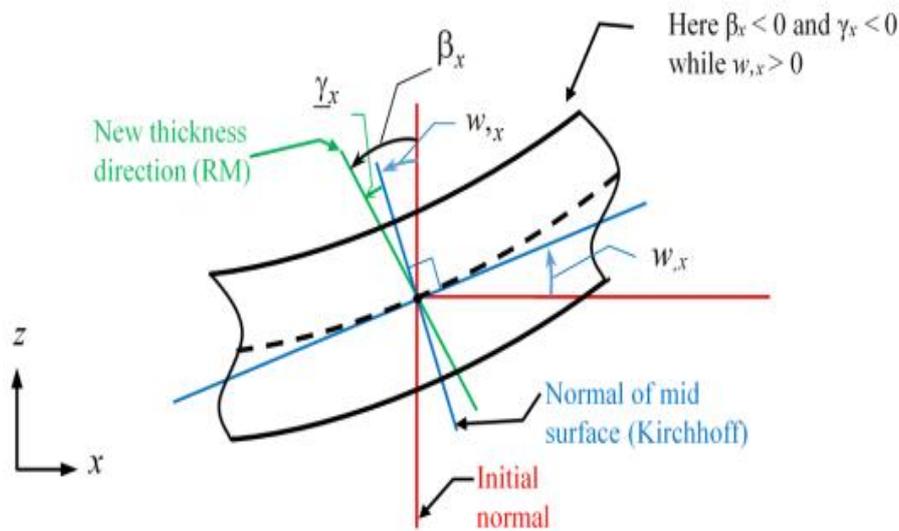


Figure 1.8. Géométries déformées et non déformées d'un bord libre d'une plaque sous l'hypothèse du premier ordre (FSDT) [74].

Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, les composantes de déplacement d'un point quelconque de coordonnées (x, y, z) dans la plaque sont exprimées en termes des déplacements (u_0, v_0 et w_0) et des rotations (β_x et β_y) du plan moyen :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Où, u_0 et v_0 sont les composantes du déplacement en un point quelconque du plan moyen

(x, y, 0) dans les directions x et y respectivement. Le déplacement vertical $w_0(x, y)$ est considéré comme constant sur toute l'épaisseur de la plaque. Les rotations autour des axes x et y sont respectivement β_y et β_x .

Les déformations $\{\varepsilon\}$ planes (plan xy) s'écrivent :

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{\kappa\}; \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (1.28)$$

Avec les déformations de membrane $\{e\}$ et les courbures $\{\kappa\}$ sont données respectivement par :

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad (1.29)$$

Les déformations de cisaillement transversal $\{\gamma\}$ sont :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

1.4.1.2 Equations constitutives [31]

Pour chaque couche, les relations constitutives dans le repère d'orthotropie (L-T-Z) sont :

$$\{\sigma_L\} = [H_L]\{\varepsilon_L\}; \quad \{\tau_L\} = [G_L]\{\gamma_L\} \quad (1.31)$$

$$\text{Avec} \quad \{\sigma_L\} = \{\sigma_L \quad \sigma_T \quad \tau_{LT}\}^T; \quad \{\tau_L\} = \{\tau_{LZ} \quad \tau_{TZ}\}^T \quad (1.32)$$

$$\{\varepsilon_L\} = \{\varepsilon_L \quad \varepsilon_T \quad \gamma_{LT}\}^T; \quad \{\gamma_L\} = \{\gamma_{LZ} \quad \gamma_{TZ}\}^T$$

Les matrices $[H_L]$ et $[G_L]$ sont :

$$[H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ & H_{TT} & 0 \\ \text{sym.} & & G_{LT} \end{bmatrix}; \quad [G_L] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$H_{LL} = \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}, \quad H_{TT} = \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}, \quad H_{LT} = \frac{\nu_{TL}E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}$$

Les cinq coefficients indépendants peuvent être :

$$\text{Soit : } H_{LL}, H_{LT}, H_{TT}, G_{LZ} = G_{LT}, G_{TZ}$$

$$\text{Soit : } E_L, E_T, \nu_{LT}, \left(\text{ou, } \nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L} \right)$$

Le passage du repère d'orthotropie (L-T-Z) au repère Cartésien (X, Y, Z) se fait par l'intermédiaire des matrices $[T_1]$ et $[T_2]$, ainsi :

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c & s & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}; \quad [T_2] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Avec $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$

$$[H] = [T_1]^T [H_L] [T_1], \quad [G] = [T_2]^T [G_L] [T_2] \quad (1.35)$$

Les relations constitutives dans le repère Cartésien (X, Y, Z) pour chaque couche peuvent être données comme :

$$\{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\} \quad \{\tau\} = [G] \{\gamma\} \quad (1.36)$$

$$\text{Avec} \quad \{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T \quad \{\tau\} = \{\tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T \quad (1.37)$$

1.4.1.3 Relations efforts résultants-déformations

Les efforts résultants sont obtenus par intégration des contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} et τ_{yz} donnés par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \quad \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (1.38)$$

N_x , N_y et N_{xy} : efforts résultants de membrane (en N/m)

M_x , M_y et M_{xy} : efforts résultants de flexion et moments (en $N.m/m$)

T_x , et T_y : efforts résultants de cisaillement ou efforts tranchants (en N/m)

En substituant les équations (1.28), (1.29), (1.30) et (1.36) dans l'équation (1.38), nous obtenons les équations constitutives des forces membranaires, des moments de flexion et des forces de cisaillement, comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [H_m] \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + [H_{mf}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad (1.39)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{mf}] \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + [H_f] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad (1.40)$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = [H_c] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.41)$$

Pour une plaque constituée de n_c couches orthotropes (dont les caractéristiques sont constantes par couche), les matrices constitutives de membrane $[H_m]$, de flexion $[H_f]$, de couplage membrane-flexion $[H_{mf}]$ et de cisaillement $[H_c]$ s'écrivent :

$$[H_m] = \begin{bmatrix} H_{m11} & H_{m12} & H_{m13} \\ & H_{m22} & H_{m23} \\ sym. & & H_{m33} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_c} (z_{i+1} - z_i) [H]_i \quad (1.42)$$

$$[H_f] = \begin{bmatrix} H_{f11} & H_{f12} & H_{f13} \\ & H_{f22} & H_{f23} \\ sym. & & H_{f33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n_c} (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H]_i \quad (1.43)$$

$$[H_{mf}] = \begin{bmatrix} H_{mf11} & H_{mf12} & H_{mf13} \\ & H_{mf22} & H_{mf23} \\ sym. & & H_{mf33} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_c} (z_{i+1}^2 - z_i^2) [H]_i \quad (1.44)$$

$$[\overline{H}_c] = \begin{bmatrix} \overline{H}_{c11} & \overline{H}_{c12} \\ sym. & \overline{H}_{c22} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_c} (z_{i+1} - z_i) [G]_i \quad (1.45)$$

Où, $[H]_i$ représente la matrice $[H]$ pour la couche i .

Si il y a symétrie matérielle par rapport au plan $z=0$ alors : $[H_{mf}] = 0$

Le plan xy est alors le plan neutre : il n'y a pas de couplage entre les effets de membrane et de flexion (des efforts de membrane appliqués dans le plan neutre ne produisent aucune courbure et, réciproquement, des efforts de flexion ne produisent aucune déformation de membrane).

Cela signifie que ($[N]=[H_m]\{e\}$; $[M]=[H_f]\{\kappa\}$; $[T]=[H_c]\{\gamma\}$).

En introduisant des facteurs de corrections, la matrice constitutive modifiée de cisaillement $[H_c]$ peut être écrite comme suit :

$$[H_c] = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \cdot \bar{H}_{c11} & \kappa_{12} \cdot \bar{H}_{c12} \\ \text{sym.} & \kappa_{22} \cdot \bar{H}_{c22} \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Avec κ_{11} , κ_{22} , κ_{12} sont les paramètres de correction du cisaillement transversal.

Les trois équations (1.39-1.41) constitutive peuvent être réécrites en une seule équation constitutive contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ H_{mf} & H_f & 0 \\ 0 & 0 & H_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

1.5 Blocage en cisaillement transverse (verrouillage en CT)

Le blocage en CT (locking) est un phénomène selon lequel l'élément fini dévient sur-rigide (overstiff), lorsque le rapport d'épaisseur (L/h) approche une valeur limite. Le blocage en cisaillement est associé au développement d'une déformation de cisaillement transverse fictive.

1.5.1 Description de l'aspect analytique du verrouillage

La description analytique du mécanisme de blocage en CT est décrite à travers l'élément plaque rectangulaire Mindlin classique à quatre nœuds avec 12 ddl basé sur le modèle en déplacement.

La représentation des courbures de flexion $\{\kappa\}$ et des déformations de CT $\{\gamma\}$ en termes des 12 paramètres ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$) est donnée dans le tableau ci-dessous [31]. La vérification des différents modes de déformations constantes (flexion pure $\{\kappa\} = \text{cste}$, $\{\gamma\} = 0$) et (cisaillement pur $\{\gamma\} = \text{cste}$, $\{\kappa\} = 0$) est illustrée comme suit :

- ✓ Déformations de CT γ_{xz}, γ_{yz} constantes sont exactement représentées par $\alpha_2 + \alpha_5$ et $\alpha_3 + \alpha_9$ respectivement.
- ✓ Pour les déformations de flexion $\{\kappa\}$:
 - κ_x est mal représenté à cause de la présence du terme ξ au niveau de γ_{xz} dans la colonne 6.

- κ_y est mal représenté à cause de la présence du terme η au niveau de γ_{yz} dans la colonne 11.
- κ_{xy} est mal représenté à cause de la présence des termes η et ξ au niveau de γ_{xz} et γ_{yz} respectivement dans les colonnes 7 et 10.

On constate que la présence de ces termes indésirables (courbures constantes avec cisaillement non nul) qui cause le blocage en CT de l'élément **R4** (intégré exactement).

Tableau 1.1. Interpolations des déplacements (W , β_x et β_y) et des déformations ($\{\kappa\}$ et $\{\gamma\}$).

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
Interpolation bilinéaire	W	1	ξ	η	$\xi\eta$								
	β_x					1	ξ	η	$\xi\eta$				
	β_y									1	ξ	η	$\xi\eta$
Courbures de flexion	κ_x						1		η				
	κ_y											1	ξ
	κ_{xy}							1	ξ		1		η
Déformation de CT	γ_{xz}		1		η	1	ξ	η	$\xi\eta$				
	γ_{yz}			1	ξ					1	ξ	η	$\xi\eta$

1.6 Procédure de la formulation des éléments à champ de déformation

Pour les éléments finis basés sur l'approche en déformation, le champ des déplacements contient deux composantes. La première représente les déplacements des modes rigides et la deuxième est due aux déformations imposées dans l'élément qui sont représentées par des fonctions indépendantes des différentes composantes de la déformation.

1.6.1 Déformations imposées de quelques éléments existants dans la littérature

1.6.1.1 Eléments membranaires

- ✓ Le champ des déformations de l'élément rectangulaire **SBRIE** [1] à quatre nœuds avec deux degrés de liberté par nœud (U , V) est donné par :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\
 \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x \\
 \gamma_{xy} &= \alpha_8
 \end{aligned}
 \tag{1.48}$$

On constate que la déformation de cisaillement est constante pour cet élément.

- ✓ Les deux éléments rectangulaires à cinq nœuds **SBRIE1** et **R4BM** [7,8] avec un nœud central et possédants deux degrés de liberté par nœud (U , V) dont les champs des déformations imposés sont :

Pour l'élément **SBRIE1** [7] :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y\end{aligned}\quad (1.49)$$

Pour l'élément **R4BM** [8] :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_9 x \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_{10} y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8\end{aligned}\quad (1.50)$$

- ✓ Deux autres éléments rectangulaires à cinq nœuds **SBRIE2** et **Q4SBE5** [7,9] et deux degrés de liberté par nœud (U, V) qui satisfont les équations d'équilibre comme condition supplémentaires possèdent les déformations imposées suivantes :

Pour l'élément **SBRIE2** [7] :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y - \nu \alpha_7 x - \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \alpha_{10} x \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x - \nu \alpha_5 y - \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \alpha_9 y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y\end{aligned}\quad (1.51)$$

Pour l'élément **Q4SBE5** [9] :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_9 x \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_{10} y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 - \left(\frac{2\nu}{1-\nu}\right) \alpha_5 x - \left(\frac{2\nu}{1-\nu}\right) \alpha_7 y - \left(\frac{2}{1-\nu}\right) \alpha_9 x - \left(\frac{2}{1-\nu}\right) \alpha_{10} y\end{aligned}\quad (1.52)$$

Pour les éléments avec rotation dans le plan θ_z (degré de liberté supplémentaire), l'élément rectangulaire à quatre nœuds **SBRIEID** [2] et les deux éléments triangulaires à trois nœuds **SBTIEID** [2] et **SBT2V** [11] contiennent respectivement des déformations imposées suivantes :

- ✓ Élément **SBRIEIR** [2]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_7 y + \alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} xy^3 \\ \varepsilon_y &= \alpha_5 + \alpha_8 x - \alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} yx^3 \\ \gamma_{xy} &= 2\alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_8 y + 2\alpha_9 x + 2\alpha_{10} y\end{aligned}\quad (1.53)$$

✓ Élément **SBTIEID** [2]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_9 x \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_9 y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 (x + y)\end{aligned}\quad (1.54)$$

✓ Élément **SBT2V** [11]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y - \nu \alpha_7 x - \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \alpha_9 x \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x - \nu \alpha_5 x - \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \alpha_9 y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 (x + y)\end{aligned}\quad (1.55)$$

1.6.1.2 Éléments plaques

Pour les deux éléments plaque de type Reissner-Mindlin contenant les trois degrés de liberté par nœud (W , β_x et β_y), il s'agit des éléments à quatre nœuds de forme rectangulaire **SBRP** [16] et triangulaire **Pep43** [17]. Les fonctions des déformations imposées sont données respectivement :

✓ Pour l'élément **SBRP** [16] :

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y, & \kappa_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x, & \kappa_{xy} &= \alpha_8, \\ \gamma_{xz} &= \alpha_9 + \alpha_{10} y - (\alpha_7 y^2), & \gamma_{yz} &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x - (\alpha_5 x^2)\end{aligned}\quad (1.56)$$

✓ Pour l'élément **Pep43** [17] :

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_9 \frac{y}{2}, & \kappa_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_{10} \frac{x}{2}, & \kappa_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y, \\ \gamma_{xz} &= \alpha_{11} - (\alpha_7 y^2), & \gamma_{yz} &= \alpha_{12} - (\alpha_5 x^2)\end{aligned}\quad (1.57)$$

Pour les deux éléments (**SBRP**, **Pep43**), on remarque que les courbures (κ_x , κ_y et κ_{xy}) sont couplées avec les déformations du cisaillement transversal (γ_{xz} et γ_{yz}) qui contiennent des termes quadratiques.

1.6.1.3 Eléments coques

Dans un système de coordonnées curvilignes, nous présentons les déformations des deux éléments coques cylindriques rectangulaires à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté par nœud.

- ✓ Le premier élément est basé sur la théorie des coques profondes [23].

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_7 + \alpha_8 \Phi \\
 \varepsilon_\Phi &= \alpha_9 + \alpha_{10} x - \left[\alpha_{12} \frac{1}{2R} x^2 + \alpha_{13} \frac{1}{6R} x^3 + \alpha_{14} \frac{1}{2R} x^2 \Phi + \alpha_{15} \frac{1}{6R} x^3 \Phi \right] \\
 \gamma_{x\Phi} &= \alpha_{11} + \left[\alpha_8 \frac{1}{R} x \right] \\
 \kappa_x &= \alpha_{12} + \alpha_{13} x + \alpha_{14} \Phi + \alpha_{15} x \Phi \\
 \kappa_\Phi &= \alpha_{16} + \alpha_{17} x + \alpha_{18} \Phi + \alpha_{19} x \Phi \\
 \kappa_{x\Phi} &= \alpha_{20} + \left[\alpha_{14} \frac{1}{R} x + \alpha_{15} \frac{1}{2R} x^2 + \alpha_{17} R \Phi + \alpha_{19} \frac{1}{2} R \Phi^2 \right]
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

- ✓ Le deuxième élément est basé sur la théorie des coques surbaissées [27].

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_7 + \alpha_8 y \\
 \varepsilon_y &= \alpha_9 + \alpha_{10} x - \left[\alpha_{12} \frac{1}{2R} x^2 + \alpha_{13} \frac{1}{6R} x^3 + \alpha_{14} \frac{1}{2R} x^2 y + \alpha_{15} \frac{1}{6R} x^3 y \right] \\
 \gamma_{xy} &= \alpha_{11} - \left[\alpha_{10} y \right] \\
 \kappa_x &= \alpha_{12} + \alpha_{13} x + \alpha_{14} y + \alpha_{15} xy \\
 \kappa_y &= \alpha_{16} + \alpha_{17} x + \alpha_{18} y + \alpha_{19} xy \\
 \kappa_{xy} &= \alpha_{20} + \left[2\alpha_{14} x + \alpha_{15} x^2 + 2\alpha_{17} y + \alpha_{19} y^2 \right]
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Chapitre 2

Développement d'un élément fini membranaire basé sur l'approche en déformation

2.1 Introduction

De nombreux chercheurs ont entrepris plusieurs tentatives pour développer des éléments finis ayant trois degrés de liberté par nœud, les deux translations dans le plan ainsi qu'une rotation plane. Les éléments membranaires avec rotation Θ_z autour de la normale au plan moyen possèdent des avantages pratiques pour l'analyse des structures de coque, des plaques pliées et des panneaux raidis. En fait, quand elles sont combinées avec un élément de flexion, on peut construire des éléments coques qui peuvent être connectés avec d'autres éléments possédants des degrés de liberté additionnels (élément poutre) pour l'analyse des structures raidis.

Allman [34] a développé le premier élément triangulaire efficace avec une rotation dans le plan [dont le déplacement normal quadratique et le déplacement tangentiel linéaire le long de chaque côté de l'élément]. Bergan et Fellipa [35] ont formulé un élément triangulaire avec rotation dans le plan en utilisant la méthode de formulation libre. Le concept d'Allman a été étendu par Cook [36] pour développer un élément membranaire quadrilatère à quatre nœuds. Le même auteur a proposé une formulation simple d'un élément triangulaire avec neuf degrés de liberté en utilisant l'approche hybride [37]. MacNeal et Harder [38] ont introduit des modifications pour améliorer la formulation du concept de Cook. En 1988, Allman [39] a dérivé un élément fini quadrilatère membranaire d'ordre inférieur avec des rotations en superposant quatre triangles à rotations planes.

D'autres tentatives pour développer des éléments de types membranaires avec des ddl de rotation en utilisant différents concepts ont été effectuées par Hughes et Brezzi [40], Ibrahimbegovic et al. [41], Atluri [42], Iura et Atluri [43], Cazzani et Atluri [44], Long et Xu [45,46], Piltner et Taylor [47], Groenwold et al. [48], et Kugler et al. [49] Cen et al. [50] et Rezaiee-Pajand et Karkon [51], Zouari et al. [52].

La contribution de l'approche en déformation pour le développement des éléments finis membranaires avec rotation dans le plan a été citée dans plusieurs travaux [2,10-14].

Dans ce chapitre nous allons présenter la formulation théorique et la validation numérique d'un nouvel élément fini quadrilatère membranaire avec rotation dans le plan basé sur l'approche en déformation destiné à l'analyse statique et en vibration libre des structures. Cet élément possède les quatre nœuds de coin et le nœud central (figure 2.1) dont ce dernier contient seulement les deux translations (U et V) tandis que les autres nœuds de coin ont la rotation dans le plan (drilling) comme ddl additionnel (U, V et Θ_z). La technique de condensation statique est utilisée pour l'élimination du cinquième nœud interne. L'évaluation de la performance et de la précision du présent élément est effectuée à travers plusieurs tests standards. Les résultats de l'élément sont comparés à ceux obtenus par d'autres éléments finis donnés dans la littérature.

2.2 Evaluation du champ des déplacements et des matrices élémentaires de l'élément SBQM

Pour les problèmes d'élasticité plane en coordonnées Cartésiennes (x, y), lorsque les déplacements de translation sont U et V, les trois déformations planes (ϵ_x, ϵ_y et ϵ_{xy}) qui correspondent aux premières dérivées des déplacements, sont données par :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

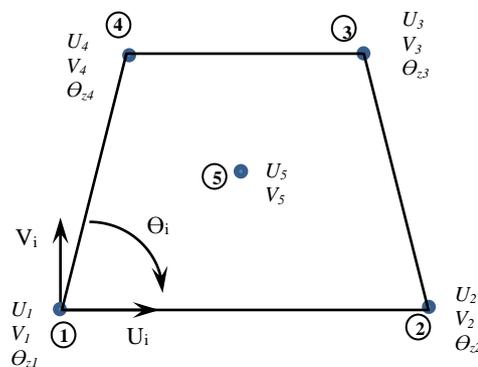


Figure 2.1 Elément quadrilatère membrane avec rotation dans le plan.

L'élément quadrilatère membranaire à cinq nœuds **SBQM** (Strain Based Quadrilateral Membrane) possède 3 ddl par nœud de coin (U, V et Θ_z) et 2ddl au nœud central (U et V), deux translations (U et V) sont suivant les deux directions (x et y respectivement) et une rotation dans le plan Θ_z (figure 2.1).

Si nous considérons les déplacements de corps rigides (déplacements d'un élément sans déformations) nous aurons :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

En intégrant les deux premières équations de (2.2), nous obtenons les expressions de U et V suivantes :

$$\begin{aligned}U &= \alpha_1 + f(y) \\ V &= \alpha_2 + g(x)\end{aligned}\tag{2.3}$$

En remplaçant les équations de (2.3) dans la troisième équation de (2.1), nous obtenons :

$$\frac{dg(x)}{dx} + \frac{df(y)}{dy} = 0\tag{2.4}$$

La solution de l'équation (2.4) est comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{df(y)}{dy} &= -\alpha_3 \\ \frac{dg(x)}{dx} &= \alpha_3\end{aligned}\tag{2.5}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}f(y) &= -\alpha_3 y \\ g(x) &= \alpha_3 x\end{aligned}\tag{2.6}$$

Nous substituons f(y) et g(x) dans les équations (2.3), nous obtenons les déplacements de corps rigides qui sont :

$$\begin{aligned}U &= \alpha_1 - \alpha_3 y \\ V &= \alpha_2 + \alpha_3 x\end{aligned}\tag{2.7}$$

Où les composantes α_1 et α_2 sont les translations dans les directions x et y respectivement, alors que la composante α_3 est la rotation dans le plan. Cette rotation dans le plan Θ_z peut être donnée par :

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \alpha_3 \quad (2.8)$$

L'utilité de la rotation dans le plan (Θ_z) est de permettre de combiner l'élément dans le plan avec des poutres ayant la rotation comme degré de liberté additionnel, et de permettre à l'élément de modéliser une poutre de renforcement dans le cas des plaques trouées.

Les fonctions de forme d'un élément quadrilatère, comportant trois degrés de liberté (U , V et θ) pour chacun des nœuds d'angle et deux degrés de liberté (U et V) pour le nœud central, doivent contenir donc 14 constantes indépendantes, dont trois ont été utilisées pour représenter les déplacements de corps rigides (équations (2.7)). Les onze constantes restantes seront utilisées pour exprimer les fonctions de déformations de l'élément, de sorte que l'équation de compatibilité soit satisfaite et que la matrice de transformation pour les fonctions de forme résultante ne soit pas singulière. Une variante appropriée des fonctions de déformations imposées est donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_7 y + \alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} xy^3 + \alpha_{13} x \\ \varepsilon_y &= \alpha_5 + \alpha_8 x - \alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} yx^3 + \alpha_{14} y \\ \gamma_{xy} &= 2\alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_8 y + 2\alpha_9 x + 2\alpha_{10} y \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'équation de compatibilité est obtenue en dérivant deux fois la première des équations (2.1) par rapport à y , la deuxième deux fois par rapport à x et la troisième une fois par rapport à x et une fois par rapport à y , pour avoir :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.10)$$

Les déformations imposées données par (2.9). Nous pouvons voir que de l'élément **SBQM** satisfait l'équation de compatibilité (2.10).

Les deux premières équations de (2.9) sont intégrées pour avoir :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_4 x + \alpha_7 xy + \alpha_{11} xy^2 + \alpha_{12} x^2 y^3 + \alpha_{13} \frac{x^2}{2} + h(y) \\ V &= \alpha_5 y + \alpha_8 xy - \alpha_{11} yx^2 - \alpha_{12} y^2 x^3 + \alpha_{14} \frac{y^2}{2} + e(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

En dérivant les deux équations ci-dessus par rapport à y et x respectivement et en substituant dans la troisième équation de (2.1) pour avoir :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \alpha_7 x + 2\alpha_{11} xy + 3\alpha_{12} x^2 y^2 + \frac{\partial h(y)}{\partial y} + \alpha_8 y - 2\alpha_{11} yx \\ -3\alpha_{12} y^2 x^2 + \frac{\partial e(x)}{\partial x} &= 2\alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_8 y + 2\alpha_9 x + 2\alpha_{10} y \end{aligned} \quad (2.12)$$

En faisant le partage des termes en x et y , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(y)}{\partial y} &= \alpha_6 + 2\alpha_{10} y \\ \frac{\partial e(x)}{\partial x} &= \alpha_6 + 2\alpha_9 x \end{aligned} \quad (2.13)$$

Après intégration des équations (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} h(y) &= \alpha_6 y + \alpha_{10} y^2 \\ e(x) &= \alpha_6 x + \alpha_9 x^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

En substituant les fonctions des équations (2.11) nous obtenons :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_4 x + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} xy^2 + \alpha_{12} x^2 y^3 + \alpha_{13} \frac{x^2}{2} \\ V &= \alpha_5 y + \alpha_6 x + \alpha_8 xy + \alpha_9 x^2 - \alpha_{11} yx^2 - \alpha_{12} y^2 x^3 + \alpha_{14} \frac{y^2}{2} \\ \theta_z &= -\alpha_7 \frac{x}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 x - \alpha_{10} y - 2\alpha_{11} xy - 3\alpha_{12} x^2 y^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Les fonctions de déplacement finales de l'élément **SBQM** sont obtenues en ajoutant les déplacements de corps rigide donnés par (2.7) avec ceux donnés par (2.15) pour avoir :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} xy^2 + \alpha_{12} x^2 y^3 + \alpha_{13} \frac{x^2}{2} \\ V &= \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_5 y + \alpha_6 x + \alpha_8 xy + \alpha_9 x^2 - \alpha_{11} yx^2 - \alpha_{12} y^2 x^3 + \alpha_{14} \frac{y^2}{2} \\ \theta_z &= \alpha_3 - \alpha_7 \frac{x}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 x - \alpha_{10} y - 2\alpha_{11} xy - 3\alpha_{12} x^2 y^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le champ des déplacements donné par (2.16) peut être exprimé sous forme matricielle comme suit :

$$\{U_e\} = [P]\{\alpha\} \quad (2.17)$$

Le vecteur des déplacements nœdaux ($\{q_e\}^T = (U_1, V_1, \theta_{z1}, \dots, U_4, V_4, \theta_{z4}, U_5, V_5)$), peut être évalué en substituant les coordonnées des cinq nœuds de l'élément **SBQM** (figure 2.1) pour avoir :

$$\{q_e\} = [C]\{\alpha\} \quad (2.18)$$

Avec $\{U_e\} = \{U, V, \theta_z\}^T$, $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{14}\}^T$

D'où la matrice de transformation [C] de dimension 14x14 relie les déplacements nœdaux élémentaire aux quatorze constantes ($\{\alpha\}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_{14})$). Ce vecteur des constantes peut être donné comme suit :

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{q_e\} \quad (2.19)$$

Les déformations $\{\varepsilon\}$ données par (2.9) peuvent être exprimées sous forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} \quad (2.20)$$

Avec $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$

Les matrices [P] et [Q] sont données par :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & 0 & y & xy & 0 & 0 & y^2 & xy^2 & x^2y^3 & \frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & y & x & 0 & xy & x^2 & 0 & -yx^2 & -y^2x^3 & 0 & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x}{2} & \frac{y}{2} & x & -y & -2xy & -3x^2y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & -x^2 & -2yx^3 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & x & y & 2x & 2y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

En substituant l'équation (2.19) dans (2.17) and (2.20), on obtient :

$$\{U_e\} = [P][C]^{-1}\{q_e\} = [N]\{q_e\} \quad (2.23)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q(x, y)][C]^{-1}\{q_e\} = [B]\{q_e\} \quad (2.24)$$

Avec $[N] = [P][C]^{-1}$; $[B] = [Q(x, y)][C]^{-1}$ (2.25)

Les relations contrainte-déformation sont données par :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.26)$$

Avec la matrice d'élasticité [D] pour les problèmes d'élasticités planes est donnée par les équations (1.5-1.8) mentionnées dans le chapitre 1.

La forme intégrale faible pour le cas statique et en vibration libres peuvent être exprimées respectivement :

$$\int_{V^e} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V^e} \delta\{U_e\}^T \{f_v\} dV \quad (2.27)$$

$$\int_{V^e} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV + \int_{V^e} \delta\{U_e\}^T \{\ddot{U}\} dV = 0 \quad (2.28)$$

En substituant les équations (2.23), (2.24) et (2.26) dans (2.27) et (2.28), nous obtenons :

$$\delta\{q_e\}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{q_e\} = \delta\{q_e\}^T \left(\int_V [N]^T \{f_v\} dV \right) \quad (2.29)$$

$$\delta\{q_e\}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{q_e\} + \delta\{q_e\}^T \left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\ddot{q}_e\} = 0 \quad (2.30)$$

D'où les matrices de rigidité et de mass élémentaires ($[K^e]$, $[M^e]$) sont respectivement :

$$[K^e] = \int_{S_e} [B]^T [D] [B] dx dy$$

$$[K^e] = [C]^{-T} \left(\int [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C]^{-1} = [C]^{-T} [K_0] [C]^{-1} \quad (2.31)$$

D'où $[K_0] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D] [Q] \det(J) d\xi d\eta \quad (2.32)$

$$[M^e] = \int_{S_e} \rho h [N]^T [N] dx dy$$

$$[M^e] = [C]^{-T} \left(\int \rho h [P]^T [P] dx dy \right) [C]^{-1} = [C]^{-T} [M_0] [C]^{-1} \quad (2.33)$$

D'où $[M_0] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho h [P]^T [P] \det(J) d\xi d\eta \quad (2.34)$

Le vecteur forces nodales dû à la force volumique $\{f_v\}$ est :

$$\{F_b\} = \int_{V_e} [N]^T \{f_v\} dV = [C]^{-T} \left(\int_{V_e} [P]^T \{f_v\} dV \right) \quad (2.35)$$

Le vecteur des déplacements nodaux élémentaires $\{q_e\}$ peut être divisé de telle sorte que $\{q_e\} = [q_r \ q_c]^T$ avec $\{q_r\}$ le vecteur ddl des nœuds de coin retenus et $\{q_c\}$ le vecteur ddl du nœud interne éliminés par condensation.

Avec $\{q_r\} = \{U_1, V_1, \theta_{z1}, \dots, U_4, V_4, \theta_{z4}\}^T$; $\{q_c\} = \{U_5, V_5\}^T$

Les matrices de rigidité et de mass élémentaires ($[K^e]$, $[M^e]$) de dimension 14x14 peuvent être décomposées :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} \\ K_{cr} & K_{cc} \end{bmatrix}; \quad [M^e] = \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rc} \\ M_{cr} & M_{cc} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Les matrices de rigidité et de mass élémentaires condensées ($[K_c^e]$, $[M_c^e]$) de dimension 12x12 peuvent être exprimées [64] :

$$[K_c^e] = [K_{rr}] - [K_{rc}][K_{cc}]^{-1}[K_{cr}] \quad (2.37)$$

$$[M_c^e] = [M_{rr}] - [M_{rc}][K_{cc}]^{-1}[K_{cr}] - [K_{rc}][K_{cc}]^{-1}[M_{cr}] \\ + [K_{rc}][K_{cc}]^{-1}[M_{cc}][K_{cc}]^{-1}[K_{cr}] \quad (2.38)$$

Le présent élément est validé en statique et en vibration libre et comparé aux éléments suivants :

Tableau 2.1 Liste des éléments de comparaisons.

Symboles	Désignations	Réfs.
Q4	Elément quadrilatéral à 4 nœuds.	[31,59]
Q8	Elément quadrilatéral à 8 nœuds.	[31,59]
Q4PS	Elément hybride quadrilatéral à 4 nœuds.	[31]
Q4WT	Elément quadrilatéral à 4 nœuds avec modes incompatibles.	[31]
FRQ	Elément quadrilatéral à 4 nœuds basé sur le concept « Plane Fiber Rotation »	[57]
CPS4	Elément quadrilatère à 4 nœuds classique en contrainte plane avec intégration exact (Abaqus)	[52]
CPS8	Elément quadrilatère à 8 nœuds classique en contrainte plane avec intégration exact (Abaqus)	[52]
HTD	Elément quadrilatère à 4 nœuds avec rotation dans le plan basé sur la méthode de hybrid Trefftz	[54]
HT	Elément quadrilatère à 4 nœuds basé sur la méthode de hybrid Trefftz	[56]
AQ	Elément quadrilatère à 4 nœuds d'Allman	[54]
PFR4	Elément quadrilatère basé sur le concept « fibre plane rotatoire »	[52]
PFR4I	Elément quadrilatère basé sur le concept « fibre plane rotatoire » avec modes incompatibles	[52]
HS-A7	Elément plan à 4 nœuds basé sur une solution analytique	[51]
QACM4	Elément membranaire à 4 nœuds formulé par la méthode de coordonnées surfacique	[59]
SBRIEIR	Elément à champ de déformation à 4 nœuds avec rotation dans le plan	[2]
SBQM	Elément quadrilatère à 5 nœuds avec rotation dans le plan basé sur l'approche en déformation	Elément Proposé

2.3 Validation de l'élément SBQM

2.3.1 Etude du panneau fuselé de Cook

La figure 2.2 présente les données géométriques et les propriétés du matériau utilisées pour l'analyse d'un panneau fixé sur le bord gauche et soumis à un chargement de cisaillement uniforme le long du bord libre. Ce problème a été proposé et résolu par Cook [53]. Il s'agit de calculer le déplacement vertical au point C et la solution de référence donnée par Bergan et Felippa [35] ($V_C^{\text{ref}}=23.9$). Trois types de maillage sont considérés et les résultats des déplacements normalisés donnés (tableau 2.2) montrent qu'une convergence monotone vers la solution de référence est obtenue en utilisant l'élément **SBQM**. D'autre part, il améliore clairement la solution de l'élément **SBRIEIR**.

Tableau 2.2. Déplacement vertical normalisé au point C.

Eléments	Maillages		
	2x2	4x4	8x8
CPS4 [52]	0.495	0.765	0.923
CPS8 [52]	0.950	0.991	0.999
HTD [54]	0.972	0.989	0.997
PFR4 [52]	0.894	0.965	0.989
PFR4I [52]	0.921	0.974	0.992
SBRIEIR	0.949	0.971	0.989
SBQM	0.969	0.980	0.993
Solution de référence [35]	$V_C^{\text{ref}}=23.9$		

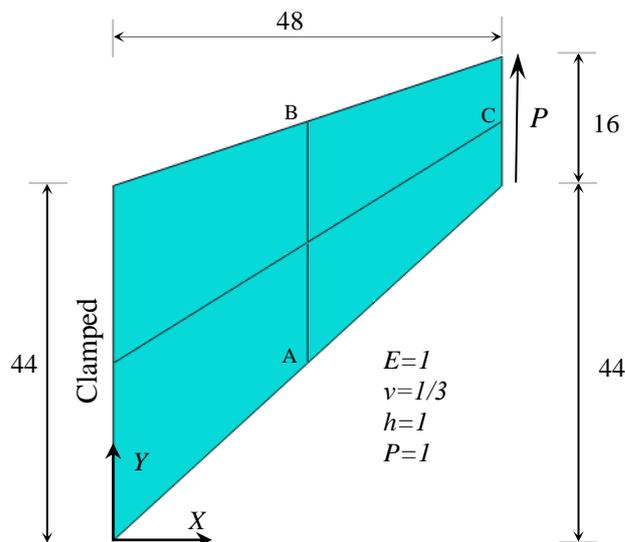


Figure 2.2. Panneau de Cook modélisé par un maillage (2x2).

2.3.2 Poutre console soumise à un moment de flexion

Dans ce test, une poutre console en flexion pure est analysée en utilisant seulement deux éléments quadrilatéraux dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont présentées dans la figure 2.3. Pour évaluer la sensibilité de l'élément développé à la distorsion géométrique, l'excentricité e varie entre (0 et 4.9) comme proposé par Piltner and Taylor [55]. Les résultats obtenus du déplacement vertical à l'extrémité libre (point A) sont donnés dans le tableau 2.3. La figure 2.4 montre également la sensibilité de la distorsion en présentant le déplacement vertical normalisé au point A en fonction de l'excentricité (e).

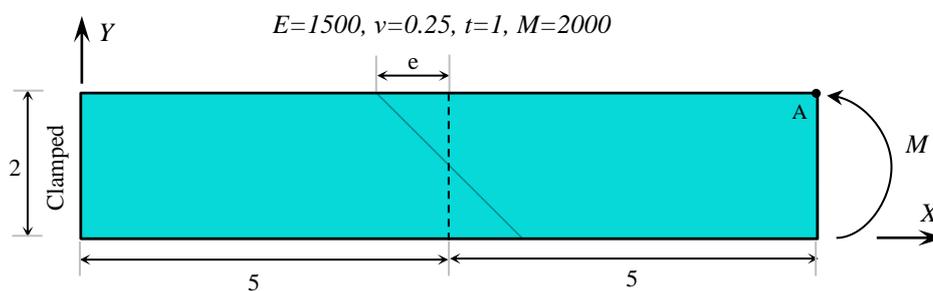


Figure 2.3. Poutre console modélisée avec deux éléments quadrilatéraux.

La pertinence de notre élément est jugée par comparaison avec les autres éléments finis.

- ✓ Pour un maillage régulier ($e=0$)

Les résultats obtenus de l'élément développé sont similaires à la solution de référence et les éléments **PFR4I** et **HTD** et plus précis que ceux **CPS4**, **CPS8**, **HT**, **AQ**, **PFR4** et **SBRIEIR**.

- ✓ Pour un maillage distordu ($e>0$)

On observe que notre élément est insensible à la distorsion du maillage contrairement aux autres éléments **CPS4**, **CPS8**, **HTD**, **HT**, **AQ**, **PFR4** et **PFR4I** et donne des résultats plus performant que l'élément **SBRIEIR**.

Tableau 2.3. Déplacement vertical normalisé au point A ($V_A^{\text{ref}} = 100$) de la poutre console.

e	CPS4 [52]	CPS8 [52]	HTD [54]	HT [56]	AQ [54]	PFR4 [52]	PFR4I [52]	SBRIEIR	SBQM
0	0.280	0.984	1.000	0.315	0.938	0.937	1.000	0.965	1.000
0.5	0.205	0.987	0.992	0.245	0.950	0.928	0.975	0.964	1.000
1	0.137	0.989	0.996	0.175	0.907	0.890	0.914	0.961	1.002
2	0.096	0.783	1.009	0.136	0.567	0.724	0.744	0.966	1.007
3	0.083	0.417	0.836	0.137	0.318	0.536	0.549	0.972	1.007
4	0.071	0.274	0.578	0.145	0.179	0.395	0.404	0.976	1.005
4.9	0.062	0.173	0.414	0.142	0.112	0.310	0.318	0.979	1.003

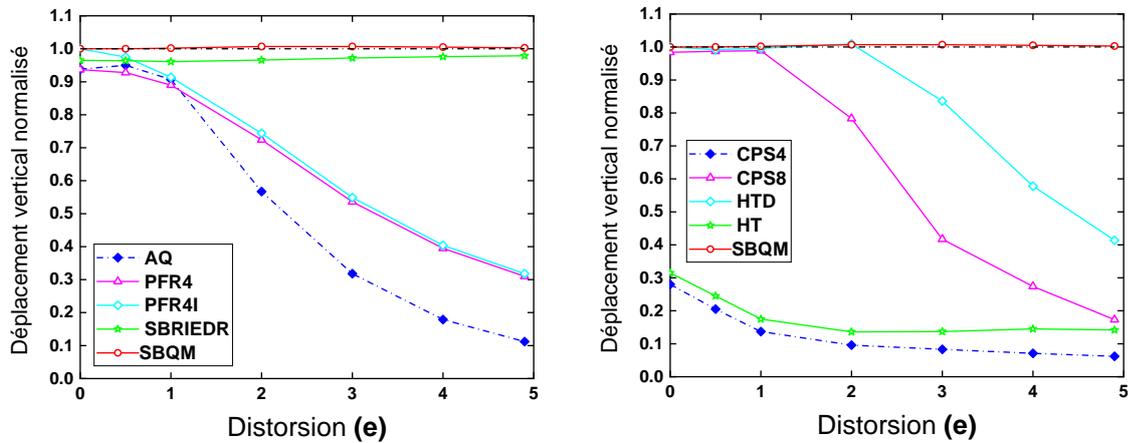


Figure 2.4. Déplacement vertical normalisé au point A de la poutre console.

2.3.3 Flexion plane d'une poutre encastree

Le problème d'une poutre console soumise à une charge verticale uniforme (figure 2.5) traité par Batoz et Dhatt [31] et Ayad [57] est considéré pour valider le présent élément. Il s'agit de calculer le déplacement vertical à l'extrémité libre de la poutre dont les cinq maillages utilisés sont illustrés (figure 2.5). La solution de référence donnée par la théorie des poutres de Timoshenko est comme suit :

$$V_c^{ref} = \frac{P_z L^3}{3EI} + \frac{6P_z L}{5GA} = 4 + 0.03 = 4.03$$

Les résultats obtenus de l'élément **SBQM** pour différents maillages (M1, M2, M3, M4 et M5) sont présentés dans le tableau 2.4 et comparés à ceux obtenus par quelques éléments membranaires de la littérature dont on peut conclure que :

- Pour les maillages réguliers M1, M2 et M3, le présent élément donne des résultats plus précis que les éléments **Q4**, **FRQ** et **SBRIEIR** et similaires avec ceux des éléments **Q4WT**, **Q4PS** et **Q8**.
- Pour les maillages distordus M4 et M5, l'élément **SBQM** est le plus insensible aux maillages distordus que les autres éléments membranaires.

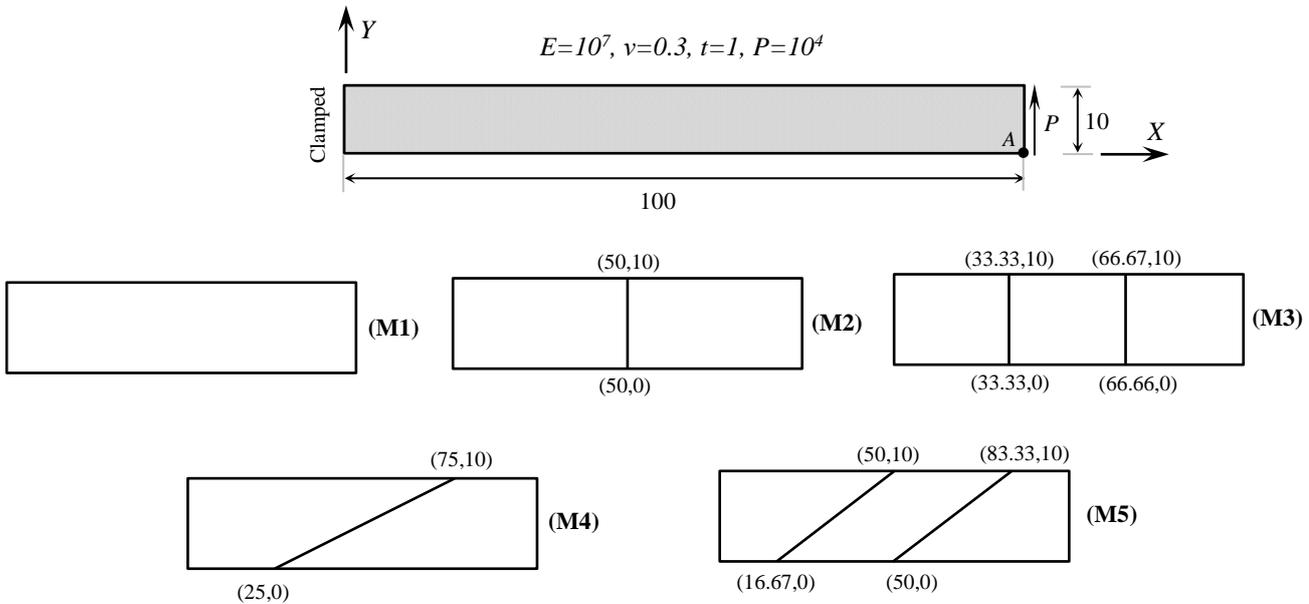


Figure 2.5. Poutre en flexion plane (Données et maillages).

Tableau 2.4. Déplacement vertical V_A d'une poutre en flexion plane.

Maillages	FRQ [57] I.R 2X2	Q4 [31] I.E 2X2	Q4WT [31] I.E 2X2	Q4PS [31] I.E 2X2	Q8 [31] I.E 3X3	SBRIEIR I.E 4X4	SBQM I.E 4X4
M1	2.76	0.10	3.03	3.03	3.03	2.86	3.02
M2	3.44	0.38	3.78	3.78	3.70	3.57	3.77
M3	3.56	0.75	3.92	3.92	3.84	3.71	3.91
M4	1.09	0.12	0.30	0.49	0.64	2.92	3.04
M5	1.61	0.22	1.79	1.94	1.76	3.04	3.14
Solution de référence $V_A=4.03$							

I.R : intégration réduite; I.E : intégration exacte.

2.3.4 Poutre console élancée de MacNeal

Considérons les poutres consoles minces présentées dans la figure 2.6 à section rectangulaire qui sont soumises à un moment de flexion pur ($M=10$) et une charge de cisaillement unitaire ($P=1$) à l'extrémité libre. Ce test, proposé par MacNeal [58], est considéré comme exemple de référence pour tester la sensibilité à la distorsion de maillages des éléments membranaires quadrilatéraux. La console est modélisée par trois types de maillage (rectangulaire (a), parallélogramme (b) et trapézoïdal (c)). Les résultats de l'élément **SBQM** sont comparés à ceux obtenus avec d'autres éléments (tableau 2.5). Pour tous les cas de maillages, de meilleures solutions sont obtenues par l'élément **SBQM** pour ce type de problème. Ces résultats confirment que le présent élément est stable aux distorsions géométriques comparons avec les autres éléments présentés.

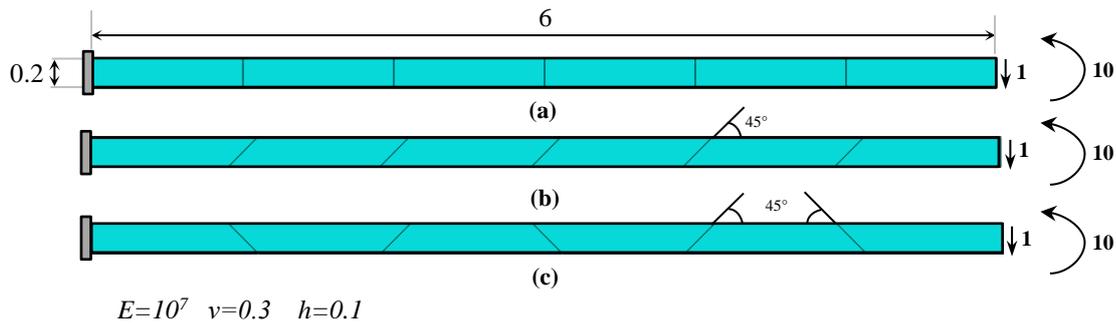


Figure 2.6. Poutre console élancée de MacNeal (Données et maillages).

Tableau 2.5. Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre de la poutre de MacNeal.

Eléments	Force de cisaillement à l'extrémité libre			Flexion pure		
	Régulier (a)	Parallèle (b)	Trapézoïdale (c)	Régulier (a)	Parallèle (b)	Trapézoïdale (c)
Q4 [59]	0.093	0.035	0.003	0.093	0.031	0.022
Q8 [59]	0.951	0.919	0.854	1.	0.994	0.939
QACM4 [59]	0.995	0.635	0.052	1.000	0.722	0.046
SBRIEIR	0.940	0.924	0.917	0.947	0.958	0.945
SBQM	0.993	0.964	0.972	1.	1.	1.
Ref [58]		0.1081			0.2700	

2.3.5 Cylindre épais sous pression interne

Afin d'étudier le comportement de l'élément proposé pour l'analyse des matériaux presque incompressibles, un cylindre épais soumis à une pression interne unitaire P uniformément répartie [54] est examiné. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont présentées dans la figure 2.7. En raison de symétrie, un quart de la structure est étudié en considérant le problème en déformation plane. En variant le coefficient de Poisson de 0.3 à 0.4999, la structure est analysée et les résultats du déplacement radial à la surface intérieure est présentés dans le tableau 2.6. Les résultats démontrent que l'élément proposé **SBQM** et **HTD** sont libre de tous blocage par Poisson, à l'exception des autres éléments (**AQ**, **Q4** et **SBRIEIR**) qui souffrent de ce type de blocage.

Tableau 2.6. Déplacement vertical normalisé d'un cylindre épais sous pression interne.

Coefficient de Poisson	HTD [54]	AQ [54]	Q4 [64]	SBRIEIR	SBQM	Exact (x10-3)
0.3	1.01092	1.13537	0.986	0.9698	0.9869	4.5825
0.49	1.02976	0.91270	0.845	0.8532	0.9784	5.0399
0.499	1.03162	0.37154	0.398	0.5200	0.9770	5.0602
0.4999	1.03162	0.05736	0.053	0.1539	0.9768	5.0623

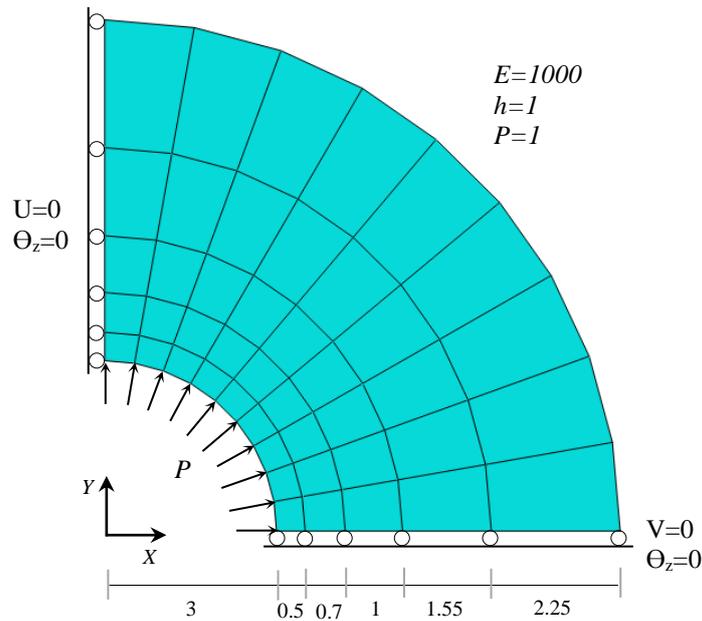


Figure 2.7. Cylindre épais sous pression interne (Données et maillage).

2.3.6 Poutre console circulaire épaisse sous une charge de cisaillement

Ce test concerne une poutre circulaire épaisse soumise à une force de cisaillement P à son extrémité libre (figure 2.8) et modélisée avec 4 maillages 2×1 , 4×1 , 6×1 et 8×1 [52]. Les résultats du déplacement vertical normalisé au point A sont donnés au tableau 2.7 et comparés avec d'autres solutions numériques. L'élément proposé est plus précis que les éléments **CPS4** et **SBRIER** et il est comparable aux autres éléments.

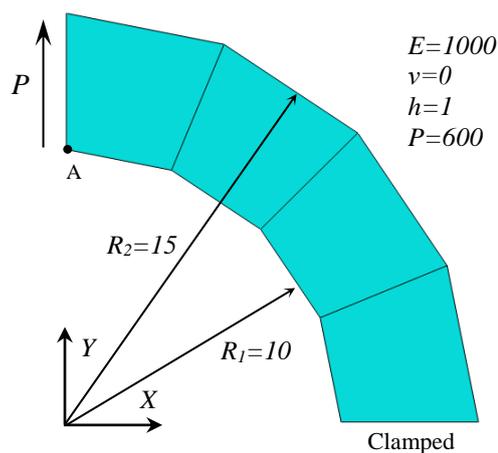


Figure 2.8. Poutre console circulaire épaisse modélisée avec (4×1) éléments quadrilatéraux.

Tableau 2.7. Déplacement vertical normalisé au point A d'une poutre console circulaire épaisse.

Maillages	CPS4 [52]	CPS8 [52]	HS- A7 [51]	QACM4 [59]	PFR4 [52]	PFR4I [52]	SBRIEIR	SBQM
2x1	0.251	0.857	0.987	-	0.936	0.936	0.659	0.870
4x1	0.643	0.982	0.994	0.938	0.987	0.987	0.847	0.951
6x1	0.811	0.991	-	0.979	0.995	0.995	0.886	0.980
8x1	0.887	0.992	-	0.991	0.998	0.998	0.912	0.998
Solution de référence $V_A^{\text{ref}} = 90.1$								

2.3.7 Poutre console circulaire mince sous un chargement de cisaillement

La poutre console circulaire mince (figure 2.9) soumise à une force unitaire à son extrémité libre [52] est traitée en utilisant trois maillages 6x1, 12x2 et 24x4. Les résultats du déplacement vertical normalisé au point A du présent élément avec ceux d'autres éléments sont rapportés au tableau 2.8. Les résultats montrent que la précision et la vitesse de convergence de l'élément proposé sont très élevées et mieux que ces éléments (**CPS4**, **HT** et **SBRIEIR**). D'autre part, ces résultats sont comparables à ceux donnés par les éléments (**CPS8**, **HTD**, **AQ**, **PFR4** et **PFR4I**).

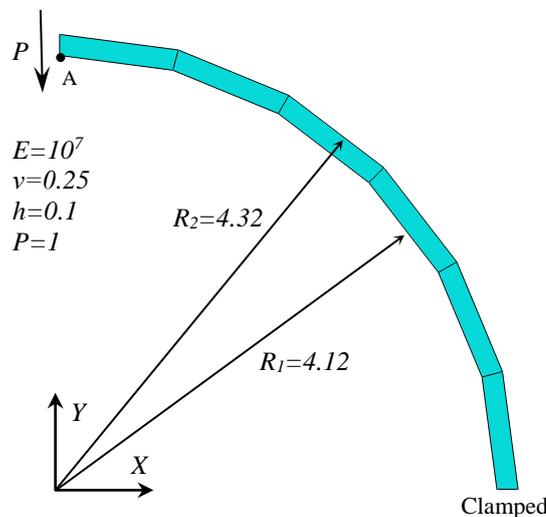


Figure 2.9. Poutre console circulaire mince modélisée avec (6x1) éléments quadrilatéraux.

Tableau 2.8. Déplacement vertical normalisé au point A d'une poutre console circulaire mince.

Maillages	CPS4 [52]	CPS8 [52]	HTD [54]	HT [56]	AQ [54]	PFR4 [52]	PFR4I [52]	SBRIEIR	SBQM
6x1	0.073	0.881	0.964	0.075	0.888	0.936	0.998	0.504	0.937
12x2	0.247	1.006	1.008	0.251	1.000	0.993	1.009	0.797	1.003
24x4	0.572	1.013	1.012	0.555	1.008	1.008	1.012	0.936	1.011
Solution de référence $V_A^{\text{ref}} = -0.08734$									

2.3.8 Vibration libre d'un mur console

L'analyse en vibration libre en plan d'un mur encastré à la base est étudiée dont la géométrie et les caractéristiques mécaniques sont illustrées dans la figure 2.10. Les cinq premières fréquences propres calculées de l'élément **SBQM** sont présentées dans le tableau 2.9 avec celles obtenues par d'autres éléments finis (**SBRIEIR**) (**Q4**, **Q6** et **Q8**) [60] ainsi que la solution analytique [61]. Les résultats de l'élément **SBQM** sont comparables avec ceux de l'élément **Q8** et que sa précision est assez élevée en comparaison avec les éléments **Q6** et **Q4**.

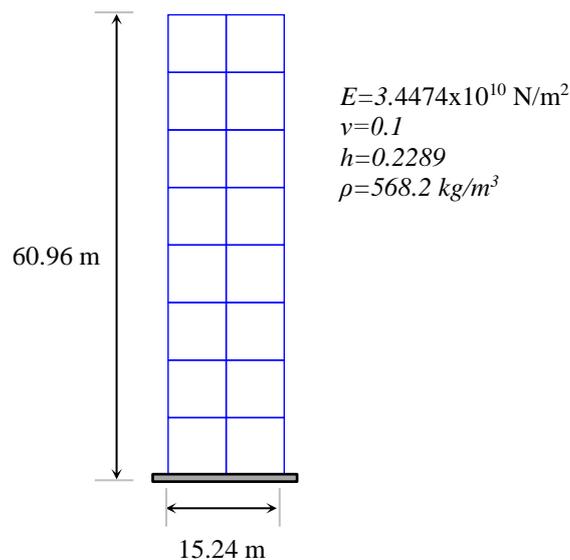


Figure 2.10. Vibrations libres d'un mur en cisaillement.

Tableau 2.9. Cinq premières fréquences propres (Hz) d'un mur en cisaillement.

Modes	Q4 [60]	Q6 [60]	Q8 [60]	SBRIEDR	SBQM	Sol. analy [61]
1	5.250	4.984	4.986	4.994	4.989	4.973
2	27.991	26.882	26.327	26.765	26.693	26.391
3	32.016	32.014	31.964	32.005	31.949	31.944
4	67.518	65.376	62.648	63.994	63.536	62.066
5	97.250	97.234	95.955	96.915	95.437	95.832

2.3.9 Vibration libre d'une poutre console

Dans cet exemple, une poutre console [62] est étudiée dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure 2.11 en considérant le problème en contrainte plane. La fréquence fondamentale donnée par la théorie des poutres (Euler-Bernoulli) est considérée comme solution de référence ($f_1 = 0.08276 \times 10^4 \text{ Hz}$) [62]. Trois maillages sont utilisés pour l'élément proposé afin de faire la comparaison avec les éléments **SFEM**, **FEM** [62] et **SBRIEIR**. Les quatre premières fréquences propres sont présentées dans le tableau

2.10. On observe que l'élément **SBQM** converge plus rapidement que l'éléments fini **Q4**, en particulier pour un maillage grossier (10x1 éléments) et ses résultats sont comparables avec ceux des éléments **SFEM**, **Q9**, **QBI** et **SBRIEIR** pour les autres maillages.

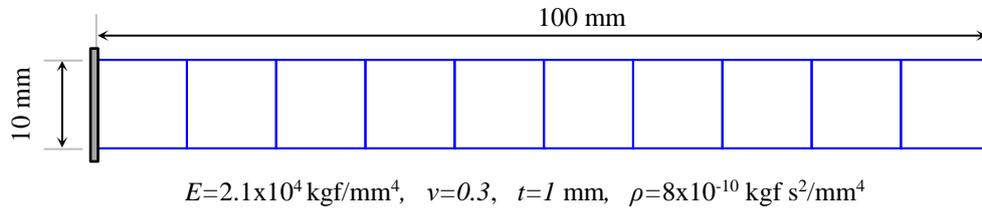


Figure 2.11. Vibrations libres d'une poutre console.

Tableau 2.10. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une poutre console ($f_1=0.08276 \times 10^4$ Hz).

Maillages	Modes	SFEM (4 SC) [62]	FEM (8- node Q9) [62]	FEM (4- node QBI) [62]	FEM (4- node Q4) [62]	SBRIEDR	SBQM
10x1	1	0.0861	0.0827	0.0817	0.1000	0.0845	0.0820
	2	0.5071	0.4982	0.4824	0.6077	0.5150	0.4990
	3	1.2828	1.2832	1.2526	1.2863	1.2862	1.2849
	4	1.3124	1.3205	1.2826	1.6423	1.3823	1.3359
20x2	1	0.0834	0.0823	0.0822	0.0872	0.0831	0.0824
	2	0.4993	0.4940	0.4928	0.5264	0.5018	0.4975
	3	1.2828	1.2827	1.2827	1.2837	1.2845	1.2839
	4	1.3141	1.3020	1.2982	1.4011	1.3339	1.3212
50x5	1	0.0824	0.0822	0.0822	0.0831	0.0824	0.0823
	2	0.4944	0.4934	0.4934	0.4989	0.4952	0.4944
	3	1.2825	1.2825	1.2825	1.2827	1.2831	1.2829
	4	1.3024	1.2997	1.2998	1.3168	1.3071	1.3047

2.3.10 Vibration libre d'une poutre console à section variable

On considère une poutre console trapézoïdale dont ses paramètres sont donnés dans la figure 2.12. Les quatre premières fréquences propres calculées en utilisant un maillage 10x4 sont présentées dans le tableau 2.11. On remarque que les éléments **SBQM**, **SBRIEIR**, **Q4** donnent des résultats légèrement supérieurs à ceux des éléments **SFEM**, **QBI** et **Q9** en utilisant le même maillage.

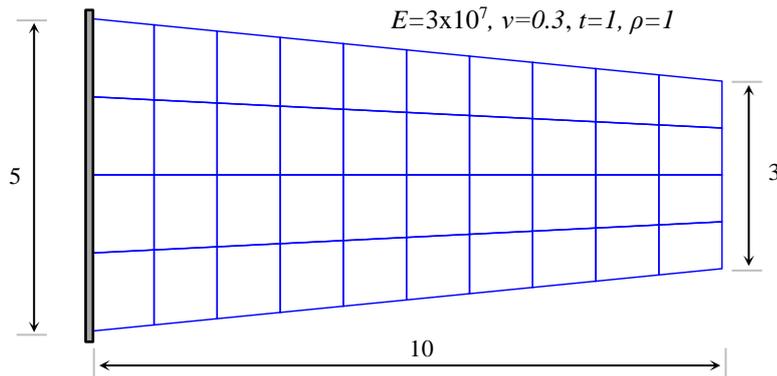


Figure 2.12. Vibration libre d'une poutre console trapézoïdale.

Tableau 2.11. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^3$ rad/s) d'une console trapézoïdale.

Modes	SFEM (4 SC) [62]	FEM (8-node Q9) [62]	FEM (4-node QBI) [62]	FEM (4-node Q4) [62]	SBIEDR	SBQM
1	0.2611	0.2618	0.2607	0.2651	0.2638	0.2634
2	0.9156	0.9188	0.9136	0.9489	0.9490	0.9448
3	0.9513	0.9522	0.9511	0.9540	0.9541	0.9527
4	1.8296	1.8557	1.8241	1.9576	1.9390	1.9216

2.3.11 Vibration libre d'un mur avec ouvertures

Dans cet exemple, un mur à quatre ouvertures traité par Brebbia et al. [63] est analysé (figure 2.13). Le bord inférieur est complètement encasté et le cas en contrainte plan est considéré. Nous présentons dans le tableau 2.12 les six premières fréquences propres dont nous constatons que les résultats numériques du présent élément sont en bon accord avec ceux obtenus par **SBRIER**, **Q4**, **BEM** [63] et **SFEM** [62].

Tableau 2.12. Six premières fréquences propres (rad/s) d'un mur en cisaillement.

Modes	SFEM (4 SC) [62]	FEM (4-node Q4) [62]	SBIEDR	SBQM	BEM [63]
1	2.0597	2.0744	2.0757	2.0727	2.079
2	7.0598	7.1153	7.1143	7.1036	7.181
3	7.6197	7.6270	7.6236	7.6215	7.644
4	11.8278	11.9766	11.9724	11.9445	11.833
5	15.2376	15.4448	15.4176	15.3815	15.947
6	18.2748	18.4285	18.2941	18.2661	18.644

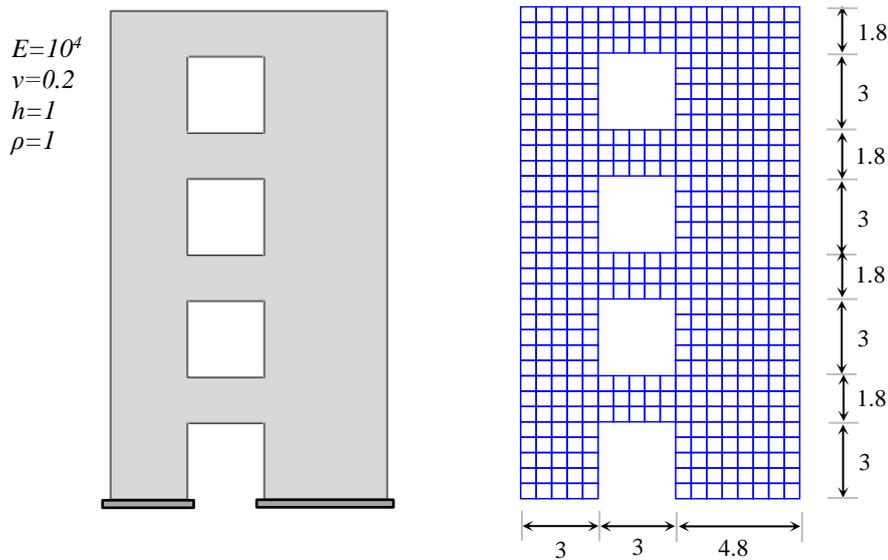


Figure 2.13. Mur en cisaillement avec quatre ouvertures en utilisant 559 éléments.

2.4 Conclusion

En se basant sur l'approche en déformation, un nouvel élément quadrilatère à 5 nœuds avec rotation dans le plan a été développé et validé dans ce chapitre pour l'analyse statique et en vibration libre des structures membranaires. Cet élément possède trois degrés de liberté pour chacun des nœuds de coin (U , V , Θ_z) et seulement deux ddl (U , V) pour le nœud central. Dans la formulation, la matrice de rigidité a été calculée numériquement (intégration exacte) et le cinquième nœud interne a été éliminé par condensation statique. Cet élément satisfait les équations de compatibilité et la bonne représentation du MCR. La convergence ainsi que la performance de l'élément formulé ont été testés à travers une série d'exemples numériques choisis de la littérature. Les résultats trouvés montrent l'efficacité du présent élément dans l'analyse statique et en vibration libre des structures et ses résultats sont comparables avec des éléments d'ordre élevé.

Chapitre 3

Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini triangulaire de plaque à champ de déformation

3.1 Introduction

Les plaques de formes variées sont souvent utilisées dans de nombreuses structures, telles que les ailes d'avions, les structures de navires, ainsi que les dalles de bâtiments et les tabliers de ponts. Des travaux de recherche se poursuivent sur la formulation d'éléments finis simples et efficaces pour l'analyse des structures complexes de plaque. Cette tâche reste l'un des axes de recherche importants en mécanique des structures.

Les formulations des premiers éléments finis de plaque étaient basées sur la théorie classique des plaques minces [65] où l'effet du cisaillement transversal (CT) est négligé. Cependant, il est bien connu que pour les plaques épaisses où l'effet du CT devient significatif, l'utilisation de la théorie classique des plaques devient imprécise. Un moyen possible d'éviter ce problème consiste à utiliser la théorie des plaques épaisses [66,67] (Reissner-Mindlin), qui prend en compte l'effet du CT. L'utilisation de cette théorie a attiré de nombreux chercheurs à développer des éléments robustes [68-74] qui permet d'éviter le phénomène de verrouillage par CT pour les plaques minces contrairement aux éléments basés sur le modèle en déplacement ayant des fonctions d'interpolation d'ordre inférieur. L'utilisation de l'approche en déformation a été adoptée par plusieurs chercheurs pour développer des éléments finis efficaces et robustes [15-17,19-22] pour surmonter les difficultés liées au blocage en CT. Les avantages des éléments finis basés sur l'approche en déformation ont été illustrés dans plusieurs références [1-30]. Il a été constaté que l'utilisation de cette approche permet d'inclure des termes polynomiaux d'ordre élevé dans le champ des déplacements sans la nécessité d'introduire des degrés de liberté non essentiels, ce qui conduit généralement à une meilleure précision des contraintes, des déformations et des déplacements [12].

Dans ce chapitre, nous proposons la formulation d'un nouvel élément fini triangulaire pour l'analyse statique et en vibration libre de la flexion des plaques isotrope. L'élément développé **SBTMP** (Strain Based Triangular Mindlin Plate) contenant les trois degrés de liberté essentiels dans chacun des trois nœuds de coin est basé sur l'approche en déformations et la théorie de Reissner-Mindlin. Les trois composantes de la déformation de flexion (κ_x , κ_y et κ_{xy}) varient linéairement par contre les deux composantes du cisaillement transversale (γ_{xz} et γ_{yz}) sont constantes. Les performances du présent élément sont évaluées à travers plusieurs tests standards considérés comme des outils importants de validation des éléments de plaques. Les résultats obtenus montrent que l'élément **SBTMP** est numériquement plus efficace que l'élément bilinéaire basé sur le modèle en déplacement.

3.2 Formulation de l'élément SBTMP

3.2.1 Dérivation du champ des déplacements

L'élément plaque Mindlin proposé est un triangle à trois nœuds (figure 3.1) avec trois degrés de liberté par nœud (W , β_x et β_y). Les relations déformations-déplacements de flexion (κ_x , κ_y et κ_{xy}) et de cisaillement transversal (γ_{xz} et γ_{yz}) sont données comme suit :

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right), \quad \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial W}{\partial y} \quad (3.1)$$

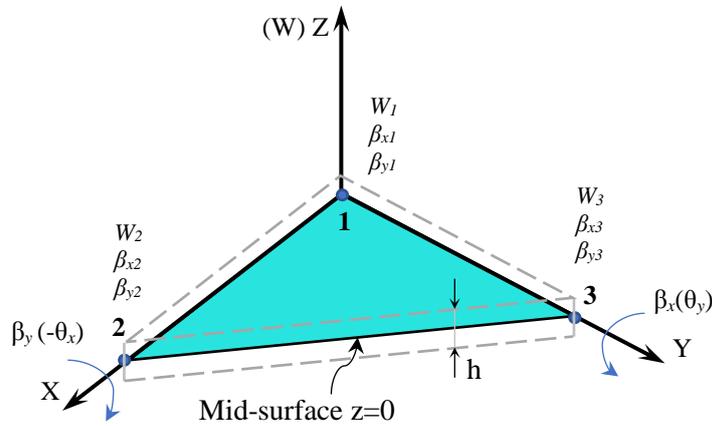


Figure 3.1. Élément triangulaire plaque Mindlin.

Les équations de compatibilité pour les plaques de type Reissner-Mindlin [16] sont données par :

$$\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial \kappa_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} \quad (3.2)$$

Le champ des déplacements de corps rigide est obtenu en égalisant à zéro les six déformations données par l'équation (3.1) et après intégration, nous obtenons les expressions suivantes :

$$W = \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3 y, \quad \beta_x = \alpha_2, \quad \beta_y = \alpha_3 \quad (3.3)$$

Cet élément triangulaire possède trois degrés de liberté pour chacun des trois nœuds de coin. Ce qui en résulte que le champ des déplacements doit contenir neuf constantes indépendantes. Ayant utilisé trois $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pour la représentation des modes de corps rigides, il reste donc six constantes $(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_9)$ pour exprimer les déplacements dû aux déformations imposées à l'élément. Ces six constantes indépendantes sont réparties entre les cinq déformations données par l'équation (3.4).

$$\kappa_x = \alpha_4 + \alpha_5 y, \quad \kappa_y = \alpha_6 + \alpha_5 x, \quad \kappa_{xy} = \alpha_7 + 2\alpha_5 (x + y), \quad \gamma_{xz} = \alpha_8, \quad \gamma_{yz} = \alpha_9 \quad (3.4)$$

Les termes entre parenthèses dans l'équation (3.4) sont ajoutés afin de satisfaire les relations de compatibilité données par l'équation (3.2). En substituant l'équation (3.4) dans l'équation (3.1) et après intégration, les fonctions des déplacements sont obtenues par :

$$\begin{aligned} W &= -\alpha_4 \frac{x^2}{2} - \alpha_5 \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} \right) - \alpha_6 \frac{y^2}{2} - \alpha_7 \frac{xy}{2} + \alpha_8 \frac{x}{2} + \alpha_9 \frac{y}{2} \\ \beta_x &= \alpha_4 x + \alpha_5 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) + \alpha_7 \frac{y}{2} + \alpha_8 \frac{1}{2} \\ \beta_y &= \alpha_5 \left(xy + \frac{x^2}{2} \right) + \alpha_6 y + \alpha_7 \frac{x}{2} + \alpha_9 \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les fonctions des déplacements finales sont obtenues en ajoutant les équations (3.3) et (3.5) pour obtenir ce qui suit :

$$\begin{aligned} W &= \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3 y - \alpha_4 \frac{x^2}{2} - \alpha_5 \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} \right) - \alpha_6 \frac{y^2}{2} - \alpha_7 \frac{xy}{2} + \alpha_8 \frac{x}{2} + \alpha_9 \frac{y}{2} \\ \beta_x &= \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_5 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) + \alpha_7 \frac{y}{2} + \alpha_8 \frac{1}{2} \\ \beta_y &= \alpha_3 + \alpha_5 \left(xy + \frac{x^2}{2} \right) + \alpha_6 y + \alpha_7 \frac{x}{2} + \alpha_9 \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.2 Evaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse

Il est connu en modèle en déplacement que les matrices élémentaires de rigidité et de masse ($[K_e]$ et $[M_e]$) sont respectivement données comme suit :

$$[K^e] = \int_{S_e} [B]^T [D][B] dS$$

$$[K^e] = [C]^T \underbrace{\left(\int [Q]^T [D][Q] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[K_0]} [C]^{-1} = [C]^T [K_0] [C]^{-1} \quad (3.7)$$

$$[M^e] = \int_{S_e} [N]^T [T][N] dS$$

$$[M^e] = [C]^T \underbrace{\left(\int [P]^T [T][P] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[M_0]} [C]^{-1} = [C]^T [M_0] [C]^{-1} \quad (3.8)$$

D'où $[D]$, $[D]_b$, $[D]_s$ sont respectivement les matrices d'élasticité, d'élasticité en flexion, d'élasticité en cisaillement, et $[T]$ est la matrice contenant la masse volumique du matériau.

$$[D] = \begin{bmatrix} [D]_b & 0 \\ 0 & [D]_s \end{bmatrix}, \quad [D]_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad [D]_s = khG \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[T] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Vu que la matrice de transformation $[C]$ reliant les neuf degrés de liberté ($W_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, \dots, W_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}$) des trois nœuds de l'élément aux neuf constantes ($\alpha_1, \dots, \alpha_9$) n'est pas singulière, son inverse est obtenu et par la suite les matrices élémentaires de rigidité et de masse ($[K_e]$ et $[M_e]$) peuvent être évaluées. Ces matrices élémentaires sont ensuite assemblées pour obtenir les matrices globales de rigidité et de masse de la structure ($[K]$ et $[M]$). Ces dernières matrices sont utilisées dans l'équation du mouvement pour le système de vibration libre donné par :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0 \quad (3.11)$$

Les matrices $[K_0]$ et $[M_0]$ données dans les équations (3.7) et (3.8) sont évaluées numériquement à l'aide d'une intégration exacte (schéma de Hammer) et les matrices $[C]$, $[Q]$ et $[P]$ sont données en annexe.

3.3 Validation numérique

3.3.1 Patch-test de modes rigides

Le calcul des valeurs propres de la matrice de rigidité d'un seul élément **SBTMP** pour différentes géométries et valeurs d'élanement a montré l'existence seulement des trois valeurs propres nulles qui correspondent aux trois modes rigides.

3.3.2 Patch-test mécanique

Considérons une plaque rectangulaire de longueur ($L=2a=40$) et de largeur ($2b=20$) simplement supportée aux trois nœuds de coin 1,2 et 3 ($W_1=W_2=W_3=0$) est modélisée avec quatre éléments (figure 3.2) pour trois valeurs de l'élanement L/h (10,100 et 1000) [31]. Nous appliquons sur les quatre côtés de la plaque des sollicitations qui produisent l'état de moments constants (ou de contraintes).

- Pour $M_n=1$ appliqué sur le contour (figure 3.2), les résultats obtenus (tableau 3.1) sont $M_x=M_y=1$ dans la plaque.
- Pour $M_{ns}=1$ appliqué sur le contour (figure 3.2), les résultats obtenus (tableau 3.1) en tout point de la plaque sont $M_{xy}=1$.

Ces résultats sont en accord avec la solution exacte et par conséquent le patch test mécanique est satisfait pour l'élément **SBTMP**.

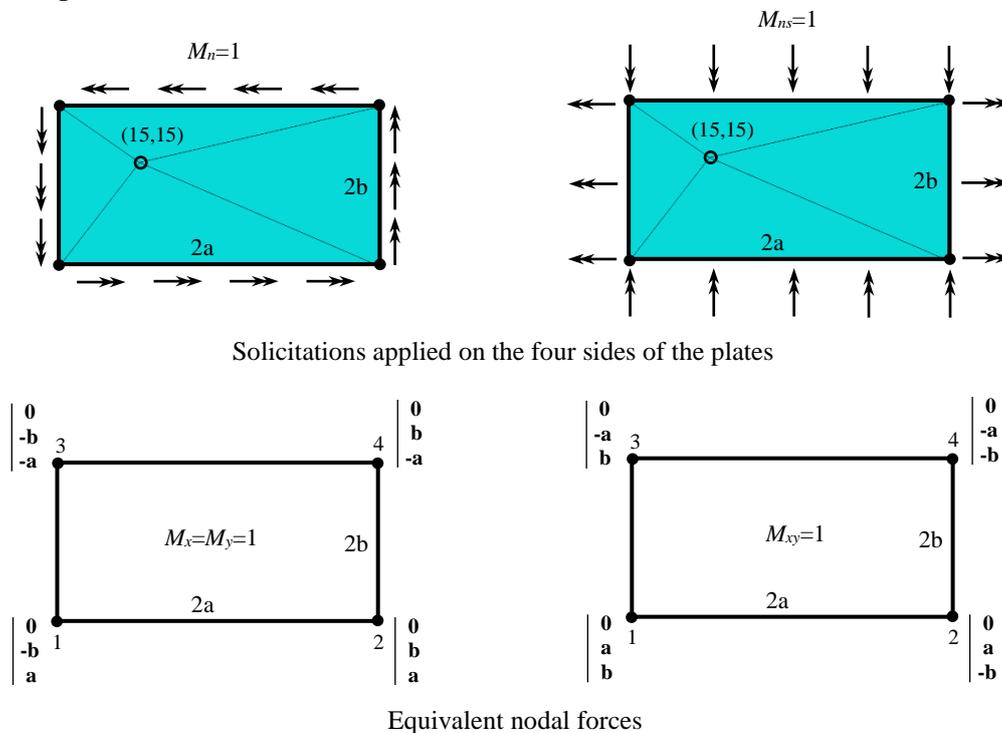


Figure 3.2. Patch-test mécanique pour l'élément Mindlin à trois nœuds ($E=1000$, $\nu=0.3$).

Tableau 3.1. Patch-test mécanique pour l'élément **SBTMP**.

Charge appliquée	Moments dans la plaque	L/h		
		10	100	1000
$M_n=1$	$M_x = M_y$	1	1	1
$M_{ns}=1$	M_{xy}	1	1	1

3.3.3 Plaque carrée en torsion

Il s'agit d'une plaque carrée simplement supportée ($W = 0$) aux trois nœuds de coin B, C et D soumise à une charge concentrée au point libre A (figure 3.3). Ce test a été donné dans de nombreuses références [16,68] et selon la théorie des plaques minces, la solution exacte de $M_{xy} = 2,5 \text{ lb in./in.}$ et $M_x = M_y = 0$ en tout point de la plaque. Les résultats des déplacements aux points A et F et des moments sont montrés au tableau 3.2. D'excellents résultats sont obtenus et le présent élément fournit la solution exacte pour les contraintes et les déplacements (pour les deux maillages).

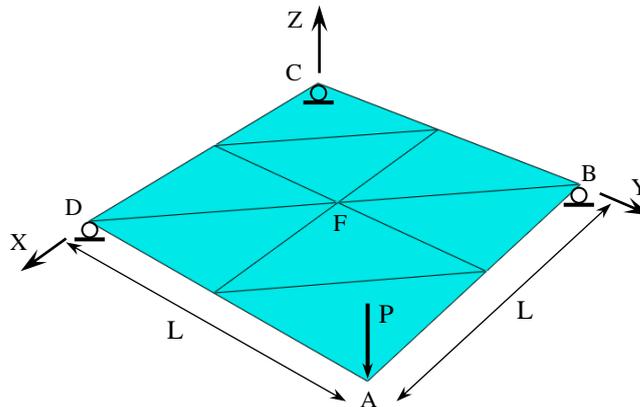


Figure 3.3. Torsion d'une plaque carrée ($L=8$, $h=1$, $P=5$, $E=10000$, $\nu=0.3$, $k=10^5$).

Tableau 3.2. Torsion d'une plaque carrée.

Eléments	Deflections		Moment dans la plaque	
	W_A	W_F	M_x and M_y	M_{xy}
SBTMP (1x1)	0.24960	0.06240	0	2.5
SBTMP (2x2)	0.24960	0.06240	0	2.5
SBRP (1x1) [16]	0.24960	-	0	2.5
SBRP (2x2) [16]	0.24960	0.06240	0	2.5
Ref. [68] (1x1)	0.24960	-	0	2.5
Ref. [68] (2x2)	0.24960	0.06240	0	2.5
Solution exacte	0.24960	0.06240	0	2.5

3.3.4 Poutre console soumise à une force concentrée

Afin d'étudier l'effet du cisaillement transversal, une poutre console soumise à une charge concentrée à l'extrémité libre (figure 3.4) est considérée. Ce test a été traité dans les références [11-12] dans lequel différentes valeurs de l'élancement ($L/h=1-100$) sont prises. Les résultats

de l'élément **SBTMP**, de l'élément bilinéaire rectangulaire **R4** et d'autres éléments à champ de déformation (**SBRP** et **SBH8**) présentés dans le tableau 3.3 montrent :

- Une bonne convergence a été achevée vers les solutions exactes pour l'élément **SBTMP** et son comportement est similaire à celui des éléments **SBRP** et **SBH8**, contrairement à l'élément **R4** qui souffre d'un blocage en CT.
- L'élément **SBTMP** est libre de tout blocage en CT et son excellente précision est insensible à l'élanement (L/h).

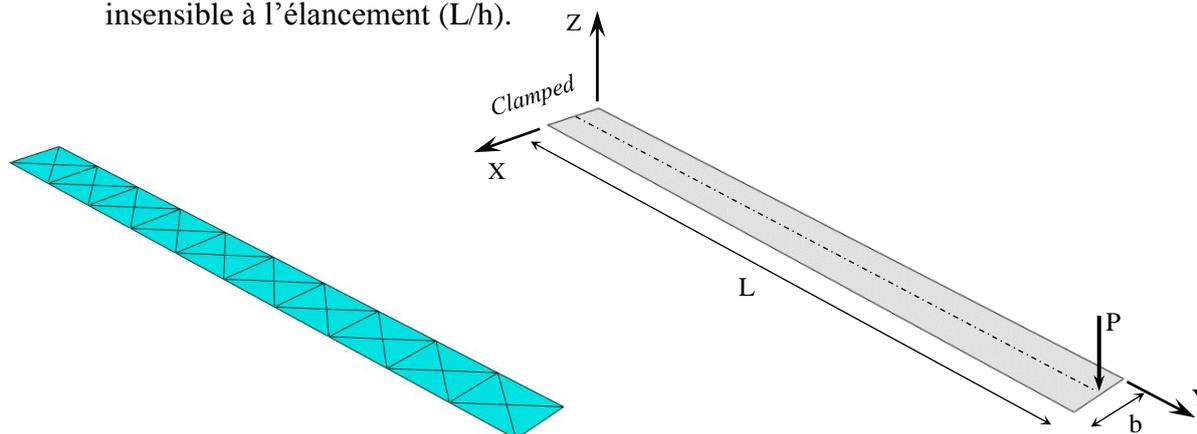


Figure 3.4. Poutre console soumise à une charge concentrée ($L=10$, $b=1$, $P=0.1$, $E=1.2 \times 10^6$, $\nu=0$, $k=5/6$).

Tableau 3.3. Déplacement vertical (W) à l'extrémité libre d'une poutre console.

L/h	R4	SBH8 [19]	SBRP [16]	SBTMP	Solution exacte
1	5.3×10^{-7}				
2	3.0×10^{-6}	3.1×10^{-6}	3.1×10^{-6}	3.1×10^{-6}	3.1×10^{-6}
3	9.2×10^{-6}	9.6×10^{-6}	9.6×10^{-6}	9.6×10^{-6}	9.6×10^{-6}
4	2.1×10^{-5}	2.2×10^{-5}	2.2×10^{-5}	2.2×10^{-5}	2.2×10^{-5}
5	3.9×10^{-5}	4.3×10^{-5}	4.3×10^{-5}	4.3×10^{-5}	4.3×10^{-5}
10	2.4×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}
100	0.00783	0.33254	0.33254	0.33262	0.3333

3.3.5 Analyse statique et vibration libre des plaques

L'analyse des plaques isotropes en statique et en vibration libre est considérée pour plusieurs géométries et conditions aux limites. Les résultats du présent élément sont comparés avec des solutions analytiques et numériques existantes dans la littérature.

3.3.5.1 Plaques carrées

Ce test permet de vérifier la convergence et notamment la rapidité de convergence de l'élément développé. Il s'agit d'une plaque carrée isotrope simplement supportée ou encastree sur ses

quatre cotés (figure 3.5). La plaque est soumise à un chargement uniforme ou une force concentrée au centre de la plaque. Différentes valeurs de l'élancement h/L (0,1, 0,01 et 0,001) sont considérées pour les plaques épaisses, minces et très minces, respectivement. Vu la symétrie, un quart de la plaque est modélisé avec un maillage $N \times N$.

Les solutions de référence (W_{ref}) pour les plaques épaisses ($h/L=0,1$) ont été retenus des valeurs données par Jirousek et al. [73] pour le cas d'un chargement uniforme et celles des solutions numériques données par Miller [68] pour une charge concentrée. Alors que pour le cas des plaques minces et très minces ($h/L= 0,01$ et $0,001$), la solution de Kirchhoff [65] est retenue.

Les résultats du déplacement au centre de la plaque présentés dans les figures 3.6-3.9 sont normalisés par rapport aux solutions de références et comparés avec les éléments **SBRP** [16] et **R4**. On peut remarquer que :

- Pour les plaques épaisses ($h/L= 0.1$), les éléments **SBTMP** et **SBRP** convergent assez rapidement vers les solutions de références.
- Pour les plaques minces ($h/L= 0.01$), l'élément développé présente un excellent taux de convergence par rapport à l'élément **SBRP** [16]. Alors que pour les plaques très minces ($h/L=0,001$), l'élément **SBTMP** montre un excellent comportement, contrairement à l'élément **SBRP** [16] qui subit un blocage en CT.
- L'élément classique bilinéaire **R4** souffre du phénomène de verrouillage en cisaillement transversal pour les plaques minces et très minces.

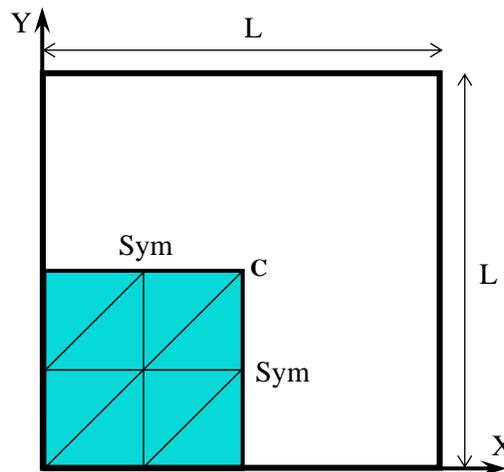


Figure 3.5. Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$ ($L=10$, $E=10.92$, $\nu=0.3$, $k=5/6$).

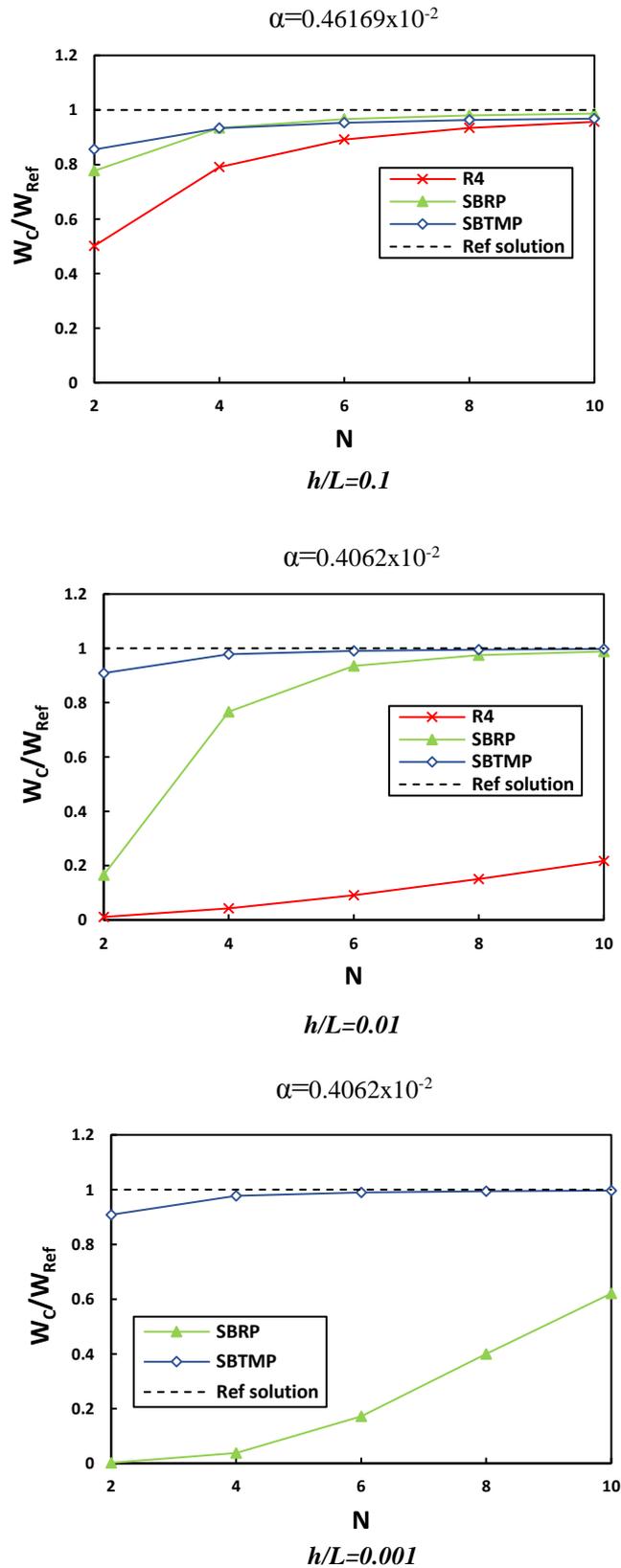


Figure 3.6. Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha qL^4/D$) d'une plaque simplement supportée sous charge uniforme.

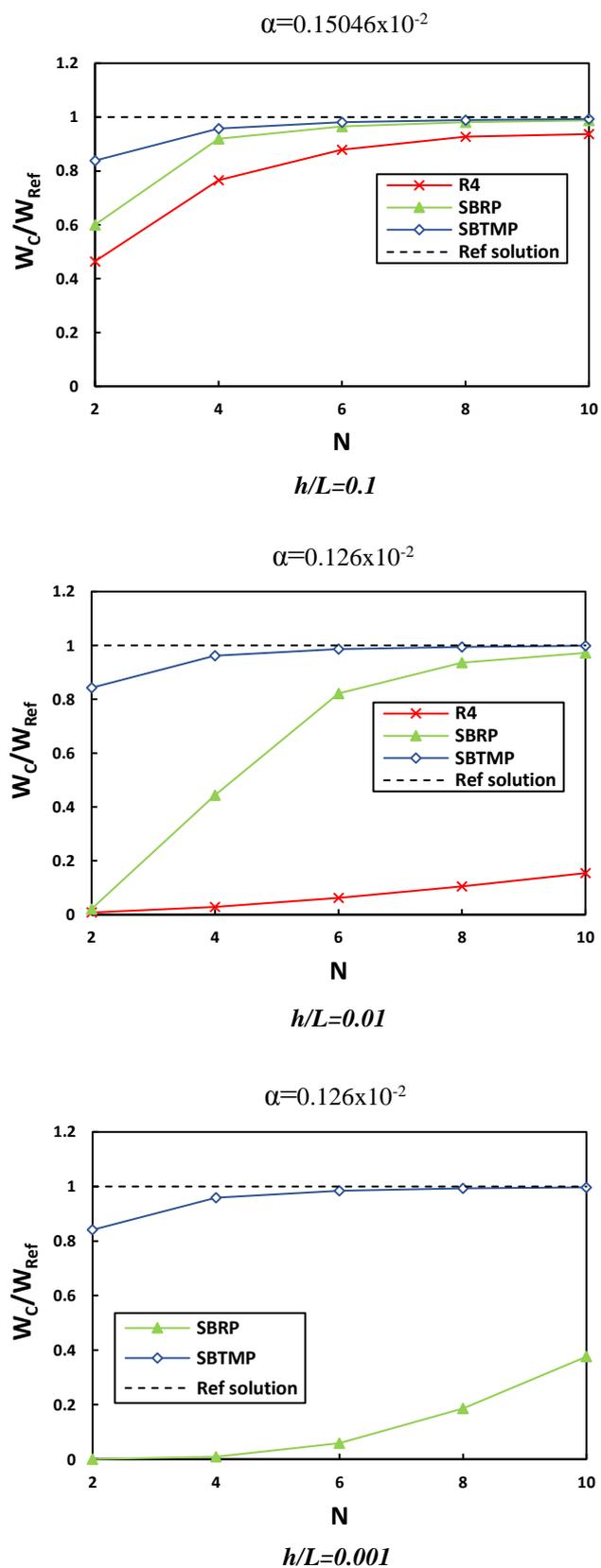


Figure 3.7. Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha qL^4/D$) d'une plaque encastree sous charge uniforme.

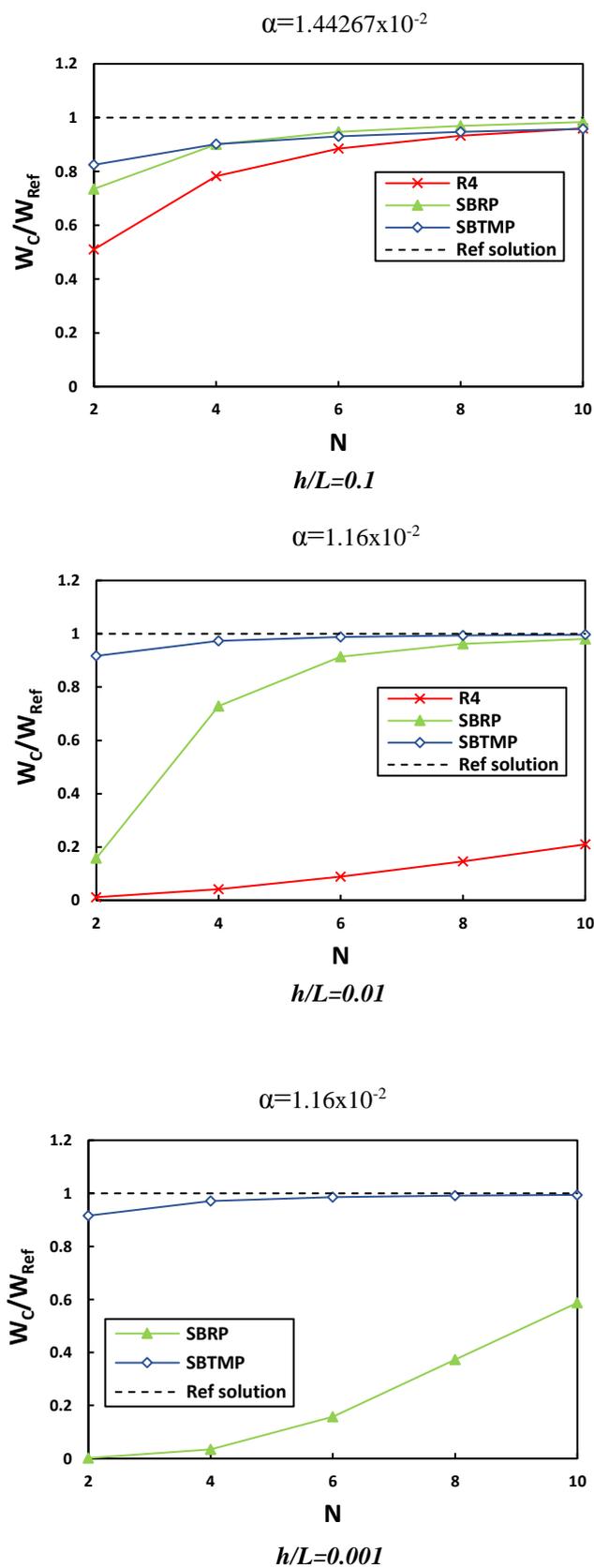


Figure 3.8. Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha PL^2/D$) d'une plaque simplement supportée sous charge concentrée.

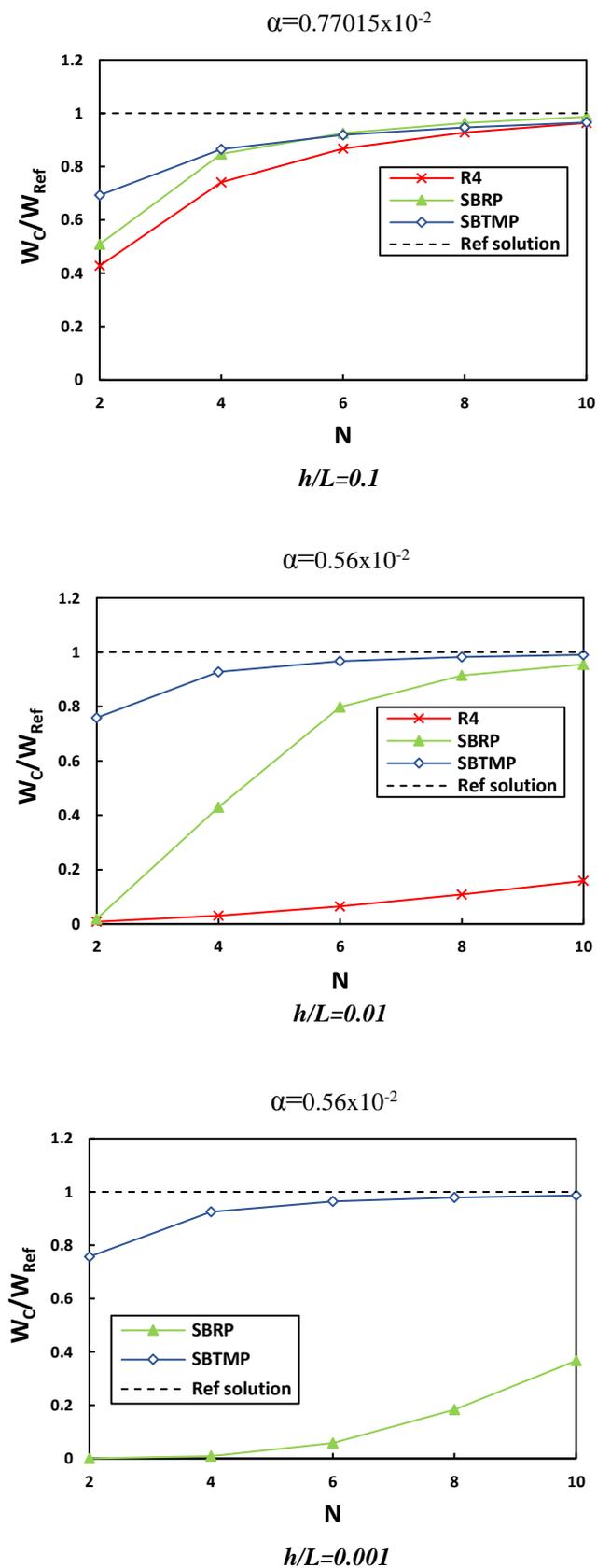


Figure 3.9. Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref} = \alpha PL^2/D$) d'une plaque encastree sous charge concentree.

3.3.5.2 Plaque biaise de Morley

On considère une plaque biaise de Morley [75] simplement appuyée sur les quatre cotés ABCD avec l'inclinaison $\beta=60^\circ$ (figure 3.10) soumise à une charge répartie. Ce test est considéré comme sévère et traité par de nombreux chercheurs [76] à cause de la distorsion du maillage. Les résultats du déplacement vertical au centre de la plaque sont montrés dans le tableau 3.4 et la figure 3.11 pour les deux valeurs de l'épaisseur ($h/L=0,01$ et $0,001$). Les résultats obtenus de l'élément **SBTMP** sont en bon accord avec la solution de référence donnée par Morley [75] et sont mieux que ceux des éléments **DKMQ** et **MITC4** de [76].

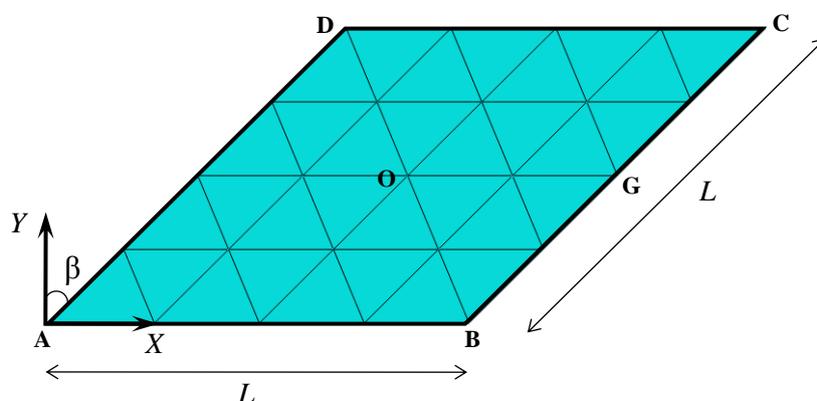


Figure 3.10. Plaque biaise avec un maillage $N \times N$ ($L=2a=10$, $E=10.92$, $\nu=0.3$, $k=5/6$).

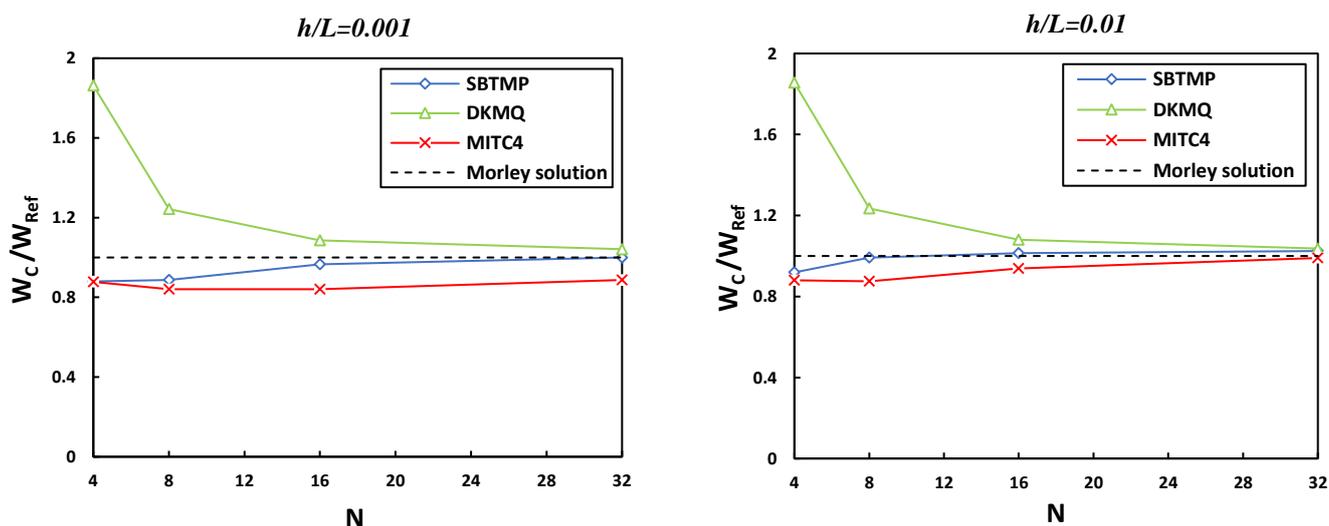


Figure 3.11. Convergence de la flèche au centre ($W_{Ref}=\alpha qL^4/D$) d'une plaque biaise simplement supportée sous charge uniforme.

Tableau 3.4. Convergence de la flèche au centre d'une plaque bise de Morley.

Maillage	$W_o = W_o (D/qL^4) \times 10^3$					
	h /L=0.001			h /L=0.01		
	SBTMP	DKMQ [76]	MITC4 [76]	SBTMP	DKMQ [76]	MITC4 [76]
4x4	0.359	0.760	0.358	0.375	0.757	0.359
8x8	0.362	0.507	0.343	0.405	0.504	0.357
16x16	0.394	0.443	0.343	0.414	0.441	0.383
32x32	0.408	0.425	0.362	0.418	0.423	0.404
Solution de Morley [75]	0.408			0.408		

3.3.5.3 Plaque bise encadrée

Il s'agit d'une plaque bise encadrée sollicitée par une charge uniformément répartie ou une force concentrée au centre (figure 3.10) testée pour divers angles d'inclinaison (β) avec un maillage 32x32. Les résultats du déplacement au centre sont reportés dans les tableaux 3.5 et 3.6 pour le cas des plaques minces (h/L=0,01) et comparés aux autres solutions numériques [77-82]. Les résultats obtenus par l'élément **SBTMP** montrent une précision satisfaisante comparons aux autres éléments pour les deux cas de chargement et tous les angles d'inclinaison.

Tableau 3.5. Plaque bise encadrée sous charge uniforme (L=2a).

Angles d'inclinaison	$W_o (qa^4/D) \times 10^{-2}$				
	15°	30°	45°	60°	75°
SBTMP	1.7734	1.2241	0.6014	0.1734	0.0152
Ref. [77] (20x20)	1.8114	1.2419	0.6087	0.1746	0.0150
Ref. [78] (8x8)	1.8004	1.2335	0.6051	0.1743	0.0152
Ref. [79] (8x8)	1.7857	1.2275	0.6032	0.1737	0.0150
Ref. [80]	1.7948	1.2281	0.5997	0.1704	0.0143
Ref. [81]	1.7968	1.2299	0.6018	0.1717	0.0144
Ref. [82]	1.7950	1.2258	0.5952	0.1638	0.0120

Tableau 3.6. Plaque bise encadrée sous charge concentrée (L=2a).

Angles d'inclinaison	$W_o (Pa^2/D) \times 10^{-2}$				
	15°	30°	45°	60°	75°
SBTMP	2.0754	1.7178	1.1882	0.6255	0.1806
Ref. [77] (28x28)	2.1232	1.7442	1.2031	0.6282	0.1753
Ref. [78] (10x10)	2.1163	1.7385	1.2024	0.6350	0.1864
Ref. [79] (12x12)	2.1260	1.7501	1.2115	0.6403	0.1874
Ref. [81]	2.0955	1.7030	1.1481	0.5635	0.1211

3.3.5.4 Plaque biaise console

Nous considérons d'analyser une plaque biaise console encastree sur AD avec différents angles de biaise (figure 3.10), sollicitée par deux une charge répartie ou une charge concentrée P au point G du bord libre BC.

Les résultats du déplacement vertical en B et C sont illustrés dans le tableau 3.7 pour une charge uniforme. Tandis que pour le second cas de chargement, les résultats du déplacement vertical en G et C sont présentés sur le tableau 3.8. On constate que les résultats du présent élément sont en bon accord avec des solutions numériques données par [77-80]. On peut remarquer que pour des angles d'inclinaison plus élevés, l'élément Heterosis [80] est moins précis que les autres éléments.

Tableau 3.7. Plaque console biaise sous charge uniforme ($L=2a$).

Angles d'inclinaison		SBTMP (32x32)	Ref. [77] (20x20)	Ref. [78] (8x8)	Ref. [79] (8x8)	Ref. [80]
15°	W_B (qa^4/D)	1.6860	1.6862	1.6846	1.6892	1.6848
	W_C (qa^4/D)	2.1226	2.1179	2.1186	2.1204	2.1182
30°	W_B (qa^4/D)	1.1587	1.1611	1.1607	1.1664	1.1601
	W_C (qa^4/D)	1.9346	1.9364	1.9396	1.9443	1.9375
45°	W_B (qa^4/D)	0.6219	0.6230	0.6248	0.6288	0.6229
	W_C (qa^4/D)	1.5869	1.5904	1.5981	1.6036	1.5893
60°	W_B (qa^4/D)	0.2242	0.2243	0.2272	0.2277	0.2231
	W_C (qa^4/D)	1.2134	1.2181	1.2295	1.2304	1.2006
75°	W_B (qa^4/D)	0.0336	0.0334	0.0355	0.0341	0.0306
	W_C (qa^4/D)	0.9163	0.9171	0.9338	0.9246	0.8651

Tableau 3.8. Plaque console biaise sous charge concentrée à l'extrémité libre ($L=2a$).

Angles d'inclinaison		SBTMP (32x32)	Ref. [77] (28x28)	Ref. [78] (10x10)	Ref. [79] (12x12)	Ref. [80]
15°	W_C (Pa ² /D)	1.4587	1.4553	1.4559	1.4565	1.4554
	W_G (Pa ² /D)	1.4052	1.4037	1.4045	1.4088	1.4044
30°	W_C (Pa ² /D)	1.5350	1.5368	1.5389	1.5423	1.5369
	W_G (Pa ² /D)	1.2873	1.2887	1.2905	1.2969	1.2890
45°	W_C (Pa ² /D)	1.6051	1.6109	1.6175	1.6227	1.6079
	W_G (Pa ² /D)	1.1349	1.1381	1.1431	1.1499	1.1365
60°	W_C (Pa ² /D)	1.7972	1.8100	1.8253	1.8279	1.7822
	W_G (Pa ² /D)	1.0222	1.0285	1.0393	1.0429	1.0135
75°	W_C (Pa ² /D)	2.6587	2.6791	2.7217	2.7059	2.5217
	W_G (Pa ² /D)	1.1869	1.1971	1.2229	1.2140	1.1128

3.3.5.5 Plaque biaise avec différentes conditions aux limites

Afin d'étudier l'effet de la distorsion géométrique pour différentes conditions d'appuis, deux types de plaques biaise sont considérés. Les premières plaques sont encastées sur les côtés AB et DC (figure 3.10) et libres sur les deux autres, tandis que les autres sont des plaques simplement supportées sur les côtés AB et DC (figure 3.10) et libre sur les deux autres. L'analyse a été élaborée pour plusieurs angles d'inclinaison avec une force concentrée au centre ou un chargement uniformément réparti en utilisant un maillage (32x32). Les résultats de l'élément **SBTMP** comparés avec d'autres solutions (tableaux 3.9-3.10) montrent que l'élément développé fourni une bonne précision et il est en bon accord avec d'autres solutions numériques. Cependant pour des angles d'inclinaison supérieurs, les résultats de l'élément développé par Butalia et al. [80] sont inférieurs aux autres résultats.

Tableau 3.9. Plaque biaise sous charge concentrée avec deux conditions de bords ($L=2a$).

Conditions aux limites	Angles d'inclinaison		15°	30°	45°	60°	75°
CFCF	SBTMP		2.8479	2.3221	1.5804	0.8121	0.2256
	Ref. [77]		2.8786	2.3442	1.5944	0.8165	0.2209
	(28x28)						
	Ref. [78]		2.8733	2.3397	1.5957	0.8266	0.2354
	(10x10)	W_0 (Pa ² /D)					
	Ref. [79]	$\times 10^{-2}$	2.8860	2.3546	1.6070	0.8315	0.2353
	(12x12)						
	Ref. [80]		2.8559	2.3078	1.5463	0.7590	0.1674
SFSF	SBTMP	W_0 (Pa ² /D)	8.6105	6.7403	4.3377	2.0899	0.5438
	Ref. [80]	$\times 10^{-2}$	8.5822	6.7189	4.2950	2.0066	0.4402

Tableau 3.10. Plaque biaise sous charge uniforme avec deux conditions de bords ($L=2a$).

Conditions aux limites	Angles d'inclinaison		15°	30°	45°	60°	75°
CFCF	SBTMP		3.6486	2.4927	1.2209	0.3489	0.0298
	Ref. [77]		3.6447	2.5012	1.2280	0.3524	0.0292
	(20x20)						
	Ref. [78]		3.6412	2.4979	1.2281	0.3541	0.0303
	(8x8)	W_0 (qa ⁴ /D)					
	Ref. [79]	$\times 10^{-2}$	3.6136	2.4811	1.2199	0.3506	0.0303
	(8x8)						
	Ref. [80]		3.6395	2.4974	1.2271	0.3488	0.0276
SFSF	SBTMP	W_0 (qa ⁴ /D)	1.8642	1.2686	0.6309	0.1959	0.0225
	Ref. [80]	$\times 10^{-1}$	1.8556	1.2680	0.6287	0.1899	0.0182

- CFCF: Plaque biaise encastree sur les cotes AB et DC et libre sur les autres cotes (figure 3.10).
- SFSF: Plaque biaise simplement supportee sur les cotes AB et DC et libre sur les autres cotes (figure 3.10).

3.3.5.6 Plaque circulaire sous chargement uniforme

La figure 3.12 presente la geometrie et le maillage utilise pour l'analyse d'une plaque circulaire isotrope mince ($R/h=50$) soumise a une charge uniforme. Deux cas de conditions aux limites sont consideres (encastree ou simplement supportes). Vu la symetrie, un quart de la plaque est discretisee en utilisant quatre types de maillage ($N=6, 24, 96$ et 150).

Les resultats de la fleche au centre (point C) sont illustres sur la figure 3.13 et le tableau 3.11. La performance de notre element est satisfaisante comparee avec d'autres elements finis [83, 84] et une bonne convergence vers les solutions de reference [83] est atteinte.

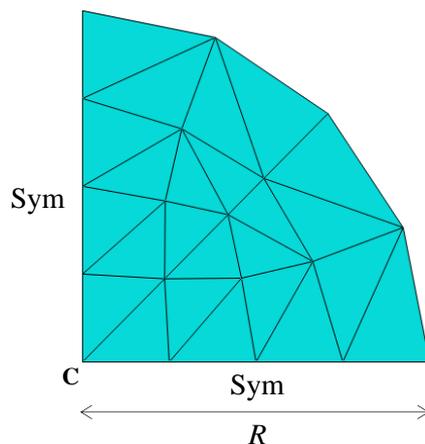


Figure 3.12. Maillage d'une plaque circulaire ($R=5$, $E=10.92$, $\nu=0.3$, $t=0.1$, $q=1$).

Tableau 3.11. Convergence de la flèche au centre d'une plaque circulaire sous charge uniforme.

Conditions aux limites	NELT	R/h=50			
		DKMT [84]	DST-BK [83]	DST-BL [83]	SBTMP
Encastrée	6	10306.0	9843	10306.0	1031.12
	24	9995.6	9855.1	9995.8	7621.17
	96	9847.5	9802.5	9848.3	9484.74
	150	-	-	-	9683.57
	Solution analytique [83]		9783.51		
Simplement supportée	6	37848	37391	37847.0	31935
	24	39398	39234	39397.0	37467
	96	39729	39680	39729.0	39396
	150	-	-	-	39886
	Solution analytique [83]		39831		

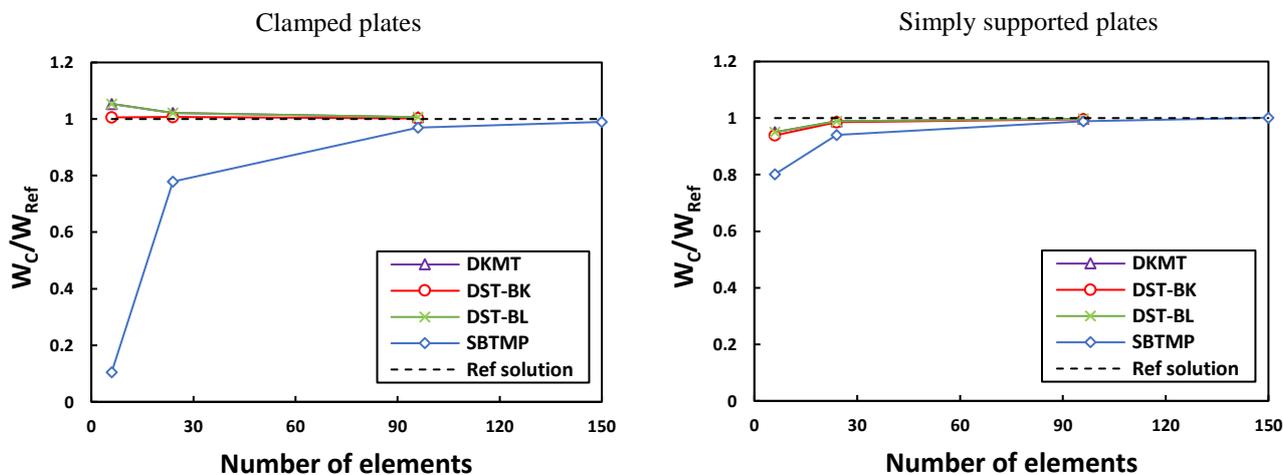


Figure 3.13. Convergence de la flèche au centre d'une plaque circulaire sous charge uniforme

3.3.5.7 Vibration libre des plaques carrées

Tout d'abord, les tests de convergence de l'élément triangulaire proposé sont effectués pour des plaques carrées simplement supportées et encastées avec deux rapports d'épaisseur ($h/L=0.01$ and 0.1) en utilisant cinq maillages (figure 3.14). Les résultats des deux premières fréquences non dimensionnelles ($\lambda=\omega_{mn}L(\rho/G)^{1/2}$) pour l'élément **SBTMP** sont présentés (tableaux 3.12-3.13) avec ceux de l'élément bilinéaire **R4** en utilisant une intégration exacte. On peut observer qu'une convergence plus rapide vers les solutions analytiques (**Rayleigh-Ritz** et la solution de Mindlin **MC**) [85-86] est obtenue avec peu d'éléments pour tous les cas, contrairement à l'élément **R4** qui converge très lentement pour les plaques épaisses et souffre d'un blocage en CT pour les plaques minces.

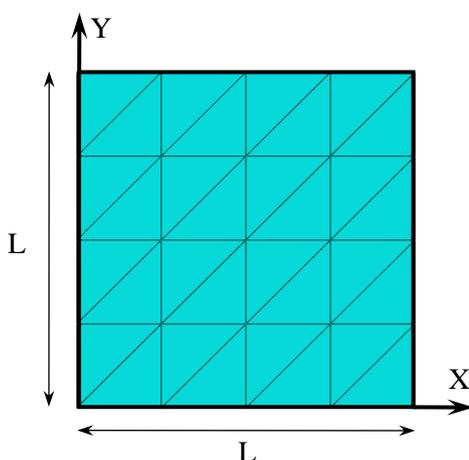


Figure 3.14. Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$.

Tableau 3.12. Convergence des fréquences propres (λ) d'une plaque carrée encastée ($k=0.8601, \nu=0.3$).

h/L	Mode	element	Maillage					Rayleigh-Ritz [85]
			4x4	8x8	12x12	16x16	20x20	
0.01	1	SBTMP	0.1962	0.1802	0.1775	0.1766	0.1761	0.1754
		R4	2.2367	1.0886	0.7317	0.5595	0.4593	
	2	SBTMP	0.4687	0.3768	0.3656	0.3619	0.3603	0.3576
		R4	5.1126	2.3366	1.5398	1.1681	0.9550	
0.1	1	SBTMP	1.7773	1.6342	1.6100	1.6016	1.5977	1.5940
		R4	2.6160	1.8818	1.7246	1.6672	1.6401	
	2	SBTMP	3.8309	3.1899	3.1015	3.0719	3.0583	3.0460
		R4	5.5141	3.7139	3.3441	3.2118	3.1499	

Tableau 3.13. Convergence des fréquences propres (λ) d'une plaque carrée simplement supportée ($k=0.8333, \nu=0.3$).

h/L	Mode	element	Maillage					MC [86]
			4x4	8x8	12x12	16x16	20x20	
0.01	1	SBTMP	0.0966	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963
		R4	0.9726	0.4756	0.3230	0.2499	0.2079	
	2	SBTMP	0.2487	0.2423	0.2413	0.2410	0.2408	0.2406
		R4	3.2443	1.4284	0.9448	0.7201	0.5917	
0.1	1	SBTMP	0.936	0.932	0.931	0.931	0.930	0.930
		R4	1.3461	1.0421	0.9809	0.9590	0.9487	
	2	SBTMP	2.329	2.244	2.229	2.224	2.222	2.219
		R4	3.9151	2.6437	2.4088	2.3261	2.2878	

Après avoir vérifié la convergence de l'élément, des plaques carrées avec six conditions aux limites (CCCC, SSSS, SCSC, CCCF, SCSS et SCSF) pour un maillage 20x20 ont été analysées en prenant deux rapports épaisseur ($h/L=0.01$ and 0.1). Les six fréquences non dimensionnelles calculées (λ) de l'élément **SBTMP** sont illustrées dans les tableaux 3.14-3.19 d'où les quatre premiers modes des plaques (SCSC, CCCF) sont présentés (figures 3.15-3.16). D'après les résultats obtenus, on observe que :

- Les résultats de l'élément **SBTMP** sont en bon accord avec les solutions analytiques [85-86] et d'autres solutions numériques [86-87] pour les plaques minces et épaisses.
- Les résultats du présent élément sont comparables à ceux donnés par l'élément à neuf nœuds **FE** [87]. Cet élément qui possède uniquement les degrés de liberté essentiels est plus économique que les éléments avec nœuds interne.
- L'élément **SBTMP** est libre de blocage en CT et son excellente précision est insensible aux conditions aux limites.
- L'élément **R4** possède des résultats plus élevés que les autres solutions (Rayleigh-Ritz, MC, FE, Meshfree) pour les plaques épaisses et souffre d'un blocage en CT pour les plaques minces.

Tableau 3.14. Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée SSSS ($k=0.8333$, $\nu=0.3$).

Modes	h/L	m	n	SBTMP	R4	FE [87]	MC [86]	Meshfree [86]
1	0.1	1	1	0.930	0.949	0.930	0.930	0.922
2		2	1	2.222	2.288	2.219	2.219	2.205
3		1	2	2.224	2.288	2.219	2.219	2.205
4		2	2	3.414	3.490	3.406	3.406	3.377
5		3	1	4.167	4.335	4.154	4.149	4.139
6		1	3	4.167	4.335	4.154	4.149	4.139
1	0.01	1	1	0.0963	0.2079	0.0963	0.0963	0.0961
2		2	1	0.2408	0.5917	0.2406	0.2406	0.2419
3		1	2	0.2413	0.5917	0.2406	0.2406	0.2419
4		2	2	0.3849	0.8358	0.3848	0.3848	0.3860
5		3	1	0.4840	1.2930	0.4814	0.4809	0.4898
6		1	3	0.4840	1.2930	0.4814	0.4809	0.4898

Tableau 3.15. Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée CCCC avec $k=0.8601$, $\nu=0.3$.

Modes	h/L	m	n	SBTMP	R4	FE [87]	Rayleigh- Ritz [85]	Meshfree [86]
1	0.1	1	1	1.5977	1.6401	1.5910	1.5940	1.5582
2		2	1	3.0583	3.1499	3.0410	3.0460	3.0182
3		1	2	3.0624	3.1499	3.0410	3.0460	3.0182
4		2	2	4.3078	4.3955	4.2650	4.2850	4.1711
5		3	1	5.0837	5.2647	5.0340	5.0350	5.1218
6		1	3	5.1258	5.3141	5.0820	5.0780	5.1594
1	0.01	1	1	0.1761	0.4593	0.1754	0.1754	0.1743
2		2	1	0.3603	0.9550	0.3576	0.3576	0.3576
3		1	2	0.3608	0.9550	0.3576	0.3576	0.3576
4		2	2	0.5306	1.2903	0.5268	0.5274	0.5240
5		3	1	0.6507	1.7956	0.6415	0.6402	0.6465
6		1	3	0.6538	1.7979	0.6446	0.6432	0.6505

Tableau 3.16. Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée SCSC avec $k=0.822$, $\nu=0.3$.

Modes	h/L	m	n	SBTMP	R4	FE [87]	Rayleigh- Ritz [85]
1	0.1	1	1	1.304	1.335	1.300	1.302
2		2	1	2.404	2.467	2.394	2.398
3		1	2	2.902	2.987	2.886	2.888
4		2	2	3.869	3.945	3.841	3.852
5		3	1	4.259	4.416	4.236	4.237
6		1	3	4.986	5.165	4.944	4.939
1	0.01	1	1	0.1416	0.3504	0.1411	0.1411
2		2	1	0.2675	0.6551	0.2668	0.2668
3		1	2	0.3407	0.8909	0.3378	0.3377
4		2	2	0.4628	1.0707	0.4606	0.4608
5		3	1	0.5012	1.3191	0.4983	0.4979
6		1	3	0.6386	1.5918	0.6295	0.6279

Tableau 3.17. Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée CCCF avec $k=0.8601$, $\nu=0.3$.

Modes	h/L	m	n	SBTMP	R4	FE [87]	Rayleigh-Ritz [85]
1	0.1	1	1	1.082	1.120	1.081	1.089
2		1	2	1.760	1.790	1.744	1.758
3		2	1	2.669	2.775	2.657	2.673
4		1	3	3.228	3.310	3.197	3.216
5		2	2	3.328	3.394	3.291	3.318
6		2	3	4.635	4.690	4.560	4.615
1	0.01	1	1	0.1173	0.3258	0.1166	0.1171
2		1	2	0.1958	0.4649	0.1949	0.1951
3		2	1	0.3118	0.8902	0.3082	0.3093
4		1	3	0.3761	0.9621	0.3737	0.3740
5		2	2	0.3959	0.9691	0.3924	0.3931
6		2	3	0.5720	1.3089	0.5678	0.5695

Tableau 3.18. Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée SCSS avec $k=0.822$, $\nu=0.3$.

Modes	h/L	m	n	SBTMP	R4	FE [87]	Rayleigh-Ritz [85]
1	0.1	1	1	1.093	1.117	1.092	1.092
2		2	1	2.302	2.366	2.296	2.298
3		1	2	2.551	2.626	2.542	2.543
4		2	2	3.629	3.705	3.612	3.616
5		3	1	4.208	4.369	4.189	4.187
6		1	3	4.575	4.748	4.547	4.543
1	0.01	1	1	0.1154	0.2664	0.1153	0.1153
2		2	1	0.2524	0.6136	0.2519	0.2521
3		1	2	0.2872	0.7304	0.2858	0.2858
4		2	2	0.4205	0.9395	0.4196	0.4199
5		3	1	0.4916	1.2983	0.4889	0.4889
6		1	3	0.5575	1.5020	0.5521	0.5533

Tableau 3.19. Fréquences propres (λ) d'une plaque carrée SCSF avec $k=0.822$, $\nu=0.3$.

Modes	h/L	m	n	SBTMP	R4	FE [87]	Rayleigh-Ritz [85]
1	0.1	1	1	0.5983	0.614	0.598	0.6033
2		1	2	1.495	1.517	1.483	1.495
3		2	1	1.886	1.962	1.884	1.900
4		2	2	2.742	2.791	2.721	2.744
5		1	3	3.082	3.164	3.059	3.073
6		3	1	3.844	4.028	3.832	3.855
1	0.01	1	1	0.06197	0.1512	0.0619	0.06217
2		1	2	0.1615	0.3558	0.1611	0.1612
3		2	1	0.2043	0.5623	0.2033	0.2045
4		2	2	0.3080	0.6728	0.3070	0.3075
5		1	3	0.3547	0.8973	0.3528	0.3528
6		3	1	0.4461	1.0905	0.4420	0.4438

- S – Simply supported : pour le bord parallèle à l'axe x ($W=0$ et $\beta_x=0$), pour le bord parallèle à l'axe y ($W=0$ et $\beta_y=0$).
- C – Encastree : $W=0$, $\beta_x=0$ et $\beta_y=0$.
- F – Libre : $W \neq 0$, $\beta_x \neq 0$ et $\beta_y \neq 0$.

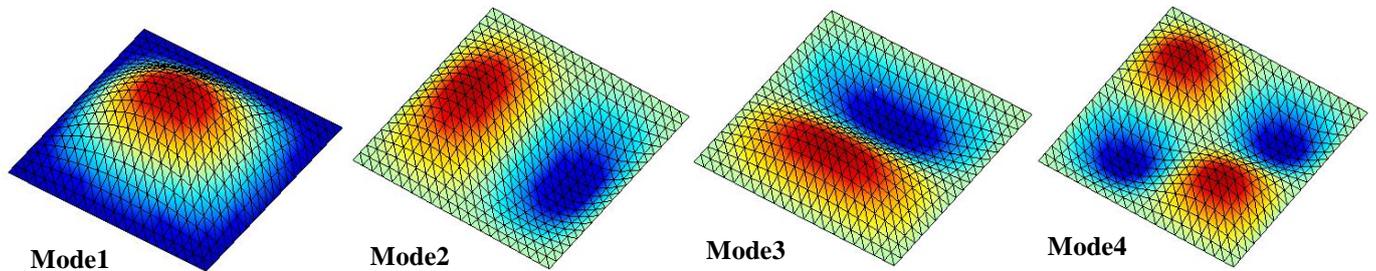


Figure 3.15. Quatre premiers modes propres d'une plaque carrée SCSC ($h/L = 0.1$).

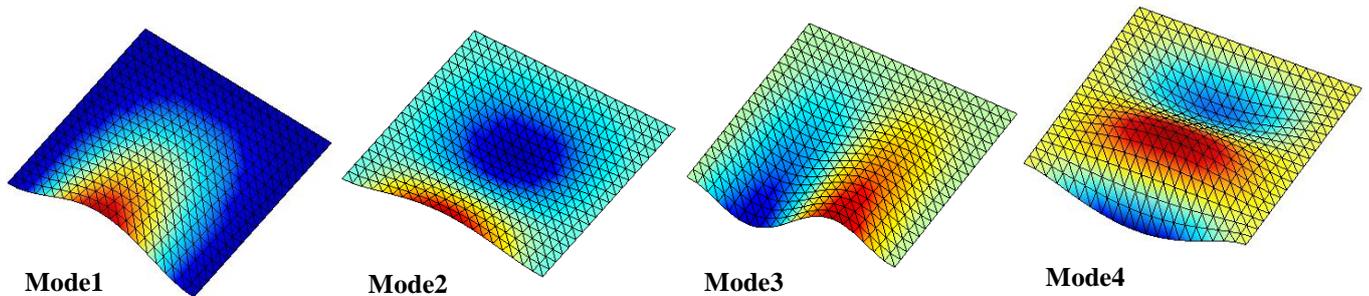


Figure 3.16. Quatre premiers modes propres d'une plaque carrée CCCF ($h/L = 0.01$).

3.3.5.8 Vibration libre d'une plaque biaise

L'analyse en vibration libre d'une plaque biaise encastree sur son contour (figure 3.10) a été étudiée afin de montrer l'effet de la distorsion géométrique sur les fréquences. La plaque d'inclinaison ($\beta=45^\circ$) est modélisée avec un maillage 32×32 en considérant deux rapports d'épaisseur h/L (0,001 et 0,2). Les résultats des six premiers fréquences non dimensionnelles présentés dans le tableau 3.20 et la figure 3.17 ont été comparés avec d'autres solutions numériques et analytiques. Les résultats de l'élément **SBTMP** montrent un très bon accord avec d'autres solutions données par [88-92] pour les plaques minces et épaisses.

Tableau 3.20. Fréquences propres ($\lambda=(\omega L^2/\pi^2)(\rho h/D)^{1/2}$) d'une plaque biaise encastree ($k=5/6$, $\nu=0.3$).

h/L	Modes	Fréquences non dimensionnelles (λ)					
		SBTMP	p-FEM [88]	Liew [89]	Raju [90]	Huang [91]	X.zaho [92]
0.001	1	6.69981	6.65751	6.6519	6.665	6.6510	6.6123
	2	10.86889	10.82592	10.7898	10.9	10.7902	10.7564
	3	15.18927	15.22984	15.0276	15.36	15.0271	14.9769
	4	16.12501	16.1277	15.9342	16.09	15.9313	15.9111
	5	20.20499	20.5724	19.9365	20.77	19.9373	19.8852
	6	23.52196	23.67016	23.2526	-	23.2523	23.3366
0.2	1	4.165786	4.1622	4.1590	4.178	-	4.1465
	2	5.938295	5.9043	5.9021	5.947	-	5.8959
	3	7.591567	7.4729	7.5422	7.628	-	7.5333
	4	7.846563	7.8007	7.7907	7.849	-	7.7909
	5	9.280043	9.2237	9.2159	9.374	-	9.2071
	6	10.20762	10.1056	10.0921	-	-	10.1154

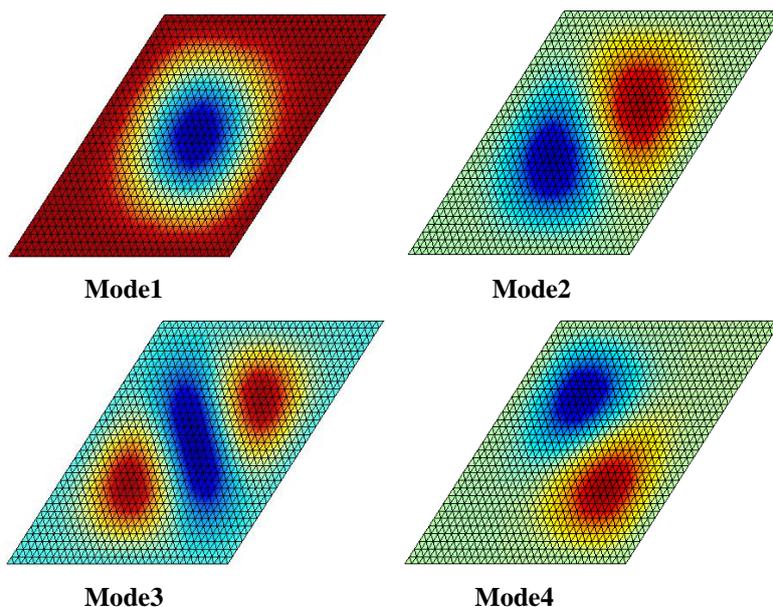


Figure 3.17. Quatre premiers modes propres d'une plaque biaise encastree ($h/L=0.001$).

3.3.5.9 Vibration libre des plaques circulaires

On considère une plaque circulaire encastree ou simplement supportees (figure 3.18) sur son contour pour deux valeurs du rapport épaisseur-rayon h/R (0,05 et 0,1). Ce test est également intéressant car il met en évidence la distorsion géométrique des éléments.

Les résultats des quatre fréquences non dimensionnelles ($\lambda = \omega R^2 (\rho h / D)^{1/2}$) sont reportés dans le tableau 3.21 et la figure 3.19. La comparaison avec les résultats donnés dans les références [93-94] montre que l'élément **SBTMP** présente un accord satisfaisant avec ces solutions.

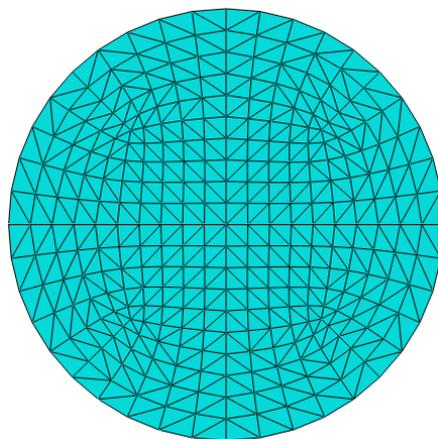


Figure 3.18. Maillage d'une plaque circulaire (600 éléments triangulaires).

Tableau 3.21. Fréquences propres (λ) d'une plaque circulaire ($\nu=0.3$, $k=\pi^2/12$).

Conditions aux limites	n	s	h/R = 0.1			h/R = 0.05		
			SBTMP	HSDT [94]	Irie et al [93]	SBTMP	HSDT [94]	Irie et al [93]
Encastrée	0	0	9.711	9.94614	9.941	10.156	10.1459	10.145
		1	37.440	36.5489	36.479	41.265	38.8706	38.855
		1	18.280	20.1993	20.232	19.441	20.9760	21.002
Simply supported	1	0	51.065	53.9980	53.890	57.231	58.8329	58.827
		0	4.480	4.89421	4.894	4.5637	4.92479	4.925
		1	28.734	28.2547	28.240	30.409	29.3272	29.323
Simply supported	1	0	11.900	13.5142	13.510	12.418	13.7851	13.784
		1	41.982	44.7285	44.691	45.882	47.4220	47.411

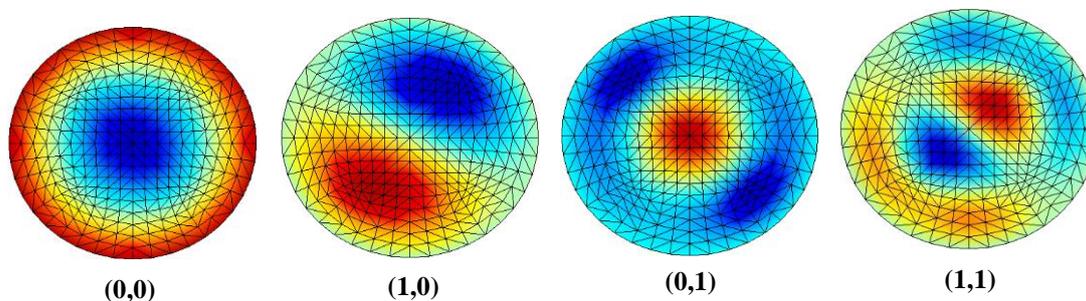


Figure 3.19. Modes propres d'une plaque circulaire simplement supportée (h/R=0.1).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouvel élément fini triangulaire à trois nœuds **SBTMP** basé sur l'approche en déformation de type Mindlin a été développé pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques isotrope. Cet élément, qui est simple à formuler, possède seulement les trois degrés de liberté essentiels par nœud (W , β_x et β_y). La performance et l'efficacité du présent élément ont été illustrées à travers plusieurs exemples standards relatifs aux problèmes de plaques minces et épaisses avec différents cas de conditions aux limites, de chargement et de géométrie. Les résultats obtenus sont comparés avec des solutions analytiques et ceux obtenus par d'autres solutions numériques donnés dans la littérature. La convergence de l'élément développé a été vérifiée à l'aide de patch-tests de modes rigides et constants. Sa précision montre que cet élément converge de façon rapide vers les solutions analytiques et il est en bon accord avec d'autres éléments robustes pour les plaques minces et épaisses. Les tests numériques ont montré que cet élément est libre de tous blocage en CT, contrairement aux éléments classiques ayant des fonctions d'interpolation d'ordre faible.

Chapitre 4

Amélioration de l'élément fini de plaque SBRP de type Reissner-Mindlin

4.1 Introduction

L'analyse statique, vibration libre et le flambage des structures de plaque jouent un rôle important dans les applications d'ingénierie structurelle. Des travaux de recherche considérables sur l'analyse des plaques sont toujours en cours [86,95-99].

Les concepteurs préfèrent les éléments de plaque Reissner-Mindlin d'ordre inférieur en raison de leur simplicité et leur efficacité. Cependant, pour les plaques minces, ces éléments souffrent souvent du phénomène de blocage en cisaillement. Afin de surmonter les difficultés liées au blocage en CT, de nombreux travaux de recherche ont été entrepris où l'utilisation de l'intégration réduite sélective est utilisée [100-102]. La procédure de formulation utilisée consiste à diviser l'énergie de déformation en deux parties, l'une de flexion et l'autre de cisaillement. Deux différents schémas d'intégration pour ces deux parties sont utilisés. Pour les éléments à modèle de déplacement ayant des fonctions d'interpolation d'ordre faible, tel que l'élément bilinéaire classique à quatre nœuds, une intégration exacte (deux points de Gauss dans chaque direction) est prise pour l'énergie de déformation de flexion, tandis qu'une intégration réduite (un point de Gauss) est utilisée pour l'énergie de déformation de cisaillement. Cette intégration sélective conduit à obtenir des éléments plus efficaces, mais peut entraîner souvent à une instabilité numérique (apparition des modes parasites). Des recherches considérables ont été orientées pour développer des éléments robustes à l'aide de différentes formulations améliorées et techniques numériques afin d'éviter le blocage en CT (mixed formulation, enhanced assumed strain methods, assumed natural strain methods, discrete shear gap method and smoothed finite element method) [83,103-115].

L'approche en déformation a été utilisée comme alternative pour formuler des éléments robustes de plaques [15-17,19-22,116] afin d'augmenter la précision et la stabilité des solutions

numériques ainsi que d'éliminer les phénomènes de blocage en CT. L'utilisation de l'approche en déformation [1-30] présente plusieurs avantages où elle permet d'obtenir des éléments efficaces ayant des fonctions d'interpolation d'ordre élevé sans la nécessité d'introduire des nœuds internes. Le premier élément de plaque Mindlin à champ de déformation **SBRP** [16] développé a été adopté pour l'analyse linéaire des plaques en flexion. Ensuite, un nouvel élément fini triangulaire à trois nœuds de plaque Mindlin **SBTMP** [116] (présenté au chapitre 2) a été formulé pour l'étude statique et en vibration libre. L'idée du découplage entre les déformations de flexion et celles du cisaillement transversal est utilisée pour les éléments formulés (**SBQP** et **SBTP4**) contrairement à l'élément **SBRP** [16].

Dans ce chapitre, deux éléments de type Mindlin basés sur l'approche en déformation ont été formulés en statique, vibration libre et flambement des plaques isotropes. Il est possible d'utiliser le champ des déplacements obtenu pour l'élément quadrilatère **SBQP** (Strain Based quadrilateral Plate) en l'appliquant à un élément triangulaire à quatre nœuds **SBTP4** (Strain Based Triangular Plate with four nodes) ayant les mêmes degrés de liberté (W , β_x , et β_y) pour chacun des trois nœuds de coin et du nœud à mi côté. Les cinq composantes de la déformation (κ_x , κ_y , κ_{xy} , γ_{xz} et γ_{yz}) varient linéairement dont les déformations de flexion (κ_x , κ_y et κ_{xy}) et de celles du cisaillement transversal (γ_{xz} et γ_{yz}) sont indépendantes et en satisfaisant les équations de compatibilité. L'étude numérique montre que les éléments **SBQP** et **SBTP4** passent le patch test, sont libre de blocage en cisaillement transverse et sont numériquement plus efficaces que l'élément **SBRP** (Strain Based Rectangular Plate) [16].

Une contribution a été effectuée dans le présent chapitre à l'analyse statique et en vibration libre des plaques en matériaux composites. Dans ce contexte, on a formulé un élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté (u , v , w , β_x , et β_y) par nœud **SBRLP** (Strain Based Rectangular Laminated Plate) sur la base de la théorie du premier ordre (FSDT). Cet élément est la combinaison de deux éléments à champ de déformation dont le premier est un élément **SBRIE** [1] membranaire à deux ddl (u , v) par nœud tandis que le deuxième est un élément flexionnel développé **SBQP** possédant trois ddl (w , β_x , et β_y) par nœud. La comparaison des résultats du présent élément avec ceux obtenus analytiquement ou avec ceux obtenus par d'autre type d'éléments, a montré l'efficacité de l'élément **SBRLP** dans le cas des plaques en matériaux composites minces et épaisses.

4.2 Formulation des éléments proposés

4.2.1 Dérivation du champ des déplacements

L'élément triangulaire à quatre nœuds **SBTP4** possède les trois degrés de liberté (W , β_x , et β_y) pour chacun des trois nœuds de coin et du nœud à mi-côte, tandis que l'élément quadrilatère **SBQP** contient les mêmes degrés de liberté pour chacun des quatre nœuds de coin (figure 4.1).

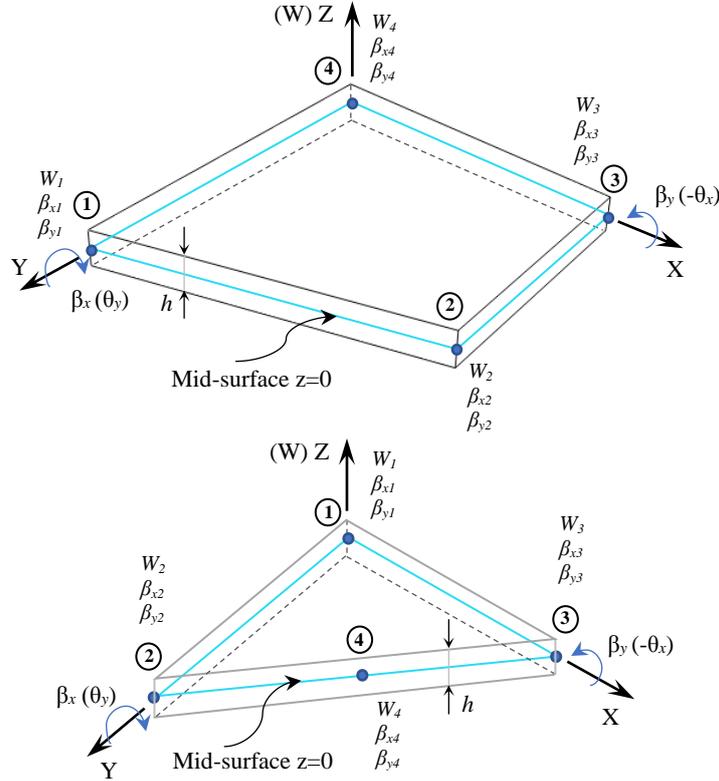


Figure 4.1. Éléments quadrilatère **SBQP** et triangulaire **SBTP4** de type plaque Reissner-Mindlin.

Les éléments proposés (**SBQP** et **SBTP4**) contiennent 3 ddl par nœud et par conséquent 12 ddl par élément. Le champ des déplacements doit contenir donc 12 constantes ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$). Les trois constantes ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) sont utilisées pour présenter le champ des déplacements dû aux modes de corps rigides donnés par l'équation (3.3). Les neuf constantes restantes ($\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{12}$) doivent être réparties entre les cinq composantes du champ de déformation imposé qui est donné comme suit :

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y, & \kappa_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x, & \kappa_{xy} &= \alpha_8 + (2\alpha_5 x) + (2\alpha_7 y), \\ \gamma_{xz} &= \alpha_9 + \alpha_{10} y, & \gamma_{yz} &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x \end{aligned} \quad (4.1)$$

Les courbures (κ_x , κ_y et κ_{xy}) et les déformations du cisaillement transversal (γ_{xz} et γ_{yz}) données par l'équation (4.1) sont découplées et varient linéairement contrairement à l'élément **SBRP**

[16]. On note que pour l'élément **SBRP** [16], il existe un couplage entre les courbures et les déformations du cisaillement qui contiennent des termes quadratiques.

Les termes entre parenthèses dans l'équation (4.1) sont ajoutés afin de satisfaire les relations de compatibilité données par l'équation (3.2). Les fonctions des déplacements sont obtenues en substituant les déformations (κ_x , κ_y , κ_{xy} , γ_{xz} , et γ_{yz}) données par Eq. (4.1) dans les relations déformation-déplacement (Eq. (3.1)) et après intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 W &= -\alpha_4 \frac{x^2}{2} - \alpha_5 \frac{x^2 y}{2} - \alpha_6 \frac{y^2}{2} - \alpha_7 \frac{xy^2}{2} - \alpha_8 \frac{xy}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} + \alpha_{10} \frac{xy}{2} + \alpha_{11} \frac{y}{2} + \alpha_{12} \frac{xy}{2} \\
 \beta_x &= \alpha_4 x + \alpha_5 xy + \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{1}{2} + \alpha_{10} \frac{y}{2} - \alpha_{12} \frac{y}{2} \\
 \beta_y &= \alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{x}{2} + \alpha_{11} \frac{1}{2} + \alpha_{12} \frac{x}{2}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le champ des déplacements final est obtenu en additionnant les expressions de Eq. (3.3) et Eq. (4.2) :

$$\begin{aligned}
 W &= \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3 y - \alpha_4 \frac{x^2}{2} - \alpha_5 \frac{x^2 y}{2} - \alpha_6 \frac{y^2}{2} - \alpha_7 \frac{xy^2}{2} - \alpha_8 \frac{xy}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} \\
 &+ \alpha_{10} \frac{xy}{2} + \alpha_{11} \frac{y}{2} + \alpha_{12} \frac{xy}{2} \\
 \beta_x &= \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_5 xy + \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{1}{2} + \alpha_{10} \frac{y}{2} - \alpha_{12} \frac{y}{2} \\
 \beta_y &= \alpha_3 + \alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{x}{2} + \alpha_{11} \frac{1}{2} + \alpha_{12} \frac{x}{2}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Les fonctions de déplacements et de déformations données respectivement par Eq. (4.3) et Eq. (4.1) peuvent être donnés sous forme matricielles comme suit :

$$\{U\} = [P]\{\alpha\} = [N]\{q_e\} \tag{4.4}$$

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} = [B]\{q_e\} \tag{4.5}$$

D'où $[N] = [P][C]^{-1}$, $[B] = [Q][C]^{-1}$ (4.6)

Les matrices [P] et [Q] sont données par :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^2 y}{2} & -\frac{y^2}{2} & -\frac{xy^2}{2} & -\frac{xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{xy}{2} & \frac{y}{2} & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & xy & 0 & \frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} & 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2x) & 0 & (2y) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Les vecteurs du champ des déplacements, le champ des déformations et des paramètres constants sont :

$$\{U\} = \{W, \beta_x, \beta_y\}^T, \quad \{\varepsilon\} = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T, \quad \{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}^T \quad (4.9)$$

Les déformations géométriques peuvent être exprimées comme suit :

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [P] \{\alpha\} \quad (4.10)$$

$$D'o\grave{u} \quad [G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [P]$$

Nous substituons Eq. (4.4) dans Eq. (4.10), on obtient :

$$\{\varepsilon^s\} = [G]\{\alpha\} = [B^s]\{q_e\} \quad (4.11)$$

$$D'o\grave{u} \quad [B^s] = [G][C]^{-1} \quad (4.12)$$

La matrice [G] est donnée comme suit :

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -x & -xy & 0 & -\frac{y^2}{2} & -\frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{x^2}{2} & -y & -xy & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & y & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & y & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

La matrice de transformation [C] qui relie les déplacements nodaux élémentaire ($\{q_e\}^T = (W_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, \dots, W_4, \beta_{x4}, \beta_{y4})$) aux douze constantes ($\{\alpha\}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_{12})$) peut être exprimée par:

$$\{q_e\} = [C]\{\alpha\} \quad (4.14)$$

$$D'o\grave{u} \quad [C] = [[C_1] \quad [C_2] \quad [C_3] \quad [C_4]]^T \quad (4.15)$$

Les sous matrices [C_i] (pour x_i, y_i coordonnés du nœud i (i=1,2,3,4)) sont données comme suit :

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x_i^2 y_i}{2} & -\frac{y_i^2}{2} & -\frac{x_i y_i^2}{2} & -\frac{x_i y_i}{2} & \frac{x_i}{2} & \frac{x_i y_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \frac{x_i y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_i & x_i y_i & 0 & \frac{y_i^2}{2} & \frac{y_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y_i}{2} & 0 & -\frac{y_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x_i^2}{2} & y_i & x_i y_i & \frac{x_i}{2} & 0 & -\frac{x_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x_i}{2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.2.2 Matrices élémentaires

Pour tout élément fini de plaque, les matrices de rigidité $[K^e]$, de masse $[M^e]$ et géométrique $[K_g^e]$, sont données par :

$$[K^e] = \int_{S_e} [B]^T [D] [B] dS$$

$$[K^e] = [C]^T \underbrace{\left(\int [Q]^T [D] [Q] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[K_0]} [C]^{-1} = [C]^T [K_0] [C]^{-1} \quad (4.17)$$

$$[M^e] = \int_{S_e} [N]^T [T] [N] dS$$

$$[M^e] = [C]^T \underbrace{\left(\int [P]^T [T] [P] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[M_0]} [C]^{-1} = [C]^T [M_0] [C]^{-1} \quad (4.18)$$

$$[K_g^e] = \int_{S_e} [B^s]^T [\tau] [B^s] dS$$

$$[K_g^e] = [C]^T \underbrace{\left(\int [G]^T [\tau] [G] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[K_{g0}]} [C]^{-1} = [C]^T [K_{g0}] [C]^{-1} \quad (4.19)$$

D'où $[D]$, $[D]_b$, $[D]_s$ sont respectivement les matrices d'élasticité, d'élasticité en flexion, d'élasticité en cisaillement, et $[T]$ est la matrice contenant la masse volumique du matériau.

$$[D] = \begin{bmatrix} [D]_b & 0 \\ 0 & [D]_s \end{bmatrix}, \quad [D]_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad [D]_s = khG \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$[T] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$[\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \sigma_{xy}^0 \\ \sigma_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix}, \quad [\tau] = \begin{bmatrix} h[\sigma_0] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12}[\sigma_0] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12}[\sigma_0] \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

D'où σ_x^0 , σ_y^0 et σ_{xy}^0 sont les contraintes membranaires.

Les matrices $[K_0]$, $[M_0]$ et $[K_{g0}]$ données par Eq. (4.17), Eq. (4.18) et Eq. (4.19) sont calculés numériquement (intégration exacte) en utilisant les schémas de Gauss (pour **SBQP**) et de Hammer (pour **SBTP4**). Les matrices élémentaires ($[K^e]$, $[M^e]$ and $[K_g^e]$) sont assemblées pour obtenir les matrices de rigidité, de masse et géométrique de la structure ($[K]$, $[M]$ et $[K_g]$).

Pour l'analyse statique ;

$$[K]\{q\} = \{F\} \quad (4.23)$$

Pour l'analyse en vibration libre ;

$$([K] - \omega^2 [M])\{q\} = 0 \quad (4.24)$$

Pour l'analyse du flambement ;

$$([K] - \lambda_{cr} [K_g])\{q\} = 0 \quad (4.25)$$

4.3 Validation numérique des éléments formulés

Afin de valider la précision et l'efficacité des éléments formulés (**SBQP** et **SBTP4**), plusieurs exemples numériques ont été étudiés pour l'analyse statique, vibration libre et flambement des plaques isotropes, dont le patch test des modes de corps rigides et le patch test mécanique sont tout d'abord effectués. Les résultats obtenus des présents éléments sont comparés avec des solutions numériques et analytiques disponibles dans la littérature.

4.3.1 Patch-test de modes rigides

Afin de vérifier que les éléments **SBQP** et **SBTP4** passent le patch test des modes de corps rigides, les valeurs propres de la matrice de rigidité pour un seul élément sont calculées pour différentes géométries et diverses valeurs d'élanement. Seulement trois valeurs propres nulles ont été obtenues correspondant aux trois modes de corps rigides.

4.3.2 Patch-test mécanique

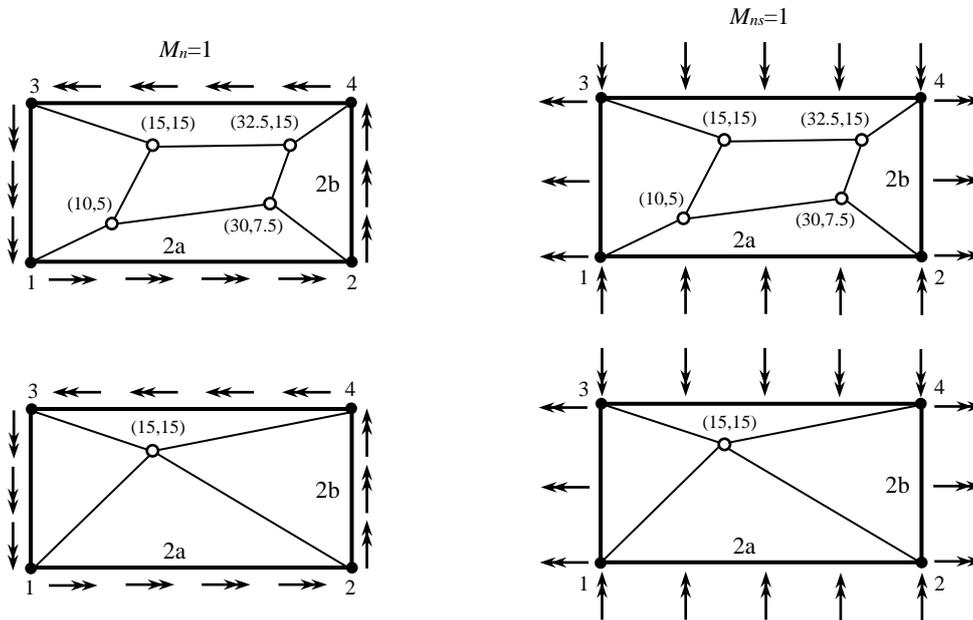
Nous reprenons les mêmes données que le test 3.2 au chapitre 3. Dans ce test, la plaque est modélisée par plusieurs éléments comme indiqué sur la figure 4.2 [31].

- Pour $M_n=1$ appliqué sur le contour (figure 4.2), les résultats obtenus (tableau 4.1) sont $M_x=M_y=1$ dans la plaque.
- Pour $M_{ns}=1$ appliqué sur le contour (figure 4.2), les résultats obtenus (tableau 4.1) en tout point de la plaque sont $M_{xy}=1$.

Les résultats donnés dans le tableau 4.1 confirment que les deux éléments **SBQP** et **SBTP4** satisfont le patch test mécanique.

Tableau 4.1. Résultats du patch-test mécanique.

Eléments	Charge appliquée	Moments dans la plaque	L/h		
			10	100	1000
SBQP	$M_n=1$	$M_x = M_y$	1	1	1
	$M_{ns}=1$	M_{xy}	1	1	1
SBTP4	$M_n=1$	$M_x = M_y$	1	1	1
	$M_{ns}=1$	M_{xy}	1	1	1



Solicitations appliquées sur les quatre côtés des plaques

Figure 4.2. Patch-test mécanique pour les éléments Mindlin quadrilatère et triangulaire ($E=1000$, $\nu=0.3$).

4.3.3 Plaque carrée isotrope sous chargement uniforme

Un benchmark classique pour le problème d'une plaque carrée en flexion est étudié (figure 4.3) avec différentes conditions aux limites et diverses valeurs d'élancement (h/L). La plaque est soumise à une charge uniforme ($q=1$) où le test de blocage en CT et le test de convergence de la flèche centrale sont considérés.

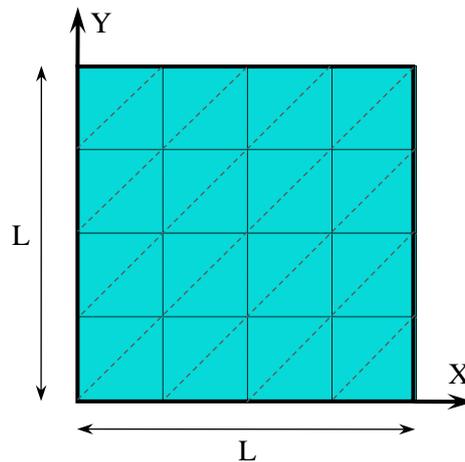


Figure 4.3. Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$ ($L=10$, $E=10.92$, $\nu=0.3$, $k=5/6$).

Le test de blocage en CT est considéré pour une plaque carrée encastree avec plusieurs valeurs de l'élancement ($L/h=10-1000\ 000$) en utilisant un maillage de 12×12 . Les résultats du déplacement au centre de la plaque sont illustrés dans le tableau 4.2 et la figure 4.4. Les résultats obtenus confirment que les éléments formulés (**SBQP** et **SBTP4**) sont capables de résoudre le problème du verrouillage en CT lorsqu'il s'agit des plaques minces. Cependant, on observe que l'élément **SBRP** [16] montre l'existence du phénomène de blocage en CT pour ($L/h > 100$).

Tableau 4.2. Influence de l'élancement (L/h) sur la flèche d'une plaque encastree sous charge uniforme.

L/h	10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000	Solution de Référence [117]
SBQP	0.1490	0.1254	0.1252	0.1252	0.1252	0.1252	
SBTP4	0.1508	0.1256	0.1252	0.1252	0.1252	0.1252	0.1267
SBRP	0.1453	0.1035	0.0074	7.90×10^{-5}	7.90×10^{-7}	7.90×10^{-9}	

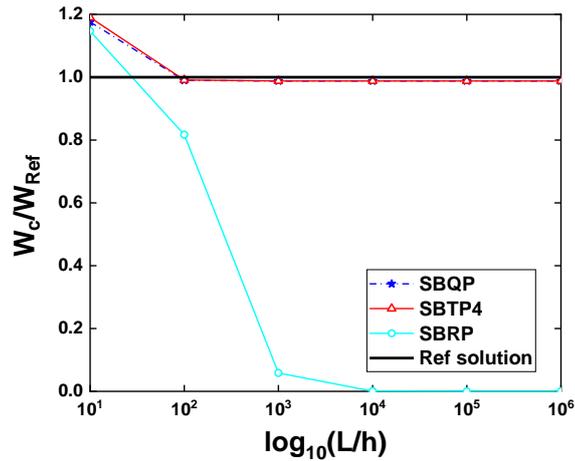


Figure 4.4. Influence de l'élancement (L/h) d'une plaque encastree sous charge uniforme.

Après avoir vérifié le blocage en CT pour les éléments (**SBQP** et **SBTP4**), nous allons procéder à l'étude de convergence d'une plaque carrée avec trois cas de conditions aux limites [encastree, SS1 ($W=0$), SS2 ($W = \beta_s = 0$)]. Trois élancements ($h/L=0.1, 0.01$ et 0.001) sont considérés pour les plaques épaisses, minces et très minces, respectivement. Les résultats obtenus du déplacement vertical au centre de la plaque (tableaux 4.3-4.5 et figures. 4.5-4.7), montrent que :

- Une convergence plus rapide vers les solutions analytiques [117] est obtenue en utilisant seulement un maillage grossier pour tous les cas de l'élancement ($h/L=0.1, 0.01$ et 0.001) et de conditions aux limites.
- Les éléments **SBQP** et **SBTP4** se comportent de manière similaire pour les plaques minces et très minces ($h/L=0.01$ et 0.001). Cependant pour les plaques épaisses ($h/L=0.1$), l'élément **SBTP4** est légèrement plus précis que l'élément **SBQP**.
- Les deux éléments développés sont libres du phénomène de blocage en CT et sont capables de fournir d'excellents résultats pour les plaques minces et très minces ($h/L=0.01$ et 0.001).
- Une convergence lente vers les solutions analytiques [117] est obtenue par l'élément **SBRP** [16] pour les plaques épaisses et minces ($h/L=0.1$ et 0.01) et souffre d'un blocage en CT pour les plaques très minces ($h/L=0,001$).

Tableau 4.3. Convergence du déplacement transversal $((WD/qL^4)100)$ d'une plaque encastree sous charge uniforme.

h/L	Eléments	4x4	8x8	10x10	12x12	16x16	Solution de Réf [117]
0.001	SBQP	0.1149	0.1235	0.1246	0.1252	0.1258	0.1265
	SBTP4	0.1150	0.1235	0.1246	0.1252	0.1258	
	SBRP	2.77×10^{-5}	0.0011	0.0032	0.0074	0.0234	
0.01	SBQP	0.1151	0.1237	0.1248	0.1254	0.1260	0.1267
	SBTP4	0.1153	0.1239	0.1250	0.1256	0.1261	
	SBRP	0.0027	0.0558	0.0860	0.1035	0.1179	
0.1	SBQP	0.1372	0.1473	0.1484	0.1490	0.1497	0.1499
	SBTP4	0.1446	0.1507	0.1509	0.1508	0.1507	
	SBRP	0.0903	0.1384	0.1429	0.1453	0.1476	

Tableau 4.4. Convergence du déplacement transversal $((WD/qL^4)100)$ d'une plaque simplement supportée (SS1) sous charge uniforme.

h/L	Eléments	4x4	8x8	10x10	12x12	16x16	Solution de Réf [117]
0.001	SBQP	0.3858	0.4014	0.4032	0.4041	0.4050	0.4062
	SBTP4	0.3859	0.4014	0.4032	0.4041	0.4051	
	SBRP	8.43×10^{-4}	0.0152	0.0363	0.0697	0.1624	
0.01	SBQP	0.3861	0.4019	0.4037	0.4048	0.4058	0.4062
	SBTP4	0.3864	0.4021	0.4040	0.4050	0.4061	
	SBRP	0.0673	0.3115	0.3589	0.3802	0.3962	
0.1	SBQP	0.4228	0.4450	0.4493	0.4522	0.4556	0.4617
	SBTP4	0.4277	0.4487	0.4523	0.4545	0.4572	
	SBRP	0.3587	0.4311	0.4407	0.4463	0.4524	

Tableau 4.5. Convergence du déplacement transversal $((WD/qL^4)100)$ d'une plaque simplement supportée (SS2) sous charge uniforme.

h/L	Eléments	4x4	8x8	10x10	12x12	16x16	Solution de Réf [117]
0.001	SBQP	0.3858	0.4014	0.4032	0.4041	0.4050	0.4062
	SBTP4	0.3859	0.4014	0.4032	0.4041	0.4050	
	SBRP	6.23×10^{-4}	0.0147	0.0357	0.0691	0.1619	
0.01	SBQP	0.3860	0.4016	0.4034	0.4043	0.4052	0.4064
	SBTP4	0.3862	0.4017	0.4034	0.4044	0.4053	
	SBRP	0.0523	0.3081	0.3572	0.3789	0.3952	
0.1	SBQP	0.4079	0.4227	0.4244	0.4253	0.4261	0.4273
	SBTP4	0.4110	0.4240	0.4253	0.4260	0.4266	
	SBRP	0.32	0.4048	0.4131	0.4175	0.4218	

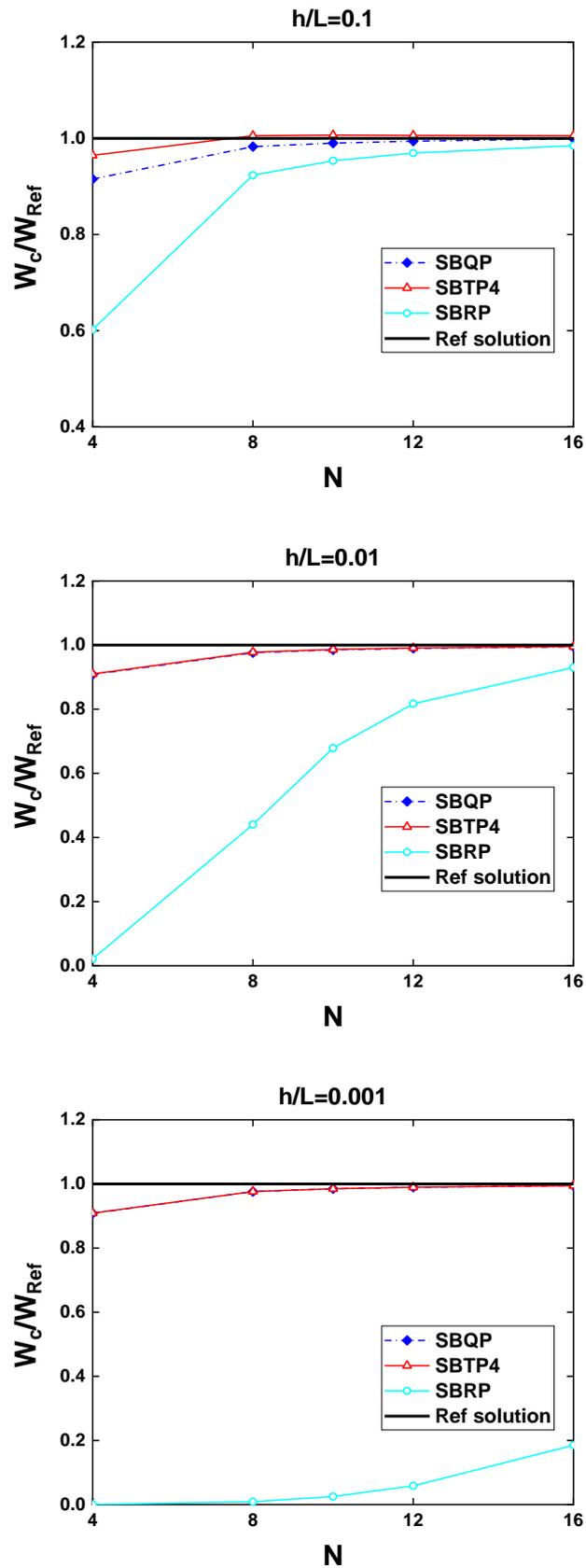


Figure 4.5. Convergence de la flèche au centre $((WD/qL^4)100)$ d'une plaque encastree sous charge uniforme.

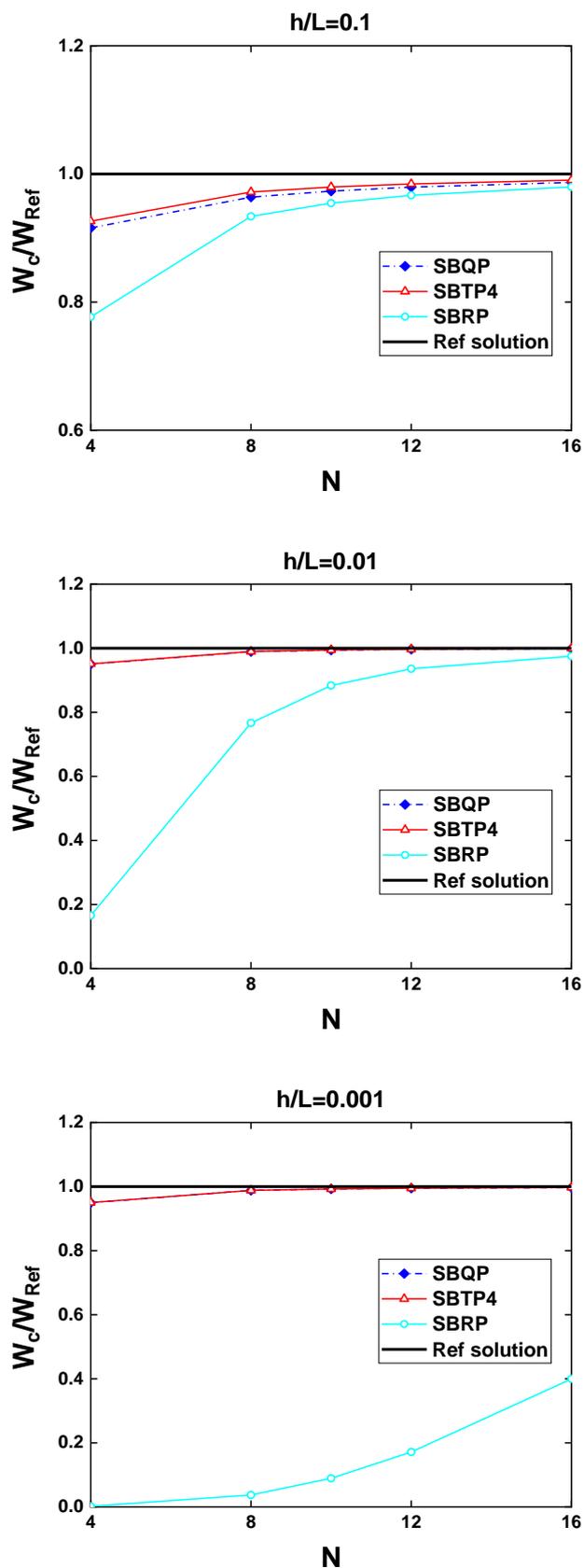


Figure 4.6. Convergence de la flèche au centre $((WD/qL^4)100)$ d'une plaque simplement supportée (SS1) sous charge uniforme.

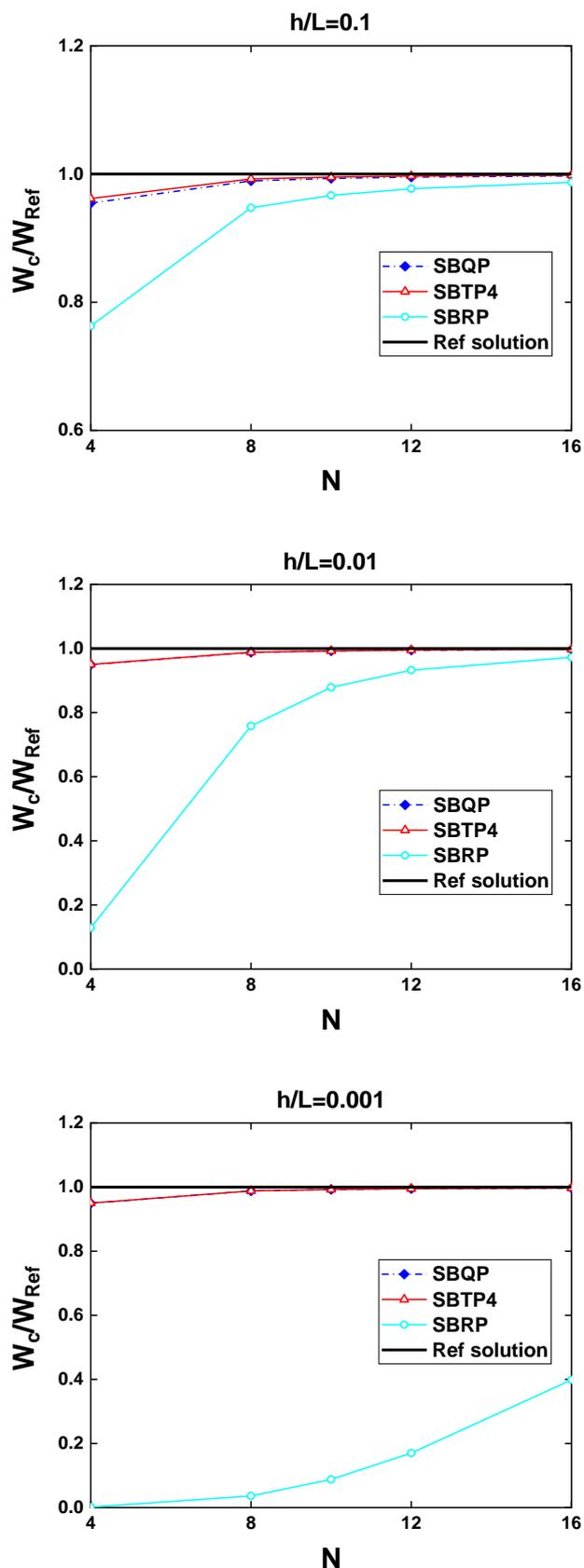


Figure 4.7. Convergence de la flèche au centre ($(WD/qL^4)100$) d'une plaque simplement supportée (SS2) sous charge uniforme.

4.3.4 Plaques biaisées

Afin de montrer la performance des éléments proposés à la sensibilité de la distorsion du maillage, deux exemples de plaques biaisées minces sont considérés. Ces tests sont connus dans la littérature comme sévères et étudiés par de nombreux chercheurs [118,75].

- Le premier concerne la plaque biaisée de Razzaque [118] ($\beta=60^\circ$) en appui simple avec deux bords libres (figure 4.8) soumise à une charge uniforme. Les résultats du déplacement vertical au centre de la plaque sont donnés (tableau 4.6 et la figure 4.9) en fonction du nombre d'éléments par côté ($N = 2,4,8,12$ et 16) pour ($h/L=0.001$). Les résultats obtenus pour les deux éléments (**SBQP** et **SBTP4**) sont en bon accord avec la solution de référence donnée par [118]. Mais on peut observer que l'élément **SBTP4** est légèrement mieux que les éléments **SBQP** et **MITC4** [114].
- Le deuxième exemple traité par Morley ($\beta=30^\circ$) [75] est une plaque biaisée en appui simple ($W=0$) sur tout le contour soumise à une charge uniforme (figure 4.8). En utilisant différents maillages ($N = 4,8,16$ et 32), les résultats du déplacement vertical obtenus au centre sont présentés dans le tableau 4.7 et la figure 4.10 pour $h/L=0.01$ et 0.001 . On peut remarquer que pour $h/L=0.01$, les résultats des éléments **SBTP4** et **SBQP** sont en bon accord avec la solution de référence [75], tandis que pour $h/L= 0.001$, l'élément **SBTP4** est plus efficace que les éléments **SBQP** et **MITC4** [119].

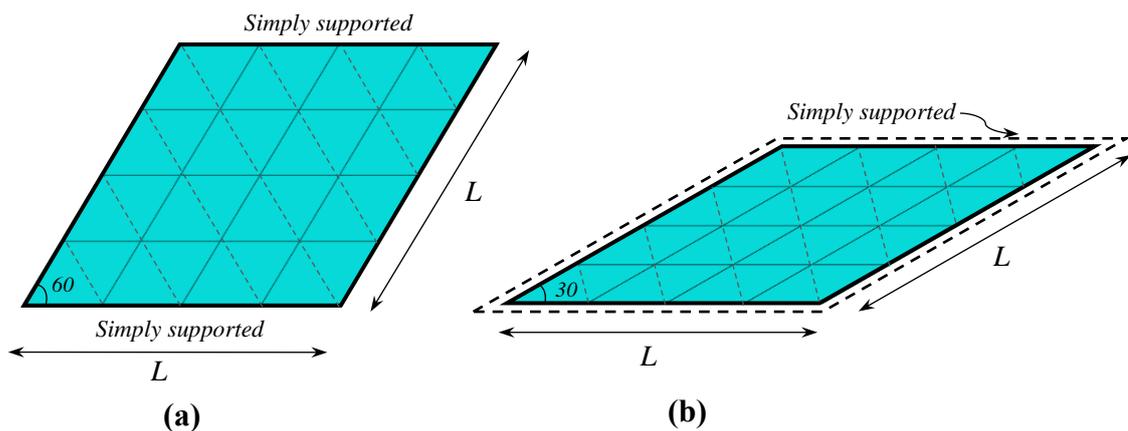


Figure 4.8. Plaques biaisées (a Razzaque, b Morley) avec des maillages $N \times N$ ($L=100$, $E=10.92$, $\nu=0.3$, $k=5/6$).

Tableau 4.6. Convergence du déplacement transversal d'une plaque biaise (Razzaque).

Eléments	$W_c = W_c (D/qL^4) \times 10^2$					
	2x2	4x4	6x6	8x8	12x12	16x16
SBQP	0.4835	0.7180	0.7596	0.7643	0.7732	0.7807
SBTP4	0.5312	0.7124	0.7518	0.7670	0.7792	0.7841
MITC4 [114]	0.3856	0.6723	0.7357	0.7592	0.7765	0.7827
Solution de Référence [118]	0.7945					

Tableau 4.7. Convergence du déplacement transversal d'une plaque biaise (Morley).

Maillage	$W_c = W_c (D/qL^4) \times 10^3$					
	L/h=0.01			L/h=0.001		
	SBQP	SBTP4	MITC4 [119]	SBQP	SBTP4	MITC4 [119]
4x4	0.231	0.372	0.359	0.143	0.369	0.358
8x8	0.323	0.388	0.357	0.206	0.324	0.343
16x16	0.380	0.411	0.383	0.280	0.324	0.343
32x32	0.405	0.419	0.404	0.339	0.366	0.359
Solution de Référence [75]	0.408			0.408		

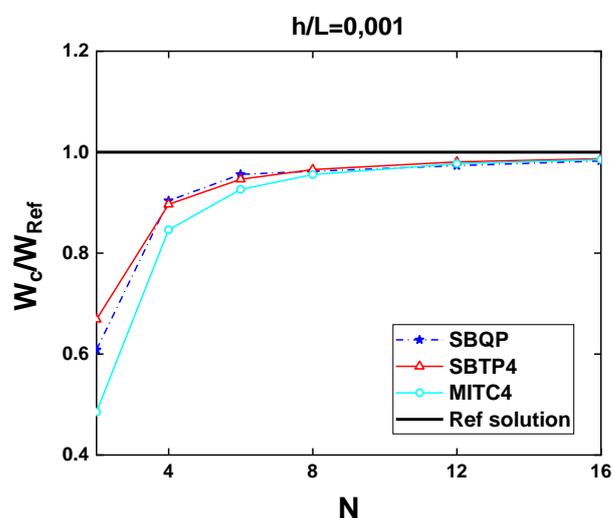


Figure 4.9. Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaise (Razzaque).

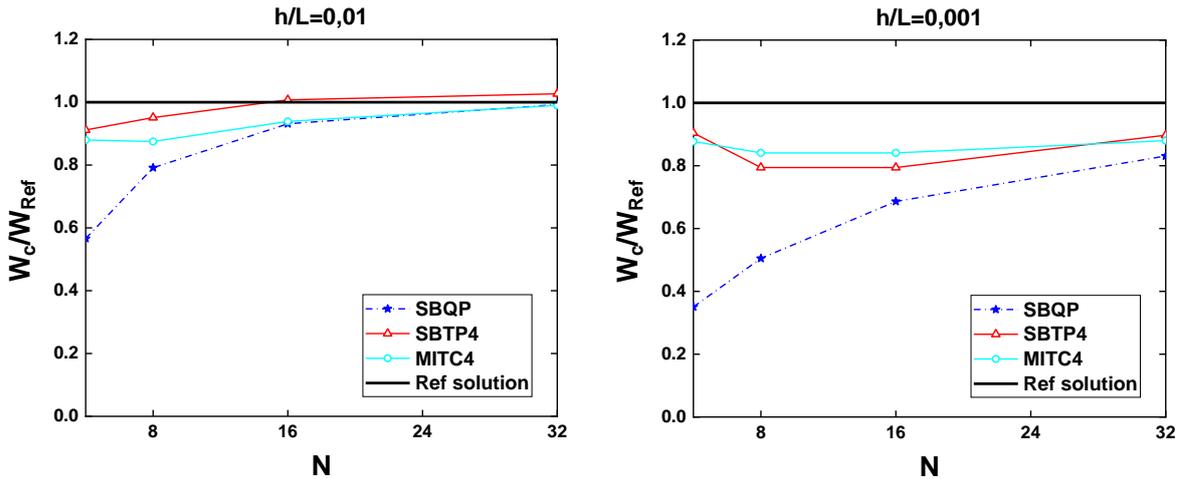


Figure 4.10. Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaise (Morley).

4.3.5 Vibration libre des plaques carrées

Ce test vise l'étude de la convergence des éléments formulés (**SBQP** et **SBTP4**) pour une plaque carrée (figure 4.3) en appui simple ($W=\beta_s=0$) ou encastree avec deux rapports d'épaisseur ($h/L=0.005$ et 0.1). Les résultats numériques des six premières fréquences non dimensionnelles ($\lambda=(\omega^2\rho L^4h/D)^{1/4}$) pour les deux éléments sont présentés dans les tableaux 4.8-4.11 et les figures 4.11-4.12. Ces résultats ont été comparés avec des solutions analytiques [121] et avec ceux obtenus par d'autres éléments (**MITC4**, **DSG3** et **ES-DSG**) [120], où on peut conclure que :

- Les deux éléments (**SBQP** et **SBTP4**) sont en bon accord avec des solutions analytiques [121] et d'autres éléments (**MITC4**, **DSG3** et **ES-DSG**) [120].
- Les figures 4.11-4.12 montrent que les éléments **SBQP** et **SBTP4** produisent des résultats plus précis que ceux donnés par d'autres éléments (**MITC4**, **DSG3** et **ES-DSG**) [120] pour un maillage grossier (4x4).

Tableau 4.8. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée mince SSSS ($h/L=0.005$).

Maillage	Eléments	Modes					
		1	2	3	4	5	6
4x4	SBQP	4.4004	7.1140	7.1140	8.6298	10.7342	10.7342
	SBTP4	4.4001	7.1126	7.1139	8.6298	10.7336	10.7336
	MITC4 [120]	4.6009	8.0734	8.0734	10.305	15.0109	15.0109
	DSG3 [120]	5.5626	8.8148	11.8281	13.4126	18.1948	19.2897
	ES-DSG3 [120]	4.9168	8.1996	9.4593	11.5035	14.2016	15.0164
8x8	SBQP	4.4315	7.0383	7.0383	8.7997	10.1044	10.1044
	SBTP4	4.4313	7.0377	7.0379	8.7988	10.1029	10.1029
	MITC4 [120]	4.4812	7.2519	7.2519	9.2004	10.7796	10.7796
	DSG3 [120]	4.7327	7.4926	8.2237	10.2755	11.6968	12.4915
	ES-DSG3 [120]	4.5376	7.2981	7.4659	9.6486	10.8937	11.0280
16x16	SBQP	4.4398	7.0271	7.0271	8.8618	9.9727	9.9727
	SBTP4	4.4398	7.0267	7.0267	8.8612	9.9714	9.9714
	MITC4 [120]	4.4522	7.0792	7.0792	8.9611	10.1285	10.1285
	DSG3 [120]	4.5131	7.1502	7.3169	9.3628	10.3772	10.4461
	ES-DSG3 [120]	4.4641	7.0870	7.1193	9.0582	10.1444	10.1489
22x22	SBQP	4.4412	7.0256	7.0256	8.8722	9.9535	9.9535
	SBTP4	4.4411	7.0252	7.0253	8.8717	9.9522	9.9522
	MITC4 [120]	4.4477	7.0531	7.0531	8.9247	10.0349	10.0349
	DSG3 [120]	4.4781	7.0905	7.1718	9.1455	10.1643	10.1814
	ES-DSG3 [120]	4.4537	7.0565	7.0729	8.9731	10.0410	10.0422
	Exact [121]	4.4430	7.0250	7.0250	8.8860	9.93500	9.93500

Tableau 4.9. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée épaisse SSSS ($h/L=0.1$).

Maillage	Eléments	Modes					
		1	2	3	4	5	6
4x4	SBQP	4.3296	6.8538	6.8538	8.2153	10.0531	10.0531
	SBTP4	4.3212	6.7855	6.8014	8.1724	9.8150	9.8166
	MITC4 [120]	4.5146	7.6192	7.6192	9.4471	12.2574	12.2574
	DSG3 [120]	4.9970	8.1490	9.4311	11.354	14.1290	14.9353
	ES-DSG3 [120]	4.7376	7.6580	8.4524	10.1882	12.1227	12.7533
8x8	SBQP	4.3566	6.7647	6.7647	8.3052	9.3981	9.3981
	SBTP4	4.3522	6.7315	6.7409	8.2739	9.2985	9.2986
	MITC4 [120]	4.4025	6.9402	6.9402	8.6082	9.8582	9.8582
	DSG3 [120]	4.4891	7.0697	7.2530	9.1263	10.2195	10.3361
	ES-DSG3 [120]	4.4433	6.9495	7.0727	8.8487	9.8575	9.9221
16x16	SBQP	4.3639	6.7488	6.7488	8.3412	9.2637	9.2637
	SBTP4	4.3625	6.7384	6.7415	8.3305	9.2333	9.2333
	MITC4 [120]	4.3753	6.7918	6.7918	8.4166	9.3728	9.3728
	DSG3 [120]	4.3943	6.8227	6.8587	8.5447	9.4557	9.4616
	ES-DSG3 [120]	4.3846	6.7922	6.8196	8.4744	9.3666	9.3698
22x22	SBQP	4.3650	6.7466	6.7466	8.3473	9.2437	9.2437
	SBTP4	4.3643	6.7408	6.7425	8.3413	9.2270	9.2271
	MITC4 [120]	4.3711	6.7692	6.7692	8.3872	9.3009	9.3009
	DSG3 [120]	4.3809	6.7854	6.8037	8.4543	9.3441	9.3457
	ES-DSG3 [120]	4.3759	6.7692	6.7834	8.4173	9.2968	9.2976
	Exact [121]	4.3700	6.7400	6.7400	8.3500	9.2200	9.2200

Tableau 4.10. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée mince CCCC ($h/L=0.005$).

Maillage	Eléments	Modes					
		1	2	3	4	5	6
4x4	SBQP	6.2197	9.6440	9.6440	11.0163	47.3130	47.3130
	SBTP4	6.2185	9.6418	9.6428	11.0195	32.7089	33.3128
	MITC4 [120]	6.5638	11.523	11.523	13.9510	62.6050	62.6054
	DSG3 [120]	8.4197	12.772	14.965	17.2580	21.3890	21.7600
	ES-DSG3 [120]	6.9741	10.193	11.476	13.0550	15.4040	15.9360
8x8	SBQP	6.0465	8.7528	8.7528	10.484	12.0573	12.0881
	SBTP4	6.0458	8.7509	8.7511	10.4819	12.0533	12.0842
	MITC4 [120]	6.1235	9.0602	9.0602	11.019	12.998	13.0263
	DSG3 [120]	6.7161	9.7867	10.567	12.998	14.531	15.3143
	ES-DSG3 [120]	6.1982	9.0117	9.2894	11.562	12.795	13.0357
16x16	SBQP	6.0097	8.6083	8.6083	10.4173	11.5973	11.6256
	SBTP4	6.0091	8.6068	8.6069	10.4152	11.5938	11.6222
	MITC4 [120]	6.0285	8.6801	8.6801	10.5443	11.7989	11.8266
	DSG3 [120]	6.1786	8.8759	9.0680	11.2450	12.2180	12.2992
	ES-DSG3 [120]	6.0355	8.6535	8.7081	10.6580	11.7430	11.7720
22x22	SBQP	6.0041	8.5875	8.5875	10.4084	11.5342	11.5620
	SBTP4	6.0036	8.5861	8.5862	10.4065	11.5309	11.5588
	MITC4 [120]	6.0140	8.6252	8.6252	10.4750	11.6390	11.6661
	DSG3 [120]	6.0889	8.7239	8.8202	10.8567	11.8519	11.8845
	ES-DSG3 [120]	6.0158	8.6075	8.6353	10.5252	11.6032	11.6293
	Exact [121]	5.9990	8.568	8.568	10.4070	11.4720	11.4980

Tableau 4.11. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée épaisse CCCC ($h/L=0.1$).

Maillage	Eléments	Modes					
		1	2	3	4	5	6
4x4	SBQP	5.9066	8.6852	8.6852	9.9470	13.0167	13.0351
	SBTP4	5.8216	8.4187	8.4313	9.7144	12.0144	12.1514
	MITC4 [120]	6.1612	9.5753	9.5753	11.254	14.089	14.1377
	DSG3 [120]	6.8748	9.8938	11.085	12.636	15.103	15.6402
	ES-DSG3 [120]	6.2662	8.7952	9.6625	10.911	12.610	13.1360
8x8	SBQP	5.7477	8.0260	8.0260	9.4133	10.5267	10.5889
	SBTP4	5.7098	7.9273	7.9340	9.3085	10.3191	10.3775
	MITC4 [120]	5.8079	8.2257	8.2257	9.7310	10.992	11.0457
	DSG3 [120]	5.9547	8.3618	8.6293	10.299	11.342	11.5397
	ES-DSG3 [120]	5.8068	8.0861	8.2701	9.8397	10.760	10.8960
16x16	SBQP	5.7140	7.9117	7.9117	9.3446	10.2143	10.2656
	SBTP4	5.7022	7.8816	7.8843	9.3110	10.1541	10.2045
	MITC4 [120]	5.7288	7.9601	7.9601	9.4230	10.326	10.3752
	DSG3 [120]	5.7616	7.9935	8.0525	9.5772	10.415	10.4697
	ES-DSG3 [120]	5.7250	7.9211	7.9627	9.4499	10.263	10.3126
22x22	SBQP	5.7088	7.8949	7.8949	9.3351	10.1697	10.2195
	SBTP4	5.7023	7.8784	7.8800	9.3165	10.1370	10.1863
	MITC4 [120]	5.7166	7.9204	7.9204	9.3764	10.2280	10.2771
	DSG3 [120]	5.7337	7.9381	7.9686	9.4589	10.2760	10.3246
	ES-DSG3 [120]	5.7141	7.8990	7.9206	9.3896	10.1935	10.2411
	Exact [121]	5.7100	7.8800	7.8800	9.3300	10.1300	10.1800

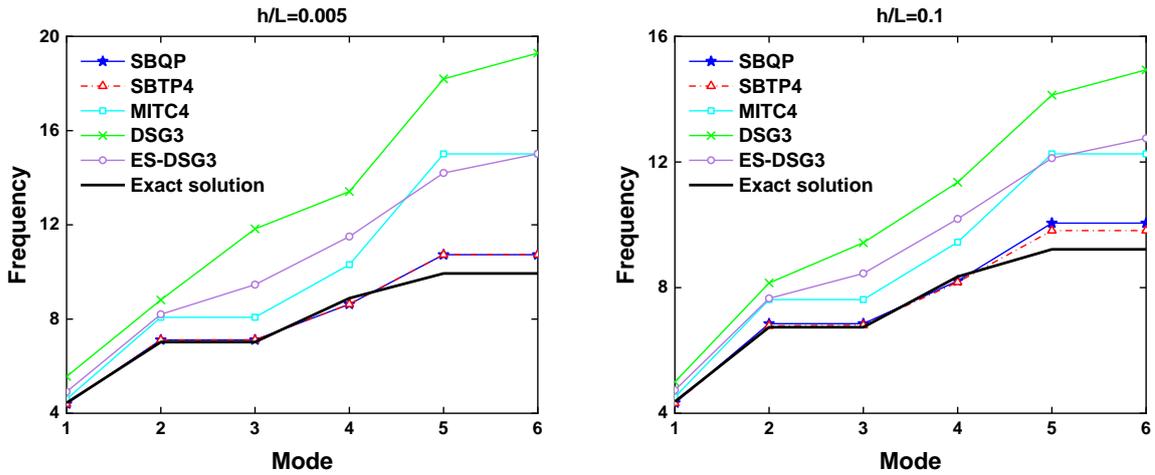


Figure 4.11. Fréquences propres d'une plaque carrée simplement supportée avec un maillage 4×4.

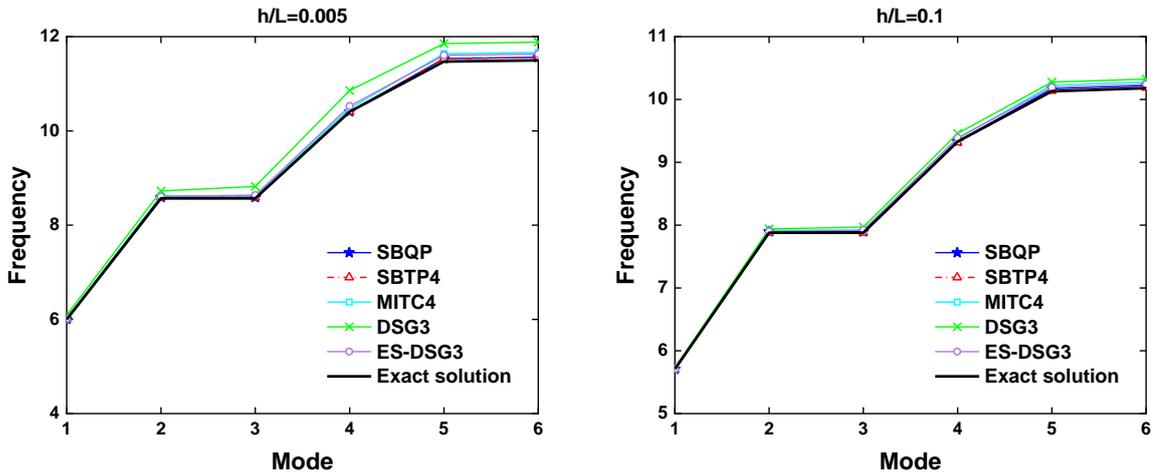


Figure 4.12. Fréquences propres d'une plaque carrée encastée avec un maillage 22×22.

Après vérification de la convergence des éléments proposés, des plaques carrées minces ($h/L=0.005$) avec cinq différents types de conditions aux limites (SSSF, SFSF, CCCF, CFCF et CFSF) sont considérées pour un maillage 22x22. Les résultats des quatre premières fréquences non dimensionnelles ($\lambda=\omega L^2(\rho h/D)^{1/2}$) sont présentés dans le tableau 4.12 et les quatre premiers modes des plaques SSSF et CFCF sont illustrés dans les figures 4.13-4.14. Pour tous les cas de condition aux limites, on peut conclure que :

- Les résultats des présents éléments sont très proches aux solutions analytiques [97] et sont plus précis que ceux des éléments MITC4, DSG3 et ES-DSG [120].
- Les deux éléments (SBQP et SBTP4) se comportent de manière similaire, sont libres de tout blocage en CT et leur précision est insensible aux conditions aux limites.

Tableau 4.12. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque carrée mince ($h/L=0.005$) avec différentes conditions aux limites.

Conditions aux limites	Eléments	Modes			
		1	2	3	4
SSSF	SBQP	11.6920	27.7371	41.3354	59.0370
	SBTP4	11.6914	27.7350	41.3290	59.0289
	MITC4 [120]	11.7085	27.8259	41.5907	59.4952
	DSG3 [120]	11.7553	28.2580	41.8252	61.1274
	ES-DSG3 [120]	11.6817	27.8143	41.3866	59.5521
	Exact [97]	11.6850	27.7560	41.1970	59.0660
SFSF	SBQP	9.6426	16.1396	36.6991	39.1045
	SBTP4	9.6422	16.1381	36.6952	39.0984
	MITC4 [120]	9.6560	16.1594	36.8250	39.3439
	DSG3 [120]	9.6608	16.3096	37.5011	39.4050
	ES-DSG3 [120]	9.6402	16.1214	36.8606	39.1664
	Exact [97]	9.6310	16.1350	36.7260	38.9450
CCCF	SBQP	24.0205	40.0559	63.8154	76.9320
	SBTP4	24.0158	40.0475	63.7906	76.9100
	MITC4 [120]	24.0559	40.1776	64.2683	77.5923
	DSG3 [120]	24.2149	41.4350	64.6795	80.2128
	ES-DSG3 [120]	23.8927	40.1428	63.4463	77.6415
	Exact [97]	24.0200	40.0390	63.4930	76.7610
CFCF	SBQP	22.2733	26.5042	43.6303	61.7962
	SBTP4	22.2691	26.4981	43.6205	61.7722
	MITC4 [120]	22.3107	26.5333	43.7558	62.2403
	DSG3 [120]	22.3132	27.0330	45.4552	62.2851
	ES-DSG3 [120]	22.1684	26.4128	43.8441	61.4711
	Exact [97]	22.2720	26.5290	43.6640	64.4660
CFSF	SBQP	15.2347	20.6194	39.7292	49.7881
	SBTP4	15.2331	20.6163	39.7230	49.7750
	MITC4 [120]	15.2590	20.6440	39.8569	50.1204
	DSG3 [120]	15.2635	20.9362	40.9260	50.1777
	ES-DSG3 [120]	15.2002	20.5789	39.9116	49.7129
	Exact [97]	15.2850	20.6730	39.8820	49.5000

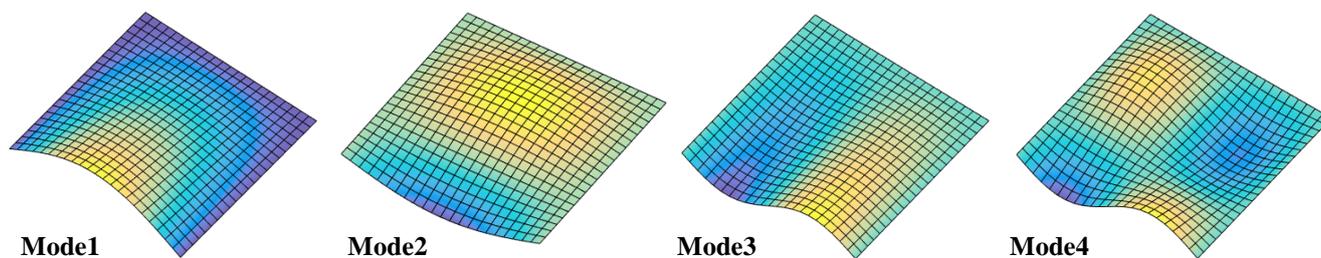


Figure 4.13. Modes propres d'une plaque carrée SSSF pour l'élément **SBQP**.

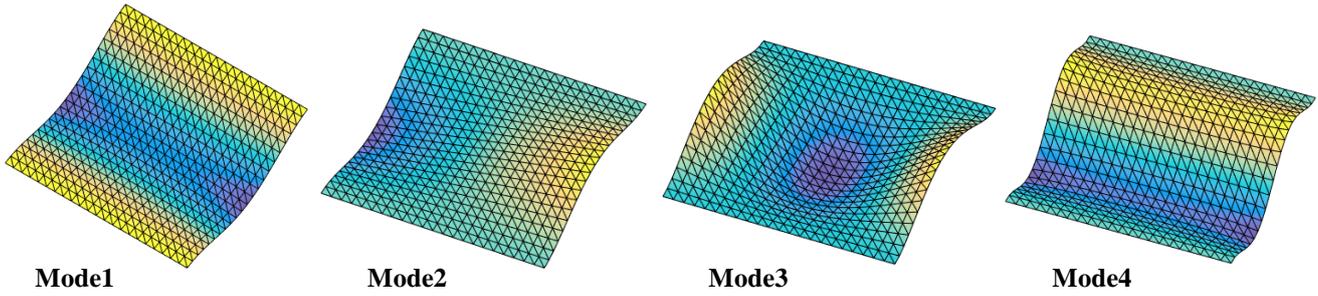


Figure 4.14. Modes propres d'une plaque carrée CFCF pour l'élément SBTP4.

4.3.6 Vibration libre des plaques parallélogrammes

Dans cet exemple, le problème d'une plaque console biaise d'angle d'inclinaison ($\beta=60^\circ$) avec deux rapports d'épaisseur h/L (0,001 et 0,2) est étudié (figure 4.15) en utilisant un maillage de 22×22 . Les six premières fréquences non dimensionnelles ($\lambda = \omega L^2 / \pi^2 (\rho h / D)^{1/2}$) et les modes correspondants sont illustrés dans le tableau 4.13 et la figure 4.16 respectivement. Ces résultats sont comparés à d'autres solutions numériques (DSG3, ES-DSG3 et MITC4) [120] et analytiques [122]. On peut constater que les éléments SBQP et SBTP4 possèdent de bonnes précisions comparées aux solutions analytiques [122] et sont de bons concurrents des éléments ES-DSG3 et MITC4 [120] et meilleurs que l'élément DSG3 [120].

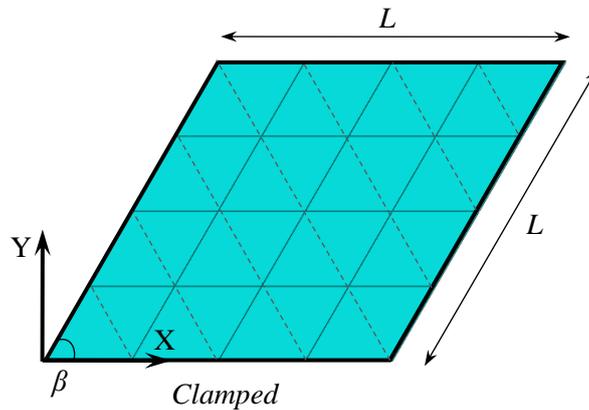


Figure 4.15. Plaque console biaise avec un maillage $N \times N$.

Tableau 4.13. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque console biaise (CFFF).

Modes	h/L	SBQP	SBTP4	DSG3 [120]	ES-DSG3 [120]	MITC4 [120]	Solution exacte [122]
1	0.001	0.3990	0.3988	0.4019	0.3981	0.3984	0.3980
2		0.9594	0.9568	0.9949	0.9532	0.9552	0.9540
3		2.5871	2.5776	2.6392	2.5692	2.5776	2.5640
4		2.6392	2.6351	2.8569	2.6508	2.6395	2.6270
5		4.2143	4.2046	4.3554	4.2030	4.2163	4.1890
6		5.1612	5.1475	6.0079	5.2283	5.1728	5.1310
1	0.2	0.3781	0.3778	0.3783	0.3772	0.3777	0.3770
2		0.8188	0.8183	0.8187	0.8129	0.8190	0.8170
3		1.9890	1.9869	1.9738	1.9573	1.9911	1.9810
4		2.1695	2.1670	2.1982	2.1786	2.1748	2.1660
5		3.1150	3.1097	3.1374	3.0999	3.1224	3.1040
6		3.7649	3.7585	3.8689	3.8050	3.7835	3.7600

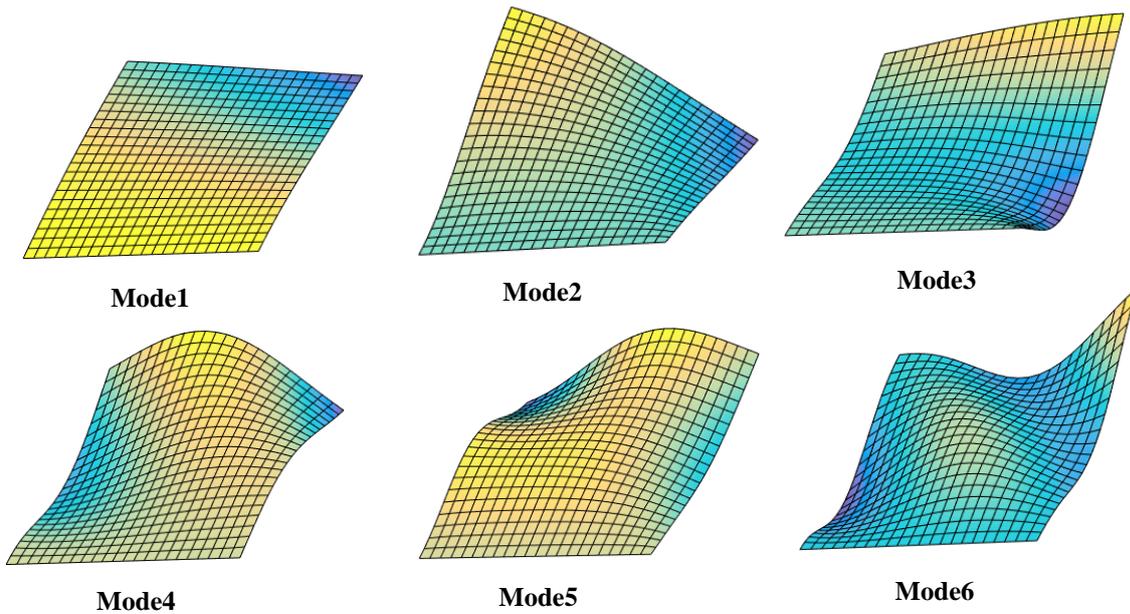


Figure 4.16. Modes propres d'une plaque console biaise (h/L=0.2).

4.3.7 Vibration libre d'une plaque circulaire encastree

La figure 4.17 montre la géométrie et les maillages utilisés pour l'analyse d'une plaque circulaire encastree sur son contour en prenant en considération deux valeurs du rapport épaisseur-rayon $h/2R$ (0.01 et 0.1). Les résultats numériques des dix premières fréquences non dimensionnelles ($\lambda = \omega R^2 (\rho h/D)^{1/2}$) pour deux maillages (384 éléments quadrilatéraux et 384x2 éléments triangulaires) sont présentés (tableaux 4.14-4.15 et figures 4.18). On remarque que les

éléments (**SBQP** et **SBTP4**) convergent vers la solution analytique [93] et offrent de meilleure précision que les éléments **ANS4** [123], **MIN3**, **DSG3** et **ES-DSG3** [120].

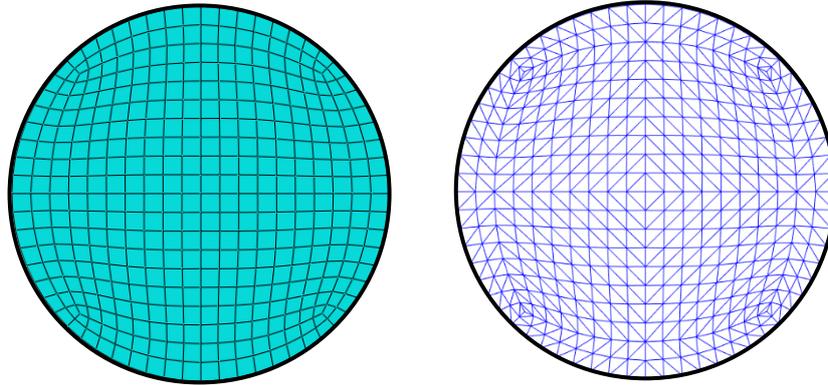


Figure 4.17. Maillage d'une plaque circulaire (384 quadrilatères et 384x2 triangles).

Tableau 4.14. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.01$, $k=\pi^2/12$, $\nu=0.3$).

Modes	SBQP	SBTP4	MIN3 [120]	DSG3 [120]	ES-DSG3 [120]	ANS4 [123]	Irie, et al [93]
1	10.2263	10.2152	10.4082	10.4182	10.3109	10.2572	10.2158
2	21.3335	21.2955	22.2198	22.3362	21.6702	21.4981	21.2600
3	21.3341	21.2956	22.2444	22.3555	21.6900	21.4981	21.2600
4	34.8573	34.8033	37.7461	38.0399	36.3124	35.3941	34.8800
5	35.3212	35.1311	37.7816	38.1428	36.3816	35.5173	34.8800
6	40.0371	39.9696	43.0344	42.9671	41.3801	40.8975	39.7710
7	51.4554	51.1781	57.8881	58.4283	54.7796	52.2054	51.0400
8	51.4616	51.1803	58.0836	58.7024	54.8922	52.2054	51.0400
9	61.4698	61.2757	68.7260	69.0108	64.6300	63.2397	60.8200
10	61.4706	61.2766	69.2354	69.5195	65.1330	63.2397	60.8200

Tableau 4.15. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.1$, $k=\pi^2/12$, $\nu=0.3$).

Modes	SBQP	SBTP4	MIN3 [120]	DSG3 [120]	ES-DSG3 [120]	ANS4 [123]	Irie, et al [93]
1	9.2559	9.2351	9.96820	9.40710	9.32620	9.26050	9.2400
2	17.8362	17.7540	20.3060	18.3363	18.0461	17.9469	17.834
3	17.8363	17.7541	20.3256	18.3544	18.0673	17.9469	17.834
4	27.0568	26.9314	32.7800	28.5094	27.8438	27.0345	27.214
5	27.2828	27.0018	32.7905	28.5388	27.8856	27.6566	27.214
6	30.4904	30.3111	37.1591	31.9501	31.1280	30.3221	30.211
7	37.0619	36.7046	47.5437	39.9949	38.6936	37.2579	37.109
8	37.0629	36.7052	47.5993	40.0120	38.7042	37.2579	37.109
9	42.9608	42.5479	55.3530	45.6439	44.1130	43.2702	42.409
10	42.9611	42.5488	55.6608	45.8554	44.3286	43.2702	42.409

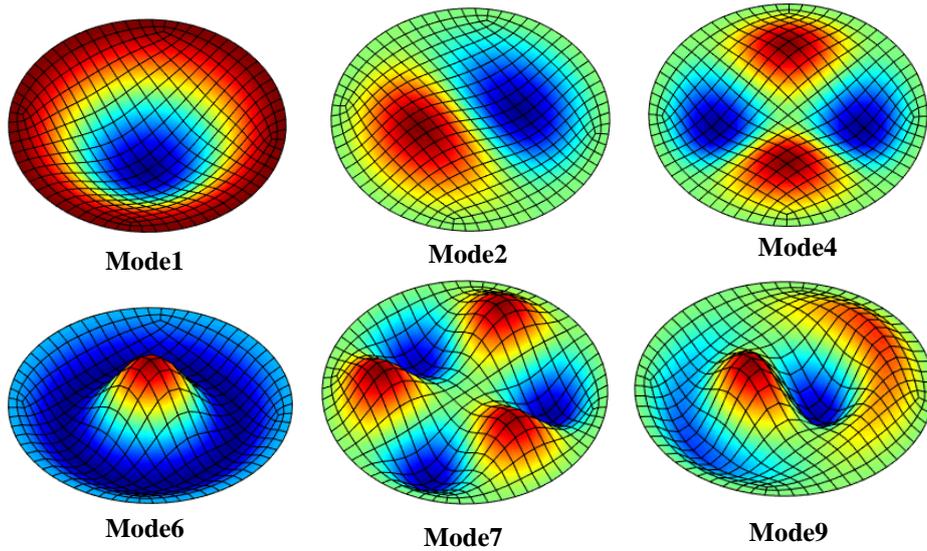


Figure 4.18. Modes propres d'une plaque circulaire ($h/2R=0.01$).

4.3.8 Vibration libre des plaques triangulaires

Dans cet exemple, nous avons testé la performance des éléments proposés (**SBQP** et **SBTP4**) pour l'analyse en vibration libre d'une plaque console triangulaire (figure 4.19) avec différentes géométries (α variable). La plaque triangulaire est discrétisée en 833 éléments quadrilatéraux et 833×2 éléments triangulaires. Deux différents rapports d'épaisseur $h/L=0.001, 0.2$ et divers angles d'inclinaison $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ sont considérés. Les résultats numériques obtenus des six premières fréquences ($\lambda=\omega L^2/\pi^2(\rho h/D)^{1/2}$) sont présentés dans les tableaux 4.16-4.17 et la figure 4.20 et ont été comparés avec d'autres résultats numériques. Ces résultats montrent que les éléments développés sont beaucoup plus proches aux solutions numériques données par **ES-DSG3** [120] et **Pb2-Ritz** [124] que les autres éléments (**MIN3** et **DSG3**) [120].

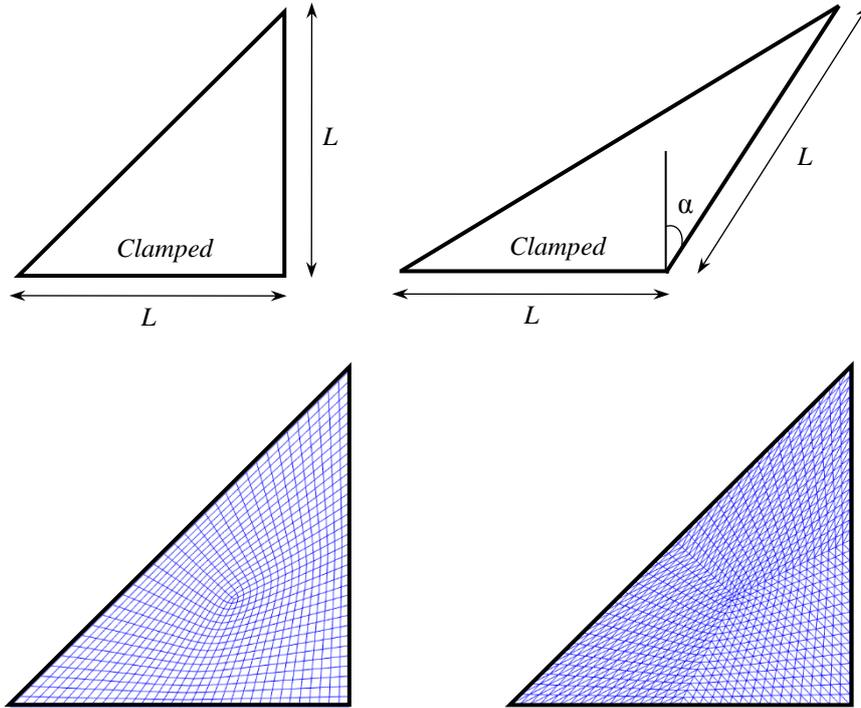


Figure 4.19 Maillage d'une plaque console triangulaire.

Tableau 4.16. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.001$, $\nu=0.3$).

α	Eléments	Modes					
		1	2	3	4	5	6
0°	SBQP	0.6245	2.3781	3.3127	5.7035	7.7679	10.1000
	SBTP4	0.6245	2.3772	3.3119	5.6955	7.7584	10.0853
	MIN3 [120]	0.6272	2.4242	3.4344	5.9458	8.2460	11.0178
	DSG3 [120]	0.6288	2.4399	3.4796	5.9913	8.3737	11.2081
	ES-DSG3 [120]	0.6241	2.3970	3.3631	5.7976	7.9696	10.5356
	Pb2-Ritz [124]	0.6250	2.3770	3.3100	5.6890	7.7430	-
	15°	SBQP	0.5847	2.1810	3.4170	5.2964	7.2915
SBTP4		0.5845	2.1810	3.4149	5.2850	7.2742	10.0186
MIN3 [120]		0.5886	2.2229	3.5717	5.5286	7.7447	10.9544
DSG3 [120]		0.5915	2.2360	3.6467	5.5686	7.8875	11.1572
ES-DSG3 [120]		0.5843	2.1979	3.4937	5.3893	7.4745	10.4532
Pb2-Ritz [124]		0.5860	2.1820	3.4120	5.2790	7.2630	-
30°		SBQP	0.5779	2.1675	3.6683	5.5394	7.1586
	SBTP4	0.5767	2.1737	3.6577	5.5257	7.1282	10.4539
	MIN3 [120]	0.5866	2.2164	3.8656	5.8059	7.6697	11.5791
	DSG3 [120]	0.5928	2.2293	3.9729	5.8523	7.8772	11.9930
	ES-DSG3 [120]	0.5795	2.1881	3.7620	5.6464	7.3608	10.9609
	Pb2-Ritz [124]	0.5780	2.1780	3.6570	5.5180	7.1090	-
	45°	SBQP	0.5969	2.3389	4.2015	6.5073	7.6857
SBTP4		0.5966	2.3364	4.1797	6.4567	7.6368	11.2977
MIN3 [120]		0.6125	2.4038	4.4237	6.9194	8.3447	12.7848
DSG3 [120]		0.6265	2.4298	4.5709	6.9888	8.7055	13.4984
ES-DSG3 [120]		0.6001	2.3557	4.2652	6.6442	7.9210	11.8923
Pb2-Ritz [124]		0.5930	2.3350	4.2220	6.4870	7.6090	-

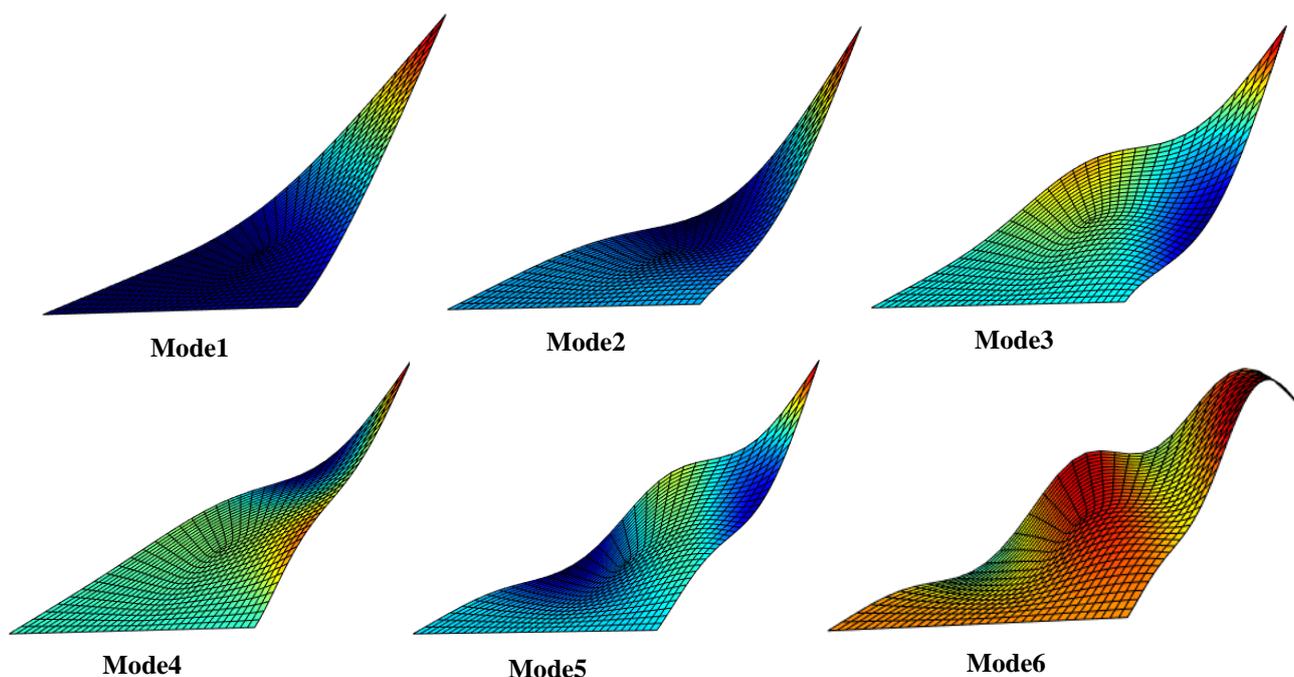


Figure 4.20. Modes propres d'une plaque console triangulaire ($\alpha=45^\circ$) avec ($h/L=0.001$).

Tableau 4.17. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.2$, $\nu=0.3$).

α	Eléments	Modes					
		1	2	3	4	5	6
0°	SBQP	0.5831	1.9021	2.4166	3.9617	4.9984	5.8746
	SBTP4	0.5823	1.9002	2.4099	3.9391	4.9868	5.8584
	MIN3 [120]	0.6042	2.1109	2.7737	4.6581	6.1311	7.3208
	DSG3 [120]	0.5872	1.9529	2.4678	4.1305	5.2243	6.2886
	ES-DSG3 [120]	0.5856	1.9376	2.4411	4.0678	5.1289	6.1359
	Pb2-Ritz [124]	0.5820	1.9000	2.4080	3.9360	-	-
15°	SBQP	0.5449	1.7747	2.3927	3.6397	4.8154	5.5332
	SBTP4	0.5444	1.7712	2.3880	3.6312	4.8087	5.5016
	MIN3 [120]	0.5656	1.9555	2.7772	4.2851	5.8857	6.9977
	DSG3 [120]	0.5478	1.8160	2.4429	3.8111	5.0253	6.0033
	ES-DSG3 [120]	0.5457	1.8018	2.4121	3.7529	4.9317	5.8327
	Pb2-Ritz [124]	0.5440	1.7710	2.3860	3.6280	-	-
30°	SBQP	0.5337	1.7753	2.4255	3.5757	4.7389	5.3439
	SBTP4	0.5333	1.7715	2.4202	3.5694	4.7308	5.3240
	MIN3 [120]	0.5582	1.9551	2.8595	4.2605	5.8273	6.9945
	DSG3 [120]	0.5365	1.8126	2.4954	3.7549	4.9796	5.9219
	ES-DSG3 [120]	0.5329	1.7963	2.4552	3.6902	4.8717	5.6942
	Pb2-Ritz [124]	0.5330	1.7720	2.4190	3.5650	-	-
45°	SBQP	0.5402	1.8872	2.5010	3.7040	4.7310	5.3110
	SBTP4	0.5393	1.8831	2.4891	3.6931	4.7127	5.2801
	MIN3 [120]	0.5724	2.1044	3.0165	4.5535	6.0525	7.2736
	DSG3 [120]	0.5448	1.9269	2.6246	3.9196	5.1474	5.9838
	ES-DSG3 [120]	0.5380	1.9002	2.5682	3.8239	4.9806	5.6000
	Pb2-Ritz [124]	0.5400	1.8850	2.4890	3.6740	-	-

4.3.9 Vibration libre des plaques avec raidisseurs

L'analyse de vibration libre des plaques carrées minces avec raidisseurs traitée par Guo et al [125] est considérée. Ces plaques en appui simple ($W=\beta_s=0$) sur les quatre côtés sont modélisées en utilisant un maillage de 20x20.

- Dans la première application, une plaque avec deux raidisseurs est étudiée (figure 4.21) dont les caractéristiques géométriques sont : $b_1=0.3L$, $b_2=0.1L$, $b_3=0.2L$, $h_1=0.001$. Deux différents rapports d'épaisseur ($h_2/h_1=1.2$ et 1.5) sont utilisés.
- Le deuxième exemple consiste en une plaque carrée à épaisseur variable (figure 4.22) avec $b_1=0.5L$ et $h_1=0.001$ dont deux valeurs de rapports d'épaisseur ($h_2/h_1=1.25$ et 2) sont prises.

Les résultats des fréquences propres des présents éléments, ainsi que les méthodes de rigidité dynamique **DSM** [126], **CM** classique, Finite Strip **FSM** et éléments finis **FEM** [125], sont présentés dans les tableaux 4.18 et 4.19 avec les trois premiers modes pour la plaque à épaisseur variable (figure 4.23). On peut constater que un accord satisfaisant entre les éléments (**SBQP** et **SBTP4**) et d'autres solutions [125-126] pour les deux types de plaques (plaque avec deux raidisseurs et plaque à épaisseur variable).

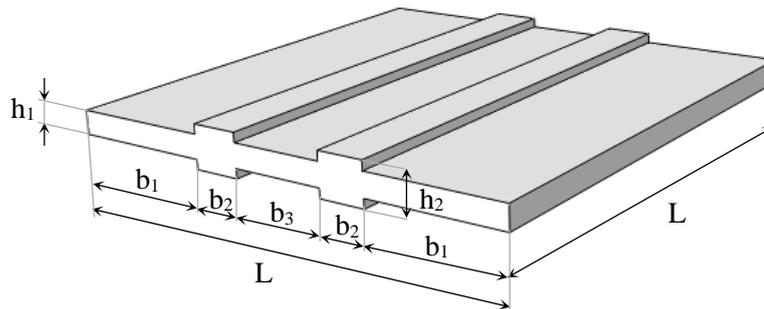


Figure 4.21. Plaque carrée simplement supportée avec deux raidisseurs ($E=71200$ MPa, $\rho=2700$ kg/m³).

Tableau 4.18. Fréquences propres (ω) d'une plaque simplement supportée avec raidisseurs ($k=5/6$, $\nu=0.3$).

h_2/h_1	Eléments	Modes							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1.2	SBQP	31.71	79.36	80.67	126.93	156.99	163.41	206.58	207.42
	SBTP4	31.71	79.36	80.67	126.93	156.98	163.40	206.57	207.41
	FEM [125]	31.79	79.70	81.07	128.2	158.3	164.6	208.5	211.5
	FSM [125]	31.74	79.29	80.60	127.3	156.3	162.4	207.0	207.7
	CM [125]	31.74	79.30	80.60	127.3	156.4	162.5	207.1	207.8
	DSM [126]	31.74	79.30	80.61	127.31	156.36	162.49	207.14	207.83
1.5	SBQP	33.16	81.80	87.82	134.00	162.08	180.38	220.84	221.93
	SBTP4	33.15	81.80	87.82	133.99	162.07	180.37	220.83	221.92
	FEM [125]	33.23	82.11	88.20	135.1	163.5	181.6	222.7	226.0
	FSM [125]	33.17	81.69	87.67	134.2	161.5	179.0	221.0	221.8
	CM [125]	33.17	81.69	87.64	134.2	161.5	179.0	221.1	222.0
	DSM [126]	33.17	81.69	87.68	134.23	161.49	179.10	221.10	221.96

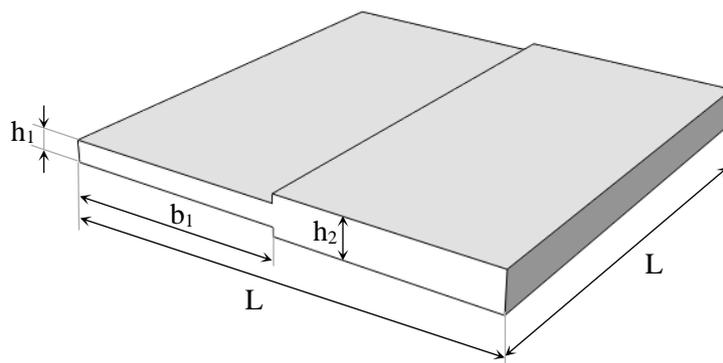


Figure 4.22. Plaque carrée simplement supportée à épaisseur variable. ($E=71200$ MPa, $\rho=2700$ kg/m³).

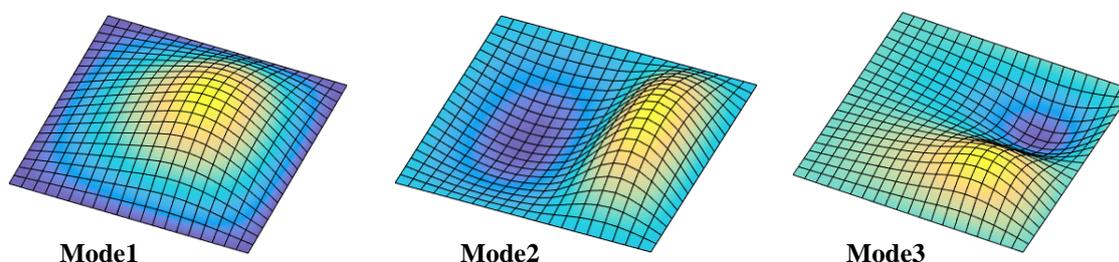


Figure 4.23. Modes propres d'une Plaque simplement supportée à section variable ($h_2/h_1=2$).

Tableau 4.19. Fréquences propres (ω) d'une plaque simplement supportée à épaisseur variable ($k=5/6$, $\nu=0.3$).

h_2/h_1	Eléments	Modes							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1.25	SBQP	34.21	85.75	86.40	137.28	170.11	170.61	221.54	224.18
	SBTP4	34.21	85.75	86.40	137.27	170.10	170.61	221.53	224.17
	FEM [125]	34.29	86.12	86.85	138.6	171.5	171.9	224.1	228.1
	FSM [125]	34.48	85.83	88.11	140.8	169.7	173.6	222.5	228.3
	CM [125]	34.23	85.69	86.33	137.7	169.3	169.8	222.1	224.6
2	SBQP	44.49	109.49	110.33	172.40	197.75	212.35	287.07	293.68
	SBTP4	44.49	109.48	110.33	172.40	197.74	212.34	287.05	293.66
	FEM [125]	44.59	109.8	110.9	173.8	199.8	214.0	290.4	297.6
	FSM [125]	45.18	110.2	112.6	178.1	197.7	226.4	285.8	392.7
	CM [125]	44.50	109.1	110.2	172.6	197.3	211.4	287.2	293.2

4.3.10 Vibration libre d'une plaque rectangulaire avec un trou central

Le test d'une plaque rectangulaire avec un trou central (figure 4.24) encastree sur deux cotés opposés et en appui simple sur les deux autres cotés (CSCS) traité expérimentalement par Aksu

et Ali [127] est considéré. Les résultats des quatre premières fréquences ($\lambda = \omega a^2 (\rho h/D)^{1/2}$) sont présentés dans le tableau 4.20 et comparés aux solutions expérimentales et numériques [127-130] pour un maillage 24x24. Tandis que les quatre premiers modes sont donnés dans la figure 4.25. Les résultats des éléments développés sont très proches de ceux donnés par Lam, et al [128] et sont en accord raisonnable avec d'autres solutions [127,129-130]. Cependant, les éléments **SBQP** et **SBTP4** sont plus économique que l'élément **LSWRI** à neuf nœuds [130].

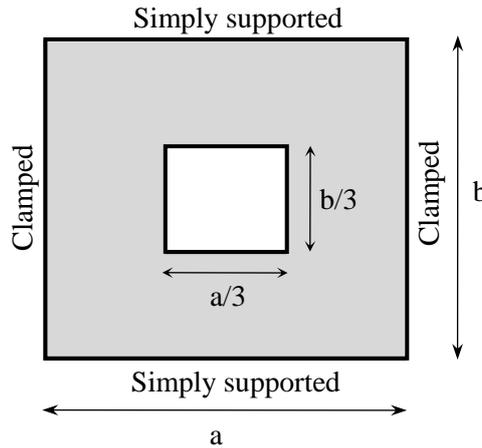


Figure 4.24. Plaque rectangulaire avec un trou central ($a/b=9/8$, $h/a=0.01$, $\nu=0.3$, $k=5/6$).

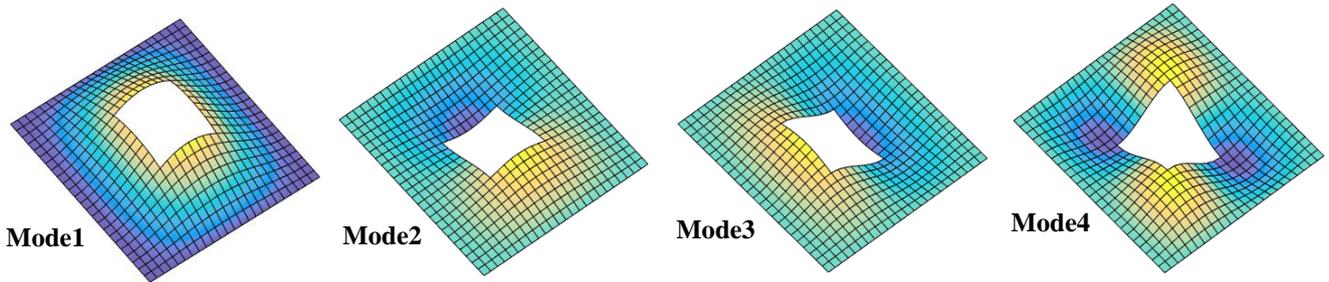


Figure 4.25. Modes propres d'une Plaque rectangulaire avec un trou central.

Tableau 4.20. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque trouée CSCS.

Modes	SBQP	SBTP4	LSWRI [130]	Lam, et al [128]	Aksu and Ali [127]	Liew, et al [129]	Experimental Results [127]
1	34.2505	34.2344	32.5421	34.04	33.22	32.4250	33.83
2	55.0893	54.9789	58.1577	54.57	53.01	53.4260	53.99
3	64.9771	64.8618	65.2573	65.05	61.91	62.3530	62.49
4	96.0129	95.9205	96.8386	95.38	91.87	94.8390	95.03

4.3.11 Flambement d'une plaque carrée sous un effort uni-axial

On considère une plaque carrée en appui simple (SSSS) ou encastree (CCCC) soumise à une compression uni-axiale (figure 4.26) avec ($h/L=0.01$). Le facteur de charge de flambement est

défini par $K^h = \lambda_{cr} L^2 / (\pi^2 / D)$ et les résultats de la charge critique de flambement pour les éléments **SBQP** et **SBTP4** sont présentés dans le tableau 4.21 et la figure 4.27 avec différents maillages 4x4, 8x8, 12x12, 16x16 et 20x20. Pour tous les cas de condition aux limites, les deux éléments (**SBQP** et **SBTP4**) ont des résultats similaires et convergent vers les solutions analytiques [131]. De plus, ces éléments ont une excellente précision par rapport aux autres éléments (**DSG3** et **ES-DSG3**) [132,133].

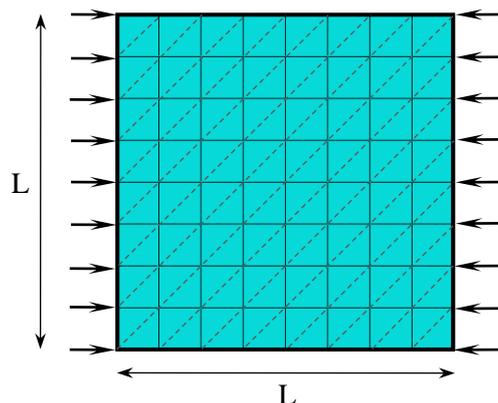


Figure 4.26 Plaque carrée soumise à une compression uni-axiale.

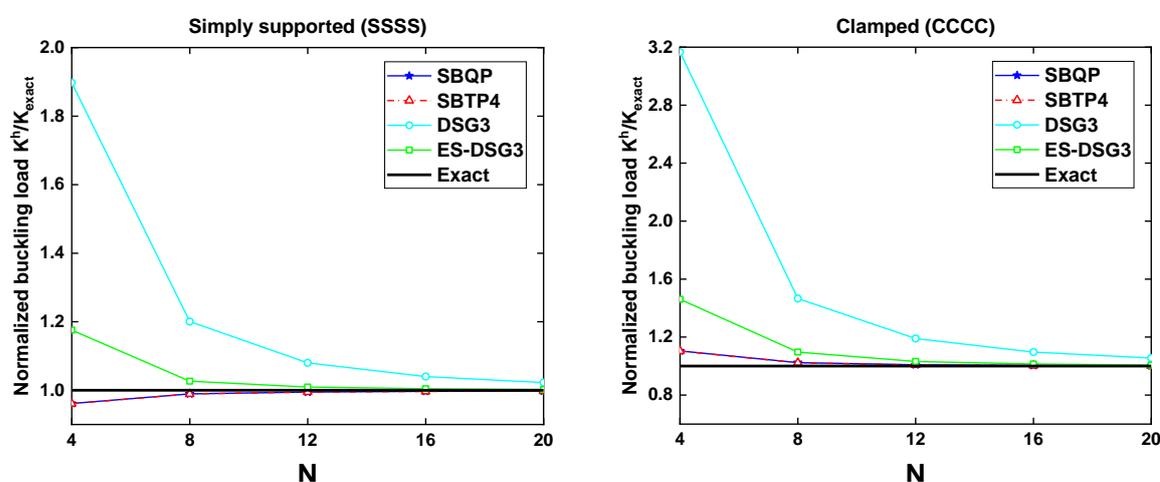
Tableau 4.21. Convergence de la charge uniaxiale de flambement (K^h) d'une plaque carrée ($h/L = 0.01$).

BC	Éléments	4x4	8x8	12x12	16x16	20x20	Timoshenko and Gere [131]
SSSS	SBQP	3.8452	3.9568	3.9790	3.9869	3.9905	4.00
	SBTP4	3.8434	3.9558	3.9782	3.9862	3.9899	
	DSG3 [132,133]	7.5891	4.8013	4.3200	4.1590	4.0889	
	ES-DSG3 [132,133]	4.7023	4.1060	4.0368	4.0170	4.0089	
CCCC	SBQP	11.1243	10.3089	10.1625	10.1120	10.0887	10.07
	SBTP4	11.1082	10.2955	10.1498	10.0999	10.0774	
	DSG3 [132,133]	31.8770	14.7592	11.9823	11.0446	10.6282	
	ES-DSG3 [132,133]	14.7104	11.0428	10.3881	10.2106	10.1410	

Les résultats de la charge critique de flambement (K^h) y compris l'erreur relative sont présentés dans le tableau 4.22 en utilisant un maillage 20x20. Les résultats des éléments **SBQP** et **SBTP4** sont en bon accord avec les solutions analytiques [131] et numériques [132-136].

Tableau 4.22. Charge uniaxiale de flambement (K^h) d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).

Eléments	Conditions aux limites			
	SSSS		CCCC	
SBQP	3.9905	(-0.24%)	10.0887	(0.18%)
SBTP4	3.9862	(-0.34%)	10.0774	(0.07%)
DSG3[132,133]	4.0889	(2.22%)	10.6282	(5.54%)
ES-DSG3 [132,133]	4.0089	(0.22%)	10.1410	(0.70%)
Liew and Chen [136]	3.9700	(-0.75%)	10.1501	(0.8%)
Ansys [136]	4.0634	(1.85%)	10.1889	(1.18%)
Tham and Szeto [134]	4.0000	(0.0%)	10.0800	(0.1%)
Vrcelj and Bradford [135]	4.0006	(0.02%)	10.0871	(0.17%)
Timoshenko and Gere [131]	4.0000	(0.0%)	10.0700	(0.0%)


Figure 4.27. Convergence de la charge critique du flambement (K^h/K_{exact}) d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).

4.3.12 Flambement d'une plaque carrée sous un effort biaxial

Il s'agit de l'étude d'une plaque carrée soumise à une compression biaxiale (figure 4.28) avec trois types de conditions aux limites (SSSS, CCCC, SCSC) en utilisant un maillage de 16×16 pour ($h/L=0.01$). Les résultats obtenus de la charge critique de flambement ($K^h = \lambda_{cr} L^2 / (\pi^2/D)$) sont présentés (tableau 4.23) et comparés avec les solutions analytiques [131] et numériques [132-135]. On peut constater que pour tous les cas de condition aux limites, les éléments **SBQP** et **SBTP4** fournissent des résultats concordants avec les solutions analytiques [131] et numériques [132-135].

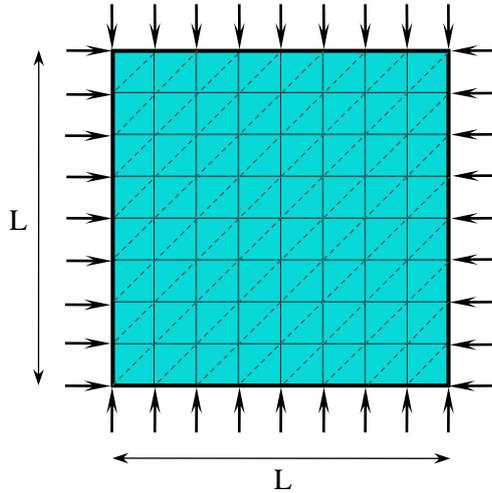


Figure 4.28. Plaque carrée soumise à une compression bi-axiale.

Tableau 4.23. Charge biaxiale de flambement (K^h) d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).

BC	SBQP	SBTP4	DSG3 [132,133]	ES- DSG3 [132,133]	Timoshenko and Gere [131]	Tham and Szeto [134]	Vrcelj and Bradford [135]
SSSS	1.9934	1.9931	2.0549	2.0023	2.00	2.00	2.0008
CCCC	5.3039	5.2991	5.6419	5.3200	5.31	5.61	5.3260
SCSC	3.8331	3.8279	4.0108	3.8332	3.83	3.83	3.8419

4.4 Formulation et validation de l'élément plaque composite

L'élément formulé, nommé **SBRLP** (Strain Based Rectangular Laminated Plate), est un élément rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté (u , v , w , β_x , et β_y) par nœud (figure 4.29) basé sur la théorie du premier ordre (FSDT). L'élément est une combinaison d'un élément membranaire basé sur l'approche en déformation **SBRIE** [1] à deux ddl (u , v) par nœud et de l'élément flexionnel développé **SBQP** à trois ddl (w , β_x , et β_y) par nœud, le tout donnant un élément fini à quatre nœuds avec vingt degrés de liberté.

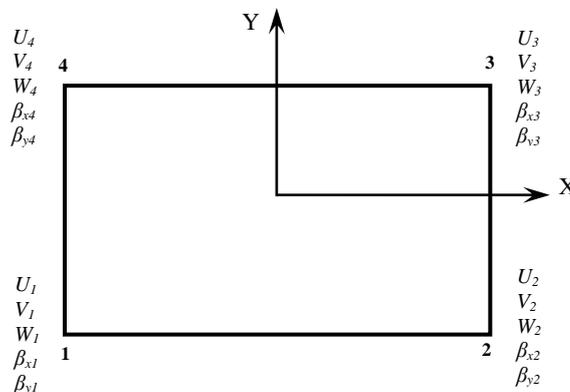


Figure 4.29. Élément de plaque composite rectangulaire.

Le champ des déplacements de chacun des éléments **SBRIE** [1] et **SBQP** sont respectivement :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [P_m] \{\alpha_m\}; \quad \{\alpha_m\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8\}^T \quad (4.26)$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [P_f] \{\alpha_f\}; \quad \{\alpha_f\} = \{\alpha_9, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{20}\}^T \quad (4.27)$$

Les fonctions des déplacements de l'élément de plaque composite **SBRLP** sont donc données par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_m] & 0 \\ 0 & [P_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_m\} \\ \{\alpha_f\} \end{Bmatrix} = [P] \{\alpha\} \quad (4.28)$$

Avec
$$[P_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -y^2/2 & y/2 \\ 0 & 1 & x & 0 & -x^2/2 & y & xy & x/2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$[P_f] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^2 y}{2} & -\frac{y^2}{2} & -\frac{xy^2}{2} & -\frac{xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{xy}{2} & \frac{y}{2} & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & xy & 0 & \frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} & 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Les relations entre les déformations $\{e\}$, $\{\kappa\}$, $\{\gamma\}$ et les variables nodales ($\{q_e\}^T = (u_1, v_1, w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, \dots, u_4, v_4, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4})$) sont :

$$\{e\} = [B_m] \{q_e\}; \quad \{\kappa\} = [B_f] \{q_e\}; \quad \{\gamma\} = [B_c] \{q_e\} \quad (4.31)$$

Où $\{e\}$, $\{\kappa\}$, $\{\gamma\}$ sont respectivement les déformations de membrane, de flexion et de cisaillement. Les matrices de déformation $[B_m]$, $[B_f]$ et $[B_c]$ sont décrites comme suit :

$$[B_m] = [Q_m][C]^{-1}; \quad [B_f] = [Q_f][C]^{-1}; \quad [B_c] = [Q_c][C]^{-1} \quad (4.32)$$

D'où
$$[C] = [[P_1] \ [P_2] \ [P_3] \ [P_4]]^T \quad (4.33)$$

Avec
$$[P]_i = \begin{bmatrix} [P_m]_i & 0 \\ 0 & [P_f]_i \end{bmatrix}; \text{noeud}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.34)$$

Les matrices $[Q_m]$, $[Q_f]$ et $[Q_c]$ sont données par :

$$[Q_m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$[Q_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2x) & 0 & (2y) & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$[Q_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

La matrice de rigidité élémentaire est décomposée en plusieurs composantes :

$$[K^e] = [K_m^e] + [K_{mf}^e] + [K_{fm}^e] + [K_f^e] + [K_c^e] \quad (4.38)$$

Où $[K_m^e]$ est la partie membranaire de la matrice de rigidité, $[K_{mf}^e]$, $[K_{fm}^e]$ sont les composantes de couplage membrane-flexion, $[K_f^e]$ est la partie de flexion et $[K_c^e]$ est la partie de cisaillement qui sont données comme suit :

$$[K_m^e] = \int_A [B_m]^T [H_m] [B_m] dA \quad (4.39)$$

$$[K_{mf}^e] = \int_A [B_m]^T [H_{mf}] [B_f] dA \quad (4.40)$$

$$[K_{fm}^e] = \int_A [B_f]^T [H_{mf}] [B_m] dA \quad (4.41)$$

$$[K_f^e] = \int_A [B_f]^T [H_f] [B_f] dA \quad (4.42)$$

$$[K_c^e] = \int_A [B_c]^T [H_c] [B_c] dA \quad (4.43)$$

La procédure de calcul des matrices constitutive $[H_m]$, $[H_f]$, $[H_{mf}]$, $[H_c]$ est donnée dans le chapitre 1 (voir équations 44-49).

La matrice masse élémentaire est calculée comme suit :

$$[M^e] = \int_A [N]^T [T] [N] dA \quad (4.44)$$

$$D'o\grave{u} \quad [N] = [P][C]^{-1}; \quad [T] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

4.4.1 Exemples numériques

Dans cette section, nous allons valider l'élément **SBRLP** destiné à l'analyse statique et en vibration libre des plaques composites stratifiées. Plusieurs tests numériques ont été appliqués afin d'évaluer les performances de l'élément proposé où différentes conditions aux limites, rapports d'épaisseur, nombre de couches, orientations des fibres sont considérées. Les résultats du présent élément sont comparés avec certaines solutions analytiques et numériques existantes dans la littérature. Les conditions aux limites considérées dans cette étude sont :

- Simplement appuyée ($x=0$ et $x=a$, $v=w=\beta_y=0$) et ($y=0$ et $y=b$, $u=w=\beta_x=0$).
- Encastrée ($u=v=w=\beta_x=\beta_y=0$).

4.4.1.1 Plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une charge uniforme

Le premier test de validation du présent élément est celui proposé par Srinivas [137]. Il s'agit d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée soumise à une charge uniforme. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont présentées dans la figure 4.30 avec un rapport d'épaisseur ($L/h=10$). Les propriétés matérielles du cœur sont exprimées dans la matrice constitutive, Q_c :

$$[Q_c] = \begin{bmatrix} 0.999781 & 0.231192 & 0 & 0 & 0 \\ 0.231192 & 0.524886 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.262931 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.266810 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.159914 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

La matrice constitutive des peaux Q_p est donnée en fonction de celle du cœur par un facteur R :

$$[Q_p] = R[Q_c] \quad (4.50)$$

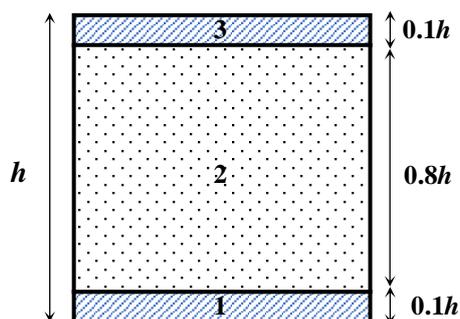


Figure 4.30. Plaque sandwich carrée simplement appuyée sous charge uniforme.

 Tableau 4.24. Convergence du déplacement transversal (w) et les contraintes (σ_x) d'une plaque sandwich carrée.

R	Method	w	σ_x^1	σ_x^2	σ_x^3
5	LW [141]	258.1795	60.0626	46.3926	9.2785
	FSDT [140]	257.3800	58.7250	46.9800	9.3960
	HSDT [139]	257.1100	60.3660	47.0028	9.4006
	Q4 (4x4) [138]	260.0321	54.6108	43.6887	8.7377
	Q4 (10x10) [138]	259.3004	58.4403	46.7523	9.3505
	Q4 (20x20) [138]	259.2797	58.9507	47.1606	9.4321
	SBRLP (4x4)	250.7643	53.0230	42.4184	8.4837
	SBRLP (10x10)	258.0074	58.1942	46.5554	9.3111
	SBRLP (20x20)	258.9627	58.8898	47.1118	9.4224
	Srinivas [137]	258.97	60.353	46.623	9.340
10	LW [141]	158.9117	64.9927	48.6009	4.8601
	FSDT [140]	158.5500	62.7230	50.1600	5.0100
	HSDT [139]	154.6581	65.3809	49.9729	4.9973
	Q4 (4x4) [138]	162.2395	58.1236	46.4989	4.6499
	Q4 (10x10) [138]	159.9120	62.3765	49.9012	4.9901
	Q4 (20x20) [138]	159.6820	62.9474	50.3580	5.0358
	SBRLP (4x4)	155.7769	56.4528	45.1622	4.5162
	SBRLP (10x10)	159.0439	62.1219	49.6975	4.9698
	SBRLP (20x20)	159.4704	62.8844	50.3075	5.0308
	Srinivas [137]	159.38	65.332	48.857	4.903
15	LW [141]	121.3474	66.4362	48.0104	3.2007
	FSDT [140]	121.1840	63.2140	50.5710	3.3710
	HSDT [139]	114.6442	66.9196	50.3230	3.3549
	Q4 (4x4) [138]	125.2176	58.4574	46.7659	3.1177
	Q4 (10x10) [138]	122.3318	62.8602	50.2881	3.3525
	Q4 (20x20) [138]	122.0283	63.4574	50.7659	3.3844
	SBRLP (4x4)	119.8296	56.8112	45.4490	3.0299
	SBRLP (10x10)	121.6250	62.6142	50.0914	3.3394
	SBRLP (20x20)	121.8566	63.3966	50.7173	3.3812
	Srinivas [137]	121.72	66.787	48.299	3.238

Le déplacement et les contraintes normalisés de la plaque sandwich carrée sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w(a/2, a/2, 0)0.99981}{hq}; & \bar{\sigma}_{xx}^{-1} &= \frac{\sigma_{xx}^{(1)}(a/2, a/2, -h/2)}{q}; & \bar{\sigma}_{xx}^{-2} &= \frac{\sigma_{xx}^{(1)}(a/2, a/2, -2h/5)}{q}; \\ \bar{\sigma}_{xx}^{-3} &= \frac{\sigma_{xx}^{(2)}(a/2, a/2, -2h/5)}{q} \end{aligned}$$

Les résultats obtenus de l'élément **SBRLP** sont présentés (tableau 4.24) pour différents maillages et la solution de référence utilisé est celle de la théorie d'élasticité 3D [137]. On constate que la convergence de l'élément **SBRLP** est assez rapide vers la solution de référence [137] d'où ses résultats sont plus précis que ceux de l'élément **Q4** (avec intégration sélective) [138]. Il est aussi observé que le présent élément est en bon accord avec d'autres méthodes existantes [139-141] traitant ce problème.

4.4.1.2 Plaques carrées stratifiées soumises à une charge uniformément répartie

Nous considérons une plaque carrée stratifiée simplement appuyée sous l'effet d'un chargement uniforme ($q=1$) d'où ses propriétés mécaniques sont définies par : $E_1/E_2=25$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.2E_2$, $\nu_{12}=0.25$. Trois types de stratifications croisées sont utilisées : trois couches (0/90/0), quatre couches (0/90/90/0) et cinq couches (0/90/0/90/0) et ses couches sont de même épaisseur et le maillage adopté pour la plaque est 12x12. Les résultats du déplacement vertical ($W=W100E^2h^3/(qL^4)$) au centre de la plaque sont présentés dans le tableau 4.25 avec divers rapports d'épaisseurs (L/h). Les résultats numériques montrent de l'élément **SBRLP** sont en excellent accord avec la solution analytique du premier ordre de Reddy [32] et sont plus précis que ceux des éléments **FEM-T3** (triangulaire à 3 nœuds), **FEM-Q4** (quadrilatère à 4 nœuds avec intégration réduite) et **DSG3** [142]. On remarque aussi que les éléments **ES-DSG** et **FEM-Q9** (quadrilatère à 9 nœuds) [142] sont comparables avec le présent élément.

Tableau 4.25. Déplacement transversal (w) des plaques stratifiées carrées à trois, quatre et cinq couches sous charge uniforme.

Méthodes	Nombre de couches	L/h		
		10	20	100
FEM-T3 [142]	[0/90/0]	0.9639	0.6989	0.5744
FEM-Q4 [142]		0.9874	0.7195	0.6307
FEM-Q9 [142]		1.0219	0.7573	0.6697
DSG3 [142]		1.0159	0.7521	0.6642
ES-DSG3 [142]		1.0287	0.7624	0.6743
SBRLP		1.0218	0.7557	0.6677
Reddy [32]		1.0219	0.7572	0.6697
FEM-T3 [142]	[0/90/90/0]	0.9641	0.7085	0.5795
FEM-Q4 [142]		0.9883	0.7302	0.6430
FEM-Q9 [142]		1.0250	0.7694	0.6829
DSG3 [142]		1.0136	0.7604	0.6744
ES-DSG3 [142]		1.0276	0.7716	0.6854
SBRLP		1.0240	0.7671	0.6806
Reddy [32]		1.0250	0.7694	0.6833
FEM-T3 [142]	[0/90/0/90/0]	0.9120	0.6966	0.5812
FEM-Q4 [142]		0.9350	0.7182	0.6465
FEM-Q9 [142]		0.9727	0.7581	0.6868
DSG3 [142]		0.9554	0.7404	0.6688
ES-DSG3 [142]		0.9687	0.7515	0.6799
SBRLP		0.9712	0.7555	0.6844
Reddy [32]		0.9727	0.7581	0.6874

4.4.1.3 Vibrations libres des plaques composites stratifiées

Considérons des plaques composites stratifiées symétrique ($0^0/90^0/0^0$) de forme carrée et rectangulaire ($a/b=1$ et 2) avec différents rapports d'épaisseur ($h/b=0.001$ et 0.2). Deux types de conditions aux limites (encastrée et simplement appuyée) sont considérés avec différents maillages. Les caractéristiques mécaniques des couches sont : $E_1/E_2=40$, $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$, $\nu_{21}=0.00625$, avec $D_0= E_2h^3/12(1- \nu_{12}\nu_{21})$ et le facteur de correction du cisaillement $k= \pi^2/12$. Les résultats des six premières fréquences non dimensionnelles ($\lambda=\omega b^2/\pi^2(\rho h/D_0)^{1/2}$) de l'élément **SBRLP** sont illustrées dans les tableaux 4.26-4.29 et comparées avec la solution de Liew [143] et celles données par l'élément **Q4** (avec intégration sélective) [138]. Ces résultats montrent que le taux de convergence du présent élément vers la solution de Liew [143] est plus rapide que l'élément **Q4** [138].

Tableau 4.26. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque stratifiée encastree ($a/b=1$) à trois couches (0/90/0).

h/b	Eléments	Maillages	Modes						
			1	2	3	4	5	6	
0.001	Q4 [138]	5x5	16.6943	22.0807	51.0268	57.7064	59.9352	76.5002	
		10x10	15.1249	18.4938	27.6970	42.6545	44.3895	45.5585	
		20x20	14.7776	17.8233	25.2187	37.5788	39.9809	41.6217	
	SBRLP	5x5	15.3694	17.8980	29.4660	41.6742	43.3060	46.6613	
		10x10	14.8240	17.6308	25.1861	38.5357	40.5999	41.1331	
		20x20	14.7043	17.6157	24.6527	36.1657	39.5038	40.8519	
	Liew [143]		14.6655	17.6138	24.5114	35.5318	39.1572	40.7685	
	0.2	Q4 [138]	5x5	4.5013	7.3324	7.9268	9.4186	11.9311	12.3170
			10x10	4.4145	6.8373	7.6291	9.2078	10.3964	11.4680
20x20			4.3931	6.7178	7.5509	9.1264	10.0084	11.1927	
SBRLP		5x5	4.5414	7.0994	8.0854	9.6533	11.2591	12.7930	
		10x10	4.4685	6.7434	7.7954	9.2918	10.0819	11.7667	
		20x20	4.4520	6.6666	7.7235	9.2113	9.8215	11.4908	
Liew [143]			4.4468	6.6419	7.6996	9.1852	9.7378	11.3991	

Tableau 4.27. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque stratifiée simplement appuyée ($a/b=1$) à trois couches (0/90/0).

h/b	Eléments	Maillages	Modes						
			1	2	3	4	5	6	
0.001	Q4 [138]	5x5	6.9607	10.7831	25.1919	30.8932	32.5750	40.8649	
		10x10	6.7066	9.7430	17.8158	26.3878	27.8395	32.3408	
		20x20	6.6454	9.5190	16.5801	25.4234	26.8237	27.9061	
	SBRLP	5x5	6.5251	9.1490	17.3244	25.0918	26.0386	26.3687	
		10x10	6.5994	9.3625	16.4053	25.3202	26.0978	27.9157	
		20x20	6.6187	9.4253	16.2502	25.1645	26.3950	26.9507	
	Liew [143]		6.6252	9.4470	16.2051	25.1146	26.4982	26.6572	
	0.2	Q4 [138]	5x5	3.5913	6.2812	7.6261	8.8475	11.3313	12.1324
			10x10	3.5479	5.8947	7.3163	8.6545	9.7538	11.2835
20x20			3.5367	5.8036	7.2366	8.5856	9.3768	10.9971	
SBRLP		5x5	3.5722	5.9212	7.6756	8.8449	10.2748	12.1417	
		10x10	3.5886	5.8034	7.4694	8.7278	9.4064	11.4254	
		20x20	3.5926	5.7775	7.4153	8.6978	9.2090	11.2719	
Liew [143]			3.5939	5.7691	7.3972	8.6876	9.1451	11.2080	

Tableau 4.28. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque stratifiée encastree ($a/b=2$) à trois couches (0/90/0).

h/b	Eléments	Maillages	Modes					
			1	2	3	4	5	6
0.001	Q4 [138]	5x5	5.7995	15.0869	15.1794	20.9280	47.7268	48.0954
		10x10	5.2624	11.3863	11.4494	15.5733	23.0606	23.2217
		20x20	5.1435	10.7292	10.7872	14.6188	20.3457	20.4857
	SBRLP	5x5	5.3505	12.1809	12.2542	15.2277	27.1820	27.2799
		10x10	5.1600	10.8484	10.9082	14.4575	20.9302	21.0766
		20x20	5.1185	10.6026	10.6598	14.3532	19.8807	20.0174
Liew [143]		5.1051	10.5265	10.5828	14.3241	19.5674	19.7011	
0.2	Q4 [138]	5x5	3.2165	4.4538	6.4677	6.6996	7.0825	7.8720
		10x10	3.0946	4.2705	5.9857	6.0821	6.7327	7.8602
		20x20	3.0646	4.2207	5.8436	5.9323	6.6221	7.6291
	SBRLP	5x5	3.1624	4.4540	6.3188	6.5887	6.9719	8.4221
		10x10	3.0727	4.2971	5.9135	6.0738	6.6361	7.8933
		20x20	3.0521	4.2604	5.8216	5.9465	6.5601	7.7698
Liew [143]		3.0453	4.2484	5.7918	5.9047	6.5354	7.6881	

Tableau 4.29. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque stratifiée simplement appuyée ($a/b=2$) à trois couches (0/90/0).

h/b	Eléments	Maillages	Modes					
			1	2	3	4	5	6
0.001	Q4 [138]	5x5	2.4798	8.0538	8.1040	11.5816	23.5944	23.7622
		10x10	2.3905	6.9399	6.9817	9.9192	15.9748	16.0852
		20x20	2.3689	6.7016	6.7415	9.5617	14.6808	14.7815
	SBRLP	5x5	2.3278	6.8048	6.8468	8.9735	16.0963	16.2088
		10x10	2.3530	6.6631	6.7031	9.3109	14.6838	14.7848
		20x20	2.3596	6.6343	6.6738	9.4119	14.3826	14.4811
Liew [143]		2.3618	6.6252	6.6845	9.4470	14.2869	14.3846	
0.2	Q4 [138]	5x5	2.0006	3.7932	5.5767	6.1626	6.2479	7.4516
		10x10	1.9504	3.5985	5.0782	5.5720	5.9030	7.2281
		20x20	1.9379	3.5493	4.9610	5.4132	5.8064	7.1031
	SBRLP	5x5	1.9307	3.7029	5.0861	5.9057	6.0859	7.5243
		10x10	1.9370	3.6207	4.9271	5.6382	5.8030	7.2218
		20x20	1.9387	3.6005	4.8883	5.5234	5.7776	7.1438
Liew [143]		1.9393	3.5939	4.8755	5.4855	5.7691	7.1177	

4.4.1.4 Effet du nombre de couches et du degré d'orthotropie sur la fréquence fondamentale

Dans l'exemple d'une plaque carrée stratifiée simplement appuyée, les effets du nombre de couches et le degré d'orthotropie de couches (E_1/E_2) sur la fréquence fondamentale ont été examinés avec le rapport d'épaisseur ($L/h=5$). Trois schémas de stratifications croisées (0/90/0) et (0/90/0/90/0) et (0/90/0/90/0/90/0/90/0) avec plusieurs rapports d'orthotropie (E_1/E_2) sont

considérés et les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé des couches sont : $E_1/E_2=3,10,20$ et 30 , $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$. Les résultats de la fréquence fondamentale ($\lambda=\omega(\rho h^2/E_2)^{1/2}$) du présent élément pour un maillage 12×12 sont présentés dans le tableau 4.30 qui sont en bon accord avec la solution d'élasticité 3D par Noor [144], ainsi que ceux obtenus par des éléments basés sur l'approche layerwise (**FEM-Q4-LW**, **FEM-Q9-LW**) [145] et des éléments d'ordre supérieur (**FEM-Q4-HSDT**, **FEM-Q9-HSDT**) [146]. Pour les trois types de stratifications, les résultats montrent que les valeurs des fréquences augmentent avec l'augmentation du rapport d'orthotropie (E_1/E_2).

Tableau 4.30. Fréquences fondamentales (λ) des plaques stratifiées à trois, cinq et neuf couches pour différents rapports (E_1/E_2).

Modèles EF	Nombre de couches	E_{11}/E_{22}			
		3	10	20	30
SBRLP					
Noor [144]		0.2619	0.3262	0.3694	0.3935
FEM-Q9-LW [145]	[0/90/0]	0.2647	0.3284	0.3842	0.4109
FEM-Q4-LW [145]		0.2621	0.3262	0.3691	0.3927
FEM-Q9-HSDT [146]		0.2683	0.3297	0.3685	0.3886
FEM-Q4-HSDT [146]		0.2624	0.3264	0.3698	0.3941
SBRLP					
Noor [144]		0.2628	0.3270	0.3703	0.3947
FEM-Q9-LW [145]	[0/90/0/90/0]	0.2627	0.3357	0.3917	0.4256
FEM-Q4-LW [145]		0.2659	0.3409	0.3979	0.4314
FEM-Q9-HSDT [146]		0.2618	0.3330	0.3858	0.4166
FEM-Q4-HSDT [146]		0.2683	0.3396	0.3918	0.4219
SBRLP					
Noor [144]	[0/90/0/90/0/90/0/90/0]	0.2637	0.3373	0.3929	0.4258
FEM-Q9-HSDT [146]		0.2641	0.3378	0.3935	0.4264
FEM-Q4-HSDT [146]		0.2631	0.3398	0.4002	0.4367
Noor [144]		0.2664	0.3443	0.4054	0.4421
FEM-Q9-HSDT [146]		0.2636	0.3372	0.3929	0.4257
FEM-Q4-HSDT [146]		0.2641	0.3378	0.3935	0.4263

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation théorique de deux éléments finis simples et efficaces de forme quadrilatérale et triangulaire basés sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin pour l'étude statique, en vibration libre et de flambement des plaques isotropes. Ces deux éléments développés passent avec succès les patch-tests et les tests de benchmark pour les problèmes des plaques en flexion. Les résultats numériques montrent que les éléments **SBQP** et **SBTP4** sont libre de tout blocage en CT et sont plus précis que l'élément **SBRP** [25]. Ce dernier souffre d'un blocage en CT pour les plaques très minces en présentant un taux de convergence inférieur vers les solutions analytiques pour le cas des

plaques épaisses et minces. D'autre part, un élément fini rectangulaire **SBRLP** a été proposé pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques en matériaux composites. L'élément est une combinaison d'un élément membranaire à champ de déformation **SBRIE** [1] et d'un élément plaque en flexion développé **SBQP** de type Reissner-Mindlin. Les résultats obtenus des éléments (**SBQP**, **SBTP4** et **SBRLP**) montrent qu'une convergence rapide vers les solutions analytiques peut être obtenue avec des maillages relativement grossiers en comparaison à d'autres éléments robustes basés sur différentes approches.

Chapitre 5

Élément fini de coque rectangulaire à facette plane

5.1 Introduction

L'analyse numérique des structures en coque dans les problèmes industriels à grande échelle a été toujours un défi et a reçu de façon continue un fort intérêt [147-149]. Au cours des trois dernières décennies, la méthode des éléments finis (FEM) a été utilisée comme un outil numérique puissant pour simuler les comportements des structures en coque [150].

Les formulations d'éléments de coque peuvent être classées en trois catégories, (1) Les éléments coques courbes basés sur la théorie générale des coques, (2) Éléments coques dégénérés, dérivés de la théorie des solides tridimensionnels (3D), et (3) Éléments coques à facettes planes, formulés en combinant un élément de membrane en l'élasticité plane et un élément de plaque en flexion. Parmi ces trois groupes, les éléments coques à facettes planes sont plutôt populaires en raison de leur simplicité de formulation et de leur faible coût de calcul. Les éléments coques peuvent être classés selon l'épaisseur de coque où les éléments coques minces sont basés sur la théorie de Kirchhoff [151-152] dont les déformations de cisaillement transversal sont négligées. Tandis que les éléments coques épais sont basés sur la théorie de Reissner-Mindlin [74, 153-156] qui inclut les déformations de cisaillement transversal.

La contribution de l'approche en déformation pour les éléments coques curvilignes a été montrée par la formulation du premier élément de coque cylindrique basé sur la théorie des coques profondes [23]. Dans le même contexte, Djoudi et Bahai [27-29] ont proposé des éléments coques cylindriques basés sur la théorie des coques surbaissées. Tous ces éléments [23, 27-29] sont de forme rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté (u , v , w , θ_x , θ_y) par nœud. Récemment, Guenfoud et al [30] ont développé un élément coque à facette plane triangulaire à quatre nœuds. Cet élément est la superposition des éléments de membrane et de flexion de type Kirchhoff qui sont basés tous les deux sur l'approche en déformation.

L'approche par facettes planes est retenue dans ce qui suit pour l'extension de l'élément quadrilatère plaque Reissner-Mindlin **SBQP** [163] formulé au chapitre 4 pour la formulation d'un élément coque.

5.2 Modèle de coque à facette plane

5.2.1 Description de l'élément coque formulé SBRS

La procédure pour l'obtention d'un élément de coque plane par superposition d'un élément de membrane et celui de flexion est présentée dans le cas du rectangle (figure 5.1).

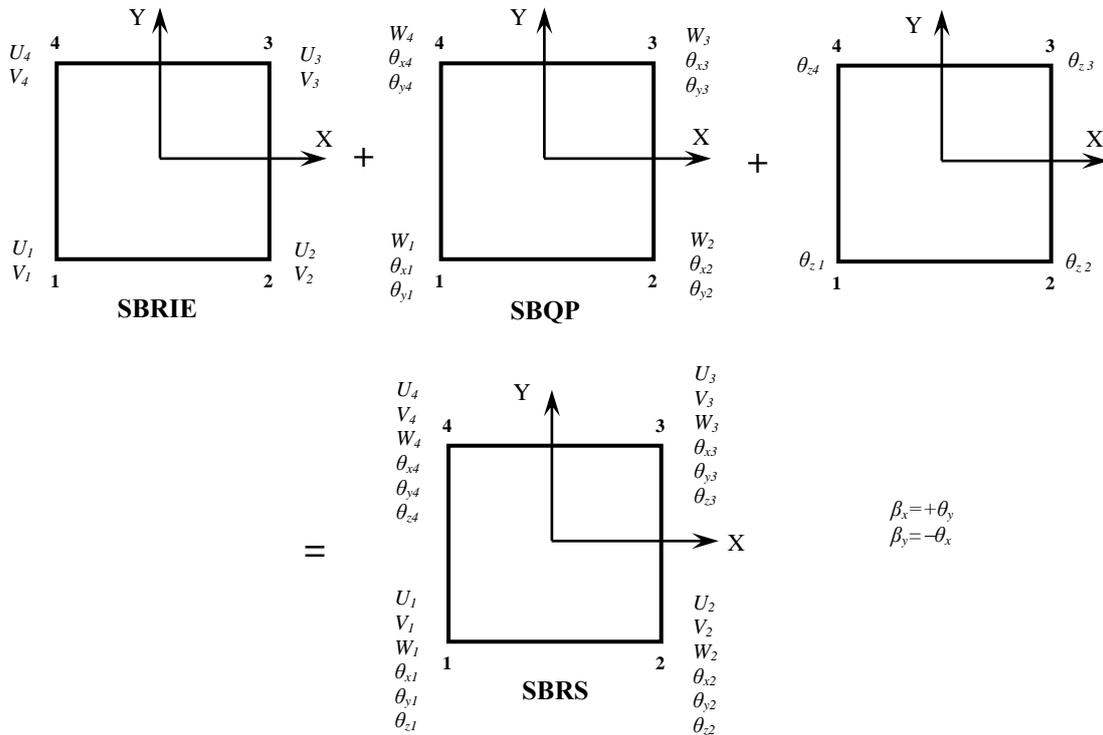


Figure 5.1. Élément de coque rectangulaire à facette plane **SBRS**.

L'élément **SBRS** (Strain Based Rectangular Shell) possède quatre nœuds et 6 ddl par nœud : les trois déplacements u, v, w selon les axes globaux (X, Y, Z) et les trois rotations $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ autour des axes globaux (X, Y, Z) .

L'élément **SBRS** est obtenu en superposant l'élément de membrane et celui de plaque en flexion/CT.

- La partie membranaire est représentée par un élément basé sur l'approche en déformation **SBRIE** [1] à deux ddl (u, v) par nœud.

- La partie flexionnelle est représentée par l'élément de plaque Mindlin **SBQP** [163] à trois ddl (w , θ_x , et θ_y) par nœud (voir le chapitre 4).

La combinaison des deux éléments **SBRIE** [1] et **SBQP** [163] a permis de formuler l'élément coque à facette plan **SBRS** pour la modélisation de coques minces et épaisses de formes cylindriques.

5.2.2 Formulation de l'élément coque SBRS

5.2.2.1 Matrice de rigidité de membrane

Les fonctions de déplacement de l'élément **SBRIE** [1] sont :

$$U = \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2}$$

$$V = \alpha_2 + \alpha_3 x - \alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} \quad (5.1)$$

Le champ des déplacements donné par (5.1) peut être exprimé sous forme matricielles comme suit :

$$\{U_e\} = [P]\{\alpha\} \quad (5.2)$$

Avec

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -y^2/2 & y/2 \\ 0 & 1 & x & 0 & -x^2/2 & y & xy & x/2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Le vecteur des déplacements nodaux ($\{q_e\}^T = (U_1, V_1, \dots, U_4, V_4)$), peut être évalué en substituant les coordonnées des quatre nœuds de l'élément **SBRIE** [1] (figure 5.1) pour avoir :

$$\{q_e\} = [C]\{\alpha\} \quad (5.4)$$

Avec

$$\{U_e\} = \{U, V\}^T, \quad \{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8\}^T$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [P(x_1, y_1)] \\ [P(x_2, y_2)] \\ [P(x_3, y_3)] \\ [P(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

D'où la matrice de transformation $[C]$ de dimension 8×8 relie les déplacements nodaux élémentaire aux huit constantes ($\{\alpha\}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_8)$). Ce vecteur des huit constantes peut être donné comme suit :

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{q_e\} \quad (5.6)$$

Les déformations $\{\varepsilon\}$ peut être exprimé sous forme matricielles comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [Q]\{\alpha\} \quad (5.7)$$

Avec

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

La partie membranaire de la matrice de rigidité élémentaire $[K_m^e]$ est donnée par :

$$[K_m^e] = \int_{S_e} [B]^T [D][B] dx dy$$

$$[K_m^e] = [C]^{-T} \left(\int [Q]^T [D][Q] dx dy \right) [C]^{-1} = [C]^{-T} [K_o][C]^{-1} \quad (5.9)$$

D'où

$$[K_o] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D][Q] \det(J) d\xi d\eta \quad (5.10)$$

Avec la matrice d'élasticité $[D]$ en contrainte plane (voir chapitre 1, équations 1.6 et 1.8).

5.2.2.2 Matrice de rigidité de flexion/CT

La matrice de rigidité de flexion $[K_f^e]$ de l'élément **SBRS** est celle de l'élément plaque **SBQP** [163] (voir le chapitre 4, section 2).

5.2.2.3 Rigidité fictive

La matrice de rigidité élémentaire de coque **SBRS** à chaque nœud i peut être donnée par les sous-matrices suivantes :

$$[K_i^e] = \begin{bmatrix} [K_m]_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} & 0 \\ 0_{3 \times 2} & [K_f]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Il est clair que la matrice de rigidité élémentaire à chaque nœud i contient des valeurs nulles de la rigidité correspondant à la rotation θ_{zi} . Cela signifie que la matrice de rigidité de la structure sera singulière si tous les éléments connectés à un nœud sont coplanaires. Cette difficulté numérique peut être évitée en remplaçant les rigidités nulles de la rotation θ_{zi} par des rigidités

La matrice de rigidité de l'élément coque **SBRS** s'écrit :

$$\left[K^e \right]_{glob} = [T]^T \left[K^e \right]_{loc} [T] \quad (5.16)$$

5.3 Validation numérique

Dans cette partie, divers exemples numériques sont effectués pour montrer la précision et la stabilité de l'élément proposé en comparant avec d'autres éléments coques plans ainsi que les solutions de référence des problèmes des coques cylindriques. Les tests choisis pour valider l'élément **SBRS** sont le cylindre pincé court à bords libres, le cylindre pincé avec diaphragmes rigides, panneau cylindrique soumis à son poids propre, poutre console courbe soumise à une charge verticale statique.

5.3.1 Panneau cylindrique sous son poids propre

Cet exemple est généralement traité pour montrer les performances des éléments coques cylindriques. Il s'agit d'un panneau cylindrique soumis à son poids propre dont ses bords droits sont libres et les autres bords courbés sont appuyés sur des diaphragmes rigides dans leurs plans. Dû à la symétrie, un quart du panneau est considéré dans l'étude pour plusieurs maillages. Les données géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure 5.2 ($R/h=100$, $L/h=200$). Une solution analytique basée sur la théorie des coques surbaissées ($W_B=-3.703\text{cm}$, $W_C=0.525\text{cm}$) [157] et celle de référence de la théorie des coques profondes ($W_B=-3.61\text{cm}$, $W_C=0.541\text{cm}$) [157] sont présentées dans les figures 5.3-5.4 pour la comparaison. Les résultats du déplacement vertical aux points B et C de l'élément **SBRS** avec d'autres éléments quadrilatéraux (**DKQM24**, **Q4γ24**) [74] sont reportés dans les figures 5.3-5.4 en fonction du nombre d'élément par coté N. On remarque que tous les éléments convergent vers la solution de référence des coques profondes.

Conditions aux limites

$u=w=\theta_y=0;$ sur AD

Conditions de symétrie

$v=\theta_x=\theta_z=0;$ sur BC

$u=\theta_y=\theta_z=0;$ sur CD

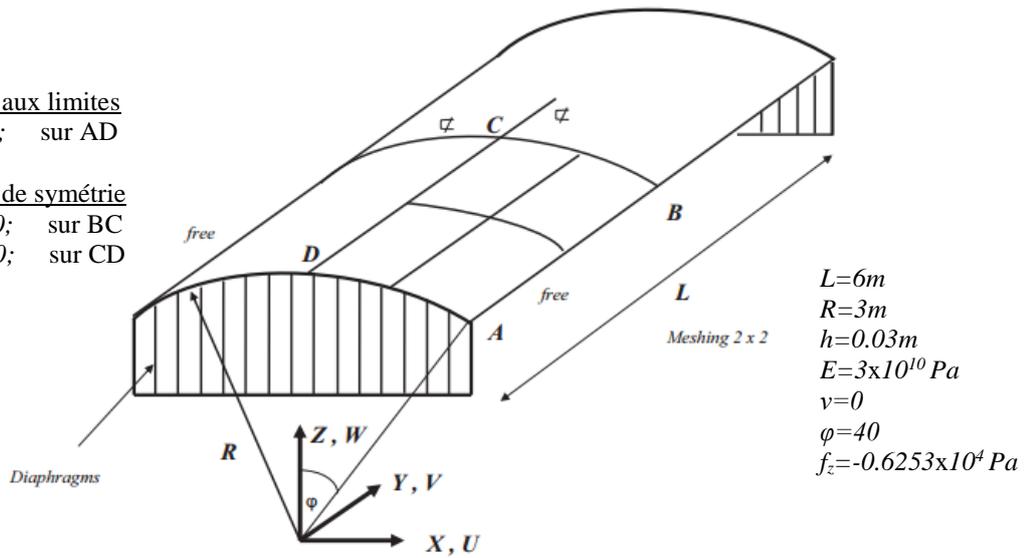


Figure 5.2. Panneau cylindrique soumis à son poids propre.

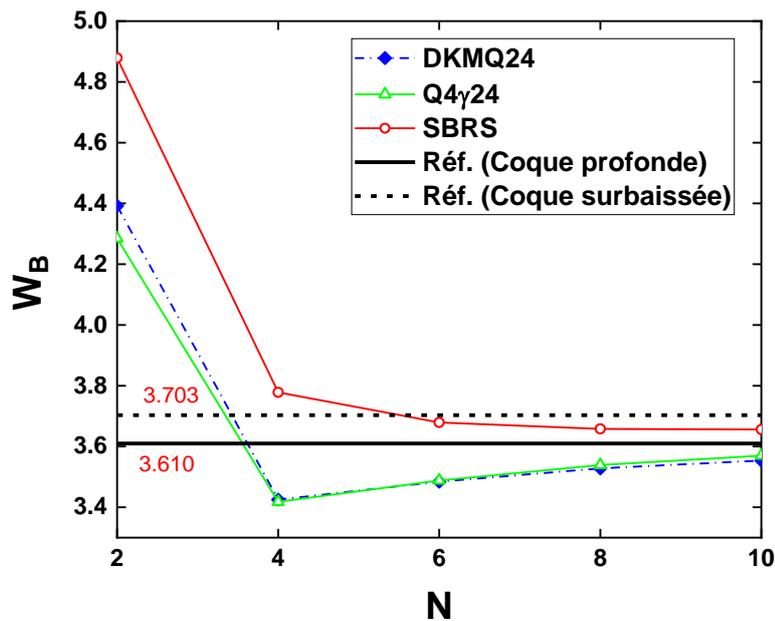


Figure 5.3. Convergence du déplacement vertical W_B du Panneau cylindrique soumis à son poids propre.

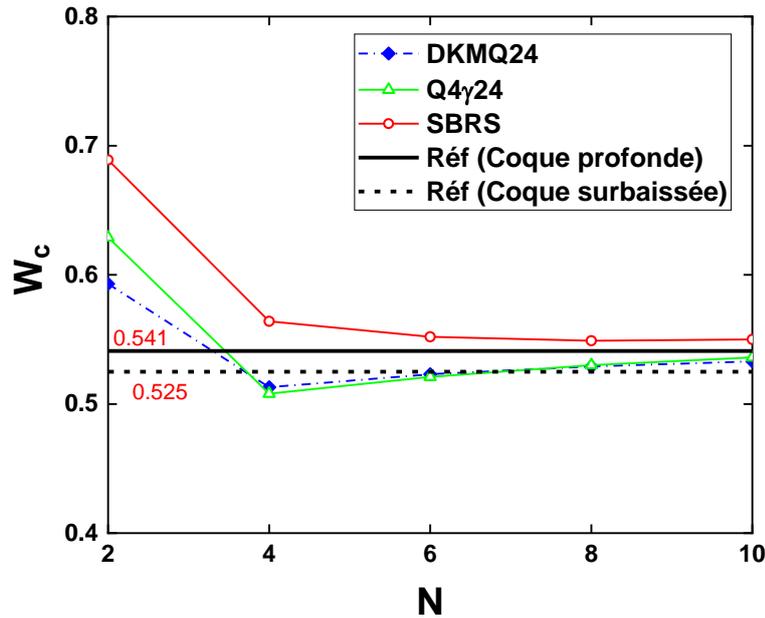


Figure 5.4. Convergence du déplacement vertical W_c du Panneau cylindrique soumis à son poids propre.

5.3.2 Cylindre pincé avec diaphragmes rigides

Le test présenté dans la figure 5.5 est celui d'un cylindre pincé soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées. Il repose à ses extrémités sur deux diaphragmes rigides dans leurs plans dont les données géométrique et mécanique sont présentées sur la figure 5.5. Par raison de symétrie, seul un huitième de la coque est discrétisé pour deux rapports d'épaisseur ($R/h=100$ et 10). Cet exemple est considéré comme un des tests les plus sévère pour la validation des éléments coques. Pour ($R/h=100$), une solution analytique (théorie de Kirchhoff) a été présentée en référence [158], tandis que pour ($R/h=10$), la solution analytique (théorie de Reissner-Mindlin) est présentée par Bhaskar and Varadan [159]. Les résultats numériques obtenus pour W_c et V_d sont comparés avec ceux des différents éléments **DKQ24**, **DKQM24**, **Q4γ24** [74, 149] (figures 5.6-5.8). Pour les deux cas ($R/h=100$ et 10), une convergence monotone des déplacements (W_c et V_d) vers les solutions analytiques est observée pour les éléments (**SBRS**, **DKQM24**, **Q4γ24**) sauf pour l'élément **DKQ24** pour $R/h=10$. On constate aussi que les deux éléments (**SBRS** et **Q4γ24**) se comportent de manière similaire.

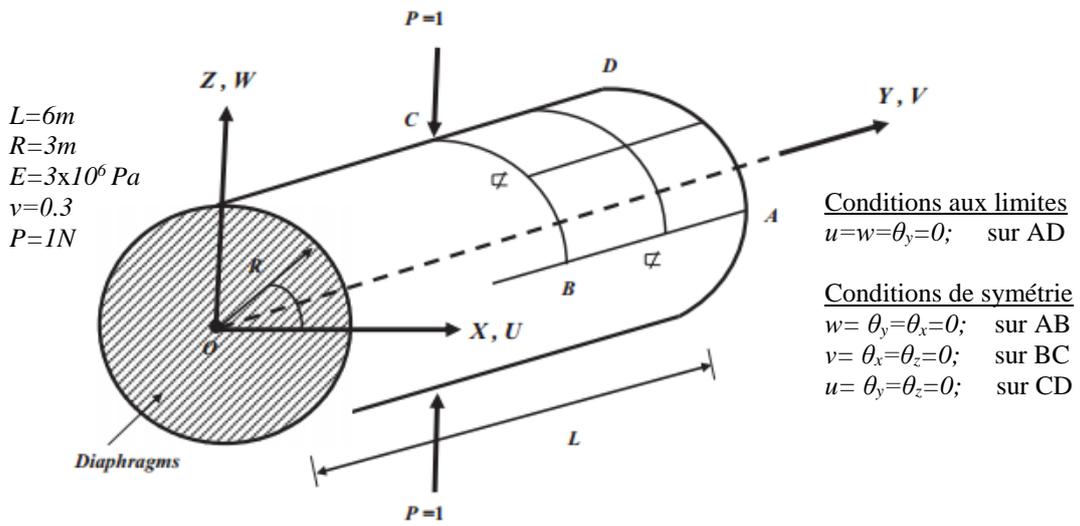


Figure 5.5. Cylindre pincé avec diaphragmes.

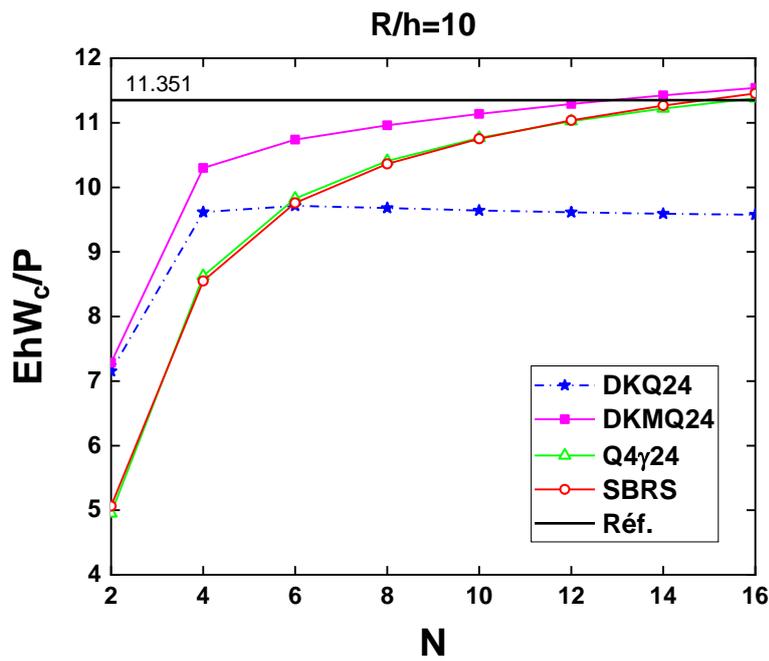


Figure 5.6. Convergence de W_C pour un cylindre pincé avec diaphragmes ($R/h=10$).

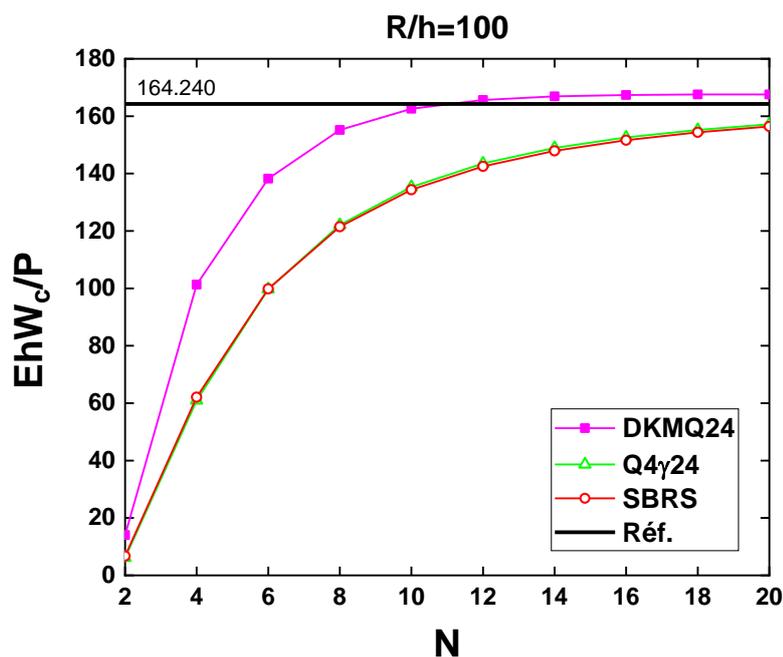


Figure 5.7. Convergence de W_c pour un cylindre pincé avec diaphragmes ($R/h=100$).

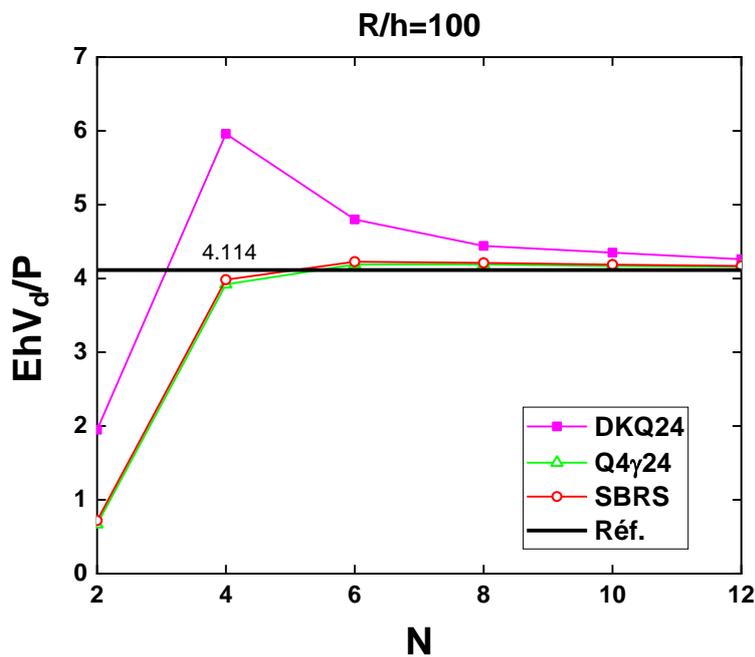


Figure 5.8. Convergence de V_d pour un cylindre pincé avec diaphragmes ($R/h=100$).

5.3.3 Cylindre pincé court à bord libre

Afin d'évaluer la performance de l'élément coque formulé de point de vue de convergence, un cylindre pincé soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées (figure 5.9). Deux épaisseurs sont considérées avec différents maillages et par raison de symétrie, seul un huitième du cylindre est considéré dont les données géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure 5.9. Les résultats du déplacement vertical au point C pour les deux cas ($R/h_1=53$ et $R/h_2=320$) sont illustrés dans les figures 5.10-5.11. Pour le cas ($R/h=320$), une solution analytique est de 0.02439 donnée dans la référence [160]. Par ailleurs, pour le cas ($R/h=53$), la solution utilisée est celle de référence (égale 0.1139) [161]. Nous remarquons que les résultats des deux éléments à champ de déformation convergent vers les solutions de référence avec différentes vitesses.

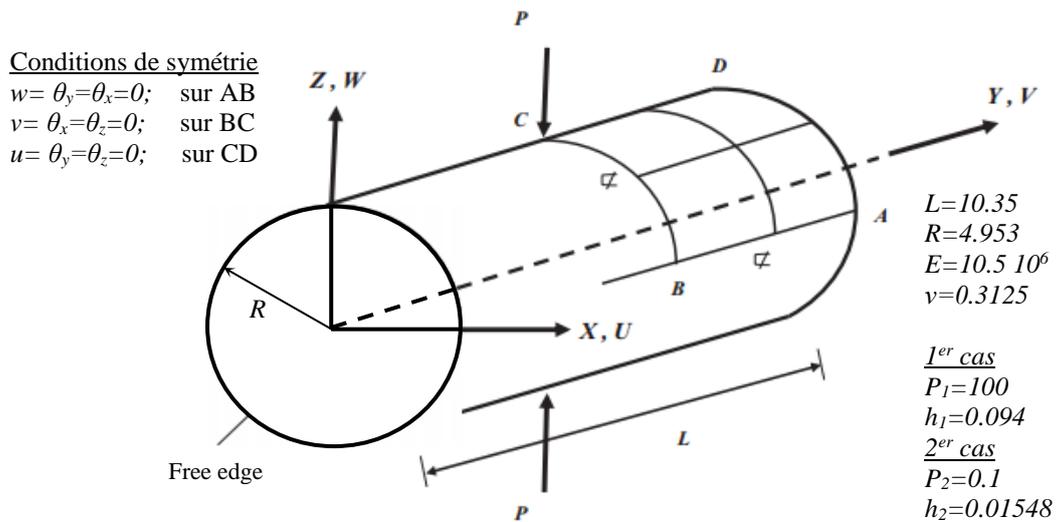


Figure 5.9. Cylindre pincé court à bords libres.

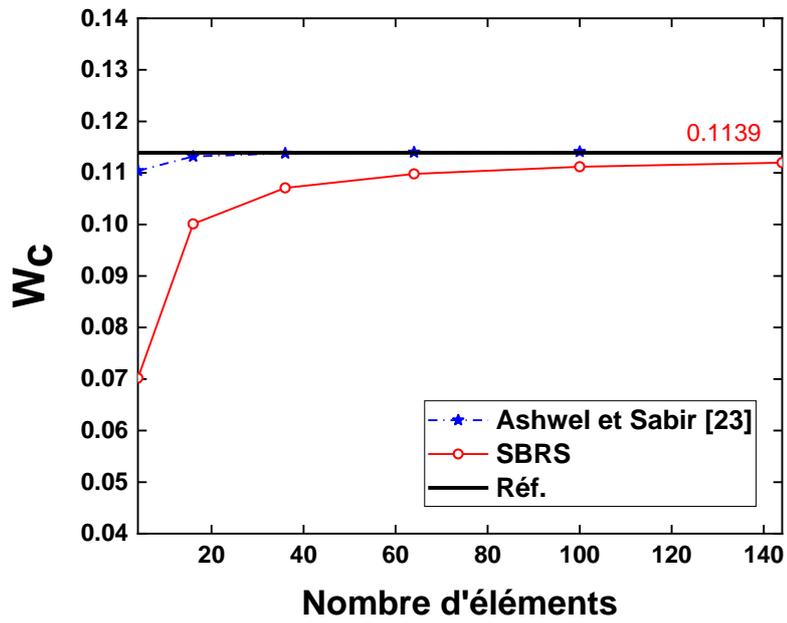


Figure 5.10. Convergence de W_C pour un cylindre pincé court à bords libres ($h=0.094$).

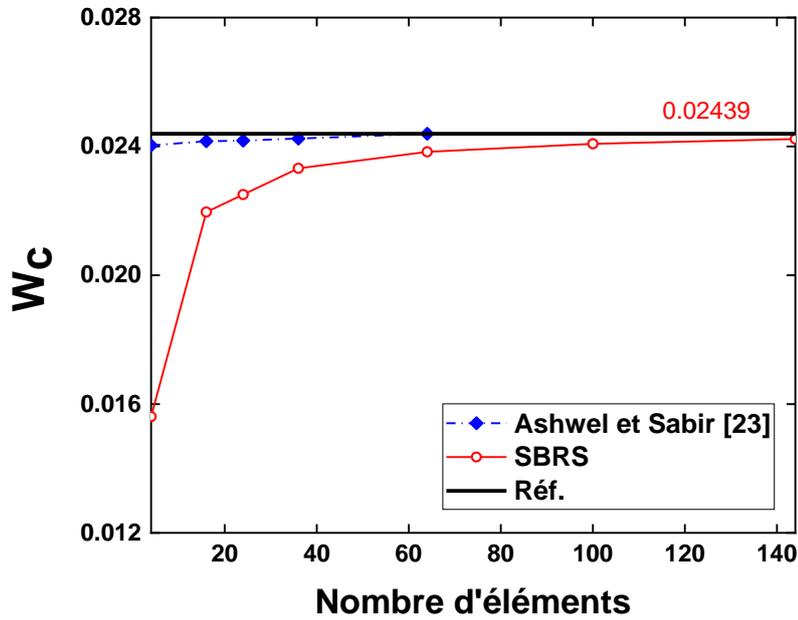


Figure 5.11. Convergence de W_C pour un cylindre pincé court à bords libres ($h=0.01548$).

5.3.4 Poutre console courbe soumise à des charges statiques

Une poutre console courbe mince soumise à des charges unitaires à son extrémité libre [162] est considérée. Les charges appliquées sont dans le plan (suivant z) et hors plan (suivant y).

La poutre est modélisée avec des éléments coques cylindriques à facettes planes pour un maillage 6x1 et les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure 5.12. Les résultats obtenus des déplacements suivant les directions des charges (tableau 5.1) sont comparés avec les solutions de référence [162].

- Pour un chargement dans le plan (suivant z), le présent élément donne d'excellent résultats comparons avec la solution de référence [162] et ces résultats sont mieux que l'élément présenté par SAP 2000 [162].
- Pour un chargement hors plan (suivant y), on observe que l'élément **SBRS** et celui de SAP 2000 se comportent de façon similaire et comparables avec la solution de référence [162].

Tableau 5.1. Déplacement à l'extrémité libre d'une poutre console courbe mince suivant les deux axes z et y .

Maillage	Charge	SBRS	SAP 2000 [162]	Solution exacte [162]
1x6	Dans le plan (axe z)	0.0864	0.0773	0.0886
	Hors plan (axe y)	0.4456	0.4535	0.5004

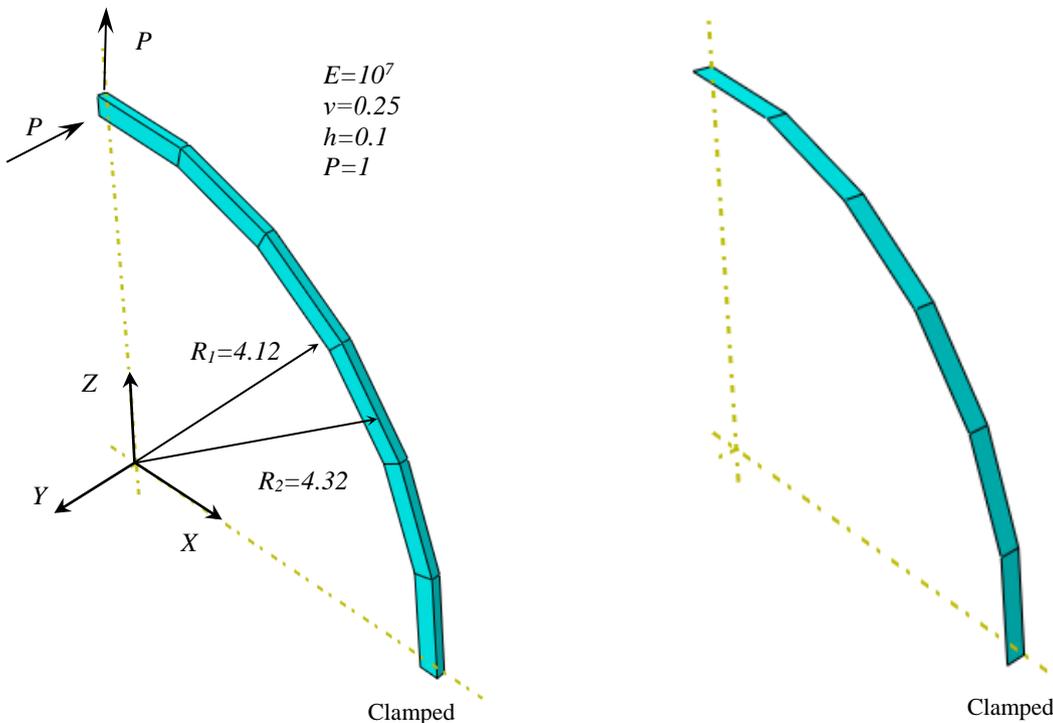


Figure 5.12. Poutre console circulaire mince modélisée avec (6x1) éléments.

3.1 Conclusion

Un élément fini rectangulaire à quatre nœuds nommé **SBRS** basé sur l'approche par facettes planes a été présenté pour l'analyse statique des coques cylindriques isotropes. L'élément formulé est obtenu par la superposition des éléments de membrane et de flexion type Mindlin qui sont basés tous les deux sur l'approche en déformation. Cet élément est simple à formuler et contient seulement les six degrés de liberté essentiels par nœud (U , V , W , θ_x , θ_y et θ_z). Les exemples numériques montrent que l'élément **SBRS** ne présente aucun blocage en CT et atteint une bonne précision par rapport aux quelques éléments de coque à facette plane existants.

Conclusion générale

Dans le présent travail, nous avons effectué un tour d'horizon de quelques éléments à champ de déformation existants dans la littérature de type membrane, plaque et, avec degré moindre, coque.

Au cours de cette étude, trois types d'éléments basé sur l'approche en déformation (membranaire, de plaque en flexion et de coque à facette plane) ont été formulés.

Nous avons essayé d'améliorer le comportement de membrane en proposant un élément quadrilatère avec rotation θ_z autour de la normale pour l'étude statique et en vibration libre des structures. Cet élément possède les quatre nœuds de coin et le nœud central dont ce dernier contient seulement les deux translations (U et V) tandis que les autres nœuds de coin ont la rotation dans le plan (Drilling) comme ddl additionnel (U, V et θ_z). La technique de condensation statique est utilisée pour l'élimination du cinquième nœud interne.

Les éléments plaques (**SBTMP**, **SBTP4** et **SBQP**) proposés sont basés sur la théorie de Reissner-Mindlin qui prend en considération l'effet du cisaillement transverse. L'élément triangulaire **SBTMP** (Strain Based Triangular Mindlin Plate) à trois nœuds avec trois degrés de liberté par nœud a été présenté pour l'analyse statique et en vibration libre de la flexion des plaques isotropes. Le champ de déformation imposé de l'élément **SBTMP** montre que les courbures (κ_x , κ_y et κ_{xy}) varient linéairement par contre les déformations du cisaillement transversale (γ_{xz} et γ_{yz}) sont constantes et indépendantes des courbures.

Par ailleurs, les deux éléments (**SBTP4** et **SBQP**) ont été présentés pour l'étude statique, en vibration libre et de flambement des plaques isotropes. L'élément triangulaire à quatre nœuds **SBTP4** (Strain Based Triangular Plate with four nodes) possède les trois degrés de liberté (W , β_x , et β_y) pour chacun des trois nœuds de coin et du nœud à mi-côte, tandis que l'élément quadrilatéral nommé **SBQP** (Strain Based Quadrilateral Plate) contient les mêmes degrés de liberté pour chacun des quatre nœuds de coin. Les deux éléments utilisent le même champ de déformation imposé dont les courbures (κ_x , κ_y et κ_{xy}) et les déformations du cisaillement transversal (γ_{xz} et γ_{yz}) sont découplées et varient tous (κ_x , κ_y , κ_{xy} , γ_{xz} et γ_{yz}) linéairement.

Les résultats numériques montrent que les éléments (**SBTMP**, **SBTP4** et **SBQP**) sont libres de blocage en CT, par conséquent, ils donnent d'excellents résultats pour les plaques minces quel

que soit l'élanement (L/h). Ces éléments passent le patch-test des modes rigides et le patch-test mécanique et permettent d'obtenir des résultats performants pour tous les exemples numériques de plaque.

D'autre part, la formulation d'un élément rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté ($u, v, w, \beta_x,$ et β_y) par nœud basée sur la théorie du premier ordre (FSDT) a été donnée pour l'étude statique et en vibration libre des plaques composites stratifiées. L'élément formulé, nommé **SBRLP** (Strain Based Rectangular Laminated Plate), est une combinaison d'un élément membranaire basé sur l'approche en déformation **SBRIE** [1] à deux ddl (u, v) par nœud et de l'élément flexionnel développé **SBQP** à trois ddl ($w, \beta_x,$ et β_y) par nœud.

Pour les coques, l'approche par facettes planes est retenue en superposant l'élément quadrilatère plaque Mindlin **SBQP** et l'élément membranaire **SBRIE** [1] pour formuler un élément coque cylindrique à champ de déformation **SBRS**. Cet élément, simple à formuler et qui contient seulement les six degrés de liberté essentiels par nœud ($U, V, W, \theta_x, \theta_y$ et θ_z) est destiné à l'analyse statique des coques cylindriques isotropes. Les exemples numériques montrent que l'élément **SBQS** ne présente aucun blocage en CT et montre une bonne précision par rapport aux autres éléments de coque à facette plane existants.

Références bibliographiques

- [1] A. B. Sabir, A new class of Finite Elements for plane elasticity problems, CAFEM 7th, International Conference of Structural Mechanics In Reactor Technology, Chicago. 1983.
- [2] A. B. Sabir, A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, Chapter 9 in Proceeding of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering, Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.
- [3] A. B. Sabir and H. Y. Salhi, A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, Res. mechanica, vol. 19, pp. 1-16, 1986.
- [4] M. T. Belarbi and A. Charif, Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan, Revue Européenne des Éléments finis, vol. 7, pp. 439- 458, 1998.
- [5] C. Bouzrira, A. B. Sabir, and Z. Nemouchi, A sector inplane finite element in polar coordinates with rotational degree of freedom, Archives of Civil Engineering, vol. 51 pp. 471-483, 2005.
- [6] A. Bouzriba and C. Bouzrira, Sector element for analysis of thick cylinders exposed to internal pressure and change of temperature, Gradevinar, vol. 67 pp. 547-555, 2015.
- [7] A. B. Sabir and A. Sfindji, Triangular and Rectangular Plane Elasticity Finite Elements. Thin-Walled Structures, vol. 21, pp. 225-232, 1995.
- [8] M. T. Belarbi and T. Maalam, On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, Revue Européenne de Génie Civil, vol. 14, pp. 985-997, 2005.
- [9] D. Hamadi, A. Ayoub and T. Maalem, A new strain-based finite element for plane elasticity problems, Engineering Computations, vol. 33, pp.562-579, 2016.
- [10] M. Himeur, A. Zergua and M. Guenfoud, A Finite Element Based on the Strain Approach Using Airy's Function, Arabian Journal for Science and Engineering, vol. 40, pp. 719–733, 2015.
- [11] M. T. Belarbi and M. Bourezane, On improved Sabir triangular element with drilling rotation, Revue Européenne de Génie Civil, vol. 9, pp. 1151-1175, 2005.
- [12] C. Rebiai and L. Belounar, A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis, Arch. Civ. Mech. Eng., vol. 13, pp. 72–81, 2013.

- [13] C. Rebiai and L. Belouar, An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach, *Measurement*, vol. 50, pp. 263–269, 2014.
- [14] C. Rebiai, Finite Element Analysis of 2-D Structures by New Strain Based Triangular Element, *Journal of Mechanics*, 2018, <https://doi.org/10.1017/jmech.2018.3>.
- [15] L. Belouar, Analyse du comportement des plaques par éléments finis -Eléments de plaque à champ de déformation-, Thèse de Doctorat d'état, Université de Biskra, 119 pages, 2005.
- [16] L. Belouar and M. Guenfoud, A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin-Walled Structures*, vol. 43, pp. 47–63, 2005.
- [17] M. Himeur, A. Benmarce and M. Guenfoud, A new finite element based on the strain approach with transverse shear effect, *Structural Engineering Mechanics*, vol. 49, pp. 793–810, 2014.
- [18] M. Himeur and M. Guenfoud, Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach, *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 20, pp. 455-485, 2011.
- [19] M. T. Belarbi and A. Charif, Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, *Revue européenne des éléments finis*, vol. 8, pp. 135–57, 1999.
- [20] L. Belouar and K. Guerraiche, A new strain based brick element for plate bending, *Alexandria Engineering Journal*, vol. 53, pp. 95–105, 2014.
- [21] K. Guerraiche, L. Belouar and L. Bouzidi, A new eight nodes brick finite element based on the strain approach, *Journal of Solid Mechanics*, vol. 10, pp. 186–199, 2018.
- [22] A. Messai, L. Belouar and T. Merzouki, Static and free vibration of plates with a strain based brick element, 2019, DOI: 10.1080/17797179.2018.1560845.
- [23] D.G. Ashwell and A. B. Sabir, A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, *International Journal of Mechanical Sciences* vol. 14, pp. 171-183, 1972.
- [24] A. B. Sabir, Strain based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 76, pp. 111-120, 1983.
- [25] A. B. Sabir, A. Sfindji and T. G. Hughes, Strain-Based Finite Element for the Natural Frequencies of Cylindrical Shells, *Thin-Walled Structures*, vol. 18, pp. 67-82, 1994.
- [26] M. Bourezane, An Efficient Strain Based Cylindrical Shell Finite Element *Journal of Solid Mechanics*, vol. 9, pp. 632-649, 2017.

- [27] M.S. Djoudi and H. Bahai, A shallow shell finite element for the linear and non-linear analysis of cylindrical shells, *Engineering Structures*, vol. 25, pp. 769–778, 2003.
- [28] M. S. Djoudi and H. Bahai, A cylindrical strain-based shell element for vibration analysis of shell structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, pp. 1947–1961, 2004.
- [29] M. S. Djoudi and H. Bahai, Strain-based finite element for vibration of cylindrical panels with openings, *Thin-Walled Structures*, vol. 42, pp. 575–588, 2004.
- [30] H. Guenfoud, M. Himeur, H. Ziou and M. Guenfoud, A consistent triangular thin flat shell finite element with drilling rotation based on the strain approach, *Int. J. Structural Engineering*, vol. 9, pp.191–223, 2018.
- [31] J. L. Batoz and G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis. Poutres et Plaques*, vol. 2. Hermes, 1990.
- [32] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*, 2nd edition, CRC Press, New York, 2004.
- [33] H. Nguyen-Van, *Development and application of assumed strain smoothing finite element technique for composite plate/shell structures*, Doctor of Philosophy, University of Southern Queensland, 261 pages, 2009.
- [34] D. J. Allman, A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Comput Struct*, vol. 19, pp. 1–8, 1984.
- [35] P. G. Bergan and C. A. Felippa, A triangular membrane element with rotational degrees of freedom, *Comput Meth Appl Mech Eng*, vol. 50, pp. 25–69, 1985.
- [36] R. D. Cook, On the Allman triangle and a related quadrilateral element, *Comput Struct*, vol. 22, pp. 1065–1067, 1986.
- [37] R. D. Cook, A plane hybrid element with rotational d.o.f. and adjustable stiffness, *Int J Numer Meth Eng*, vol. 24, pp. 1499–1508, 1987.
- [38] R. H. MacNeal and R. L. Harder, A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom, *Comput Struct*, vol. 28, pp. 75–84, 1988.
- [39] D. J. Allman, A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Int J Numer Meth Eng*, vol. 26, pp. 717–730, 1988.
- [40] T. J. R. Hughes and F. Brezzi, On drilling degrees of freedom, *Comput Meth Appl Mech Eng*, vol. 72, pp. 105–121, 1989.
- [41] A. Ibrahimbegovic, R. L. Taylor and E. L. Wilson, A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom, *Int J Numer Meth Eng*, vol. 30, pp. 445–457, 1990.

- [42] S. N. Atluri, On some new general and complementary energy theorems for the rate problems in finite strain, classical elastoplasticity, *J Struct Mech*, vol. 8, pp. 61–92, 1980.
- [43] M. Iura and S. N. Atluri, Formulation of a membrane finite element with drilling degrees of freedom, *Comput Mech*, vol. 9, pp. 417–428, 1992.
- [44] A. Cazzani and S. N. Atluri, Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes, *Comput Mech*, vol. 11, pp. 229–251, 1993.
- [45] Y. Long and Y. Xu, Generalized conforming quadrilateral membrane element with vertex rigid rotational freedom, *Comput Struct*, vol. 52 pp. 749–755, 1994.
- [46] Y. Long and Y. Xu, Generalized conforming triangular membrane element with vertex rigid rotational freedoms, *Finite Elem Anal Des*, vol. 17, pp. 259–271, 1994.
- [47] R. Piltner and R. L. Taylor, Triangular finite elements with rotational degrees of freedom and enhanced strain modes, *Comput Struct*, vol. 75, pp. 361–368, 2000.
- [48] A. A. Groenwold, Q. Z. Xiao and N. J. Theron, Accurate solution of traction free boundaries using hybrid stress membrane elements with drilling degrees of freedom, *Comput Struct*, vol. 82, pp. 2071–2081, 2004.
- [49] S. Kugler, P. A. Fotiu and J. Murin, A highly efficient membrane finite element with drilling degrees of freedom, *Acta Mech*, vol. 213, pp. 323–348, 2010.
- [50] S. Cen, M. J. Zhou and X. R. Fu, A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions, *Comput Struct*, vol. 89, pp. 517–528, 2011.
- [51] M. Rezaiee-Pajand and M. Karkon, An effective membrane element based on analytical solution, *Euro J Mech-A/Solids*, vol. 39, pp. 268–279, 2013.
- [52] W. Zouari, F. Hammadi and R. Ayad, Quadrilateral membrane finite elements with rotational DOFs for the analysis of geometrically linear and nonlinear plane problems, *Computers and Structures*, vol. 173, pp. 139–149, 2016.
- [53] R. D. Cook, Improved two-dimensional finite element, *Journal of the Structural Division*, vol. 100, pp. 1851–1863, 1974.
- [54] Y. S. Choo, N. Choi and B. C. Lee, Quadrilateral and triangular plane elements with rotational degrees of freedom based on the hybrid Trefftz method, *Finite Elem Anal Des*, vol. 42, pp. 1002–1008, 2006.
- [55] R. Piltner and R. L. Taylor, A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes. *Int J Numer Meth Eng*, vol. 38, pp. 1783–1808, 1995.

- [56] J. Jirousek and A. Venkatesh, Hybrid Trefftz plane elasticity elements with p-method capabilities, *Int J Numer Meth Eng*, vol. 35, pp. 1443–1472, 1992.
- [57] R. Ayad, Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne (UTC), France, 1993.
- [58] R. H. MacNeal and R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elements Anal Des*, vol. 1, pp. 3–20, 1985.
- [59] S. Cen, X. M. Chen and X. R. Fu, Quadrilateral membrane element family formulated by the quadrilateral area coordinate method, *Comput Meth Appl Mech Eng*, vol. 196, pp. 4337–4353, 2007.
- [60] M. Petyt, Introduction to finite element vibration analysis, New York, Cambridge University Press, 1990.
- [61] J. B. Carr, The effect of shear flexibility and rotatory inertia on the natural frequencies of uniform beams, *Aeronaut Quart*, vol. 21, pp. 79–90, 1970.
- [62] K.Y. Dai and G.R. Liu, Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SFEM), *Journal of Sound and Vibration*, vol. 301, pp. 803–820, 2007.
- [63] C. A. Brebbia, J. C. Telles and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer, Berlin, 1984.
- [64] Y. K. Cheung, Y. X. Zhang and W. J. Chen, A refined nonconforming plane quadrilateral element, *Computers and Structures*, vol. 78, pp. 699–709, 2000.
- [65] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, London, 1959.
- [66] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech. ASME*, vol. 12, pp. 66–77, 1945.
- [67] R. D. Mindlin, Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, *J. Appl. Mech. ASME*, vol. 18, pp. 31–5, 1951.
- [68] F. Yuan and R. E. Miller, A rectangular finite element for moderately thick flat plates, *Comput. Struct.*, vol. 30, pp. 1375–1387, 1988.
- [69] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The finite element method*, McGraw-Hill, New York, vol. 1, 1989, vol. 2, 1991.
- [70] A. Ibrahimbergovic, Quadrilateral finite elements for analysis of thick and thin plates, *Comp. Meth. Appl. Eng.*, vol. 110, pp. 195–209, 1993.

- [71] E. Onate, F. Zarate and F. Flores, A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 37, pp. 2569–2582, 1994.
- [72] F. S. Jin and Q. H. Qin, A variational principle and hybrid Trefftz finite element for the analysis of Reissner plates, *Comput. Struct.*, vol. 56, pp. 697–701, 1995.
- [73] J. Jirousek, A. Wroblewski, Q. H. Qin and X. Q. He, A family of quadrilateral hybrid-Trefftz p-elements for thick plate analysis, *Comput. Meth. Appl. Eng.*, vol. 127, pp. 315–344 1995.
- [74] I. Katili, J. L. Batoz, I. J. Maknun, A. Hamdouni and O. Millet, The development of DKMQ plate bending element for thick to thin shell analysis based on the Naghdi/Reissner/Mindlin shell theory, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 100, pp. 12–27, 2015.
- [75] L. S. D. Morley, *Skew Plates and Structures*, Pergamon Press, Oxford, 1963.
- [76] I. Katili, A new discrete Kirchhoff–Mindlin element based on Mindlin–Reissner plate theory and assumed shear strain fields – part II: An extended DKQ element for thick plate bending analysis, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 36, pp. 1885–1908, 1993.
- [77] D. Sengupta, Performance study of a simple finite element in the analysis of skew rhombic plates, *Comput. Struct.* vol. 54, pp. 1173–1182, 1995.
- [78] D. Sengupta, Stress analysis of flat plates with shear using explicit stiffness matrix, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 32, pp. 1389–1409, 1991.
- [79] O. C. Zienkiewicz and D. Lefebvre, A robust triangular plate bending element of the Reissner-Mindlin type, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 26, pp. 1169–1184, 1988.
- [80] T. S. Butalia, T. Kant and V. D. Dixt, Performance of heterosis element for bending of skew rhombic plates, *Comput. Struct.*, vol. 34, pp. 23–49, 1990.
- [81] K. T. S. R. Iyengar and R. S. Srinivasan, Clamped skew plate under uniform normal loading, *J. R. Aeronaut. Soc.*, vol. 71, pp. 139–140, 1967.
- [82] C. K. Ramesh, V. D. Dixit and R. M. Belkune, Analysis of skew slab-beam system by finite element method, *J. Inst. Ennrs. India*, vol. 53, pp. 233–239, 1973.
- [83] J. L. Batoz and I. Katili, On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 35, pp. 1603–1632, 1992.
- [84] I. Katili, A new discrete Kirchhoff–Mindlin element based on Mindlin–Reissner plate theory and assumed shear strain fields – part I: an extended DKT element for thick-plate bending analysis, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 36, pp. 1859–1883, 1993.

- [85] D. J. Dawe and O. L. Roufaeil, Rayleigh–Ritz vibration analysis of Mindlin plates, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 69, pp. 345–359, 1980.
- [86] K. M. Liew, J. Wang, T. Y. Ng and M. J. Tan, Free vibration and buckling analyses of shear deformable plates based on FSDT meshfree method, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 276, pp. 997–1017, 2004.
- [87] B. S. Al. Janabi, E. Hinton and D. J. Vuksanovic, Free vibrations of Mindlin plates using the finite element method: Part 1 Square plates with various edge conditions, *Engineering Computations*, vol. 6, pp. 90–96, 1989.
- [88] K. S. Woo, C. H. Hong, P. K. Basu and C. G. Seo, Free vibration of skew Mindlin plates by p-version of FEM, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 268, pp. 637–656, 2003.
- [89] K. M. Liew, Y. Xiang, S. Kitipornchai and C. M. Wang, Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 168, pp. 39–69, 1993.
- [90] K. K. Raju and E. Hinton, Natural frequencies and modes of rhombic Mindlin plates, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 8, pp. 55–62, 1980.
- [91] C. S. Huang, O. G. McGee, A. W. Leissa and J. W. Kim, Accurate vibration analysis of simply supported rhombic plates by considering stress singularities, *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 117, pp. 245–251, 1995.
- [92] X. Zhao, Y. Y. Lee and K. M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319, pp. 918–939, 2009.
- [93] T. Irie, G. Yamada and S. Aomura, Natural frequencies of Mindlin circular plates, *Journal of Applied Mechanics TASME*, vol. 47, pp. 652–655, 1980.
- [94] S. H. Hosseini-Hashemi, M. Es’haghi, H. Rokni Damavandi Taher and M. Fadaie, Exact closed-form frequency equations for thick circular plates using a third-order shear deformation theory, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, pp. 3382–3396, 2010.
- [95] J. Mackerle, Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements: a bibliography (1992–1995), *Engineering Computations*, vol. 14, pp. 347–440, 1997.
- [96] J. Mackerle, Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements: a bibliography (1999–2002), *Engineering Computations*, vol. 19, pp. 520–594, 2002.
- [97] A. W. Leissa, *Vibration of Plates: NASA, SP-160, Washington DC, 1969.*

- [98] A. W. Leissa, Plate vibration research: 1981–1985: classical theory, *The Shock and Vibration Digest*, vol. 19, pp. 11–18, 1987.
- [99] K. M. Liew, Y. Xiang and S. Kitipornchai, Research on thick plate vibration: a literature survey, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 180, pp. 163–176, 1995.
- [100] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too, Reduced integration technique in general analysis of plates and shells Simple and efficient element for plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, pp. 275–290, 1971.
- [101] T. J. R. Hughes, M. Cohen and M. Haroun, Reduced and selective integration techniques in finite element method of plates, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 46, pp. 203–222, 1978.
- [102] D. S. Malkus and T. J. R. Hughes, Mixed finite element methods-Reduced and selective integration techniques: A unification of concepts, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 15, pp. 63–81, 1978.
- [103] S. W. Lee and C. Wong, Mixed formulation finite elements for Mindlin theory plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, pp. 1297–1311, 1982.
- [104] R. Ayad, G. Dhatt and J. L. Batoz, A new hybrid-mixed variational approach for Reissner–Mindlin plate. the MiSP model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 42, pp. 1149–1179, 1998.
- [105] C. Lovadina, Analysis of a mixed finite element method for the Reissner–Mindlin plate problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 163, pp. 71–85, 1998.
- [106] J. M. A. César de Sá and R. M. Natal Jorge, New enhanced strain elements for incompatible problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, pp. 229–248, 1999.
- [107] J. M. A. César de Sá, R. M. Natal Jorge, R. A. Fontes Valente and P. M. A. Areias, Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, pp. 1721–1750, 2002.
- [108] R. P. R. Cardoso, J. W. Yoon, M. Mahardika, S. Choudhry, R. J. Alves de Sousa and R. A. Fontes Valente, Enhanced assumed strain (EAS) and assumed natural strain (ANS) methods for one-point quadrature solid-shell elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75, pp. 156–187, 2008.

- [109] R. H. MacNeal, Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distribution, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 70, pp. 3–12, 1982.
- [110] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin, A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, pp. 367–383, 1985.
- [111] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin, A formulation of general shell elements, the use of mixed interpolation of tensorial components, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, pp. 697–722, 1986.
- [112] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Papadopoulos and E. Onate, Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements, *Computers and Structures*, vol. 35, pp. 505–522, 1990.
- [113] K. U. Bletzinger, M. Bischoff and Ramm E., A unified approach for shear-locking free triangular and rectangular shell finite elements, *Computers and Structures*, vol. 75, pp. 321–334, 2000.
- [114] H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, S. Bordas and J. F. Debonnie, A smoothed finite element method for plate analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 1184–1203, 2008.
- [115] G. R. Liu and T. Nguyen-Thoi, *Smoothed finite element methods*: London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [116] A. Belouar, S. Benmebarek and L. Belouar, Strain based triangular finite element for plate bending analysis, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2018. doi: 10.1080/15376494.2018.1488310.
- [117] R. L. Taylor and F. Auricchio, Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate element: Part II-A simple triangle, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 3057–3066, 1993.
- [118] A. Razzaque, Program for triangular bending elements with derivative smoothing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 6, pp. 333–343, 1973.
- [119] W. J. Chen and Y. K. Cheung, Refined quadrilateral element based on Mindlin/Reissner plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, pp. 605–627, 2000.
- [120] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan and C. Thai-Hoang, A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration

- analyses of Reissner Mindlin plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, pp. 705–741, 2012.
- [121] F. Abbassian, D. J. Dawswell and N. C. Knowles, *Free vibration benchmarks: Atkins Engineering Sciences: Glasgow, Softback*, 1987.
- [122] W. Karunasena, K. M. Liew and F. G. A. Al-Bermani, Natural frequencies of thick arbitrary quadrilateral plates using the pb-2 Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 196, pp. 371–385, 1996.
- [123] S. J. Lee, Free vibration analysis of plates by using a four-node finite element formulated with assumed natural transverse shear strain, *J. Sound Vib.*, vol. 278, pp. 657–684, 2004.
- [124] W. Karunasena, S. Kitipornchai and F. G. A. Al-bermani, Free vibration of cantilevered arbitrary triangular mindlin plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 38, 431–442, 1996.
- [125] S. J. Guo, A. j. Keane and M. Mosherefi-Torbati, Vibration analysis of stepped thickness plates, *J. Sound Vib*, vol. 204, pp. 645–657, 1997.
- [126] M. Boscolo and J. R. Banerjee, Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory, *Comput. Struct*, vol. 89, pp. 395–410, 2011.
- [127] G. Aksu and R. Ali, Determination of dynamic characteristics of rectangular plates with cutouts using a finite difference formulation, *J. Sound Vib*, vol. 44, pp. 147–158, 1976.
- [128] K. Y. Lam, K. C. Hung and S. T. Chow, Vibration Analysis of Plates with Cutouts by the Modified Rayleigh-Ritz Method. *Appl. Acoust.*, vol. 28, pp. 49–60, 1989.
- [129] K. M. Liew, S. Kitipornchai, A. Y. T. Leung and C. W. Lim, Analysis of the free vibration of rectangular plates with central cut-outs using the discrete Ritz method, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 45, pp. 941–959, 2003.
- [130] K. Kalita and S. Haldar, Free vibration analysis of rectangular plates with central cutout, *Cogent Eng.*, vol. 3, pp. 1–12, 2016.
- [131] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability: New York: McGraw-Hill*, third ed, 1970.
- [132] H. Nguyen-Xuan, G. R. Liu, C. Thai-Hoang and T. Nguyen-Thoi, An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 471–489, 2010.

- [133] H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, N. Nguyen-Thanh, T. Nguyen-Thoi and S. Bordas, A node-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates, *Computational Mechanics*, vol. 46, pp. 679–701, 2010.
- [134] L. G. Tham and H. Y. Szeto, Buckling analysis of arbitrary shaped plates by spline finite strip method, *Computers and Structures*, vol. 36, pp. 729–735, 1990.
- [135] Z. Vrcelj and M. A. Bradford, A simple method for the inclusion of external and internal supports in the spline finite strip method (SFSM) of buckling analysis, *Computers and Structures*, vol. 86, pp. 529–544, 2008.
- [136] K. M. Liew and X. L. Chen, Buckling of rectangular Mindlin plates subjected to partial in-plane edge loads using the radial point interpolation method, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 1677–1695, 2004.
- [137] S. Srinivas and A. K. Rao, Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 6, pp. 1463–148, 1970.
- [138] A. J. M. Ferreira, *Matlab Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*. Springer: London, 2008.
- [139] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque and P. A. L. S. Martins, Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method, *Compos: Part B*, vol. 34, pp. 627–36, 2003.
- [140] A. J. M. Ferreira, A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates, *Compos. Struct*, vol. 59, pp. 385–92, 2003.
- [141] A. J. M. Ferreira, G. E. Fasshauer, R. C. Batra and J. D. Rodrigues, Static deformations and vibration analysis of composite and sandwich plates using a layerwise theory and RBF-PS discretizations with optimal shape parameter, *Composite Structures*, vol. 86, pp. 328–343, 2008.
- [142] H. H. Phan-Dao, H. Nguyen-Xuan, C. Thai-Hoang and T. Nguyen-Thoi, An edge-based smoothed finite element method for analysis of laminated composite plates, *International Journal of Computational Methods*, vol. 10, pp. 1340005 (27 pages), 2013.
- [143] K. M. Liew. Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the P-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, pp. 343–360, 1996.
- [144] A. K. Noor, Free vibrations of multilayered composite plates, *AIAA Journal*, vol. 11 pp. 1038–1039, 1973.

- [145] M. Marjanovic, D. Vuksanovic, Layerwise solution of free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates with embedded delaminations, *Composite Structures*, vol. 108, pp. 9-20, 2014.
- [146] A. K. Nayaka, S. S. J. Moyb and R. A. Shenoia, Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory, *Composites Part B: Engineering*, vol. 33, pp. 505-519, 2002.
- [147] J. N. Reddy, *Theory and analysis of elastic plates and shells*. New York: CRC Press: Taylor and Francis Group, 2006.
- [148] K. J. Bathe, *Finite element procedures*. New Jersey: Prentice-Hall; 1996.
- [149] J. L. Batoz and G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*. Coques, vol. 3. Hermes, 1990.
- [150] T. Y. Henry Yang, S. Saigal, A. Masud and R. K. Kapania, A survey of recent shell finite elements. *Int J Num Methods Eng*, vol. 47, pp. 101–27, 2000.
- [151] F. G. Flores and C. F. Estrada, A rotation-free thin shell quadrilateral, *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 196, pp. 2631-2646, 2007.
- [152] P. M. A. Areias, J. H. Song and T. Belytschko, A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff-Love constraints, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 64, pp. 1166–1206, 2005.
- [153] N. Nguyen-Thanh, Timon Rabczuk, H. Nguyen-Xuan and Stéphane P.A. Bordas, A smoothed finite element method for shell analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, pp. 165-177, 2008.
- [154] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, C. Thai-Hoang and H. Nguyen-Xuan, A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3) using triangular elements for static and free vibration analyses of shell structures, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 74, pp. 32-45, 2013.
- [155] K. U. Bletzinger, M. Bischoff, E. Ramm, A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements, *Comput. Struct*, vol. 75, pp. 321-334, 2000.
- [156] S. Guzey, H. K. Stolarski, B. Cockburn and K. K. Tamma, Design and development of a discontinuous Galerkin method for shells, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 195 pp. 3528–3548, 2006.
- [157] A. C. Scordelis and K. S. Lo, Computer analysis of cylindrical shells, *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 61, pp. 539–562, 1969.

- [158] G. M. Lindberg, M. D. Olson and G. R. Cowper, New developments in finite element analysis of shells. Quarterly Bulletin of the Division of Mechanical Engineering and the National Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada, vol. 4, 1969.
- [159] K. Bhaskar and T. K. Varadan, Analytical solution for a pinched laminated cylinder, J. Appl. Mech. (ASME), vol. 57, pp. 1082–1083, 1990.
- [160] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd edn. McGraw-Hill, New York (1959).
- [161] G. Cantin and R. W. Clough, A curved cylindrical-shell finite element, AIAA Journal, vol. 6, pp. 1057-1062, 1968.
- [162] Manuel SAP 2000 Version 9.
- [163] A. Belounar, S. Benmebarek, M.N. Houhou and L. Belounar, Static, free vibration, and buckling analysis of plates using strain-based Reissner–Mindlin elements, International Journal of Advanced Structural Engineering, vol. 11, pp. 211-230, 2019.

Annexe

✓ La matrice de transformation [C] (9x9) de l'élément **SBTMP** est donnée comme suit :

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Où la matrice [C_i] (3x9) avec les coordonnées (x_i, y_i) du nœud i (i=1,2,3) est :

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\left(\frac{x_i^2 y_i}{2} + \frac{x_i y_i^2}{2}\right) & -\frac{y_i^2}{2} & -\frac{x_i y_i}{2} & \frac{x_i}{2} & \frac{y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_i & \left(x_i y_i + \frac{y_i^2}{2}\right) & 0 & \frac{y_i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(x_i y_i + \frac{x_i^2}{2}\right) & y_i & \frac{x_i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

✓ Les matrices [Q] et [P] sont données respectivement comme suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x+y) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{x y^2}{2}\right) & -\frac{y^2}{2} & -\frac{xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) & 0 & \frac{y}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(xy + \frac{x^2}{2}\right) & y & \frac{x}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (A.4)$$