

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie civil et hydraulique  
Ref : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية والري  
المرجع:.....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat en sciences en : Génie civil**  
Spécialité (Option) : Structure

**Intitulé**  
**Contribution de l'approche en déformation dans  
l'analyse statique et dynamique des structures**

Présentée par :  
**MESSAI Abderraouf**

Soutenu publiquement le 11/07/2019

**Devant le jury composé de :**

Pr. Benmebarek Sadok	Professeur	Président	Université de Biskra
Pr. Belounar Lamine	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. Merzouki Tarek	Maitre de Conférences	Co-rapporteur	Université de Versailles Saint- Quentin-en-Yvelines (France)
Pr. Tati Abdelouahab	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Pr. Maalem Toufik	Professeur	Examineur	Université de Batna 2
Dr. Guerraiche Khelifa	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Batna 2

# إهداء

إلى الذي أحاطني بالرعاية والعناية لأرتقي علما وعملا

إلى الذي غاب عن الدنيا جسده وبقي في القلب أثره ... إلى والدي الغالي فرحات

إلى روح الزهرة التي قطفت وظل عبيرها يفوح في كل حين ... أختي الغالية صونية

إلى أولادها الأعزاء

إلى التي أفاضت علينا من حنانها أنهارا ووديانا وكانت دعواتها الدائمة لنا أنيسا وسراجا... والدتي

الكريمة حفظها الله

إلى زوجتي الغالية

إلى بناتي فلذات أكبادي : آلاء، رزان، بيان، تولين وإيلاف

إلى أختي الحنون هدى وأولادها

إلى توائم روحي إخوتي وأولادهم

إلى كل أحبتي وأصدقائي ...

# REMERCIEMENTS

Il est l'heure pour moi de remercier tous ceux qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse, que ce soit les collègues de travail, la famille ou les amis. Tout d'abord, j'exprime mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, **Monsieur Lamine BELOUNAR**, Professeur à l'Université de Biskra, et mon co-directeur de thèse, **Monsieur Tarek MERZOUKI**, Maître de conférences à l'université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines (France), qui ont dirigé la réalisation de cette thèse avec grande patience et bonne humeur. Je leur en suis très reconnaissant pour leur motivation et leur enthousiasme.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- **Monsieur Sadok BENMEBAREK**, Professeur à l'Université de Biskra, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré de présider le jury.
- **Monsieur Abdelouahab TATI**, Professeur à l'Université de Biskra, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail et je lui en suis profondément reconnaissant.
- **Monsieur Toufik MAALEM**, Professeur à l'Université de Batna2, qui a accepté d'être examinateur. Je le remercie très sincèrement.
- **Monsieur Khelifa GUERRAICHE**, Maître de conférences à l'Université de Djelfa, qui a accepté lui aussi d'examiner cette thèse. Je tiens à le remercier pour son extrême gentillesse.

J'adresse également mes remerciements aux membres du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes de Versailles (LISV) pour leur accueil et leur sympathie.

Je tiens aussi à remercier en particulier mon ami **FORTAS Lahcene**.

# TABLE DES MATIERES

---

RESUME	i
ABSTRACT	ii
ملخص	iii
NOTATION	iv
LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	vii

## INTRODUCTION GENERALE

1) Préambule	2
2) Problématique	4
3) Objectifs de la thèse	4
4) Plan de la thèse	5

## CHAPTER 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1) Introduction	7
2) Théorie de la flexion des plaques	8
3) Aperçu historique de l'approche en déformation	13
4) Synthèse d'éléments finis tridimensionnels (3D) formulés par d'autres approches	16
Conclusion	18

## Chapitre 2 : FORMULATION D'UN NOUVEL ELEMENT FINI 3D A 9 NOEUDS

1) Introduction	20
2) Considérations théoriques	20
3) Formulation de l'élément développé SBBNN	22
Conclusion	26

## CHAPITRE 3: IMPLEMENTATION ET VALIDATION NUMERIQUE DE L'ELEMENT DEVELOPPE EN STATIQUE ET EN VIBRATION LIBRE

1) Introduction	28
2) Présentation d'ABAQUS	28
Les user subroutines dans ABAQUS	30
Éléments définis par l'utilisateur dans les ABAQUS	30
3) Validation numérique	32
3.1 Validation numérique en statique	33

3.1.1	Test de la poutre élancée de MacNeal	33
3.1.2	Test d'incompressibilité	34
3.1.3	Poutre consol soumise à une charge de flexion plane	35
3.1.4	Plaque carré simplement supporté soumise à une charge concentrée	36
3.1.5	Tests de convergence pour les plaques circulaires	37
3.1.6	Test de sensibilité à l'élancement (L/h)	38
3.1.7	Tests des poutres de Cheung et Chen	39
<b>3.2</b>	<b><i>Validation numérique en vibration libre</i></b>	<b>41</b>
3.2.1	Vibrations de flexion hors du plan d'une poutre élastique isotrope rectangulaire	41
3.2.2	Vibrations transversales d'une plaque rectangulaire mince simplement appuyée	42
3.2.3	Vibrations transversales d'une plaque carrée épaisse	43
3.2.4	Vibration libre des plaques circulaires uniformes	44
	<b>Conclusion</b>	<b>45</b>
 <b>CHAPITRE 4: APPLICATION SUR LES ALLIAGE A MEMOIRE DE FORME</b> 		
<b>1)</b>	<b>Introduction</b>	<b>47</b>
<b>2)</b>	<b>Alliages à mémoire de forme - Une brève histoire</b>	<b>47</b>
<b>3)</b>	<b>Description du comportement des alliages à mémoire de forme (AMF)</b>	<b>49</b>
<b>4)</b>	<b>Propriétés pseudo-élastiques des alliages NiTi</b>	<b>52</b>
	<i>a. La superélasticité</i>	52
	<i>b. L'effet mémoire de forme simple sens</i>	53
	<i>c. L'effet mémoire de forme double sens</i>	55
	<i>d. Effet caoutchoutique</i>	55
<b>5)</b>	<b>Modélisation du comportement thermomécanique des AMF</b>	<b>56</b>
	<i>a. Modèles micromécaniques</i>	56
	<i>b. Modèles phénoménologiques</i>	57
<b>6)</b>	<b>Formulation de l'élément brick à champ de déformation utilisé SBB</b>	<b>61</b>
<b>7)</b>	<b>Application numérique</b>	<b>64</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>68</b>
	<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	<b>69</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>72</b>
	<b>ANNEXE</b>	<b>82</b>

## RESUME

Ce travail de thèse concerne le développement d'un nouvel élément fini brique basé sur l'approche en déformation avec neuf nœuds (huit nœuds de coin et un nœud au centre) ayant trois degrés de liberté essentiels (U, V et W) à chaque nœud. L'élément nommé SBBNN (Strain Based Brick Nine Nodes) est proposé pour enrichir la bibliothèque d'éléments finis existantes en résolvant les problèmes de verrouillage soulevés par les éléments d'ordre linéaire basés sur le modèle en déplacement tel que la brique à huit nœuds.

Le champ de déplacement est développé en utilisant l'approche en déformation. Il est basé sur des composantes de déformation qui satisfont à la fois les équations de compatibilité et les équations d'équilibre. L'élément formulé est implémenté dans le code de calcul ABAQUS; et il est validé à travers d'une série de tests de la flexion des poutres, plaques minces et épaisses en statique et en vibration libre. La rapidité de convergence et la bonne performance de cet élément ont été montrées en comparant les résultats obtenus aux solutions analytiques et numériques des autres éléments.

Le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme (AMF) à base de Nickel-Titane NITI a été étudié en utilisant un élément à champ de déformation. ce dernier est implémenté dans le code de calcul ABAQUS via UEL (User Element). Les résultats ont été comparés avec celles des éléments d'ABAQUS tel que C3D8. Les résultats obtenus sont encourageant pour approfondir l'étude du comportement notamment la diminution du temps de calcul pour les structures volumineuses soumise à un chargement complexe comme le cisaillement.

**Mots Clés/** Elément brique; approche en déformation; analyse statique et vibration libre ; implémentation ; ABAQUS ; alliages à mémoire de forme.

## ABSTRACT

This work of thesis involves the development of a new brick finite element based on the strain approach with nine nodes (eight corner nodes and one node in the center) with three essential degrees of freedom (U, V, and W) at each node. The element named SBBNN (Strain Based Brick Nine Nodes) is proposed to enrich the library of existing finite elements in solvent locking problems raised by the linear order elements based on the displacement model.

The displacement field of this element is developed using the strain approach. It is based on deformation components that satisfy both the compatibility equations and the equilibrium equations. The developed element is implemented in the ABAQUS code; and it is validated through a series of tests of the bending of beams, thin and thick plates in static and in free vibration analyses. The good performance and accuracy of this element have been shown by comparing the results obtained to the analytical and numerical solutions of the other elements.

the thermomechanical behavior of nickel-titanium NITI-based shape memory alloys (SMA) was studied using an element based on the strain approach. This element is implemented in the ABAQUS calculation code via UEL (User Element). The results were compared with those of ABAQUS elements such as C3D8. The results obtained are encouraging to extend the study of the behavior in particular the reduction of the computation time for the large structures subjected to a complex loading like the shearing.

**Keywords/** Brick Element; strain approach; static and free vibration analysis; implementation; ABAQUS; shape memory alloys.

## ملخص

يتضمن العمل المنجز في هذه الأطروحة تطوير عنصر محدود جديد قائم على مبدأ التشوه يحوي تسعة عقد (ثمانية عقد ركنية وعقدة واحدة في المركز) مع ثلاث درجات أساسية للحرية (U، V، و W) في كل عقدة. العنصر المسمى SBBNN (Strain Based Brick Nine Nodes) اقترح لإثراء مكتبة العناصر المحدودة الموجودة من أجل حل مشاكل القفل المثارة في العناصر ذات المستوى الخطي القائمة على مبدأ الانتقالات.

حلل الانتقالات لهذا العنصر تم تطويره باستعمال مبدأ التشوه، والذي يستند إلى مكونات التشوه المحققة لكل من معادلات التوافق ومعادلات التوازن. تم إدخال العنصر المطور في كود الحساب ABAQUS حيث تم تقييم أداء هذا العنصر من خلال سلسلة من الاختبارات الخاصة بانحناء العوارض، الصفائح الدقيقة والسميكة في الحالة الستاتيكية وفي حالة الاهتزاز الحر. النتائج التي تم الحصول عليها مقارنة بالحلول التحليلية والعديدية للعناصر الأخرى، بينت سرعة التقارب والأداء الجيد لهذا العنصر.

السلوك الميكانيكي-الحراري لسبائك ذاكرة الشكل من النوع النيكل-التيتانيوم NITI تمت دراسته باستخدام عنصر من العناصر المحدودة القائمة على مبدأ التشوه. هذا الأخير تم إدخاله في برنامج ABAQUS بواسطة (UEL) User Element ، تمت مقارنة النتائج مع عناصر البرنامج ABAQUS مثل C3D8. النتائج المتحصل عليها كانت مشجعة لتوسيع دراسة هذا السلوك وخاصة من ناحية إنقاص زمن التحليل بالنسبة للمنشآت الضخمة المعرضة إلى حمولات معقدة مثل حمولات القص.

الكلمات المفتاحية: عنصر ثلاثي الأبعاد ; مبدأ التشوه ; التحليل الستاتيكي والاهتزاز الحر ; إدخال ; ABAQUS ; سبائك ذاكرة الشكل.

## NOTATION

---

M.E.F.	Méthode des éléments finis
$[K_e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[K]$	Matrice de rigidité globale
$[M_e]$	Matrice de masse élémentaire
$[M]$	Matrice de masse globale
$[D]$	Matrice d'élasticité
$\{F_e\}$	Vecteur de charge
ddl	Degrés de liberté
$[J]$	Matrice Jacobéenne
$\rho$	Densité de masse
$\gamma$	Masse volumique
E	Module d'Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
G	Module de cisaillement
$\int$	Intégrale
$[ ]$	Matrice
$[ ]^T$	Matrice transposé
$[ ]^{-1}$	Matrice inverse
x, y, z	Coordonnées cartésiennes du repère global
u, v, w	Déplacements suivant les directions x, y et z respectivement
$\theta_z$	Rotation dans le plan
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations directes suivant x et y et z respectivement
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformation de cisaillement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions x et y et z respectivement
$\tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement
CT	Cisaillement transverse
UEL	Sous-programme User ELeMent d'ABAQUS
UMAT	Sous-programme User MATerial d'ABAQUS
h	Epaisseur de la plaque
$\Psi_y$ et $\Psi_x$	Rotations des sections droites autour des axes y et x respectivement
$\kappa$	Coefficient de cisaillement
$\zeta$	Fraction volumique martensitique
T	Température
$\Lambda$	Tenseur de transformation martensitique
$\rho \Delta s^A$ et $\rho \Delta s^M$	Les coefficients d'influence de contrainte austénitique et martensitique respectivement

# LISTE DES FIGURES

---

## Chapitre 1.

Figure 1.1 Géométrie de la plaque 9

## Chapitre 2.

Figure 2.1 Élément brique à 9 nœuds 22

## Chapitre 3.

Figure 3.1 L'interface du logiciel 28

Figure 3.2 Quelques user subroutines dans Abaqus 30

Figure 3.3 Schéma de User Element 31

Figure 3.4 Poutre élancée de MacNeal 33

Figure 3.5 Essai d'incompressibilité pour une poutre soumise à une traction 35

Figure 3.6 Poutre cantilever modélisée par deux éléments distordus 36

Figure 3.7 Plaque carrée simplement appuyée 37

Figure 3.8 La plaque circulaire modélisée avec 12 éléments 38

Figure 3.9 Test de sensibilité 38

Figure 3.10 Test de Cheung et Chen 39

Figure 3.11 La poutre élastique isotrope modélisée avec  $10 \times 1 \times 1$  éléments hexaédriques 42

Figure 3.12 La plaque rectangulaire mince simplement supportée modélisée avec des éléments hexaédriques de  $8 \times 4 \times 1$  43

Figure 3.13 La plaque carrée épaisse modélisée avec des éléments hexaédriques de  $8 \times 8 \times 1$  44

Figure 3.14 Plaque circulaire uniforme 44

Figure 3.15 Les quatre premiers modes naturels de la plaque circulaire 45

## Chapitre 4.

Figure 4.1 Structures de l'austénite et de la martensite d'un alliage NiTi 48

Figure 4.2 Transformation de phase induite par la température d'un AMF sans chargement mécanique 49

Figure 4.3 Schéma de l'effet de mémoire de forme d'un AMF montrant la transformation du matériau avec une contrainte appliquée 50

Figure 4.4 Schéma de l'effet de mémoire de forme d'un AMF montrant le déchargement et le chauffage ultérieur à l'austénite sans charge 50

Figure 4.5 Diagrammes de phase selon Brinson (Brinson 1993) : a) Chemin de la création de la martensite autoaccommodée dans un diagramme de phase, b) Représentation schématique de l'évolution de la fraction volumique de martensite lors de la transformation martensitique pilotée par la température à contrainte nulle 51

Figure 4.6 Courbe contrainte-déformation 52

Figure 4.7 Comportement effet mémoire de forme : (a) Trajet de chargement et (b) Comportement dans l'espace température-contrainte-déformation 53

Figure 4.8	Figure illustrant l'effet coaoutchoutique d'un AMF	55
Figure 4.9:	Schéma d'un test pseudoélastique uniaxial AMF	59
Figure 4.10:	Schéma d'un diagramme de phases AMF	59
Figure 4.11	Élément brique à 9 nœuds	60
Figure 4.12	Bobine en AMF, géométrie, condition aux limites	64
Figure 4.13	Effet mémoire de forme : a- Déplacement au cours de chargement, b- Déplacement en fonction de la température	66
Figure 4.14	Comportement pseudo-élastique à une température 293 K	67
Figure 4.15	Comportement pseudo-élastique à une température 320 K	67
Figure 4.16	Comportement pseudo-élastique à une température 350 K	67

# LISTE DES TABLEAUX

---

## Chapitre 3.

Tableau 3.1 Tests de la poutre élancée de MacNeal	34
Tableau 3.2 Déplacement axial d'une poutre soumise à une traction	35
Tableau 3.3 Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre de la poutre	36
Tableau 3.4 Déplacement transversal normalisé au centre de la plaque (Plaque carrée simplement appuyée)	37
Tableau 3.5 Déplacement vertical normalisé au centre de la plaque	38
Tableau 3.6 Déflexion normalisée pour le test de sensibilité du rapport de longueur d'un élément	39
Tableau 3.7 Déplacement axial d'une poutre soumise à une traction (flexion pure)	40
Tableau 3.8 Déplacement axial d'une poutre soumise à une traction (charge de cisaillement)	40
Tableau 3.9 Les trois premières fréquences naturelles de flexion hors du plan	42
Tableau 3.10 Les cinq premières fréquences naturelles transversales	43
Tableau 3.11 Les quatre premières fréquences naturelles transversales	44
Tableau 3.12 Valeurs de $\omega_{mk} a^2 \sqrt{\rho t / D}$ pour les plaques uniformes	45

## Chapitre 4.

Tableau 4.1. Paramètres de matériau du matériau AMF	65
Tableau 4.2. Chargement mécanique et thermique	65

# INTRODUCTION GENERALE

---

## Sommaire

1) Préambule	2
2) Problématique	4
3) Objectifs de la thèse	4
4) Plan de la thèse	5

---

## 1) Préambule

L'objectif général de la résolution d'un problème consiste à déterminer le comportement d'une structure soumise à des sollicitations. Une structure, caractérisée par sa géométrie, un ou plusieurs matériaux, soumise à des sollicitations externes, génère des déplacements, des déformations et des contraintes... La détermination analytique de ces variables pour une structure ne peut se faire que pour des structures simples (poutres, plaques, coques ...) et généralement sous fortes hypothèses. Pour une structure complexe, On peut simplifier les équations du problème à résoudre en discrétisant cette structure en plusieurs éléments.

Les méthodes de résolution du problème discrétisé permettent de rechercher une solution approximative du problème réel. Les méthodes généralement utilisées sont :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des équations intégrales aux frontières.
- La méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis propose, sur la base de formulations faibles, un algorithme de discrétisation permettant de rechercher une solution approchée à un problème aux dérivées partielles sur un domaine avec des conditions aux limites. Il s'agit donc de répondre aux questions d'existence et d'unicité de la solution, de stabilité et de convergence des méthodes numériques, ainsi que d'apprécier l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée.

Le développement de méthodes d'éléments finis pour la résolution de problèmes d'ingénierie pratiques a commencé avec l'avènement de l'ordinateur. Le besoin de résoudre des problèmes complexes en ingénierie civile et aéronautique a conduit à l'apparition de la méthode des éléments finis (MEF). Comme souvent avec les développements originaux, il est assez difficile de citer une "date d'invention" exacte, mais les racines de la méthode des éléments finis peuvent être reliées à trois groupes de recherche distincts: mathématiciens appliqués - voir R. Courant; physiciens-voir J. L. Synge; et ingénieurs - voir J.H. Argyris et S. Kelsey [Bath.16].

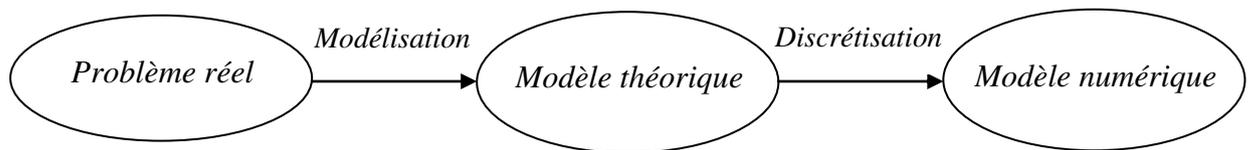
Les travaux d'A. Hrennikoff (1941) et de R. Courant (1942) ont fortement contribué à leur développement. Malgré l'utilisation de méthodes différentes, ils partagent la même caractéristique essentielle à savoir la discrétisation du domaine continu en sous-domaines discrets par maillage, appelé éléments. Les contributions importantes ont été celles d'O. Zienkiewicz de l'Imperial College qui a synthétisé ces deux méthodes en ce que l'on appelle la méthode des éléments finis et a fait le premier modèle mathématique de la méthode.

La méthode des éléments finis est véritablement développée au milieu des années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique, et prit de l'ampleur à l'Université de Stuttgart grâce au travail de J.H. Argyris et à Berkeley grâce au travail de R. W. Clough [Clou.99]. C'est l'ingénieur américain R. W. Clough qui, semble-t-il, a utilisé le terme de méthode des éléments finis le premier dans un article de 1960 intitulé « The Finite Element Method in Plane Stress Analysis ». [Man.13]

La base mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis a été consolidée en 1973 avec la publication de Strang et Fix « An Analysis of The Finite Element Method ». Elle a depuis été intégrée comme une branche des mathématiques appliquées à la modélisation numérique des systèmes physiques dans une large variété de disciplines [Gup.96].

L'idéalisation du problème physique par un modèle mathématique nécessite certaines hypothèses qui conduisent à des équations différentielles régissant le modèle mathématique. L'analyse par éléments finis résout ce modèle mathématique. Pour s'assurer que cette analyse simulera au mieux un problème réel donné, il faut effectuer deux opérations essentielles, la modélisation dans un premier temps et la discrétisation dans un deuxième temps.

Par conséquent, le choix d'un modèle mathématique approprié est crucial et détermine complètement la compréhension du problème physique réel que nous pouvons obtenir par l'analyse.



**Étapes de l'analyse d'un problème.**

Chaque élément finis est muni d'une géométrie dans laquelle on spécifie sa forme exacte, la position de ses nœuds, ses fonctions de base et ses degrés de liberté. Nous distinguons trois types d'éléments finis:

- a) **Les éléments à une dimension** : barres, poutres rectilignes ou courbes.
- b) **Les éléments à deux dimensions** : élasticité plane, plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- c) **Les éléments à trois dimensions** : éléments de volume ou coques épaisses.

**Éléments à une dimension**

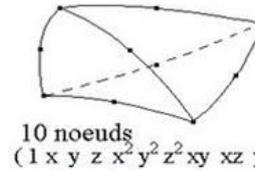
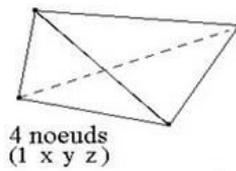
	Base polynomiale	Espace réel
Linéaire	(1 s)	
Quadratique	(1 s s <sup>2</sup> )	
Cubique	(1 s s <sup>2</sup> s <sup>3</sup> )	

**Éléments à deux dimensions**

Éléments triangulaires		
		Les bases polynomiales sont complètes
Éléments quadrilatéraux		
		Les bases polynomiales sont incomplètes

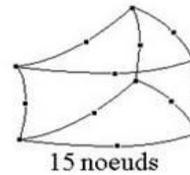
## Éléments à trois dimensions

### Éléments tétraédriques



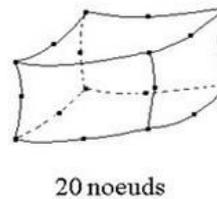
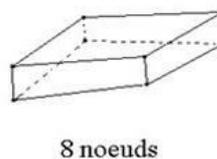
Les bases polynomiales sont complètes

### Éléments prismatiques



bases  
incomplètes

### Éléments hexaédriques



bases  
incomplètes

### Récapitulative des types éléments finis

## 2) Problématique

Nous savons que la précision de la solution et la rapidité de convergence d'une étude d'une structure discrétisée sont conditionnées par le type et la taille des mailles.

Donc, comment peut-on avoir des éléments finis performant en termes de précision et en termes de gain de temps ?

## 3) Objectifs de la thèse

Dans ce manuscrit, un nouvel élément fini brique basé sur l'approche en déformation avec neuf nœuds (huit nœuds de coin et un nœud au centre) ayant trois degrés de liberté essentiels (U, V et W) à chaque nœud dénommé SBBNN (Strain Based Brick Nine Nodes) est proposé pour enrichir la bibliothèque d'éléments finis existantes en solvant les problèmes de verrouillage soulevés par les éléments d'ordre linéaire basés sur le modèle en déplacement.

Les objectifs de ce travail sont :

- ❑ Développement d'un nouvel élément fini brique basé sur l'approche en déformation pour enrichir la bibliothèque d'éléments finis existants
- ❑ Implémentation de l'élément développé dans le code de calcul ABAQUS à l'aide du sous-programme UEL et validation à travers d'une série de tests en statique et en vibration libre.
- ❑ Validation de l'aptitude des éléments finis à champ de déformation à décrire le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme à base de Nickel-Titane NITI en faisant le couplage UEL et UMAT.

#### 4) Plan de la thèse

Dans ce présent rapport, nous avons entamé le travail par une introduction générale dans laquelle les objectifs et le plan détaillé de la thèse ont été présentés. Il se décompose en quatre chapitres :

**Le premier chapitre** est consacré à un rappel des éléments théoriques de plaque en flexion et une recherche bibliographique sur les différents éléments finis existants dans la littérature développés par différentes formulations.

**Le deuxième chapitre** de cette thèse expose le développement de l'élément brique à neuf nœuds nommé SBBNN (Strain Based Brick Neuf nœuds) basée sur l'approche en déformation dont les équations d'équilibre sont satisfaites comme condition supplémentaire pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques minces et épaisses.

**Le troisième chapitre** présente la validation de l'élément brique SBBNN à travers une série de tests standards de la littérature dans les deux types d'analyse statique et vibration libre en l'implémentant dans le code de calcul ABAQUS via la routine UEL. Les résultats ont confirmé les bonnes performances de cet élément.

Enfin, **le quatrième chapitre** est rédigé pour étendre l'étude d'un autre élément brique SBB (Strain Based Brik) [Belo.14] basé sur l'approche en déformation avec neuf nœuds au comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme AMF.

Le manuscrit est clôturé par une conclusion générale qui résume tous les résultats obtenus et des recommandations.

# **CHAPITRE 1**

## **ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

### **Sommaire**

---

<b>1) Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2) Théorie de la flexion des plaques</b>	<b>8</b>
<b>3) Aperçu historique de l'approche en déformation</b>	<b>13</b>
<b>4) Synthèse d'éléments finis tridimensionnels (3D) formulés par d'autres approches</b>	<b>16</b>
<b>Conclusion</b>	<b>18</b>

---

## 1) Introduction

L'analyse de structures tridimensionnelles complexes (3D) est devenue une tâche essentielle ces dernières années dans plusieurs domaines. Le but de la recherche des éléments finis est de développer des éléments de grande précision pour répondre à deux exigences : éviter les comportements de verrouillage et réduire la sensibilité à la distorsion du maillage.

Ce chapitre présente un aperçu théorique sur la flexion des plaques, un résumé historique sur les éléments développés avec l'approche en déformation et avec d'autres approches

Ces dernières années, des progrès importants ont été réalisés dans le développement d'éléments finis capables de modéliser des structures en utilisant plusieurs approches.

Nous distinguons plusieurs sortes de formulations des éléments finis selon le champ de base dont on cite :

**Formulation en déplacement :** Les éléments finis de cette catégorie sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendue à tout l'élément. Il en résulte que les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, alors que les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières. Le modèle déplacement est le plus populaire et le plus développé.

Dans ce modèle, les fonctions de déplacements sont choisies en utilisant le triangle de Pascal, de telle sorte que le nombre total des constantes soit égale au nombre total des degrés de liberté de l'élément.

**Formulation équilibre :** C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ des contraintes de façon que les équations d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements est sommaire.

Ce modèle est rarement employé en pratique, car il conduit, en générale, à qualité égale, à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

**Formulation hybride :** Ce modèle est basé sur deux interpolations a priori indépendantes, l'une portant sur un champ à l'intérieur de l'élément, l'autre sur un champ touchant la seule frontière. En cours de formulation, les paramètres indéterminés du champ interne sont exprimés en fonction des paramètres nodaux du champ défini sur la frontière en cherchant à minimiser la différence entre les deux champs.

Le modèle hybride le plus ancien, dit hybride contrainte, combine un champ interne auto-équilibré de contrainte avec un champ de déplacement à la frontière. Le modèle le plus récent, dit hybride – Trefftz, utilise deux champs indépendants de déplacement : Un champ interne qui vérifie rigoureusement la forme forte du problème, mais viole la compatibilité sur la frontière, et un champ conforme définit sur la frontière de l'élément.

Le modèle hybride fournit d'ordinaire de meilleurs résultats que le modèle déplacement, surtout au niveau des contraintes. Le modèle hybride – Trefftz, en particulier, peut-être le plus précis parmi les éléments finis actuellement connus.

**Formulation mixte :** Ce modèle est basé sur des approximations indépendantes des divers champs inconnus (déplacements, déformations, contraintes), étendues à tout l'élément. En général, ce modèle conserve les paramètres inconnus de ces champs comme degrés de liberté. La mise au point peut être longue et coûteuse, mais les éléments peuvent être d'excellente qualité.

Le modèle mixte est parfois utilisé pour corriger certains défauts du modèle déplacement : On interpole, par exemple, certaines composantes internes de la déformation pour améliorer la précision au niveau des contraintes ; les paramètres correspondants peuvent alors être éliminés par condensation, de sorte que l'élément reprend l'aspect d'un modèle déplacement.

**Formulation en déformation :** C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ des déformations de telle façon que les équations de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

L'approche en déformation permet le développement des éléments d'ordre élevé avec des degrés de liberté minimums qui sont simples pour mettre en application et efficaces à employer. A cet égard l'approche en déformation permet aux composantes des déplacements dans le plan d'être représentées par polynômes d'ordre élevé. C'est d'intérêt particulier puisque l'amélioration obtenue par les éléments d'ordre élevé est principalement due à la représentation des déplacements dans le plan par des termes de polynômes d'ordre élevé.

Contrairement aux éléments conventionnels ordinaires et les éléments d'ordre élevé, les composantes du champ des déplacements pour les éléments basés sur le modèle en déformation ne sont pas indépendantes mais liées en conformité avec les exigences de la relation déplacements-déformations. Le lien entre ces différents déplacements n'est pas limité aux termes qui correspondent aux mouvements du corps rigide mais se produit également dans les termes correspondant aux déformations de l'élément. [Djo.03].

## 2) Théorie de la flexion des plaques

Les plaques sont des éléments de structures très répandus en génie civil. On les trouve dans de nombreuses structures industrielles et ils présentent certaines particularités de calcul et de modélisation. Ce sont des éléments dont l'une des dimensions est petite par rapport aux autres dimensions.

Cette partie présente un rappel des notions concernant les plaques car nous validons l'élément développé par des tests sur les plaques, et elle résulte d'une petite synthèse des références suivantes : [Cou.80], [Tim.59], [Ven.01], [Szi.04] et [Liu.14].

## Définition de la plaque

### Caractéristiques géométriques

Une plaque est un corps solide définie à partir d'une surface, délimitée par un contour. L'épaisseur de la plaque, notée  $h$ , est la distance entre les deux faces. Elle est constante et supposée petite par rapport aux autres dimensions. Le plan équidistant des deux faces est le plan médian ou surface moyenne.

Soit  $\{O; x, y, z\}$  un repère orthonormé tel que le plan  $\{O; x, y\}$  soit le plan moyen.

Le plan situé à  $z = h/2$  est la peau supérieure de la plaque.

Le plan situé à  $z = -h/2$  est la peau inférieure de la plaque.

Une fibre normale est l'ensemble des points du solide situés sur une normale au plan médian. Elle est caractérisée par la donnée de ses coordonnées  $(x, y)$ .

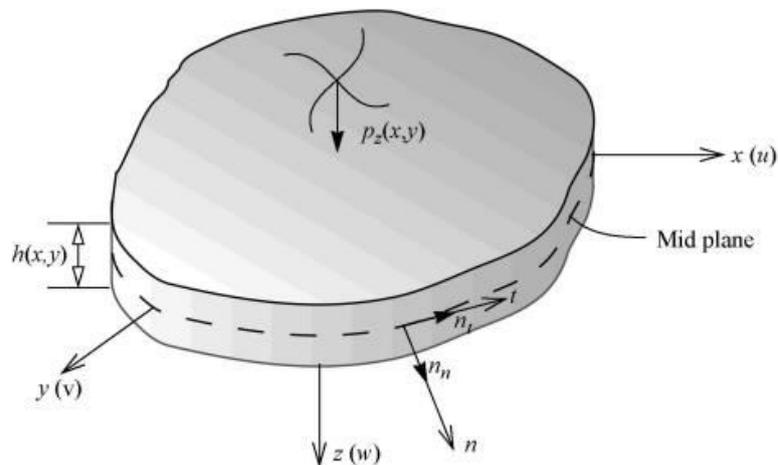


Figure 1.1 Géométrie de la plaque

### Caractéristiques mécaniques

Toutes les plaques, considérées dans cette étude, sont supposées homogènes et isotropes. Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont notées  $\rho$ ,  $E$  et  $\nu$ , respectivement la masse volumique, le module d'Young et le coefficient de Poisson. On en déduit le module de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (21-1)$$

Avec l'épaisseur  $h$ , on définit les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$\text{L'inertie de rotation des sections : } I = \frac{h^3}{12} \quad (1-2)$$

$$\text{La rigidité de traction : } C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (1-3)$$

$$\text{La rigidité de flexion : } D = \frac{EI}{1-\nu^2} \quad (1-4)$$

Une plaque résiste exclusivement aux charges transversales par flexion. Les propriétés de flexion d'une plaque dépendent beaucoup de son épaisseur par rapport aux autres dimensions. Les plaques peuvent être classées en quatre groupes selon le rapport  $h/L$ . Ces groupes sont :

1. *Les membranes* ( $h/L < 1/50$ ) sont des plaques très minces sans rigidité en flexion, supportant des charges par des forces de cisaillement axiales et centrales. Ces forces sont appelées forces membranaires.
2. *Les plaques rigides* ( $h/L = 1/50 - 1/10$ ) sont des plaques minces rigides en flexion, qui supportent des charges dans les deux dimensions, principalement par des moments internes (flexion et torsion) et par cisaillement transversal, généralement similaires aux poutres. Dans la pratique d'ingénierie, on entend par plaque rigide, sauf indication contraire.
3. *Les plaques moyennement épaisses* ( $h/L = 1/10 - 1/5$ ) ressemblent à de nombreux égards aux plaques rigides, à la différence notable que les effets des forces de cisaillement transverses sur les composantes des contraintes normales sont également pris en compte.
4. *Les plaques épaisses* ( $h/L > 1/5$ ) ont une condition de contrainte interne qui ressemble à celle d'un élément tridimensionnel.

Il existe cependant une zone entre les plaques rigides et les membranes; à savoir, si nous ne limitons pas les fléchissements des plaques rigides, nous obtenons des plaques dites flexibles, qui supportent les charges externes par l'action combinée de moments internes, de forces de cisaillement transversales et centrales et de forces axiales. En conséquence, les théories des plaques élastiques distinguent nettement les plaques présentant des déflexions faibles et importantes. Les plaques ayant de grandes déflexions sont évitées, dans la plupart des cas, dans la pratique générale de l'ingénierie, car elles pourraient créer certains problèmes, tant dans leur analyse que dans leur utilisation. Les industries de l'aérospatiale et de la construction de sous-marins soucieuses de leur poids sont toutefois obligées de ne pas tenir compte de ces inconvénients, car ces plaques possèdent des capacités de charge considérablement accrues.

Semblable aux poutres, il existe plusieurs théories pour analyser la flexion des plaques. Ces théories peuvent également être divisées en deux grandes catégories: la théorie des plaques minces (la théorie de Love-Kirchhoff) et la théorie des plaques épaisses (la théorie de Mindlin-Reissner).

### **Théorie des plaques minces**

La théorie de la flexion des plaques la plus simple est la théorie de Kirchhoff-Love, appelée aussi théorie classique de la flexion. Les hypothèses cinématiques adoptées par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.

- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
- La contrainte  $\sigma_z$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout  $z$ .

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme:

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (1-5)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (1-6)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (1-7)$$

Où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées d'un point de la plaque dans un repère cartésien et galiléen.  $t$  est la variable temps.

L'écriture de l'équation du mouvement de flexion de la plaque, ( $w$ ), dans l'approximation de l'élasticité linéaire aboutit à :

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (1-8)$$

Le vecteur des déformations planes s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

Donc:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = -z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

Où:  $k$  est le tenseur des courbures qui sont les déformations généralisées pour le cas des plaques.

Les contraintes de cisaillement transverses  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  sont donc nulles dans ce cas. Ce modèle s'applique uniquement aux plaques très minces.

## Théorie des plaques épaisses

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

Les bases d'une théorie prenant en compte les déformations au cisaillement ont été posées par Reissner [Rei.45] en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand [Ufl.48] en 1948. Puis la théorie complète a été publiée par Mindlin [Min.51].

Les hypothèses de Mindlin – Reissner sont les suivantes :

- Un point du plan moyen possède un mouvement dans ce plan : une contrainte de membrane peut donc apparaître dans le feuillet moyen.
- L'état de contrainte est un état de contraintes planes : les contraintes normales au feuillet moyen sont négligées.
- Une section droite, normale au feuillet moyen dans la configuration initiale, n'est pas nécessairement normale après déformation.
- L'inertie de rotation des sections droites est prise en compte.

Elle est basée sur le champ de déplacements suivant :

$$u(x, y, z, t) = -z\Psi_y(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = -z\Psi_x(x, y, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

Où  $t$  représente la variable temps,  $u$  et  $v$  sont les déplacements dans le plan de la plaque,  $w$  est le déplacement transverse et enfin  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$  les rotations en flexion de normales transverses aux axes  $x$  et  $y$  respectivement.

Les expressions linéaires des déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\Psi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\Psi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{1-11}$$

Afin de corriger l'hypothèse de contraintes de cisaillement  $\sigma_{zx}$  et  $\sigma_{zy}$  constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin, on introduit des facteurs de correction ( $\kappa$ ) afin de mieux prendre en compte la variation réelle de ces contraintes.

Mindlin trouve ce facteur dépendant du coefficient de Poisson  $\nu$  et variant de 0.76 pour  $\nu = 0$  à 0.91 pour  $\nu = 0.5$  dans le cas d'un matériau isotrope. La deuxième estimation est basée sur la vitesse des ondes de cisaillement :  $\kappa = \pi^2/12$ .

Si  $\nu = 0,3$ , alors  $\kappa = 0,86$ , ce qui se compare favorablement à l'hypothèse généralement utilisée de  $\kappa = 5/6 = 0,8333$ .

### 3) Aperçu historique de l'approche en déformation

Le premier objectif du développement des nouveaux éléments 3D est de formuler des éléments finis à géométrie volumique capables de représenter correctement le comportement de structures.

En effet, dans sa démarche de conception et de validation des structures, l'ingénieur est souvent confronté à des calculs en éléments finis très coûteux en temps. Aussi, le recours à des éléments qui ont un champ de déplacement enrichis par des termes d'ordre supérieur sans introduire de degrés de liberté non essentiels est de plus en plus courant par l'utilisation d'une méthode de développement basée sur l'approche en déformation.

L'enrichissement du champ de déplacement par des termes d'ordre supérieur permet d'améliorer et de prévenir les phénomènes de blocage par cisaillement.

L'approche en déformation a largement attiré l'attention de plusieurs chercheurs sur le développement de nouveaux éléments finis. Le développement des champs de déplacement par l'utilisation de l'approche en déformation a été appliqué pour la première fois aux éléments courbés. Il a été révélé que pour obtenir des résultats convergents satisfaisants, les éléments finis basés sur des fonctions de déplacement polynomiales indépendantes exigent que les structures incurvées soient divisées en un grand nombre d'éléments.

Ashwell, Sabir et Roberts [Ash.71] ont montré que lorsque des champs de déplacement supposés sont utilisés dans l'analyse d'éléments incurvés, la structure doit être divisée en un grand nombre d'éléments pour obtenir des résultats convergents satisfaisants. Toutefois, lorsque des champs de déformation supposés sont utilisés, les résultats se convergent même lorsque la structure est moins divisée, c'est-à-dire que les éléments à base de déformation ont montré une convergence plus rapide. Par conséquent, ils ont continué à développer une nouvelle classe d'éléments finis simples et efficaces pour divers types de problèmes basés sur des champs de déformations plutôt que sur des champs de déplacement.

#### Eléments finis d'élasticité plane basés sur l'approche en déformation

Cette approche a été introduite dans les éléments d'élasticité plane. Sabir [Sabi.85a] a développé deux éléments (un élément rectangulaire et un autre triangulaire) basés sur le modèle en déformation pour l'élasticité plane avec degré de liberté de rotation.

Sabir et Sfindji [Sabi.95] ont développé un élément triangulaire à quatre nœuds (trois coins et un nœud mi-hypoténuse) en utilisant la condensation statique. Basé sur le même élément rectangulaire

développé par Sabir [Sabi.85a], ils ont également dérivé deux nouveaux éléments rectangulaires satisfaisant les équations d'équilibre pour les deux cas contraintes planes et déformations planes. Un élément fini secteur a été développé en coordonnées polaires par Djoudi [Djo.85]. Cet élément a trois degrés de liberté à chaque nœud (deux degrés de liberté essentiels et la rotation dans le plan).

Belarbi et Maalem [Bela.05b] ont développé un élément rectangulaire R4BM basé sur l'approche en déformation, possédant les deux ddl essentiels pour chacun des nœuds sommets, pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire plane.

Récemment, Rebiai C. et Belounar L ont formulé deux éléments, un élément rectangulaire possède les trois degrés de liberté au niveau de chacun des quatre nœuds d'angle (les deux translations et la rotation dans le plan) développé pour les analyses linéaires et non linéaires dont les critères de VonMises, Tresca et Mohr – Coulomb sont adoptés [Reb.13]; et un autre élément quadrilatérale à quatre nœuds avec degré de liberté de rotation [Reb.14], ou le champ de déformation supposées pour les différentes composantes satisfont l'équation de compatibilité.

### **Eléments tridimensionnelles basés sur l'approche en déformation**

Cette approche a ensuite été étendue aux problèmes d'élasticité tridimensionnelle, Belarbi et Charif [Bela.99] ont proposé un nouvel élément hexaédrique simple à huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud ( U, V et W) basé sur le modèle en déformation afin d'éviter l'utilisation des éléments tridimensionnels (hexaédriques et prismatiques) d'ordre élevé pour l'étude de la flexion des plaques.

Hamadi et Maalem [Ham.10] ont développé un nouvel élément fini parallélépipédique baptisé SBP8C (Strain Based Parallelepiped 8-node Condensed) et il a été formulé par l'utilisation de la condensation statique. Cet élément peut être utilisé pour l'analyse de problèmes tridimensionnels ainsi que pour la flexion de plaques minces et épaisses.

Ensuite, Belounar et Guerraihe [Belo.14] et [Guer.18] ont formulé des nouveaux éléments finis tridimensionnel utilisant l'approche par déformation pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques. L'élément développé possède les trois degrés de liberté externes essentiels (U, V et W) au niveau de chacun des huit nœuds d'angle ainsi qu'au nœud centroïde.

### **Eléments coques basés sur l'approche en déformation**

Sabir et Ashwell [Ash.72] ont présenté un élément fini de type coque cylindrique basé sur l'approche en déformation qui a vingt degrés de liberté. Cet élément utilise seulement les déplacements nodaux géométriquement externes (trois déplacements et deux rotations) satisfaisant les conditions de déplacements de corps rigide et de déformation constante. Avec cet élément et avec un maillage grossier, la convergence est excellente. La supériorité de cet élément est particulièrement marquée quand il est appliqué aux coques minces. Comme les éléments rectangulaires qui ont été développés ne peuvent pas être utilisés pour la modélisation des coques ayant des bords courbes irrégulières, Sabir et Charchafchi [Sab. 82] ont utilisé l'approche en déformation pour développer un élément de coque quadrilatère et Sabir a utilisé cet élément pour le problème de concentration de contraintes dans des cylindres avec des trous circulaires et elliptiques [Sab.79], ainsi que le problème d'intersection droit des cylindres [Sab.83b].

En 1985, Sabir et Ramadanhi [Sab.85b] ont développé un élément fini courbe simple, basé sur les équations de coque peu profonde possédant les seuls degrés de liberté externes essentiels.

L'élément a été testé en l'appliquant à l'analyse des problèmes cylindriques [Sab.85b], sphérique [Sab.87] et pour des coques paraboliques, hyperboliques qui a donné un degré de précision élevé.

Sabir et El-Erris [Sab.88] ont développé un élément fini coque conique courbe adapté à l'analyse de la flexion des coques coniques. Cet élément est simple et possède toutes les conditions requises pour moins d'effort de calcul. L'élément possède 20 degrés de liberté et satisfait à la représentation exacte des modes de déplacement de corps rigide. Les caractéristiques de convergence de l'élément ont été testées en l'appliquant à l'analyse de la flexion des coques coniques et il a été montré que les résultats obtenus sont d'un niveau acceptable de précision lors de l'utilisation d'un maillage grossier.

L'approche en déformation a également été utilisée pour le développement de plusieurs éléments de coque qui ont été élaborés par Mousa, A. [Mou.94] et [Mou.01]. Ces éléments comprennent des éléments coniques, cylindriques et sphériques. En outre, deux groupes d'éléments triangulaires à double courbure ont été développés, le premier groupe comprend trois éléments qui ont cinq degrés de liberté à chaque nœud, tandis que le second groupe comprend deux éléments qui ont six degrés de liberté à chaque nœud. Ces éléments ont une grande précision en termes de déplacements et contraintes pour l'analyse des structures complexes.

Une autre analyse à l'aide des éléments à champ de déformation de plusieurs structures coques rigides est effectuée par [Ass.99]. En effet, l'élément fini de coque utilisé dans cette analyse a été développé à l'origine par [Ash.72], et il a été modifié par la suite, de façon indépendante par [Cha.82] et [Ass.84] dans le but d'améliorer sa performance. Cet élément a cinq degrés de liberté par nœud, basé sur des fonctions de déformation généralisées simples satisfaisant l'exigence de déformations constantes et indépendantes plutôt que la formulation habituelle basée sur les déplacements indépendants.

### **Eléments plaques basés sur l'approche en déformation**

L'approche en déformation a été également prolongée à l'analyse des plaques. Une contribution de l'approche en déformation pour l'analyse des problèmes de flexion des plaques minces et épaisses a été présentée par [Belo.05], où un nouvel élément fini rectangulaire à quatre nœuds pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques avec effet de cisaillement transverse a été développé.

En 2011 Himeur [Him.11], a développé un nouvel élément fini triangulaire de plaque basé sur l'hypothèse de la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff), pour l'analyse des plaques minces avec un quatrième nœud fictif où la condensation statique est utilisée pour cet élément. Plusieurs tests liés aux problèmes de flexion des plaques minces sont utilisés montrant la robustesse et la performance de cet élément.

Dernièrement, Belouar et al. [Belo.A.18] et [Belo.A.19] ont formulé des nouveaux éléments finis pour les analyses statiques et vibrations libres des plaques. Les éléments développés, qui contiennent les trois degrés de liberté externes essentiels à chacun des trois nœuds d'angle, sont basés sur la théorie de Reissner / Mindlin et sur l'approche en déformation.

#### 4) Synthèse d'éléments finis tridimensionnels (3D) formulés par d'autres approches

##### *Formulations basée sur l'approche en déplacement*

Les éléments iso-paramétriques hexaédriques sont les plus utilisés dans l'analyse des structures 3D. Nous ne fournirons ici qu'une brève discussion d'un petit échantillon de certaines des approches utilisées dans la littérature. Pour les modèles de déplacement, nous pouvons commencer par les travaux de (Wilson et al. 1973) [Wil.73] qui ont proposé un élément iso-paramétrique hexaédrique à 8 nœuds et 3 degrés de liberté par nœud. Cet élément s'est révélé extrêmement efficace pour l'analyse de structures tridimensionnelles massives soumises à la flexion. Ils ont introduit des modes de déplacement incompatibles au niveau des éléments afin d'améliorer la précision de ces derniers ; Sachant que L'une des principales causes des inexactitudes dans les éléments finis d'ordre inférieur est leur incapacité à représenter certains gradients de déformations simples.

Nous pouvons aussi citer les travaux de : [Brend.79] qui ont décrit l'application d'un élément de coque isoparamétrique incurvé à un déplacement important analysés incluant des phénomènes d'instabilité. [Par.78] qui a adapté la formulation lagrangienne alternative de l'élément linéaire QUAB C9 implémenté dans le système ASKA à l'analyse non linéaire géométrique. [Hug.81] ont présenté une formulation non linéaire d'éléments finis pour l'analyse tridimensionnelle quasi-statique des coques, qui prend en compte les effets de large déformation et de rotation, et s'adapte à une classe non linéaire assez générale d'équations constitutives à déformation finie. [Kim.90] ont proposé un élément iso-paramétrique hexagonal à 20 nœuds basé sur le modèle de déplacement qui a été comparé avec l'élément solide à 18 nœuds basé sur le modèle de déformation. La stabilité cinématique associée à différentes règles d'intégration a été étudiée pour l'élément à 20 nœuds.

##### *Formulations hybride*

La formulation hybride des contraintes a été utilisée par Yunus et al. [Yun.91] pour le développement d'un élément hexaédrique avec ddl de rotation. Cet élément est intégré par un schéma de 14 points d'intégration. Les modes parasites associés à des rotations égales ne sont pas contrôlés dans cet élément hybride.

Parmi les premiers travaux les plus cités dans la littérature sur l'application des ddl de rotation, on trouve également celui de Yunus et al. [Yun.91] qui ont développé deux éléments hexaédriques à 8 nœuds HEX8R et HEX8RX basés sur le modèle en déplacement avec 6 ddl (trois translations et trois rotations) par nœud pour les problèmes d'élasticité 3D. Ces éléments hexaédriques HEX8R et HEX8RX possèdent douze modes parasites apparaissent dans la matrice de rigidité élémentaire.

Plus tard, Sze et Ghali [Sze.93], dans un article paru en 1993, ont présenté un élément hexaédrique hybride à 8 nœuds avec ddl de rotation d'Allman. Cet élément HBR est également intégré par la règle de 14 points d'intégration et les modes parasites associés à des rotations égales sont contrôlés à l'aide de l'application de la même technique utilisée dans le fonctionnel D-type de Hughes et Brezzi.

##### *Formulations basée sur le Concept SFR (Space Fiber Rotation)*

Une autre approche postulant l'existence de ddl de rotation a été proposée par Ayad [aya.02] en 2002 dans laquelle, pour améliorer la performance de l'élément hexaédrique classique à 8 nœuds, il a utilisé un nouveau concept baptisé SFR (Space Fiber Rotation). L'utilisation de l'intégration réduite

( $2 \times 2 \times 2$  PG) dans l'élément hexaédrique SFR8 engendre des modes parasites qui disparaissent après l'assemblage de deux ou plusieurs éléments. Ces travaux ont été repris plus tard par Zouari et al. [Zou.15] pour formuler une version piézoélectrique de cet élément puis par Ghomari et al. [Ghom.12] pour les problèmes de contact. A noter que ces travaux basés sur le concept SFR, ne résolvaient pas la déficience du rang de la matrice de rigidité élémentaire par une méthode de contrôle de modes parasites. Très récemment, Ayad et al. [Aya.13] ont publié une version stabilisée de l'élément SFR8 utilisant une technique de stabilisation inspirée des travaux réalisés par Yunus et al. [Yun.91]. Ces auteurs ont proposé aussi dans cet article une version non-conforme SFR8I de l'élément précédent.

***Formulations basée sur la méthode de déformations postulées améliorées « Enhanced Assumed Strain – EAS »***

Cette formulation est présentée dans le cadre du principe variationnel mixte à trois champs de Hu-Washizu [Was.75], où les champs de déplacement, de contrainte et de déformation sont supposés des variables indépendantes. De nombreux éléments finis utiles ont été développés sur la base de la méthode Enhanced Assumed Strain (EAS) introduite dans les premiers travaux de (Simo & Rifai, 1990) [Sim.90], basée sur le principe variationnel mixte de trois champs de Hu-Washizu. Cette méthode a été appliquée avec succès dans les contributions suivantes : (Simo et Armero [Sim.92]; Simo et al. [Sim.93]; Andelfinger et Ramm [And.93]; Freischläger et Schweizerhof [Fre.96]; Korelc et Wriggers [Kor.96]). Le principe de cette méthode consiste à enrichir le champ des déformations en rajoutant un champ des variables qui produit des modes de déformations supplémentaires. Ces champs de variables sont ensuite projetés sur un sous-espace approprié afin d'éviter les différents types de blocages. Cette méthode a été appliquée pour formuler des éléments volumiques applicables dans la modélisation des solides et des structures tridimensionnelles. Elle donne des résultats très favorables. Cependant, l'inconvénient majeur de ces éléments était l'inefficacité en temps de calcul.

Récemment, Fredriksson et Ottosen [Fred.07], ont présenté un élément hexaédrique stabilisé basé sur l'approche EAS pour les problèmes d'élasticité 3D.

La méthode mixte de déformations améliorées « mixed-enhanced strain » qui peut être classée comme une méthode de déformations améliorées « enhanced strain » a été proposée par Kasper et Taylor [Kas.00a, Kas.00b] pour les éléments 2D et 3D afin d'étudier les problèmes d'élasticité linéaire et non linéaire géométrique. Cette formulation est développée en utilisant un concept d'éléments finis mixtes pour améliorer le champ des déformations et d'éviter ainsi les différents effets de verrouillage et aussi pour améliorer la précision en flexion pour les maillages grossiers.

***Formulations basée sur La méthode de contraintes postulées « Assumed Stress Method » :***

Cette approche utilise la formulation mixte à deux champs de Hellinger-Reissner qui consiste à approximer à la fois le champ de déplacements ainsi que le champ de contraintes indépendamment. Depuis les travaux de Pian [Pian.64] pour les éléments hybrides, des grands efforts ont été consacrés à l'élaboration des hypothèses de contraintes de capacités hautes performances. Les principaux objectifs ont été la satisfaction des conditions d'équilibre et l'insensibilité à la distorsion du maillage. Dans les premiers développements, les éléments hybrides ont été basés sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire et les contraintes ont été définies dans le système des coordonnées cartésiennes pour satisfaire les conditions d'équilibre. Même si cette approche est rationnelle, la performance des éléments obtenus par la méthode de contraintes postulées est liée aux distorsions du maillage et il n'est pas facile de satisfaire à la fois les conditions d'équilibre et l'invariance des

coordonnées. Pour remédier à ces faiblesses, Pian et Sumihara [Pian.84] ont proposé plus tard une nouvelle approche pour les éléments hybrides qui repose sur le principe de Hellinger-Reissner où les contraintes postulées sont définies dans le système des coordonnées naturelles.

Après le succès des éléments hybride-contrainte volumiques de type hexaédriques HS8 [Sze.93] et PT18 $\beta$  [Pian.86] ainsi que l'avancement dans la sélection des modes hybride-contrainte, des éléments volumiques hybride-contrainte efficaces ont été formulés pour des géométries et des applications spécifiques [Sze.95], [Sze.96]. Une nouvelle hypothèse de contrainte pour les éléments hybride-contrainte est présentée par Yeo et Lee [Yeo.97]. Cette hypothèse de contrainte est adaptée pour l'élément hexaédrique hybride à 8 nœuds PT18 $\beta$  ce qui entraîne un élément hexaédrique M18 $\beta$ . En général, la base variationnelle du modèle hybride-contrainte est un principe de Hellinger-Reissner (HR) avec des contraintes postulées.

### **Conclusion**

En conclusion, Ce chapitre est constitué d'une synthèse bibliographique sur les éléments finis, notamment les techniques de formulation des modèles d'éléments finis solides tridimensionnels. Plusieurs éléments finis tridimensionnels ont été proposés pour faciliter l'analyse des nouveaux phénomènes et d'améliorer les méthodes existantes.

Cette partie est écrite aussi pour fournir les récents développements d'éléments finis utilisés dans l'analyse d'ingénierie. Pendant les deux dernières décennies, des progrès considérables ont été réalisés dans le développement d'éléments finis tridimensionnels fiables et efficaces pour résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus et pour modéliser les structures dans les domaines linéaire et non linéaire.

## **CHAPITRE 2**

# **FORMULATION D'UN NOUVEL ELEMENT FINI 3D A 9 NŒUDS**

### **Sommaire**

---

<b>1) Introduction</b>	<b>20</b>
<b>2) Considérations théoriques</b>	<b>20</b>
<b>3) Formulation de l'élément développé SBBNN</b>	<b>22</b>
<b>Conclusion</b>	<b>26</b>

---

## 1) Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. Les plaques et les coques sont des structures largement utilisées dans beaucoup d'applications technologiques. Un très grand nombre d'éléments finis de plaque en flexion a été développé et plusieurs chercheurs ont consacré leurs travaux à la formulation des éléments tridimensionnels pour les plaques en flexion. Cependant, ces éléments ont tendance à provoquer des phénomènes de blocage de cisaillement indésirables lorsqu'ils traitent le cas des plaques minces. Ainsi, il existe un besoin réel, d'avoir des éléments finis volumiques polyvalents, efficaces et capables de traiter de façon autonome tous les types de plaques. Des formulations ont été élaborées afin de développer des éléments tridimensionnels robustes.

Depuis son apparition, beaucoup de chercheurs ont adopté l'approche en déformation pour le développement de nouveaux éléments finis. Les avantages de ces éléments ont été illustrés sur plusieurs articles par rapport à ceux basé par l'approche en déplacement tel que :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence (modes de corps rigide et mode de déformation constante).
- Découplage des différentes composantes de la déformation.
- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction des nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires.

Dans cette partie, un nouvel élément fini d'élasticité 3D à 9 nœuds basé sur l'approche en déformation nommé SBBNN (Strain Based Brick Nine Nodes) sera formulé pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques minces et épaisses. Il possède les huit nœuds de sommet ainsi qu'un nœud au centre de l'élément avec les trois degrés de liberté (u, v et w) par nœuds.

Cet élément sera implémenté dans le code de calcul ABAQUS en utilisant la subroutine UEL (User Element subroutine of ABAQUS), examiné et comparé avec d'autres éléments à travers des cas tests, afin de démontrer son efficacité.

## 2) Considérations théoriques

Dans les problèmes d'élasticité tridimensionnels, les six composantes de déformation et les six équations de compatibilité sont respectivement données par:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{22-1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{22-2}$$

Où  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$  sont les déformations normales.  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  et  $\gamma_{zx}$  sont les déformations de cisaillement. Les déplacements dans les directions x, y et z sont respectivement u, v et w.

L'équilibre tridimensionnel est donné par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{2-3}$$

En élasticité tridimensionnelle aussi, la matrice de comportement d'un matériau élastique linéaire homogène et isotrope est donnée par la relation :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

Nous modifierons cette relation (2-4) pour tenir compte du fait que la contrainte normale à la surface moyenne de l'élément ( $\sigma_{33}$ ) est négligeable [Char.90],[Tri.09], [Bela.99] et [Ait.84].

Donc, afin de représenter le comportement réel de la flexion des plaques (épaisses ou minces), la relation contrainte-déformation des plaques isotropes homogènes en flexion est donnée par l'équation (2-5).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kd_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kd_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Les constantes sont définies comme suit:

$$d_{33} = \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)}, d_{44} = \frac{(1-\nu)}{2}, k = \frac{5}{6}$$

Où G,  $\nu$ , E et k sont module de cisaillement, coefficient de poisson, module de Young et coefficient de correction de cisaillement respectivement.

### 3) Formulation de l'élément développé SBBNN [Mes.19]

Considérons un élément brique basé sur l'approche en déformation (SBBNN) avec neuf nœuds, huit nœuds de coin et un nœud centré comme montré dans la figure 2.1. Trois degré de liberté (déplacements U, V et W) pour chaque nœud considérer.

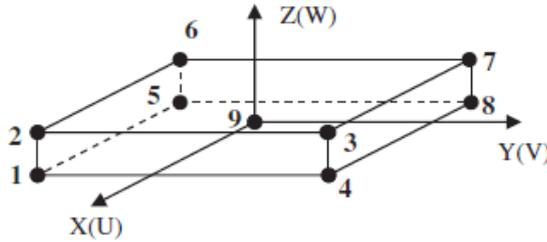


Figure 2.1 Élément brique à 9 nœuds

Le champ de déplacement est divisé en deux composantes ou le premier concerne les modes du corps rigides et le second est du à la déformation de l'élément.

La partie de déplacement représentant les modes du corps rigides sont obtenues en intégrant l'équation (1) avec l'ensemble des six déformations égales à zéro:

$$\begin{cases} U = \alpha_1 + \alpha_4 y + \alpha_6 z \\ V = \alpha_2 - \alpha_4 x - \alpha_5 z \\ W = \alpha_3 + \alpha_5 y - \alpha_6 x \end{cases} \quad (2-6)$$

Ou  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_6$  sont six constantes.

Les déplacements sont approximés en utilisant des fonctions de forme contenant 27 constantes indépendantes. Six constantes sont déjà employées.

Les 21 autres constantes sont utilisées pour exprimer les déplacements correspondant à la déformation de l'élément satisfaisant les équations d'équilibre donnée par les équations (2-3) et les

équations de compatibilités données par les équations (2-2). Ceux-ci sont répartis entre les déformations comme suit :

$$\varepsilon_{xx} = \alpha_7 + \alpha_8 y + \alpha_9 z + \alpha_{10} yz - \alpha_{12} ux - \alpha_{14} uxz + \alpha_{25} x$$

$$\varepsilon_{yy} = -\alpha_8 uy - \alpha_{10} uyz + \alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} z + \alpha_{14} xz + \alpha_{26} y$$

$$\varepsilon_{zz} = \alpha_{15} + \alpha_{16} x + \alpha_{17} y + \alpha_{18} xy + \alpha_{27} z$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_{19} + \alpha_{20} z - \alpha_{18} z^2 - \alpha_{25} \frac{2}{(1-\nu)} y - \alpha_{26} \frac{2}{(1-\nu)} x \quad (2-7)$$

$$\gamma_{yz} = \alpha_{21} + \alpha_{22} x - \alpha_{10} x^2 - \alpha_{27} \frac{(6(1+\nu))}{(5(1-(2\nu)))} y$$

$$\gamma_{xz} = \alpha_{23} + \alpha_{24} y - \alpha_{14} y^2 - \alpha_{27} \frac{(6(1+\nu))}{(5(1-(2\nu)))} x$$

Les déformations données par équations (7) satisfont les équations de compatibilité données par équations (2). Les expressions (7) sont égales aux équations en fonction de U, V et W de équations (1) et les équations qui en résultent sont intégrés pour obtenir :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_7 x + \alpha_8 xy + \alpha_9 xz + \alpha_{10} xyz - \frac{1}{2} \alpha_{12} (\vartheta x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \alpha_{14} (\vartheta x^2 z + y^2 z) - \frac{1}{2} \alpha_{16} z^2 - \frac{1}{2} \alpha_{18} yz^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{19} y + \frac{1}{2} \alpha_{20} yz - \frac{1}{2} \alpha_{22} yz + \frac{1}{2} \alpha_{23} z + \frac{1}{2} \alpha_{24} yz + \alpha_{25} \left( \frac{1}{2} x^2 + \frac{y^2}{1-\vartheta} \right) \\ V &= -\frac{1}{2} \alpha_8 (\vartheta y^2 + x^2) - \frac{1}{2} \alpha_{10} (\vartheta y^2 z + x^2 z) + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy + \alpha_{13} yz + \alpha_{14} xyz - \frac{1}{2} \alpha_{17} z^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{18} xz^2 + \frac{1}{2} \alpha_{19} x + \frac{1}{2} \alpha_{20} xz + \frac{1}{2} \alpha_{21} z + \frac{1}{2} \alpha_{22} xz - \frac{1}{2} \alpha_{24} xz + \alpha_{26} \left( \frac{1}{2} y^2 + \frac{x^2}{1-\vartheta} \right) \\ W &= -\frac{1}{2} \alpha_9 x^2 + \alpha_{10} \left( \frac{\vartheta y^3}{6} - \frac{1}{2} yx^2 \right) - \frac{1}{2} \alpha_{13} y^2 + \alpha_{14} \left( \frac{\vartheta x^3}{6} - \frac{1}{2} xy^2 \right) + \alpha_{15} z + \alpha_{16} xz + \alpha_{17} yz \\ &\quad + \alpha_{18} xyz - \frac{1}{2} \alpha_{20} xy + \frac{1}{2} \alpha_{21} y + \frac{1}{2} \alpha_{22} xy + \frac{1}{2} \alpha_{23} x + \frac{1}{2} \alpha_{24} xy \\ &\quad + \alpha_{27} \left( \left( \frac{-0.6(1+\vartheta)}{(1-2\vartheta)} (x^2 + y^2) \right) + \frac{z^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (2-8)$$

Les fonctions de déplacements finaux sont obtenues par addition équations (2-8) et (2-6) pour obtenir:

$$\begin{aligned}
 U &= \alpha_1 + \alpha_4 y + \alpha_6 z + \alpha_7 x + \alpha_8 xy + \alpha_9 xz + \alpha_{10} xyz - \frac{1}{2} \alpha_{12} (vx^2 + y^2) - \frac{1}{2} \alpha_{14} (vx^2 z + y^2 z) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{16} z^2 - \frac{1}{2} \alpha_{18} yz^2 + \frac{1}{2} \alpha_{19} y + \frac{1}{2} \alpha_{20} yz - \frac{1}{2} \alpha_{22} yz + \frac{1}{2} \alpha_{23} z + \frac{1}{2} \alpha_{24} yz \\
 &\quad + \alpha_{25} \left( \frac{1}{2} x^2 + \frac{y^2}{1-v} \right) \\
 V &= \alpha_2 - \alpha_4 x - \alpha_5 z - \frac{1}{2} \alpha_8 (vy^2 + x^2) - \frac{1}{2} \alpha_{10} (vy^2 z + x^2 z) + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy + \alpha_{13} yz + \alpha_{14} xyz \\
 &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{17} z^2 - \frac{1}{2} \alpha_{18} xz^2 + \frac{1}{2} \alpha_{19} x + \frac{1}{2} \alpha_{20} xz + \frac{1}{2} \alpha_{21} z + \frac{1}{2} \alpha_{22} xz - \frac{1}{2} \alpha_{24} xz \\
 &\quad + \alpha_{26} \left( \frac{1}{2} y^2 + \frac{x^2}{1-v} \right) \\
 W &= \alpha_3 + \alpha_5 y - \alpha_6 x - \frac{1}{2} \alpha_9 x^2 + \alpha_{10} \left( \frac{vy^3}{6} - \frac{1}{2} yx^2 \right) - \frac{1}{2} \alpha_{13} y^2 + \alpha_{14} \left( \frac{vx^3}{6} - \frac{1}{2} xy^2 \right) + \alpha_{15} z \\
 &\quad + \alpha_{16} xz + \alpha_{17} yz + \alpha_{18} xyz - \frac{1}{2} \alpha_{20} xy + \frac{1}{2} \alpha_{21} y + \frac{1}{2} \alpha_{22} xy + \frac{1}{2} \alpha_{23} x + \frac{1}{2} \alpha_{24} xy \\
 &\quad + \alpha_{27} \left( \left( \frac{-0.6(1+v)}{(1-2v)} (x^2 + y^2) \right) + \frac{z^2}{2} \right) \tag{2-9}
 \end{aligned}$$

Les fonctions de déplacement de l'équation (2-9) peuvent être données sous forme matricielle :

$$\{u\} = [C_u]\{A\} \tag{2-10}$$

\{A\} est le vecteur des constants \{\alpha\_i\} = 1...27,

La matrice [C<sub>u</sub>] est donnée comme suit:

$$[C_u] = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & y & 0 & z & x & xy & xz & \frac{xyz}{6} & -0.5(vy^2 z + x^2 z) & 0 & -0.5(vx^2 + y^2) & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -x & -z & 0 & 0 & -0.5(vy^2 + x^2) & 0 & y & xy & yz & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & y & -x & 0 & 0 & -0.5x^2 & \frac{vy^3}{6} - 0.5yx^2 & 0 & 0 & 0 & -0.5y^2 \\
 -0.5(vx^2 z + y^2 z) & 0 & -0.5z^2 & 0 & -0.5y_i z^2 & 0.5y & 0.5yz & 0 & -0.5yz & 0.5z & 0.5yz & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{xyz}{6} & 0 & 0 & -0.5z^2 & -0.5xz^2 & 0.5x & 0.5xz & 0.5z & 0.5xz & 0 & -0.5xz & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{vx^3}{6} - 0.5xy^2 & z & xz & yz & xyz & 0 & -0.5xy & 0.5y & 0.5xy & 0.5x & 0.5xy & 0 & 0 & 0 \\
 0.5x^2 + \frac{y^2}{1-v} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5y^2 + \frac{x^2}{1-v} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{-0.6(1+v)}{(1-2v)}(x^2 + y^2) + 0.5z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de déformation de l'équation (2-7) peut être redéfinir comme :

$$\{\varepsilon\} = [C_\varepsilon]\{A\} \tag{2-11}$$

La matrice [C<sub>ε</sub>] associée aux composantes de la contrainte est donnée par:

$$[C_\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & z & yz & 0 & -vx & 0 & -vzx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -vy & 0 & -vyz & 1 & x & z & xz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z^2 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{ccc} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{1-v}y & \frac{-2}{1-v}x & \frac{-6(1+v)}{5(1-2v)}y \\ 0 & 0 & \frac{-6(1+v)}{5(1-2v)}x \\ 0 & 0 & \frac{-6(1+v)}{5(1-2v)}x \end{array} \right]$$

Considérons le vecteur suivant  $\{q_e\}$  des degrés de liberté nodale total pour un domaine élémentaire générique  $\Omega_e$ :

$$\{q_e\}^T = [U^{(1)}V^{(1)}W^{(1)} \dots \dots \dots U^{(9)}V^{(9)}W^{(9)}] \quad (2-12)$$

Le vecteur  $\{q_e\}$  est exprimé en fonction des paramètres constants  $\{A\}$  en utilisant les équations (8) comme :

$$\{q_e\} = [C]\{A\} \quad (2-13)$$

$[C]$  est une matrice de 27x27 calculée à partir de la matrice  $[C_u]$  en utilisant les coordonnées de chaque nœud.

Les fonctions de déplacement et le vecteur de déformation  $\{\varepsilon\}$  des équations (2-10) et (2-11) sont exprimés à partir du vecteur des degrés de liberté  $\{q_e\}^T$  comme suit :

$$\{u\} = [C_u][C]^{-1}\{q_e\} \quad (2-14)$$

$$\{\varepsilon\} = [C_\varepsilon][C]^{-1}\{q_e\} \quad (2-15)$$

Sachant que:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2-16)$$

La forme standard faible pour les cas statique et vibrations libres peut être exprimée respectivement:

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \delta\{U\}^T \{f\} dV \quad (2-17)$$

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV + \int_V \delta\{U\}^T \{\ddot{U}\} dV = 0 \quad (2-18)$$

En remplaçant les équations (2-14), (2-15) et (2-16) aux équations (2-17) et (2-18) on obtient:

$$\int_V \{\delta q_e\}^T ([C]^{-1})^T [C_\varepsilon]^T [D] [C_\varepsilon] [C]^{-1} \{q_e\} dV = \int_{\partial V_F} \{\delta q_e\}^T ([C]^{-1})^T [C_u]^T \{f\} dV \quad (2-19)$$

$$\int_V \{\delta q_e\}^T ([C]^{-1})^T [C_\varepsilon]^T [D] [C_\varepsilon] [C]^{-1} \{q_e\} dV + \rho \int_V \{\delta q_e\}^T ([C]^{-1})^T [C_u]^T [C_u] [C]^{-1} \{\dot{q}_e\} dV = 0 \quad (2-20)$$

L'équation d'équilibre global pour le cas statique et le cas des vibrations libres est réécrite comme suit:

$$\begin{cases} [K]\{q\} = [F] \\ ([K] - \omega^2[M])\{q\} = \{0\} \end{cases} \quad (2-21)$$

$\{q\}$  est le vecteur global de la poutre.  $\{K\}$  est la matrice de rigidité,  $\{M\}$  est la matrice de masse et  $\{F\}$  est le vecteur de charge. Ils sont obtenus en assemblant les contributions des éléments individuels à l'aide des matrices élémentaires données comme suit:

$$\begin{aligned} [K_e] &= ([C]^{-1})^T \left( \int_{\Omega_e} [C_\varepsilon]^T [D] [C_\varepsilon] dV \right) [C]^{-1} = ([C]^{-1})^T [K_0] [C]^{-1} \\ [M_e] &= ([C]^{-1})^T \left( \rho \int_{\Omega_e} [C_u]^T [C_u] dV \right) [C]^{-1} = ([C]^{-1})^T [M_0] [C]^{-1} \end{aligned} \quad (2-22)$$

$$\{F_e\} = [C]^{-T} \int_{\partial\Omega_e} [C_u]^T \{f\} dS$$

Une intégration numérique réduite de Gauss sur le volume est utilisée pour évaluer les matrices élémentaires de rigidité et de masse avec un schéma de points 2x2x2.

### Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu développer un élément fini brique (SBBNN) en 3D basé sur l'approche en déformation, avec trois degrés de liberté essentiels par nœud (u, v et w) dédié à l'analyse des structures. La matrice d'élasticité utilisée dans la formulation de cet élément est modifiée en introduisant les constantes de contraintes planes et un coefficient de cisaillement transversal.

# CHAPITRE 3

## IMPLEMENTATION ET VALIDATION NUMERIQUE DE L'ELEMENT DEVELOPPE EN STATIQUE ET EN VIBRATION LIBRE

### Sommaire

---

<b>1) Introduction</b>	<b>28</b>
<b>2) Présentation d'ABAQUS</b>	<b>28</b>
<b>Les user subroutines dans ABAQUS</b>	<b>30</b>
<b>Éléments définis par l'utilisateur dans les ABAQUS</b>	<b>30</b>
<b>3) Validation numérique</b>	<b>32</b>
<b>3.1 Validation numérique en statique</b>	<b>33</b>
• <i>Test de la poutre élancée de MacNeal</i>	33
• <i>Test d'incompressibilité</i>	34
• <i>Poutre consol soumise à une charge de flexion plane</i>	35
• <i>Plaque carré simplement supporté soumise à une charge concentrée</i>	36
• <i>Tests de convergence pour les plaques circulaires</i>	37
• <i>Test de sensibilité à l'élancement (L/h)</i>	38
• <i>Tests des poutres de Cheung et Chen</i>	39
<b>3.2 Validation numérique en vibration libre</b>	<b>41</b>
• <i>Vibrations de flexion hors du plan d'une poutre élastique isotrope rectangulaire</i>	41
• <i>Vibrations transversales d'une plaque rectangulaire mince simplement appuyée</i>	42
• <i>Vibrations transversales d'une plaque carrée épaisse</i>	43
• <i>Vibration libre des plaques circulaires uniformes</i>	44
<b>Conclusion</b>	<b>45</b>

---

## 1) Introduction

Ce travail de recherche consiste à développer un nouvel élément fini volumique basé sur le champ de déformation et les intégrer dans le code de calcul de structure par éléments finis ABAQUS à l'aide de la sous-routine UEL (sous-routine User Elément d'ABAQUS).

Dans ce chapitre, on va présenter l'outil numérique utilisé dans l'implémentation de l'élément développé (ABAQUS), puis on expose les tests de validation en statique et en vibration libre.

## 2) Présentation d'ABAQUS

ABAQUS est une suite de puissants programmes de simulation d'ingénierie basés sur la méthode des éléments finis créé en 1978, commercialisée par Dassault Systèmes dans le cadre de sa gestion du cycle de vie des produits SIMULIA (PLM) outils logiciels. ABAQUS est connu et très largement utilisé dans les industries automobiles et aéronautiques, en particulier pour ses traitements performants de problèmes linéaires et non-linéaires.

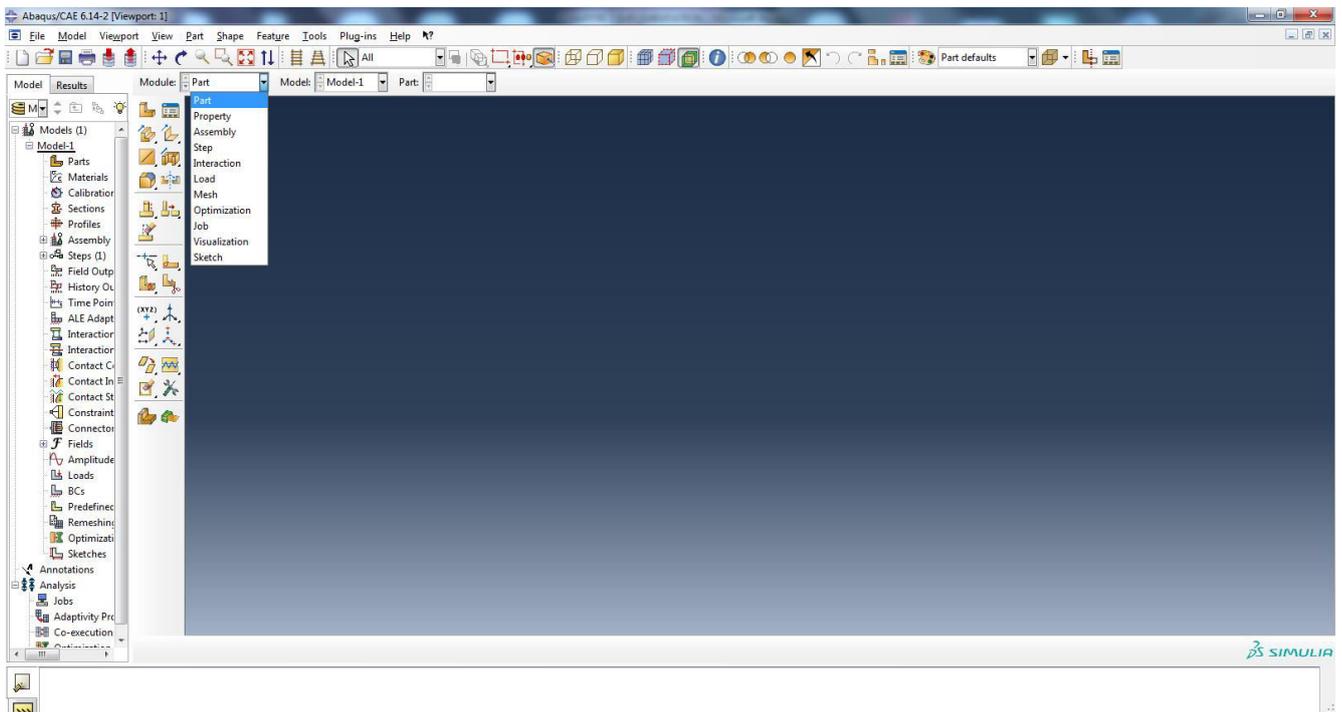


Figure 3.1 L'interface du logiciel ABAQUS

Les caractéristiques uniques d'ABAQUS comprennent :

- ABAQUS contient une vaste bibliothèque d'éléments pouvant modéliser virtuellement n'importe quelle géométrie.

- Vous pouvez importer la géométrie à partir de nombreux logiciels de CAO.
- En utilisant ABAQUS, vous devriez pouvoir utiliser différents modèles de matériaux pour simuler le comportement de la plupart des matériaux d'ingénierie typiques, y compris les métaux, le caoutchouc, les polymères, composites, béton armé, mousses déformables et résineuses et matériaux géotechnique tels que les sols et la roche.
- Conçu comme un outil de simulation à usage général, ABAQUS peut être utilisé pour étudier en précision des problèmes structurels (stress / déplacement). Il peut simuler des problèmes dans une telle diversité comme transfert de chaleur, diffusion de masse, gestion thermique des composants électriques (analyses couplées thermo-électriques), acoustique, mécanique des sols (fluides couplés), et l'analyse piézoélectrique.
- ABAQUS offre un large éventail de capacités pour la simulation linéaire et non linéaire. Les problèmes avec plusieurs composants sont modélisés en associant la géométrie définissant chaque composant avec les modèles de matériaux appropriés et spécifiant interactions entre composants. Dans une analyse non linéaire, ABAQUS choisit automatiquement les incréments de charge et les tolérances de convergence et les ajuste continuellement pendant l'analyse pour s'assurer qu'une solution précise est obtenue efficacement.
- Vous pouvez également effectuer des analyses statiques et dynamiques.

Il se compose de quatre produits : Abaqus/Standard, Abaqus/Explicit, Abaqus/CAE et Abaqus / Viewer:

- **ABAQUS/Standard** représente le code de calcul implicite dédié aux calculs quasi-statiques, linéaires ou non, thermiques, acoustiques.
- **ABAQUS/Explicit** emploie un schéma d'intégration explicite pour résoudre des problèmes dynamiques ou quasi-statiques non-linéaires.
- **ABAQUS/CAE**, Ce module permet la définition et la visualisation des différentes simulations. Initialement, les problèmes sont définis par des entités géométriques pour lesquelles seront définis les propriétés physiques et pour les différentes étapes de calcul.
- **ABAQUS/Viewer**, est un sous-ensemble d'ABAQUS/CAE qui contient uniquement les fonctionnalités de post-traitement du module de visualisation.

ABAQUS/CAE se présente sous la forme d'une interface graphique et propose les dix sous modules suivants (voir détails dans l'annexe A) : Part module, Property module, Assembly module, Step module, Interaction module, Load module, Mesh module, Sketch module, Job module, Visualization. Les huit premiers sous-modules servent à définir le problème mécanique à simuler. Le

module Job est celui qui gère le calcul de simulation proprement dit, c'est-à-dire le cœur du code. Enfin, le dernier module regroupe tout ce qui concerne l'exploitation des résultats sous forme de diverses visualisations. Nous allons utiliser ces dix sous-modules (dans le fichier UEL\*.inp) pour le calcul de User Element dans la partie suivante.

### Les user subroutines dans ABAQUS

Les utilisateurs peuvent utiliser les user subroutines quand ils ont besoin d'augmenter la fonctionnalité d'ABAQUS. Ces user subroutines fournissent un outil extrêmement puissant et flexible pour l'analyse des structures. On peut généralement les écrire en FORTRAN, C et doivent être inclus dans un modèle.

La figure fig. 3.2 présente quelques types de user subroutines utilisées dans ABAQUS et leurs fonctions : UEL (définir un élément), UMAT (définir le comportement mécanique du matériau), DLOAD (définir les charges de distribution).

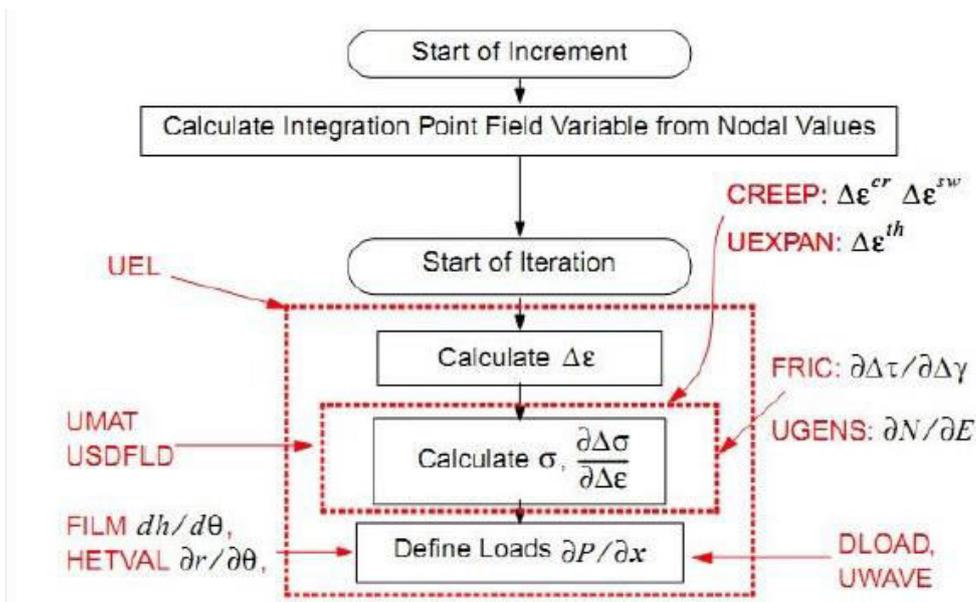


Figure 3.2 Quelques user subroutines dans Abaqus (Source : internet)

### Éléments définis par l'utilisateur dans les ABAQUS

De nouveaux éléments finis peuvent être implémentés dans ABAQUS en développant un sous-programme noté UEL (User Element) qui exécute les calculs d'élément nécessaires et s'interface avec programme ABAQUS principal via une liste de paramètres normalisée dans l'instruction d'appel du sous-programme.

L'instruction \*USER SUBROUTINE dans la platine d'entrée alerte ABAQUS de la présence de sous-routines définies par l'utilisateur qui suivent immédiatement cette saisie de données ou sont contenues dans un fichier. Ces sous-routines sont ensuite compilées et liées au principal exécutable ABAQUS avant l'exécution du travail.

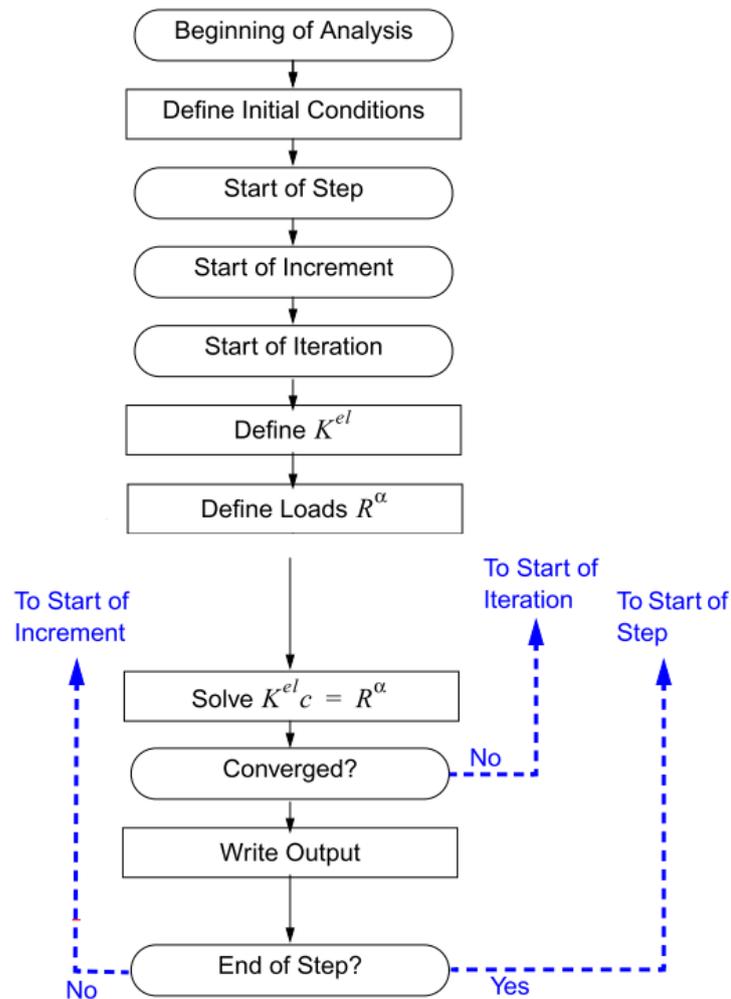


Figure 3.3 Schéma Global dans les ABAQUS

### 3) Validation numérique

Les calculs sont effectués en utilisant différents éléments:

- Les éléments d'ABAQUS:
  - C3D8: un élément hexaédrique classique de premier ordre à huit nœuds avec un schéma d'intégration numérique exact.
  - C3D8I: un élément hexaédrique à huit nœuds entièrement intégré avec 13 modes incompatibles utilisés pour empêcher le cisaillement transverse et le verrouillage du coefficient de Poisson.
  - C3D20: un élément hexaédrique classique de deuxième ordre de 20 nœuds avec un schéma d'intégration numérique exact.
- PN340: élément brique à huit nœuds dont les fonctions d'interpolation satisfont exactement l'équation de Navier.
- PN34: éléments hexaèdres dont les fonctions d'interpolation sont basées sur la solution de Papcovitch-Neuber et à l'équation de Navier.
- PN5X1: élément en brique à 14 nœuds.
- HEXA8, HEXA20: éléments briques à 8 et 20 nœuds respectivement.
- B14: un élément avec 14 nœuds, 8 nœuds au sommet de la brique et 6 nœuds au centre des faces.
- Fc: un élément brique à huit nœuds dans la forme cohérente avec le champ.
- FI: un élément brique à huit nœuds dans la forme incompatible avec le champ.
- HIS: élément hexaédrique à huit nœuds basé sur la technique de la déformation améliorée.
- NUHEXIN-4: élément fini sous-intégré à huit nœuds.
- HEXDS: un élément fini hexaédrique sous-intégré à huit nœuds.
- SFR8: un élément hexaédrique à huit nœuds basé sur le concept de rotation des fibres spatiales.
- Wilson H8: un élément brique à huit nœuds incompatible selon la méthode de Wilson.
- HVCC8, HVCC86EM: des éléments hexaédriques à huit nœuds incompatible basé sur la Méthode des coordonnées de volume hexaédrique.

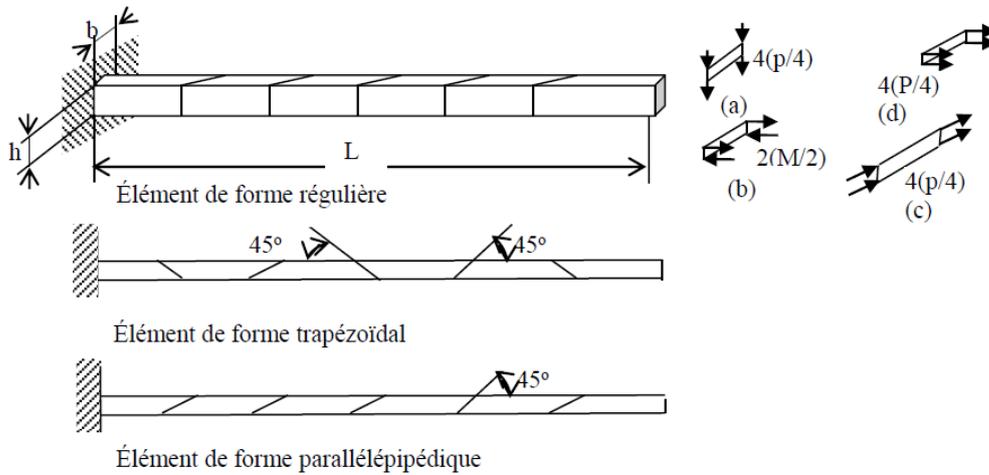
L'élément formulé est implémenté dans le code de calcul ABAQUS en utilisant la subroutine UEL (User Element subroutine of ABAQUS).

### 3.1 Validation numérique en statique

- *Test de la poutre élancée de MacNeal*

Le problème d'une poutre élancée montré sur la figure.3.4 a été traité par MacNeal et Harder. Celui-ci est considéré comme test d'une poutre mince avec cisaillement dans le plan et hors plan, un effort de traction et un moment de flexion constant. Cette analyse est considérée comme test d'une poutre mince avec cisaillement dans le plan et hors plan, un effort de traction et un moment de flexion constant. Trois formes de maillage différentes, rectangulaire, trapézoïdale et parallélogramme sont considérées. Cet exemple est une référence significative pour tester la sensibilité de maillage à la distorsion.

La déformation normalisée (qui est la flèche calculée divisée par la flèche exacte) à l'extrémité libre de la poutre est indiquée dans le tableau 3.1. Les résultats sont obtenus en utilisant différents éléments et comparés avec le présent élément. L'élément courant à champ de déformation SBBNN présente une excellente performance et donne de bons résultats pour tous les types de chargement et toutes les formes de mailles car il est libre pour tout phénomène de blocage.



**Figure 3.4** Poutre élancée de MacNeal ( $P=1$ ,  $M=10$ ,  $L=6$ ,  $h=0.2$ ,  $E=10^7$ ,  $\nu=0.3$  and  $b=0.1$ ).

**Tableau 3.1** Tests de la poutre élancée de MacNeal (les valeurs sont normalisées)

<b>REGULIERE</b>							
Type de chargement	HEXA(8) [Bas.00a]	HEXA(20) [Bas.00a]	ANSYS [Bas.00a]	PN340 [Bas.00a]	PN34 [Bas.00a]	PN5X1 [Bas.00b]	SBBNN
a	0.981	0.970	0.979	0.982	0.981	0.998	0.981
b	-	-	-	-	-	0.999	0.991
c	0.981	0.961	0.973	0.980	0.980	1.000	1.015
d	-	-	-	0.990	-	0.985	0.996
<b>TRAPEZOIDALE</b>							
a	0.069	0.886	0.047	0.065	0.982	0.999	0.982
b	-	-	-	-	-	1.000	0.991
c	0.051	0.920	0.030	0.370	0.962	0.996	0.988
d	-	-	-	1.150	-	0.988	1.035
<b>PARALLELIPIPEDIQUE</b>							
a	0.080	0.967	0.624	0.620	0.981	0.997	0.982
b	-	-	-	-	-	1.000	0.992
c	0.055	0.941	0.529	0.547	0.971	0.998	0.947
d	-	-	-	1.030	-	0.989	1.002
Théorie	Type (a) déflexion à l'extrémité libre $w=0.1080$ Type (b) déflexion à l'extrémité libre $w=0.27$ Type (c) déflexion à l'extrémité libre $w=0.4321$ Type (d) allongement à l'extrémité libre $u=3.0 \times 10^{-5}$						

- **Test d'incompressibilité**

Ce test étudie l'effet de la variation du coefficient du poisson sur le comportement d'un élément. La figure suivante présente une poutre consol soumise à une force de tension à son extrémité libre. La poutre est divisée en deux éléments. La section est égale à 1 ; la longueur est égale à 1 ; le module de young est égal à  $10^6$  et le coefficient de poisson varie entre 0 et 0.49999. Les résultats sont présentés sur la Tableau 3.2.

D'après les résultats, nous remarquons que l'élément développé ne présente aucun blocage dû à l'incompressibilité (stabilité des résultats) ainsi B14 et Fc contrairement à FI.

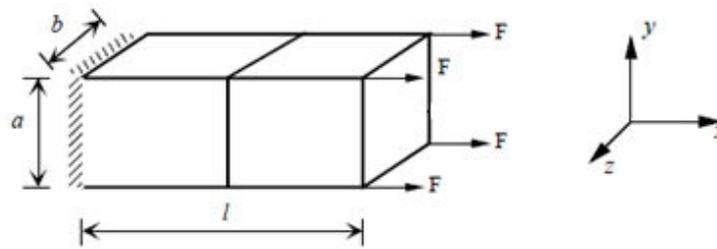


Figure 3.5 Essai d'incompressibilité pour une poutre soumise à une traction

Tableau 3.2 Déplacement axial d'une poutre soumise à une traction

Coefficients de poisson	Déplacement Axial				Solution de référence
	B14 [Belar.05]	FC [Cha.89]	FI [Cha.89]	SBBNN	
0.0	0.1E-05	0.1E-05	0.1E-05	0.1E-05	10 <sup>-6</sup>
0.45	0.9373E-06	0.8876E-06	0.7735E-05	0.9681E-06	
0.495	0.9102E-06	0.8607E-06	0.3106E-06	0.9605E-06	
0.4995	0.9072E-06	0.8577E-06	0.4551E-06	0.9596E-06	
0.49995	0.9069E-06	0.8574E-06	0.4775E-06	0.9596E-06	
0.499995	0.9069E-06	0.8574E-06	0.4800E-09	0.9596E-06	

- **Poutre consol soumise à une charge de flexion plane**

Dans ce test, une poutre consol sous un moment de flexion pur  $M=2000$  est analysée afin d'évaluer la sensibilité au maillage distordu. La poutre montrée dans la figure suivante est divisée en deux éléments briques avec une excentricité  $e \in [0, 4.9]$  comme suggéré Piltner et Taylor. La forme des deux éléments varie en fonction de la variété du paramètre de distorsion  $e$ . si  $e=0$ , les deux éléments sont rectangulaires. Mais avec l'augmentation de  $e$ , le maillage sera plus distordu. Le déplacement vertical normalisé au point A est déterminé par le rapport du déplacement calculé au déplacement de référence et les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.3. Le déplacement vertical de référence à l'extrémité libre est égal à 100.

Nous constatons que le présent élément est moins sensible au maillage distordu que les autres éléments et il devient plus précis que l'élément solide d'ABAQUS pour les distorsions sévères.

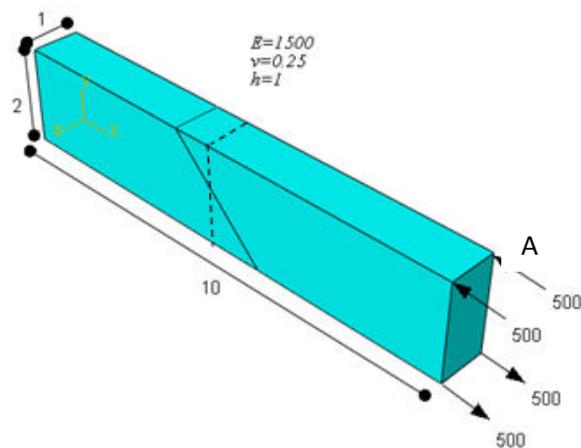


Figure 3.6 Poutre cantilever modélisée par deux éléments distordus

Tableau 3.3 Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre de la poutre

e	SBBNN	C3D8	C3D8I	C3D20
0	0.983	0.339	0.987	0.970
0.5	0.983	0.270	0.588	0.974
1	0.981	0.183	0.341	0.977
2	0.975	0.117	0.256	0.867
3	0.966	0.095	0.272	0.524
4	0.960	0.079	0.298	0.267
4.9	0.957	0.066	0.312	0.171

- *Plaque carré simplement supporté soumise à une charge concentrée*

Une plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge concentrée au centre est analysée (Figure 3.7). L'exemple est étudié par ([Are.03]; [And.93]; [Sou.03]) ainsi que par [Aya.13]. En raison de la symétrie du problème, seul le quart de la plaque est modélisé à l'aide d'un maillage régulier. Le déplacement de référence transversal au centre est calculé par la théorie de Kirchhoff et égal à l'unité. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.4.

On peut voir que l'élément actuel avec un nombre minimal de degrés de liberté globaux converge rapidement de manière adéquate pour les solutions de référence.

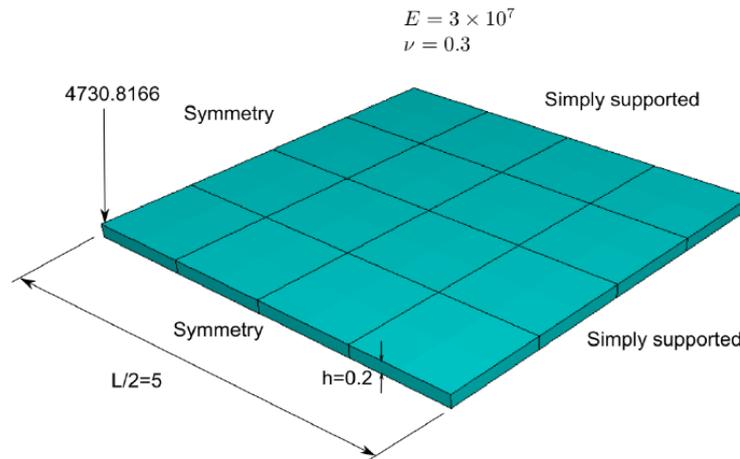


Figure 3.7 Plaque carrée simplement appuyée

Tableau 3.4 Déplacement transversal normalisé au centre de la plaque (Plaque carrée simplement appuyée)

N	SBBNN	SFR8 [Aya.13]	C3D8I	C3D20	HIS [Are.03]	NUHEXIN-4 [Liu.94]	HEXDS [Liu.98]
2	0.753 (66)*	0.266 (108)	0.399 (106)	0.868 (153)	1.063	-	-
4	0.929 (198)	0.423 (300)	0.908 (358)	0.978 (465)	1.016	1.151 2 Elt/Eps	1.162 2 Elt/Eps
8	0.989 (678)	0.558 (972)	0.999 (1318)	1.007 (1593)	1.011	1.034 4 Elt/Eps	1.045 4 Elt/Eps
16	1.009 (2502)	0.707 (3468)	1.012 (5062)	1.017 (5865)	1.015	1.036 4 Elt/Eps	1.052 4 Elt/Eps

\* : Nombre de ddl

- **Tests de convergence pour les plaques circulaires**

Dans ce test, nous évaluons les performances du présent élément au verrouillage par cisaillement. Une plaque circulaire soumise à une charge concentrée est considérée. L'épaisseur de la poutre est  $t = 0.1$ . Le module de Young de la plaque est  $E = 10,92$ , le coefficient de Poisson est  $\nu = 0,3$ , le rayon est  $R = 5$ . Deux types de conditions aux limites sont appliqués, simplement appuyée et encastrement. La théorie de Kirchhoff calcule le déplacement de référence transversal au centre. En raison de la symétrie, seul le quart de la plaque circulaire est modélisé avec 12, 48, 108 et 192 éléments, comme illustré à la figure 3.8.

Nous remarquons que l'élément actuel se comporte presque comme C3D8I et C3D20 et converge rapidement à la solution de référence.

$E=10.92$   
 $\nu=0.3$   
 $t=0.1$   
 $R=5$   
 Unit point load

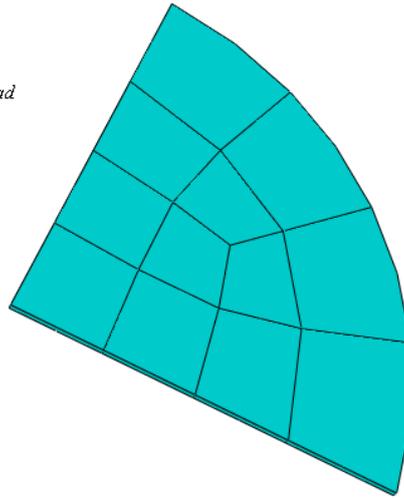


Figure 3.8 La plaque circulaire modélisée avec 12 éléments

Tableau 3.5 Déplacement vertical normalisé au centre de la plaque

Conditions aux limites	N	SBBNN	C3D8	C3D8I	C3D20	Déflexions théoriques [Tim.59]
Simplement appuyée	12	0,875	0,021	0,755	0,964	5.050
	48	0,976	0,080	0,969	0,991	
	108	0,992	0,172	0,991	0,997	
	192	0,996	0,292	0,997	0,999	
encastrement	12	0,572	0,021	0,605	0,827	1.989
	48	0,914	0,080	0,940	0,964	
	108	0,968	0,175	0,983	0,986	
	192	0,984	0,297	0,994	0,993	

- *Test de sensibilité à l'élancement (L/h)*

Ce test est utilisé pour évaluer la sensibilité d'un élément au verrouillage lorsque l'élancement ( $L / h$ ) devient élevé (Fig. 3.9). Il a été proposé par Robinson [Rob.86] et étudié par [Bas.00b] [Bas.00a]. C'est une poutre modélisée par un seul élément et soumise à une charge qui génère un état de flexion pure sans l'influence du cisaillement. Une variation de la longueur de la poutre est réalisée de manière à obtenir un élancement (longueur en hauteur) allant de 1 à 16.

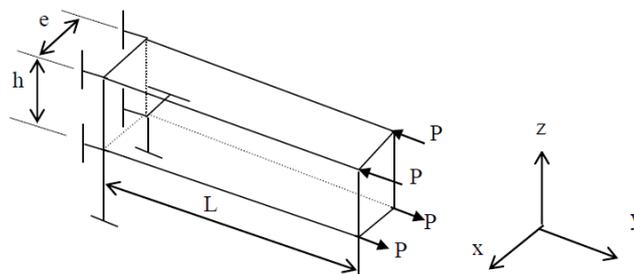


Figure 3.9 Test de sensibilité ( $E = 207E09$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu=0.25$ ,  $h=e = 0.12$  m,  $P = 6900$  N and  $L/h= 1-16$ )

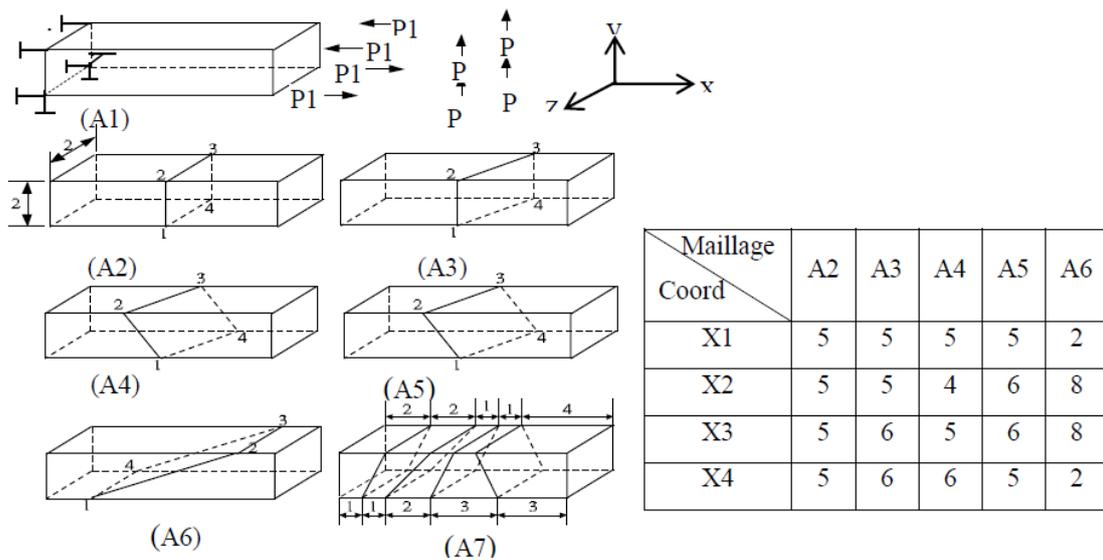
Les résultats (Tableau 3.6) en termes de déplacement montrent que l'élément développé n'a pas été verrouillé, même avec un élanement plus élevé. Les déplacements verticaux obtenus pour toutes les élanements sont presque égaux aux valeurs théoriques.

**Tableau 3.6** Déflexion normalisée pour le test de sensibilité à l'élanement d'un élément

Elancement	PN5X1 [Bas.00b]	FC CSA/NASTRAN [Bas.00a]	PN340 [Bas.00a]	SBBNN	Théorie ( $10^{-6}$ ) [Bas.00a]
1	1.0	0.938	1.0	1.00	3.33
2	1.00	0.937	1.00	1.00	13.33
4	1.00	0.937	1.00	1.00	53.33
8	1.00	0.937	1.00	1.00	213.3
16	1.00	0.937	-	1.00	853.3

• **Tests des poutres de Cheung et Chen**

Ce problème a été proposé par Cheung et Chen et traité par [Li.08] pour tester les performances des éléments hexaédriques. Sept configurations différentes de A1 à A7, comme indiqué dans la figure 3.10.



**Figure 3.10** Test de Cheung et Chen ( $P1=1000$ ,  $P=150$ ,  $E=1500$ ,  $\nu=0.25$ )

Ils montrent l'effet de la distorsion géométrique des éléments sur la précision des résultats des deux cas de charge. Le premier est un moment de flexion à la fin et le second est une force concentrée à l'extrémité libre de la poutre.

Les résultats sont donnés dans les tableaux 3.7 et 3.8. On voit clairement que l'élément développé donne la solution exacte pour une flexion pur et des résultats de cisaillement encore meilleurs. Le nouvel élément basé sur l'approche par déformation se comporte de la même manière que les éléments (HVCC8 et HVCC86EM).

**Tableau 3.7** Déplacement axial d'une poutre soumise à une traction (flexion pure)

Mesh	C3D8	C3D8I	Wilson H8 [Li.08]	HVCC8 [Li.08]	HVCC86EM [Li.08]	SBBNN
<b>A1</b>	0.0956	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000
<b>A2</b>	0.3382	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000
<b>A3</b>	0.2684	0.8756	0.9397	1.0027	1.0039	1.004
<b>A4</b>	0.2529	0.7652	0.8962	1.0020	1.0033	1.003
<b>A5</b>	0.2441	0.7738	0.8836	1.0000	1.0000	1.000
<b>A6</b>	0.0919	0.4516	0.7875	1.0000	1.0000	1.000
<b>A7</b>	0.8013	0.9956	0.9826	1.0000	1.0000	1.000
<b>Théorie</b>	<b>100</b>					

**Tableau 3.8** Déplacement axial d'une poutre soumise à une traction (charge de cisaillement)

Mesh	C3D8	C3D8I	Wilson H8 [Li.08]	HVCC8 [Li.08]	HVCC86EM [Li.08]	SBBNN
<b>A1</b>	0.0942	0.7554	0.7554	0.7554	0.7554	0.7622
<b>A2</b>	0.3329	0.9367	0.9340	0.9340	0.9366	0.9493
<b>A3</b>	0.2648	0.8445	0.8773	0.9254	0.9368	0.9432
<b>A4</b>	0.2692	0.7696	0.8479	0.9295	0.9441	0.9499
<b>A5</b>	0.2485	0.7658	0.8491	0.9383	0.9408	0.9533
<b>A6</b>	0.1330	0.4800	0.8723	1.2292	1.2302	1.232
<b>A7</b>	0.8690	0.9536	0.9770	0.9999	1.0004	1.017
<b>Théorie</b>	<b>102.6</b>					

### 3.2 Validation numérique en vibration libre

L'analyse des vibrations libre des structures constitue l'un des éléments importants de leur conception car elle permet la détermination de leurs fréquences propres. La capacité à résoudre des problèmes de vibration libre est importante dans de nombreux aspects des éléments finis. Dans ce contexte, le problème à résoudre est juste.

$$[k]\{u\} = \lambda\{u\} \quad (3-1)$$

C'est le problème à la valeur propre sous forme standard. Le plus souvent, l'équation de valeur propre décrira une situation physique telle que la vibration libre d'un solide ou d'un fluide. Par exemple, après assemblage, pour un solide élastique qui vibre librement l'équation précédente devient :

$$[K_m]\{X\} = \omega^2 [M_m]\{X\} \quad (3-2)$$

L'élément développé a été implémenté dans le code commercial ABAQUS via « *user element subroutine* » (UEL). Pour les problèmes de vibrations libres, les matrices de rigidité et de masse élémentaires doivent être stockées dans la matrice prédéfinie AMATRX d'ABAQUS à l'aide du tableau LFLAGS.

- ***Vibrations de flexion hors du plan d'une poutre élastique isotrope rectangulaire***

Cet exemple étudie les vibrations de flexion hors plan d'une poutre élastique rectangulaire modélisée avec un maillage régulier constitué de 10 éléments, comme illustré à la figure 3.11. Les expressions analytiques des fréquences transversales naturelles sont données par:

$$f_n = \frac{a_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho SL^4}} \quad (3-3)$$

Où EI est la rigidité à la flexion de la section,  $\rho$  la masse volumique.

Le tableau 3.9 reprend les valeurs des trois premières fréquences propres numériques pour trois configurations: encastrement – libre (CF), encastrement – encastrement (CC) et simplement appuyée (SS).

Nous remarquons que l'élément SBBNN est se comporte mieux que les éléments solides d'ABAQUS C3D8, C3D8I et de la rotation de la fibre spatiale SFR8 et qu'il est en bon accord avec l'élément quadratique d'ABAQUS C3D20.

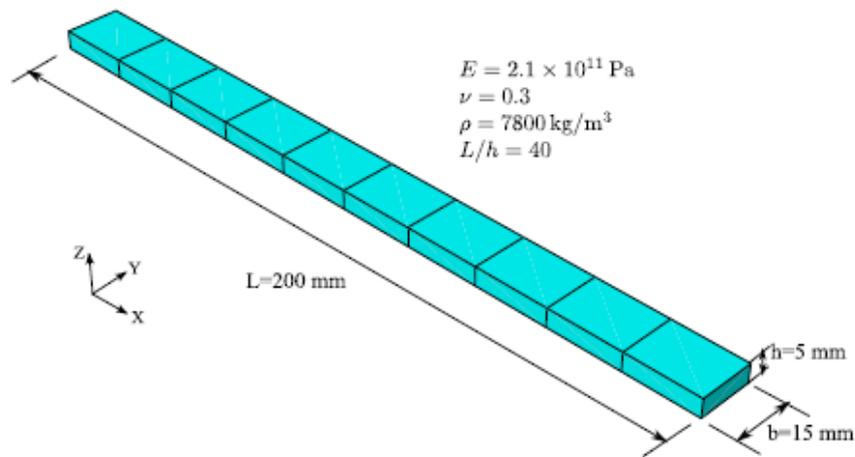


Figure 3.11 La poutre élastique isotrope modélisée avec 10 × 1 × 1 éléments hexaédriques

Tableau 3.9 Les trois premières fréquences naturelles de flexion hors du plan

	C3D8	C3D8I	C3D20	SBBNN	SFR8 [Zou.15]	ANALYT. SOLUT.
<b>CF</b>						
<b>f1</b>	268.85	105.44	106.46	<b>105.08</b>	111.23	<b>104.892</b>
<b>f2</b>	1661.1	658.46	669.49	<b>654.79</b>	703.04	<b>655.578</b>
<b>f3</b>	4583.2	1853.2	1888.4	<b>1824.9</b>	2,000.4	<b>1,838.599</b>
<b>CC</b>						
<b>f1</b>	1715.2	690.39	691.94	<b>682.18</b>	725.65	<b>655.578</b>
<b>f2</b>	4704.5	1943.7	1924.9	<b>1897.9</b>	2,042.0	<b>1,838.599</b>
<b>f3</b>	9141.1	3929.1	3825.4	<b>3751.4</b>	4,123.9	<b>3,605.680</b>
<b>SS</b>						
<b>f1</b>	757.60	295.24	294.65	<b>294.17</b>	309.16	<b>294.104</b>
<b>f2</b>	3020.1	1194.8	1185.2	<b>1176.9</b>	1,246.8	<b>1,176.417</b>
<b>f3</b>	6754.3	2742.0	2692.6	<b>2645.2</b>	2,842.3	<b>2,646.940</b>

- *Vibrations transversales d'une plaque rectangulaire mince simplement appuyée*

Dans cet exemple, nous étudions les vibrations libres transversales d'une plaque rectangulaire mince simplement appuyée. La figure 3.12 montre la géométrie et les caractéristiques du matériau de la plaque. La plaque est modélisée avec un maillage régulier.

Les expressions analytiques des fréquences transversales sont données par:

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{l^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3-4)$$

Où D est la rigidité en flexion de la plaque.

Le tableau 3.10 résume les résultats obtenus. Nous remarquons que les résultats démontrent l'efficacité et l'efficiency de l'élément présent par rapport aux autres éléments.

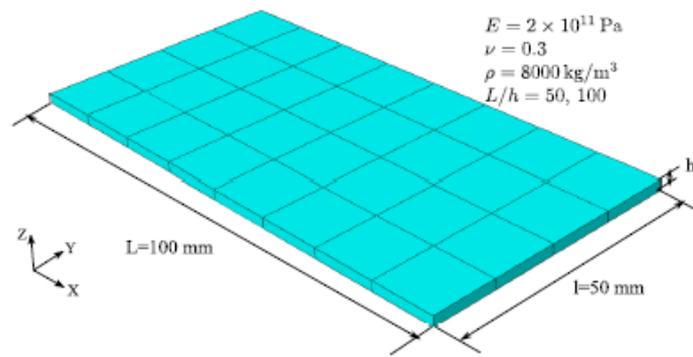


Figure 3.12 La plaque rectangulaire mince simplement supportée modélisée avec des éléments hexaédriques de 8×4×1

Tableau 3.10 Les cinq premières fréquences naturelles transversales

	C3D8	C3D8I	C3D20	SBBNN	SFR8 [Zou.15]	ANALYT. SOLUT.
<b>L/h=50</b>						
<b>f11</b>	72.821	25.149	23.961	<b>25.062</b>	26.447	<b>23.767</b>
<b>f21</b>	96.968	42.270	38.183	<b>41.026</b>	41.856	<b>38.027</b>
<b>f31</b>	165.57	71.879	63.087	<b>70.536</b>	69.172	<b>61.794</b>
<b>f12</b>	277.57	93.762	86.211	<b>93.949</b>	96.68	<b>80.808</b>
<b>f22</b>	273.66	117.73	100.1	<b>115.94</b>	110.34	<b>95.068</b>
<b>L/h=100</b>						
<b>f11</b>	71.737	14.835	12.096	<b>12.703</b>	13.296	<b>11.883</b>
<b>f21</b>	95.073	28.774	19.437	<b>21.211</b>	21.136	<b>19.013</b>
<b>f31</b>	163.32	52.003	32.63	<b>38.967</b>	35.129	<b>30.897</b>
<b>f12</b>	276.39	56.994	44.527	<b>50.096</b>	49.094	<b>40.404</b>
<b>f22</b>	271.94	88.053	52.889	<b>67.377</b>	56.909	<b>47.534</b>

- *Vibrations transversales d'une plaque carrée épaisse*

Dans cette partie, les vibrations transversales libres d'une plaque carrée épaisse sont étudiées (Figure 3.13). Deux configurations sont considérées: premièrement, la plaque avec tous les côtés encastrés (C-C-C-C) et deuxièmement, la plaque est simplement appuyée sur deux côtés et encastrée d'un côté et libre sur le dernier côté (C-S-S-F).

Nous remarquons dans le tableau 3.11 que les résultats des éléments SBBNN restent équivalents à ceux de l'élément quadratique d'ABAQUS C3D20 et qu'un bon accord avec les fréquences de référence est obtenu.

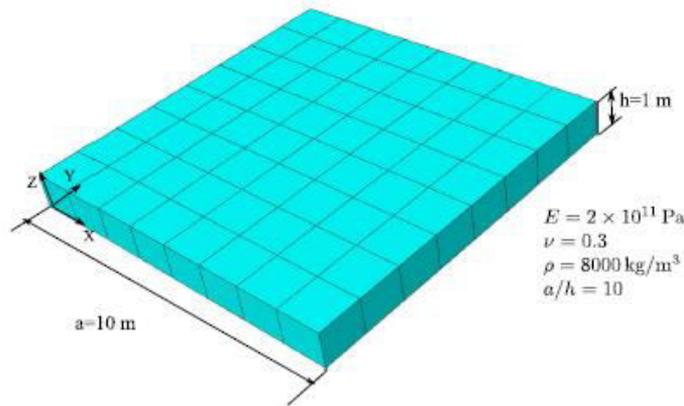


Figure 3.13 La plaque carrée épaisse modélisée avec des éléments hexaédriques de 8×8×1

Tableau 3.11 Les quatre premières fréquences naturelles transversales

	C3D8	C3D8I	C3D20	SBBNN	SFR8 [Zou.15]	Pb2-Ritz method [Lie.93]
<b>CCCC</b>						
<b>f11</b>	75.385	78.636	81.431	82.46	88.894	<b>78.322</b>
<b>f12=f21</b>	145.25	150.11	156.46	157.87	172.77	<b>149.396</b>
<b>f22</b>	187.73	199.97	219.53	220.76	241.53	<b>209.384</b>
<b>CSSF</b>						
<b>f11</b>	38.095	38.539	38.933	39.266	41.650	<b>38.491</b>
<b>f12</b>	61.311	65.884	69.098	68.847	74.282	<b>69.317</b>
<b>F21</b>	112.07	112.09	113.79	112.83	124.09	<b>110.783</b>
<b>f13</b>	120.5	126.41	138.08	133.66	151.07	<b>137.077</b>

- *Vibration libre des plaques circulaires uniformes*

La figure 3.14 montre la géométrie de la plaque circulaire étudiée. Nous nous intéresserons aux quatre premières fréquences propres transversales, pour trois configurations: plaque encastree, simplement supportée et libre, et les formes correspondantes de leurs modes sont illustrées à la figure 3.15. Les résultats obtenus sont présentés au tableau 3.12. Nous remarquons que les fréquences obtenues, pour l'élément présent, sont en accord par rapport aux résultats de l'élément quadratique C3D20 et de l'élément non conforme C3D8I d'ABAQUS.

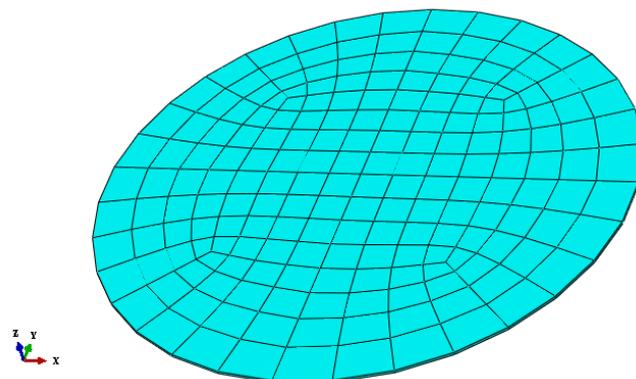


Figure 3.14 Plaque circulaire uniforme

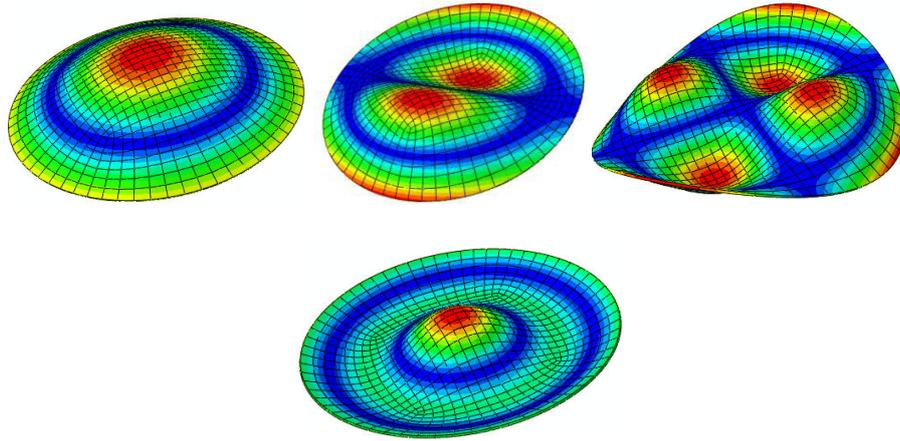


Figure 3.15 Les quatre premiers modes naturels de la plaque circulaire

Tableau 3.12 Valeurs de  $\omega_{mk} a^2 \sqrt{\rho t / D}$  pour les plaques uniformes

		C3D8	C3D8I	C3D20	SBBNN	ANALYT. SOLUT. [Wu.02]
Clamped	f1	37.286	10.287	10.303	<b>10.328</b>	<b>10.216</b>
	f2	71.038	21.513	21.465	<b>21.586</b>	<b>21.260</b>
	f3	103.679	35.486	35.207	<b>35.755</b>	<b>34.88</b>
	f4	134.730	40.389	40.234	<b>40.321</b>	<b>39.771</b>
Simply Supported	f1	17.872	4.958	4.939	<b>4.940</b>	<b>4.935</b>
	f2	42.010	13.988	13.916	<b>13.938</b>	<b>13.898</b>
	f3	68.681	25.815	25.645	<b>25.751</b>	<b>25.613</b>
	f4	97.490	30.011	29.794	<b>29.906</b>	<b>29.720</b>
Free	f1	32.446	9.005	9.004	<b>9.034</b>	<b>9.003</b>
	f2	62.205	20.491	20.495	<b>20.585</b>	<b>20.475</b>
	f3	88.901	35.293	35.292	<b>35.570</b>	<b>35.260</b>
	f4	124.520	38.581	38.527	<b>38.721</b>	<b>38.443</b>

### Conclusion

Le présent élément développé SBBNN a été implémenté dans le code de calcul ABAQUS afin de le tester dans les divers problèmes dans les deux cas statique et vibration libre. Cet élément, qui contient des termes polynomiaux d'ordre supérieur à cause de la méthode utilisé dans sa formulation qui est l'approche en déformation, a été testé. Les résultats montrent que l'élément développé est très performant en termes de précision et de convergence pour les deux cas. Cet élément est aussi libre de tout verrouillage en cisaillement contrairement aux autres éléments basés sur l'approche en déplacement.

# CHAPITRE 4

## APPLICATIONS SUR ALLIAGE A MEMOIRE DE FORME

### Sommaire

---

<b>1) Introduction</b>	<b>47</b>
<b>2) Alliages à mémoire de forme - Une brève histoire</b>	<b>47</b>
<b>3) Description du comportement des alliages à mémoire de forme (AMF)</b>	<b>49</b>
<b>4) Propriétés pseudo-élastiques des alliages NiTi</b>	<b>52</b>
<i>a. La superélasticité</i>	52
<i>b. L'effet mémoire de forme simple sens</i>	53
<i>c. L'effet mémoire de forme double sens</i>	55
<i>d. Effet caoutchoutique</i>	55
<b>5) Modélisation du comportement thermomécanique des AMF</b>	<b>56</b>
<i>a. Modèles micromécaniques</i>	56
<i>b. Modèles phénoménologiques</i>	57
<b>6) Formulation de l'élément brick à champ de déformation utilisé SBB</b>	<b>61</b>
<b>7) Application numérique</b>	<b>64</b>
<b>Conclusion</b>	<b>68</b>

---

## 1) Introduction

De nombreux secteurs industriels ont besoin des matériaux adaptifs et capables de changer leurs propriétés en fonction de l'environnement qui les entoure et des sollicitations appliquées.

Avec les progrès de la science et de la technologie et une meilleure compréhension des effets de la microstructure et des techniques de traitement sur le comportement des matériaux, le domaine de la science des matériaux s'est radicalement amélioré au cours des dernières décennies et a généré de nouveaux matériaux plus performants et multi fonctionnels pour diverses applications. La possibilité de définir différentes propriétés des matériaux (mécanique, thermique, électrique, etc.) pour diverses applications a permis le développement de nouveaux alliages et composites. Parmi les différents types des matériaux intelligents, les alliages à mémoire de forme (AMF), qui présente un couplage thermique/mécanique, semblent prometteurs par leurs propriétés thermomécanique et qui ont des caractéristiques uniques de pseudo-élasticité de mémoire de forme unidirectionnelle et bidirectionnelle.

Le terme alliages de mémoire de forme (AMF) s'applique à ce groupe de matériaux métalliques qui démontrent la capacité de revenir à une forme ou à une taille préalablement définies lorsqu'il est soumis au processus thermique approprié. Généralement, ces matériaux peuvent être déformés plastiquement à une température relativement basse et lorsqu'ils sont exposés à une température plus élevée, ils reprennent leur forme avant la déformation. Les matériaux qui présentent une mémoire de forme uniquement lors du chauffage sont considérés comme ayant une mémoire de forme à sens unique. Certains matériaux subissent également un changement de forme lors du refroidissement. Ces matériaux ont une mémoire de forme bidirectionnelle.

Les caractéristiques des alliages à mémoire de forme sont à l'origine d'une transformation de phase martensitique thermo-élastique réversible entre une phase de symétrie élevée, phase austénitique, et une phase de symétrie basse, phase martensitique. L'effet mémoire de forme exprime leur aptitude à recouvrer leur forme initiale par un simple chauffage même après une importante déformation.

## 2) Alliages à mémoire de forme - Une brève histoire

La découverte de la martensite dans les aciers dans les années 1890 par Adolf Martens a été une étape importante vers la découverte éventuelle d'alliages à mémoire de forme.

Les premiers pas signalés vers la découverte de l'effet de mémoire de forme ont été entrepris en 1932 par A. Ölander [Gil.94]. Il a découvert le comportement pseudo-élastique de l'alliage gold-cadmium Au-Cd. Greninger et Mooradian ont observé en 1938 la formation et la disparition d'une phase martensitique en diminuant et en augmentant la température d'un alliage Cu-Zn.

La transformation martensitique était peut-être le phénomène métallurgique le plus étudié au début du XXe siècle. La transformation martensitique, telle qu'observée dans le système Fe-C, a été établie comme un processus irréversible. Le concept de transformation martensitique thermo-élastique,

qui explique la transformation réversible de la martensite, a été introduit en 1949 par Kurdjumov et Khandros, basé sur des observations expérimentales de la structure martensitique thermiquement réversible dans les alliages CuZn et CuAl. En 1953, la transformation en martensitique thermo-élastique était démontrée dans d'autres alliages tels que InTl et CuZn.

La transformation martensitique est une transformation entre deux phases : une phase mère, stable à haute température, appelée « Austénite », et une phase produit appelée « Martensite » stable à basse température ; où les deux phases n'ont pas les mêmes structures cristallographiques : l'austénite est généralement cubique et la martensite est tétragonale, orthorhombique ou monoclinique.

La première application commerciale des alliages à mémoire de forme a vu le jour par le biais de manchons d'accouplement utilisés dans les avions de chasse F14 connue sous le nom Cryofit en 1971[Van.99].

La découverte d'applications de NiTi (nickel-titane) par Buehler et ses collègues au laboratoire de la marine américaine (U.S. Naval Ordnance Laboratory) a constitué une avancée majeure pour les applications d'ingénierie [Bue.67].

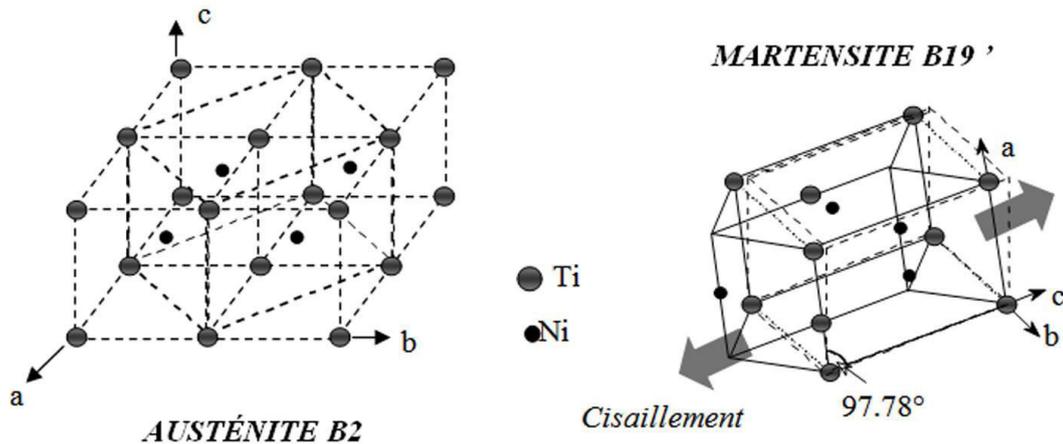
Depuis lors, les applications des alliages NiTi ne cessent d'augmenter du fait de leur bonne résistance à la corrosion (biocompatibilité : arches dentaires, instruments de chirurgie, agrafes,...), leurs propriétés thermomécaniques remarquables (l'effet mémoire de forme simple et double sens, l'effet super-élastique, ...) et leurs excellentes propriétés mécaniques (déformation de transformation importante, bonne résistance à la fatigue, stabilité).

Au cours des années 1970, plusieurs utilisations du NiTi dans les applications biomédicales sont apparues, mais ce n'est pas avant les années 1990 que les stents NiTi ont fait leur percée commerciale.

Différentes techniques d'analyse structurale (MET, rayons X...) ont permis de déterminer les structures de l'austénite, de la martensite et de la phase-R [Goo.85] :

- La structure de l'austénite résulte de l'imbrication de deux réseaux cubiques simples et décalés d'une demi-diagonale du cube, occupés respectivement par des atomes de Ni et de Ti. Cette structure est appelée de type B2 (Figure 4.1).

- La structure de la martensite est plus complexe. La structure la plus courante est monoclinique, elle est dite de type B19 (Figure 4.1).



**Figure 4.1** Structures de l'austénite et de la martensite d'un alliage NiTi

- La phase supplémentaire, appelée phase-R peut, dans certaines conditions, précéder l'apparition de la phase martensitique. Cette phase-R est de symétrie rhomboédrique.

Durant ces trente dernières années des progrès considérables ont été apportés au développement de lois de comportement capables de décrire correctement la réponse de ces matériaux à un chargement donné tout en restant compatible avec une utilisation dans les codes commerciaux de calcul de structures (Bo et Lagoudas 1999, Bouvet et al. 2004, Chemisky et al. 2011, Lagoudas et al. 2012, Lexcellent et Leclercq 1996, Panico et Brinson 2007, Saint Sulpice et al. 2009, Thiebaud et al. 2007, Morin et al. 2011). Ces progrès ont mis à la disposition des concepteurs des outils numériques performants au développement des applications.

### 3) Description du comportement des alliages à mémoire de forme (AMF)

Les alliages à mémoire de forme sont généralement constitués de deux, trois voire quatre composants. Selon leur composition, il existe trois grandes familles :

- Les alliages à base de nickel-titane (NiTi, NiTiCu...) qui sont les AMF les plus utilisées en raison de leur résistance à la corrosion et leurs bonnes performances thermomécaniques.
- Les alliages à base de cuivre (Cu-Al-Be, Cu-Zn-Al) caractérisés par leurs excellentes conductivités électrique et thermique
- Les alliages à base de fer (Fe-Mn-Si, Fe-Pt...) qui ont l'avantage d'avoir un coût relativement réduit.

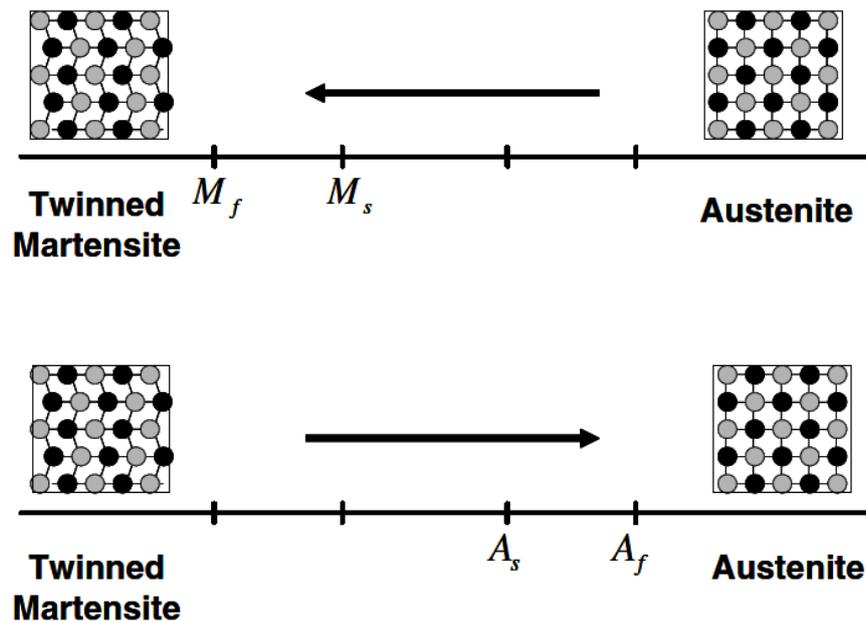
La transformation martensitique se produit sous des conditions thermomécaniques spécifiques, elle correspond à un changement de phase à l'état solide entre la phase mère (Austénite) et la phase produite (martensite). Elle est introduite par une distorsion du réseau cristallin induisant dans certains cas une déformation inélastique macroscopique. C'est une transition structurale displacive du premier ordre présentant une déformation homogène du réseau cristallographique, constituée essentiellement par un cisaillement qui se produit sans diffusion d'atomes et avec un léger changement de volume.

Les deux phases sont nettement différenciées au cours de la transformation par la présence des interfaces (austénite/martensite).

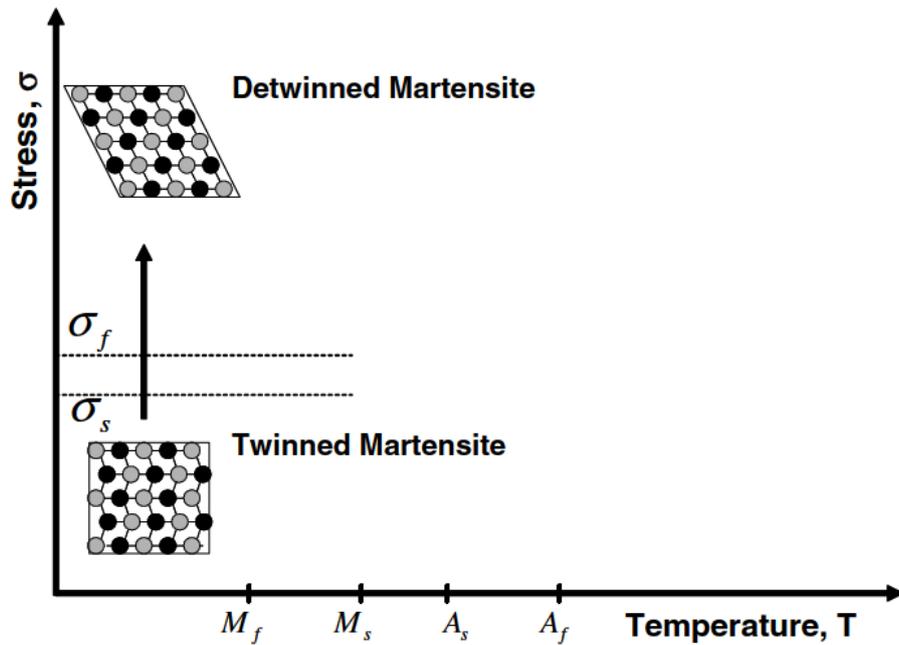
En l'absence de contrainte, elle commence à la température " $M_s$ " ou "Martensite start" et se termine à la température " $M_f$ " ou "Martensite finish". Dans les mêmes conditions, l'austénite commence par se former à la température " $A_s$ " ou "Austenite start" et se termine à la température " $A_f$ " ou "Austenite finish" (figure 4.2). Une telle transformation est appelée transformation martensitique. Chaque cristal martensitique formé peut avoir une direction d'orientation différente, appelée variante.

Lorsque la martensite est formée en l'absence de contraintes, elle est appelée martensite thermique ou formée auto-accommodée avec des variantes de martensite ayant des directions et orientations différentes de telle sorte que la déformation résultante soit nulle. Lorsqu'une contrainte est appliquée à la martensite thermique, au-delà d'une valeur seuil appelée contrainte critique de réorientation, les variantes de martensite vont s'orienter dans la direction de la contrainte : il s'agit de la réorientation de la martensite (figure 4.3). La martensite orientée peut également être créée directement à partir de l'austénite par l'application d'une contrainte.

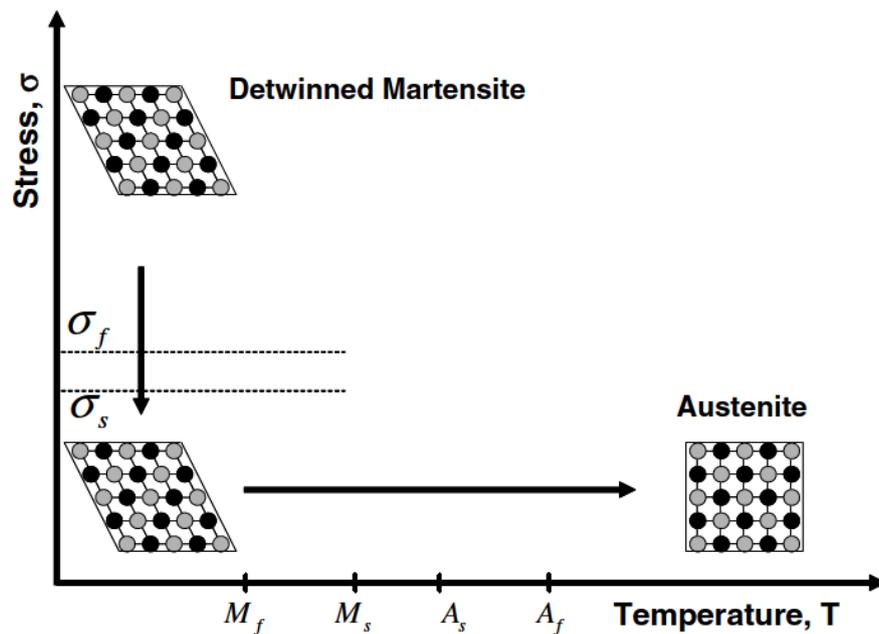
Le retour à la phase austénitique se fait toujours soit, par une augmentation de température, soit par une simple décharge lorsque la température de l'essai est supérieure à la température " $A_f$ " (figure 4.4).



**Figure 4.2** Transformation de phase induite par la température d'un AMF sans chargement mécanique.

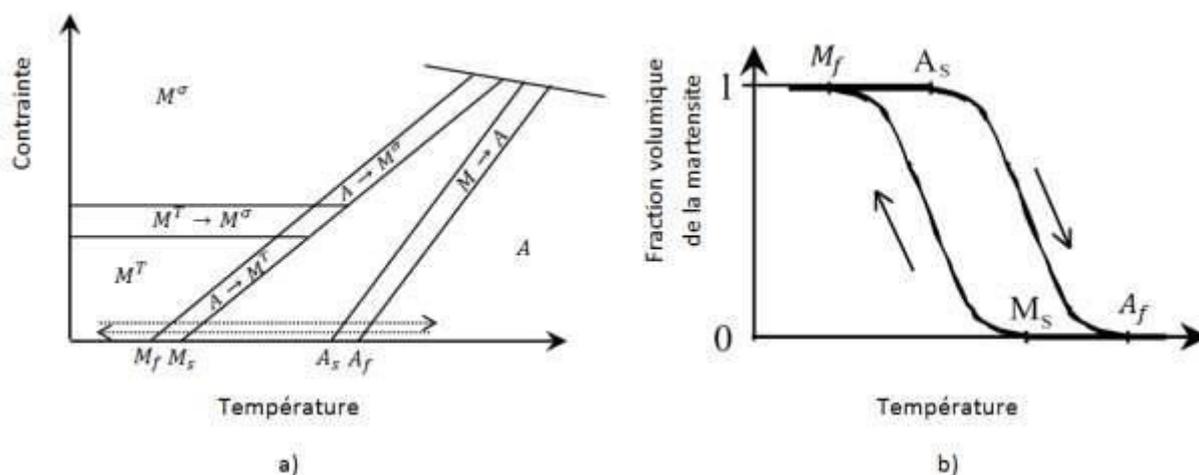


**Figure 4.3** Schéma de l'effet de mémoire de forme d'un AMF montrant la transformation du matériau avec une contrainte appliquée.



**Figure 4.4** Schéma de l'effet de mémoire de forme d'un AMF montrant le déchargement et le chauffage ultérieur à l'austénite sans charge.

Les températures caractéristiques de la transformation permettent de construire un diagramme de transformation (ou diagramme de phase) dans le plan contrainte-température (diagramme d'état de Clausius-Clapeyron). Ce diagramme est construit à partir de la relation entre les températures de transformation et la contrainte appliquée. Ce diagramme définit les pentes de transformation. La Figure 4.5 montre un exemple de diagramme de phase proposé par Brinson [Bri.93].



**Figure 4.5** Diagrammes de phase selon Brinson [Bri.93] : a) Chemin de la création de la martensite auto-accommodée dans un diagramme de phase, b) Représentation schématique de l'évolution de la fraction volumique de martensite lors de la transformation martensitique pilotée par la température à contrainte nulle.

Les propriétés physiques et mécaniques, les avantages et inconvénients, les comportements thermomécaniques de chaque famille constituent des éléments déterminants dans le choix de ces matériaux pour les applications qui couvrent désormais divers secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'automobile, le biomédical. Les alliages à base de Nickel-Titane sont parmi les plus couramment utilisés ; c'est sur cette classe d'alliages que porte le présent travail.

#### 4) Propriétés pseudo-élastiques des alliages NiTi

La transformation martensitique peut être induite soit thermiquement (en abaissant la température en dessous de  $M_s$ ), soit mécaniquement. L'application d'une contrainte peut provoquer la transformation martensitique à une température supérieure à  $M_s$ . Cependant, si la température est trop élevée, il y a compétition entre la transformation martensitique et la déformation plastique de l'austénite, dans ce dernier cas, la transformation martensitique ne se produit pas, le matériau suit un comportement mécanique classique. La température maximale pour laquelle il peut se produire une transformation sous contrainte d'austénite en martensite est notée  $M_d$  (martensite déformation).

L'effet mémoire de forme (simple et double sens) est la propriété la plus connue de ces alliages, mais ce n'est pas la seule ; on peut citer la super-élasticité et le comportement caoutchoutique de la martensite [Got.01], [Van.99], [Mer.08], [Arm.08].

##### a. La superélasticité

Dans le domaine de température où l'austénite est « stable » ( $T > A_f$ ), la transformation martensitique peut être provoquée sous contrainte.

La super-élasticité se manifeste par la récupération complète de la forme de l'échantillon lorsque la contrainte appliquée cesse. L'énergie est stockée de façon non dissipative et peut être récupérée complètement.

Lorsqu'on applique à une température supérieure à la température de fin de transformation inverse ( $T > A_f$ ), un chargement mécanique suffisamment élevé, des variantes de martensite orientées dans la direction de la contrainte vont se former laissant apparaître une importante déformation macroscopique due à la transformation de phase 2 .

Après saturation de la transformation 3, on retrouve le comportement élastique de la martensite. Si on relâche la contrainte 4, la transformation de phase inverse se produit ; les variantes de martensite formées disparaissent progressivement au profit de l'austénite 5.

La déformation de transformation est alors totalement récupérée et l'alliage retrouve son état austénitique initial. Ce type de chargement met en évidence le comportement super-élastique d'un AMF. Comme l'indique la figure 4.6, une dissipation d'énergie accompagne la transformation de phase et laisse apparaître une hystérésis entre les transformations directe et inverse. Les contraintes de début et de fin de transformation martensitique sont respectivement notées :  $M_s$  et  $M_f$ . De même pendant la décharge, la transformation inverse débute à la contrainte  $A_s$  et s'achève à la contrainte  $A_f$ .

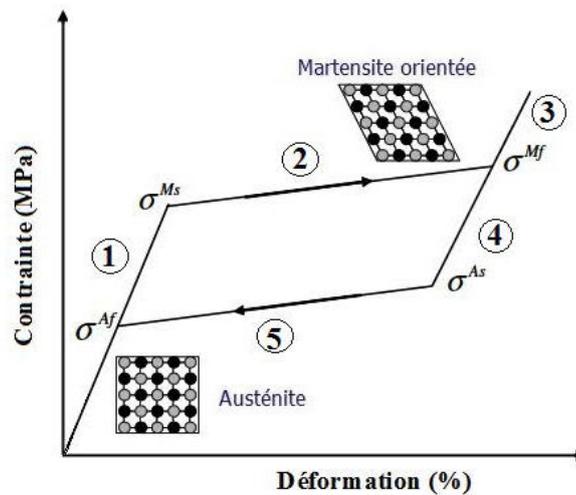


Figure 4.6 Courbe contrainte-déformation

**b. L'effet mémoire de forme simple sens**

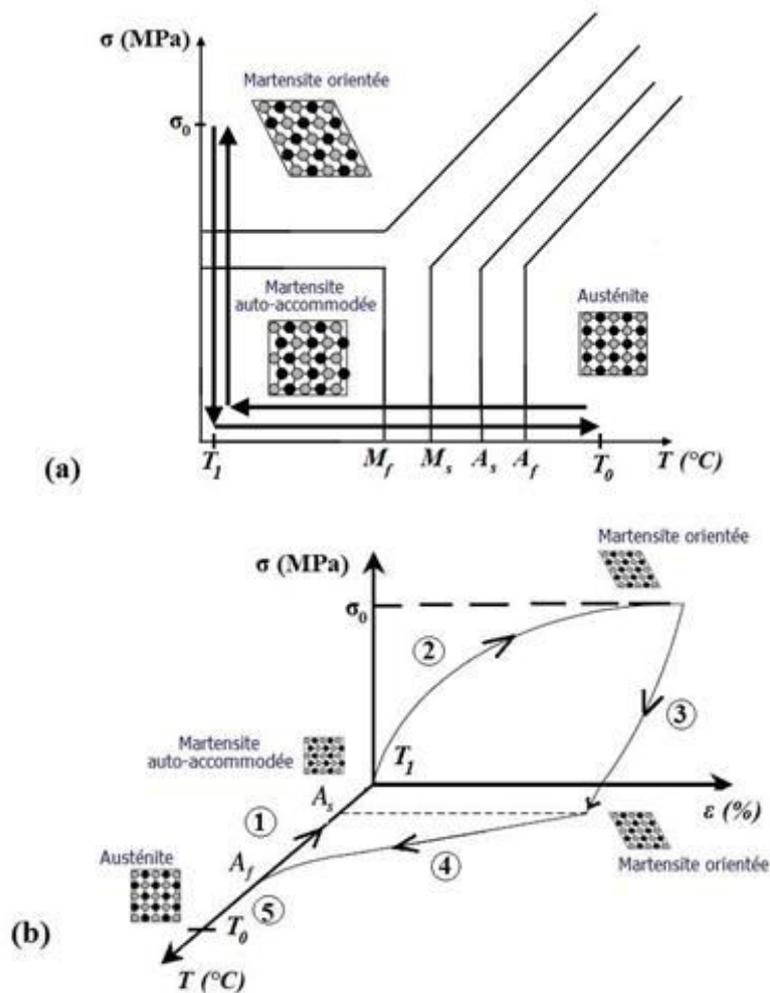
La propriété de mémoire de forme est l'aptitude d'un échantillon ayant subi une déformation importante à l'état martensitique, donc un changement de forme notable, à récupérer sa forme initiale à l'état austénitique, dont il a garde le « souvenir », par chauffage à température supérieure à  $A_f$ .

Considérons un alliage à mémoire de forme dans un état purement austénitique ( $T > A_f$ ); un refroidissement en l'absence de contrainte et en dessous des températures de transformation directe  $M_s$

et  $M_f$  génère de la martensite sans induire de la déformation de transformation à l'échelle macroscopique (martensite auto-accommodée).

Lorsqu'on applique par la suite un chargement mécanique au-delà d'une contrainte appelée contrainte limite de réorientation, le processus de réorientation des variantes de martensite va s'enclencher. Toutes les interfaces des variantes ont un caractère très mobile et se meuvent sous l'action de la contrainte appliquée. Une déformation macroscopique apparaît alors, liée au processus de réorientation des variantes.

Lorsque la contrainte est relâchée, les variantes de martensite restent orientées et la déformation n'est pas récupérée 3. Lors d'un chauffage jusqu'à une température supérieure à  $A_f$  et en l'absence de contrainte, la transformation inverse se produit, la déformation disparaît et l'alliage retrouve la phase austénitique initiale 4. La figure 4.7 décrit le trajet de chargement thermomécanique, mettant en œuvre le comportement effet mémoire de forme simple sens, ainsi que le comportement correspondant dans l'espace température-déformation-contrainte d'un AMF.



**Figure 4.7** Comportement effet mémoire de forme : (a) Trajet de chargement et (b) Comportement dans l'espace température-contrainte-déformation.

*c. L'effet mémoire de forme double sens*

Les alliages à mémoire de forme possèdent une forme stable à haute température. A basse température, ils existent sous une forme auto-accommodée (forme non stable ou métastable de la martensite). Comme le souligne le trajet de chargement décrivant l'effet mémoire simple sens (figure 4.7 (a)), l'application d'un chargement mécanique est nécessaire, à basse température, pour orienter les variantes auto-accommodées. Il est toutefois possible grâce à un "conditionnement" de donner deux formes stables aux AMF :

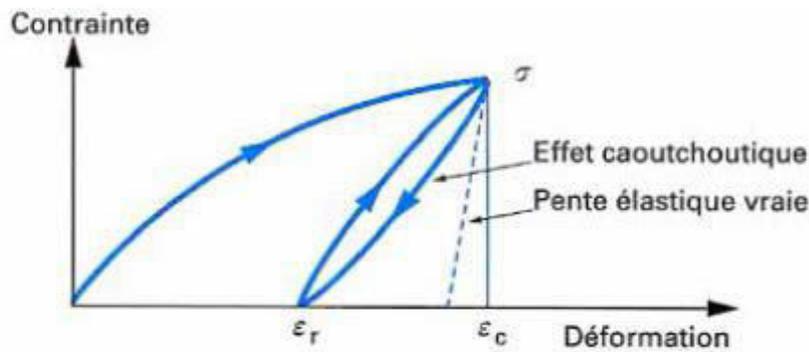
- Une à haute température (forme austénitique),
- Une à basse température (forme martensitique).

L'effet mémoire double sens s'obtient par éducation du matériau. En effet, si le cycle mémoire simple sens est répété plusieurs fois, la dégradation des propriétés matérielles (baisse du niveau de déformation récupérable par chauffage) s'accompagne d'une chute de la contrainte nécessaire à l'orientation des variantes de martensite jusqu'à devenir négligeable.

L'AMF peut ainsi se reconditionner seul lors du refroidissement. On est alors en présence de deux états stables entre lesquels on peut basculer par chauffage ou refroidissement. Il faut toutefois noter qu'il est impossible de générer un effort en bloquant le retour de la structure car ceci aurait pour effet d'annuler l'éducation en effaçant la forme froide en mémoire. Pour pallier ces difficultés de mise en oeuvre de l'effet mémoire double sens, la plupart des applications d'AMF comme actionneurs utilisent l'effet mémoire double sens assisté avec un élément de rappel qui peut être la structure elle-même ou un élément assimilable à un ressort.

*d. Effet caoutchoutique*

Ce type de comportement s'observe dans un alliage à mémoire de forme à l'état martensitique ( $T < M_f$ ). En effet lorsqu'on soumet l'alliage à un chargement cyclique à partir d'un état initial déformé, on observe un phénomène d'hystérésis, synonyme d'une dissipation d'énergie (voir la figure 4.8). Ce phénomène peut-être expliqué par le mouvement partiel réversible des interfaces. L'alliage peut dès lors être utilisé dans des dispositifs permettant d'atténuer les vibrations mécaniques ou d'amortir les chocs.



**Figure 4.8** Figure illustrant l'effet caoutchoutique d'un AMF d'après [Gue.95].

### 5) Modélisation du comportement thermomécanique des AMF

Comme indiqué auparavant, les AMF représentent une classe spécifique d'alliages métalliques à deux phases solides stables et, en suivant des trajectoires particulières dans l'espace contrainte-température, ces alliages subissent une transformation d'une phase à une autre. De plus, ces deux phases sont distinctes dans leurs propriétés. Cette transformation peut conduire à la génération et à la récupération ultérieure de déformations et à provoquer des changements de forme macroscopiques.

Différentes équipes de recherche se sont attachées, au cours des trente dernières années, à proposer des modèles permettant de prédire le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme. Les objectifs sont différents suivant les approches – compréhension des mécanismes physiques ou dimensionnement des structures adaptatives – et le panel des modèles existants est large. Ces derniers peuvent être classés en différentes catégories.

#### a. Modèles micromécaniques

Les modèles micromécaniques sont apparus durant les années 1990 ([Pat.95], [Huan.98], [Lu.98], [Gao.00], [Huan.00], [Sir.99], [Ent.00], [Ent.01]). Ils sont basés sur une description de la transformation martensitique à l'échelle du réseau cristallin. De fait, ils sont régis par des équations permettant de prédire la transformation d'un cristal d'austénite en différentes variantes de martensite sous un chargement thermomécanique. Le comportement effectif du VER est obtenu par homogénéisation. Différentes techniques de transition d'échelle sont adoptées. On pourra citer en particulier la méthode auto-cohérente. Ces modèles ont permis notamment d'identifier l'origine de la dissymétrie traction-compression ou de déterminer les surfaces de charge de début et fin de transformation pour des cas de chargement multiaxiaux. Ils présentent un fort pouvoir prédictif et permettent de modéliser intrinsèquement la plupart des particularités de comportement observées dans les AMF.

Ces modèles font intervenir un jeu de variables internes représentant chacune la fraction volumique des différentes variantes de martensite pouvant être formées dans un cristal d'austénite (24

variantes sont possible pour un NiTi). Leur utilisation est toutefois limitée pour dimensionner des structures adaptatives via la méthode des éléments finis. En effet, leur description se faisant à l'échelle du monocristal, il est nécessaire, pour modéliser une structure, de connaître a priori sa texture (taille de grains, géométrie, orientation). Ainsi, pour décrire un volume élémentaire représentatif (VER) d'un AMF, un nombre de grains couramment admis est de 1000, nombre qu'il faut multiplier par le nombre de variantes pouvant être formées dans un grain. Le nombre total de variables permettant de décrire un VER est donc beaucoup trop important pour effectuer des calculs de structure avec un coût numérique raisonnable.

Les modèles micromécaniques sont donc à réserver à un usage d'étude des mécanismes de transformation de phase. Ils peuvent alimenter des modèles macroscopiques lorsque des essais expérimentaux ne sont pas possibles.

### ***b. Modèles phénoménologiques***

Les modèles phénoménologiques, pour décrire le comportement des AMF à l'échelle macroscopique, sont apparus au cours des années 80 ([Tan.86], [Lia.90]). Les premiers modèles se limitent à la description du comportement superélastique dans le cas unidimensionnel.

Dans les années 90, les modèles se sont enrichis avec la prise en compte de l'effet mémoire de forme basé sur la modélisation du pseudo diagramme de phases ([Bri.93], [Ran.94]) et des extensions au cas tridimensionnel ([Lia.92], [Boy.94], [Rio.95], [Bo.99a]). Les années 2000 ont ensuite vu apparaître des modèles tridimensionnels implémentés dans des codes de calcul par éléments finis ([Bou.04], [Lag.04], [Peu.06], [Thi.07], [Zak.07]).

La différence entre les modèles existants se montre par le type de variables internes employées pour décrire *un volume élémentaire représentatif* (VER) d'AMF et par les spécificités de comportement prises en compte (dissymétrie traction-compression, stabilisation de la martensite, couplage entre transformation de phase et plasticité, ...).

La formulation des modèles phénoménologiques à l'aide de variables internes définies de façon macroscopique permet une implémentation dans des codes de calcul par éléments finis où le nombre plus réduit d'équations à résoudre assure des temps de calcul raisonnables.

#### **❖ Modèle de Lagoudas et al. 1996 [Lag.96]**

Le modèle de Lagoudas et al. 1996 est un modèle de comportement phénoménologique basé sur les travaux antérieurs de Tanaka (1986) [Tan.86], Liang et Rogers (1992) [Lia.92], et Boyd et Lagoudas (1996) [Boy.96].

#### ***Hypothèses et formulation du modèle de Lagoudas et al.***

Deux phases sont considérées dans ce modèle : l'austénite A et la martensite M . Le modèle utilise trois variables internes  $\zeta^t = (\varepsilon^t, \xi, g^t)$  qui représentent respectivement la déformation de

transformation générée lors de la transformation de l'austénite en martensite  $\varepsilon^t$ , la fraction volumique de martensite  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) et l'énergie de transformation  $g^t$ . Le tenseur de contrainte et la température absolue sont considérés comme variables d'état.

La relation entre la déformation de transformation de déformation  $\varepsilon^t$  et la fraction volumique martensitique  $\xi$  est exprimée par :

$$\varepsilon^t = \Lambda \dot{\xi} \quad (4-1)$$

Où  $\Lambda$  est le tenseur de transformation qui détermine la direction de la transformation de déformation. Deux formes différentes du tenseur de transformation  $\Lambda$  sont implémentées. Le premier est:

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{3}{2} H \frac{\sigma'}{\bar{\sigma}}, & \dot{\xi} > 0 \\ H \frac{\varepsilon^{t-r}}{\bar{\varepsilon}^{t-r}}, & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (4-2)$$

H est la déformation maximale de transformation uni-axiale,  $\varepsilon^{t-r}$  est la déformation de transformation quand la transformation est renversée.

Le tenseur de transformation  $\Lambda$  donné par l'équation précédente est approprié pour les cas de chargement proportionnel (par exemple, chargement uni-axial). Pour les cas de chargement plus compliqués, la forme suivante du tenseur de transformation, indépendante du sens de la transformation, est également implémentée:

$$\Lambda = \frac{3}{2} H \frac{\sigma'}{\bar{\sigma}} \quad (4-3)$$

Il est recommandé d'utiliser la forme du tenseur de transformation donnée par l'équation (4-2) pour les calculs. La forme de  $\Lambda$  donnée par l'équation (4-3) doit être utilisée si des problèmes de convergence se posent.

L'énergie libre totale de Gibbs est donnée par:

$$G(\sigma, T, \xi, \varepsilon^t) = -\frac{1}{2\rho} \sigma : S : \sigma - \frac{1}{\rho} \sigma : [\alpha(T - T_0) + \varepsilon^t] + c \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] - s_0 T + u_0 + f(\xi) \quad (4-4)$$

Où :  $\sigma$ ,  $\varepsilon^t$ ,  $\xi$ ,  $T$  et  $T_0$  sont respectivement le tenseur de contrainte de Cauchy, le tenseur de transformation de déformation, la fraction volumique martensitique, la température actuelle et la température de référence.

Les constantes de matériau  $S$ ,  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $s_0$  et  $u_0$  sont le tenseur des complaisances, tenseur effectif de dilatation thermique, densité, chaleur spécifique effective, entropie spécifique à l'état de référence et énergie interne spécifique effective à l'état de référence. La fonction  $f(\xi)$  est la fonction de durcissement de la transformation. En choisissant la forme fonctionnelle de  $f(\xi)$ , différents modèles constitutifs AMF peuvent être obtenus, comme décrit par Lagoudas et al. (1996).

La force thermodynamique conjuguée à  $\zeta$  est donnée par :

$$\pi = \sigma : \Lambda + \frac{1}{2} \sigma : \Delta S : \sigma + \Delta \alpha : \sigma (T - T_0) - \rho \Delta c \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] + \rho \Delta s_0 T - \frac{\partial f}{\partial \xi} - \rho \Delta u_0 \quad (4-5)$$

Le préfixe  $\Delta$  désigne la différence entre les constants matériaux de la martensite et l'austénite.

### Paramètres de matériau

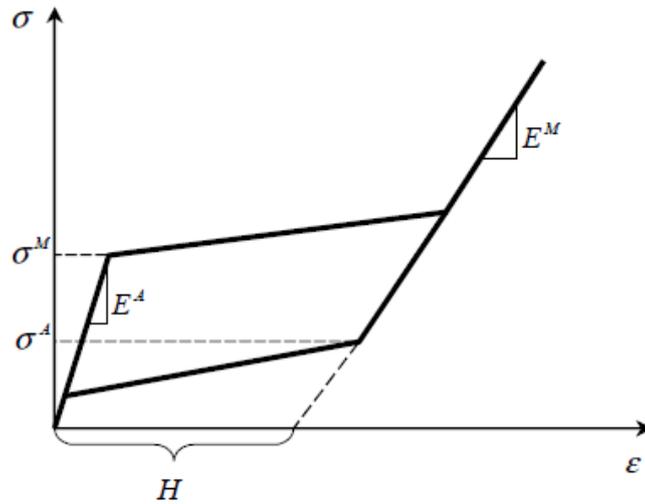
Les paramètres de matériau AMF sont: module de Young de l'austénite et du martensite  $E^A$  et  $E^M$ , coefficients de dilatation thermique  $\alpha^A$  et  $\alpha^M$ , les températures de début et fin de la martensite et de début et fin de l'austénite à contrainte nulle  $M^{0s}$ ,  $M^{0f}$ ,  $A^{0s}$  et  $A^{0f}$ , la déformation maximale de transformation H et coefficients d'influence de la contrainte austénitique et martensitique  $\rho \Delta s^A$  et  $\rho \Delta s^M$ . De plus, en fonction du modèle utilisé, les constantes de durcissement doivent également être spécifiées. La procédure de détermination des constantes de matériau est brièvement décrite ci-dessous.

Les modules de Young élastiques de l'austénite et de la martensite peuvent être obtenus à partir d'un test pseudoélastique uniaxial. La rigidité élastique de l'austénite peut être déterminée en mesurant la pente de la courbe contrainte-déformation au début du chargement, tandis que la rigidité élastique de la martensite peut être déterminée en mesurant la pente au début du déchargement (voir Figure 4.9). Les coefficients de dilatation thermique peuvent être obtenus en effectuant un test standard à basse température pour la martensite et à haute température pour l'austénite. Les températures de transformation à contrainte nulle peuvent être déterminées à l'aide d'un test au calorimètre à balayage différentiel (DSC). La déformation de transformation maximale peut être obtenue à partir d'un test pseudoélastique, comme illustré à la figure 4.9. Les coefficients d'influence de contrainte  $\rho \Delta s^A$  et  $\rho \Delta s^M$  peuvent être déterminés à partir du diagramme de phase contrainte-température et d'un test pseudoélastique. Ces paramètres peuvent être calculés comme :

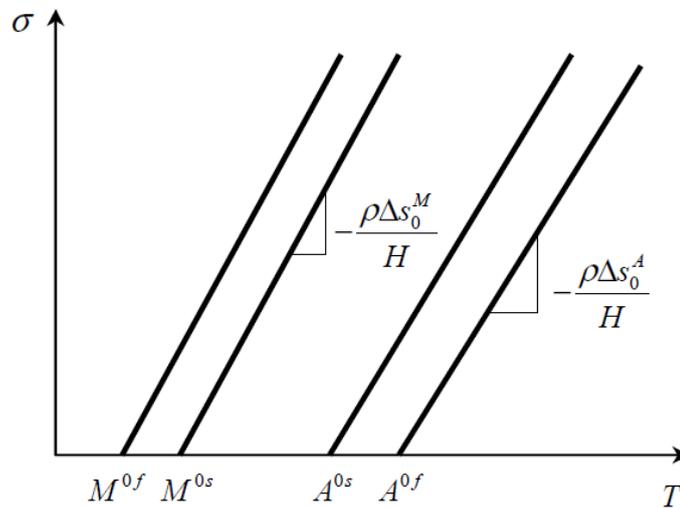
$$\rho \Delta s^A = - \frac{\sigma^A}{T_{test} - A^{0s}} H \quad (4-6)$$

$$\rho \Delta s^M = - \frac{\sigma^M}{T_{test} - M^{0s}} H \quad (4-7)$$

Où  $T_{test}$  est la température à laquelle le test pseudoélastique a été effectué et  $\sigma^A$  et  $\sigma^M$  sont définis à la figure 4.10.



**Figure 4.9:** Schéma d'un test pseudoélastique uniaxial AMF.



**Figure 4.10:** Schéma d'un diagramme de phases AMF.

Dans ce qui suit, on va utiliser ce modèle phénoménologiques (modèle de Lagoudas) , qui est implémenté dans le code de calcul ABAQUS à l'aide sous-programme utilisateur SMA\_UM, afin de tester un élément brick à champ de déformation présenté ci-dessous.

### 6) Formulation de l'élément brick à champ de déformation utilisé SBB

On considère l'élément brique (SBB) [Belo.14] basé sur l'approche en déformation avec neuf nœuds, huit nœuds de coin et un nœud centré comme montré dans la figure 4.9. Trois degré de liberté (déplacements U, V et W) pour chaque nœud considérer.

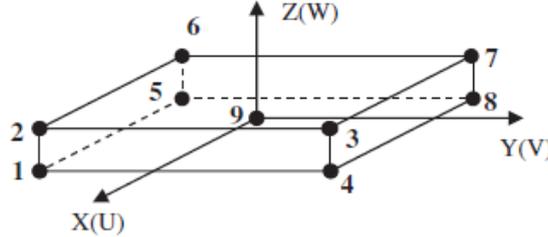


Figure 4.11 Élément brique à 9 nœuds

Le champ de déplacement est divisé en deux composantes ou le premier concerne les modes du corps rigides et le second est du à la déformation de l'élément.

La partie de déplacement représentant les modes du corps rigides sont obtenues en intégrant l'équation (1) avec l'ensemble des six déformations égales à zéro:

$$\begin{cases} U = \alpha_1 + \alpha_4 y + \alpha_6 z \\ V = \alpha_2 - \alpha_4 x - \alpha_5 z \\ W = \alpha_3 + \alpha_5 y - \alpha_6 x \end{cases} \quad (4-8)$$

Ou  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_6$  sont six constantes.

Les déplacements sont approximés en utilisant des fonctions de forme contenant 27 constantes indépendantes. Six constantes sont déjà employées.

Les 21 autres constantes sont utilisées pour exprimer les déplacements correspondant à la déformation de l'élément satisfaisant les équations de compatibilités données par les équations 2. Ceux-ci sont répartis entre les déformations comme suit :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \alpha_7 + \alpha_8 y + \alpha_9 z + \alpha_{10} yz + \alpha_{11} x \\ \epsilon_{yy} &= \alpha_{12} + \alpha_{13} x + \alpha_{14} z + \alpha_{15} xz + \alpha_{11} y \\ \epsilon_{zz} &= \alpha_{16} + \alpha_{17} x + \alpha_{18} y + \alpha_{19} xy + \alpha_{11} z \\ \gamma_{xy} &= \alpha_{20} + \alpha_{21} z + \alpha_{22} x + \alpha_{23} y - \alpha_{19} z^2 \\ \gamma_{yz} &= \alpha_{24} + \alpha_{25} x - \alpha_{10} x^2 \\ \gamma_{xz} &= \alpha_{26} + \alpha_{27} y - \alpha_{15} y^2 \end{aligned} \quad (4-9)$$

Les déformations données par Eq.4-9 satisfont les équations de compatibilité. Les expressions (4-9) sont égales aux équations en fonction de U, V et W et les équations qui en résultent sont intégrés pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 U &= \alpha_7 x + \alpha_8 xy + \alpha_9 xz + \alpha_{10} xyz + \alpha_{11} \left(\frac{1}{2} x^2\right) - \frac{1}{2} \alpha_{13} (y^2) - \frac{1}{2} \alpha_{15} (y^2 z) - \frac{1}{2} \alpha_{17} z^2 - \frac{1}{2} \alpha_{19} yz^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{20} y + \frac{1}{2} \alpha_{21} yz - \frac{1}{2} \alpha_{25} yz + \frac{1}{2} \alpha_{23} y^2 + \frac{1}{2} \alpha_{26} z + \frac{1}{2} \alpha_{27} yz \\
 V &= -\frac{1}{2} \alpha_8 (x^2) - \frac{1}{2} \alpha_{10} (x^2 z) + \alpha_{11} \left(\frac{1}{2} y^2\right) + \alpha_{12} y + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} yz + \alpha_{15} xyz - \frac{1}{2} \alpha_{18} z^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{19} xz^2 + \frac{1}{2} \alpha_{20} x + \frac{1}{2} \alpha_{21} xz + \frac{1}{2} \alpha_{22} x^2 + \frac{1}{2} \alpha_{24} z + \frac{1}{2} \alpha_{25} xz - \frac{1}{2} \alpha_{27} xz \\
 W &= -\frac{1}{2} \alpha_9 x^2 - \alpha_{10} \left(\frac{1}{2} yx^2\right) + \alpha_{11} \left(\frac{z^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \alpha_{14} y^2 - \alpha_{15} \left(\frac{1}{2} xy^2\right) + \alpha_{16} z + \alpha_{17} xz + \alpha_{18} yz \\
 &\quad + \alpha_{19} xyz - \frac{1}{2} \alpha_{21} xy + \frac{1}{2} \alpha_{24} y + \frac{1}{2} \alpha_{25} xy + \frac{1}{2} \alpha_{26} x \\
 &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{27} xy \qquad \qquad \qquad (4-10)
 \end{aligned}$$

Les fonctions de déplacements finaux sont obtenues par addition Eqs. (4-8) et (4-10):

$$\begin{aligned}
 U &= \alpha_1 + \alpha_4 y + \alpha_6 z + \alpha_7 x + \alpha_8 xy + \alpha_9 xz + \alpha_{10} xyz + \alpha_{11} \left(\frac{1}{2} x^2\right) - \frac{1}{2} \alpha_{13} (y^2) - \frac{1}{2} \alpha_{15} (y^2 z) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{17} z^2 - \frac{1}{2} \alpha_{19} yz^2 + \frac{1}{2} \alpha_{20} y + \frac{1}{2} \alpha_{21} yz - \frac{1}{2} \alpha_{25} yz + \frac{1}{2} \alpha_{23} y^2 + \frac{1}{2} \alpha_{26} z + \frac{1}{2} \alpha_{27} yz \\
 V &= \alpha_2 - \alpha_4 x - \alpha_5 z - \frac{1}{2} \alpha_8 (x^2) - \frac{1}{2} \alpha_{10} (x^2 z) + \alpha_{11} \left(\frac{1}{2} y^2\right) + \alpha_{12} y + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} yz + \alpha_{15} xyz \\
 &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{18} z^2 - \frac{1}{2} \alpha_{19} xz^2 + \frac{1}{2} \alpha_{20} x + \frac{1}{2} \alpha_{21} xz + \frac{1}{2} \alpha_{22} x^2 + \frac{1}{2} \alpha_{24} z + \frac{1}{2} \alpha_{25} xz - \frac{1}{2} \alpha_{27} xz \\
 W &= \alpha_3 + \alpha_5 y - \alpha_6 x - \frac{1}{2} \alpha_9 x^2 - \alpha_{10} \left(\frac{1}{2} yx^2\right) + \alpha_{11} \left(\frac{z^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \alpha_{14} y^2 - \alpha_{15} \left(\frac{1}{2} xy^2\right) + \alpha_{16} z + \alpha_{17} xz \\
 &\quad + \alpha_{18} yz + \alpha_{19} xyz - \frac{1}{2} \alpha_{21} xy + \frac{1}{2} \alpha_{24} y + \frac{1}{2} \alpha_{25} xy + \frac{1}{2} \alpha_{26} x \\
 &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{27} xy \qquad \qquad \qquad (4-11)
 \end{aligned}$$

Les fonctions de déplacement de l'équation (7) peuvent être données sous forme matricielle :

$$\{u\} = [C_u]\{A\} \qquad (4-12)$$

$\{A\}$  est le vecteur des constants  $\{\alpha_i\} = 1 \dots 27$ ,

La matrice  $[C_u]$  est donnée comme suit:

$$[C_u] = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & y & 0 & z & x & xy & xz & xyz & 0.5(x^2) & 0 & -0.5(y^2) \\
 0 & 1 & 0 & -x & -z & 0 & 0 & -0.5(x^2) & 0 & -0.5(x^2 z) & 0.5(y^2) & y & xy \\
 0 & 0 & 1 & 0 & y & -x & 0 & 0 & -0.5x^2 & -0.5yz^2 & 0.5(z^2) & 0 & 0 \\
 0 & -0.5(y^2 z) & 0 & -0.5z^2 & 0 & -0.5y_i z^2 & 0.5y & 0.5yz & 0 & 0.5y^2 & 0 & 0 & 0 \\
 yz & xyz & 0 & 0 & -0.5z^2 & -0.5xz^2 & 0.5x & 0.5xz & 0.5x^2 & 0 & 0.5z & 0 & 0.5z \\
 -0.5y^2 & -0.5xy^2 & z & xz & yz & xyz & 0 & -0.5xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5y \\
 -0.5yz & 0.5z & 0.5yz & 0.5xz & 0 & -0.5xz & 0.5xy & 0.5x & 0.5xy & 0 & 0 & 0 & 0.5xy
 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de déformation de l'équation (6) peut être redéfinir comme :

$$\{\varepsilon\} = [C_\varepsilon]\{A\} \quad (4-13)$$

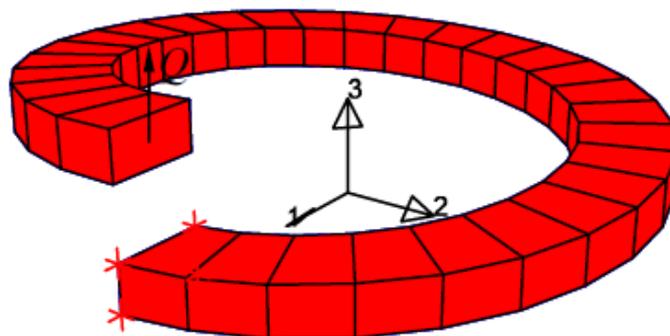
La matrice  $[C_\varepsilon]$  associée aux composantes de la contrainte est donnée par:

$$[C_\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & z & yz & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 1 & x & z & xz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z^2 & 1 & z & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix}$$

### 7) Application numérique : Etude du comportement thermomécanique d'une bobine en alliage à mémoire de forme

Dans cette application, le comportement thermomécanique d'une bobine en AMF est étudiée [Aur.04] (Figure 4.12). Les paramètres géométriques de la bobine sont les suivantes: rayon interne  $R_i = 2,5$  mm, section transversale  $1,0 \times 0,5$  mm<sup>2</sup> (Figure 4.12). La structure est encadrée sur une extrémité, et elle est soumise à une charge de cisaillement uniformément répartie sur l'autre extrémité, dont la résultante est désignée par la charge  $Q$  comme présenté dans la Figure 4.12. Afin d'analyser le comportement de la bobine, le maillage est constitué par 600 éléments thermomécaniques cubiques (C3D8) isoparamétriques à interpolation linéaire. Ils utilisent une méthode d'intégration sélective correspondant à une intégration complète de la partie déviatorique et réduite de la partie hydrostatique.

La loi constitutive thermomécanique présentée précédemment est implantée dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS via la routine User MATerial (UMAT). Cette dernière peut se substituer aux lois de comportement pré-intégrées. La routine utilisée pour simuler la réponse du matériau permet de calculer aux points de Gauss de chaque élément fini, pour un incrément de chargement imposé, les contraintes et les variables internes ainsi que les opérateurs tangents cohérents. Ces derniers sont exploités afin d'actualiser la matrice de rigidité de chaque élément fini. Le code détermine par la suite la matrice de rigidité globale et vérifie la forme faible de l'équilibre de la structure. Les opérateurs tangents sont déduits de la loi de comportement thermomécanique développée. Ces opérateurs prennent en compte l'histoire du chargement par leur dépendance par rapport à la contrainte et aux variables internes. Toutes les informations supplémentaires concernant le modèle et la procédure d'implantation sont développées dans le travail [Lag.03]. Les propriétés du matériau de la structure utilisé dans ce travail sont données dans le tableau 4.1.



**Figure 4.12** Bobine en AMF, géométrie, condition aux limites

Le trajet de chargement appliqué sur les deux membranes est illustré dans le tableau 4.2. La première étape (0-1) correspond à un chargement mécanique avec une température constante, et au processus d'orientation des variantes de la martensite dans le matériau. La deuxième étape (1-2-3) correspond au chargement thermique au-dessus de la température finale de l'austénite  $A_f$  avec le

maintien de la charge  $Q$ . Les étapes 1-2 et 2-3 correspondent au chauffage et au refroidissement du matériau. Ce type de chargement permet d'étudier le comportement pseudo-élastique, et l'effet mémoire de forme. Dans ce travail, la solution dite de référence est obtenue en utilisant l'élément C3D8 d'ABAQUS. Cette solution est considérée pour la comparaison avec celle obtenue par l'élément SBB développé.

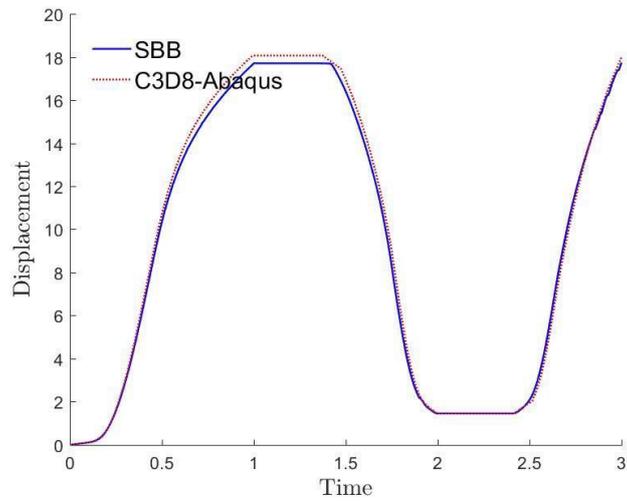
**Tableau 4.1. Paramètres de matériau du matériau AMF (NiTi).**

Paramètre du matériau	Valeur
Raideur élastique de l'austénite $E^A$	70 GPa
Raideur élastique de la martensite $E^M$	30 GPa
Coefficient de poisson $\nu$	0.33
Coefficient de dilatation thermique de l'austénite $\alpha^A$	$22.0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Coefficient de dilatation thermique de la martensite $\alpha^M$	$22.0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Température de départ martensitique $M^{0s}$	291 K
Température de fin martensitique $M^{of}$	271 K
Température de départ austénitique $A^{0s}$	295 K
Température de fin austénitique $A^{of}$	315 K
Contrainte de transformation maximale $H$	0.05
Coefficient d'influence du stress pour l'austénite $\rho \Delta s^A$	$-0.35 \text{ MPa K}^{-1}$
Coefficient d'influence du stress pour la martensite $\rho \Delta s^M$	$-0.35 \text{ MPa K}^{-1}$

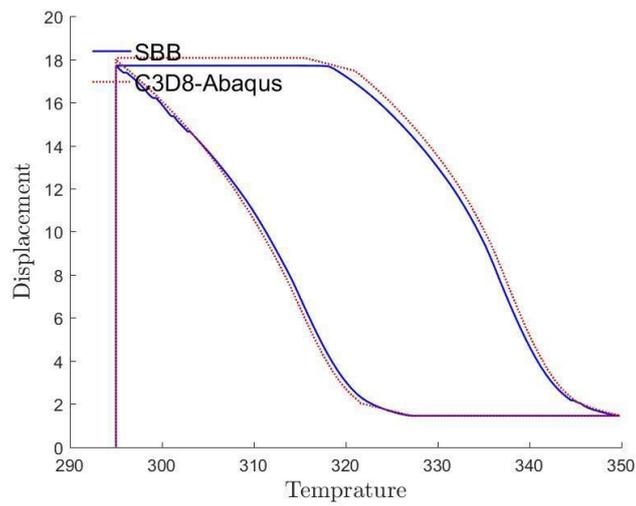
L'historique de chargement suivant est appliqué:

**Tableau 4.2. Chargement mécanique et thermique**

$t [s]$	0	1	2	3
$Q$	0	$Q_{max}$	$Q_{max}$	$Q_{max}$
$T [K]$	295	295	350	295



a- Déplacement au cours de chargement



b- Déplacement en fonction de la température

Figure 4.13 Effet mémoire de forme.

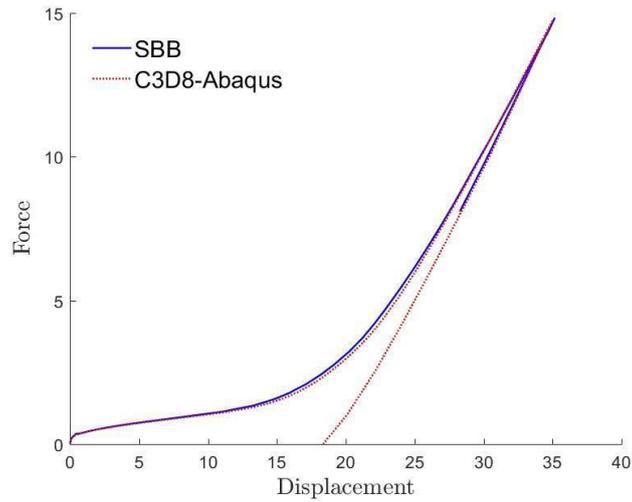


Figure 4.14 Comportement pseudo-élastique à une température 293 K.

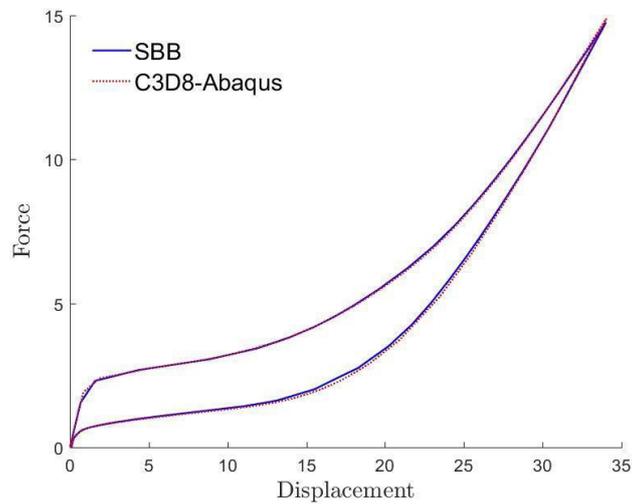


Figure 4.15 Comportement pseudo-élastique à une température 320 K.

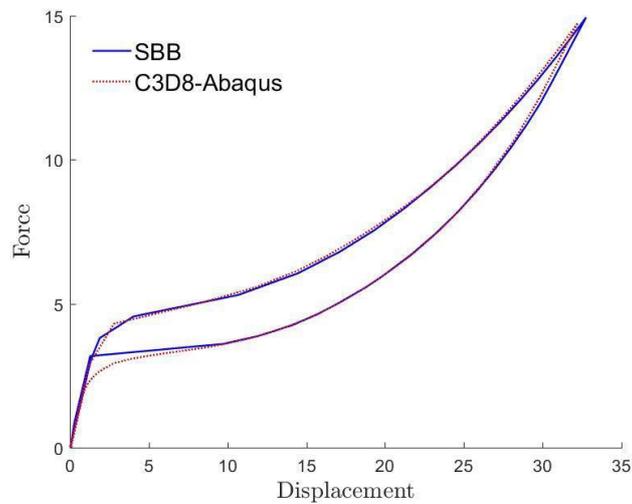


Figure 4.16 Comportement pseudo-élastique à une température 350 K.

La figure 4.13 (a) montre le déplacement de l'extrémité libre au cours des différentes étapes de chargement. La figure 4.13 (b) donne le déplacement en fonction de la température appliquée pendant le chargement mécanique et thermique (chauffage et refroidissement). Le déplacement augmente avec l'augmentation de la charge mécanique. Le déplacement diminue avec la température de chauffage. Il semble que la structure commence à se déplacer à partir d'une température de 320 K pendant le chauffage. C'est début la transformation martensite à l'austénite. Durant le refroidissement, la structure revient à sa situation initiale, et elle commence à se déplacer à partir de 325K, c'est quand la transformation austénite à la martensite commence.

Les figures 4.14, 4.15 et 4.16 présentent une comparaison entre le comportement pseudo-élastique isotherme de la structure à des températures constantes de 293 K, 320 K et 350 K. Durant la température 320 K et 350 K, le matériau est superélastique et la structure revient à la forme initiale. Contrairement à la température 293 K, c'est l'effet mémoire de forme.

Les figures montrent que l'élément SBB capture avec une bonne précision le comportement pseudo-élastique du matériau AMF. En particulier, une récupération complète de la forme est obtenue lors du déchargement, une réponse lisse est observée au début et à la fin de la transformation de phase et il s'avère que le module d'élasticité dépend de la composition de la phase.

On conclue que le schéma de l'élément finis SBB à champ de déformation décrit correctement la réponse structurelle de la bobine actionnée par rapport à la solution de référence 3D (l'élément C3D8 du code ABAQUS) sur l'ensemble de l'historique de chargement.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les types et les caractéristiques des nouveaux matériaux intelligents qui présente un couplage thermique/mécanique (des alliages à mémoire de forme). Nous avons ensuite décrit le modèle de comportement thermomécanique du type d'AMF utilisé (Les alliages à base de nickel-titane -NiTi-) issu des travaux de Lagoudas et al. [Lag.96] qui a été implémenté dans le code de calcul ABAQUS.

Nous avons utilisé un autre élément brick basé sur l'approche en déformation (SBB), ayant trois degrés de liberté par nœud, dans l'étude du comportement thermomécanique d'une bobine en AMF en faisant le couplage entre UMAT et UEL. Les résultats permettent de montrer l'aptitude de l'élément à décrire le comportement thermomécanique des AMF.

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

## Sommaire

---

<b>Conclusion</b>	<b>70</b>
<b>perspectives</b>	<b>71</b>

---

---

## Conclusions

L'objectif de ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre général de la formulation d'un élément tridimensionnel qui s'appuie sur l'approche en déformation dédié à l'étude des plaques minces et épaisses. Cette approche en déformation, qui a démontré son efficacité et son performance, permet le développement d'éléments d'ordre élevé avec des degrés de liberté minimums.

La recherche bibliographique effectuée, a été orientée sur la récente formulation des éléments finis développés dans le cadre de la modélisation des structures dans le domaine linéaire et non linéaire. Cette revue bibliographique a montré qu'à cause des difficultés de formulation et de temps de calcul des éléments d'ordre supérieur, les tendances actuelles sont dirigées à des formulations des éléments finis de premier ordre à précision améliorée.

Dans ce contexte un élément nommé SBBNN (Strain Based Brick Nine Nodes) a été développé. Cet élément qui satisfait à la fois les équations de compatibilité et les équations d'équilibre, n'est formulé qu'avec des degrés de liberté de déplacements, aucun degré de liberté de rotation n'étant introduit. Les relations de comportement utilisées sont les relations matricielles classiques, la loi de comportement est modifiée pour représenter l'état de contrainte plane par l'introduction des coefficients de cisaillement.

L'élément formulé est implémenté dans le code de calcul ABAQUS via la routine UEL (User Element). Les résultats numériques obtenus en utilisant cet élément sont en bon accord avec les résultats analytiques, et montrent qu'ils sont libres de tout blocage en cisaillement transverse lorsqu'on modélise les plaques minces et convergent vers les solutions de Kirchhoff, contrairement à l'élément d'élasticité 3D basé sur l'approche en déplacement de l'ABAQUS C3D8. Notre élément a un taux de convergence assez rapide vers les solutions de référence pour les tests examinés. Il est constaté que l'élément SBBNN se comporte mieux que l'élément C3D8 et particulièrement pour le cas des plaques minces.

Plusieurs tests sont effectués pour vérifier l'effet de la distorsion sur l'élément développé ainsi que sa sensibilité à la variation de l'élancement (rapport de longueur/épaisseur) et l'effet du coefficient de Poisson. Les résultats ont montré de bonnes performances et de bonnes précisions.

Pour l'analyse de vibration libre, des tests réputés sévères sont examinés avec l'élément SBBNN. Les résultats obtenus confirment sa bonne performance dans ce type d'analyse.

Le dernier point présenté dans ce manuscrit a consisté à l'étude du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme AMF. Dans un premier temps, nous avons décrit ces nouveaux matériaux intelligents qui présente un couplage thermique/mécanique en précisant leurs types et leurs propriétés. Nous nous sommes ensuite concentrés sur l'implémentation du modèle de comportement (Lagoudas et al. 1996) qui décrit le comportement du type d'AMF utilisé (Les alliages à base de nickel-titane -NiTi-) dans le code ABAQUS via la routine User MATerial (UMAT).

Finalement, nous avons utilisé un autre élément brick basé sur l'approche en déformation (SBB), ayant trois degrés de liberté par nœud, dans les calculs du comportement thermomécanique d'une

bobine en AMF en faisant le couplage entre UMAT et UEL qui permet de montrer l'aptitude du modèle à décrire le comportement thermomécanique des AMF.

En conclusion, La qualité de l'élément développé se manifeste clairement en absence des verrouillages numériques de cisaillement, de membrane et aussi de Poisson.

### **Perspectives**

Au vu des résultats obtenus, des perspectives apparaissent clairement comme suite aux diverses analyses effectuées. Les propositions suivantes constituent des extensions possibles de notre travail:

- Une extension du travail qui consiste à examiner cet élément dans l'étude dynamique forcée et la non linéarité matérielle et géométrique.

- Une série de tests de validation peut être envisagée pour confirmer la similitude du comportement de l'élément développé avec l'élément du code ABAQUS C3D20 pour les problèmes présentant des blocages de cisaillement. La confirmation de cette similitude pourrait engendrer un gain de temps de calcul considérable du fait que le nombre des degrés de liberté se trouve fortement réduit en passant de l'élément C3D20 à l'élément SBBNN.

## **BIBLIOGRAPHIE**

---

**BIBLIOGRAPHIE**

ABAQUS. Analysis User's Manual. V. 6.11; 2011.

- [Ait.84] Ait-Ali, L. (1984). Développement d'éléments finis de coque pour le calcul des ouvrages d'art (Thèse de doctorat). Ecole Nationale Des Ponts Chaussées Paris Tech.
- [And.93] Andelfinger U, Ramm E. (1993), "EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:1311-37.
- [Are.03] Areias PMA, César de Sá JMA, António CAC, Fernandes AA.(2003), "Analysis of 3D problems using a new enhanced strain hexahedral element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(11):1637-1682.
- [Arg.55] Argyris, J. H., and Kelsey, S. "Energy Theorems and Structural Analysis," *Aircraft Engineering*, Vols. 26 and 27, Oct. 1954 to May 1955. Part I is by J. H. Argyris, and Part II is by J. H. Argyris and S. Kelsey.
- [Arm.08] Armattoe K. M., Modélisation non-locale du comportement thermomécanique d'Alliages à Mémoire de Forme (AMF) avec prise en compte de la localisation et des effets de la chaleur latente lors de la transformation de phase : Application aux structures minces en AMF. Thèse de doctorat, université de lorraine, Juin 2014.
- [Arm.14] Armattoe K. M., Haboussi M., Ben Zineb T.. A 2D finite element based on a nonlocal constitutive model describing localization and propagation of phase transformation in shape memory alloy thin structures. *International Journal of Solids and Structures*, 51, pp. 1208-1220, 2014.
- [Ash.71] Ashwell D.G., Sabir A.B., Roberts T.M. (1971), "Further studies in the application of curved finite elements to circular arches", *International Journal of Mechanical Sciences* 13 (6) 507-517.
- [Ash.72] Ashwell D.G, Sabir A.B. A new cylindrical shell finite element based on simple indépendant strain functions. *IJMS* 14, 171-183 (1972).
- [Ass.84] Assan A.E. Reservorios com parede ondulada- um enfoque pelo método dos elementos finitos. Doctoral Dissertation, Sao Carlos, SP (Brasil): Escola de Engenharia de Sao Carlos (1984).
- [Ass.99] Assan A.E. Analysis of multiple cylindrical stiffened barrel shell structures by strain based finite element. *Thin-Walled Structures* 35, 233-253 (1999).
- [Aur.04] Auricchio F, Petrini L. A three dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2004; 61:807-836.
- [Aya.02] Ayad R. Contribution à la Modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non newtoniens. Application à des matériaux d'emballage: Thèse d'Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Reims, France; 2002.
- [Aya.03] Ayad R. (2003), "A 3D 8-node solid finite element based upon the space fiber rotation concept", *Proceedings of the 16th French Congress on Mechanics*.

- [Aya.13] Ayad R, Zouari W, Meftah K, Ben Zineb T, Benjeddou A. (2013), "Enrichment of Linear Hexahedral Finite Elements using Rotations of a Virtual Space Fiber", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95 (1), 46-70.
- [Bas.00a] Bassayya k., Bahattacharya K., Shrinivasa U. (2000), "Eight-Node brick, PN340, represents constant stress fields exactly", *Computers and Structures*, 74 (4) 441–460.
- [Bas.00b] Bassayya K., Shrinivasa U. (2000), "A 14-node brick element, PN5X1, for plates and shells", *Computers and Structures*, 74 (2) 176–178.
- [Bat.90] Batoz JL., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vols 1, 2,3, Hermès 1990.
- [Bath.16] Klaus-Jurgen Bathe, "Finite Element Procedures", Printed in the United States of America, 2nd edition: fourth printing 2016.
- [Bela.99] Belarbi M.T., Charif A. (1999), "Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses", *Revue Européenne des Eléments Finis*, 8 (2) 135–157.
- [Bela.05a] Belarbi M.T, Lahouel B. (2005), "grand élément fini B14 approprié à la résolution des problèmes de mécanique des sols", *Courrier du Savoir – N°06*, Juin 2005, pp.29-37.
- [Bela.05b] Belarbi M.T & Maalem T. (2005) On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne des Eléments*, 14:8, pp.985-997.
- [Belo.05] Belouar, L., & Guenfoud, M. (2005). A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending. *Thin-Walled Structures*, 43(1), pp.47–63.
- [Belo.14] Belouar L., Guerraiche K. (2014), "A new strain based brick element for plate bending", *Alexandria Engineering Journal*, 53: 95–105.
- [Belo.A.18] Belouar A., Benmebarek S. & Belouar L. (2018): Strain based triangular finite element for plate bending analysis, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, doi: 10.1080/15376494.2018.1488310.
- [Belo.A.19] Belouar A., Benmebarek S., Houhou M.N. and Belouar L., Static, free vibration, and buckling analysis of plates using strain-based Reissner–Mindlin elements, *International Journal of Advanced Structural Engineering*, vol. 11, pp. 211-230, 2019.
- [Brend.79] Brendel B, Ramm E. (1979), "Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. Internat". Conf. on Engineering Application of Finite Element Method, Hovik, Norway, May 9-11, 1979.
- [Bo.99a] Bo Z. et Lagoudas D. C., Thermo mechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part I : theoretical derivations. *International Journal of Engineering Science*, (37) : 1089–1140, 1999a.
- [Bou.04] Bouvet C., Calloch S., et Lexcellent C., A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiaxial proportional and non proportional loadings. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(1) :37–61, 2004.
- [Boy.94] Boyd G. et Lagoudas D. C., Thermomechanical response of shape memory composites. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, (5) :333–346, 1994.

- [Boy.96] Boyd, J. G., Lagoudas, D. C., 1996. A thermodynamic constitutive model for the shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloys. *Int. J. Plasticity* 12 (6), 805–842.
- [Bret.79] Bretl J. L., Cook R. D. (1979), “A new eight-node solid element”, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 14:593-415.
- [Bri.93] Brinson L. C. One dimensional constitutive behaviour of shape memory alloys : thermo-mechanical derivation with non-constant material functions. *J. of Intelligent Material Systems and Structures* 4, 229–242 (1993).
- [Bue.67] Buehler W. J., Wang, F. E.: A Summary of Recent Research on the NITINOL Alloys and their Potential Application in Ocean Engineering, *Ocean Engineering*, 1, (1967) pp. 105–120, Pergamon Press.
- [Cha.89] Chandra S, Prathap G. (1989), "A field-consistent formulation for the eight-noded solid finite element", *Comput. Struct.*; 33:345-355.
- [Char.82] Charchafchi T.A. Curved rectangular and general quadrilateral shell elements for cylindrical shells. In: Whitman J, editor. *Mathematical of Finite Elements and Applications IV*. London: Academic Press, 231-239 (1982).
- [Char.90] Charhabi, A. (1990). Calcul des plaques minces et épaisses à l'aide des éléments finis tridimensionnels. *Annales de l'ITBTP n° 486*.
- [Clou.99] Clough W. & Wilson E. L.. « Early Finite Element Research at Berkeley ». the Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, Aug. 4-6, 1999.
- [Cou.43] Courant, R. "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations," *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 49, pp. 1-23, 1943.
- [Cou.80] Courbon J. *Plaques Minces Elastiques*, Editions Eyrolles.1980
- [Djo.85] Djoudi, M. S., “A Sector Finite Element for Plane Elasticity with In-Plane Rotation”, M. Sc. Thesis, University of Wales, U.K.,1985.
- [Djo.03] Djoudi M.S., Bahai H. A shallow shell finite element for the linear and non-linear analysis of cylindrical shells. *Engineering Structures* 25 (2003) 769–778.
- [Djo.04] Djoudi M. S, Bahai H. Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with opening, *Thin-Walled structures* 42 (4) (2004) 575–588.
- [Duv.11] Duval A., Haboussi M., and Ben Zineb T.. Modelling of localization and propagation of phase transformation in super-elastic SMA by a gradient nonlocal approach. *International Journal of Solids and Structures*, 48, pp. 1879–1893, 2011.
- [Ent.00] Entemeyer D., Patoor E., Eberhardt A., et Berveiller M., Strain rate sensitivity in superelasticity. *International Journal of Plasticity*, 16 :1269–1288,2000.
- [Ent.01] Entemeyer D., Patoor E., Eberhardt A., et Berveiller M., Erratum to “strain rate sensitivity in superelasticity”. *International Journal of Plasticity*, 17,2001.
- [Fred.07] Fredriksson M, Ottosen NS. (2007), "Accurate eight-node hexahedral element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*;72:631-57.

- [Fre.96] Freischläger C, Schweizerhof K. (1996),"On a systematic development of trilinear three-dimensional solid elements based on Simo's enhanced strain formulation",*International Journal of Solids and Structures*, 33:2993-3017.
- [Gao.00] Gao X., Huang M., et Brinson L. C., A multivariant micromechanical model for SMAs Part1. Crystallographic issues for single crystal model. *International Journal of Plasticity*,16 (10-11) :1345–1369,2000.
- [Gho.12] Ghomari T, Meftah K, Ayad R, Talbi N. (2012),"A space fibre as added value in finite element modelling for optimal analysis of problems involving contact",*European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 21:141-57.
- [Gil.94] Gilbertson, R.G. : *Muscle Wires Project Book*, Mondo-Tronics Inc., San Anselmo, 1994, ISBN 1-879896 -13-3.
- [Goo.85] Goo E, Sinclair R : The B2 to R transformation in Ti50Ni47Fe3 and Ti49,5Ni50,5 alloys. *Acta Met.* 1985, 33(9) : 1717-1723.
- [Got.01] Gotthard R, Lehnert T : Alliages à mémoire de forme. In : *Traité des matériaux n°19 : Matériaux émergents*, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes ; 2001 : 81-105.
- [Gue.95] Guénin G., *Techniques de l'ingénieur*, chapitre Alliages à mémoire de forme, pages M530 (1-14), 1995.
- [Guer.14] Guerraiche K, *Eléments finis d'élasticité plane et de volume basés sur l'approche en déformation*, Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider – Biskra, Biskra2014.
- [Guer.18] Guerraiche K, Belounar L. and Bouzidi L. (2018), A new eight nodes brick finite element based on the strain approach, *Journal of Solid Mechanics*, vol. 10, pp. 186–199.
- [Gup.96] Gupta K.K. et Meek J.L.. « A bried history of the beginning of the Finite Element Method ». In: *Int. J. Num Meth in Eng.* 39 (1996), pages 3761–3774.
- [Ham.10] Hamadi D., Maalem T. Presentation of an Efficient Parallelepiped Finite Element Based on the Strain Approach SBP8C, *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2010.
- [Him.11] Himeur M, Guenfoud M. Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach, *European Journal of Computational Mechanics* 20 (7-8) (2011) 455-485.
- [Huan.98] Huang M. et Brinson L. C., A multivariant model for single crystal shape memory alloy behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*,46(8) :1379–1409,1998.
- [Huan.00] Huang M., Gao X., et Brinson L. C., A multivariant micromechanical model for SMAs Part2. Poly-crystal model. *International Journal of Plasticity*,16(10-11) :1371–1390,2000.
- [Hug.81] Hughes T.J.R, Liu W.K. (1981),"Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. Three dimensional shells",*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26:331–362.
- [Kas.00a] Kasper EP, Taylor RL. A mixed-enhanced strain method: Part I: Geometrically linear problems. *Computers & Structures*. 2000;75:237-50.
- [Kas.00b] Kasper EP, L. Taylor R. A mixed-enhanced strain method: Part II: Geometrically nonlinear problems. *Computers & Structures*. 2000;75:251-60.

- [Kim.90] Kim Y.H, Jones R.F, Lee S.W. (1990), "Study of 20-node solid element", *Communication in Applied Numerical Methods in Engineering*, 6:197–205.
- [Kor.96] Korelc J, Wriggers P. (1996), "Efficient enhanced strain element formulation for 2D and 3D problems", *Advances in Finite Element Technology*, Wiberg ed: CIMNE: Barcelona, Spain.
- [Lag.96] Lagoudas, D. C., Bo, Z., Qidwai, M. A., 1996. A unified thermodynamic constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites. *Mech. Composite Mater. Struct.* 3, 153–179.
- [Lag.03] Lagoudas, D. C., Bo, Z., Qidwai, M. A., P.B. Entchev, 2003. SMA UM: User Material Subroutine for Thermomechanical Constitutive Model of Shape Memory Alloys.
- [Lag.04] Lagoudas D. C. et P. B. Entchev, Modeling of transformation-induced plasticity and its effect on the behavior of porous shape memory alloys. part i : constitutive model for fully dense SMAs. *Mechanics of Materials*,36(9) :865–892,2004.
- [Lag.08] Lagoudas D.-C.. *Shape Memory Alloys - Modeling and Engineering Applications*. Springer. 2008.
- [Li.08] Li H.G, Cen S, Cen Z.Z. Hexahedral volume coordinate method (HVCM) and improvements on 3D Wilson hexahedral element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (51-52) (2008) 4531-4548.
- [Lia.90] Liang C. et Rogers C., One dimensional thermo mechanical constitutive relations for shape memory materials. *journal of Intelligent Material Systems and Structures*, (1) :207–234,1990.
- [Lia.92] Liang C. et Rogers C., A multi dimensional constitutive model for shape memory alloys. *Journal of Engineering Mathematics*, (26) :429–443,1992.
- [Lie.93] Liew, K., Xiang, Y., Kitipornchai, S. (1993), "Transverse vibration of thick rectangular plates-I. comprehensive sets of boundary conditions", *Comput. Struct.*, 49(1), 1–29.
- [Liu.94] Liu WK, Hu YK, Belytschko T. (1994), "Multiple quadrature underintegrated finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3263-89.
- [Liu.14] Liu G.R., Quek S.S. *The Finite Element Method (Second Edition)*, 2014.
- [Liu.98] Liu WK, Guo Y, Tang S, Belytschko T. (1998), "A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154:69-132.
- [Lu.98] Lu Z. K. et Weng G. J., A self-consistent model for the stress-strain behavior of shape memory alloy poly crystals. *Acta Materialia*,46(15) :5423–5433,1998.
- [Mac.85] MacNeal R.H., Harder R.L. (1985), "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", *Finite Element in Analysis and Design*, 1 (1) 3–20.
- [Man.13] Manet. V. *La Méthode des Éléments Finis: vulgarisation des aspects mathématiques, illustration des capacités de la méthode*. DEA. Éléments finis pour l'ingénieur, ViM2, Lyon, 2013, pp.397.
- [Mer.08] Merzouki T.. *Identification expérimentale et modélisation micromécanique du comportement d'un multi cristal en alliage à mémoire de forme*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Metz 2008.

- [Mer.10] Merzouki T., Collard C., Bourgeois N., T. Ben Zineb and F. Meraghni. Coupling between measured kinematic fields and multi crystal SMA finite element calculations. *Mechanics of Materials*, 42, pp. 72–95, 2010.
- [Mes.19] Messai A., Belouar L. and Merzouki T. (2019), element, *European Journal of Computational Mechanics*, DOI: 10.1080/17797179.2018.1560845.
- [Min.51] Mindlin R.D. influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, Vol. 18 p. 31-38.
- [Mou.94] Mousa, A. I. and Sabir A. B., “The Analysis of Storage Tanks by The Finite Element Method”, Civil-Comp-Ltd, Edinburgh, Scotland, *Computational Structural Engineering for Practice*, 1994, pp. 189-196.
- [Mou.01] Mousa, A. I., “Finite Element Analysis of Rectangular-Plan Cylindrical Croined Vault”, *Al Azhar University Engineering Journal, AUEJ*, Vol. 2, Egypt, 2001.
- [Mou.17] Mousa A. (2017), "Strain-Based Finite Element Analysis of Stiffened Cylindrical Shell Roof", *American Journal of Civil Engineering*, Vol. 5, No. 4, pp. 225-230.
- [Par.78] Parisch H. (1978), "Geometrical nonlinear analysis of shells", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14:159–178.
- [Pat.94] Patoor E. et Berveiller M., *Technologie des alliages à mémoire de forme*. Hermès, 1994. ISBN 2-86601-426-X.
- [Pat.95] Patoor E., El Amrani M., Eberhardt A., et Berveiller M., Determination of the origin for the dissymmetry observed between tensile and compression tests on shape memory alloys. *Journal de Physique IV*, (5) :495–500, 1995.
- [Pat.96] Patoor E., Eberhardt A., et Berveiller M., Micromechanical modelling of super elasticity in shape memory alloys. *Journal de Physique. IV, C1(6) :277–292*, 1996.
- [Peu.05] Peultier B.. *Alliages à mémoire de forme : modélisation et calcul de structures*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, Metz 2005.
- [Peu.06a] Peultier B., Ben Zineb T., et Patoor E., Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behaviour. Application to structure computation by FEM. *Mechanics of Materials*, 38(5-6) :510–524, 2006.
- [Peu.06b] Peultier B., Ben Zineb T., et Patoor E., A simplified micromechanical constitutive law adapted to the design of shape memory applications by finite element methods. *Materials Science and Engineering : A*, 481-482 :384–388, 2008. *Proceedings of the 7th European Symposium on Martensitic Transformations, ESOMAT2006*.
- [Pian.64] Pian THH. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA journal*. 1964;2:1333-6.
- [Pian.84] Pian THH, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1984;20:1685-95.
- [Pian.86] Pian THH, Tong P. Relations between incompatible displacement model and hybrid stress model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986;22:173-81.
- [Pil.95] Piltner R, Taylor RL. (1995), "A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 38:1783–808.

- [Ran.94] Raniecki B. et Lexcellent C., R-I models of pseudo elasticity and their applications for some shape memory alloys. *European Journal of Mechanics - A/Solids*,12(1) :21–50,1994.
- [Reb.13] Rebiai C., Belounar L. ((2013), "A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and non linear analysis", *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 13, pp.72–81.
- [Reb.14] Rebiai C., Belounar L. ((2014), An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach, *Measurement*, vol. 50, pp. 263–269.
- [Rei.45] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. *J. of Appl. Mech.*, 1945; Vol. 12 p. A69-A77.
- [Rio.95] Rio G., Favier D., et Desplats H., Finite Elements Simulation of Mechanical Behaviour of Shape Memory Alloys Coupled with a Non-Stationary Thermal Field. *Journal de Physique IV*,5 :C8–215–C8–220,1995.
- [Rob.86] Robinson J. New FEM user project – single element test for aspect ratio sensitivity for solids (Part I). *Finite Element News* 1986; 1:26-32.
- [Sab.79] Sabir A.B, Ashwell, D.G. Diffusion of Concentrated Loads into Thin Cylindrical Shells, *The Math of Finite Element and Applications II*, Academic Press, 33, pp. 379-389, 1979.
- [Sab.82] Sabir A.B, Charchafchi T.A. Curved rectangular and quadrilateral shell element for cylindrical shell. *The mathematics of finite elements and application IV* Editor. JR.Whiteman 231- 239 (1982).
- [Sabi.83a] Sabir A. B., “A new class of finite elements for plane elasticity problems”, *CAFEM7, 7th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Chicago, August, 1983.
- [Sab.83b] Sabir A.B. Strain based finite elements for the analysis of cylinders ith holes and normally intersecting cylinders. *Nuclear engineering and design*. 76, 111-120 (1983).
- [Sabi.85a] Sabir A.B., A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering*, Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 17–25.
- [Sab.85b] Sabir A.B, Ramadhani F. A shallow shell finite element for general shell analysis, *Variational Methods in Engineering Proceeding of the 2nd International Conference*, University of Southampton England (1985).
- [Sabi.86] Sabir A.B., Salhi H.Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *RES* 19 (1986) 1–16.
- [Sab.87] Sabir A.B. Strain Based Shallow Spherical Shell Element, *Proc. Of Int. Conf. on the Mathematics of Finite Elements and Applications*, Bunel University, 1987.
- [Sab.88] Sabir A.B, El-Erris H.F. A New Conical Shell Finite Element *Computational Mechanics* m, 88, pp 613-616, 1988.
- [Sabi.95] Sabir A.B., Sfindji A., Triangular and rectangular plane elasticity finite element, *Thin-Walled Structures* 21 (1995) 225–232.

- [Sim.90] Simo JC, Rifai MS. (1990),"A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes",*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595-638.
- [Sim.92] Simo J, Armero F. (1992),"Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes",*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1413-49.
- [Sim.93] Simo J, Armero F, Taylor R. (1993),"Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems",*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:359-86.
- [Sir.99] Siredey N., Patoor E., Berveiller M., et Eberhardt A., Constitutive equations for polycrystalline thermo-elastic shape memory alloys. : Part i. intragranular interactions and behavior of the grain. *International Journal of Solids and Structures*,36(28) :4289–4315,1999.
- [Sou.03] De Sousa RJA, Jorge RMN, Valente RAF, de Sá JMAC.(2003),"A new volumetric and shear locking-free 3D enhanced strain element",*Engineering Computations.*;20:896-925.
- [Syn.57] Synge, J. L. *The Hypercircle in Mathematical Physics*, Cambridge University Press, London, 1957.
- [Sze.93] Sze K, Ghali A. A hybrid brick element with rotational degrees of freedom. *Computational mechanics*. 1993;12:147-63.
- [Sze.95] Sze KY. Editorial Recent advancements in the hybrid/mixed finite element method. *Finite elements in analysis and design*. 1995;21:3.
- [Sze.96] Sze KY. Recent advancements in the hybrid/mixed finite element method. *Finite elements in analysis and design*. 1996;24:i.
- [Szi.04] Szilard R. *Theories and Applications of Plate Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. 2004.
- [Tan.86] Tanaka K., A thermomechanical sketch of shape memory effect : One dimensional tensile behavior. *Res Mechanica*, (18) :251–263,1986.
- [Tay.08] Taylor RL. *FEAP - A Finite Element Analysis Program, Ver. 8.2 User Manual*. Department of Civil & Environmental Engineering, University of California: Berkeley, 2008. [www.ce.berkeley.edu/feap](http://www.ce.berkeley.edu/feap).
- [Thi.07] Thiebaud F., Lexcellent C., Collet M., et Foltete E., Implementation of a model taking into account the asymmetry between tension and compression, the temperature effects in a finite element code for shape memory alloys structures calculations. *Computational Materials Science*,41(2) :208–221,2007.
- [Tim.59] Timoshenko S., Woinowsky- Krieger S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill. 2nd ed 1959.
- [Tri.09] Trinh, V. D. (2009). *Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous intégrés Stabilisés utilisables pour des problèmes a cinématique et comportement non linéaires (Thèse de doctorat)*. Ecole Doctorale, ENSAM-Paris.
- [Ufl.48] Uflyand Y. S. the propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates. *Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mesh.*, 1948, Vol. 12 p. 287-300.

- [Van.99] Van Humbeeck J. Non-medical applications of shape memory alloys. *Materials Science and Engineering : A*,273–275 :134–148,1999.
- [Ven.01] Ventsel E., Krauthammer T. *Thin Plates and Shells (theory, analysis and applications)*. Marcel Dekker, New York, 2001.
- [Was.75] Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*: Pergamon press Oxford, UK; 1975.
- [Wil.73] Wilson E.L, Taylor R.L, Doherty W.P, Ghaboussi J. (1973),"Incompatible displacement models",In *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, (Eds. S.J. Fenves et al.), 43–57, Academic Press, New York.
- [Wu.02] Wu T.Y., Wang Y.Y., Liu G.R. (2002),"Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191: 5365–5380.
- [Yeo.97] Yeo ST, Lee BC. New stress assumption for hybrid stress elements and refined four-node plane and eight-node brick elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:2933-52.
- [Yun.91] Yunus SM, Pawlak TP, Cook RD. (1991), "Solid elements with rotational degrees of freedom: Part 1—hexahedron elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:573-92.
- [Zak.07] Zaki W. et Moumni Z., A three-dimensional model of the thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*,55(11) :2455–2490, 2007.
- [Zou.15] Zouari W., Assarar M., Meftah K., Ayad R. (2015),"Free vibration analysis of homogeneous piezoelectric structures using specific hexahedral elements with rotational DOFs", *Acta Mech*, 226, 1737–1756.
- [Zou.12] Zouari W, Ayad R, Zineb TB, Benjeddou A. (2012),"A piezoelectric 3D hexahedral curvilinear finite element based on the space fiber rotation concept", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90:87-115.

# ANNEXE

## Sommaire

---

<b>Annexe A:</b> Les modules Abaqus/CAE	<b>83</b>
<b>Annexe B:</b> User Element	<b>85</b>

---

---

## ANNEXE A

### Les modules Abaqus/CAE

ABAQUS CAE est divisé en unités fonctionnelles appelées modules. Chaque module contient les outils qui sont propres à une partie de la tâche de modélisation.

- **Le module PART**

Le module Part permet de créer tous les objets géométriques nécessaires à notre problème, soit en les dessinant dans ABAQUS CAE, soit en les important d'un logiciel de dessin tiers.

- **Le module PROPERTY**

Le module Property permet, comme son nom l'indique, de définir toutes les propriétés d'un objet géométrique ou d'une partie de ces objets.

- **Le module ASSEMBLY**

Ce module permet d'assembler les différents objets géométriques créés dans un même repère de coordonnées global. Un modèle ABAQUS contient un seul assemblage.

- **Le module STEP**

Ce module permet de définir toutes les étapes et les requêtes pour le post traitement, c'est à dire le moment (temps) à partir duquel une force est appliquée et jusqu'à quand, il est aussi possible de créer des forces ou des conditions limites qui s'activent à des moments donnés.

- **Le module INTERACTION**

Grâce ce module, il est possible de spécifier toutes les interactions entre les différentes parties et régions du modèle, qu'elles soient mécaniques, thermiques ou autres. Il faut savoir qu'ABAQUS ne prend en compte que les interactions explicitement définies, la proximité géométrique n'étant pas suffisante.

- **Le module LOAD**

Le module Load permet de spécifier tous les chargements, conditions limites et champs. Il faut savoir que les chargements et les conditions limites sont dépendants des steps, par exemple une force est appliquée au step 1 mais inactive au step 2.

- **Le module MESH**

Ce module contient tous les outils nécessaires pour générer un maillage élément fini sur un assemblage.

- **Le module JOB**

Une fois que toutes les tâches de définition du modèle ont été réalisées, il faut utiliser le module Job pour analyser ce modèle. ABAQUS va alors réaliser tous les calculs nécessaires et en tirer des résultats.

- **Le module VISUALIZATION**

Ce module permet de visualiser le modèle et les résultats, les courbes de charges, les déformations...

- **Le module SKETCH**

Ce module permet de créer des formes bidimensionnelles qui ne sont pas associés à un objet. Il peut être utilisé pour des extrusions par exemple.

Les huit premiers sous-modules servent à définir le problème mécanique à simuler. Le module Job est celui qui gère le passage du calcul de simulation proprement dit, c'est-à-dire le cœur du code. Enfin, le dernier module regroupe tout ce qui concerne l'exploitation des résultats sous forme de diverses visualisations.

## ANNEXE B

### User Element

Avant de créer un UEL, les caractéristiques clés de l'élément suivantes doivent être définies :

- *Définir le nombre de nœuds associés à l'élément* : L'option \*USER ELEMENT permet de définir le nombre de nœuds associés à l'élément. L'utilisateur peut définir des nœuds internes qui ne sont pas connectés à d'autres éléments.
- *Définir le nombre maximal de coordonnées nécessaires pour chaque nœud*.
- *Définir les propriétés de l'élément* : Il faut utiliser l'option \*UEL PROPERTY pour définir les valeurs numériques des propriétés associées à l'élément.
- *Définir le nombre de variables dépendant de la solution devant être stockées* : Ces variables peuvent être :
  - Les déformations
  - Les contraintes
  - Des variables d'état

Ces variables doivent être calculées et mises à jour dans la routine UEL.

#### Exemple de fichier de données UEL (UEL.inp)

```
*Heading
** Job name: Job-1111 Model name: Model-1
** Generated by: Abaqus/CAE 6.11-PR3
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name=Part-1
*Node
  1,    1.,    1.,    1.
  2,    1.,    0.,    1.
  3,    1.,    1.,    0.
  4,    1.,    0.,    0.
  5,    0.5,    1.,    1.
  6,    0.5,    0.,    1.
  7,    0.5,    1.,    0.
  8,    0.5,    0.,    0.
  9,    0.,    1.,    1.
 10,    0.,    0.,    1.
 11,    0.,    1.,    0.
 12,    0.,    0.,    0.
 13,    0.75,   0.5,   0.5
```

---

14, 0.25, 0.5, 0.5

\*User element, type=U1, nodes=9, coordinates=3, properties=3, variables=96

1, 2, 3

\*Element, type=U1

1, 5, 6, 8, 7, 1, 2, 4, 3, 13

2, 9, 10, 12, 11, 5, 6, 8, 7, 14

\*Nset, nset=\_PickedSet2, internal, generate

1, 14, 1

\*Elset, elset=\_PickedSet2, internal

1, 2

\*UEL PROPERTY, Elset=\_PickedSet2

1e+06,0.499995

\*End Part

\*\*

\*\*

\*\* ASSEMBLY

\*\*

\*Assembly, name=Assembly

\*\*

\*Instance, name=Part-1-1, part=Part-1

\*End Instance

\*\*

\*Nset, nset=\_PickedSet4, internal, instance=Part-1-1, generate

9, 12, 1

\*Elset, elset=\_PickedSet4, internal, instance=Part-1-1

2,

\*Nset, nset=\_PickedSet5, internal, instance=Part-1-1, generate

1, 4, 1

\*End Assembly

\*\*

\*\* MATERIALS

\*\* -----

\*\*

\*\* STEP: Step-1

\*\*

\*Step, name=Step-1

\*Static

1., 1., 1e-05, 1.

\*\*

\*\* BOUNDARY CONDITIONS

\*\*

\*\* Name: BC-1 Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre

\*Boundary

\_PickedSet4, ENCASTRE

\*\*

\*\* LOADS

\*\*

\*\* Name: Load-1 Type: Concentrated force

\*Cload

```

_PickedSet5, 1, 0.25
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step

```

### Interface de UEL.for

La figure suivante présente le format de base du sous-programme UEL avec la liste d'arguments utilisée par ABAQUS pour transmettre au sous-programme défini par l'utilisateur toutes les informations nécessaires au calcul des matrices de rigidité et de masse des éléments. Il convient de noter qu'en plus des analyses statiques et dynamiques linéaires, les informations transférées dans le sous-programme UEL sont suffisantes pour prendre en charge les analyses non linéaires matérielles et géométriques.

```

SUBROUTINE UEL (RHS , AMATRIX , SVARS , ENERGY , NDOFEL , NRHS , NSVARS ,
1 PROPS , NPROPS , COORDS , MCRD , NNODE , U , DU , V , A , JTYPE , TIME , DTIME ,
2 KSTEP , KINC , JELEM , PARAMS , NDLOAD , JDLTYP , ADLMAG , PREDEF , NPREDF ,
3 LFLAGS , MLVARX , DDLMAG , MDLOAD , PNEWDT , JPROPS , NJPROP , PERIOD)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION RHS (MLVARX , * ) , AMATRIX (NDOFEL , NDOFEL) , PROPS ( * ) ,
1 SVARS ( * ) , ENERGY (8) , COORDS (MCRD , NNODE) , U (NDOFEL) ,
2 DU (MLVARX , * ) , V (NDOFEL) , A (NDOFEL) , TIME (2) , PARAMS ( * ) ,
3 JDLTYP (MDLOAD , * ) , ADIMAG (MDLOAD , * ) , DDLMAG (MDLOAD , * ) ,
4 PREDEF (2 , NPREDF , NNODE) , LFLAGS ( * ) , JPROPS ( * )

```

- **RHS (right and side vector)**

définit dans le cas général le vecteur Résidu c'est-à-dire le défaut d'équilibre à l'itération précédente, par exemple en mécanique statique la différence entre les efforts internes et les efforts externes.

- **AMATRIX**

La matrice de rigidité de l'élément ou jacobien.

- **SVARS**

Ce tableau contient les valeurs des variables d'état dépendantes de la solution, associées à l'élément. Le nombre de variables est défini dans le jeu de données et est stocké dans la variable NSVARS. Dans le cas général non-linéaire, les valeurs passées au sous-programme UEL sont les valeurs au début de l'incrément de calcul. En fonction du paramètre LFLAGS, l'utilisateur sera amené à déterminer leurs

valeurs à la fin de l'incrément en cours. Dans le cas d'une procédure de perturbation linéaire, les valeurs transmises au sous programme UEL sont les valeurs correspondant à l'état de base. Les valeurs calculées dans le UEL doivent correspondre aux valeurs de perturbations, par rapport à l'état de base, et pourront ainsi être traitées en post-traitement.

- **ENERGY**

Pour des steps généraux non linéaires, la matrice ENERGY contient les quantités énergétiques associées à l'élément. Les valeurs de cette matrice lorsque UEL est appelée sont les quantités énergétiques de l'élément au début de l'incrément courant. Elles devraient être mises à jour à la fin de l'incrément.

ENERGY(1)	Cinétique
ENERGY(2)	Déformation élastique
ENERGY(3)	Dissipation frottement
ENERGY(4)	Dissipation plastique
ENERGY(5)	Dissipation visqueuse
ENERGY(6)	Déformation artificielle
ENERGY(7)	Electrostatique
ENERGY(8)	Travail incrémental d'autres efforts

*ABAQUS établit un lien entre UEL.inp et UEL.for.*