

Université Mohamed Khider – Biskra

Faculté des Sciences et de la technologie

Département : Génie civil et d'hydraulique

Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية و الري  
المرجع:.....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat en sciences en : Génie Civil**

**Spécialité (Option) : Modélisation Matériaux et Structures**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES COQUES  
CYLINDRIQUES SOUS FLAMBEMENT**

Présentée par :

**Mourad CHALANE**

Soutenue publiquement le 03/07/2018

**Devant le jury composé de :**

Dr. Ounis Abdelhafidh  
Dr. Chebili Rachid  
Dr. Kadid Abdelkarim  
Dr. Bahadi Mohamed

Professeur  
Professeur  
Professeur  
Professeur

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur

Université de Biskra  
Université de Biskra  
Université de Batna  
Université de Batna

# DÉDICACES

*Je dédie ce travail à :*

*Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que vie nous donne temps pour les remercier.*

*- Mes beaux-parents*

*- Ma femme et mon fils El Chafii et ma petite fille Louiza .*

*- Mes frères et mes sœurs.*

*- Toute ma famille et ma belle-famille.*

*- A mes camarades de classe*

*- A tous mes fidèles amis*

*Mourad*

## **Remerciements**

*Ce travail a été réalisé au sein du département « Génie civil et hydraulique » de l'université Mohamed Khidher de Biskra.*

*Tout d'abord, J'exprime mes sincères et profonds remerciements et reconnaissances au professeur CHEBILI Rachid, mon directeur de thèse pour avoir su donner des orientations pertinentes à ce travail, pour ses conseils et pour m'avoir apporté une vision toujours très claire dans ce domaine. Merci d'avoir pris le temps de me convaincre quand j'avais tort...*

*J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur OUNIS Abdelhafidh pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse.*

*Je tiens à remercier Monsieur KADID Abdelkarim. et Monsieur BAHADI Mohamed pour avoir aimablement accepté d'être examinateurs, pour le temps qu'ils ont passé à l'évaluation de ce mémoire et pour leurs remarques pertinentes.*

*Merci également à tous mes amis qui m'ont soutenu*

***J'adresse un grand merci à ma Famille qui a toujours été là pour moi. Merci à tous pour tous les efforts que vous avez consentis durant ces nombreuses années d'études.***

# Sommaire

Remerciements  
Table de matière  
Résumé

**Page**

INTRODUCTION GENERALE.....01

## **CHAPITRE 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

1.INTRODUCTION.....07

2. HISTORIQUE.....07

2.1 Théories de flambement des coques.....07

2.1.1 *Problème de flambement des coques cylindriques*.....09

2.2 Environnement expérimental .....10

2.2.1. *Coques cylindriques isotropes sous compression axiale*.....12

2.2.2. a. *Effets des conditions aux limites*.....12

2.2.2. b. *Effet de déformations de pré flambement* .....13

2.2.2. c. *charges d'excentricités*.....14

2.2.3.d. *Effet des imperfections géométriques*.....15

2.2.3. d.1. *Méthodes analytiques*.....16

2.3 Couplage avec la pression interne.....19

2.3.1 *Compression axiale et pression interne*.....20

2.3.1.1. *Résultat analytique*.....20

2.3.1.2. *Résultats expérimentaux*.....20

2.3.1.2 .a. *Flambage élastique*.....20

2.3.1.2 .b. *Flambage élasto-plastique*.....22

3. CONCLUSION .....24

## **CHAPITRE II: ETUDE THEORIQUE**

1. INTRODUCTION.....27

2. INSTABILITÉ DES STRUCTURES SOUS FLAMBEMENT.....27

2.1 Types d'instabilité.....27

2.1.1 *Flambage par bifurcation*.....27

2.1.2 Flambage par point limite.....	28
2.2 Stabilité d'une coque cylindrique mince.....	29
2.2.1 Géométrie des coques cylindriques .....	29
3. CADRE THEORIQUE DE L'ETUDE.....	30
3.1 Introduction des concepts d'équilibre, de stabilité et de bifurcation.....	30
3.1.1 Equilibre d'un système mécanique .....	30
3.1.2 Bifurcation d'équilibre.....	31
3.1.3 Stabilité de l'équilibre.....	33
3.1.4 Condition du minimum de l'énergie potentielle totale.....	34
3.1.5 Présence de défauts géométriques.....	35
3.2 Théorie des coques de Donnell.....	36
3.2.1 Hypothèses de comportement.....	36
3.2.2 Relations déformations-déplacements.....	38
3.2.3 Relations contraintes-déformations.....	38
3.2.4 Energie potentielle totale.....	39
3.2.5 Equations d'équilibre.....	40
4. CONDITION DE STABILITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE MINCE.....	41
4.1 Stabilité d'une coque cylindrique mince sous compression axiale.....	42
4.2 Stabilité d'une coque cylindrique mince sous compression radiale.....	43
4.2.1 Solution de problème .....	43
5. CONCLUSION.....	47

### **CHAPITRE III : ANALYSE DU COMPORTEMENT**

1. INTRODUCTION.....	49
2. METHODES NUMERIQUES.....	49
2.1 Modélisation numérique par ANSYS.....	49
2.2 Modes de Flambage dans ANSYS.....	51
2.2.1 Analyse du flambement par Valeur propre .....	51
2.2.2 Analyse du flambage par la méthode non linéaire .....	51
3. STABILITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE MINCE NON PRESSURISEE SOUS COMPRESSION AXIALE.....	52
3.1 Contrainte classique .....	52

3.2 Simulation numérique.....	52
3.2.1 Charge critique du flambement par la méthode de Valeur propre.....	54
3.2.1 Charge critique du flambement par la méthode non linéaire.....	54
3.3 Effet du rapport L/R d'un cylindre sur le point de bifurcation.....	56
3.4 Effet d'épaisseur de cylindre sur le point de la bifurcation .....	65
4. STABILITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE MINCE SOUS COMPRESSION RADIALE.....	69
5. STABILITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE MINCE PRESSURISEE SOUS COMPRESSION AXIALE.....	72
6. ETUDE DE L'EFFET DES DEFAUTS GEOMETRIQUES LOCALISES.....	86
6.1 Type de défaut axisymétrique.....	86
6.1.1 Défaut parabolique rentrant.....	86
6.1.2 Défaut triangulaire rentrant.....	86
6.2 Détermination du défaut critique.....	91
6.2.1 Défaut parabolique rentrant.....	92
6.2.2 Défaut triangulaire rentrant.....	103
6.2.3 Comparaison de l'effet de différentes formes de défauts.....	115
7. EFFET DE L'INTERACTION ENTRE DEFAUTS LOCALISES SUR LE FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES AXISYMETRIQUES SOUS COMPRESSION AXIALE.....	117
7.1 Effacement du défaut axisymétrique par pression.....	124
7.1.1 Avec Défaut triangulaire.....	124
7.1.2 Avec Défaut parabolique.....	125
7.2 Influence de la position de défaut sur la contrainte critique.....	131
7.2.1. Influence du rapport L/R sur le positionnement du défaut .....	136
8. CONCLUSION.....	139
CONCLUSION GENERALE.....	142

## Liste de Figures

<i>Figure 1.1</i> Résultats expérimentaux, coques cylindriques sous compression axiale.....	11
<i>Figure 1.2</i> Influence des conditions aux limites .....	13
<i>Figure 1.3</i> Influence d'une imperfection axisymétrique sur la charge critique.....	16
<i>Figure 1.4</i> Influence de différentes formes de défauts sur la charge critique expérimentale .....	18
<i>Figure 1.5</i> Défaut axisymétrique localisé - synthèse des différentes propositions .....	19
<i>Figure 1.6</i> Augmentation de la charge critique avec la pression(Fung,1957).....	20
<i>Figure 1.7</i> Augmentation de la charge critique avec la pression, (Dow,1960).....	20
<i>Figure 1.8</i> Augmentation de la charge critique avec la pression pour différents R/t.....	22
<i>Figure 1.9:</i> Réservoir flambé (mode en pointe de diamant).....	23
<i>Figure 1.10</i> Patte d'éléphant sur un réservoir de stockage .....	24
<i>Figure 2.1</i> Schéma stabilité chemin d'équilibre .....	28
<i>Figure 2.2</i> Schéma de flambage par point limite.....	29
<i>Figure 2.3</i> Coque Cylindrique.....	29
<i>Figure 2.4 :</i> barre articulée soumise à un effort de compression.....	32
<i>Figure 2.5:</i> branches d'équilibre de la barre.....	33
<i>Figure 2.6 :</i> solutions stables de l'équilibre.....	35
<i>Figure 2.7:</i> Effet des défauts géométriques sur les branches d'équilibre.....	36
<i>Figure2.8 :</i> Coque cylindrique mince.....	36
<i>Figure2.9 :</i> Rotations $\beta_x$ et $\beta_y$ .....	37
<i>Figure2.10 :</i> Forces et moments agissant sur un élément de la coque.....	39
<i>Figure 2.11:</i> Modèle de Glock's.....	44
<i>Figure3.1 :</i> Coque cylindrique mince.....	52
<i>Figure 3.2 :</i> maillage de coque cylindrique.....	53
<i>Figure 3.3 :</i> Elément SHELL63 .....	54
<i>Figure3.4 :</i> Les premiers modes de flambage par la méthode valeur propre.....	55
<i>Figure 3.5 :</i> modes de flambage par la méthode non linéaire.....	55
<i>Figure 3.6:</i> Détermination de la charge critique par la méthode Non linéaire.....	56
<i>Figure 3.7 :</i> La charge critique pour le cas (L/R=2)(a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire.....	57
<i>Figure 3.8 :</i> La charge critique pour le cas (L/R= 4)(a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire.....	58
<i>Figure 3.9 :</i> La charge critique pour le cas (L/R= 6)(a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire.....	59
<i>Figure3.10 :</i> La charge critique pour le cas (L/R=8)(a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire.....	60
<i>Figure3.11 :</i> La charge critique pour le cas (L/R=10)(a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire.....	61
<i>Figure3.12 :</i> La charge critique pour le cas (L/R= 12)(a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire.....	62
<i>Figure3.13 :</i> La charge critique pour le cas (L/R= 20)(a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire.....	63
<i>Figure 3.14:</i> Effet du rapport R/L sur la charge critique.....	64
<i>Figure 3.15 :</i> Les premiers modes pour t/R=1/250.....	65
<i>Figure 3.16 :</i> Les premiers modes pour t/R=1/125.....	66
<i>Figure 3.17 :</i> Les premiers modes pour t/R=1/80.....	66
<i>Figure 3.18 :</i> Les premiers modes pour t/R=1/60.....	67
<i>Figure 3.19 :</i> Evaluation de la charge critique en fonction du rapport t/R.....	68
<i>Figure 3.20 :</i> Coque cylindrique sous compression radial.....	70
<i>Figure 3.21:</i> Flambement de la coque cylindrique sous chargement uniforme radial.....	70
<i>Figure 3.22 :</i> Les premiers modes de flambement sous chargement uniforme radial.....	71
<i>Figure 3.23 :</i> Coque cylindrique pressurisée sous compression axiale.....	72
<i>Figure 3.24 :</i> Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée (Pr =1 Mpa) sous chargement axial.....	73
<i>Figure 3.25:</i> Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée (Pr=1 Mpa) sous chargement Axial..	73
<i>Figure 3.26 :</i> Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée (Pr =2 Mpa) sous chargement axial .....	74
<i>Figure 3.27:</i> Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée (Pr =2 Mpa) sous chargement axial.	74

<b>Figure 3.28</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $Pr = 3\text{Mpa}$ ) sous chargement axial.....	75
<b>Figure 3.29</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $Pr=3\text{Mpa}$ ) sous chargement axial..	75
<b>Figure 3.30</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée( $Pr = 4\text{ Mpa}$ ) sous chargement axial.....	76
<b>Figure 3.31</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée( $Pr = 4\text{Mpa}$ ) sous chargement axial..	76
<b>Figure 3.32</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $Pr = 5\text{ Mpa}$ ) sous chargement axial .....	77
<b>Figure 3.33</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $Pr=5\text{Mpa}$ ) sous chargement axial..	77
<b>Figure 3.34</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $Pr = 6\text{Mpa}$ ) sous chargement axial.....	78
<b>Figure 3.35</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée( $Pr = 6\text{Mpa}$ ) sous chargement axial..	78
<b>Figure 3.36</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $Pr = 7\text{Mpa}$ ) sous chargement axial.....	79
<b>Figure 3.37</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée( $Pr=7\text{Mpa}$ ) sous chargement axial..	79
<b>Figure 3.38</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $Pr = 8\text{Mpa}$ ) sous chargement axial .....	80
<b>Figure 3.39</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée( $Pr=8\text{Mpa}$ ) sous chargement axial..	80
<b>Figure 3.40</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $Pr = 10\text{Mpa}$ ) sous chargement axial.....	81
<b>Figure 3.41</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $Pr=10\text{Mpa}$ ) sous chargement axial..	81
<b>Figure 3.42</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $Pr=20\text{Mp}$ ) sous chargement axial .....	82
<b>Figure 3.43</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $Pr=20\text{Mpa}$ ) sous chargement axial..	82
<b>Figure 3.44</b> : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $Pr = 100\text{Mpa}$ ) sous chargement axial.....	83
<b>Figure 3.45</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $Pr = 100\text{Mpa}$ ) sous chargement axial. ....	83
<b>Figure 3.46</b> : Evolution de la contrainte critique pour une coque cylindrique pressurisée sous compression axiale..	84
<b>Figure 3.47</b> : Contrainte de flexion pour coque cylindrique sous compression axiale (avec pression = 7 Mpa).....	85
<b>Figure 3.48</b> : Courbes charge-déplacement pour les pressions 10,20 et 100 Mpa.....	85
<b>Figure 3.49</b> : Schémas d'un défaut parabolique isolé (a) et de deux défauts en interaction (b).....	87
<b>Figure 3.50</b> : Schémas d'un défaut triangulaire isolé.....	87
<b>Figure 3.51</b> : Schémas d'un défaut parabolique isolé.....	88
<b>Figure 3.52</b> : Mode de flambage de coque cylindrique avec défaut $A=0.5 t$ .....	89
<b>Figure 3.53</b> : Mode de flambage de coque cylindrique avec défaut $A = t$ .....	89
<b>Figure 3.54</b> : Mode de flambage de coque cylindrique avec défaut $A = 1.5t$ .....	89
<b>Figure 3.55</b> : Mode de flambage de coque cylindrique avec défaut $A = 2t$ .....	89
<b>Figure 3.56</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude de défaut.....	90
<b>Figure 3.57</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=1$ .....	92
<b>Figure 3.58</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec $\alpha=1$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3....	93
<b>Figure 3.59</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=2$ .....	94
<b>Figure 3.60</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec $\alpha=2$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3....	95
<b>Figure 3.61</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=2.5$ .....	96
<b>Figure 3.62</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec $\alpha=2.5$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3..	97
<b>Figure 3.63</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=3$ .....	98
<b>Figure 3.64</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec $\alpha=3$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3....	99
<b>Figure 3.65</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=4$ .....	100
<b>Figure 3.66</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec $\alpha=4$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3...101	101
<b>Figure 3.67</b> : Evolution de la charge critique en fonction de l'amplitude réduite avec un défaut axisymétrique parabolique .....	102
<b>Figure 3.68</b> : Evolution de la charge critique en fonction de la longueur d'onde avec un défaut axisymétrique parabolique.....	102
<b>Figure 3.69</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=1$ .....	103
<b>Figure 3.70</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires, $\alpha=1$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3.....	104
<b>Figure 3.71</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=2$ .....	105
<b>Figure 3.72</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires, $\alpha=2$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3.....	106
<b>Figure 3.73</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=2.5$ .....	107
<b>Figure 3.74</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires, $\alpha=2.5$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3.....	108
<b>Figure 3.75</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=3$ .....	109
<b>Figure 3.76</b> : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires, $\alpha=3$ et $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ et 3.....	110

<b>Figure 3.77:</b> Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec $\alpha=4$ .....	111
<b>Figure 3.79 :</b> Evolution de la charge critique en fonction de l'amplitude réduite avec un défaut axisymétrique triangulaire.....	113
<b>Figure 3.80 :</b> Evolution de la charge critique en fonction de la longueur d'onde avec un défaut axisymétrique triangulaire.....	114
<b>Figure 3.81 :</b> Effet de la forme du défaut sur la charge critique; Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	115
<b>Figure 3.82 :</b> Schéma de deux défauts en interaction.....	117
<b>Figure 3.83:</b> Mode de flambage de coque cylindrique –Test 01.....	118
<b>Figure 3.84:</b> Courbe charge-déplacement – test 01-.....	118
<b>Figure 3.85:</b> Mode de flambage de coque cylindrique –Test 02.....	119
<b>Figure 3.86:</b> Courbe charge-déplacement – test 02-.....	119
<b>Figure 3.87:</b> Mode de flambage de coque cylindrique –Test 03.....	120
<b>Figure 3.88:</b> Courbe charge-déplacement –test 03 -.....	121
<b>Figure 3.89:</b> Mode de flambage de coque cylindrique –Test 04.....	121
<b>Figure 3.90:</b> Courbe charge-déplacement - test 04 -.....	121
<b>Figure 3.91:</b> Mode de flambage de coque cylindrique –Test 05.....	122
<b>Figure 3.92:</b> Courbes charge-déplacement –test 05-.....	122
<b>Figure 3.93 :</b> Evolution de la contrainte critique pour une coque cylindrique (avec défaut triangulaire initial) pressurisée sous compression axiale.....	124
<b>Figure 3.94 :</b> Evolution de la contrainte critique pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial) pressurisée sous compression axiale.....	125
<b>Figure 3.95 :</b> mode de flambage de coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=0.5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée ( $Pr=0.01\text{Mpa}$ ).....	126
<b>Figure 3.96 :</b> Courbes chargement-déplacement pour coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=0.5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée.....	126
<b>Figure 3.97 :</b> mode de flambage de coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=1$ ) sous chargement axial non pressurisée (b) : pressurisée.....	127
<b>Figure 3.98 :</b> Courbes chargement-déplacement pour coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=1$ ) sous (a) : chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée.....	127
<b>Figure 3.99 :</b> mode de flambage de coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=1.5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée ( $Pr=0.01\text{Mpa}$ ).....	128
<b>Figure 3.100 :</b> Courbes chargement-déplacement pour coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=1,5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée.....	128
<b>Figure 3.101 :</b> mode de flambage de coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=2.5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée ( $Pr=0.01\text{Mpa}$ ).....	129
<b>Figure 3.102 :</b> Courbes chargement-déplacement pour coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=2,5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée.....	129
<b>Figure 3.103:</b> Coque cylindrique pressurisée avec une imperfection géométrique initiale sous compression axiale.....	130
<b>Figure 3.104 :</b> Coque cylindrique sous compression axiale avec différente position du défaut axisymétrique initial.....	131
<b>Figure 3.105 :</b> Mode de flambage-Cas de $A/t=0.5$ ( $D/L=0.25$ ).....	132
<b>Figure 3.106 :</b> Mode de flambage-Cas de $A/t=0.5$ ( $D/L=0.75$ ).....	132
<b>Figure 3.107 :</b> Mode de flambage-Cas de $A/t=1$ ( $D/L=0.25$ ).....	133
<b>Figure 3.108 :</b> Mode de flambage-Cas de $A/t=1$ ( $D/L=0.75$ ).....	133
<b>Figure 3.109 :</b> Mode de flambage-Cas de $A/t=2$ ( $D/L=0.4$ ).....	134
<b>Figure 3.110 :</b> Mode de flambage-Cas de $A/t=2$ ( $D/L=0.75$ ).....	134
<b>Figure 3.111 :</b> Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude de défaut axisymétrique implanté sur différente position axiale.....	135
<b>Figure 3.112 :</b> Mode de flambage-Cas de $L=R$ et ( $D/L=0.25$ ).....	136
<b>Figure 3.113 :</b> Mode de flambage-Cas de $L=R$ ( $D/L=0.75$ ).....	136
<b>Figure 3.114 :</b> Mode de flambage-Cas de $L=2R$ ( $D/L=0.25$ ).....	137
<b>Figure 3.115 :</b> Mode de flambage-Cas de $L=2R$ ( $D/L=0.75$ ).....	137
<b>Figure 3.116 :</b> Mode de flambage-Cas de $L=3R$ ( $D/L=0.4$ ).....	138
<b>Figure 3.117 :</b> Mode de flambage-Cas de $L=3R$ ( $D/L=0.75$ ).....	138
<b>Figure 3.118 :</b> Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique.....	139

## Liste des Tableaux

<b>Tableau 3.1</b> : La charge critique par la méthode valeur propre.....	54
<b>Tableau3.2</b> : La charge critique par la méthode Non linéaire.....	55
<b>Tableau3.3-a</b> : charge critique par les deux méthodes pour $L/R=2$ .....	57
<b>Tableau3.3-b</b> : charge critique par les deux méthodes pour $L/R=4$ .....	58
<b>Tableau3.3-c</b> : charge critique par les deux méthodes pour $L/R=6$ .....	59
<b>Tableau 3.3-d</b> : charge critique par les deux méthodes pour $L/R=8$ .....	60
<b>Tableau3.3-e</b> : charge critique par les deux méthodes pour $L/R=10$ .....	61
<b>Tableau3.3-e</b> : charge critique par les deux méthodes pour $L/R=12$ .....	62
<b>Tableau3.3-f</b> : charge critique par les deux méthodes pour $L/R=2$ .....	63
<b>Tableau3.3</b> : Evolution de la charge critique en fonction du rapport $L/R$ par les deux méthodes (Valeur propre et Non linéaire).....	64
<b>Tableau3.4-a</b> : charge critique pour $t/R=1/250$ .....	65
<b>Tableau3.4-b</b> : charge critique pour $t/R=1/125$ .....	66
<b>Tableau3.4-c</b> : charge critique pour $t/R=1/80$ .....	66
<b>Tableau3.4-d</b> : charge critique pour $t/R=1/60$ .....	67
<b>Tableau 3.4</b> : évaluation de la charge critique en fonction du rapport $t/R$ .....	67
<b>Tableau 3.5</b> : La charge critique sous chargement uniforme radiale.....	71
<b>Tableau3.5-a</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=1\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	73
<b>Tableau3.5-b</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=2\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	74
<b>Tableau3.5-c</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=3\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	75
<b>Tableau3.5-d</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=4\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	76
<b>Tableau3.5-e</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=5\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	77
<b>Tableau3.5-f</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=6\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	78
<b>Tableau3.5-g</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=7\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	79
<b>Tableau3.5-h</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=8\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	80
<b>Figure 3.39</b> : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 8\text{Mpa}$ ) sous chargement axial.....	81
<b>Tableau3.5-i</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=10\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	81
<b>Tableau3.5-j</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=20\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	82
<b>Tableau3.5-k</b> : charge critique pour coque cylindrique pressurisée $p=100\text{Mpa}$ Sous chargement axial.....	83
<b>Tableau 3.6</b> : contraintes critiques en fonction de l'amplitude réduite.....	92
<b>Tableau3.7</b> : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	94
<b>Tableau3.8</b> : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	96
<b>Tableau 3.9</b> : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	98
<b>Tableau 3.10</b> : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	100
<b>Tableau 3.11</b> : contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	103
<b>Tableau 3.12</b> : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	105
<b>Tableau 3.13</b> : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	107
<b>Tableau 3.14</b> : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	109
<b>Tableau 3.15</b> : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite.....	111
<b>Tableau 3.16</b> : Effet de la forme du défaut sur la charge critique.....	115
<b>Tableau 3.16</b> : Evolution de la charge critique avec interaction des défauts.....	123
<b>Tableau 3.17</b> : Contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut triangulaire initial) pressurisée sous compression axiale.....	124
<b>Tableau 3.18</b> : la contrainte critique pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial) pressurisée sous compression axiale.....	125
<b>Tableau 3.19</b> : comparaison entre les contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial ( $A/t=0,5$ )) pressurisée et non pressurisée sous compression axiale.....	126
<b>Tableau 3.20</b> : comparaison entre les contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial ( $A/t=1$ )) pressurisée et non pressurisée sous compression axiale.....	127
<b>Tableau 3.21</b> : comparaison entre les contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial ( $A/t=1,5$ )) pressurisée et non pressurisée sous compression axiale.....	128

<b>Tableau 3.22</b> : comparaison entre les contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial ( $A/t=2,5$ )) pressurisée et non pressurisée sous compression axiale.....	129
<b>Tableau 3.23</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique ( $A/t=0.5$ ).....	132
<b>Tableau 3.24</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique ( $A/t=1$ ).....	133
<b>Tableau 3.25</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique ( $A/t=2$ ).....	134
<b>Tableau 3.26</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique $L= 5000$ .....	136
<b>Tableau 3.27</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique $L= 10000$ .....	137
<b>Tableau 3.28</b> : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique $L= 15000$ .....	138

## Liste des Notations

$X, Y, Z$  : coordonnées cartésiennes globales

$R_1$  et  $R_2$  : les rayons principaux des courbures de la surface  $S$  en point  $M$ .

$a, b, n$  : les vecteurs unitaires, Perpendiculaire à la surface moyenne

$\beta_x, \beta_y$  : Angles des rotations

$w^*$  : Amplitude de défaut

$r$  : le rayon de courbure des Méridiens

$\lambda$  : charge stationnaire ou longueur d'onde

$\lambda_c$  : valeur critique

$C$  : rigidité de membranaire de coque

$D$  : rigidité de flexion de coque

$P_{ref}$  : La pression dynamique

$w, u, v$  : Déplacements

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  : rotations

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  : Contraintes principales

$\sigma_{cl}$  : contrainte classique

$\sigma_{cr}$  : contrainte critique

$\sigma_{cr}$  : contrainte de pression

$L$  : Longueur

$R$  : Rayon

$P$  : Pression

$t$  : épaisseur

$\delta$  : déplacement de flambage

$[\ ]$  : matrice (utilisé aussi pour les références bibliographiques)

$G$  : module de cisaillement

$E$  : module de Yong

$\nu$  : coefficient de poisson

$N, M, Q$  : efforts unitaires

$\partial$  : dérivée partielle

$U_{int}$  : énergie de déformation interne

$A$  : point de bifurcation

$(\lambda, \delta)$  : solution des équations d'équilibre

$(S)$  : la surface moyenne cylindrique de la coque cylindrique

S1 : Branche Fondamentale de l'instabilité

S2 : Branche secondaire de l'instabilité

$t$  : l'épaisseur de l'élément

$\Phi$  : énergie potentielle

$\Phi'$  : dérivée première de l'énergie potentielle

$\phi''$  : variation seconde de l'énergie potentielle

$U_{int}$  : l'énergie interne de déformation de la structure

$W_{ext}$  : travail des forces extérieures

$K$  : Rigidité ressort élastique

$u$  : angle de rotation de la barre

$u_1, u_2$  : Solutions de la dérivée première de l'énergie potentielle

$u, v, w$  : déplacements dans les direction  $x, y$  et  $z$  respectivement

$\varepsilon$  : déformation

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  : déformations de la surface moyenne

$\kappa_x, \kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  : désignent les changements de courbure de la surface moyenne

$F$  : fonction d'Airy

$P_z$  : la composante par unité d'aire de l'effort surfacique s'exerçant sur la coque

$P_x^*, P_y^*, P_z^*, M_x^*$  : les composantes des efforts extérieurs et du moment de flexion appliquées aux extrémités de la coque

$D$  : diamètre ou la variable qui mesure la distance entre le fond de la coque cylindrique et la localisation axiale de l'imperfection axisymétrique.

$d$  : écartement entre deux imperfections.

## Résumé

Cette étude a été menée dans le but d'étudier la stabilité des coques cylindriques minces soumises à un chargement axial, elle a essentiellement été abordée par une approche numérique à l'aide de code de calcul aux éléments finis ANSYS. Nous avons essayé de présenter un plus grand nombre possible d'essais numérique, afin de mettre en lumière les paramètres pouvant exercer une influence significative sur la charge de flambement dans le cas des coques cylindriques axisymétriques minces soumises à la compression axiale et radiale.

### - mots clés :

Coques cylindriques, charges de compression, instabilité, bifurcation d'équilibre, imperfection.

## Abstract

This study was carried out in order to study the stability of thin cylindrical shells subjected to axial loading, and was mainly approached by a numerical approach using finite element calculation code ANSYS. We have tried to carry out as many numerical tests as possible, in order to determine the parameters that could exert a significant influence on the buckling load in the case of axial cylindrical thin shells subjected to axial compression and radial load.

### Key Word:

Cylindrical shell, compression loads, instability, equilibrium bifurcation, imperfections

## الملخص

لقد أجريت هذه الدراسة في إطار دراسة استقرار الأسطوانات الرقيقة المعرضة للتحميل المحوري، ولقد أجريت بشكل رئيسي من خلال مقارنة رقمية باستخدام العناصر الدقيقة الموجودة في برنامج ANSYS. لقد حاولنا من خلال هذه الدراسة تنفيذ أكبر عدد ممكن من الاختبارات، من أجل تسليط الضوء على المعاملات التي يمكن أن تمارس تأثيرا كبيرا على تحديد قيمة حمل الانبعاج في حالة الأسطوانات الرقيقة المعرضة لضغط محوري وحمولات إشعاعية.

**الكلمات المفتاحية :** الأسطوانات المقعرة، الضغط المحوري، عدم التوازن، التوازن الانبعاجي، التشوهات

# **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

### INTRODUCTION GENERALE

Les structures en coques minces sont utilisées dans de nombreux domaines en tant qu'éléments structurels tel que les réservoirs, les silos, les aéroréfrigérants et bien d'autres structures, à cause de leurs capacités de transmettre et supporter des charges importantes et variées. Ces structures subissant de fortes charges de compression et de flexion sont souvent objet d'instabilité plus ou moins catastrophiques (flambage). L'analyse de ce type d'instabilité des structures minces a mobilisé un grand nombre de chercheurs ces dernières décennies[SOU14], [KOI67],....

La coque cylindrique est un type de structure mince, très utilisée pour la fabrication des réservoirs cylindriques et des silos à parois minces, ce qui les rend sensibles à des phénomènes d'instabilité structurelle, ou flambage d'équilibre, lorsqu'ils sont soumis à des charges de compression axiale. Cette instabilité provoque, le plus souvent la ruine de ces structures, ce qui impose un dimensionnement au flambage. Cet aspect a fait l'objet de plusieurs études analytiques et expérimentales [GOT99],[MAN93]. On constate que les résultats obtenus par ces différentes études présentent des écarts entre elles et entre les valeurs expérimentales.

Les méthodes de dimensionnement des coques minces peuvent encore être grandement améliorées, grâce à l'évolution des outils numériques permettant de mieux comprendre la phénoménologie du flambage et d'élargir le champ d'exploration.

## **PROBLEMATIQUE**

Les réservoirs, les cuves et les silos sont des structures qui se composent par l'assemblage des coques de révolution simple (cylindres). Il apparaît sur ces coques cylindriques un phénomène d'instabilité local ou global dû au chargement. Le dimensionnement des coques minces cylindriques, vis-à-vis du flambage, a fait l'objet de nombreuses études.

L'étude et la compréhension de l'instabilité théoriquement et numériquement va nous permettre de bien dimensionner ces structures pour éviter ce genre de problème. L'étude en particulier du cas géométriquement simple du cylindre en fonction des charges appliquées et le niveau atteint des contraintes va nous permettre de définir les limites d'instabilité en particulier la bifurcation d'équilibre et le point limite.

## **OBJECTIF**

Actuellement l'optimisation des coques cylindriques minces représente un centre d'intérêt important au niveau des travaux de recherche. L'objectif est de déterminer principalement pour ce type de structure les facteurs et les paramètres qui ont une influence significative sur le comportement des coques cylindriques minces en situation de flambement. En particulier, on cherche à intégrer d'une manière plus rationnelle l'effet de ces paramètres sur la détermination de la charge critique pour ce type de structure.

Parmi les facteurs les plus significatifs, que nous avons vu dans cette partie de ce travail, ce sont les imperfections réelles qui sont bien plus complexes et impossibles à modéliser analytiquement, montrant les limites de ces méthodes finalement peu applicables pour le dimensionnement mais qui sont néanmoins utiles pour comprendre le problème des imperfections géométriques de manière un peu plus qualitative.

Cette étude est constituée de trois parties qui suivent l'ordre chronologique de notre travail et de notre réflexion sur ce sujet.

La première partie de ce mémoire est consacrée à une présentation des travaux effectués dans le domaine de l'instabilité des coques minces soumises aux différents chargements. Nous avons toutefois concentré cette recherche bibliographique sur les coques cylindriques soumises à un chargement statique avec ou sans pression. De plus, la synthèse de tous ces documents nous permet de définir les axes de notre recherche en fonction des interrogations ou des conclusions exprimées par les différents chercheurs.

Dans un second temps, après un rappel des concepts de la stabilité, les différentes approches théoriques possibles, suivant le ou les paramètres étudiés, sont analysées et commentées.

Le troisième chapitre de ce mémoire est constitué d'une présentation d'un code de calcul par éléments finis (ANSYS) utilisé pour la simulation des essais et l'analyse du comportement de la structure. Les particularités, de ce code, utilisé dans cette étude sont également décrites.

La seconde partie de ce chapitre est consacré aux analyses et interprétations des résultats des essais statiques. Tout d'abord, nous donnons les résultats trouvées analytiquement pour chaque cas, une comparaison avec les simulations numériques d'éléments finis permet de vérifier la qualité de nos résultats.

L'écart entre essais et calculs (inférieur à 5 %) confirme la capacité des codes de calculs utilisés à simuler correctement nos campagnes. Ensuite, nous présentons les résultats de différents paramètres géométriques sur le flambage d'une coque cylindrique axialement pressurisée afin de valider nos choix concernant les dimensions géométriques de la coque. Nous abordons dans ce volet les structures non pressurisées. Le cadre d'application de la théorie linéaire classique est précisé.

Le deuxième volet concerne les coques pressurisées. L'effet de la pression est considéré sous différente pression. Nous étudions tout d'abord quelles sont les conséquences de celle-ci sur la charge critique pour une coque cylindrique sujette à la compression axiale. Puis nous étudions ses conséquences sur des défauts géométriques. L'objectif est donc de déterminer pour ce type de structure les paramètres de défauts qui ont une influence significative sur le comportement en situation de flambement et à les intégrer d'une manière plus rationnelle lors du dimensionnement et de nous permettre d'examiner les causes possibles des écarts de comportement couramment observées entre la théorie et l'expérimentation dans la littérature pour des coques minces sous compression axiale.

Enfin, le document se terminera sur une synthèse de notre travail et sur les perspectives qui nous semblerait nécessaire pour le dimensionnement des coques cylindriques.

**CHAPITRE -I-**  
**ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE**

## **1. INTRODUCTION**

Cette partie du mémoire est consacrée à une présentation des travaux effectués dans le domaine de l'instabilité des coques minces soumises aux différents chargements. Nous avons toutefois concentré cette recherche bibliographique sur les coques cylindriques pressurisées et non pressurisées soumises au chargement axial ou radial. De plus, la synthèse de tous ces documents nous permet de définir les axes de notre recherche en fonction des interrogations ou des conclusions exprimées par les différents chercheurs.

## **2. HISTORIQUE**

Malgré les récentes évolutions des techniques et des moyens associés à la simulation numérique et à l'expérimentation, l'étude du flambage des coques cylindriques minces reste un sujet délicat[AND11]. Nous passerons en revue dans ce chapitre quelques études réalisées par le passé, qui serviront de base à notre travail.

### **2.1 Théories de flambement des coques :**

Les problèmes du flambement et l'instabilité des coques ont été le sujet de recherche pour un grand nombre de chercheurs. Pour arriver au développement des théories du flambement des coques, citons dans cette partie le développement des théories du flambement des structures en générale.

La première étude sur la stabilité élastique est attribuée à L. EULER , qui a utilisé la théorie de calcul des variations pour obtenir les équations d'équilibre et la charge de flambement d'une colonne élastique chargée en compression.

J. L. LAGRANGE a développé l'approche d'énergie qui est plus générale que l'approche des vecteurs de NEWTON pour l'étude des problèmes des mécaniques. Cela a mené naturellement au théorème d'énergie fondamentale qui se base sur l'énergie potentielle minimale suffisante pour la stabilité.

J. H. POINCARÉ est connu comme le fondateur de la théorie de la bifurcation. D'autre part, A.M. LIAPUNOV a donné l'élément essentiel pour la

définition de la stabilité et a introduit les fonctions d'énergies généralisées, qui ont pris son nom, les fonctions de LIAPUNOV. Par la suite, L. S. PONTRYAGIN a introduit, avec A. A. ANDRONOV, le concept topologique de la stabilité structurelle. Leur travail a mené à la théorie de la classification. VON KARMAN a commencé son travail sur le flambement non élastique pour des colonnes. Il a conçu un modèle pour expliquer le phénomène et diriger les recherches sur la déformation plastique des poutres.

W. T. KOITER [KOI45] a initié la théorie classique non linéaire de la bifurcation dans ses recherches en 1945. BUDIANSKY[BUD58] et ses collègues ont donné une nouvelle évaluation de non linéarité sur des structures élastiques continues sous charges conservatrices. En outre, HUTCHINSON [HUT73] fait une importante contribution à la théorie de non linéarité sur des structures chargées dans la phase plastique.

Autres travaux considérables sur le flambement de coque dans la littérature: F. ENGESSER et S. P. TIMOSHENKO sur le flambement des colonnes par effort tranchant et flexion. A. CONSIDERE, F. ENGESSER, et F. R. SHANLEY en flambement des colonnes rigides. V. VLASOV en flambement par torsion. PRANDTL, A. G. M. MICHELL, S. P. TIMOSHENKO, H. WAGNER et N.S. TRAHAIR [TRA91] sur le flambement des poutres par flexion et torsion. B. W. JAMES, R. K. LIVESLY et D.B. CHANDLER, R. VON MISES et J. RATZERSDORFER, et E. CHWALLA sur le flambement des portiques. H. LAMB, J. BOUSSINESQ, C. B. BIEZENO et J. J. KOCH sur le flambement d'anneaux et voûtes.

E. HURLBRINK, E. CHWALLA, E. L., NICOLAI, JE. J. STEUERMANN, G.H. BRYAN, S. P. TIMOSHENKO, T. VON KARMAN, E. TREFFTZ, A. KROMM, K., MARGUERRE et G. HERRMANN sur le flambement des plaques.

G. H. HANDELMANN, W. PRAGER, E. JE. STOWELL, S. B. BATDORF, F. BLEICH, et P. P. BIJLAARD sur le flambement plastique des plaques.

A. PFLUGER sur le flambement des coques coniques.

Le problème du flambement linéaire pour une coque sphérique sous une pression externe a été présenté par ZOELLY et E. SCHWERIN.

VON KARMAN et TSIEN ont étudié Le flambement non linéaire d'une coque sphérique sous une pression externe.

Le Flambement linéaire des coques peu-profondes sous une charge normale surfacique a été étudié par BUDANSKY. KAPLAN et FUNG ont fait l'étude du même sujet que BUDANSKY mais avec le problème non linéaire.

Pour une coque cylindrique circulaire soumise à une charge de compression axiale, les équations différentielles ont été formulées et leurs solutions ont été données par LORENTZ , TIMOSHENKO[TIM61].

SACHENKOV a traité le problème de flambement linéaire pour les coques cylindriques soumises à un chargement combiné (pression externe et compression axialement).

FLUGGE [FLU32] a étudié le flambement sous l'effet combiné de pression interne et chargement axial pour les coques cylindriques.

DONNEL et WAN ont utilisé les équations générales pour analyser l'effet des imperfections pour le flambement des coques cylindriques minces sous une force axiale uniforme de compression.

KOITER a fait l'analyse du comportement d'une coque cylindrique sous compression axiale en post- flambement.

L'étude sur le flambement des voûtes a été faite par A. N. DINNIK et K. FEDERHOFER.

R. LORENTZ, R.VON MISES, S. P. TIMOSHENKO, R.V. SOUTHWELL, T. VON KARMAN et H. S. TSIEN sur le flambement des coques cylindriques sous des charges combinées de pression axiale et latérale.

L.H. DONNELL, K. M. MARGUERRE et K. M. MUSHTARI sur le post-flambement des coques[C MW05].

### ***2.1.1 Problème de flambement des coques cylindriques***

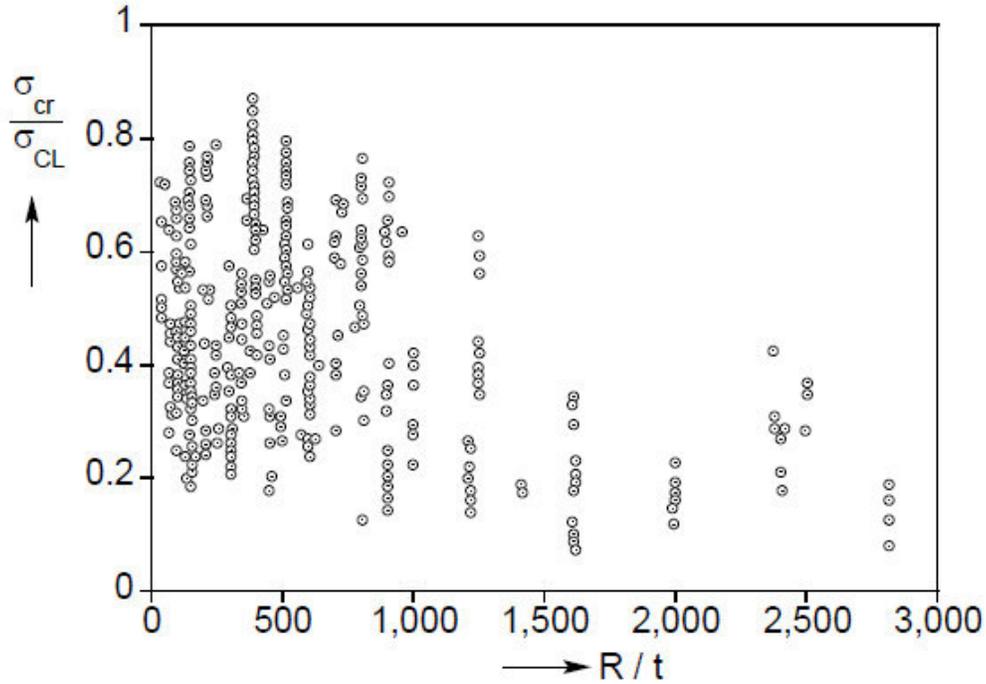
Les coques sont largement utilisées dans de nombreux domaines et ont été étudié depuis plus de cent ans [CAL88]. Le premier problème de flambage

résolu était celui des coques cylindriques sous compression axiale (Lorenz [LOR08] ; Timoshenko[TIM10]; Southwell [SOU14]). Les premiers tests (Robertson[ROB29] ; Flugge[FLU32] ; Lundquist [LUN33]; Wilson et Newmark, [WIL33] ) ont indiqué que les cylindres flambent réellement à des charges beaucoup plus faibles que la charge de flambement classique, qui est la charge de bifurcation linéaire basée sur les hypothèses de simples supports pour les conditions aux limites et un état membrane pour la distribution des contraintes au pré flambage [JIN96] .

## **2.2 Environnement expérimental**

Les campagnes expérimentales conduites sur différentes coques cylindriques sous chargement axial, ont été menées par Flügge [FLU32] pour l'étude du comportement des coques cylindriques minces sous chargement de compression, ont donné des valeurs des charges de flambage ayant atteint jusqu'à 30% des valeurs classiques malgré les précautions qui étaient prises durant les essais. Ce résultat est cohérent avec les observations expérimentales de Lundquist [LUN33], Wilson et Newmark [WIL33] comparant les contraintes de flambage obtenues en compression avec les contraintes classiques.

D'autres campagnes expérimentales récentes viendront confirmer l'écart entre les contraintes expérimentales et les contraintes classiques par Waeckel [WAE84] (voir Figure 1.1).



*Figure 1.1 Résultats expérimentaux, coques cylindriques sous compression axiale [WAE84]*

Ces résultats nous indiquent que la variabilité des résultats est très importante. Les résultats les plus bas se situent aux alentours de  $0.2 \sigma_{CL}$  pour les coques les plus minces et les contraintes expérimentales n'atteignent jamais les contraintes classiques.

Cet écart a conduit plusieurs chercheurs à étudier les raisons responsables de celui-ci. Ils ont principalement attribué cet écart aux :

- (a) effets des conditions aux limites ;
- (b) déformations de pré flambement ;
- (c) charges d'excentricités;
- (d) imperfections géométriques.

Les effets de ces facteurs ont ainsi été étudiés pour de nombreuses coques sous l'effet de flambement, par la suite, leurs effets ont été discutés pour un cylindre isotrope comprimé axialement.

**2.2.1. Coques cylindriques isotropes sous compression axiale****2.2.1.a) effets des conditions aux limites :**

L'effet de différentes conditions aux limites, sur la résistance au flambage de coques cylindriques a été étudié en détail à l'aide de membrane pré flambage (Ohira[OHI61],[OHI63]; Stein [STE62]; Hoff [HOF65];...). Les coques cylindriques isotropes avec des extrémités peuvent se déplacer dans la direction circonférentielle et flambent pour une demie valeur de contrainte que la contrainte de prédiction classique. Les chercheurs ne sont pas arrivés à expliquer la différence entre la prédiction classique et l'expérience à cause des conditions limites qui sont rarement réunies dans les coques réels.

La plupart de ces auteurs ont étudié les huit conditions aux limites suivantes définissant l'encastrement ou l'articulation du bord de la coque cylindrique.

$$\begin{array}{ll}
 C1 \quad w = w_{,x} = u = v = 0 & S1 \quad w = w_{,xx} = u = v = 0 \\
 C2 \quad w = w_{,x} = u = N_{xy} = 0 & S2 \quad w = w_{,xx} = u = N_{xy} = 0 \\
 C3 \quad w = w_{,x} = v = N_x = 0 & S3 \quad w = w_{,xx} = v = N_x = 0 \\
 C4 \quad w = w_{,x} = N_x = N_{xy} = 0 & S4 \quad w = w_{,xx} = N_x = N_{xy} = 0
 \end{array}$$

La figure (1.2) du Yamaki [YAM84] , montre que ces conditions aux limites ont une influence significative sur la valeur de la contrainte critique et se divisent en deux catégories l'une relative à la condition axiale  $u=0$  (C1,C2,S1,S2) et l'autre à la condition  $N_x=0$  ( C3,C4,S3,S4).

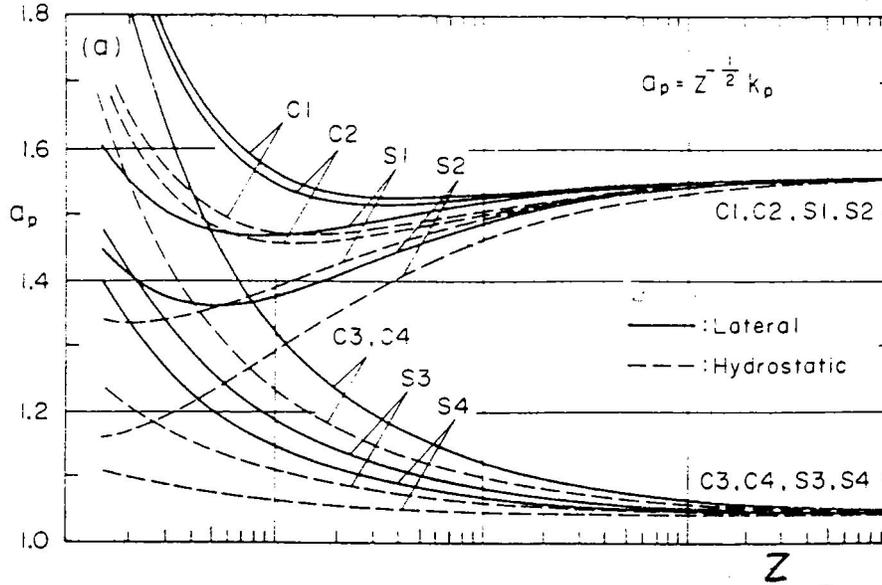


Figure 1.2 : Influence des conditions aux limites[LAH93]

2.2.1.b) Effet de déformations de pré flambement

La théorie classique de flambement linéaire suppose que les coques seront dans un état de contrainte membrane avant le flambement. Dans le cas d'une coque cylindrique sous compression axiale, le cylindre est libre de se déplacer latéralement, ce déplacement généralement, n'est pas possible dans des expériences ou dans des structures réelles, de sorte que les contraintes et les déformations de flexion sont attendus près de l'extrémité ce qui permet de réduire la charge de flambement. L'effet de contraintes de flexion et déformations de pré flambement a été d'abord étudié par Fischer [FIS65] . Stein [STE62] a signalé que les forces de flambement deviennent de l'ordre de la moitié de la valeur classique.

Cependant, des études ultérieures par Hoff et ses collègues [HOF66] ont révélé que ces contraintes de flexion étaient dues aux conditions aux limites.

Des études ultérieures (Fischer[FIS65] ; Almroth [ALM66]; Gorman et Evan-Iwanowski[GOR70]; Yamaki et Kodama [YAM72]) ont montré que l'effet de déformations de pré flambement est petit et n'est pas une raison primaire pour la différence entre la prédiction classique et le résultat expérimental.

2.2.1.c) charges d'excentricités

Dans le cas des coques cylindriques, il est possible d'appliquer les charges de déstabilisation dans le plan (compression axiale et cisaillement) avec une excentricité par rapport à la surface neutre pour les configurations métalliques. Puisque, pour la compression axiale, le flambage est suivi d'une déviation latérale principalement vers l'intérieur, certains ont suggéré de stabiliser la coque en appliquant la charge de façon excentrique, de sorte qu'une déformation vers l'extérieur est présente à pré-flambage. Cet effet a été étudié et rapporté par Simitses [SIM85] pour les coques de différentes constructions, isotropes, orthotropes et laminées. Les résultats rapportés pour les petites excentricités (moins de la moitié à plus de la moitié de l'épaisseur de la coque isotrope), la réponse semble insensible à l'application excentrique de la charge.

Pour de très grandes excentricités ( $\pm 10$ , de l'épaisseur), l'excentricité positive qui induit un mouvement vers l'extérieur à pré flambage a un effet stabilisateur. De même, les excentricités négatives ont un effet déstabilisateur relativement faible. Dans l'excentricité de charge intermédiaire ( $\pm 0,5-10$  fois l'épaisseur), une irrégularité est observée. On suspecte que l'une des raisons possibles de ce comportement (effet stabilisant pour les grandes excentricités positives) peut être associée à l'effet de Poisson. Comme la charge est appliquée de manière quasi-statique, la coque cylindrique se déplace vers l'extérieur, à cause de l'effet de Poisson; elle atteint une expansion maximale à la charge critique, puis un mouvement vers l'intérieur aura lieu; enfin, après un effondrement partiel, ce mouvement vers l'intérieur est continue. Cette séquence d'événements de stabilisation ou de déstabilisation est fortement affectée par la valeur du coefficient de Poisson ou du terme  $A_{12}$  dans la matrice de rigidité  $[A_{jj}]$ . Plus le terme  $A_{12}$  est petit plus l'effet de stabilisation est grand pour l'excentricité positive [SIM85].

Dans les configurations raidies, l'effet d'excentricité de charge est plus complexe car il lie les effets de bord (moments aux limites) avec l'effet de l'excentricité du raidisseur. Cet effet a été étudié par Stuhlman, DeLuzio et Almroth [STU66]. De plus, des études paramétriques et de nombreux tests ont été réalisés au Technion [WEL74] pour évaluer cette interaction importante. Ils ont montré, dans leurs études, que les diminutions des charges de flambement allant jusqu'à 50% peuvent être attribuées à cet effet dans certaines configurations pratiques.

(Simitsev, et al) [SIM85] ont montré que les excentricités pour les petites charges n'ont pas une influence majeure sur la résistance au flambement et cela pour le cas des coques cylindriques isotropes axialement comprimées.

#### 2.2.1. d) Effet des imperfections géométriques

Le seul facteur dominant contribuant à l'écart entre la théorie et l'expérience pour les cylindres isotropes axialement comprimé est l'imperfection géométrique initiale. Beaucoup de recherches ont donc été réalisées sur la sensibilité de coques à l'imperfection. Les contributeurs les plus notables de cette recherche comprennent von Karman et Tsien [VON41], Donnell et Wan [DON50], Koiter [KOI67], Budiansky et Hutchinson [BUD66].

Les nombreuses études de Singer et ses collègues ont démontré de façon concluante que l'influence de l'imperfection géométrique doit être introduite avec les effets des conditions aux limites et les excentricités de charge, et ont cherché à produire des prévisions précises de flambage. Ils ont développé une technique non destructive qui peut être utilisée pour définir les conditions aux limites et les excentricités de charge ainsi que pour déterminer les charges de flambage (Singer et Abramovich [SIN79] ; Singer [SIN82a]; [SIN82b]).

2.2.1. d)-1.Méthodes analytiques

KOITER [KOI67] a fait l'analyse du comportement d'une coque cylindrique comportant des défauts axisymétriques sous compression axiale en post-flambement. Ces défauts sont de la forme suivante :

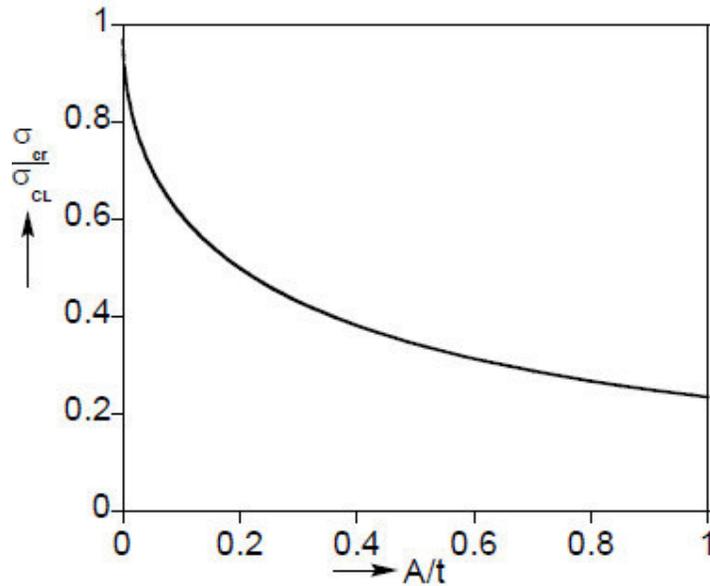
$$w^* = A \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

L'expression générale pour calculer la contrainte critique est donnée par la formule suivante :

$$\left[1 - \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cl}}\right]^2 = \frac{3}{2} \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{A}{t} \cdot \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cl}}$$

Ces résultats sont tracés sur la Figure (1.3).

Koiter dans ses travaux a montré que les diminutions des charges de flambement allaient jusqu'à 20% de la charge critique et cela pour des amplitudes des imperfections de l'ordre de son épaisseur.



**Figure 1.3** Influence d'une imperfection axisymétrique sur la charge critique [KOI67]

En suite, ces travaux analytiques a été développés en 1966 par Amazigo et Budiansky [ALM66] en considérant les différentes formes d'imperfections (locales, modales et aléatoires). En 1969, les analyses des déformations asymptotiques ont été menées par Arbocz et Babcock [ARB69]. Yamaki [YAM84] présente dans son ouvrage une étude très fouillée sur l'effet de diverses formes de défauts à une relation unifiée relativement complexe ,à partir de laquelle il trouve, en négligeant certains termes, les principaux résultats précédemment obtenus par d'autres ayant considéré une forme de défaut particulier. Plus récemment Le flambage de coques imparfaites sous compression est résolu par la méthode asymptotique. Ainsi, Jamal et Al. [JAM99] étudient l'effet sur la charge critique de défauts géométriques localisés en interaction et montrent que la contrainte critique ne dépend pas seulement de la forme du défaut mais aussi par son amplitude. Ils trouvent de plus que la combinaison des modes augmente la perte de charge.

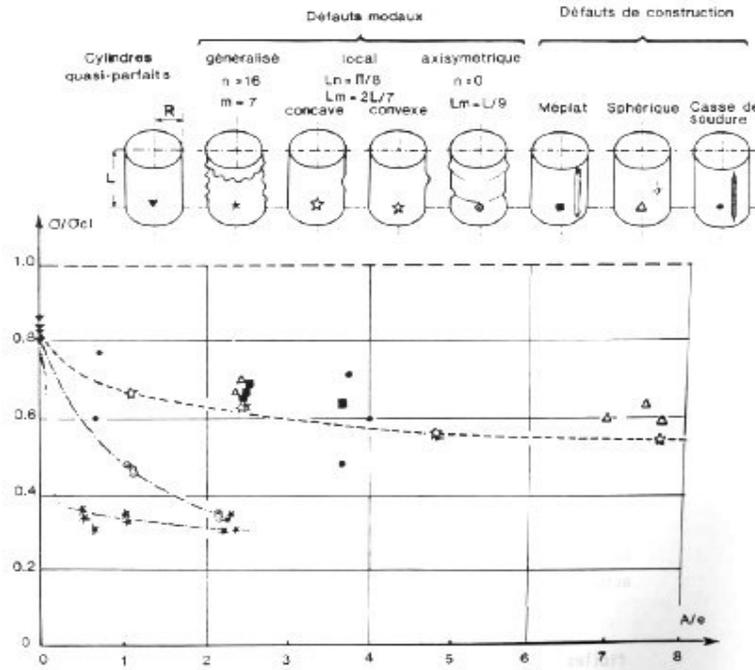
Potier-Ferry et Damil [JAM03], ensuite ont proposé via une résolution semi-analytique d'évaluer l'effet sur la charge critique de défauts géométriques localisés en interaction avec des défauts généralisés modaux.

Les effets des imperfections géométriques sur la charge critique d'une coque cylindrique mince élastique soumise à la compression axiale sont habituellement analysés au moyen d'un modèle analytique. Ces différentes analyses, utilisant des développements asymptotiques, sont de trouver une relation entre les charges critiques et les défauts. Celles-ci n'ont pu être que rarement validées par des observations expérimentales malgré des coques cylindriques fabriquées avec soin. Cette approche présente des limites du fait que tous les types de défauts ne peuvent être pris en compte, ce que montre les limites de ces méthodes finalement peu applicables pour le dimensionnement mais qui sont néanmoins utiles pour comprendre le problème de manière qualitative.

Tennyson, Muggeridge [TEN69] et Hutchinson et al.[HUT71]) ont fabriqué des coques avec imperfections géométriques axisymétriques initiales et ont obtenu

des bons résultats comparativement aux solutions analytiques proposées par Koiter.

Les campagnes expérimentales ont été étudiées sur des coques cylindriques par Waeckel [WAE84] afin de comparer l'influence de différentes formes des imperfections. Il trouve que les défauts modaux sont plus pénalisants que les défauts de construction.



**Figure 1.4** Influence de différentes formes de défauts sur la charge critique expérimentale [WAE84]

Beaucoup d'auteurs comme KOITER [KOI63], HUTCHINSON [HUT71], ROTTER[ROT89] se sont focalisés dans ses travaux sur le défaut de type axisymétrique localisé, qui fait considérablement chuter la charge de flambage. Ce type de défaut s'aperçoit sur des structures composées de viroles assemblées par soudage (ROTTER et TENG [TEN92] , LIMAM, MATHON[MAT04].).

Des mesures in-situ sont relevées pour aboutir à des expressions analytiques des défauts de soudages (PIRCHER [PIR01] et des propositions de formes proches du défaut réel (ROTTER et TENG) . Puis sont proposées des simplifications, comme le défaut de forme parabolique (KHAMLIHI, BEZZAZI et LIMAM [KHA04]) ou simplifié à l'extrême le défaut triangulaire

(MATHON, LIMAM [MAT06]). Nous reviendrons en détail sur l'influence d'une telle imperfection au chapitre 3.

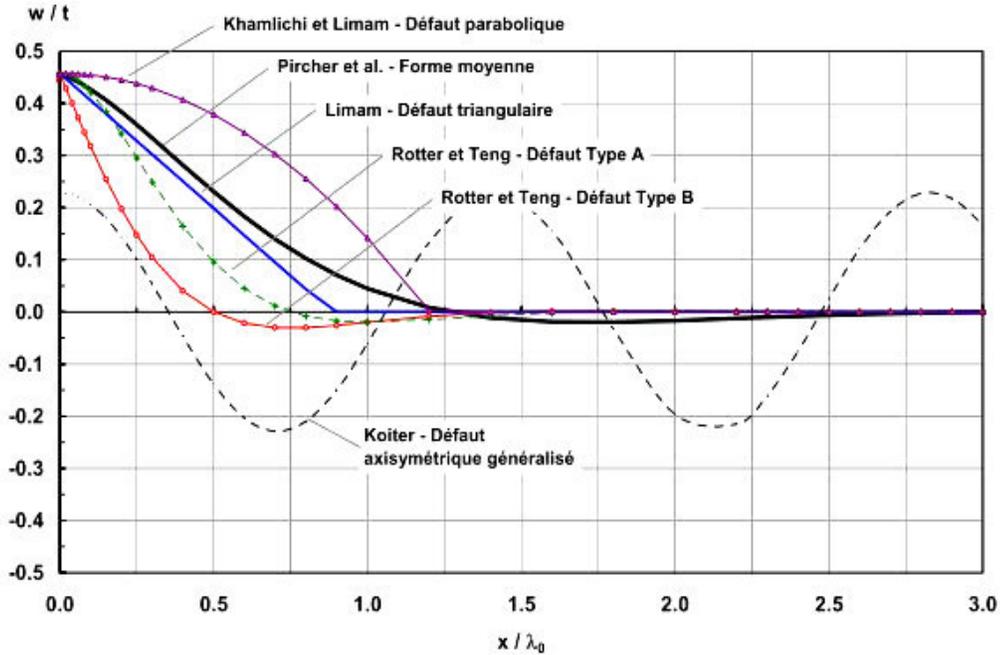


Figure 1.5 Défaut axisymétrique localisé - synthèse des différentes Propositions [DID14].

MATHON [MAT04] détaille précisément cette étude et réalise une étude paramétrique avec un calcul par éléments finis sur STANLAX, auquel il incorpore le défaut triangulaire. Il conclue que l'effet des paramètres d'un défaut (longueur d'onde et amplitude) est variable lorsque le rapport  $R/t$  évolue, et plus la longueur de la coque est importante plus la longueur d'onde axiale critique augmente.

Ces différentes études montrent que de petites variations du mode peuvent entraîner de grandes disparités sur la résistance du cylindre, d'où l'idée d'aborder par la suite les problèmes de flambement avec des approches probabilistes [JER15].

### 2.3 Couplage avec la pression interne

Dans la continuité des précédentes études, un bon nombre de chercheurs ont travaillé sur l'influence de la pression interne sur le comportement au flambage des coques cylindriques.

### ***2.3.1 Compression axiale et pression interne***

#### 2.3.1.1 Résultat analytique

Les études analytiques menées par Flügge ou Yamaki [AND11] montrent que la contrainte classique de compression  $\sigma_{CL}$  reste valable dans le cas d'une coque cylindrique parfaite sous compression axiale et pression interne. Autrement dit, en prenant en compte l'effet de fond, la contrainte critique totale devient :

$$\sigma_{cr}^p = \sigma_{CL} + \sigma_p = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Et}{R} + \frac{PR}{2t}$$

Si la mise en pression n'a pas d'influence sur la contrainte classique, le comportement post-critique est progressivement modifié par la pression interne, comme le montre Schnell [SCH59].

#### 2.3.1.2 Résultats expérimentaux :

##### 2.3.1.2.a) . Flambage élastique :

Les premiers travaux théoriques sur les coques cylindriques sous pression interne sont menés par Flügge où il a montré que la pression n'a aucune influence sur la charge critique. Plus tard, Rafel [RAF42] démontrera le contraire sur ce qui a été lancé antérieurement. Ces travaux confirmés par des nombreux tests ont été réalisés par Lo, Crate et Schwartz [LO,H51] sur des coques cylindriques en aluminium pressurisées.ils ont montré que la pression a un effet renforçant sur le comportement de la coque.

Fung et Sechler [FUN57] ont traité l'effet de la pression sur le comportement des coques cylindriques sous différentes valeurs de pression. Leurs différents essais confirment que la charge critique augmente dès les basses pressions, jusqu'à  $0.6 \sigma_{CL}$  seulement (Figure 1.6)

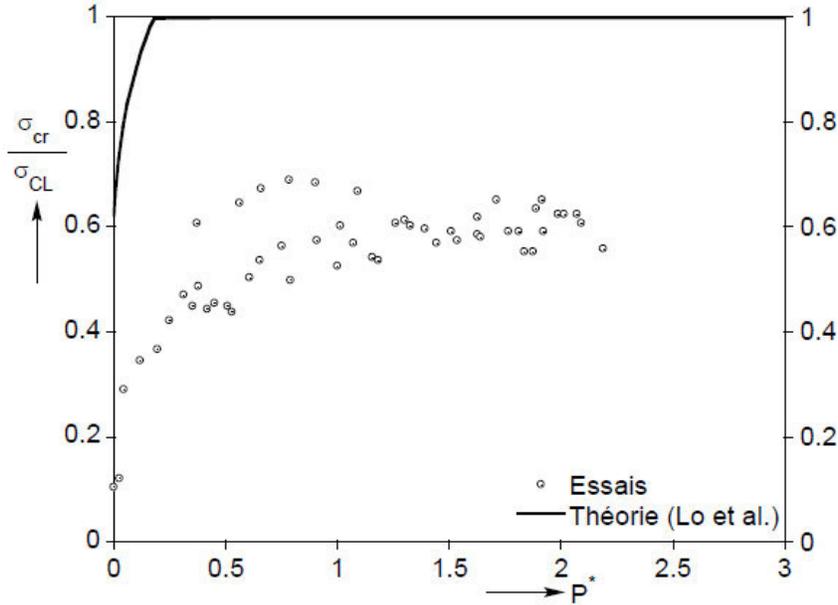


Figure 1.6 Augmentation de la charge critique avec la pression, (Fung, 1957)

Cependant, des essais réalisés plus tard par Dow et Peterson[DOW60], semblent le contredire et montrent que la contrainte classique peut effectivement être obtenue avec une pression interne suffisante.

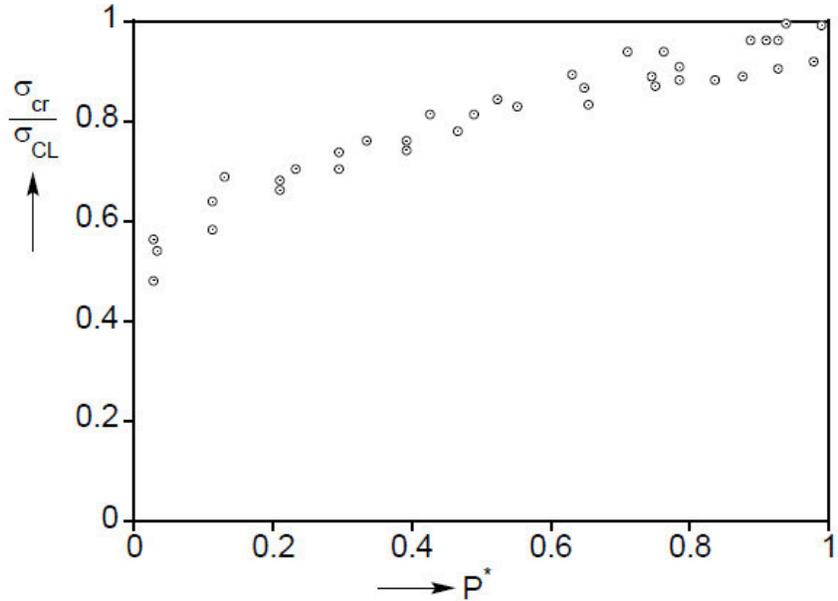
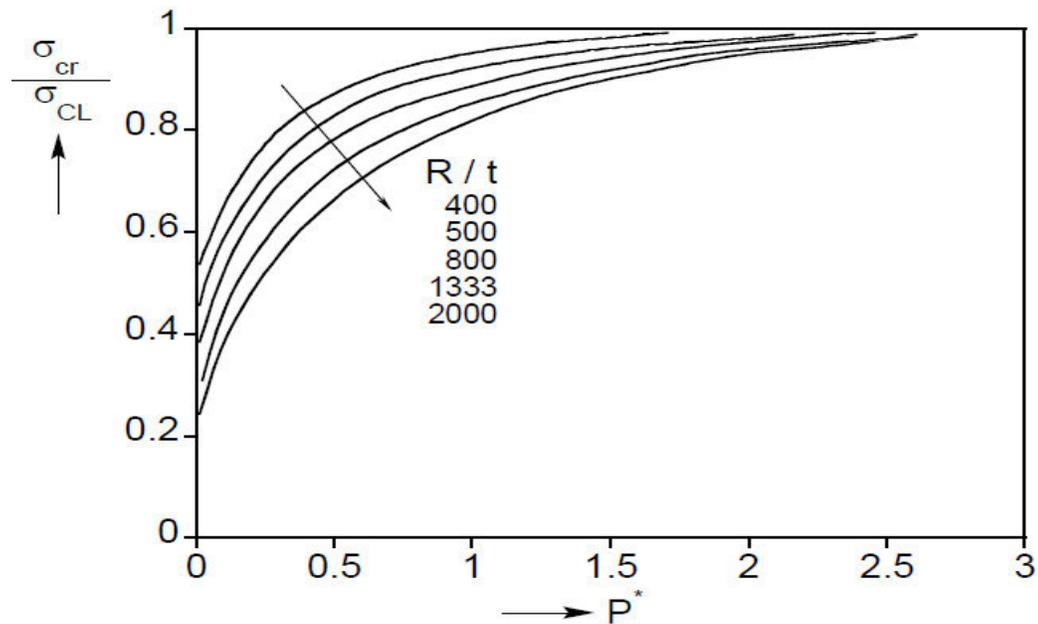


Figure 1.7 Augmentation de la charge critique avec la pression, (Dow, 1960)

En 1965, une vaste campagne expérimentale est effectuée par Seide, Weingarten et Morgan [SEI60] sur des coques cylindriques en Mylar. Ils ont enchainé différentes pressions sur ces derniers. L'objectif était d'étudier le comportement de la coque cylindrique sous différentes phases de pression. Les résultats trouvés ont révélés que la contrainte tend vers la contrainte classique lorsqu'on augmente la pression progressivement jusqu'à une valeur où la coque cylindrique devient stable et l'effet des imperfections initiales causé par pré-flambage est négligeable.



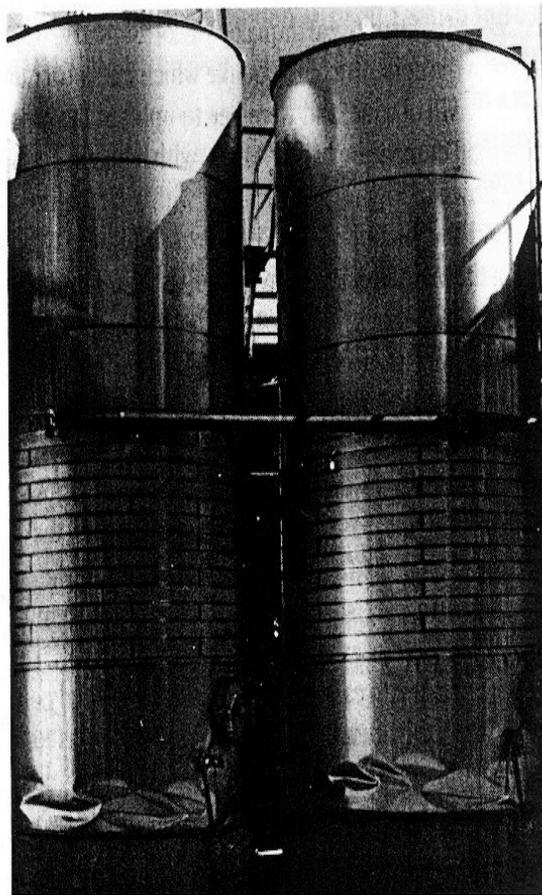
**Figure 1.8** Augmentation de la charge critique avec la pression pour différents  $R/t$  (Seide, 1969)

### 2.3.1.2.b) . Flambage élasto-plastique

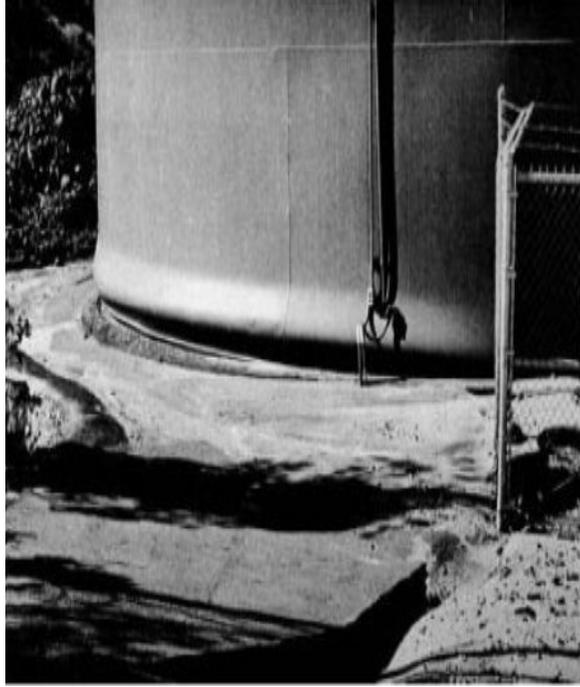
Les bacs cylindriques en métal, les silos et les réservoirs sont des structures minces soumises à la pression interne des matériaux stockés avec une compression axiale qui peut résulter des charges du toit , des charges horizontales, et des effets de frottement des matériaux sur les parois.

Sous l'effet du chargement du tremblement de terre, les contraintes de compression axiales dans la paroi inhibent le renversement .

La pression interne exercée par le stockage des fluides améliore considérablement le flambage , mais des pressions internes élevées conduisent les silos à se pencher près de la base. Le rendement local précipite alors une défaillance précoce de la déformation élastique-plastique (figure 1.9 et 1.10). Les types de flambage observés montrent soit un flambage de type patte d'éléphant soit un flambage en pointes de diamant [CLO82], les cloques sont toujours situées en bas de la coque. Il a d'abord été étudié systématiquement par Rotter[ROT06].



*Figure1.9 : Réservoir flambé (mode en pointe de diamant)[GER97]*



*Figure 1.10 : Patte d'éléphant sur un réservoir de stockage (Rotter, 2006)*

### **3. CONCLUSION**

Actuellement l'optimisation des coques cylindriques minces représentent un centre d'intérêt important au niveau des travaux de recherche. L'objectif est de déterminer principalement pour ce type des structures les facteurs et les paramètres qui ont une influence significative sur le comportement de coque cylindrique mince en situation de flambement. En particulier, on cherche à intégrer d'une manière plus rationnelle l'effet de ces paramètres sur la détermination de la charge critique pour ce type de structure.

Parmi les facteurs les plus significatifs, comme nous l'avons vu dans cette partie de ce travail, ce sont les imperfections réelles qui sont bien plus complexes et impossibles à modéliser analytiquement, montrant les limites de ces méthodes finalement peu applicables pour le dimensionnement mais qui sont néanmoins utiles pour comprendre le problème des imperfections géométriques de manière un peu plus qualitative.

Pour mieux cerner et comprendre le comportement des coques et évaluer le développement des recherches dans les structures en coques, l'utilisation des méthodes et moyens modernes (numérique et informatique) sont indispensables pour les recherches et les analyses non linéaires qui reflètent mieux la réalité.

**CHAPITRE -II-**  
**ETUDE THÉORIQUE**

## 1. INTRODUCTION

Dans ce second chapitre, après un rappel des concepts de la stabilité et des différentes approches, nous allons exposer dans le cadre théorique les différentes méthodes utilisées pour le calcul de la charge critique classique pour des coques cylindriques soumises aux différents chargements.

## 2. INSTABILITÉ DES STRUCTURES SOUS FLAMBEMENT

Le flambage est un phénomène d'instabilité. Il peut tout particulièrement être observé pour des structures minces élancées (faible raideur de flexion) soumises à des contraintes de compression, au-delà d'une certaine valeur, la charge appliquée conduit à un important changement de forme de la structure qui se traduit par l'apparition brutale ou progressive de plis ou d'ondulations. Ce changement de configuration, lié aux effets des non linéarités géométriques, peut s'accompagner ou non de plasticité. La notion de flambage recouvre deux notions distinctes que nous allons préciser celle de bifurcation et celle de point limite.

Nous considérons une structure soumise à un chargement  $l$  entraînant un déplacement caractéristique  $d$ . Dans un premier temps, sous l'effet d'un chargement croissant, la structure passe par une succession d'états d'équilibre stables appelé chemin d'équilibre fondamental ou branche primaire (OA) (figures 2.1)

### 2.1 Types d'instabilité

Nous distinguons deux différents types d'instabilité des structures pouvant se produire lorsque celles-ci subissent un phénomène du flambage :

#### *2.1.1 Flambage par bifurcation :*

La structure peut admettre plusieurs familles  $(\lambda, \delta)$  solutions des équations d'équilibre, il y aura flambage par bifurcation au point A et la charge  $\lambda_c$  correspondante est dite charge critique (figure 2.1).

Au-delà du point A, la branche secondaire peut être stable ou instable. En revanche, la solution qui correspondait à l'état fondamental devient instable (branche AA' figure 2.1).

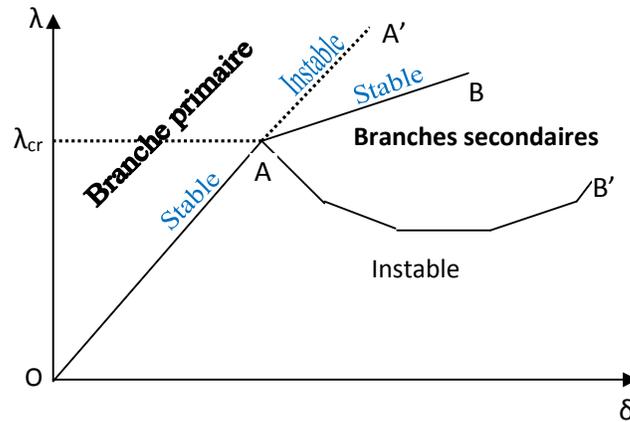


Figure 2.1 Schéma stabilité chemin d'équilibre[GER97]

Le cas d'une branche secondaire instable ( $AB'$ , flambage par bifurcation avec chute de rigidité figure (2.1) peut être illustré par une coque mince cylindrique circulaire, sans défaut, sous compression axiale. Les flambages par bifurcation sans chute de la rigidité (branche  $AB$  figure 2.1) peuvent se rencontrer dans le cas des structures sans défaut telles que :

- la poutre en compression axiale (comportement élastique).
- l'anneau circulaire en compression radiale.
- la plaque rectangulaire en compression longitudinale.

### 2.1.2 Flambage par point limite :

Lorsque la structure n'admet qu'une seule famille  $(\lambda, \delta)$  solution des équations d'équilibre, le point A est appelé point limite (figure 2.2). La courbe  $(\lambda, \delta)$  présente alors un maximum au point A pour lequel la rigidité de la structure s'annule. La figure (2.2) illustre deux courbes typiques de flambage par point limite. Le cas de la figure 2.2(b) est représentatif d'une calotte sphérique sous pression externe (Phénomène de claquage puis retour à un état stable).

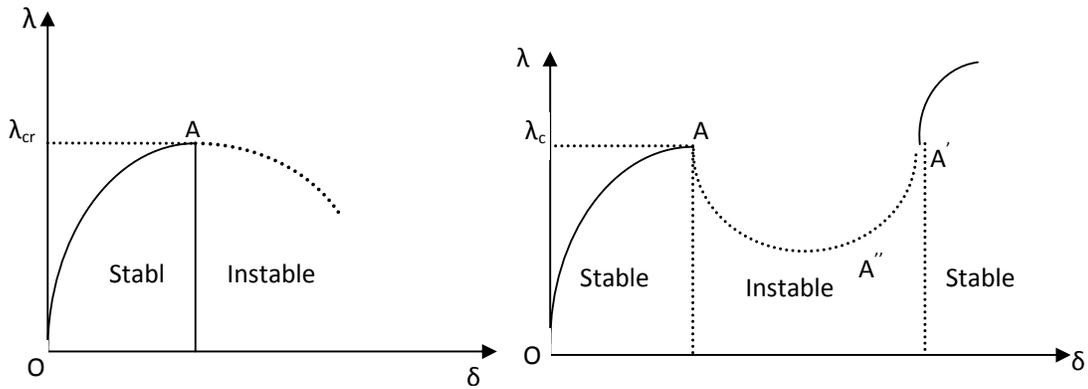


Figure 2.2 Schéma de flambage par point limite[GER97]

Le caractère stable ou instable du comportement post-critique est très important pour le dimensionnement des structures. Un comportement instable après bifurcation est bien sûr dangereux et à éviter à tout prix. Nous cherchons à conditionner la valeur critique du chargement global ainsi que le comportement post-critique.

**2.2 Stabilité d’une coque cylindrique mince**

**2.2.1 Géométrie des coques cylindriques :**

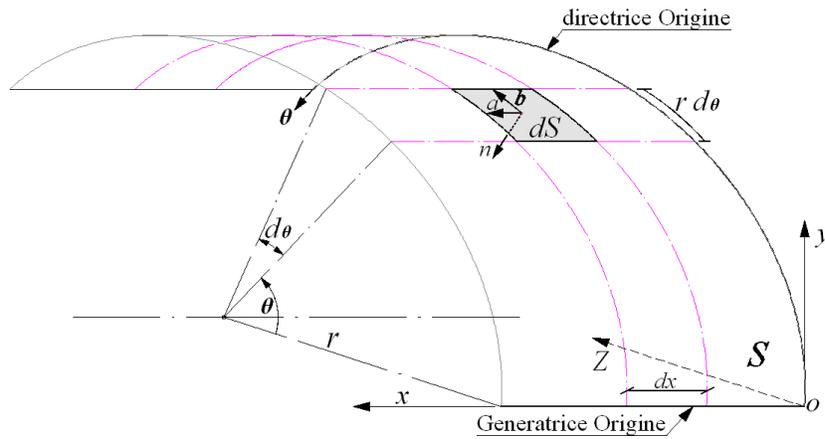


Figure 2.3 Coque Cylindrique

On peut obtenir la surface moyenne cylindrique (S) de la coque cylindrique en déplaçant une ligne droite dite Méridien ou Génératrice parallèlement à elle-même en suivant une courbure dite courbe d’extrémité ou directrice.

La courbe ou la directrice est admise plane et les Méridiens ou génératrices sont normaux au plan contenant la courbe (directrice), la surface est dite surface de révolution.

Aussi la surface moyenne peut être engendrée par le déplacement en translatant la directrice ou la courbe parallèlement à elle-même le long du méridien (génératrice), la surface est dite surface de translation.

On distingue deux types de surface donc deux types de coques cylindriques.

Ces deux types de coques sont différenciées et distinguées par leur courbe principale, c.-a-d leurs directrices. Si la courbe est fermée (cercle, ellipse) comme les conduites, tuyauteries, silos, ...etc la coque est dite coque fermée et si la courbe est ouverte (demi ellipse ou arc de cercle) comme les voûtes, la coque est dite coque ouverte.

### **3. CADRE THEORIQUE DE L'ETUDE :**

#### **3.1 Introduction des concepts d'équilibre, de stabilité et de bifurcation :**

Trois concepts essentiels ont été évoqués en introduction. Il s'agit des notions d'*équilibre*, de *stabilité* et de *bifurcation*. Nous en donnons une définition succincte ci-dessous.

##### **3.1.1 Equilibre d'un système mécanique :**

Considérons dans un premier temps un phénomène physique quelconque, dont l'évolution dans le temps est décrite par une équation du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = F(\lambda, u) \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Dans un environnement paramétré par un scalaire  $\lambda$ . Les états d'équilibre stationnaire de ce phénomène sont définis par l'équation fonctionnelle qui admet l'ensemble solution S

$$S = \{(\lambda, u); F(\lambda, u) = 0\}. \quad (2.2)$$

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en appliquant au système le principe de l'énergie potentielle stationnaire. Cette énergie potentielle  $\Phi$  est donnée par :

$$\Phi = U_{\text{int}} + W_{\text{ext}}$$

Où :  $U_{int}$  est l'énergie interne de déformation de la structure

$W_{ext}$  est le travail des forces extérieures.

L'équilibre est alors donné par :  $\partial\Phi = \partial U_{int} + \partial W_{ext} = 0$  ( 2.3)

Les états d'équilibre du système sont donc définis par l'ensemble solution S de cette dernière équation.

Si l'ensemble solution S ne subit pas de changement qualitatif lorsque le paramètre  $\lambda$  varie dans un voisinage spécifié, on parlera de situation régulière. Si en revanche un changement qualitatif est perceptible pour une variation arbitrairement petite de  $\lambda$  au voisinage d'une valeur  $\lambda_c$ , on qualifiera la situation de singulière et  $\lambda_c$  sera appelée valeur critique.

Cette situation singulière traduit en fait la présence d'une bifurcation d'équilibre.

**3.1.2 Bifurcation d'équilibre :**

Pour illustrer et aborder les concepts de base du phénomène de flambage élastique nous allons utiliser l'exemple élémentaire suivant (figure 2.4) le plus utilisé en littérature [BUD74].

Soit une barre OA rigide verticale de longueur L dont l'extrémité supérieure est soumise à une force de module  $\lambda$  constant et dont la direction reste verticale (charge conservative). A l'autre extrémité un ressort élastique K exerce un moment de rappel.

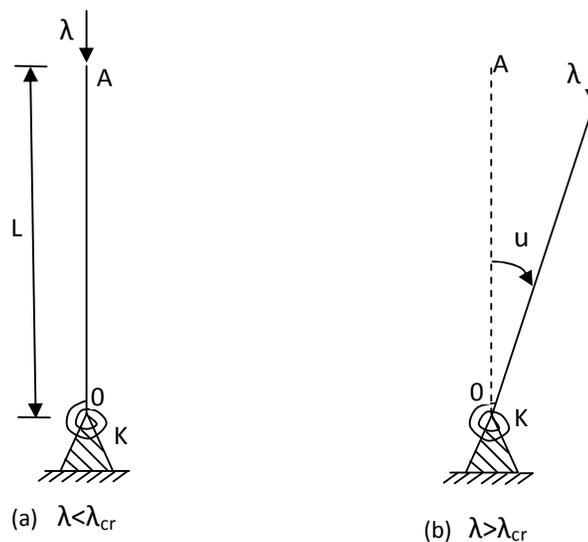


Figure 2.4 : barre articulée soumise à un effort de compression

Avec :

$\lambda$ : charge

$u$  : angle de rotation de la barre

Equilibre de la barre :

L'équation de l'énergie potentielle  $\Phi$  de ce système mécanique s'écrit comme suit :

$$\phi(u, \lambda) = \frac{1}{2}Ku^2 + \lambda.L.\cos(u) \quad (2.4)$$

Afin de simplifier la résolution analytique on suppose maintenant que la rotation  $u$  est suffisamment petite. L'état d'équilibre est statique alors les solutions de la dérivée première de l'énergie potentielle  $\Phi(u, \lambda) = 0$  ;

$$\begin{aligned} \phi'(u, \lambda) &= Ku - \lambda.L.\sin(u) \\ &= Ku - \lambda.L.\left[u - \frac{u^3}{6}\right] \\ &= u.\left[K - \lambda.L + \frac{\lambda.L}{6}u^2\right] = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Soit deux solutions :

$$u_1 = 0 \quad \forall \lambda$$

$$u_2 = \pm \sqrt{6.\left(1 - \frac{K}{\lambda L}\right)} \quad \text{pour } \lambda > \frac{K}{L}$$

L'ensemble des solutions peut donc être représenté comme suit :

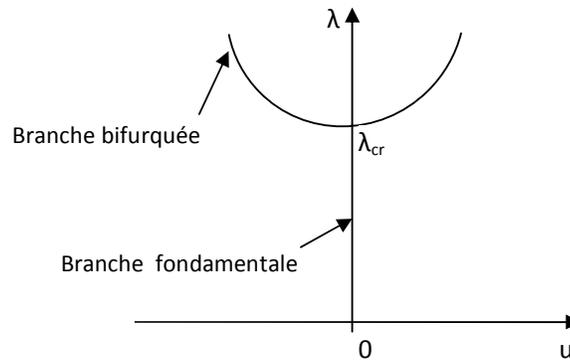


Figure 2.5 : branches d'équilibre de la barre [LAH93]

La figure (2.5) décrit les deux phases d'équilibre d'une structure sous l'action de chargement de révolution comme la pression, la compression axiale...

Un premier cas d'équilibre dit fondamental apparait et possède les mêmes propriétés de symétrie que le chargement jusqu'au point de bifurcation où la coque prend une forme flambée en perdant cette symétrie. Dans ce deuxième cas, l'augmentation du chargement  $\lambda$  va engendrer une rotation de la barre autour du point O. L'équilibre est instable et après un processus dynamique, on peut atteindre une configuration finale différente de la configuration symétrique.

### *3.1.3 Stabilité de l'équilibre*

Pour la plupart des ingénieurs le problème de la stabilité d'équilibre d'une structure élastique sous chargement conservatif est analysé par les critères de l'énergie. L'avantage considérable de l'usage de ces critères réside dans leur caractère purement statique. Bien que la stabilité soit une notion dynamique, l'approche énergétique associée à une discrétisation numérique réduit généralement le problème à l'analyse spectrale de l'opérateur de l'élasticité linéaire au voisinage de la configuration dont on étudie la stabilité. On ne considérera que les systèmes conservatifs, ce qui est suffisant pour la plupart des applications.

Les états d'équilibres sont alors stationnaires de l'énergie potentielle totale.

Le critère de stabilité le plus naturel d'un équilibre est le principe du minimum de l'énergie potentielle qui affirme qu'un état d'équilibre initial ( $u=0$ ) est stable s'il réalise un minimum locale de l'énergie potentielle.

#### 3.1.3.1 Condition du minimum de l'énergie potentielle totale

Une fois le point de bifurcation atteint, il convient de savoir quelle branche d'équilibre le système va emprunter. D'après le théorème de l'énergie potentielle totale « une structure est dans une configuration d'équilibre stable si et seulement si l'accroissement de l'énergie potentielle totale pour tout déplacement cinématiquement admissible suffisamment petit est positif ». ce que s'explique que la barre pour  $\lambda > \lambda_0$  positionnée sur la branche bifurquée et son déplacement qui satisfait les conditions d'équilibre qui sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle d'une structure élastique soumise à une charge conservatif  $\lambda$ , peut être exprimée comme fonction des déplacements  $u$  et  $\lambda$ . On suppose que cette fonctionnelle est dérivable autant de fois qu'il est nécessaire. Tout état d'équilibre de cette structure doit d'être solution de l'équation variationnelle suivante ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi'(u, \lambda) = 0 \\ \phi''(u, \lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{équilibre stable} \quad (2.6)$$

L'expression de la variation seconde de l'énergie potentielle pour la barre O A s'écrit :

$$\phi''(u, \lambda) = K - \lambda.L + \lambda.L \frac{u^2}{2} \quad (2.7)$$

Lorsque  $u$  appartient à la première branche solution ( $u = u_1 = 0$ ), la condition de stabilité s'écrit :

$$K - \lambda.L > 0, \quad \text{soit } \lambda < \frac{K}{L}$$

Lorsque  $u$  appartient à la seconde branche solution ( $u = u_2 \in S_2$ ), la variation seconde de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\phi''(u, \lambda) = K - \lambda.L + \lambda.L \frac{u_2^2}{2} = K - \lambda.L + \frac{\lambda.L}{2} \cdot 6 \cdot \left(1 - \frac{K}{\lambda L}\right) = 2.\lambda.L - 2.K \quad (2.8)$$

Or pour  $u \in S_2$  (figure ;2.5), on a  $\lambda > K/L$ , ce qui implique que

$$\forall u \in S_2 \quad \phi''(u, \lambda) > 0$$

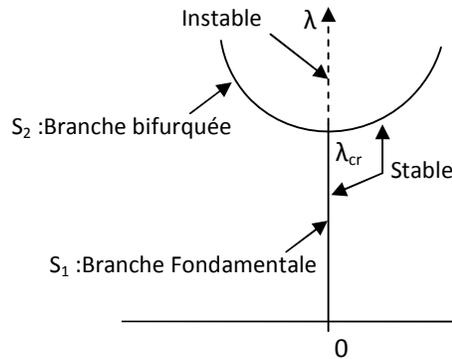


Figure 2.6 : solutions stables de l'équilibre [LAH93]

Dans le cas de la barre, lorsque  $\lambda$  augmente, il y a une transition régulière de la solution fondamentale ( $\lambda \leq k/L$ ) à la solution bifurquée pour  $\lambda > k/L$  où la barre est adaptée le principe de l'énergie potentielle sera minimale.

3.1. 3.2 Présence de défauts géométriques

A partir des toutes premières études sur le flambage, il est apparu très clairement qu'un calcul élastique linéaire conduisait à des charges critiques supérieures aux charges critiques expérimentales. Cette différence provient des structures réelles qui ne sont jamais parfaites et ne satisfont pas aux propriétés de symétrie et parfois au défaut de chargement....

Ces différentes imperfections empêchent d'avoir expérimentalement une étude sur une structure parfaite

KOITER [KOI45], est l'un des premiers à tenir compte des défauts géométriques. Dans le cas des défauts géométriques le comportement avant bifurcation est généralement non linéaire. Cette non linéarité provient des flexions importantes provoquées par les défauts géométriques, elle entraîne un changement dans la réponse de la structure qui au lieu de suivre le chemin d'équilibre (a) des structures parfaites (figure 2.7) suit un autre chemin (b) conduisant à une nouvelle branche bifurquée « imparfaite ».

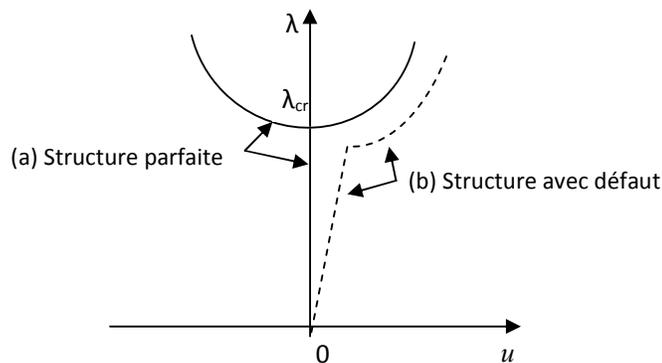


Figure 2.7 : Effet des défauts géométriques sur les branches d'équilibre [JER15]

### 3.2 Théorie des coques de Donnell

La réduction d'une coque à deux dimensions a donné naissance à diverses théories, dont les écarts reposent entre autres sur les termes du champ de déplacement considérés pour le calcul des déformations, ainsi que sur les termes du tenseur des contraintes pris en compte. Nous rappelons ici celle relative aux coques cylindriques minces qui présentent un intérêt direct pour notre travail, élaborée par Donnell [DON34].

#### 3.2.1 Hypothèses de comportement

Donnell se place dans le cadre de déformations modérées subies par une coque de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et d'épaisseur  $t$ , constituée d'un matériau homogène, isotrope et élastique ayant un module de Young  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$ . Le champ de déplacement est noté  $\{u, v, w\}$ , respectivement au système de coordonnées  $\{x, y, z\}$  tel que défini sur la figure ci-dessous :

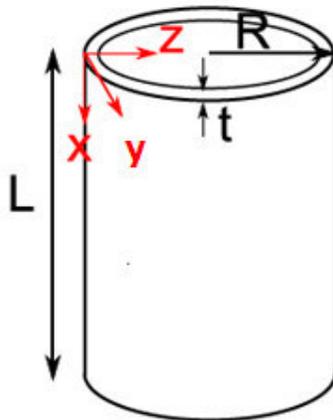


Figure 2.8 : Coque cylindrique mince

Soient  $X_0, Y_0, Z_0$  les coordonnées curvilignes d'un point avant déformation, et

$$U = u_{e_1} + v_{e_2} + w_{e_3} \quad (2.9)$$

Le champ de déplacement de la surface moyenne ( $z=0$ ) (Figure 2.8)

Pour des faibles épaisseurs  $t$ , les coordonnées  $X, Y, Z$  après déformation peuvent être définies à partir du champ de déplacement  $U$  par :

$$X = X_0 + u + \beta_x Z$$

$$Y = Y_0 + v + \beta_x Z \tag{2.10}$$

$$Z = Z_0 + w \quad Z \leq \frac{t}{2}$$

Où  $\beta_x, \beta_y$ , sont les rotations des fibres respectivement autour d'axes parallèles à oy et ox:

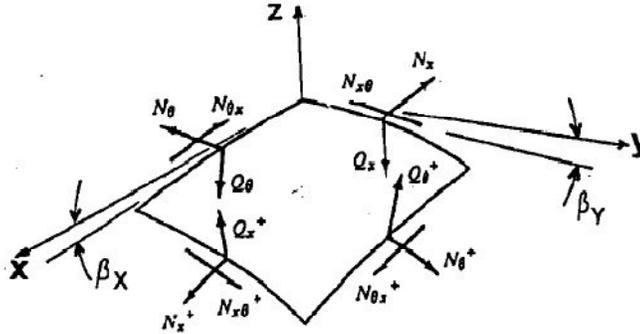


Figure2.9 : Rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$

La théorie des coques de Donnell repose sur les hypothèses suivantes :

1. La coque est suffisamment mince :

$$t/R \ll 1, \quad t/L \ll 1$$

2. Les déformations sont suffisamment petites,  $\epsilon \ll 1$ , et la loi de Hooke s'applique
3. Les lignes droites normales à la surface moyenne non déformée restent droites et normales à la surface moyenne déformée, leur longueur est inchangée.

$$\beta_x = -w_{,x} \tag{2.11}$$

$$\beta_y = -(w_{,y} + \frac{v}{R})$$

4. Les contraintes normales agissant perpendiculairement à la surface normale peuvent être négligées comparativement aux contraintes agissant dans le plan de la surface moyenne.
5. Les déplacements u et v sont négligeables, le déplacement w est du même ordre que l'épaisseur t de la coque :

$$|u| \ll t, \quad |v| \ll t, \quad |w| = o(t)$$

6. Les dérivées de  $w$  sont petites, mais leurs carrés et leurs produits sont du même ordre que les déformations considérées :

$$\left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right\} \ll 1 \quad , \quad \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \left| \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right\} = 0(\varepsilon) \quad (2.12)$$

7. Les changements de courbure sont petits et l'influence de  $u$  et  $v$  sont négligeables, de telle manière qu'ils peuvent être représentés par des fonctions linéaires de  $w$  seulement.

Les hypothèses 3 et 4 constituent les hypothèses dites de Love-Kirchhoff, les hypothèses 5 à 7 traduisent le fait que les déformations sont essentiellement liées au déplacement radial  $w$ .

### 3.2.2 Relations déformations-déplacements

Sur la base de ces hypothèses, les relations entre le champ de déplacement et les déformations en tout point de la coque sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + z.k_x & \text{Avec} & \quad \varepsilon_{x0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \quad k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{y0} + z.k_y & \text{Avec} & \quad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & \quad k_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.13) \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yx0} + z.k_{xy} & \text{Avec} & \quad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} & \quad k_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_{x0}$  ,  $\varepsilon_{y0}$  et  $\gamma_{xy0}$  sont les déformations de la surface moyenne, et  $\kappa_x$  ,  $\kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  désignent les changements de courbure de la surface moyenne.

### 3.2.3 Relations contraintes-déformations

Les relations existantes entre contraintes et déformations sont données par la loi de Hooke : (hypothèse 2, comportement purement élastique)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y) \quad , \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x) \quad , \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xy} \quad (2.14)$$

Les efforts unitaires s'exerçant sur un élément de coque étant définis ci-dessous par :

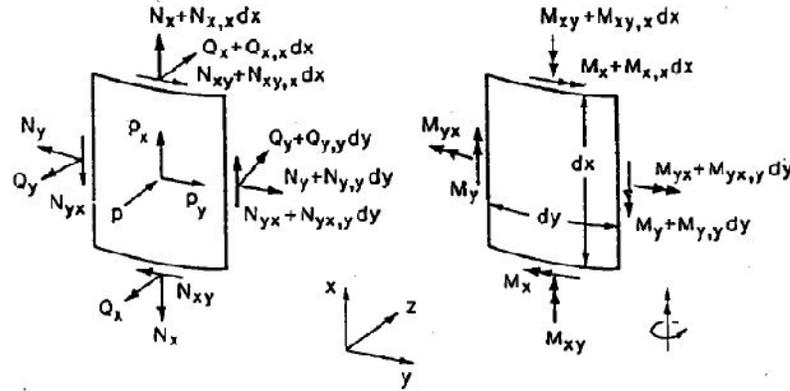


Figure 2.10 : Forces et moments agissant sur un élément de la coque

$$\begin{aligned} (N_x, N_{xy}, Q_x) &= \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) dz, & (N_{yx}, N_y, Q_y) &= \int_{-1/2}^{1/2} (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}) dz \quad (2.15) \\ (M_x, M_{xy}) &= \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma_x, \tau_{xy}) \cdot z dz & (M_{yx}, M_y) &= \int_{-1/2}^{1/2} (\tau_{yx}, \sigma_y) \cdot z dz \end{aligned}$$

Ce qui amène finalement :

$$\begin{aligned} N_x &= C \cdot (\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) & N_y &= C \cdot (\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}) & N_{xy} = N_{yx} &= C \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \gamma_{xy0} \\ M_x &= D \cdot (\kappa_x + \nu \kappa_y) & M_y &= D \cdot (\kappa_y + \nu \kappa_x) & & \\ M_{xy} = M_{yx} &= D \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \kappa_{xy} & & & & \end{aligned} \quad (2.16)$$

Avec  $C = \frac{Et}{1-\nu^2}$  et  $D = \frac{Et^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}$  les rigidités de membrane et de flexion de la coque

### 3.2.4 Energie potentielle totale

L'énergie de déformation élastique de la coque est donnée par

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2.17)$$

$$\text{Soit encore } U_{\text{int}} = \frac{Et^3}{2 \cdot (1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dx dy dz \quad (2.18)$$

Ou, en dissociant les déformations de membrane et de flexion :

$$U_{\text{int}} = \frac{Et}{2 \cdot (1 - \nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left( \varepsilon_{x0}^2 + \varepsilon_{y0}^2 + 2\nu \varepsilon_{x0} \varepsilon_{y0} + \frac{1 - \nu}{2} \gamma_{x0y0}^2 \right) . dx dy$$

$$+ \frac{Et^3}{24 \cdot (1 - \nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left( \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu \kappa_x \kappa_y + \frac{1 - \nu}{2} \kappa_{xy}^2 \right) . dx dy \quad (2.19)$$

Le premier terme représente l'énergie de déformation de membrane, le second terme l'énergie de déformation de flexion.

Le travail des forces extérieures est exprimé par :

$$W = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} (p_z W) . dx dy - \int_0^{2\pi R} \left[ P_x^* U + P_y^* V + P_z^* W - M_x^* \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} . dy \quad (2.20)$$

Où  $P_z$  est la composante par unité d'aire de l'effort surfacique s'exerçant sur la coque, et  $P_x^*, P_y^*, P_z^*, M_x^*$  sont les composantes des efforts extérieurs et du moment de flexion appliquées aux extrémités de la coque.

L'énergie potentielle totale  $\phi(U, V, W)$  est obtenue par sommation de l'énergie de déformation interne et du travail des forces extérieures.

$$\phi = U_{\text{int}} + W \quad (2.21)$$

### 3.2.5 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en appliquant au système le principe de l'énergie potentielle stationnaire :

$$\delta\phi = \delta U_{\text{int}} + \delta W = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{Avec } \delta U_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) . dx dy dz$$

$$\text{Soit } \delta U_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (N_x \delta \varepsilon_{x0} + N_y \delta \varepsilon_{y0} + N_{xy} \delta \gamma_{xy0} + M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy}) . dx dy \quad (2.23)$$

$$\text{Et } \delta W = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} P_z \delta W . dx dy$$

$$= - \int_0^{2\pi R} \left[ P_x^* \cdot \delta U + P_y^* \cdot \delta V + P_z^* \cdot \delta w - M_x^* \cdot \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} dy \quad (2.24)$$

La condition de nullité de la variation d'énergie potentielle permet finalement d'obtenir les équations d'équilibre suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - \frac{1}{R} N_y + (N_x \cdot w_{,x} + N_{xy} \cdot w_{,y})_{,x} + (N_{xy} \cdot w_{,x} + N_y \cdot w_{,y})_{,y} + p_z = 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Où les indices situés après une virgule indiquent une dérivation partielle).

Une formulation plus usuelle de ces équations est accessible en introduisant la fonction d'Airy F telle que :

$$N_x = F_{,yy} \qquad N_y = F_{,xx} \qquad N_{xy} = F_{,xy}$$

Les deux premières équations sont alors satisfaites par identité.

La compatibilité des déformations impose de plus :

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - \gamma_{xy,xy} = w_{,xx}^2 - w_{,xx} w_{,yy} + \frac{1}{R} w_{,xx} \quad (2.26)$$

Et l'on obtient après substitution les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 F - Et \cdot \left( w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} + \frac{1}{R} w_{,xx} \right) = 0 \\ D \nabla^4 w + \frac{1}{R} F_{,xx} - F_{,yy} \cdot w_{,xx} - 2 \cdot F_{,xy} \cdot w_{,xy} - F_{,xx} \cdot w_{,yy} - p_z = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.27)$$

Ces dernières équations sont généralement présentées comme étant les équations de coques de Donnell-Mushtari-Vlasov (DMV)

#### 4. CONDITION DE STABILITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE MINCE

L'étude de la stabilité d'une coque cylindrique mince peut être effectuée à partir des équations d'équilibre en appliquant le critère de l'équilibre adjacent. On suppose

alors que les variables  $w$  et  $F$  introduites dans le paragraphe précédent peuvent s'écrire :

$$w = w_0 + \hat{w}, \quad F = F_0 + \hat{F} \quad (2.28)$$

Ou  $w$  et  $F$  représentent les solutions déterminées sur la branche initiales et  $\hat{w}$  et  $\hat{F}$  de petites perturbations de ces solutions. En injectant ces expressions dans les équations d'équilibre et en négligeant les carrés et les produits de  $\hat{w}$  et  $\hat{F}$ , nous obtenons un système d'équations :

$$\begin{cases} \nabla^4 F + Et \left( w_{0,yy} \hat{w}_{,xx} - 2w_{0,xy} \hat{w}_{,xy} + w_{0,xx} \hat{w}_{,yy} - \frac{1}{R} \hat{w}_{,xx} \right) = 0 \\ D \nabla^4 w + \frac{1}{R} \hat{F}_{,xx} - F_{0,yy} \hat{w}_{,xx} - 2 \cdot F_{0,xy} \hat{w}_{,xy} - F_{0,xx} \hat{w}_{,yy} - w_{0,yy} F_{,xx} - 2 \cdot w_{0,xy} \hat{F}_{,xy} - w_{0,xx} \hat{F}_{,yy} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

La solution de ces équations permet de déterminer la stabilité de la coque, comme nous le montrons ci-après.

#### 4.1 Stabilité d'une coque cylindrique mince sous compression axiale

Considérons un cylindre supporté simplement à ses extrémités et soumis à un chargement uniforme de compression axiale  $N$ .

L'état de la coque avant flambement peut être décrit par :

$$N_{x0} = -\frac{N}{2\pi R} \quad N_{y0} = N_{xy0} = 0 \quad w_0 = Cte \quad (2.30)$$

En négligeant les phénomènes de flexion locale près des conditions aux limites.

Compte tenu de l'axisymétrie du chargement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla^4 F - \frac{Et}{R} w_{,xx} = 0 \\ D \nabla^4 w + \frac{1}{R} F_{,xx} = 0 \end{cases} \quad avec \quad \nabla^4 = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \quad (2.31)$$

De la même manière, les équations de la stabilité se réduisent à :

$$\begin{cases} \nabla^4 F - \frac{Et}{R} w_{,xx} = 0 \\ D \cdot \nabla^4 w + \frac{1}{R} \cdot F_{,xx} + \lambda \frac{Et^2}{c \cdot R} w_{,xx} = 0 \end{cases} \quad \left( \text{si l'on pose } \lambda = F_{0,yy} \cdot \frac{c \cdot R}{Et^2} \right) \quad (2.32)$$

Les conditions aux limites imposent pour  $x = 0, L$  où l'on cherche pour les deux équations de stabilité ci-dessus des solutions de la forme:

$$\hat{w} = A \cdot \sin\left(m\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n \frac{y}{R}\right), \quad \hat{F} = B \cdot \sin\left(m\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n \frac{y}{R}\right), \quad (2.33)$$

La résolution amène l'identification des solutions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{w} &= t \cdot \sin\left(m\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n \frac{y}{R}\right), \quad \lambda_{c,mn} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}{\alpha_m^2} + \frac{\alpha_m^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \right\} \\ \hat{F} &= -\frac{Et^3}{2c} \cdot \frac{\alpha_m^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \cdot \sin\left(m\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n \frac{y}{R}\right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\text{Avec } c = \sqrt{3 \cdot (1 - \nu^2)} \quad \beta_m^2 = n^2 \cdot \frac{Rt}{2c} \cdot \left(\frac{1}{L}\right)^2 \quad \alpha_m^2 = m^2 \cdot \frac{Rt}{2c} \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

La charge de bifurcation est alors localisée par minimisation de  $\lambda c$ . Celle-ci est obtenue pour

$$\frac{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}{\alpha_m^2} = 1 \quad \text{Soit } \lambda c = 1$$

$$\text{On en déduit } N_{x0}, \text{ puis } \sigma_c \text{ qui est égal : } \sigma_c = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t}{R} \quad (2.35)$$

C'est l'expression de la contrainte classique, obtenue au début du siècle par Lorenz, Timoshenko et Southwell [LOR08][TIM10][SOU14].

## 4.2 Stabilité d'une coque cylindrique mince sous compression radiale

La stabilité des coques cylindriques circulaires sous la pression latérale uniforme a été largement étudiée. Il ya beaucoup de solutions analytiques différentes pour des cylindres à paroi mince sous pression externe, en fonction des caractéristiques du cylindre et des contraintes appliquées.

4.2.1 Solution de problème

Compte tenu d'un mode de flambement d'onde unique, Glock a calculé une solution du problème de flambement des cylindres élastiques contraints. Glock utilise la formulation de l'énergie pour obtenir la formule de la charge critique de flambage.

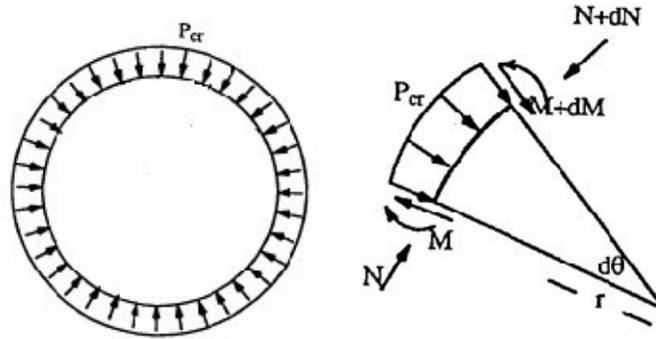


Figure 2.11: Modèle de Glock's

Selon l'approche Glock's[WAN04] , la déviation est décrite par l'équation suivante :

$$w = w_1 \sin^2 \left( \frac{\pi \theta_v}{2\theta} \right) \tag{2.36}$$

Avec

$w$  : déplacement de la surface flambée

$w_1$  : amplitude de la surface flambée

$\theta_v$  : variable angle

$\theta$  : angle de la zone de flambage

Comme les boucles de cylindre, l'énergie potentielle comprend trois parties:

1. moment de Flexion M dans la zone flambage.
2. force de compression N
3. Pression uniforme externe  $P_{cr}$  accumulée au cours du processus.

La combinaison de ces parties, l'expression suivante peut être obtenue:

$$\phi = \frac{1EI}{2r^3} \int_0^{\theta_0} (w + \ddot{w})^2 d\theta + \int_0^{\pi} \frac{N^2}{2EF} r d\theta - \int_0^{\theta_0} (w + \ddot{w})^2 \int_0^{\theta} P_{cr} w r d\theta \quad (2.37)$$

Ou  $\Phi$  = énergie potentielle

$EI$  = rigidité à la flexion du cylindre mince

$N$  = force de compression

Après son remplacement par l'intégration de l'équation ci-dessus, l'énergie potentielle peut être écrite :

$$\phi = \frac{1EI}{16r^3} \left( \frac{\pi}{\theta} \right)^4 w_1^4 \theta + \frac{N^2}{2} \frac{r\pi}{EF} - \frac{P_{cr} r}{2} w_1 \theta \quad (2.38)$$

Le critère minimum d'énergie potentielle doit satisfaire aux exigences suivantes:

$$\frac{\delta\phi}{\delta w_1} = \frac{1EI}{4r^3} \theta \left( \frac{\pi}{\theta} \right)^4 w_1^4 + N \frac{\delta N}{\delta w_1} \frac{r\pi}{EF} - \frac{P_{cr}}{2} r_1 \theta = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\delta^2\phi}{\delta w_1^2} = \frac{3EI}{4r^3} \theta \left( \frac{\pi}{\theta} \right)^4 w_1^2 + \left[ \left( \frac{\delta N}{\delta w_1} \right)^2 + N \left( \frac{\delta^2 N}{\delta w_1^2} \right) \right] \frac{r\pi}{EF} = 0$$

Résolvant les deux équations simultanément, l'équation suivante pour la pression externe critique est atteinte:

$$\left( \frac{P_{cr} r^3}{EI} \right)_{cr} = 0.969 \left( \frac{r^2 EF}{EI} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.40)$$

Cette équation est le résultat d'une approche Glock's, mais si on fait l'hypothèse que le module d'élasticité en flexion est à peu près égale au module de traction et en tenant compte de l'état de déformation plane, l'équation peut être simplifiée comme suit:

$$P_{cr} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left( \frac{t}{D} \right)^{2,2} \quad (2.41)$$

Où E est le module d'Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson, le diamètre D du cylindre, et t l'épaisseur de la paroi.

En outre, compte tenu d'un mode de flambement d'onde unique pour longtemps (sans conditions aux limites) des cylindres élastiques parfaitement ronds, la valeur de la pression critique est donnée par la formule suivante:

$$P_{GL} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{t}{D} \right)^3 \quad (2.42)$$

Cela vaut pour les cylindres dont les longueurs correspondent à :

$$L > \frac{4\pi\sqrt{6}}{27} (1-\nu^2)^{0.25} d \sqrt{\frac{d}{t}}$$

Si le cylindre ne se trouve pas dans cette catégorie "longue" la dernière équation n'est pas applicable.

Il y a deux équations pour des cylindres courts, que Von Mises a considéré comme meilleures.

La première est l'équation de Southwell. Il ne prend que la pression radiale en compte (non axiale) et la pression critique de flambage soient :

$$P_c = \frac{1}{3} (n^2 - 1) \frac{2E}{1-\nu^2} \left[ \frac{t}{d} \right]^3 + \frac{2E \frac{t}{d}}{(n^2 - 1)n^4 \left[ \frac{2L}{\pi d} \right]^4} \quad (2.43)$$

La seconde équation est appelée *équation de Von Mises*. Elle peut être utilisée pour les coques cylindriques soumises à une pression combinée radiale et axiale, ou tout simplement à une pression radiale. La pression critique est :

$$P_c = \frac{1}{n^2 - 1 + \left(\frac{\pi d}{8L}\right)^2} \left[ \left( \left[ n^2 + \left(\frac{\pi d}{2L}\right)^2 \right]^2 - 2k_1 n^2 + k_2 \right) * \frac{1}{3} \frac{2E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{d}\right)^3 + \frac{2E \frac{t}{d}}{\left[ \left(\frac{2nL}{\pi d}\right)^2 + 1 \right]^2} \right] \quad (2.44)$$

Où

$$k_1 = (1 + (1 + \nu)\rho)(2 + (1 - \nu)\rho)$$

$$k_2 = [1 - \rho\nu] \left[ (1 + \rho(1 + 2\nu)) - \nu^2(1 - \nu^2) \left( 1 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \rho \right) \right]$$

Et

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{2nL}{\pi d}\right)^2 + 1}$$

Pour les deux équations de Von Mises Southwell, n est le nombre d'ondes de flambage, t l'épaisseur de la paroi, D le diamètre du cylindre,  $\nu$  coefficient de Poisson et L la longueur du cylindre.

## 5. CONCLUSION

Après un rappel des concepts de la stabilité, des différentes approches analytiques possibles, afin de déterminer les charges critiques classiques pour des coques cylindriques soumises aux différents chargements axiaux et radiaux, nous sommes convaincus qu'une large campagne numérique reste aujourd'hui nécessaire afin de valider le dimensionnement sous le flambement, d'après l'interprétation rigoureuse des résultats trouvées dans les littératures comme présentés dans le premier chapitre, permet non seulement de bien appréhender la divergence entre les résultats analytiques et expérimentaux, mais également de mieux comprendre le déclenchement des instabilités.

**CHAPITRE -III-**  
**ANALYSE DU COMPORTEMENT**

## **1. INTRODUCTION**

Face aux difficultés éprouvées par les scientifiques sur le sujet du flambage des coques depuis plusieurs décennies, nous avons donc choisi d'étudier l'influence des différents paramètres pour le dimensionnement des coques minces au flambage. Avec l'avènement de l'informatique, certains s'interrogent encore sur la nécessité d'effectuer des essais, souvent bien coûteux en temps et en argent. Notre étude bibliographique montre cependant que les simulations ne peuvent être pertinentes et percutantes que lorsqu'elles s'appuient sur une connaissance de la phénoménologie déjà bien approfondie, mais elles restent bien entendu essentielles afin de pouvoir étudier l'effet des différents paramètres entrant en jeu. Nous présentons dans ce chapitre les moyens numériques dont nous avons disposé pour mener à bien cette étude afin de les comparer aux résultats théoriques.

## **2. METHODES NUMERIQUES**

La présentation de la méthode des éléments finis, est utilisée de manière extensive pour la réalisation de nos simulations numériques. De nombreux outils numériques ont été développés lors des quarante dernières années, toujours plus robustes et précises. Nos analyses ont été effectuées à l'aide du logiciel ANSYS.

### **2.1 Modélisation numérique par ANSYS**

ANSYS est un logiciel de simulation par la méthode des éléments finis. Il est utilisé par beaucoup d'ingénieurs et concepteurs dans le monde et couvre plusieurs secteurs de la physique, notamment la mécanique et l'électromagnétisme. C'était donc le logiciel idéal pour simuler notre problème et avoir des résultats très convaincants et fiables.

ANSYS est un logiciel de modélisation par éléments finis à usage général pour résoudre différents problèmes mécaniques numériquement, comme l'analyse statique, dynamique structurelle, transfert de chaleur et problèmes de fluides, ainsi que les problèmes acoustiques et électro-magnétiques.

ANSYS est basé sur trois étapes lors de l'analyse et de la résolution d'un problème avec la méthode des éléments finis :

a). **Prétraitement:** Il est essentiel de définir le problème.

Les grandes étapes de prétraitement sont :

- Définir les points-clés, les nœuds, les lignes, les surfaces et les volumes.
- Définir le type d'élément et les propriétés géométriques :

La bibliothèque ANSYS (version 12.0) propose plus de 150 éléments-types différents définissant une catégorie d'application. Ces éléments-types se différencient par le nombre de degré de liberté appliquée à chaque nœud de la structure de test ainsi que le domaine d'utilisation (structurel, magnétique, thermique, électrique, ...) ou bien encore si les éléments sont définis dans un espace 2D ou 3D. Les degrés de liberté, autorisés sur chaque nœud, pour une structure 3D, sont les déplacements suivant les coordonnées cartésiennes (UX, UY et UZ) mais également, selon les éléments-types, des rotations (ROTX, ROTY et ROTZ). Cela définit donc 3 ou bien 6 degrés de liberté selon les éléments-types utilisés. On peut noter aussi, sur certains éléments-types, des nœuds supplémentaires au milieu de chaque arête.

- Maillage :

L'optimisation du maillage est essentielle afin d'assurer la meilleure précision sur la déflexion des membranes sous une pression appliquée. Nous recherchons donc à déterminer un maillage (ou nombre d'éléments) suffisant suivant les trois dimensions et offrant un temps de calcul acceptable. Bien évidemment, plus le maillage sera fin et plus les temps de calcul de nos simulations seront importants. Il faut noter aussi que pour la version académique d'ANSYS 12.0, le nombre des nœuds définissant les éléments d'une structure est limité à 32000. L'optimisation du maillage doit être le meilleur compromis entre le nombre de nœuds (ou éléments) et le temps de calcul tout en gardant une bonne précision sur la déflexion de nos membranes

b). **Solution:** les étapes suivantes doivent être spécifiées avant de résoudre le problème:

- Type d'analyse: statique, modale, flambement, ...
  - Charge: charge ponctuelle ou de pression, direction de la charge, ...
  - Contraintes.
- c). **Post-traitement:** Affichage des résultats tels que:
  - Listes des déplacements nodaux et des parcelles de déplacement.
  - Les forces d'élément et des moments.
  - diagrammes des contraintes.

## 2.2 Modes de Flambage dans ANSYS

Deux techniques sont disponibles dans ANSYS pour prédire le mode de flambage d'une structure :

### *2.2.1 Analyse du flambage par Valeur propre*

Une analyse du flambage par la méthode des valeurs propres prédit la force théorique de flambement d'une structure élastique idéal. Cette analyse est utilisée pour prédire le point de bifurcation à l'aide d'un modèle linéaire de structure élastique. Elle calcule les valeurs propres de cette structure selon les charges et les contraintes appliquées. C'est ce qu'on appelle ‘classique d'Euler’.

### *2.2.2 Analyse du flambage par la méthode non linéaire :*

L'analyse par la méthode non linéaire prédit aussi les charges de flambage mais son mode de fonctionnement est très simple : la charge appliquée est augmentée progressivement jusqu'à un niveau où la structure devient instable. Chacun de ces accroissements de chargement convergent en un petit nombre d'itérations.

Il est également fréquent que, soudain, une légère augmentation de la charge provoque un grand déplacement

**3. STABILITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE MINCE NON PRESSURISEE SOUS COMPRESSION AXIALE :**

Considérons un cylindre circulaire comprimé axialement à l'aide d'un champ de force P.

Les paramètres d'entrées géométriques et matérielles sont comme suit:

- R= 5000 mm
- L=10000 mm
- t = 20 mm
- E=2.1 10<sup>5</sup> N/mm<sup>2</sup>
- V= 0.3
- P= 1 N/mm<sup>2</sup>

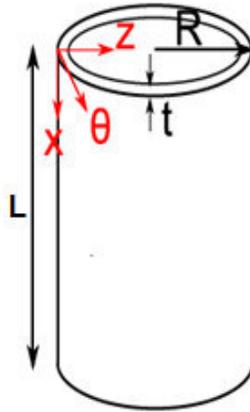


Figure3.1 : Coque cylindrique mince

V et E sont respectivement le coefficient de poisson et le module d'élasticité

**3.1 Contrainte classique :**

La contrainte de flambement classique du cylindre comprimé axialement est représentée dans l'équation suivante :

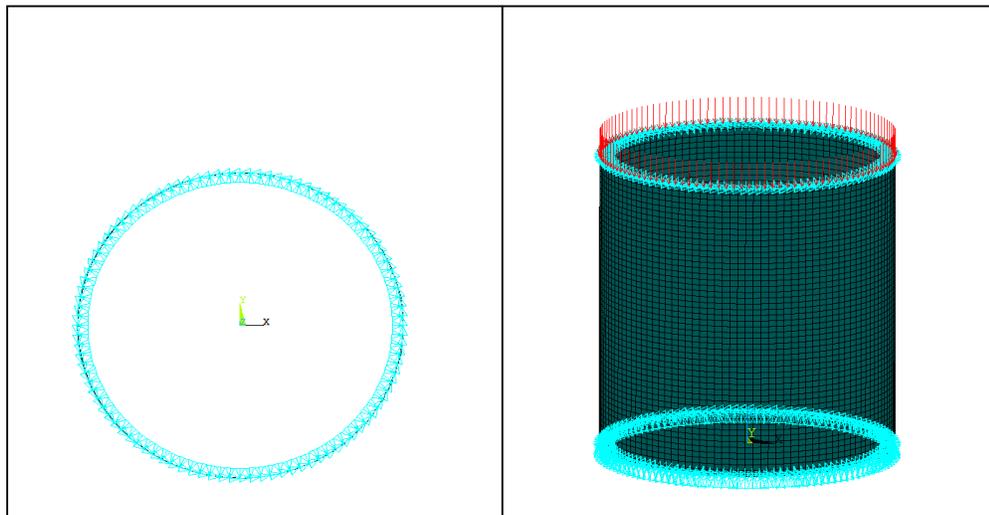
$$P_c = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t^2}{R} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 20^2}{5000 \sqrt{3(1-0,3^2)}} = 10167,82 N / mm$$

**3.2 Simulation numérique**

Nous présentons dans ce paragraphe les détails du modèle utilisé dans ANSYS et schématisé en Figure 3.1. Une coque cylindrique est maillée avec 100 éléments **SHELL 63** (figure 3.3) sur la circonférence et 200 sur la hauteur. La géométrie considérée est parfaite, afin de ne pas prendre en compte l'effet des défauts. Le rayon de la coque est de 5000 mm, sa hauteur égale à 10000 mm et d'épaisseur 20 mm.

La structure est supportée par le bas, ce qui limite les déplacements dans les trois directions et dans la partie supérieure de la coque, seule la direction axiale est autorisée.

La charge est appliquée axialement. La coque cylindrique est soumise à une charge uniformément répartie. La solution analytique est comparée aux résultats calculés avec le programme de simulation numérique ANSYS.



*Figure 3.2 : maillage de coque cylindrique*

### **SHELL 63**

Est un élément de coque mince. Il possède à la fois les capacités de flexion et de membrane. Dans le plan, des charges normales sont autorisées. L'élément possède six degrés de liberté à chaque nœud: trois translations et trois rotations dans les trois directions  $x$ ,  $y$ , et  $z$ .

La raideur de contrainte et les grands déplacements sont inclus. Une option de matrice de raideur tangente cohérente est disponible pour une utilisation dans une analyse de grand déplacement.

La géométrie, l'emplacement des nœuds et le système de coordonnées de cet élément sont illustrés dans la figure suivante:

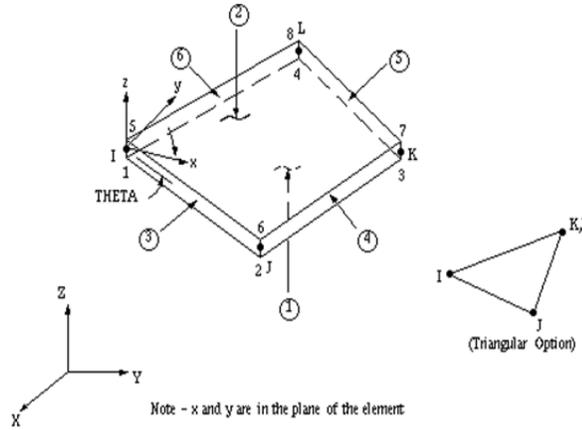


Figure 3.3 : Elément SHELL63 [ANS]

L'élément est défini par quatre nœuds, quatre épaisseurs, une rigidité de fondation élastique et les propriétés du matériau orthotrope . L'épaisseur est supposée varier légèrement sur la surface de l'élément.

Des pressions peuvent être appliquées en tant que charges de surface sur les faces des éléments et des pressions positives agissent sur l'élément. Les pressions de bord sont entrées en tant que force par unité de longueur. La charge de pression latérale peut être une charge d'élément équivalente appliquée aux nœuds ou répartie sur la face de l'élément.

**3.2.1 Charge critique du flambement par la méthode de Valeur propre**

Les valeurs de la charge critique trouvée, pour les deux modes, par simulation numérique est présentée dans le tableau (3.1).

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Erreur (%)
01	20 000	100	200	1	10167,82	9857,0	-3,05%
02	20 000	100	200	1	10167,82	9858,2	-3,04%

Tableau 3.1 : La charge critique par la méthode valeur propre

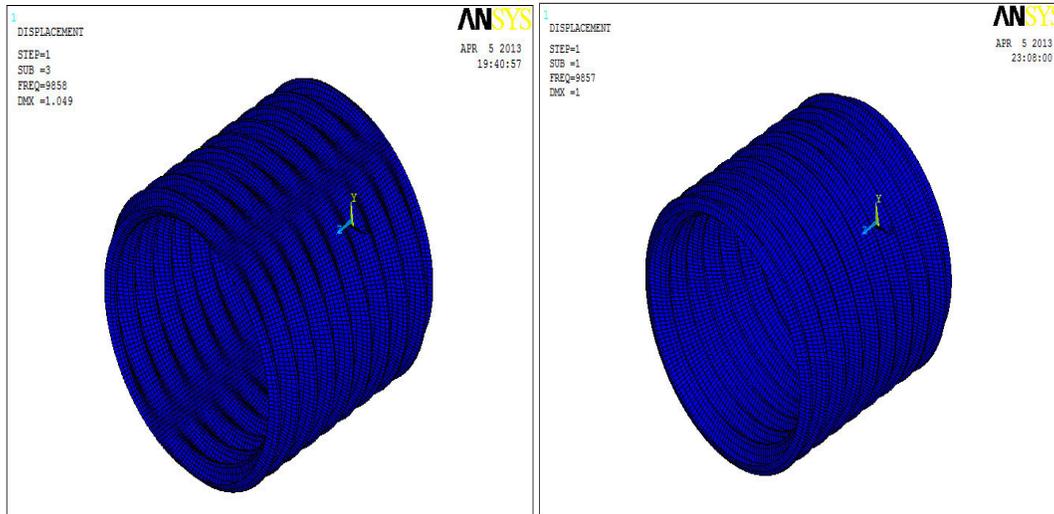


Figure 3.4 : Les premiers modes de flambage par la méthode valeur propre

3.2.2 Charge critique du flambement par la méthode non linéaire

Nous refaisons l’analyse par simulation numérique mais cette fois par la méthode non linéaire. Les résultats trouvés sont présentés dans le tableau (3.2).

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (point limite) (Mpa)	Erreur (%)
01	20 000	100	200	1	10167,82	10154	0,13%

Tableau 3.2 : La charge critique par la méthode Non linéaire

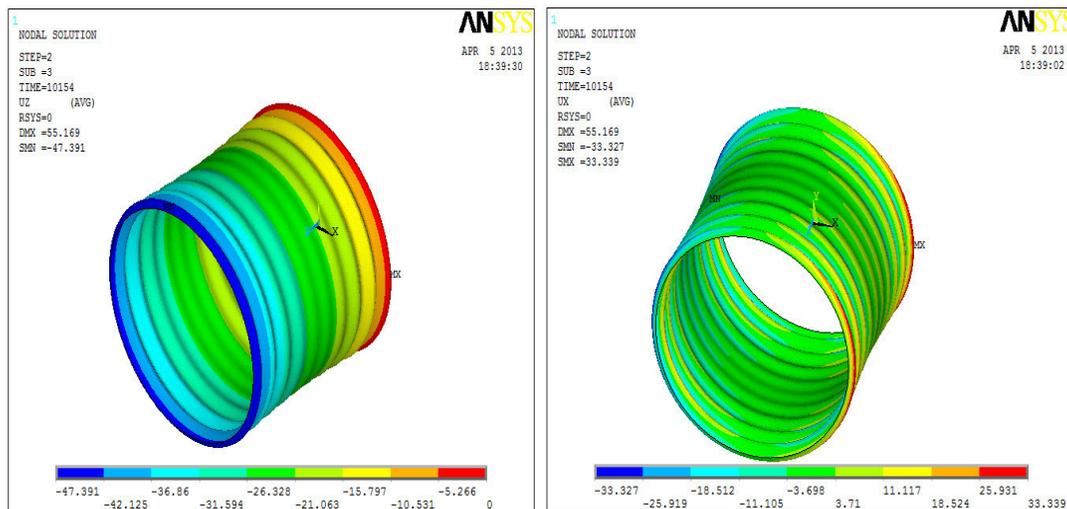


Figure 3.5 : modes de flambage par la méthode non linéaire

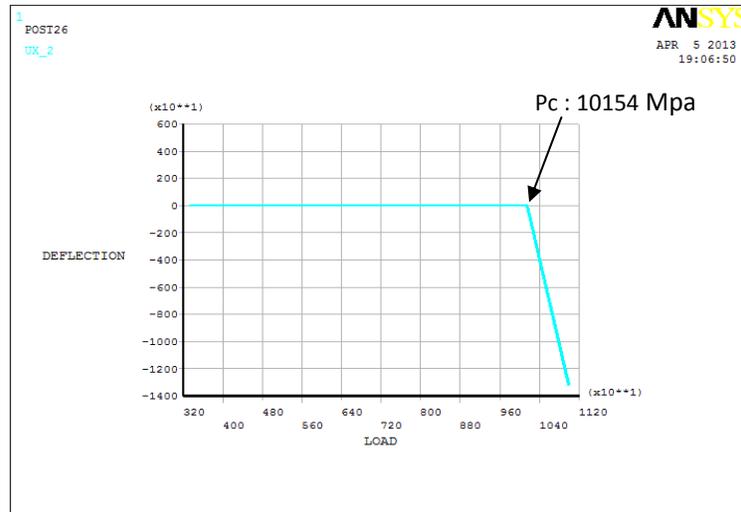


Figure 3.6: Détermination de la charge critique par la méthode Non linéaire

D’Après les résultats présentés dans le tableau (3.2), on peut dire que le calcul par éléments finis conduit par un outil numérique comme ANSYS qui est performant pour l’étude de la stabilité des coques minces de manière beaucoup plus aisée qu’une approche purement analytique. Le modèle utilisé SHELL63 est capable de définir parfaitement les charges critiques

En comparaison, les résultats trouvés et présentés dans les tableaux (3.1) et (3.2) au résultat théorique, montrent que la méthode non linéaire donne des résultats plus proches de la valeur théorique (erreur de 0,13%) que la méthode valeur propre (erreur de 3,04%).

### 3.3 Effet du rapport L/R d’un cylindre sur le point de bifurcation :

Dans le but d’analyser l’effet du rapport L/R sur la charge critique de flambage, on considère une coque cylindrique mince soumise à des efforts uniformes de compression axiale. La coque est de rayon  $R=5000$  mm, de longueur L variable comme le montre les tableaux suivants et d’épaisseur t fixée à 20 mm. Les caractéristiques mécaniques du matériau supposé parfaitement élastique sont les suivantes:

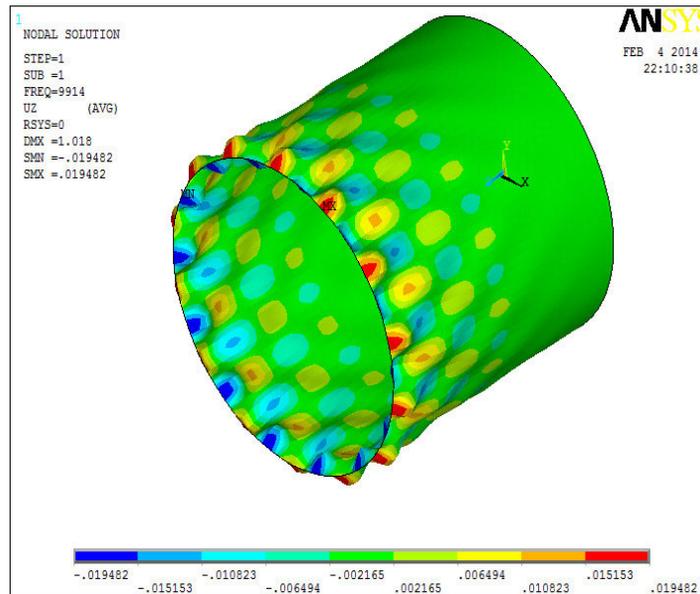
Module d’Young  $E = 2.1 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$

Les charges critiques et les modes de flambage correspondants aux différents cas, par les deux méthodes, sont présentés ci-dessous :

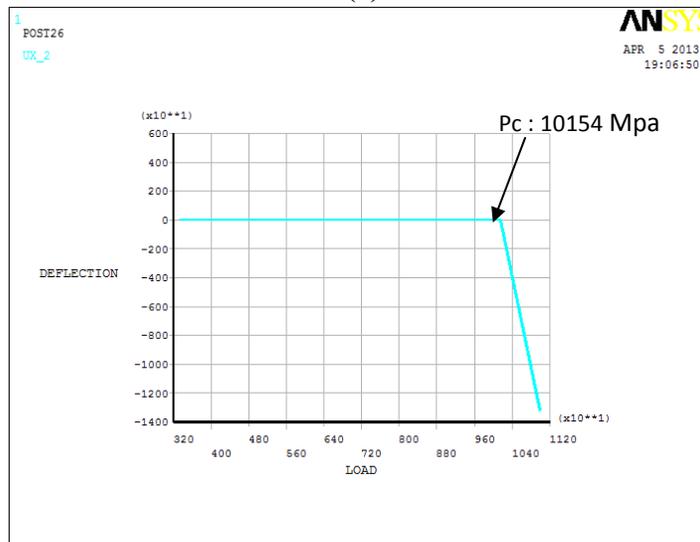
Cas de  $L=2R$  :

Mode	L	R	L/R	Pc Théorique	Méthode valeurs propres		Méthode Non linéaire	
					Pc	Erreur %	Pc	Erreur %
01	10000	5000	02	10167	9857	-3%	10154	-0.1%
02	10000	5000	02	10167	9858.2	-3%		

Tableau3.3-a : charge critique par les deux méthodes pour  $L/R=2$



(a)



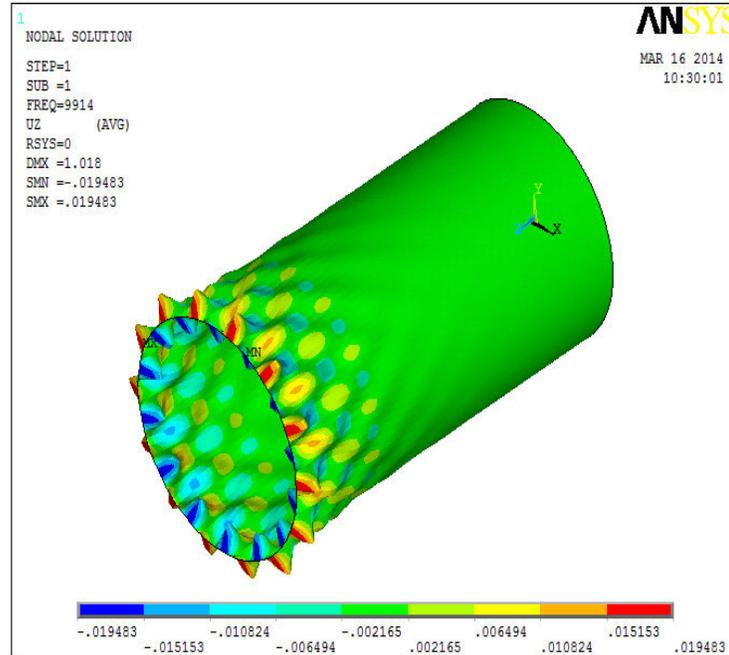
(b)

Figure 3.7 : La charge critique pour le cas ( $L/R= 2$ )  
 (a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire

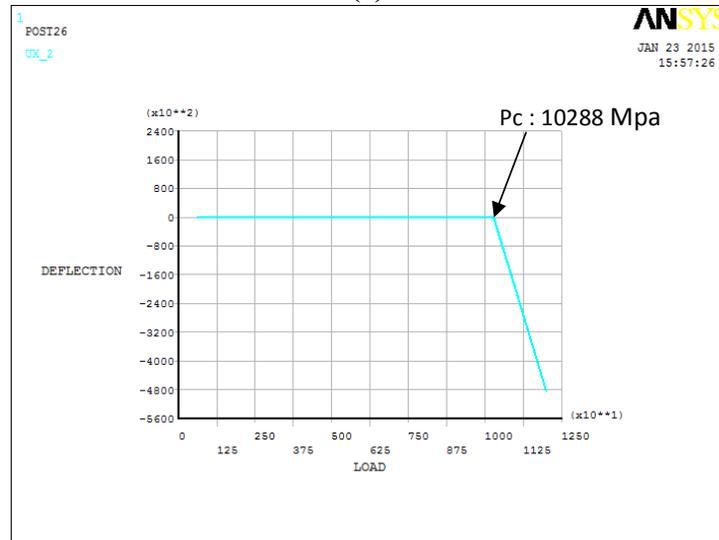
Cas de  $L=4R$  :

Mode	L	R	L/R	Pc Théorique	méthode valeurs propres		méthode Non linéaire	
					Pc	Erreur %	Pc	Erreur %
01	20000	5000	4	10167	9914.1	-2.5%	10288	1.2%
02	20000	5000	4	10167	9920	-2.4%		

Tableau3.3-b : charge critique par les deux méthodes pour  $L/R=4$



(a)



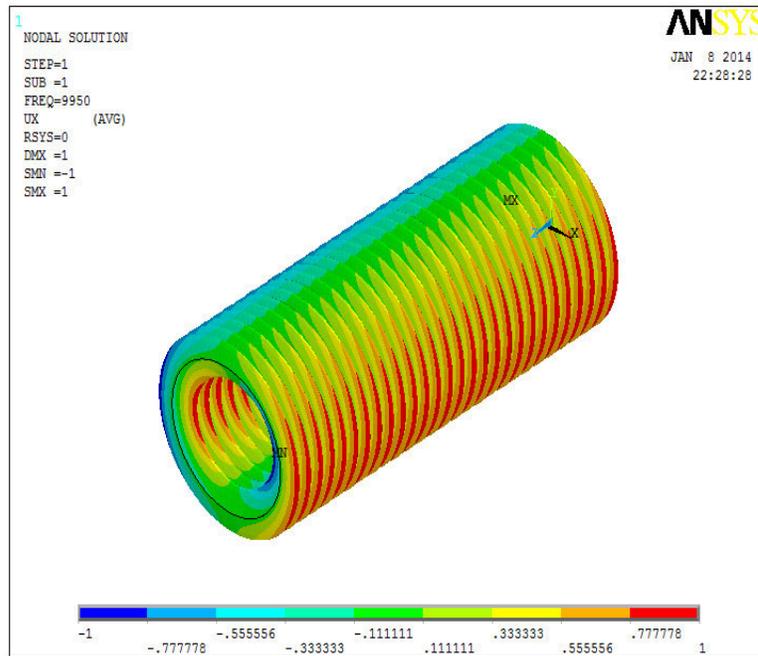
(b)

Figure 3.8 : La charge critique pour le cas ( $L/R=4$ )  
 (a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire

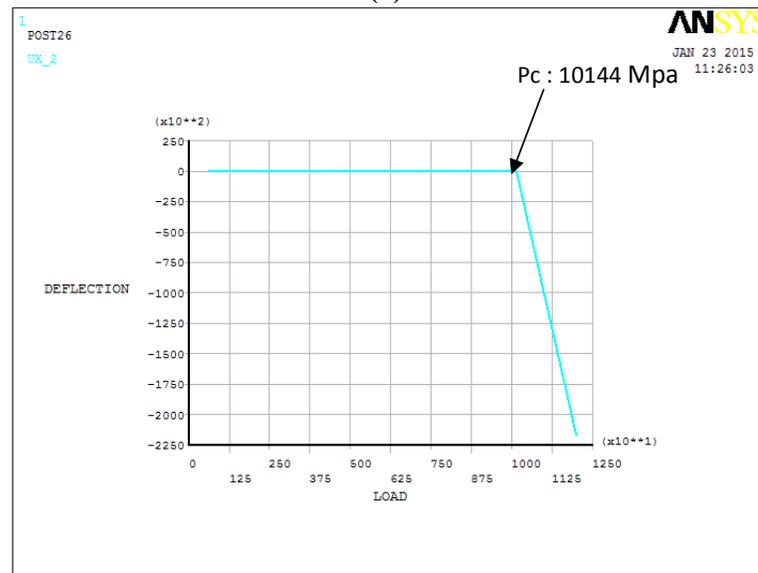
Cas de  $L=6R$  :

Mode	L	R	L/R	Pc Théorique	méthode valeurs propres		méthode Non linéaire	
					Pc	Erreur %	Pc	Erreur %
01	30000	5000	6	10167	9950	-2.1%	10144	-0.2%
02	30000	5000	6	10167	9953	-2.1%		

Tableau 3.3-c : charge critique par les deux méthodes pour  $L/R=6$



(a)



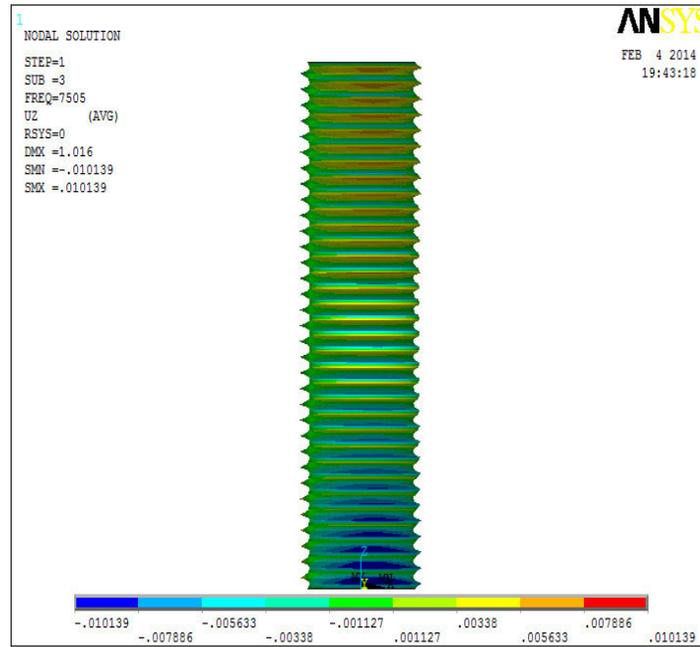
(b)

Figure 3.9 : La charge critique pour le cas ( $L/R=6$ )  
 (a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire

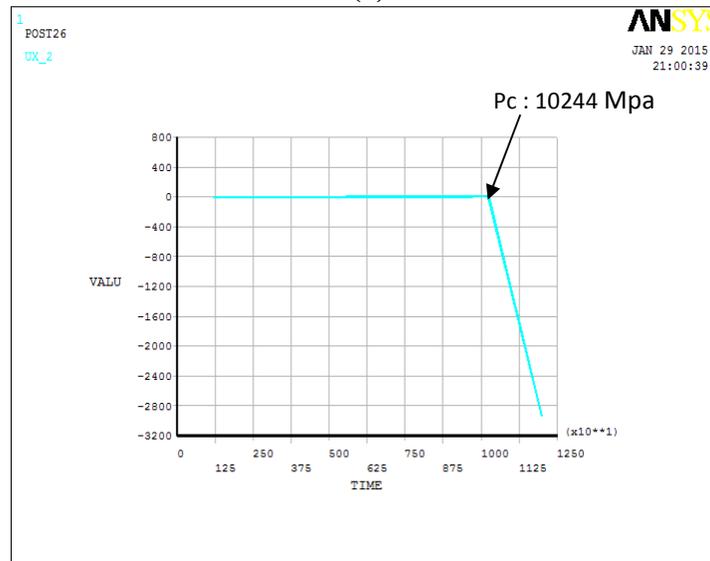
Cas de  $L=8R$  :

Mode	L	R	L/R	Pc Théorique	méthode valeurs propres		méthode Non linéaire	
					Pc	Erreur %	Pc	Erreur %
01	40000	5000	8	10167	9105	10.4%	10244	0.8%
02	40000	5000	8	10167	9106	2.1%		

Tableau 3.3-d : charge critique par les deux méthodes pour  $L/R=8$



(a)



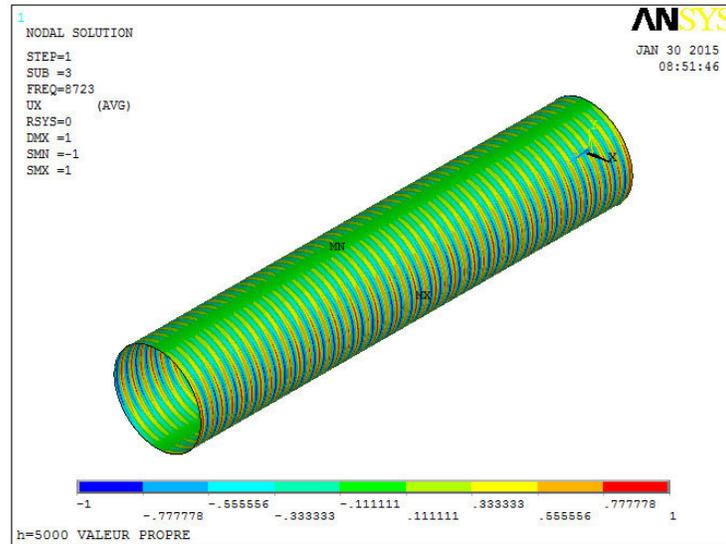
(b)

Figure 3.10 : La charge critique pour le cas ( $L/R= 8$ )  
 (a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire

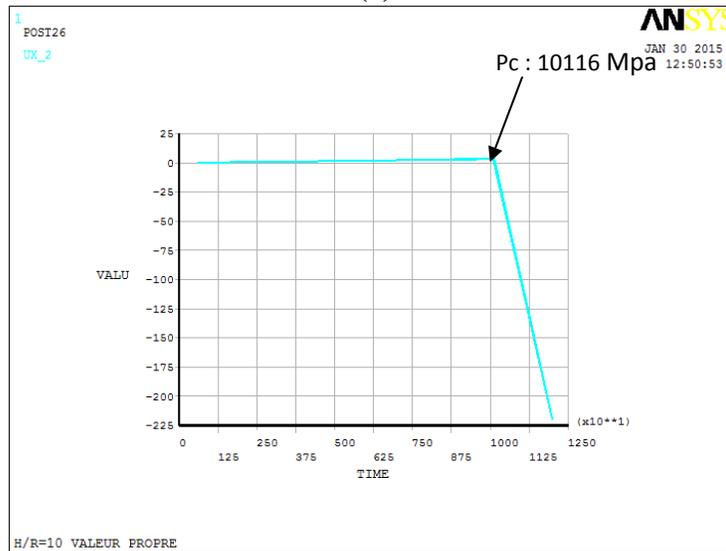
Cas de  $L=10R$  :

Mode	L	R	L/R	Pc Théorique	méthode valeurs propres		méthode Non linéaire	
					Pc	Erreur %	Pc	Erreur %
01	50000	5000	10	10167	8719	10.4%	10116	-0.5%
02	50000	5000	10	10167	8720	2.1%		

Tableau 3.3-e : charge critique par les deux méthodes pour  $L/R=10$



(a)



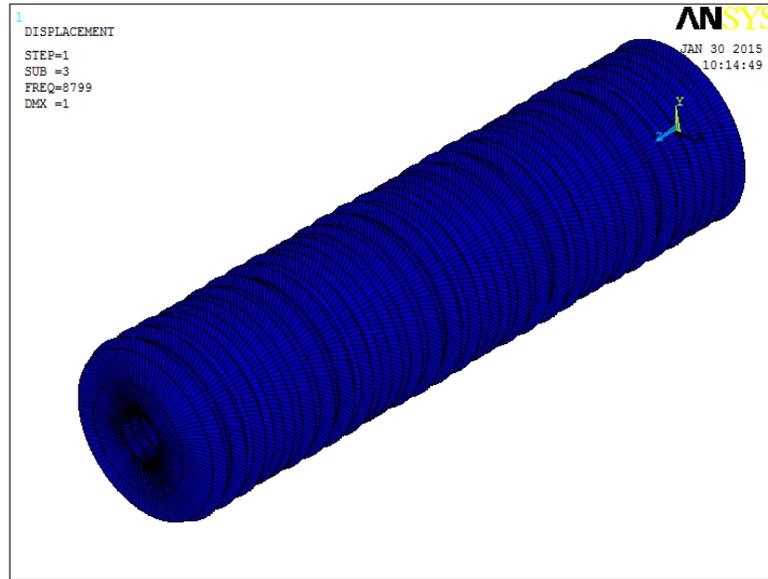
(b)

Figure 3.11 : La charge critique pour le cas ( $L/R=10$ )  
 (a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire

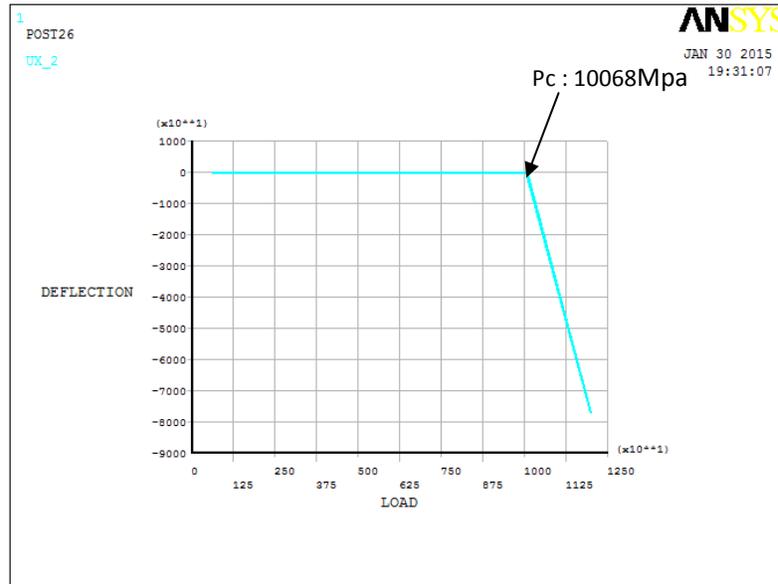
Cas de  $L=12R$  :

Mode	L	R	L/R	Pc Théorique	méthode valeurs propres		méthode Non linéaire	
					Pc	Erreur %	Pc	Erreur %
01	60000	5000	12	10167	8796	10.4%	10068	-0.9%
02	60000	5000	12	10167	8799	2.1%		

Tableau3.3-e : charge critique par les deux méthodes pour  $L/R=12$



(a)



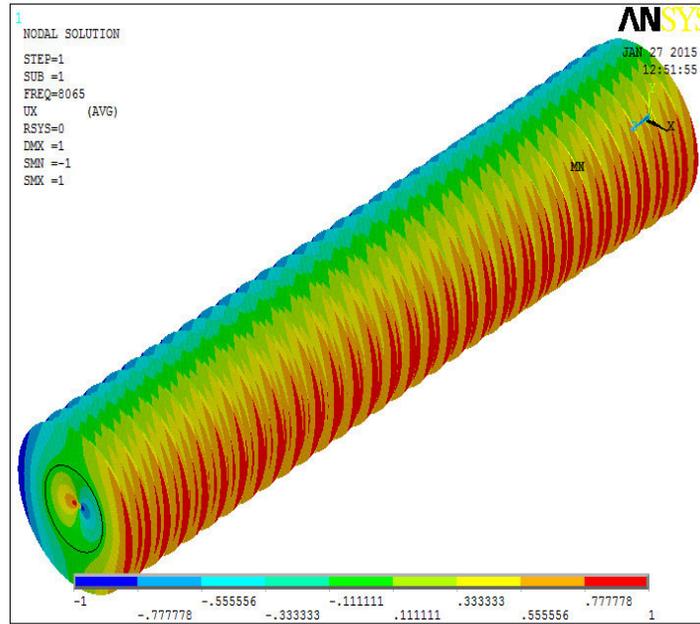
(b)

Figure 3.12 : La charge critique pour le cas ( $L/R= 12$ )  
 (a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire

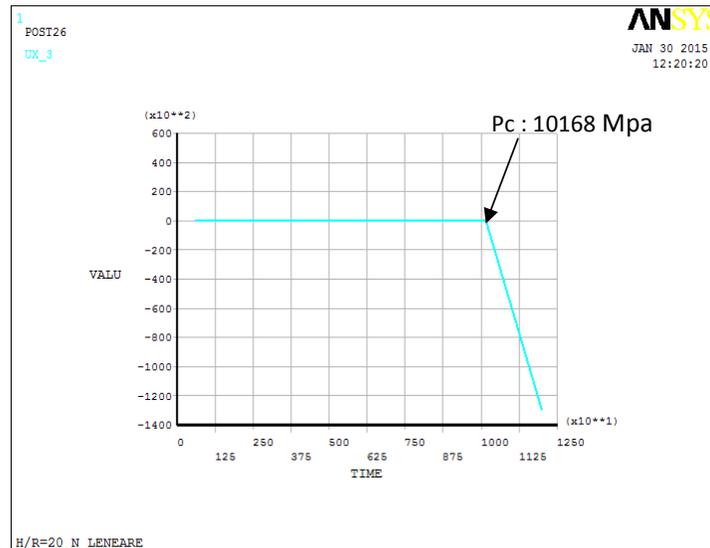
Cas de  $L=20R$  :

Mode	L	R	L/R	Pc Théorique	méthode valeurs propres		méthode Non linéaire	
					Pc	Erreur %	Pc	Erreur %
01	100000	5000	20	10167	8065	10.4%	10169	0.01%
02	100000	5000	20	10167	8064	10.4%		

Tableau3.3-f : charge critique par les deux méthodes pour  $L/R=20$



(a)



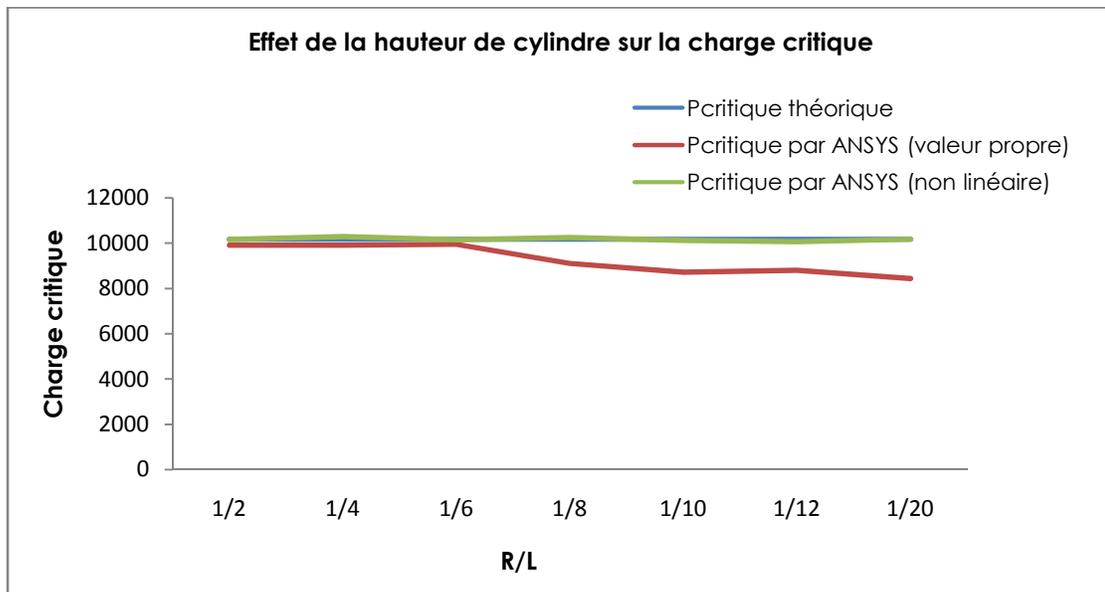
(b)

Figure 3.13 : La charge critique pour le cas ( $L/R= 20$ )  
 (a) méthode de valeur propre (b) méthode Non linéaire

Le tableau (3.3) et la figure (3.14) représentent la comparaison entre les différents résultats trouvés et présentés plus haut pour les différents cas du rapport L/R, afin de nous permettre de déterminer l'influence de celui-ci sur la charge critique

L (variable)	R	L/R	Pc Théorique	Méthode valeurs propres		Méthode non linéaire	
				Pc	Erreur %	Pc	Erreur %
10000	5000	2	10167	9858.2	3.0%	10154	-0.1%
20000		4	10167	9914.1	2.5%	10288	1.2%
30000		6	10167	9950	2.1%	10144	-0.2%
40000		8	10167	9106	10.4%	10244	0.8%
50000		10	10167	8720	14.2%	10116	-0.5%
60000		12	10167	8799	13.5%	10068	-1.0%
100000		20	10167	8445	16.9%	10169	0.01%

*Tableau3.3 : Evolution de la charge critique en fonction du rapport L/R par les deux méthodes (Valeur propre et Non linéaire)*



*Figure 3.14: Effet du rapport R/L sur la charge critique*

La simulation qui a été faite dans ce travail, sur la base des deux méthodes, nous a conduit à constater ce qui suit :

Suivant notre étude le rapport L/R n'a aucune influence sur la charge critique; D'après les graphes présentés à la figure (3.14), la méthode non linéaire nous donne des résultats plus précis que la méthode de valeur propre comparativement au résultat analytique dans les mêmes conditions.

3.4 Effet d'épaisseur de cylindre sur le point de la bifurcation :

Dans le but d'analyser l'effet du rapport  $t/R$  sur la charge critique des coques, on considère une coque cylindrique mince à base circulaire soumise à des efforts uniformes de compression axiale de rayon  $R$ , de longueur totale  $L$  et d'épaisseur  $t$  variable comme le montre le tableau (3.4), en gardant les mêmes caractéristiques du matériau :

Module d'Young  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$

Les premiers modes de flambement correspondants au différent cas pour le rapport  $t/R$  sont présentés ci-dessous :

Cas 01 :  $t/R=1/250$

t	R	t/R	Pc Numérique	Pc théorique	Ecart (%)
20	5000	1/250	9914	10167.82	2.6

Tableau3.4-a: charge critique pour  $t/R=1/250$

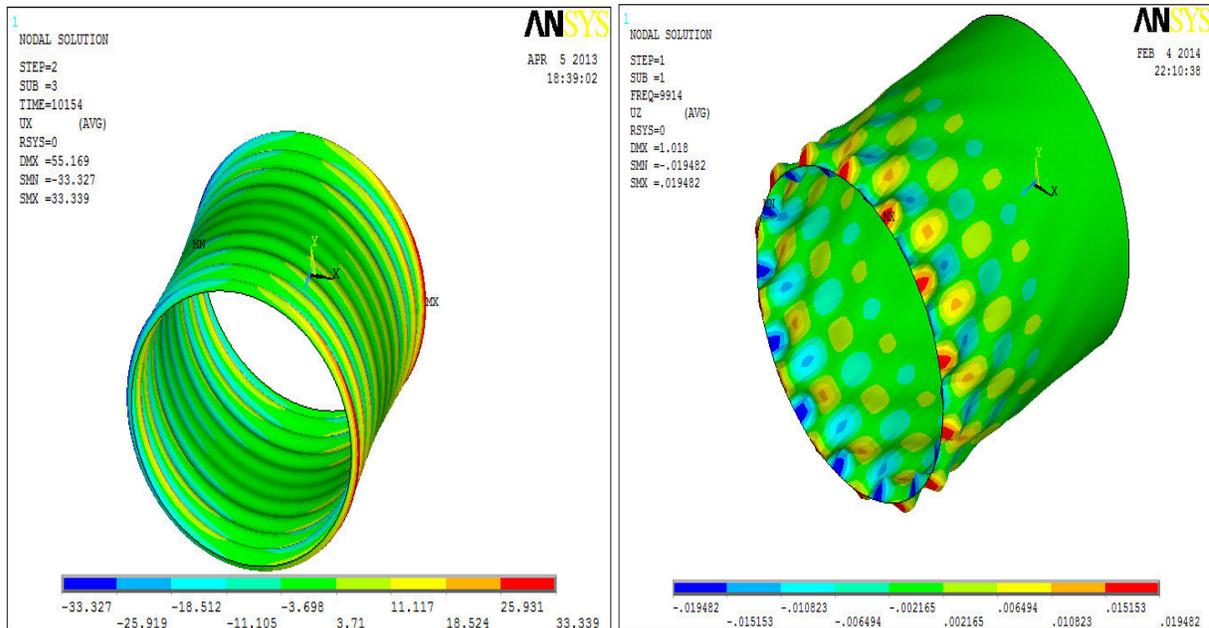


Figure 3.15 : Les premiers modes pour  $t/R=1/250$

Cas 02 :  $t/R=1/125$

t	R	t/R	Pc Numérique	Pc théorique	Ecart (%)
40	5000	1/125	40214	40671.28	1.1

Tableau3.4-b: charge critique pour  $t/R=1/125$

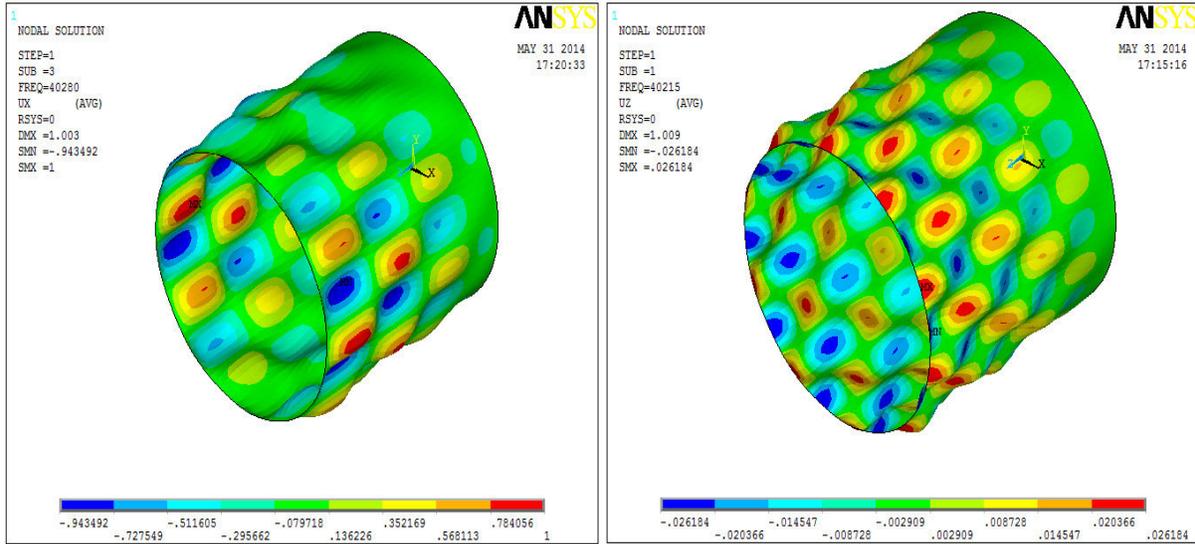


Figure 3.16 : Les premiers modes pour  $t/R=1/125$

Cas 03 :  $t/R=1/80$

t	R	t/R	Pc Numérique	Pc théorique	Ecart (%)
60	5000	1/80	89833	91510.38	1.9

Tableau3.4-c: charge critique pour  $t/R=1/80$

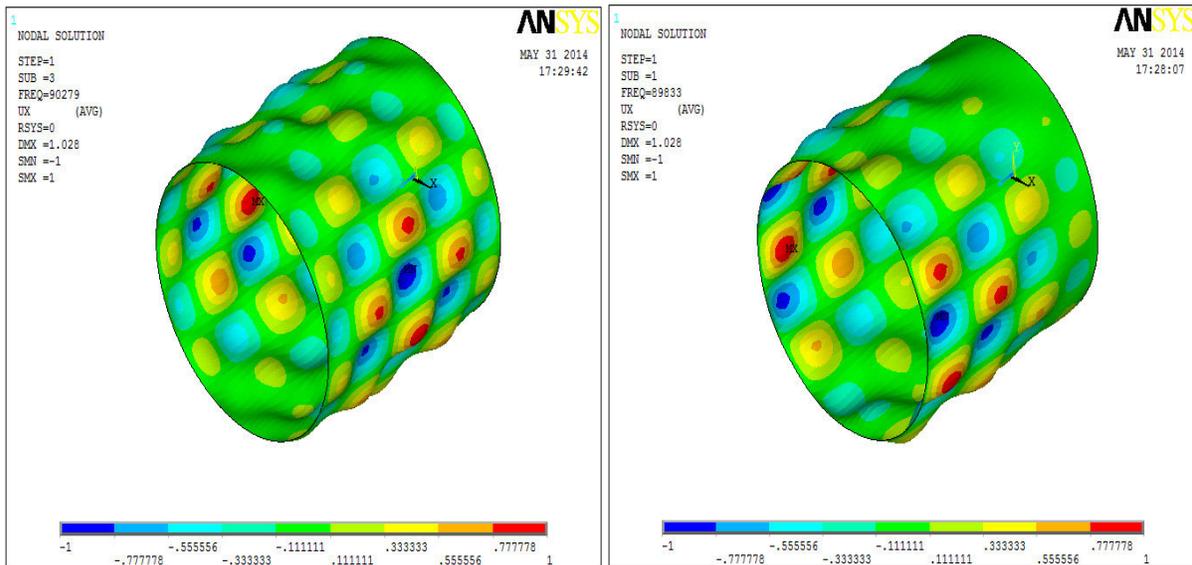


Figure 3.17 : Les premiers modes pour  $t/R=1/80$

Cas 04 :  $t/R=1/60$

t	R	t/R	Pc Numérique	Pc théorique	Ecart (%)
80	5000	1/60	158543	162685.1	2.6

Tableau3.4-d: charge critique pour  $t/R=1/60$

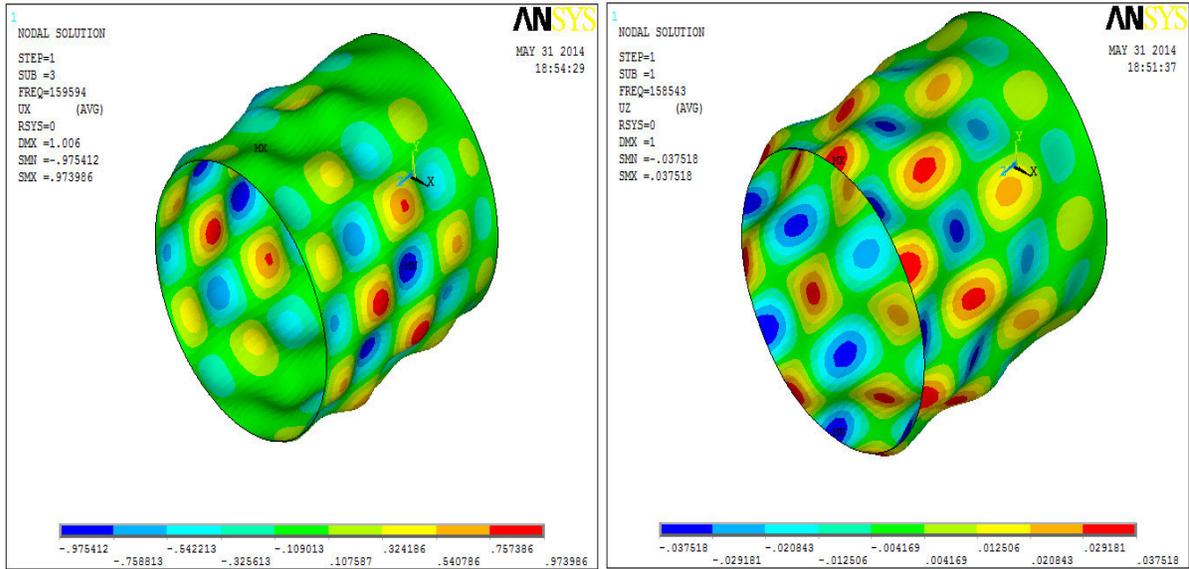


Figure 3.18 : Les premiers modes pour  $t/R=1/60$

Le tableau suivant représente le récapitulatif des résultats trouvés des différents cas pour le rapport  $t/R$

t	R	t/R	Pc Numérique	Pc théorique	Ecart (%)
20	5000	1/250	9914	10167.82	2.6
40	5000	1/125	40214	40671.28	1.1
60	5000	1/80	89833	91510.38	1.9
80	5000	1/60	158543	162685.1	2.6

Tableau 3.4 : évaluation de la charge critique en fonction du rapport  $t/R$

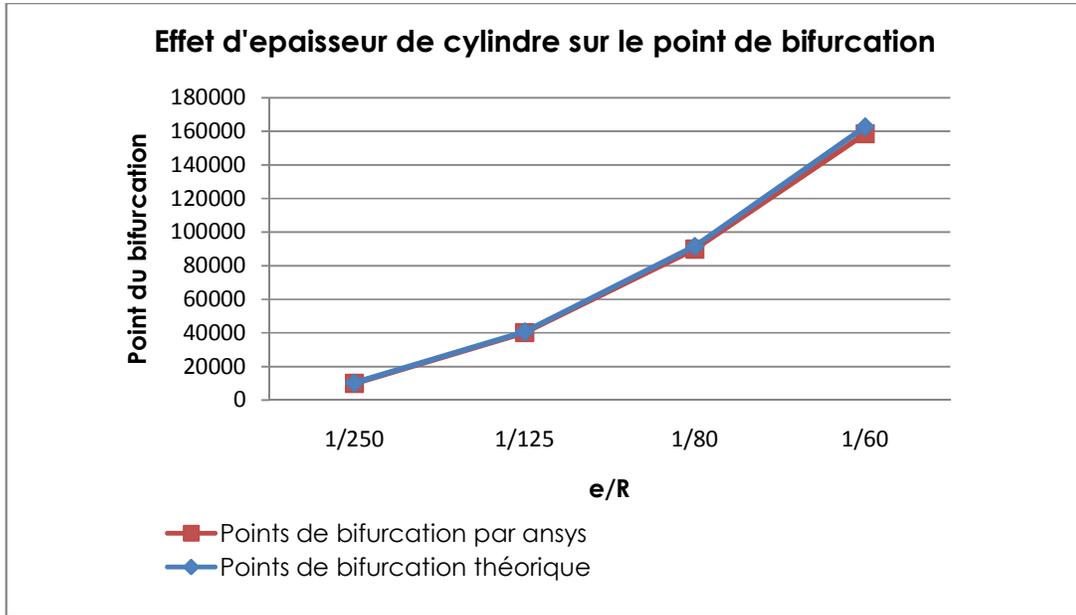


Figure 3.19 : Evaluation de la charge critique en fonction du rapport t/R

On remarque clairement que le rapport  $t/R$  a également une importance significative sur le flambage comme montré dans la figure (3.19). Il a une variation proportionnelle avec la valeur de la charge critique.

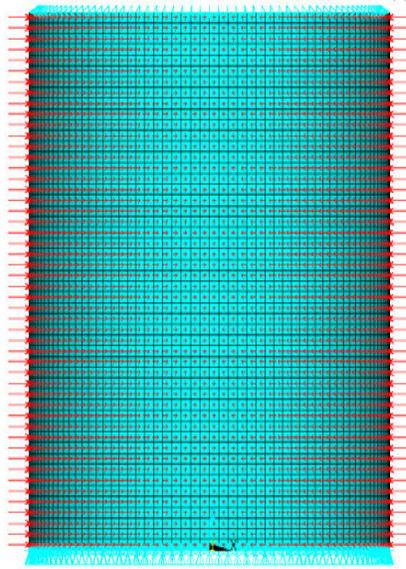
#### 4. STABILITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE MINCE SOUS COMPRESSION RADIALE

Il y a beaucoup de solutions analytiques différentes pour les cylindres à paroi mince sous pression externe, en fonction des caractéristiques du cylindre et des contraintes appliquées.

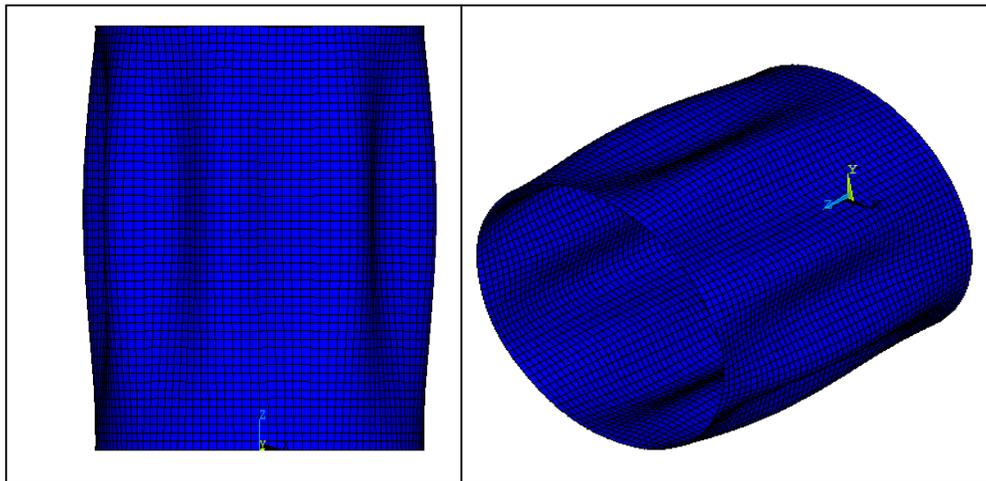
Glock a calculé une solution au problème de flambement des cylindres élastiques comme présenté dans le second chapitre.

Afin de déterminer la charge critique pour un cylindre à paroi mince sous pression radiale externe. Nous utilisons le modèle utilisé dans ANSYS et schématisé en Figure (3.12). Une coque cylindrique est maillée avec 100 éléments **SHELL 63** sur la circonférence et 200 sur la hauteur. La géométrie considérée est parfaite, nous gardons les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques qui ont été utilisés dans la première partie. Le rayon de la coque est de 5000 mm, et sa hauteur égale à 10000 mm et d'épaisseur 20 mm mais cette fois ci avec une pression radiale  $P = 1 \text{ N/mm}^2$ ;

Comme dans le cas axial, la structure est supportée en bas, délimitant les déplacements dans les trois directions. Dans ce cas, le bord supérieur de la coque est limité uniquement dans la direction radiale. La charge est appliquée dans la direction radiale. Comme ce que nous avons fait dans la phase initiale de cette étude la solution analytique sera comparée aux résultats calculés avec ANSYS comme indiqué dans le tableau (3.5).



*Figure 3.20 : Coque cylindrique sous compression radiale*



*Figure 3.21: Flambement de la coque cylindrique sous chargement uniforme radiale*

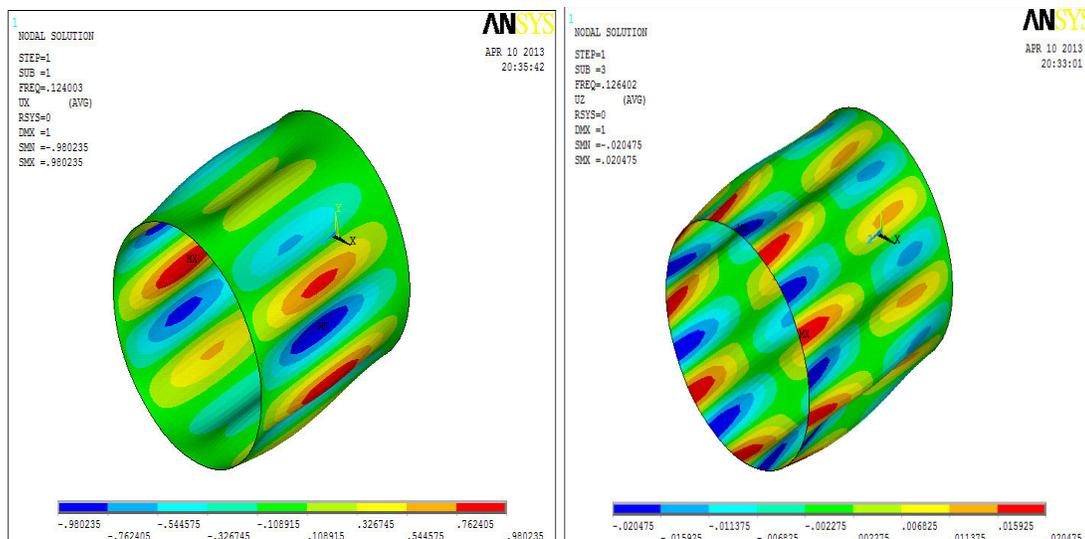


Figure 3.22 : Les premiers modes de flambement sous chargement uniforme radiale

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Erreur (%)
01	20 000	100	200	1	0,109	0,124	13%

Tableau 3.5: La charge critique sous chargement uniforme radiale

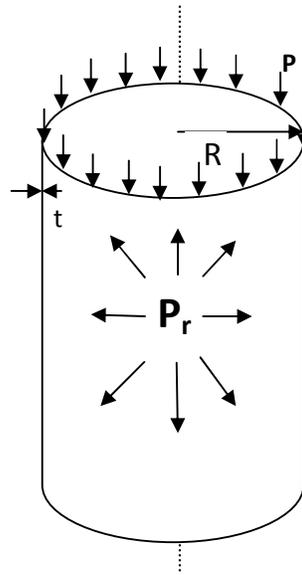
La stabilité des coques cylindriques circulaires sous la pression latérale uniforme a été largement étudiée. Le comportement des coques cylindriques sous pression externe est très sensible aux flambements radiaux comparativement au résultat trouvé sous chargement axial comme indiqué dans la première partie de ce chapitre.

Lorsque les coques minces sont soumises à une pression extérieure, l'effondrement est initié dès les premières valeurs de pression.

## 5. STABILITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE MINCE PRESSURISEE SOUS COMPRESSION AXIALE

Dans cette partie nous allons étudier l'influence de la mise en pression sur la contrainte de la bifurcation, les essais concernent donc une coque pressurisée. Le déroulement est similaire aux premiers essais mais maintenant, réalisé avec une pression comme présenté dans la figure (3.23).

La première coque est d'abord testée à pression nulle, puis onze essais sont enchaînés avec une pression interne croissante progressivement jusqu'à 100 Mpa.



*Figure 3.23 : Coque cylindrique pressurisée sous compression axial*

Les figures suivantes représentent le mode de flambage et l'évolution de charge critique avec la mise en pression pour les différents cas.

Cas de P=1 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	1	10167	10244	+0.75%

Tableau 3.5-a: charge critique pour coque cylindrique pressurisée  $p=1$  Mpa  
Sous chargement axial

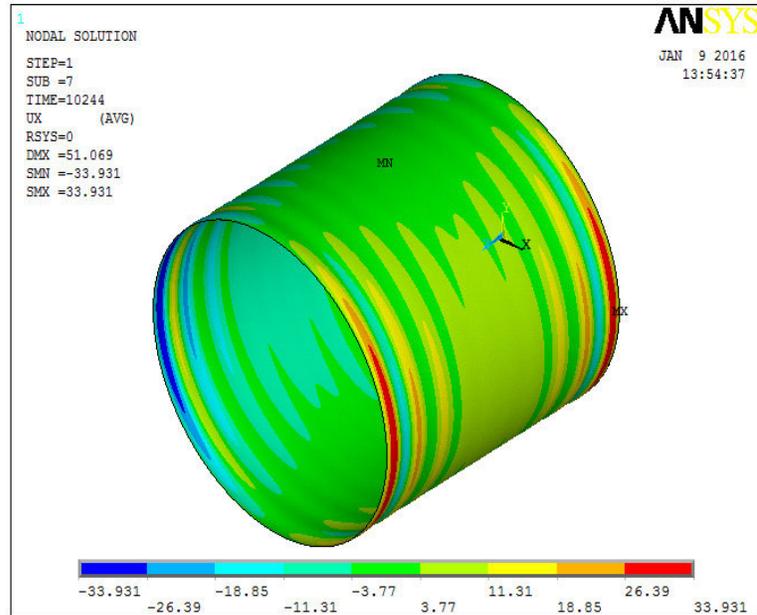


Figure 3.24 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 1$  Mpa) sous chargement axial

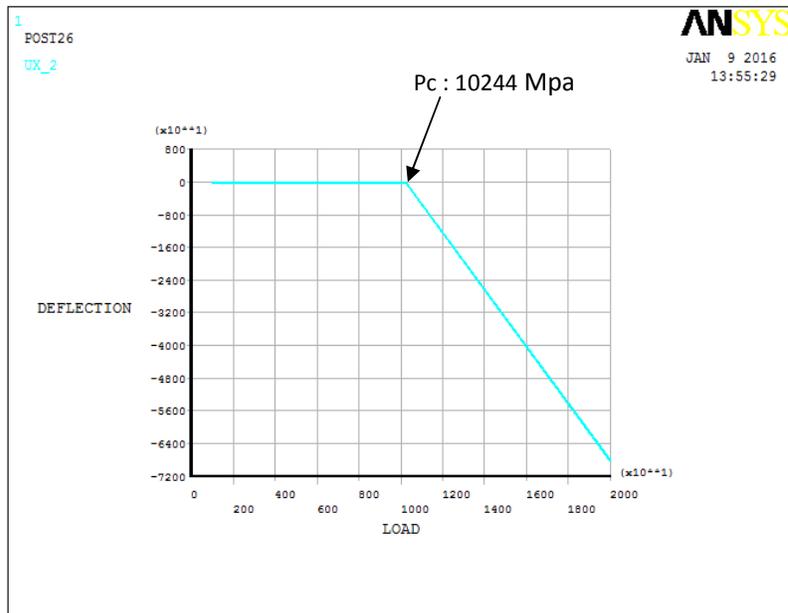


Figure 3.25 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 1$  Mpa) sous chargement axial

Cas de P=2 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	2	10167	10356	+1.86%

Tableau3.5-b: charge critique pour coque cylindrique pressurisée  $p=2\text{Mpa}$  Sous chargement axial

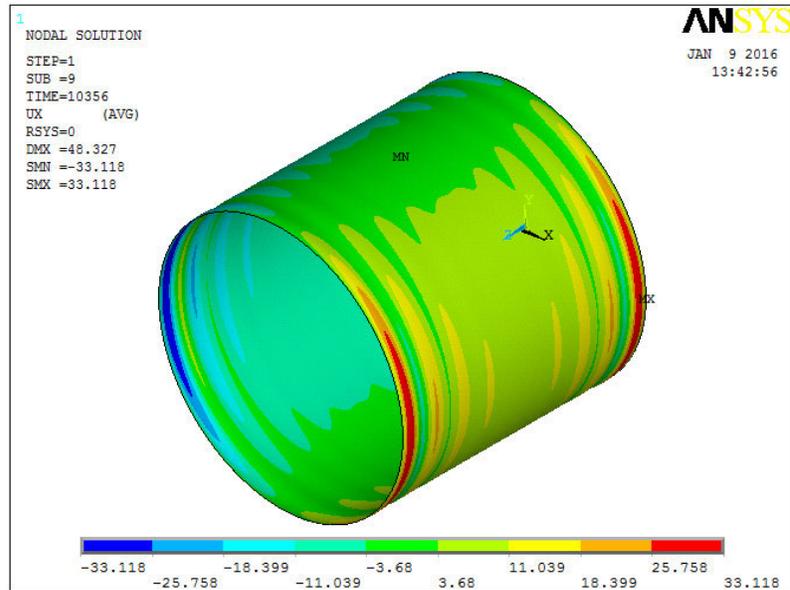


Figure 3.26 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 2\text{ Mpa}$ ) sous chargement axial

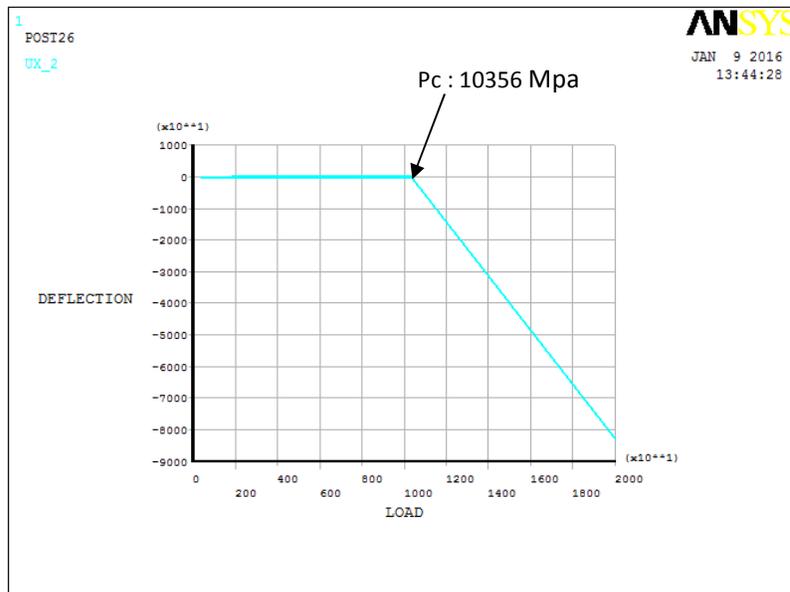


Figure 3.27: Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 2\text{ Mpa}$ ) sous chargement axial

Cas de P=3 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	3	10167	10534	+3,6 %

Tableau3.5-c: charge critique pour coque cylindrique pressurisée  $p=3\text{Mpa}$  Sous chargement axial

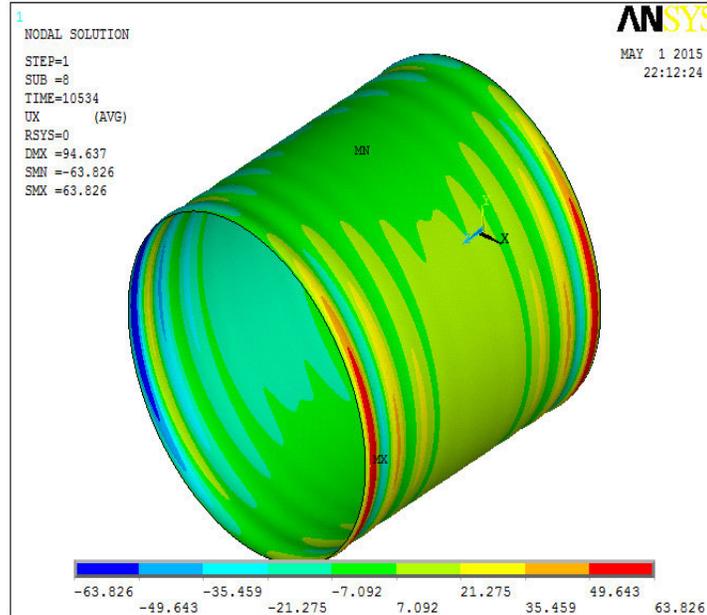


Figure 3.28 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 3\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

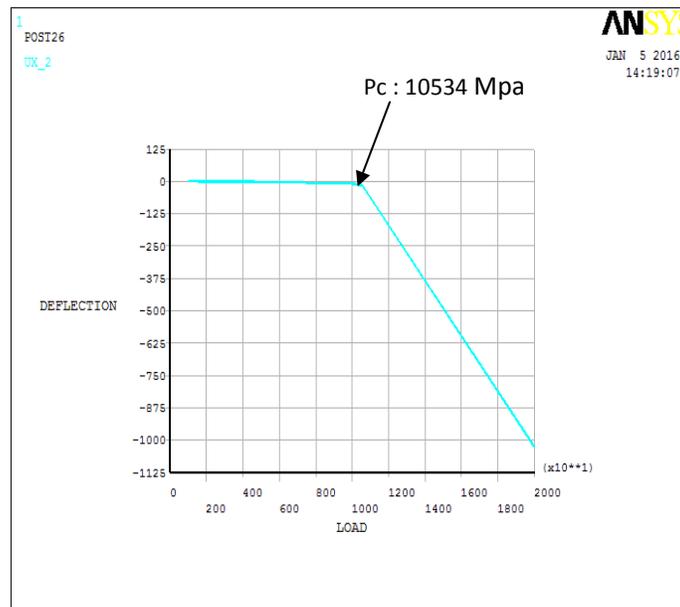


Figure 3.29: Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 3\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

Cas de P=4 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	4	10167	10492	+3.20%

Tableau3.5-d: charge critique pour coque cylindrique pressurisée p=4Mpa Sous chargement axial

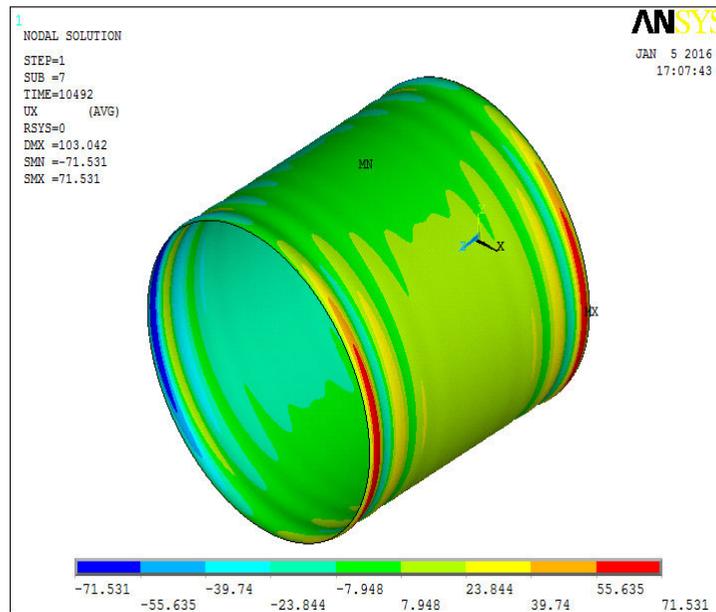


Figure 3.30 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée (Pr =4 Mpa) sous chargement axial

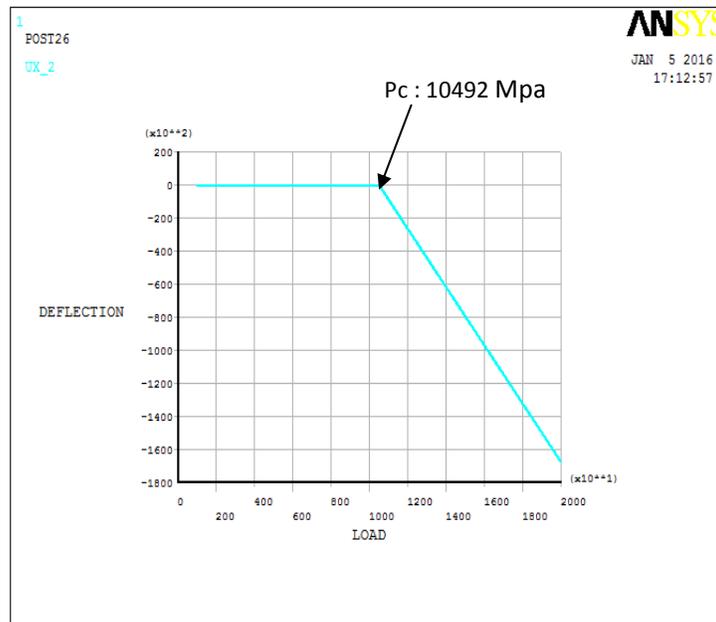


Figure 3.31 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée (Pr =4Mpa) sous chargement axial

Cas de P=5 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	5	10167	10393	+2.22%

Tableau 3.5-e: charge critique pour coque cylindrique pressurisée  $p=5\text{Mpa}$  sous chargement axial

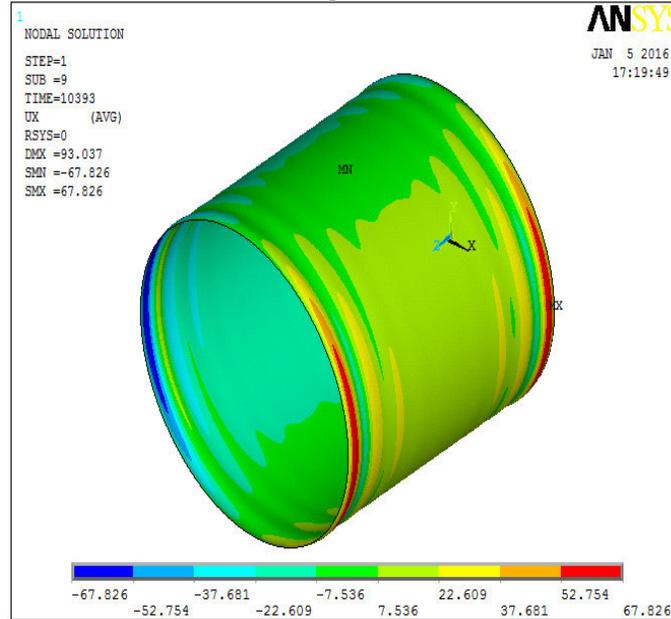


Figure 3.32 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 5\text{ Mpa}$ ) sous chargement axial

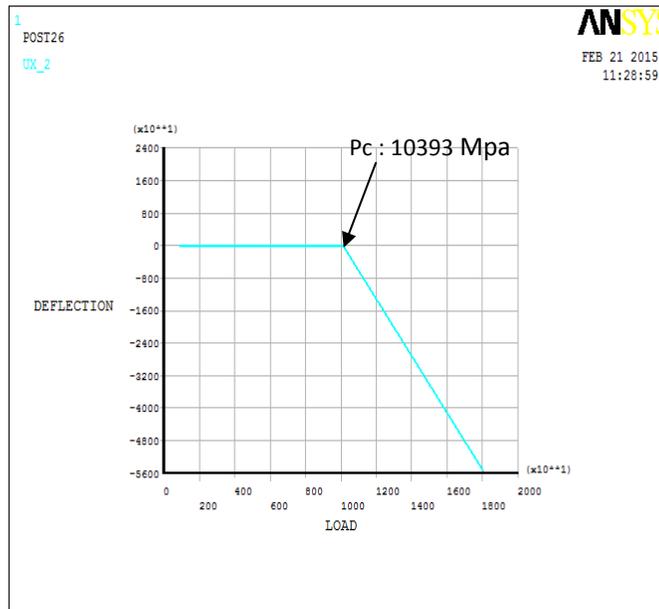


Figure 3.33 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 5\text{ Mpa}$ ) sous chargement axial

Cas de P=6 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	6	10167	10254	+0.86%

Tableau3.5-f: charge critique pour coque cylindrique pressurisée p=6Mpa Sous chargement axial

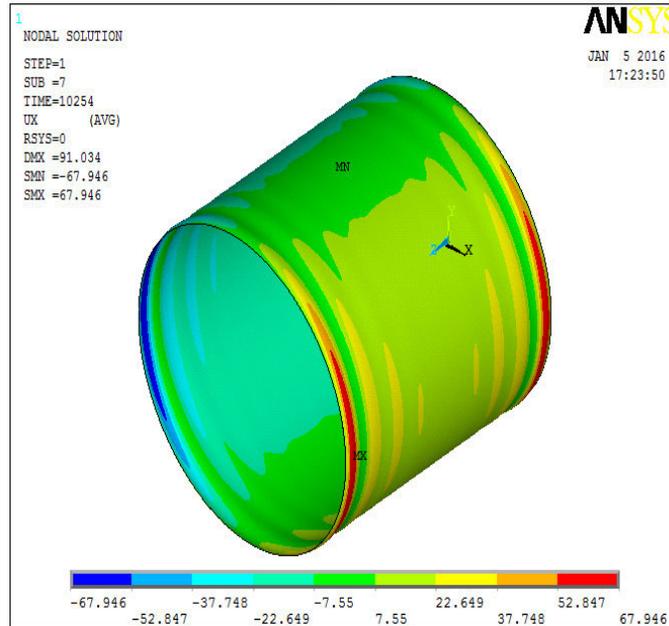


Figure 3.34 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée (Pr =6Mpa) sous chargement axial

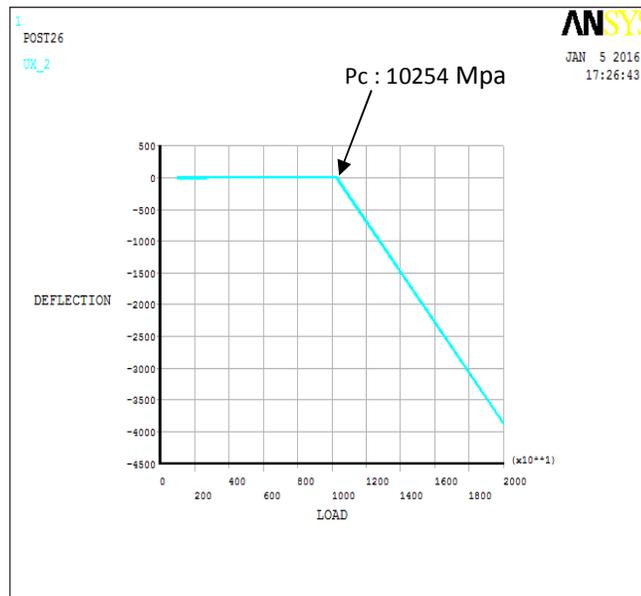


Figure 3.35 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée (Pr =6Mpa) sous chargement axial

Cas de P=7 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	7	10167	10150	-0.16%

Tableau 3.5-g: charge critique pour coque cylindrique pressurisée  $p=7\text{Mpa}$  Sous chargement axial

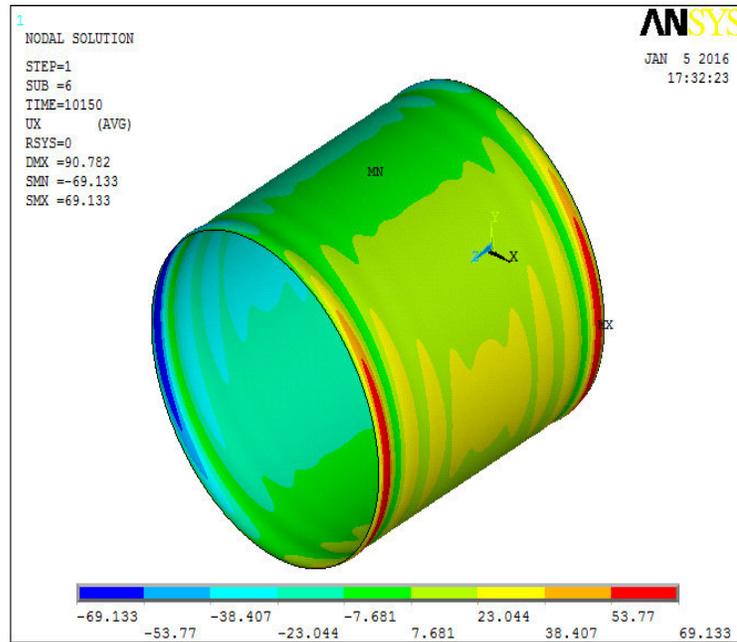


Figure 3.36 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 7\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

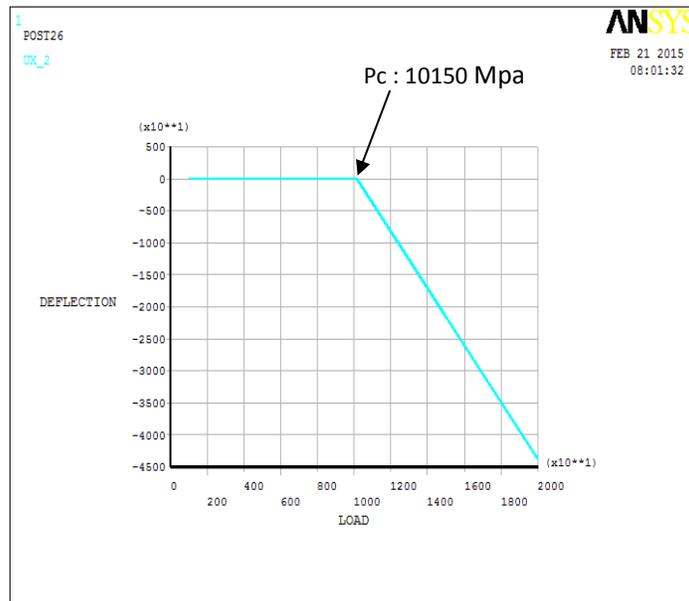


Figure 3.37 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 7\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

Cas de P=8 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	8	10167	10192	+0.24%

Tableau 3.5-h: charge critique pour coque cylindrique pressurisée  $p=8\text{Mpa}$  sous chargement axial

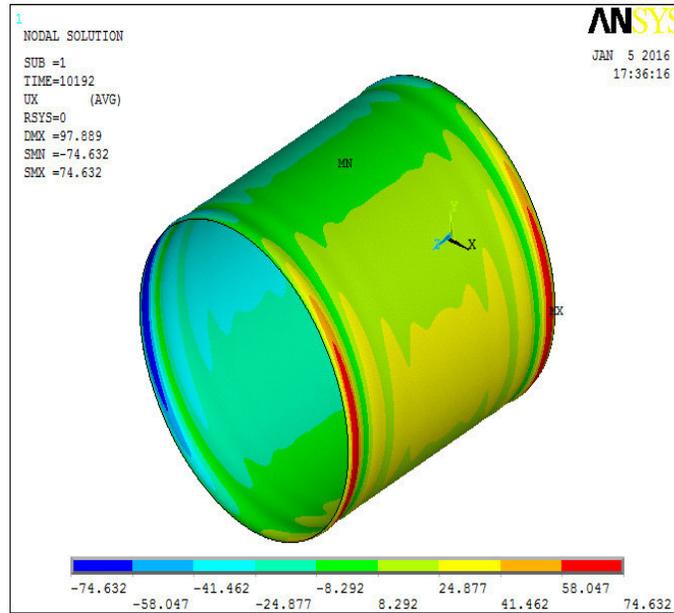


Figure 3.38 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 8\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

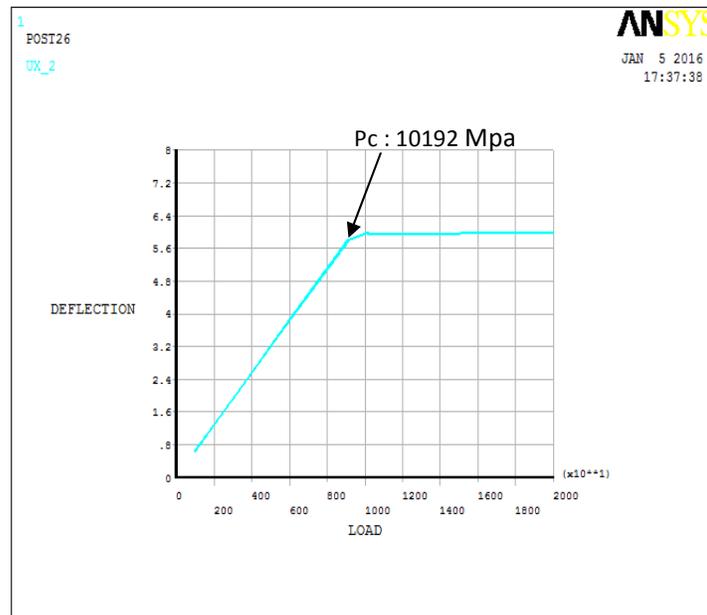


Figure 3.39 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 8\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

Cas de P=10 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	10	10167	10232	+0.64%

Tableau 3.5-i: charge critique pour coque cylindrique pressurisée  $p=10\text{Mpa}$  sous chargement axial

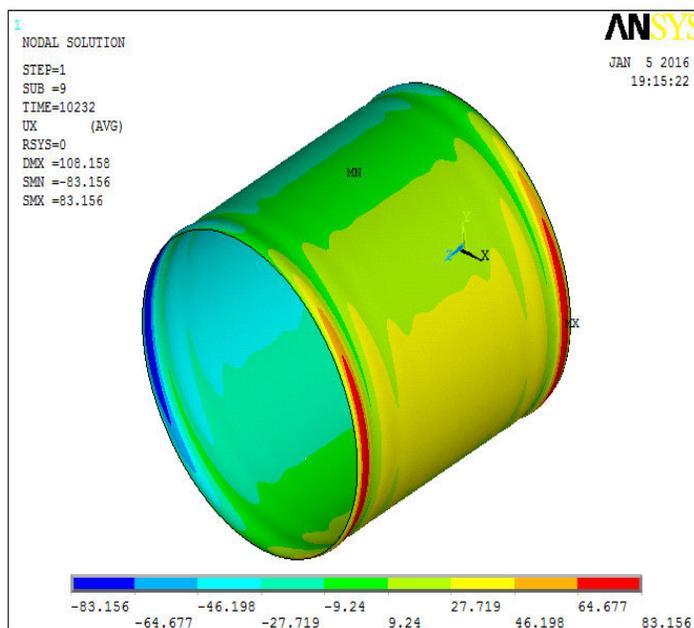


Figure 3.40 : Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 10\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

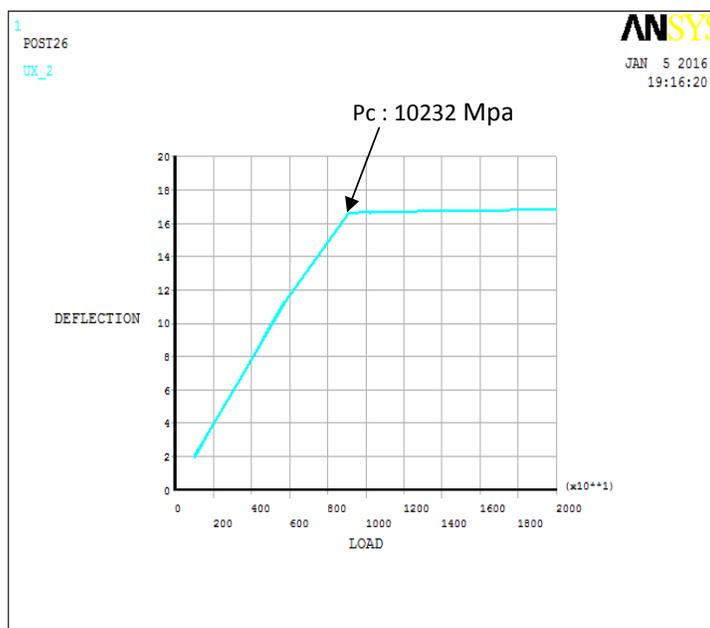


Figure 3.41 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 10\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

Cas de P=20 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	20	10167	11160	+9.77%

Tableau 3.5-j: charge critique pour coque cylindrique pressurisée  $p=20\text{Mpa}$  Sous chargement axial

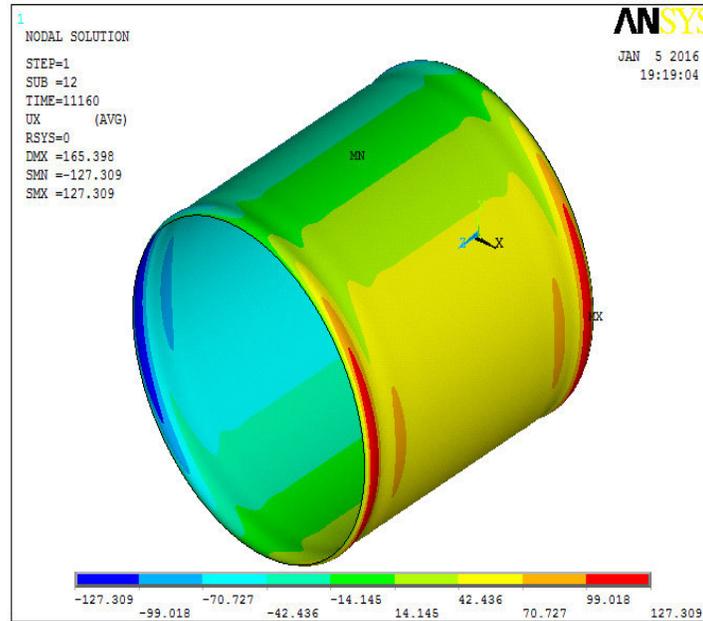


Figure 3.42: Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 20\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

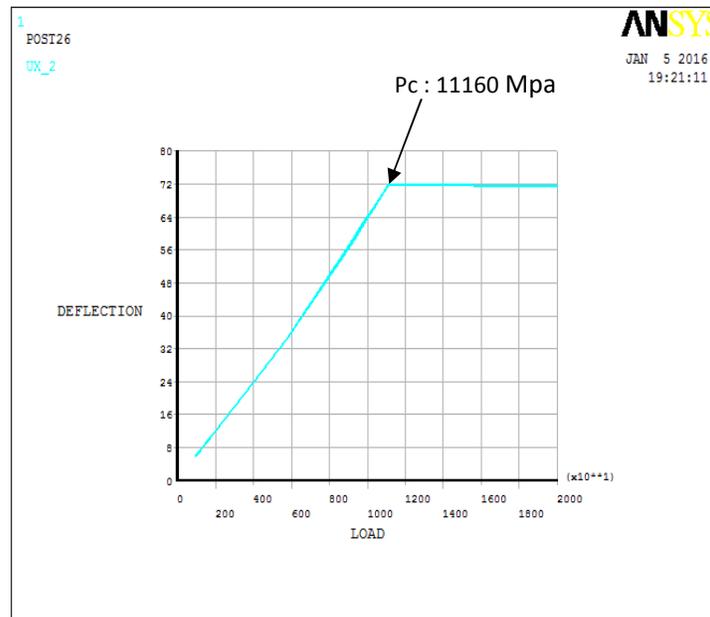


Figure 3.43 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée ( $P_r = 20\text{Mpa}$ ) sous chargement axial

Cas de P=100 Mpa

Mode	Nbr éléments	Direction circonférentielle	Direction axiale	Direction radiale	Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	Ecart (%)
01	20 000	100	200	1	100	10167	19043	+87.3%

Tableau 3.5-k: charge critique pour coque cylindrique pressurisée p=100Mpa Sous chargement axial

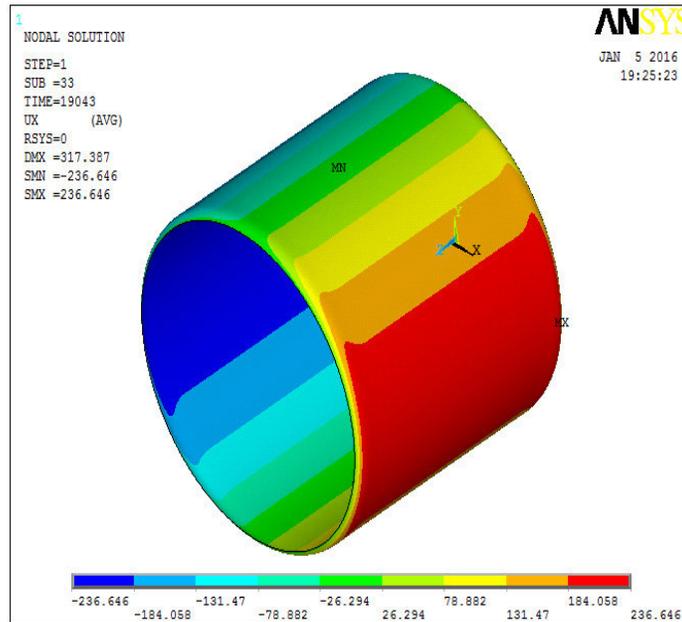


Figure 3.44: Mode de flambage de coque cylindrique pressurisée (Pr =100Mpa) sous chargement axial

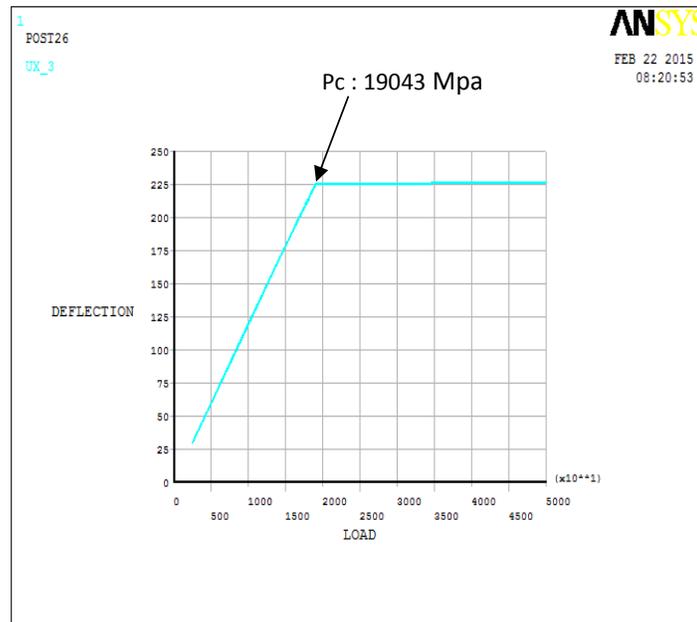


Figure 3.45 : Courbe charge-déplacement pour coque cylindrique pressurisée (Pr =100Mpa) sous chargement axial

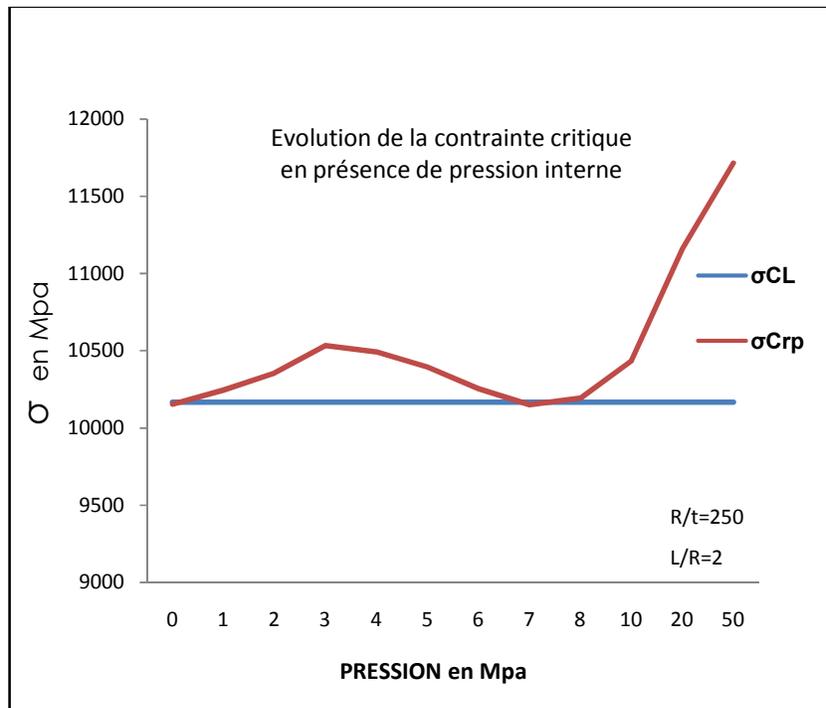


Figure 3.46 : Evolution de la contrainte critique pour une coque cylindrique pressurisée sous compression axiale

A partir de notre étude, différents types de comportements sont observés :

Les premières valeurs de pression  $\leq 7$ MPa présentent des caractéristiques identiques: comportement linéaire suivi d'une bifurcation d'équilibre entraînant l'effondrement du cylindre figures (3.25), (3.27), (3.29),(3.31),(3.33),(3.35) et (3.37).

La mise en pression augmente la charge critique dès les basses pressions, le flambage par bifurcation d'équilibre est caractérisé par un comportement pré-critique parfaitement linéaire et fortement instable jusqu'à atteindre un seuil vers  $P=3$ MPa (Figure 3.46).

Lorsque la pression dépasse le seuil, la coque va avoir tendance à se déformer radialement, comme indiqué sur les Figures (3.30),(3.32),(3.34).Les contraintes de flexion qui apparaissent près des conditions aux limites, où les déplacements radiaux sont empêchés, créant un soufflet ou « patte d'éléphant » [ROT06]

(figure 3.47), vont perturber l'état d'équilibre qui précède le flambage, l'instabilité est alors de type point limite.

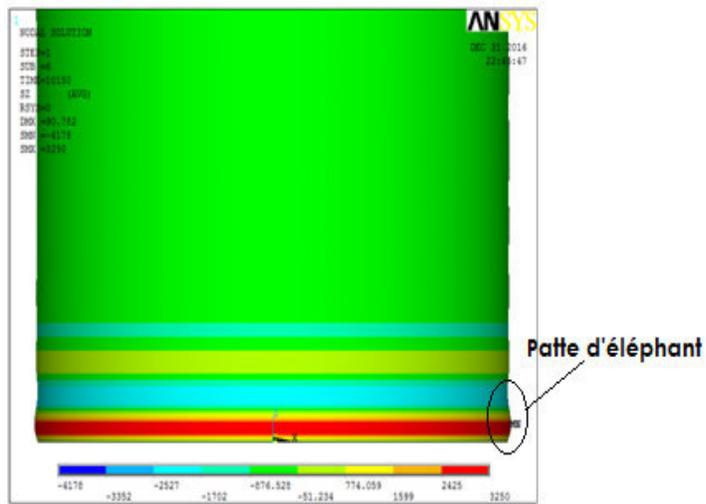


Figure 3.47 : Contrainte de flexion pour coque cylindrique sous compression axiale (avec pression = 7 Mpa)

Pour des pressions plus élevées ( $P \geq 8\text{MPa}$ ), la coque est gonflée comme présentée dans la figure (3.44) et le comportement post-critique instable est inhibé (figure 3.39), (figure 3.41), (figure 3.43) et (figure 3.45) ce qui nous conduit à conclure que le « gonflement » de la coque va donc améliorer la capacité portante de cette structure (figure 3.48).

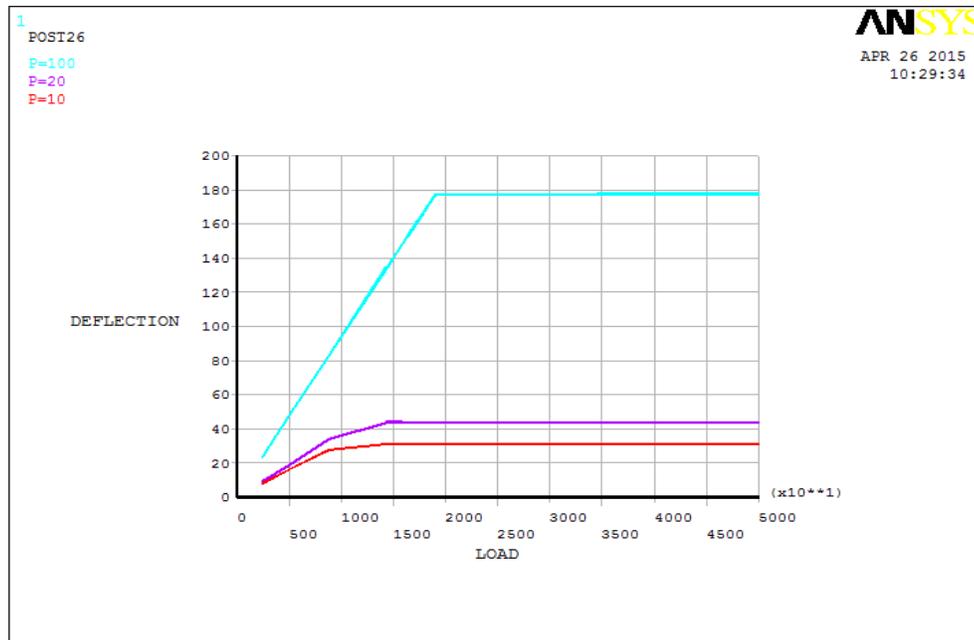


Figure 3.48 : Courbes charge-déplacement pour les pressions 10,20 et 100 Mpa

## 6. ETUDE DE L'EFFET DES DEFAUTS GEOMETRIQUES LOCALISES

Le flambement contribue en grande partie à la ruine des structures minces. Ainsi, quelque soit le procédé de fabrication de ce type de structures, la géométrie finale n'est jamais parfaite, d'où l'influence des imperfections initiales. Des défauts de forme dits défauts géométriques perturbent la forme idéale visée. La maîtrise des procédés et leur optimisation permettent certes aujourd'hui de diminuer les imperfections, généralement leur amplitude, mais si la géométrie semble être parfaite à l'œil nu, des mesures précises décèlent toujours des défauts de forme dont l'échelle est en général celle de l'épaisseur de la coque. Actuellement l'optimisation des coques cylindriques minces représentent un centre d'intérêt important au niveau des travaux de recherche. L'objectif est de déterminer principalement pour ce type de structures les paramètres qui ont une influence significative sur le comportement en situation de flambement. En particulier, on cherche à intégrer d'une manière plus rationnelle l'effet des imperfections géométriques.

Ainsi, on se focalise dans ce travail sur l'effet de défauts axisymétriques localisés. Pour cela, deux formes de défauts sont choisies: un défaut triangulaire rentrant et un défaut parabolique. Ils sont considérés dans un premier temps comme « défaut isolé », afin d'analyser leur effet sur la charge critique de flambement et d'identifier le domaine de variation des facteurs à considérer. Ensuite, on considère le couplage entre plusieurs défauts de ce type et l'on considère l'influence des paramètres sur la charge critique de flambage. Le caractère aléatoire des défauts initiaux est souvent à l'origine des fortes dispersions obtenues au niveau expérimental sur les charges de flambement des coques cylindriques minces et rien ne permet de contrôler à priori leurs caractéristiques.

### 6.1 Type de défaut axisymétrique

#### 6.1.1 Défaut parabolique rentrant :

Khamlichi et al. [KHA04] ont introduit un défaut axisymétrique localisé de forme parabolique (figure 3.49), situé à mi hauteur de la coque. Ce défaut a été traité analytiquement en utilisant le système simplifié des équations de Donnell perturbés

par la présence de ce défaut telles qu'elles sont présentées dans [ARB95]. Ce défaut est considéré dans la présente étude, mais la modélisation est effectuée par éléments finis.

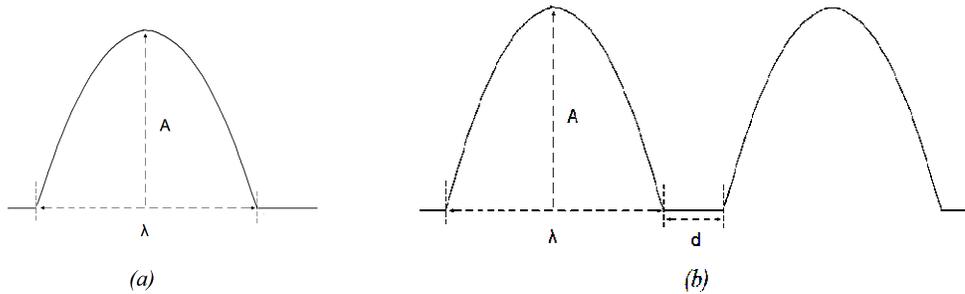


Figure 3.49 : Schémas d'un défaut parabolique isolé (a) et de deux défauts en interaction (b)

**6.1.2 Défaut triangulaire rentrant :**

Le défaut de type triangle rentrant, proposé par Limam [LIM04], a le double avantage d'être très facilement modélisé et parfaitement représentatif des défauts de type « casse de soudure » qui apparaissent à la jonction de deux cylindres minces. Il permet de rendre compte des caractéristiques essentielles des défauts à savoir la longueur d'onde axiale  $\lambda$ , et l'amplitude A. La figure présente la géométrie d'un défaut isolé et de deux défauts en interaction

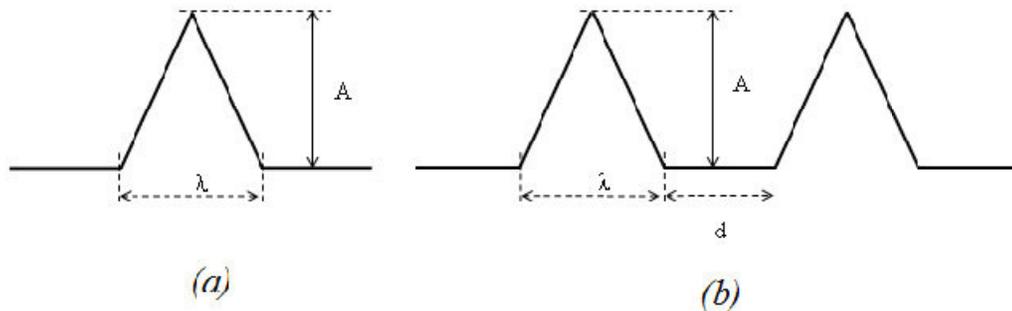


Figure 3.50 : Schémas d'un défaut triangulaire isolé

Dans le but d'analyser l'effet des imperfections sur la charge critique de flambage, on considère une coque cylindrique mince soumise à des efforts uniformes de compression axiale. La coque est de rayon  $R=5000\text{mm}$ , de longueur  $L=2R$  et

d'épaisseur  $t = 20$  mm afin que le rapport  $R/t = 250$  nous place dans le cas des coques minces et donc très sensibles aux défauts de forme.

Les caractéristiques mécaniques du matériau supposé parfaitement élastique sont les suivantes: Module d'Young  $E = 210\,000$  MPa , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$

Nous introduisons un défaut axisymétrique localisé de forme parabolique de différentes amplitudes  $A : 0.5, 1, 1.5$  et  $2$  fois l'épaisseur de la coque et sa longueur d'onde  $\lambda$  avec  $\lambda = 2\eta = 1.72 \cdot \alpha \cdot \sqrt{Rt}$  avec  $\alpha = 1$ , le défaut sera localisé dans la partie centrale de la génératrice du cylindre afin d'éviter l'interaction avec les conditions aux limites.

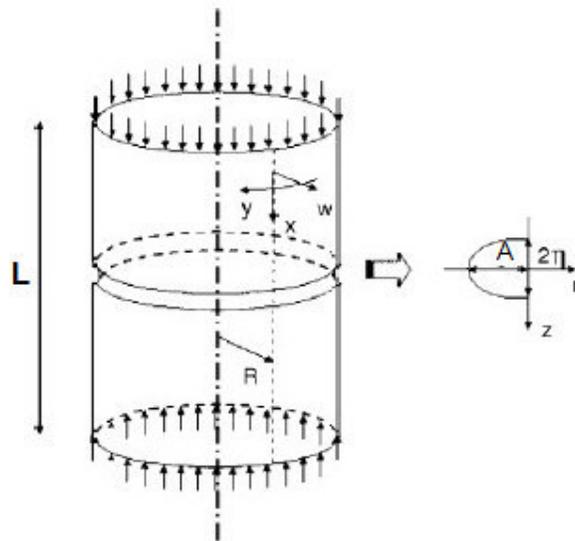


Figure 3.51 : Schémas d'un défaut parabolique isolé

Les résultats des essais sur des coques présentant l'évolution des contraintes critique en fonction de différentes amplitudes de défaut sont présentés ci-dessous :

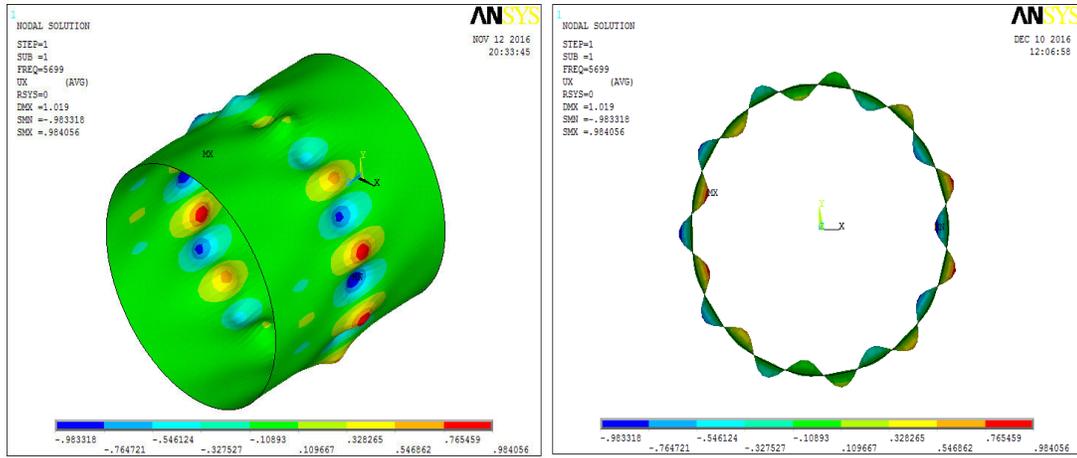


Figure 3.52 : Mode de flambage de coque cylindrique avec défaut  $A=0.5t$

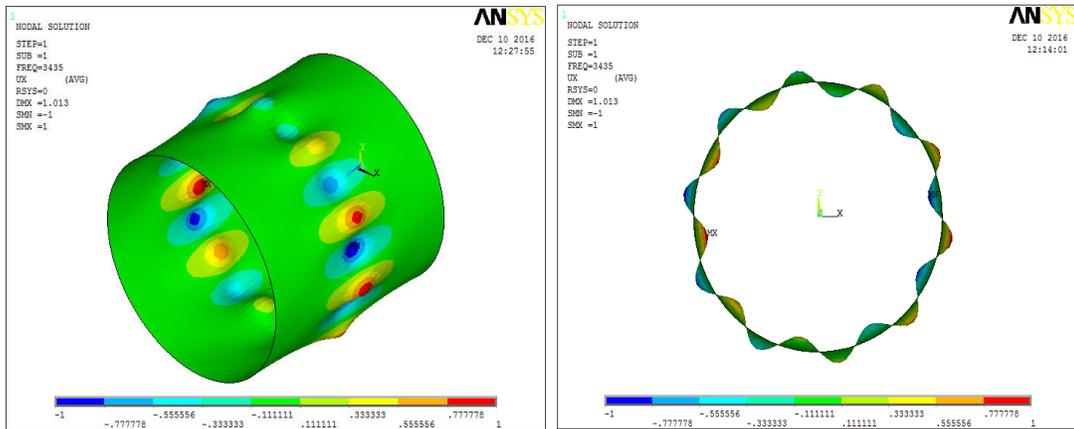


Figure 3.53 : Mode de flambage de coque cylindrique avec défaut  $A=t$

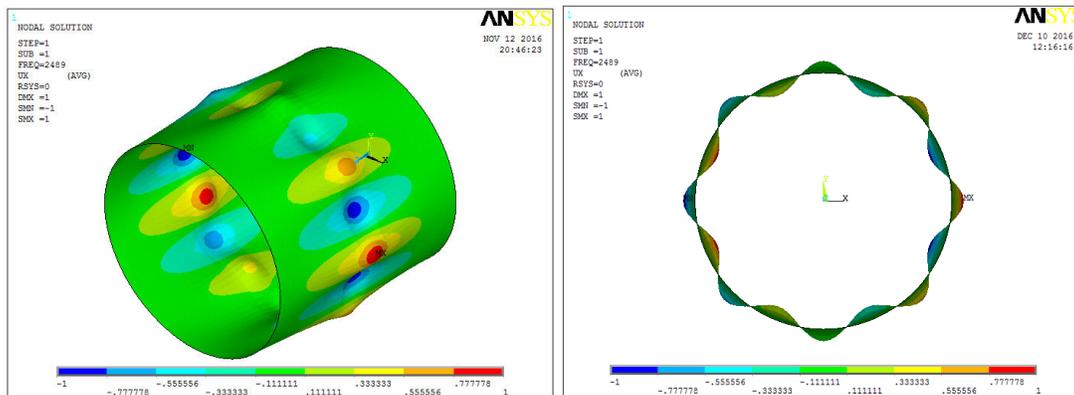


Figure 3.54 : Mode de flambage de coque cylindrique avec défaut  $A=1.5t$

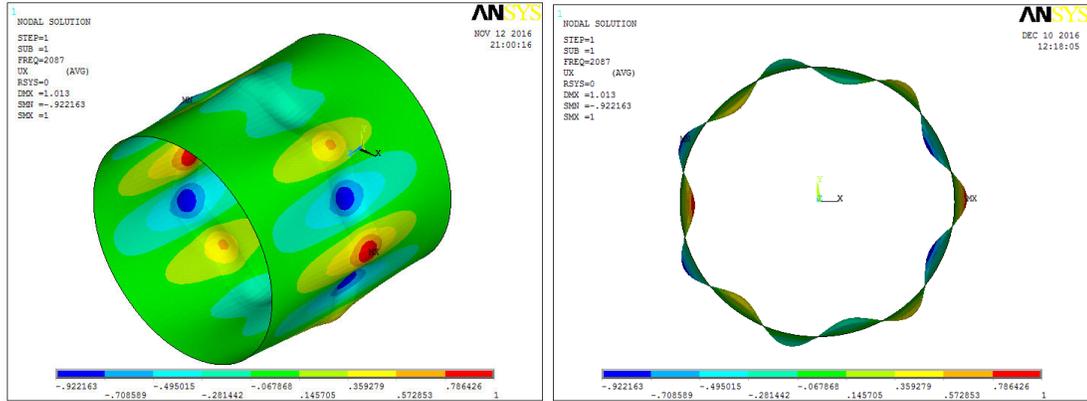


Figure 3.55 : Mode de flambage de coque cylindrique avec défaut  $A = 2t$

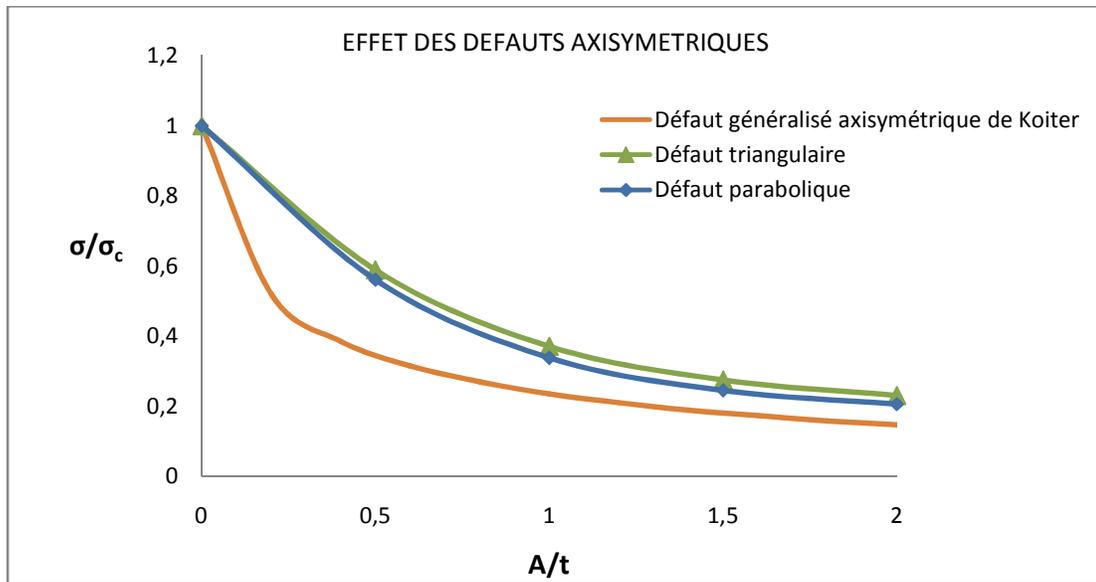


Figure 3.56 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude de défaut

On remarque en particulier que l'évolution de la charge critique en fonction de l'amplitude réduite, comme indiqué dans la figure (3.56), traduit l'allure associée à la courbe de Koiter (voir second chapitre) pour le cas d'un défaut théorique réparti sur toute la longueur de la coque.

Elle nous indique que même de petits défauts vont diminuer la charge critique. Ainsi, pour une imperfection dont l'amplitude n'est qu'une demi-épaisseur de la coque, la charge critique est réduite à 56% par rapport au cas parfait.

Le comportement de la coque est fortement lié au rapport  $A/t$ . donc la sensibilité de la coque au flambement est ainsi étudiée en fonction de ce rapport. D'une manière

générale on note une perte considérable de rigidité de la structure due aux défauts localisés en comparaison avec la formule de la charge classique de flambement des coques en compression.

### **6.2 Détermination du défaut critique :**

Les courbes et les tableaux ci-dessous présentent la variation de la charge critique en fonction du paramètre  $A/t$  qui traduit l'effet du défaut et la longueur d'onde axiale de ce défaut qui est définie par  $\lambda = 1.72. \alpha. \sqrt{Rt}$ , avec  $\alpha$  un paramètre de contrôle qui permet de faire varier la longueur d'onde et d'étudier simplement son influence.

6.3.1 Défaut parabolique rentrant :

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha=1$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cl}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cl}$
0	544	10154,00	10 167	0,998
0.5	544	5 654,70	10 167	0,556
1	544	4 043,00	10 167	0,398
1.5	544	3 533,50	10 167	0,348
2	544	3 385,30	10 167	0,333
2.5	544	3 373,60	10 167	0,332
3	544	3 636,80	10 167	0,358

Tableau 3.6 : contraintes critiques en fonction de l'amplitude réduite

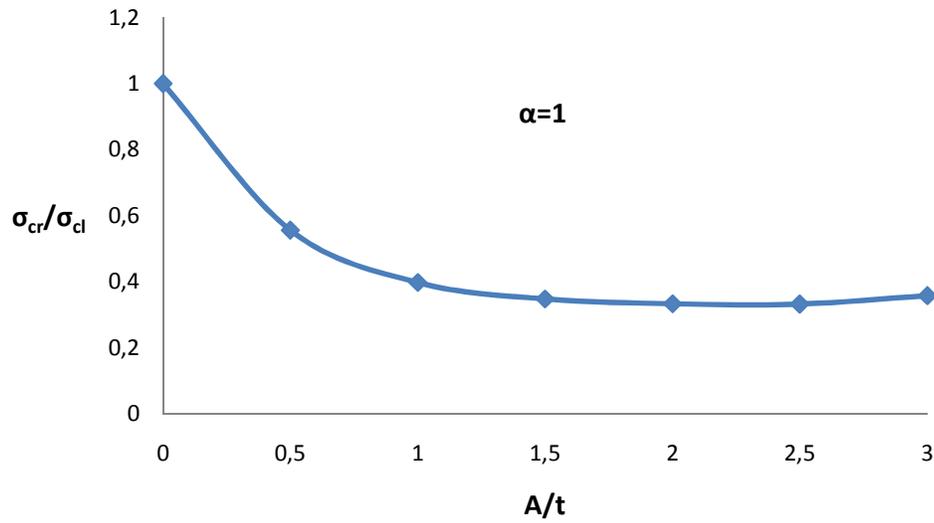
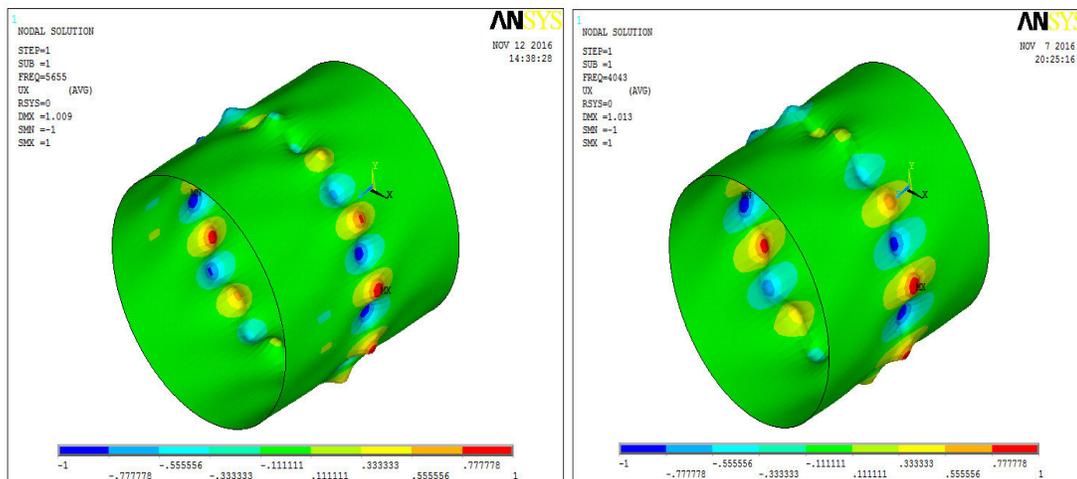
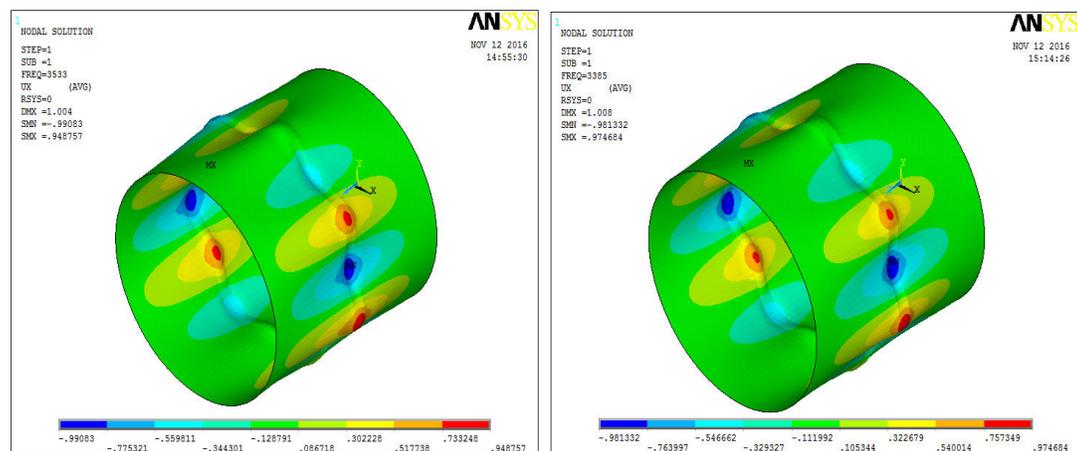


Figure 3.57: Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=1$



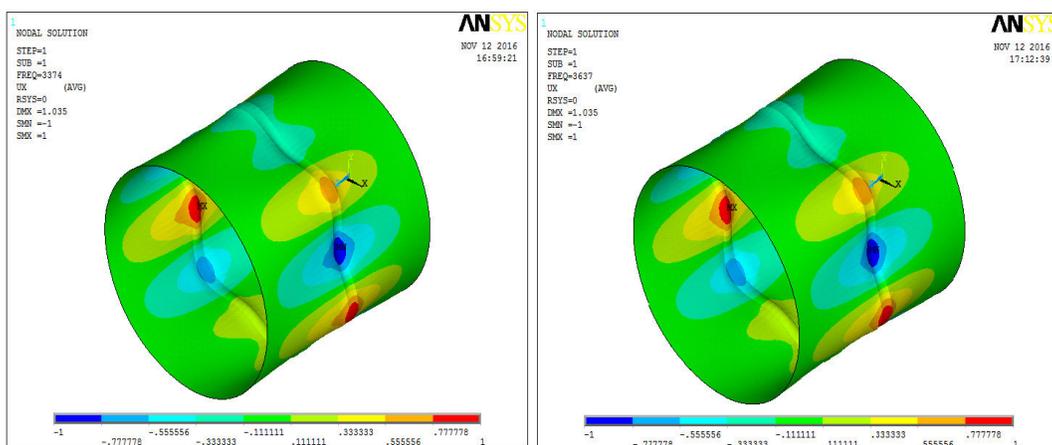
$\alpha=1$  et  $A/t = 0.5$

$\alpha=1$  et  $A/t = 1$



$\alpha=1$  et  $A/t = 1.5$

$\alpha=1$  et  $A/t = 2$



$\alpha=1$  et  $A/t = 2.5$

$\alpha=1$  et  $A/t = 3$

Figure 3.58 : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec  $\alpha=1$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

2<sup>eme</sup> cas :  $\alpha=2$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cL}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cL}$
0	1088	10 154,00	10 167	0,998
0.5	1088	5 354,90	10 167	0,527
1	1088	3 284,00	10 167	0,323
1.5	1088	2 506,80	10 167	0,247
2	1088	2 219,60	10 167	0,218
2.5	1088	2 220,80	10 167	0,218
3	1088	2 396,40	10 167	0,236

Tableau3.7: la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

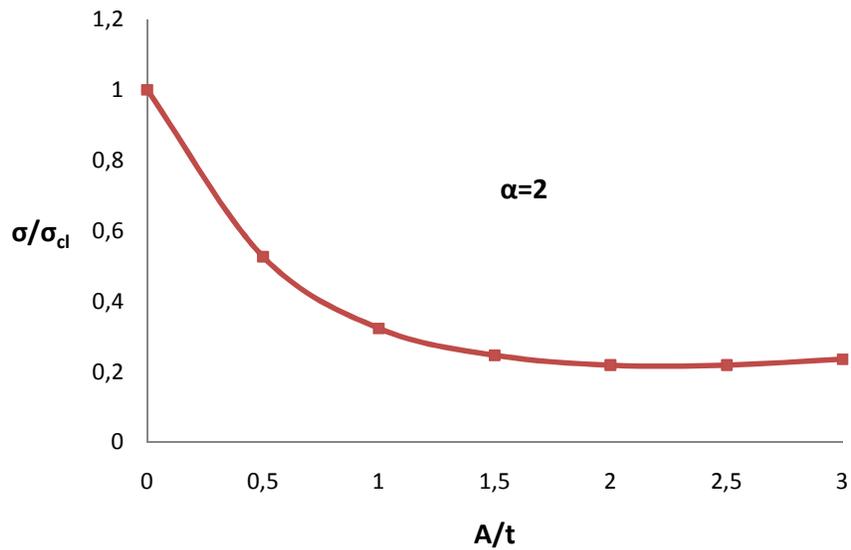
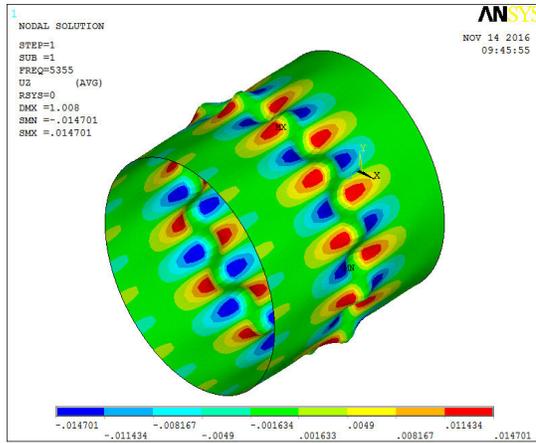
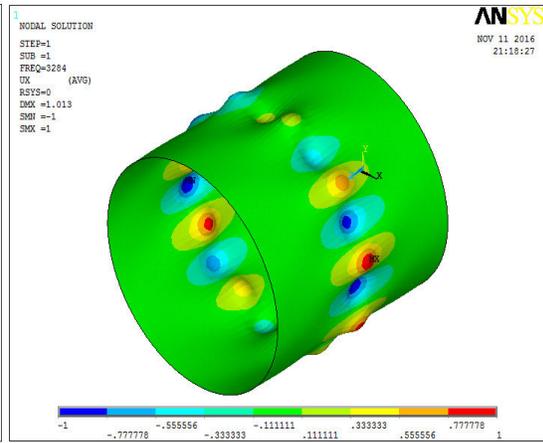


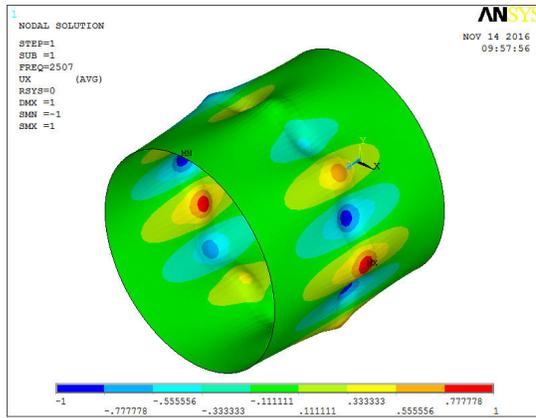
Figure 3.59 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=2$



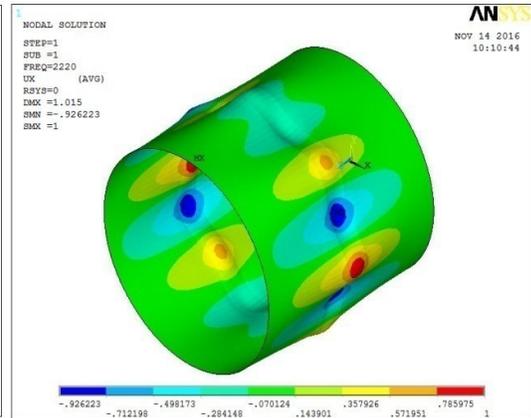
$\alpha=2$  et  $A/t = 0.5$



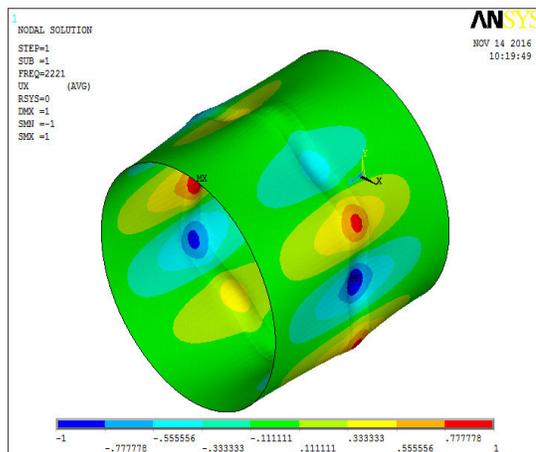
$\alpha=2$  et  $A/t = 1$



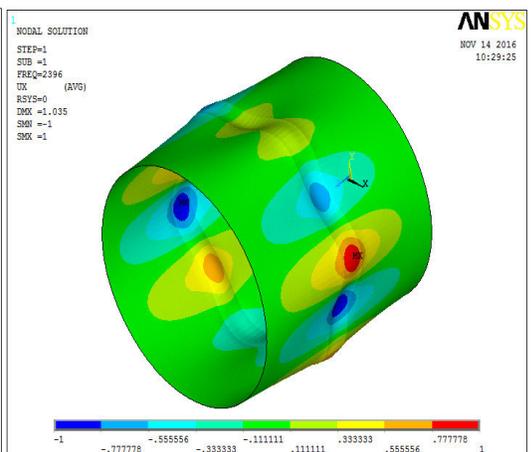
$\alpha=2$  et  $A/t = 1.5$



$\alpha=2$  et  $A/t = 2$



$\alpha=2$  et  $A/t = 2.5$



$\alpha=2$  et  $A/t = 3$

Figure 3.60 : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec  $\alpha=2$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

3<sup>eme</sup> cas :  $\alpha=2,5$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cl}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cl}$
0	1360	10 154,00	10 167	0,998
0.5	1360	5 699,00	10 167	0,561
1	1360	3 434,00	10 167	0,338
1.5	1360	2 488,70	10 167	0,245
2	1360	2 087,20	10 167	0,205
2.5	1360	2 087,90	10 167	0,205
3	1360	2 086,70	10 167	0,205

Tableau3.8 : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

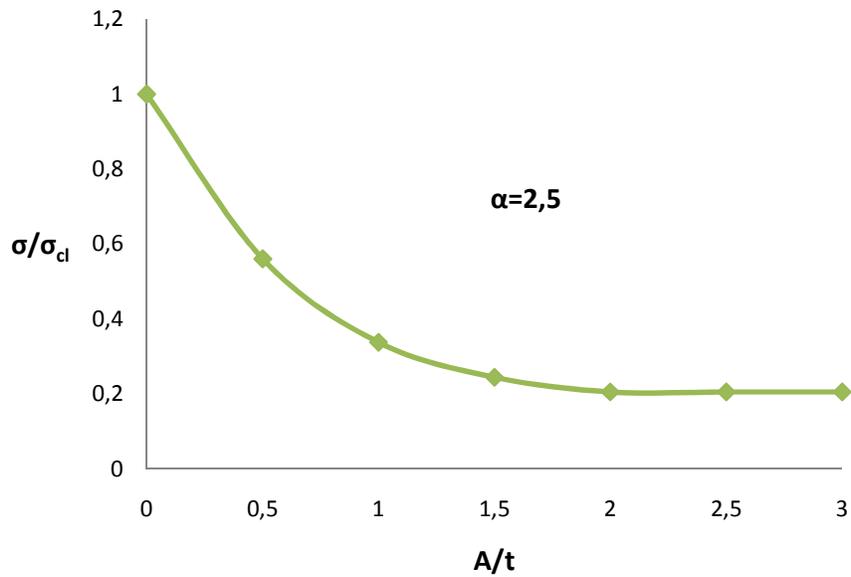


Figure 3.61 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=2,5$

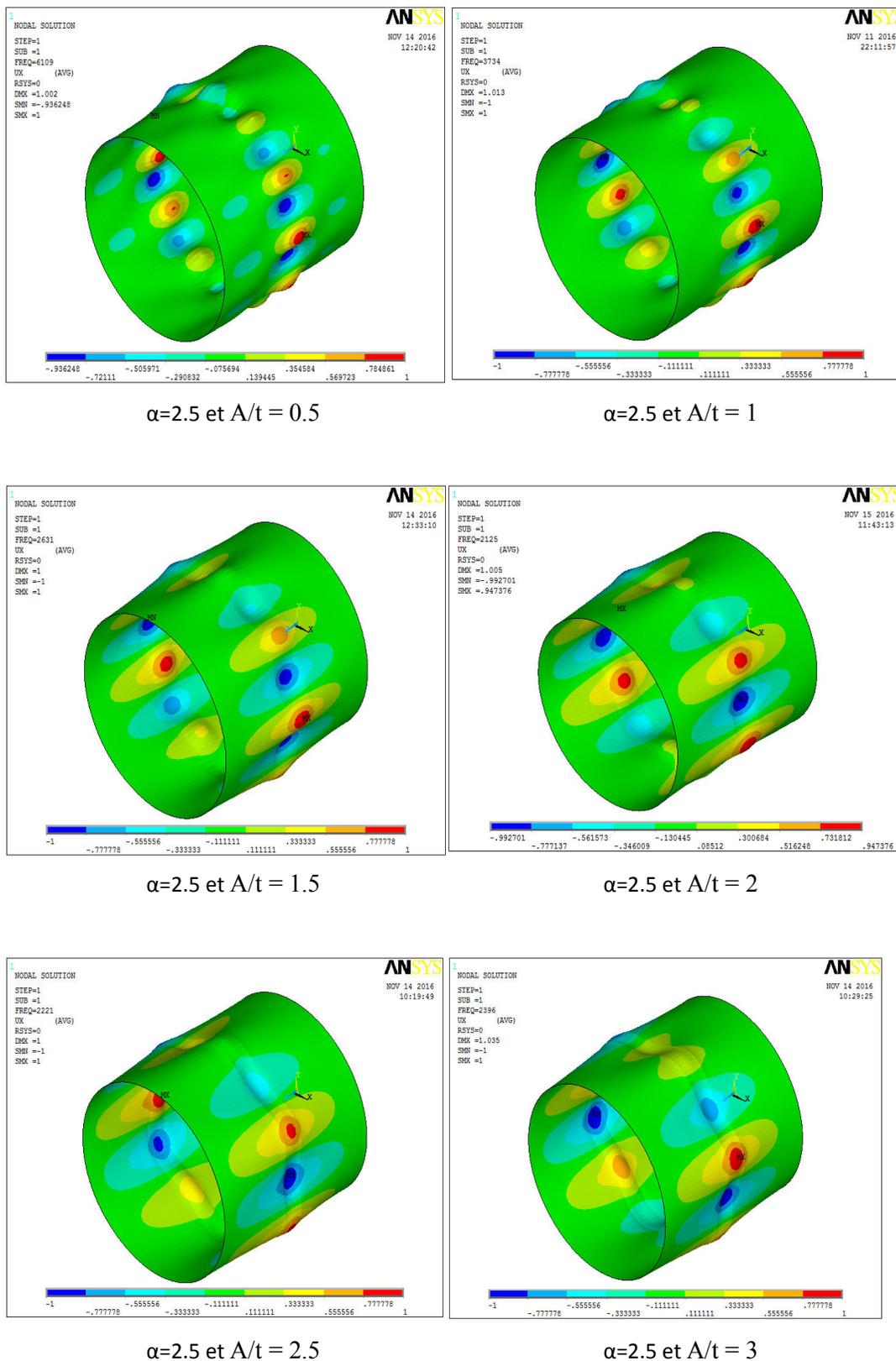


Figure 3.62 : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec  $\alpha=2.5$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

4<sup>eme</sup> cas :  $\alpha=3$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cL}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cL}$
0	1632	10 154,00	10 167	0,998
0.5	1632	6 108,80	10 167	0,601
1	1632	3 734,00	10 167	0,367
1.5	1632	2 631,00	10 167	0,259
2	1632	2 124,60	10 167	0,209
2.5	1632	1 992,20	10 167	0,196
3	1632	1 956,80	10 167	0,192

Tableau 3.9 : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

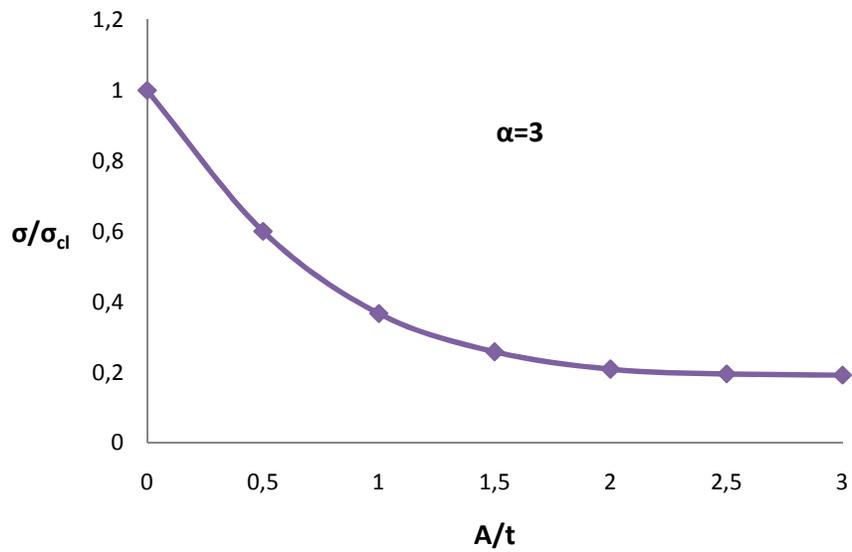
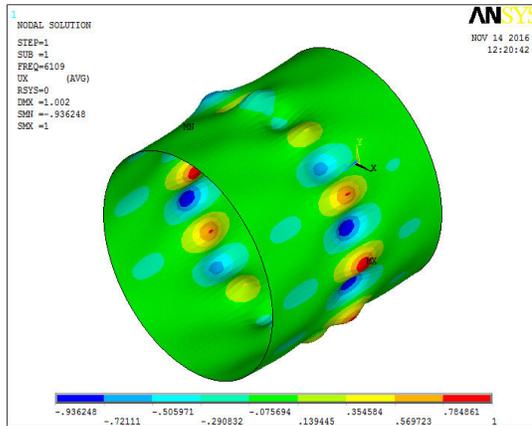
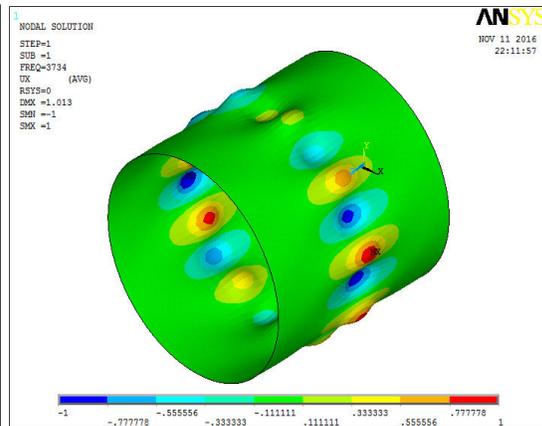


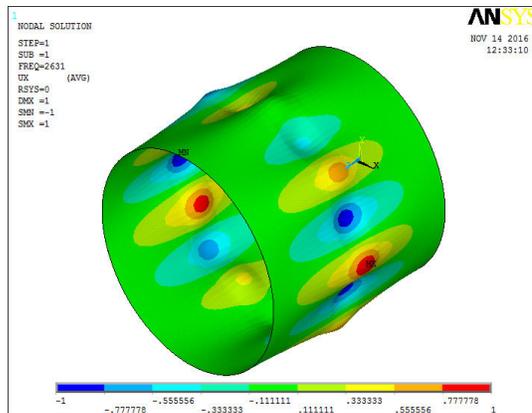
Figure 3.63: Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=3$



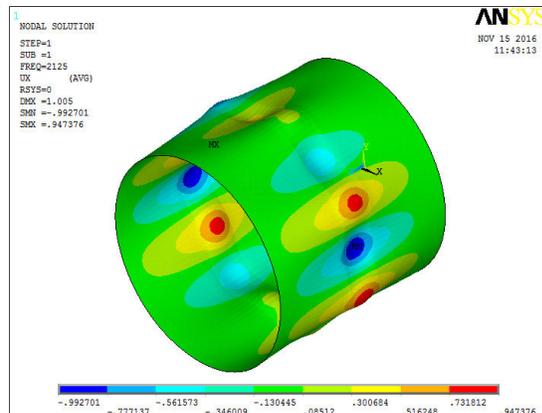
$\alpha=3$  et  $A/t = 0.5$



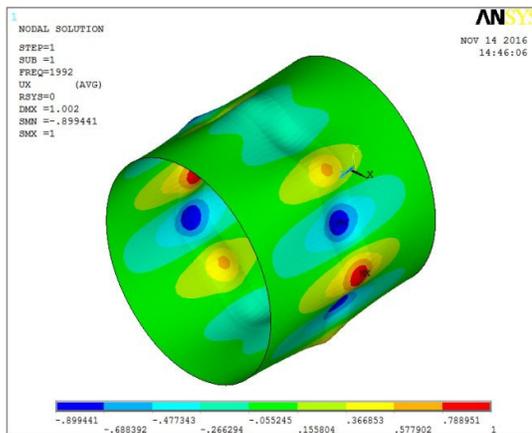
$\alpha=3$  et  $A/t = 1$



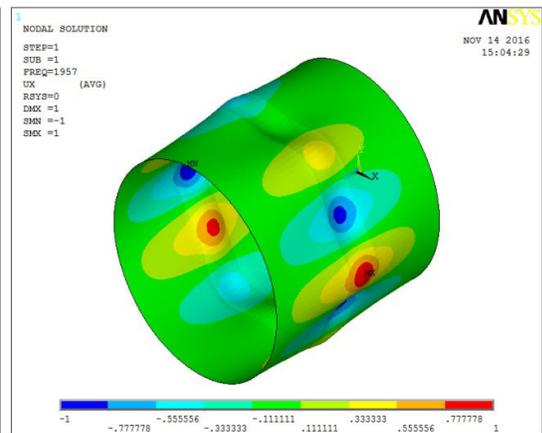
$\alpha=3$  et  $A/t = 1.5$



$\alpha=3$  et  $A/t = 2$



$\alpha=3$  et  $A/t = 2.5$



$\alpha=3$  et  $A/t = 3$

Figure 3.64 : Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec  $\alpha=3$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

5<sup>eme</sup> cas :  $\alpha=4$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cL}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cL}$
0	2176	10 154,00	10 167	0,998
0.5	2176	6 959,70	10 167	0,685
1	2176	4 510,00	10 167	0,444
1.5	2176	3 130,90	10 167	0,308
2	2176	2 424,70	10 167	0,238
2.5	2176	2 038,50	10 167	0,201
3	2176	2 043,00	10 167	0,201

Tableau 3.10 : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

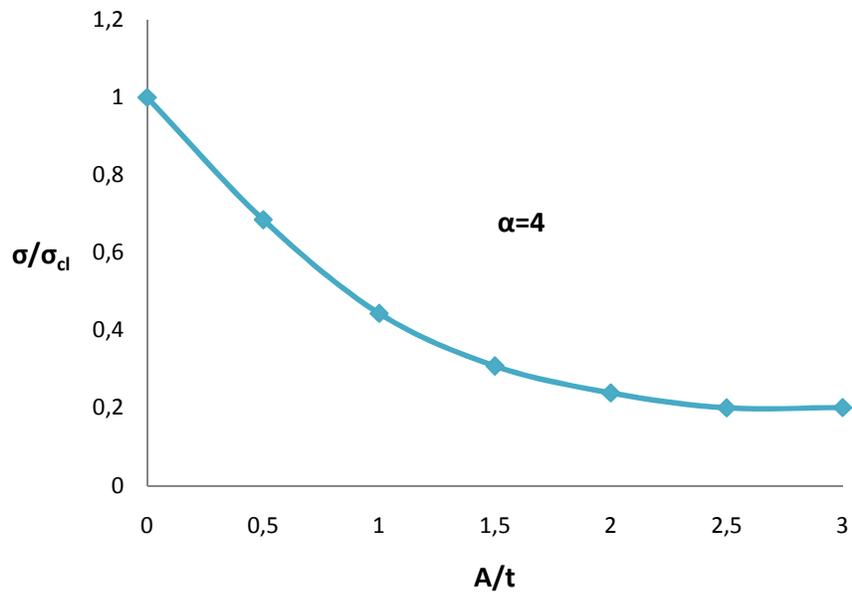
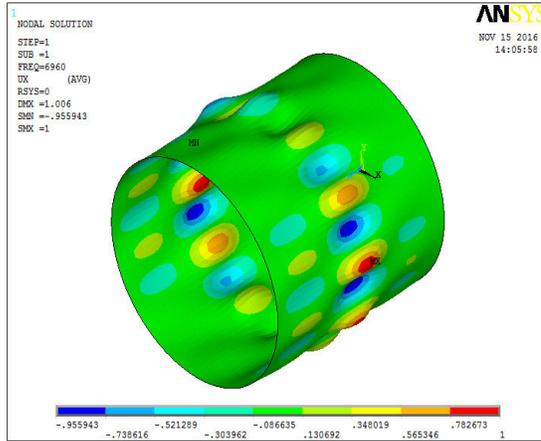
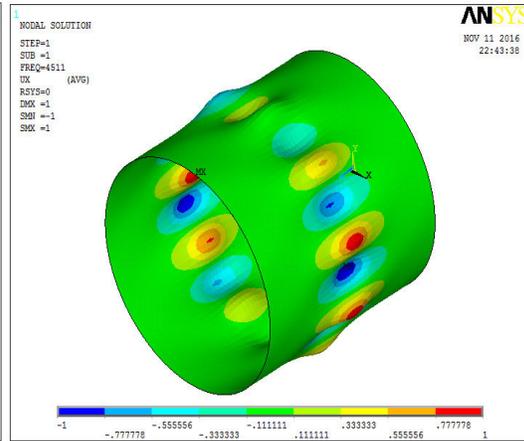


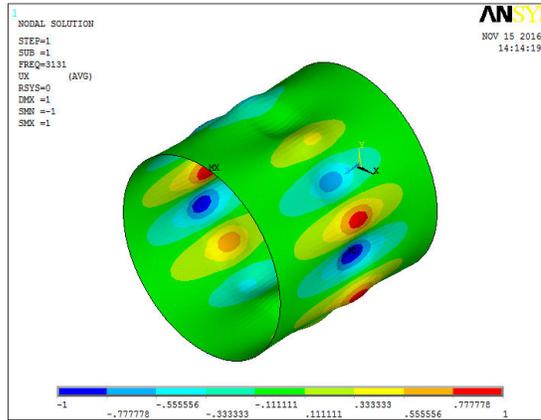
Figure3.65 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=4$



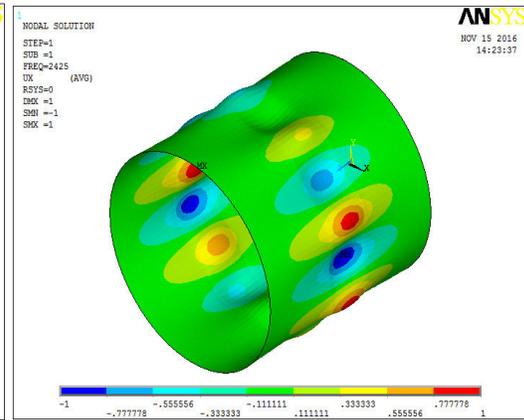
$\alpha=4$  et  $A/t = 0.5$



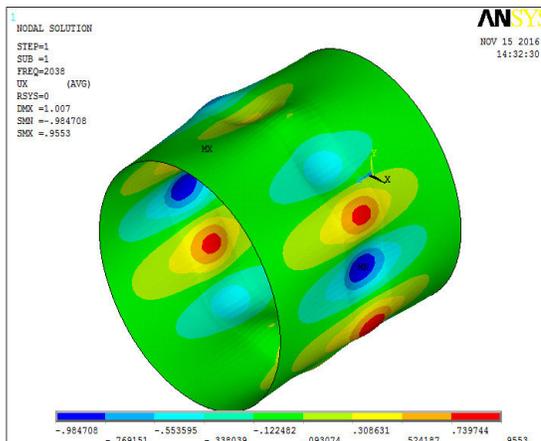
$\alpha=4$  et  $A/t = 1$



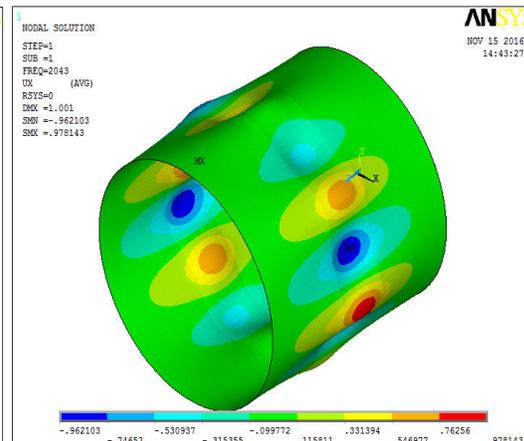
$\alpha=4$  et  $A/t = 1.5$



$\alpha=4$  et  $A/t = 2$



$\alpha=4$  et  $A/t = 2.5$



$\alpha=4$  et  $A/t = 3$

Figure 3.66: Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts avec  $\alpha=4$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

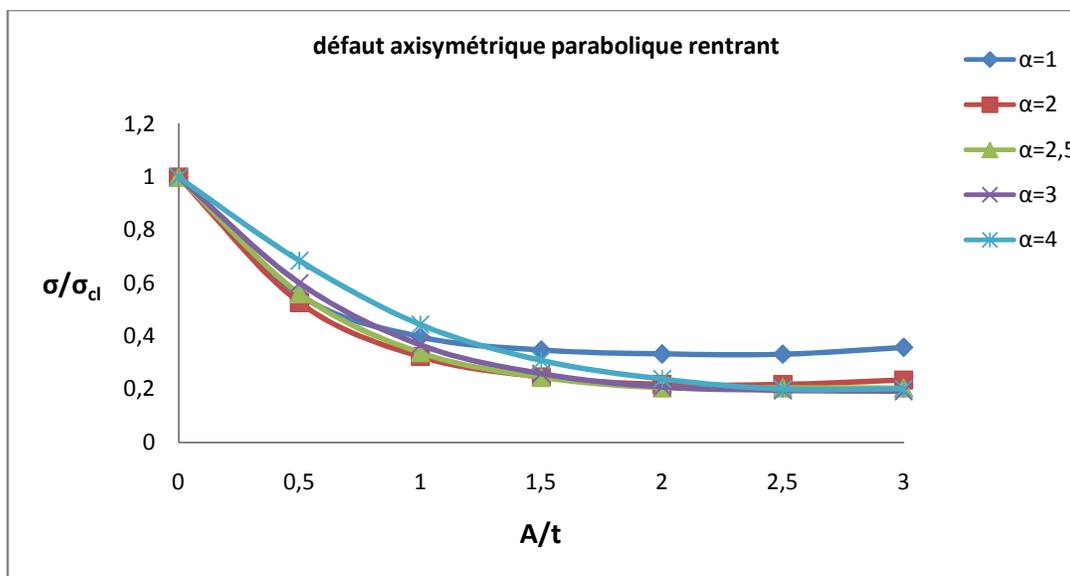


Figure 3.67 : Evolution de la charge critique en fonction de l'amplitude réduite avec un défaut axisymétrique parabolique

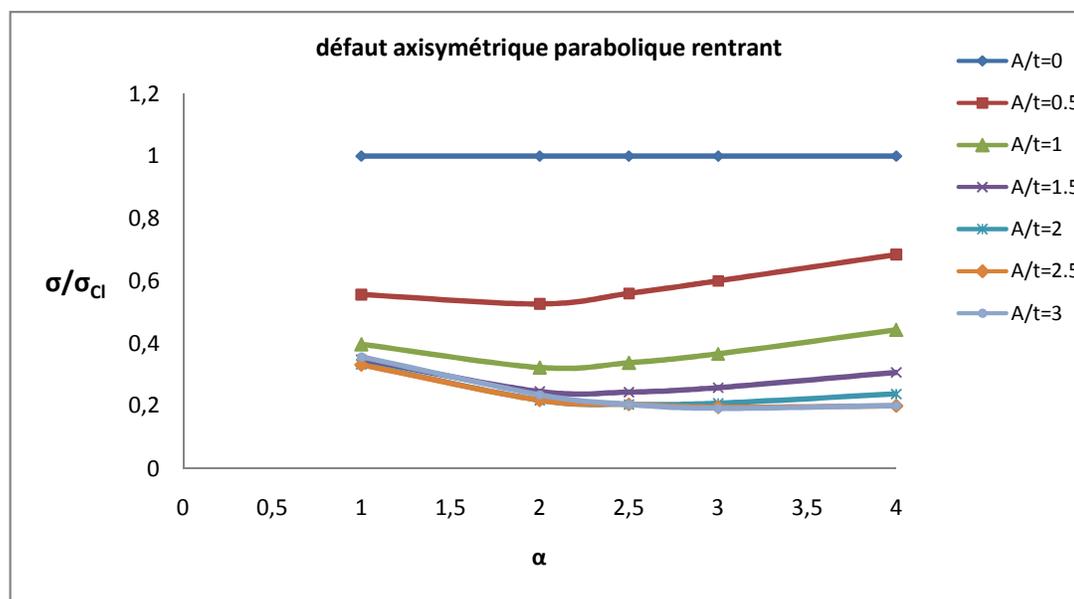


Figure 3.68 : Evolution de la charge critique en fonction de la longueur d'onde avec un défaut axisymétrique parabolique

Les graphes comparent l'influence de différentes longueurs d'implantation  $\lambda$  pour un rapport  $R/t$  donné en fonction de l'amplitude  $A/t$  du défaut. La longueur d'onde axiale la plus néfaste peut être différente, ce qui montre bien la complexité du problème. En particulier, le défaut dont la longueur d'onde est égale à la longueur critique de flambage n'est pas le plus néfaste, dès que l'amplitude  $A/t$  dépasse 2.

6.3.2 Défaut triangulaire rentrant

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha=1$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cL}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cL}$
0	544	10154,00	10 167	0,998
0.5	544	6341,20	10 167	0,624
1	544	4607,80	10 167	0,453
1.5	544	3995,00	10 167	0,393
2	544	3652,80	10 167	0,359
2.5	544	3654,40	10 167	0,359
3	544	3604,80	10 167	0,355

Tableau 3.11 : contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

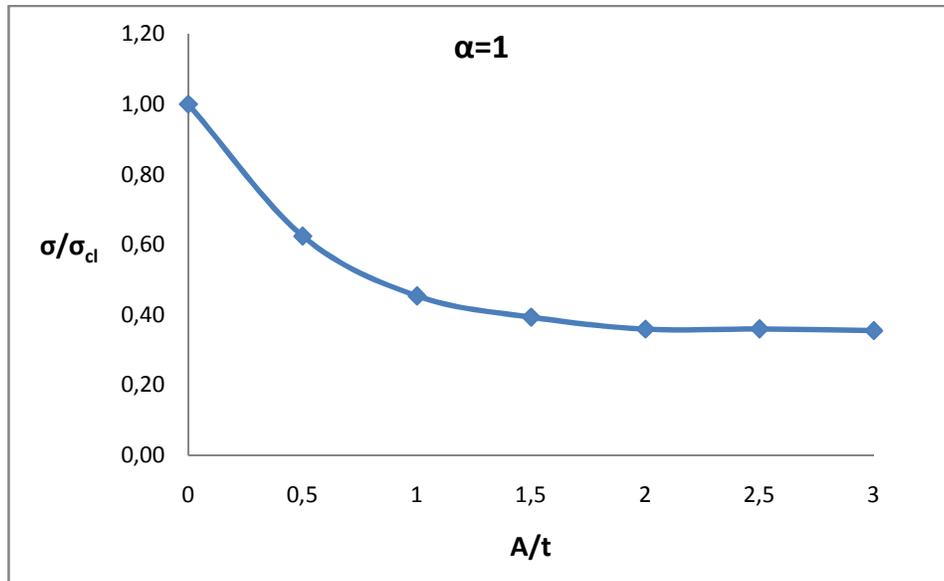
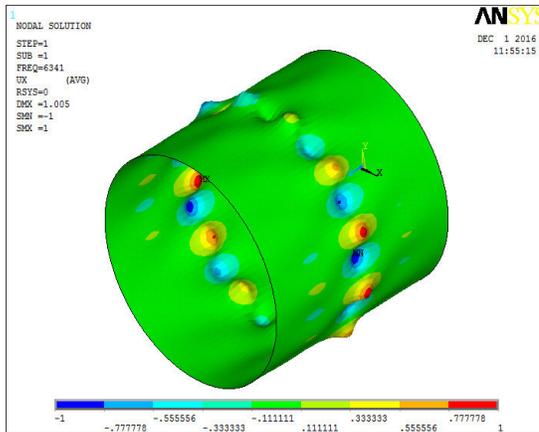
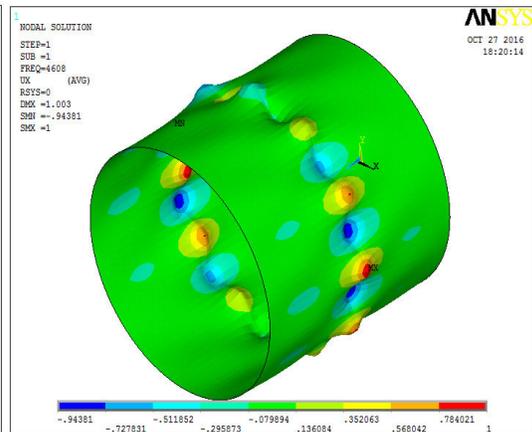


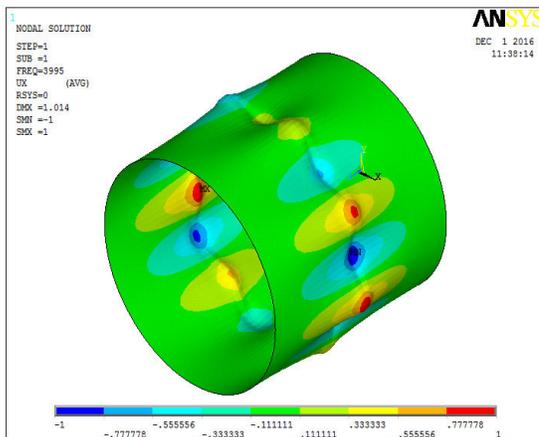
Figure 3.69 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=1$



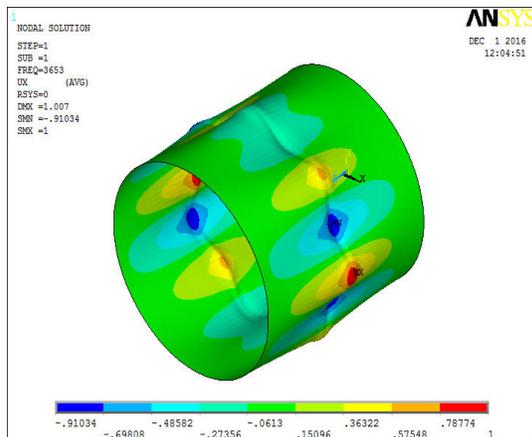
$\alpha=1$  et  $A/t = 0.5$



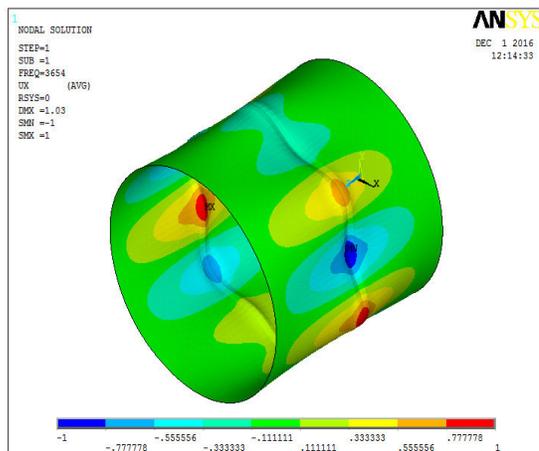
$\alpha=1$  et  $A/t = 1$



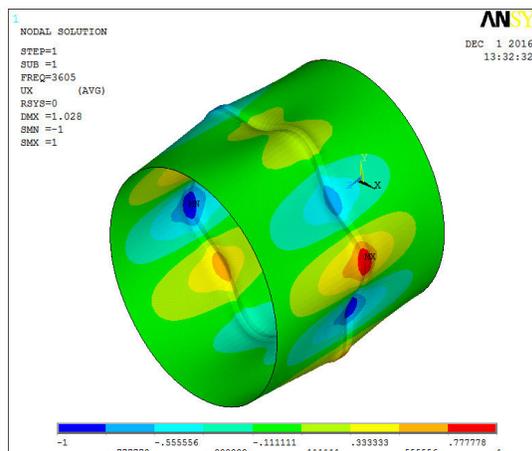
$\alpha=1$  et  $A/t = 1.5$



$\alpha=1$  et  $A/t = 2$



$\alpha=1$  et  $A/t = 2.5$



$\alpha=1$  et  $A/t = 3$

Figure 3.70: Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires,  $\alpha=1$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

2<sup>er</sup> cas :  $\alpha=2$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cL}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cL}$
0	1088	10 154,00	10 167	0,998
0.5	1088	5 784,10	10 167	0,569
1	1088	3 719,50	10 167	0,366
1.5	1088	2 878,50	10 167	0,283
2	1088	2 478,40	10 167	0,244
2.5	1088	2 435,60	10 167	0,240
3	1088	2 404,50	10 167	0,237

Tableau 3.12 : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

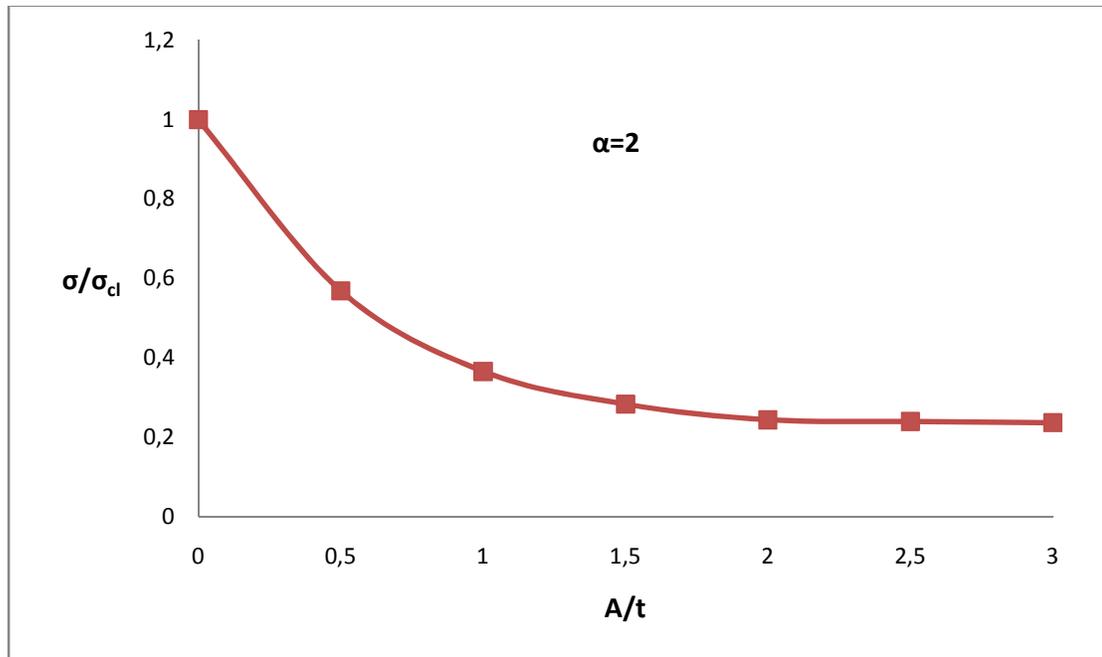


Figure 3.71 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=2$

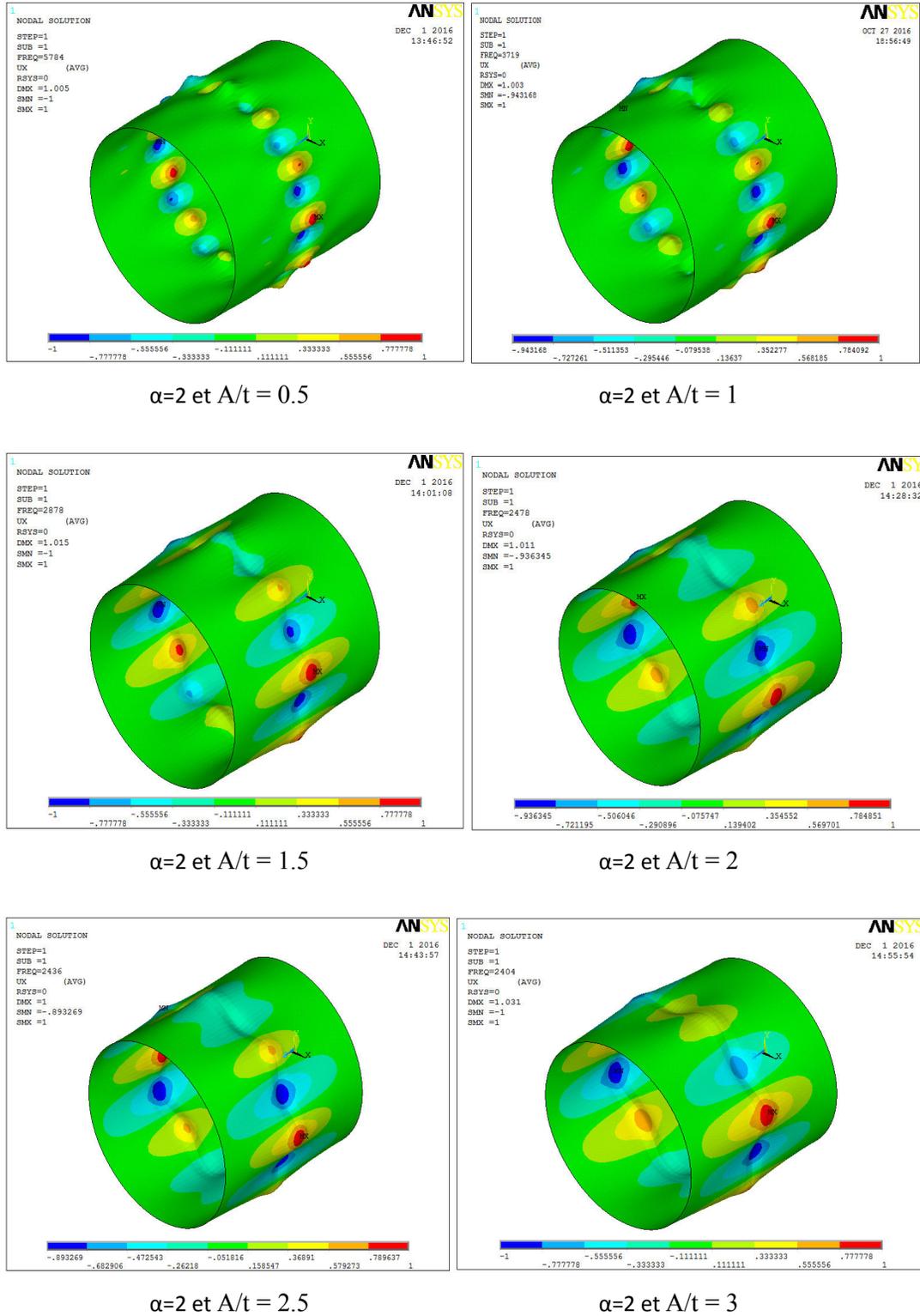


Figure 3.72: Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires,  $\alpha=2$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

3<sup>er</sup> cas :  $\alpha=2,5$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cL}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cL}$
0	1632	10 154,00	10 167	0,998
0.5	1632	5983,30	10 167	0,589
1	1632	3768,10	10 167	0,371
1.5	1632	2791,60	10 167	0,275
2	1632	2342,00	10 167	0,230
2.5	1632	2159,90	10 167	0,212
3	1632	2151,00	10 167	0,212

Tableau 3.13 : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

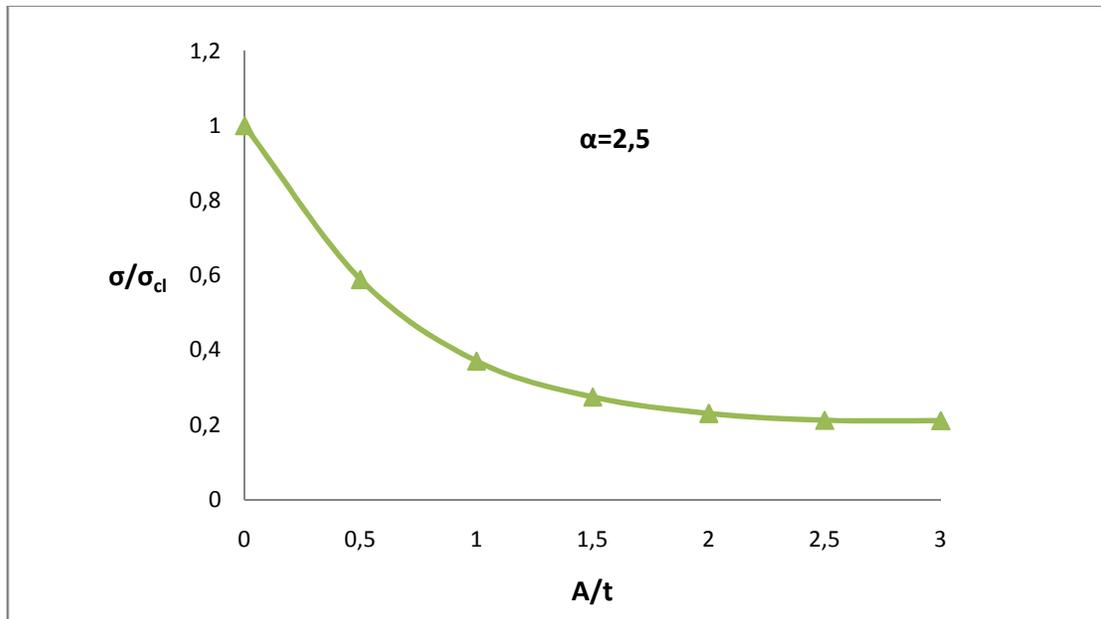
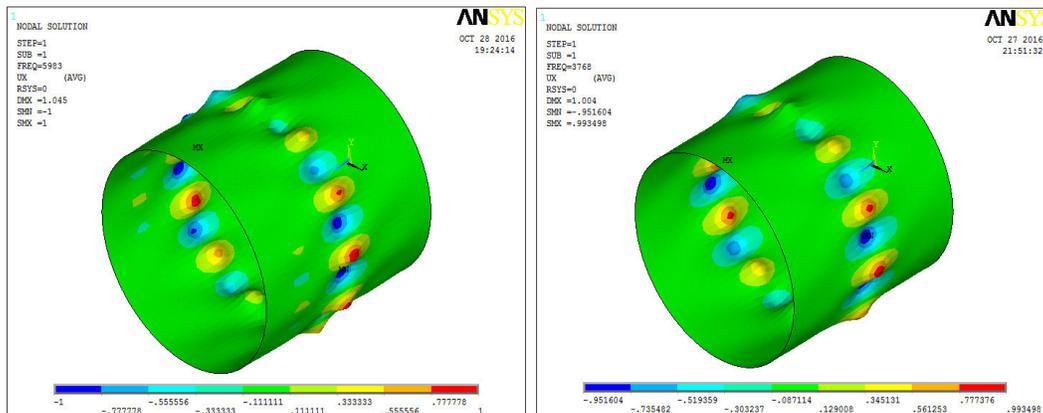
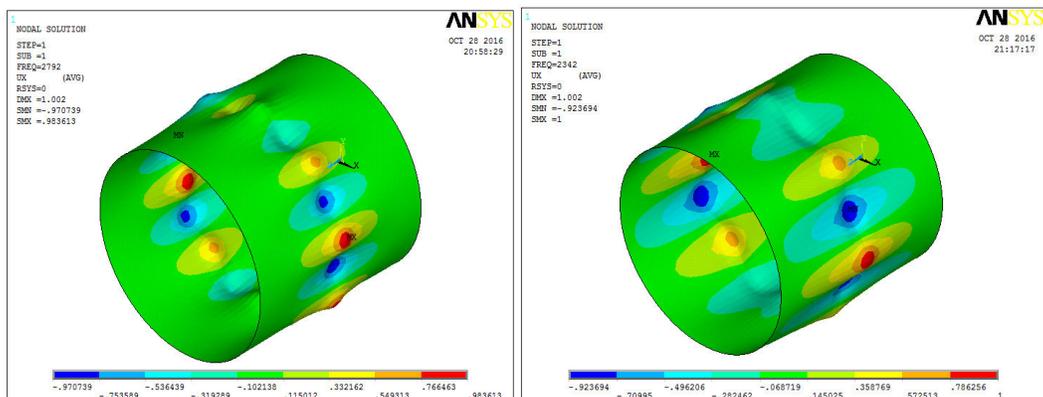


Figure 3.73 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=2.5$



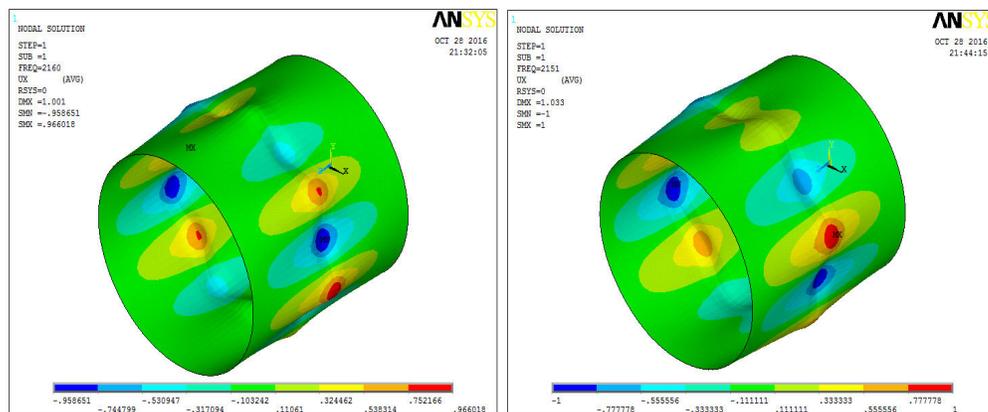
$\alpha=2.5$  et  $A/t = 0.5$

$\alpha=2.5$  et  $A/t = 1$



$\alpha=2.5$  et  $A/t = 1.5$

$\alpha=2.5$  et  $A/t = 2$



$\alpha=2.5$  et  $A/t = 2.5$

$\alpha=2.5$  et  $A/t = 3$

Figure 3.74: Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires,  $\alpha=2.5$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

3<sup>er</sup> cas :  $\alpha=3$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cl}$	$\sigma_{cr} / \sigma_{cl}$
0	1632	10 154,00	10 167	0,998
0.5	1632	6 233.50	10 167	0.613
1	1632	3 959.60	10 167	0.389
1.5	1632	2 845.00	10 167	0.280
2	1632	2 313.60	10 167	0.228
2.5	1632	2 045.20	10 167	0.201
3	1632	2 057.80	10 167	0.202

Tableau 3.14 : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

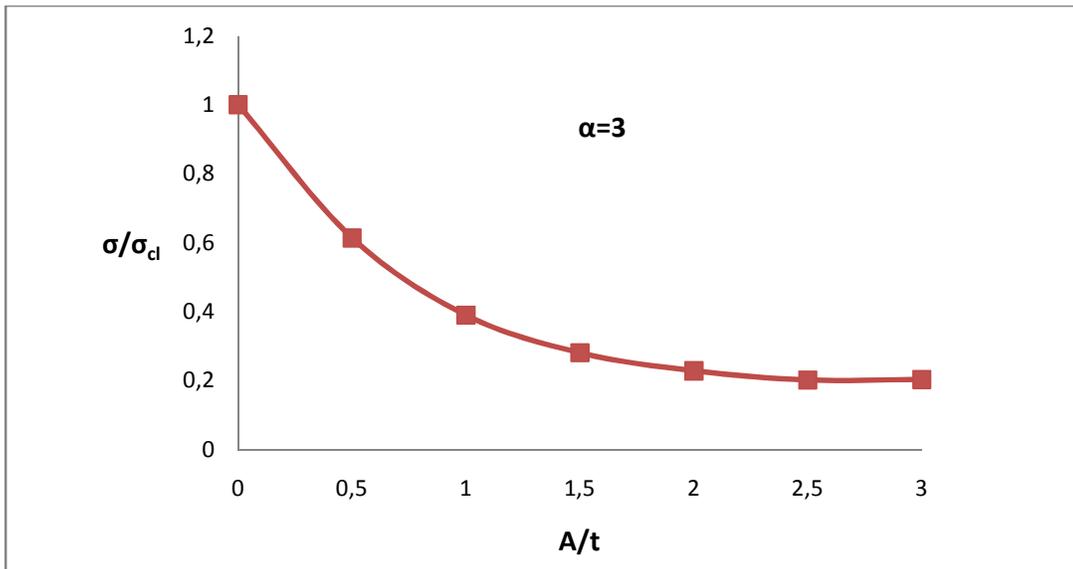


Figure3.75 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=3$

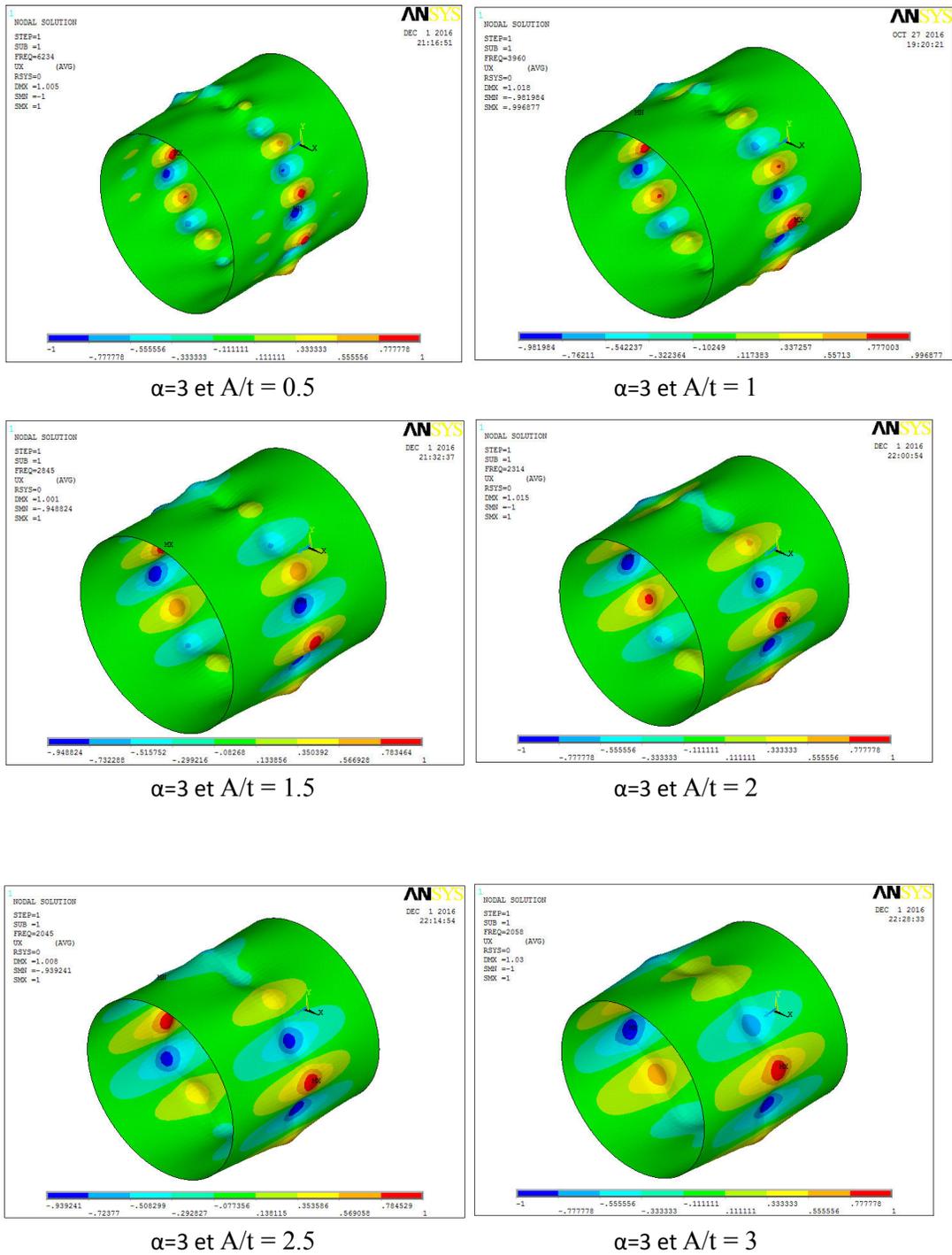


Figure 3.76: Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires,  $\alpha=3$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

4<sup>er</sup> cas :  $\alpha=4$  et  $A/t = 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3$

A/t	$\lambda$	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cL}$	$\sigma_{cr}/\sigma_{cL}$
0	2176	10 154,00	10 167	0,998
0.5	2176	6856.40	10 167	0.674
1	2176	4531.90	10 167	0.446
1.5	2176	3196.80	10 167	0.314
2	2176	2466.90	10 167	0.243
2.5	2176	2090.80	10 167	0.206
3	2176	1971.60	10 167	0.194

Tableau 3.15 : la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

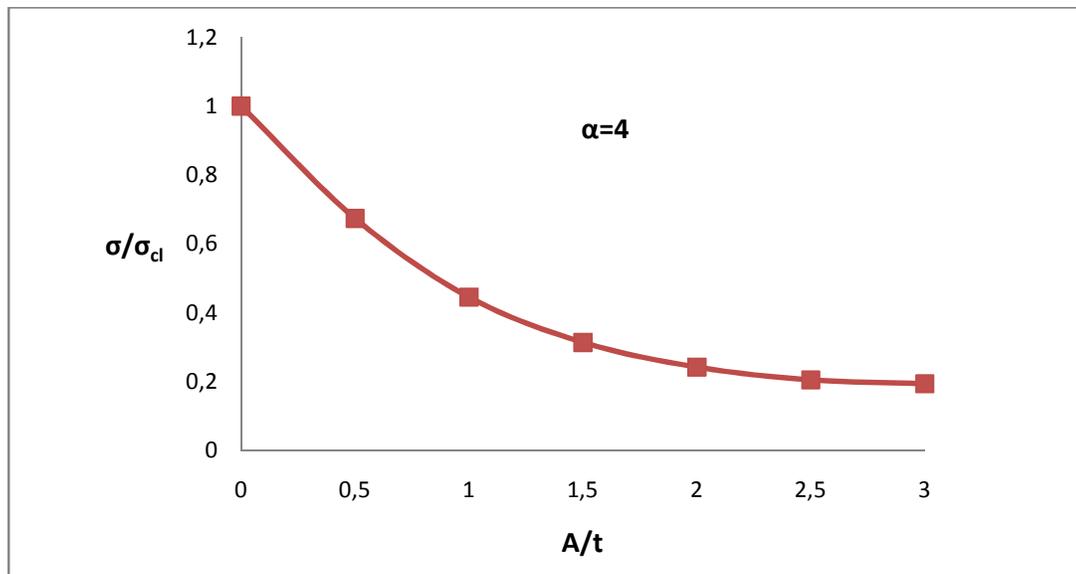


Figure 3.77: Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite avec  $\alpha=4$

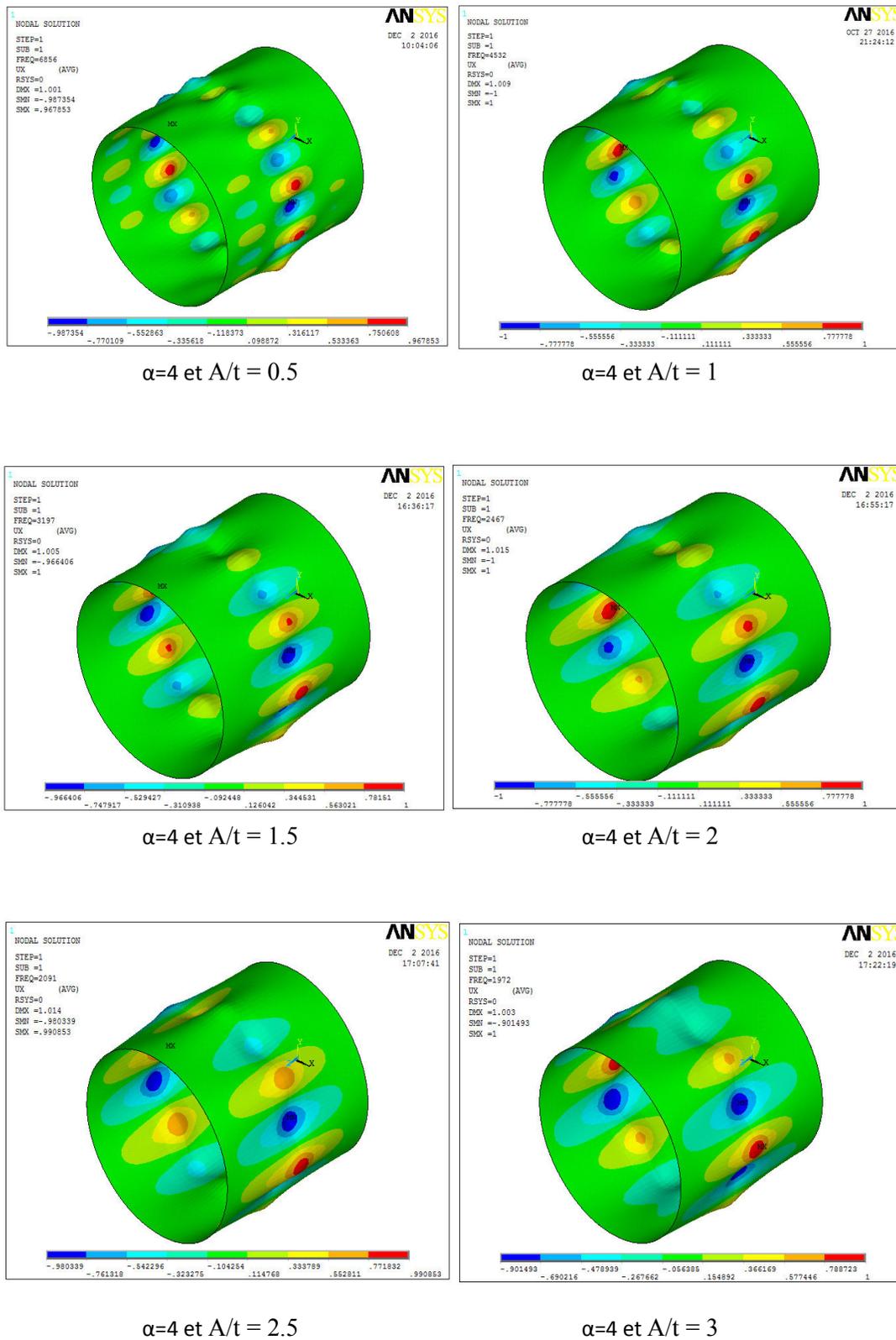


Figure 3.78: Modes de flambage des coques cylindriques avec défauts triangulaires,  $\alpha=4$  et  $A/t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$  et  $3$

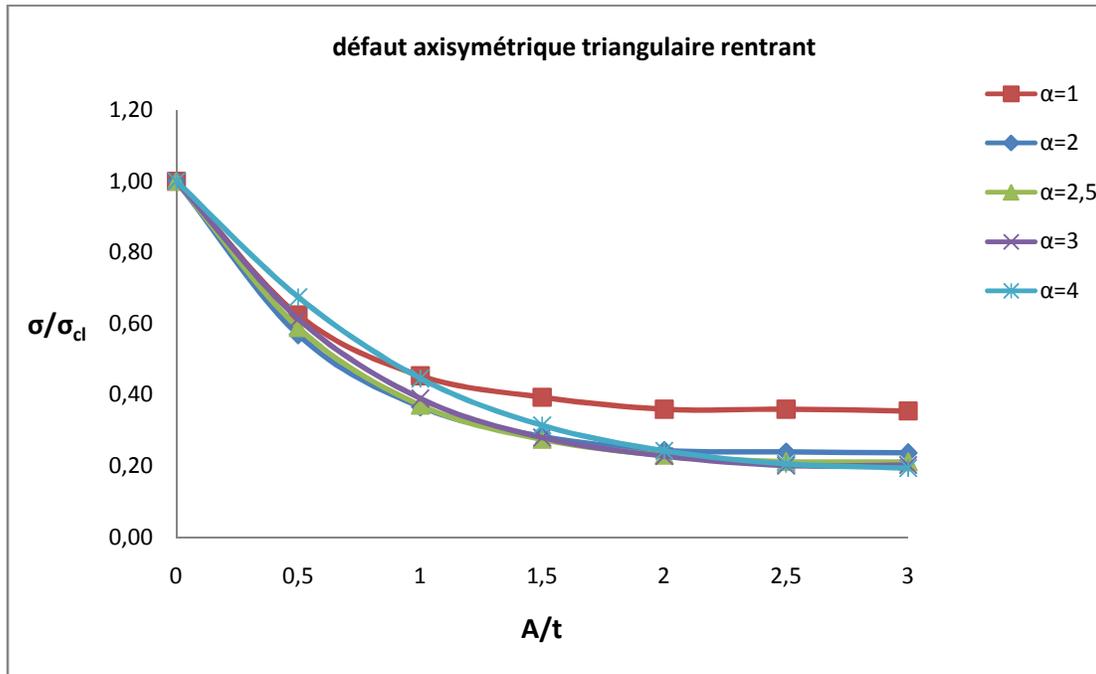


Figure 3.79 : Evolution de la charge critique en fonction de l'amplitude réduite avec un défaut axisymétrique triangulaire

La figure 3.79 présente l'évolution de la charge critique en fonction du rapport amplitude/épaisseur. .

On constate d'après ces résultats que pour les amplitudes de défaut importantes, une perte considérable de la rigidité de la structure est observée. Le défaut triangulaire est un défaut défavorable sur le comportement de la structure et ce pour la géométrie de la coque étudiée  $R/t= 250$  et  $L/R=2$ , Cette configuration nous place dans le cas des coques minces et donc très sensibles aux défauts de forme localisés. Ce défaut a l'avantage d'être très facilement modelé. On peut dire que notre modèle dans ce travail sous ANSYS à l'aide de l'élément SHELL63 est capable de modéliser parfaitement et avec une manière représentative des défauts de type "casse de soudure" qui apparaissent à la jonction de deux cylindres minces lors de la fabrication et ce défaut admet un effet drastique sur la capacité portante de la coque soumise à la compression axiale

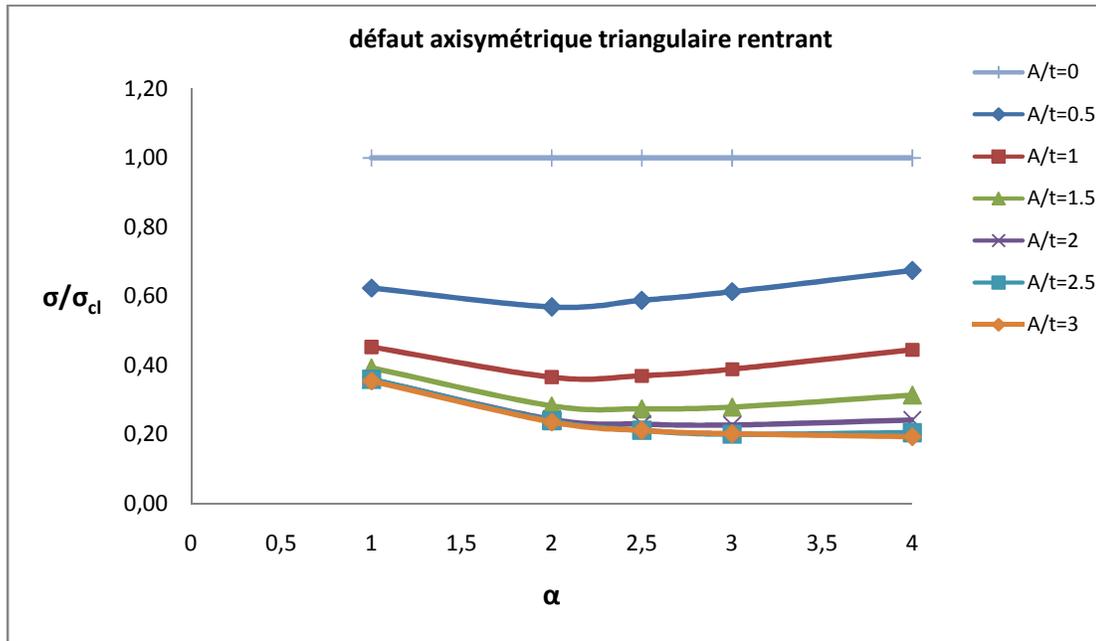


Figure 3.80 : Evolution de la charge critique en fonction de la longueur d'onde avec un défaut axisymétrique triangulaire

Les graphes comparent l'influence de différentes longueurs d'implantation  $\lambda$  pour un rapport  $R/t = 250$  en fonction de l'amplitude  $A/t$  du défaut, la longueur d'onde axiale la plus néfaste peut être différente comme le cas de défaut parabolique. En particulier, le défaut dont la longueur est égale à la longueur critique de flambage n'est pas le plus néfaste, dès que l'amplitude  $A/t$  dépasse 2.

6.2.3 Comparaison de l'effet de différentes formes de défauts :

Nous avons choisi de limiter l'amplitude du défaut à une fois l'épaisseur de la coque dans cette partie ; dans ces conditions, ces résultats nous montrent que la longueur d'onde axiale la plus pénalisante est égale à  $2.5 \lambda$

Les courbes de la figure 3.81 présentent la variation de la charge critique en fonction du paramètre  $A/t$  qui traduit l'effet du défaut. Le défaut analysé est tel que  $\lambda_{cr} = \alpha \lambda$  avec  $\alpha=2,5$ . Le rapport  $\sigma_{cr} / \sigma_{cl}$  permet de rendre les résultats adimensionnels.

A/t	Koiter- Défaut axisymétrique généralisé [KOI45]	Rotter/Teng (Défaut type B) [ROT89]	Limam/Mathon [MAT06]	Résultat par ANSYS (Présent travail)
0	1,00	1,001	1,001	1,000
0,1	0,705	0,767	0,781	0,850
0,2	0,611	0,652	0,670	0,720
0,5	0,464	0,478	0,469	0,527
1	0,346	0,371	0,318	0,323

Tableau 3.16 : Effet de la forme du défaut sur la charge critique

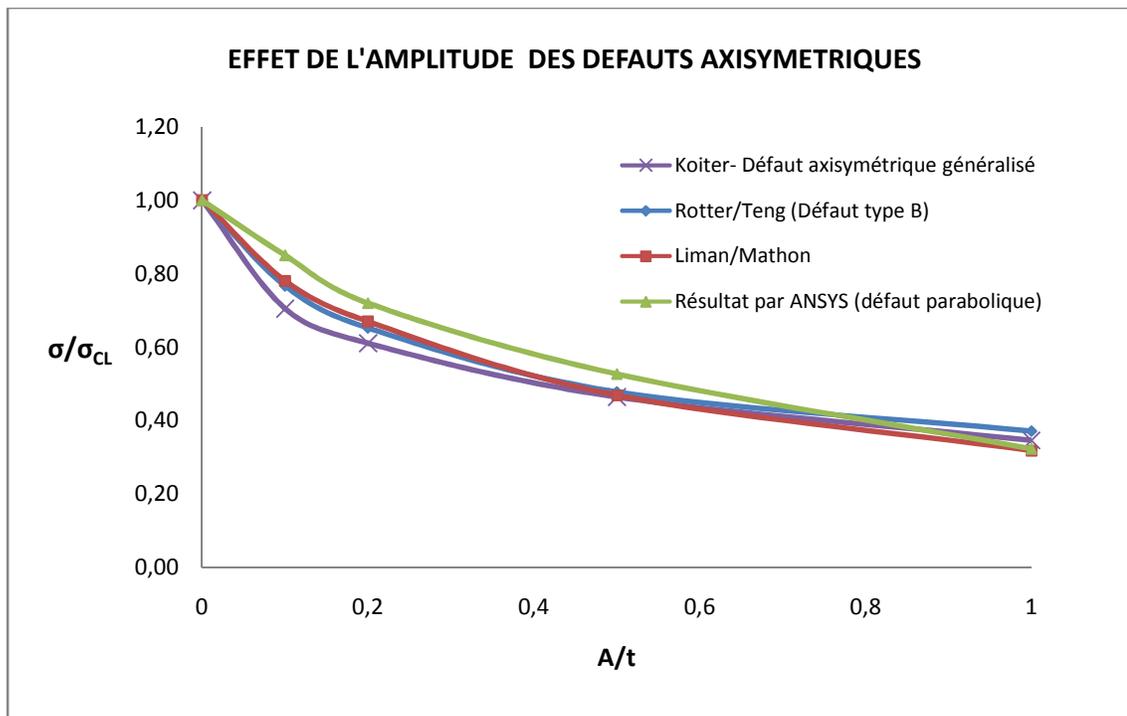


Figure 3.81 : Effet de la forme du défaut sur la charge critique; Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude réduite

On constate en particulier que l'évolution de la charge critique en fonction de l'amplitude du défaut suit une allure similaire à la courbe de Koiter pour le cas d'un défaut théorique axisymétrique réparti sur toute la longueur de la coque. Les deux défauts conduisent à une chute importante de la capacité portante de la coque lorsqu'elle est soumise à la compression axiale.

On constate que quelque soit l'amplitude du défaut considéré, les charges critiques obtenues avec un défaut parabolique sont toujours plus grandes que celles calculées avec un défaut triangulaire. Le défaut parabolique est le plus défavorable sur le comportement de la structure et ce pour toutes les géométries de coques que l'on a étudiée.

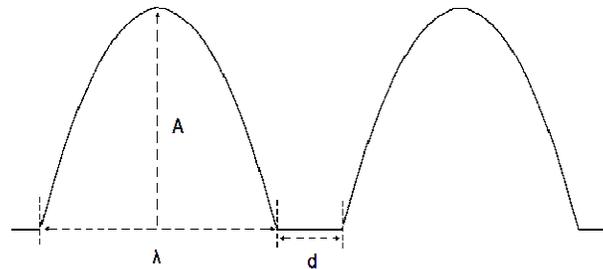
Le comportement de la coque est fortement lié au rapport  $A/t$ , la sensibilité de la coque au flambement est ainsi étudiée en fonction de ce rapport. D'une manière générale on note une perte considérable de rigidité de la structure due aux défauts localisés en comparaison avec la formule de la charge classique de flambement des coques en compression. L'analyse de l'influence des paramètres sur la charge critique qui a été conduite en utilisant l'outil statistique d'analyse de la variance appliquée aux résultats des études paramétriques, a révélé que quelque soit le type de la coque étudiée, l'influence de  $A/t$  atteint la valeur de 80 % pour des amplitudes de défauts équivalentes à l'épaisseur de la coque  $A/t$  voisin de 1.

## 7. EFFET DE L'INTERACTION ENTRE DEFAUTS LOCALISES SUR LE FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES AXISYMETRIQUES SOUS COMPRESSION AXIALE :

L'analyse de l'interaction entre défauts localisés est un problème important car sur certaines structures un défaut n'apparaît pas toujours de manière isolée, il faut donc quantifier l'influence simultanée de ces défauts sur la charge critique.

Ce travail présente une analyse de l'effet de l'interaction entre défauts axisymétriques localisés sur la charge de flambement dans le cas des coques cylindriques axisymétriques minces soumises à la compression axiale. La simulation numérique a été effectuée à l'aide du code de calcul aux éléments finis ANSYS.

Le cas d'un défaut localisé isolé a été considéré en premier lieu afin de déterminer le défaut le plus sévère et les facteurs essentiels qui interviennent dans le problème. Ensuite, l'effet de l'interaction en présence de deux défauts (couplage) est considéré à travers une étude paramétrique.



*Figure 3.82 : Schéma de deux défauts en interaction*

On se propose d'étudier ici numériquement cette géométrie en se basant sur la méthode des éléments finis. La modélisation par éléments finis du flambage est effectuée toujours à l'aide du code de calcul ANSYS en utilisant l'élément COQUE SHELL63. Cet élément décrit de façon optimale le comportement d'une coque axisymétrique soumise à un chargement axisymétrique.

Le défaut ou les défauts, seront localisés dans la partie centrale de la génératrice du cylindre afin d'éviter l'interaction avec les conditions aux limites. Afin de caractériser la variation de la charge critique, nous avons introduit les paramètres

suivants:  $A/t$ ,  $\lambda/t$  et  $d$ , où  $A$  est l'amplitude du défaut,  $\lambda$  sa longueur d'onde et  $d$  la distance qui sépare les défauts lorsque leur nombre dépasse deux.

**Test 01:** (cas parfait)  $A/t=0$ ,  $\lambda/t = 0$  et  $d= /$  avec  $N_{b\text{défaut}} = 0$

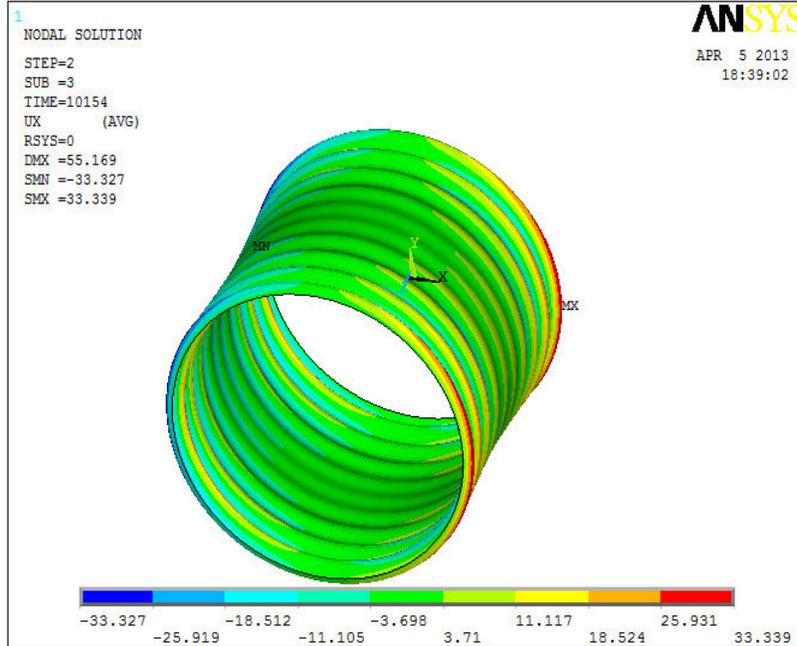


Figure 3.83: Mode de flambage de coque cylindrique –Test 01

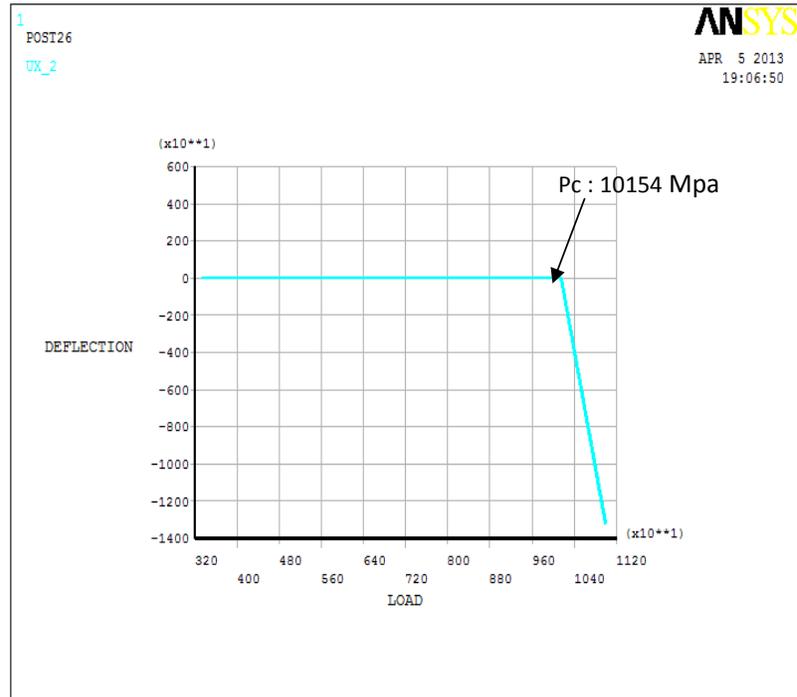


Figure 3.84: Courbe charge-déplacement – test 01-

**Test 02:**  $A/t=1$ ,  $\lambda/t=1$  et  $d=0$  avec  $Nb_{\text{défaut}} = 01$

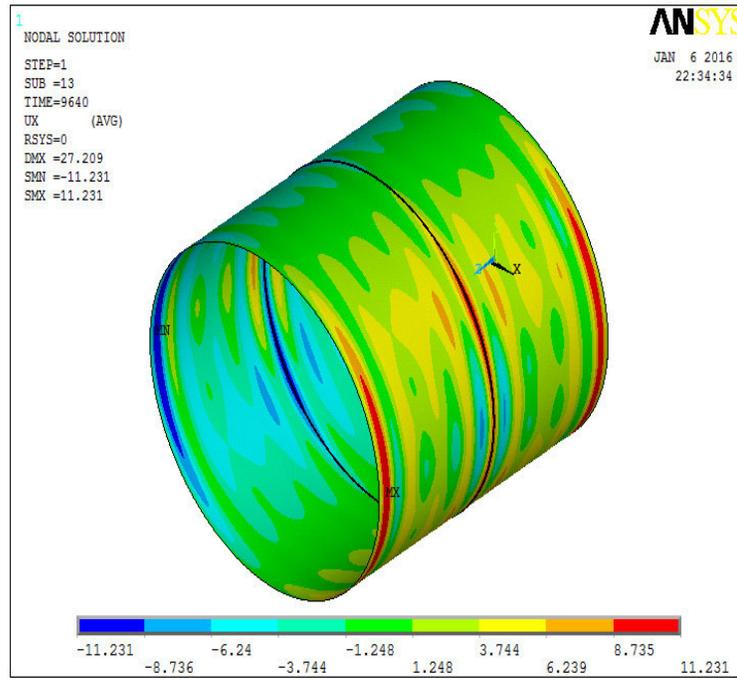


Figure 3.85: Mode de flambage de coque cylindrique –Test 02

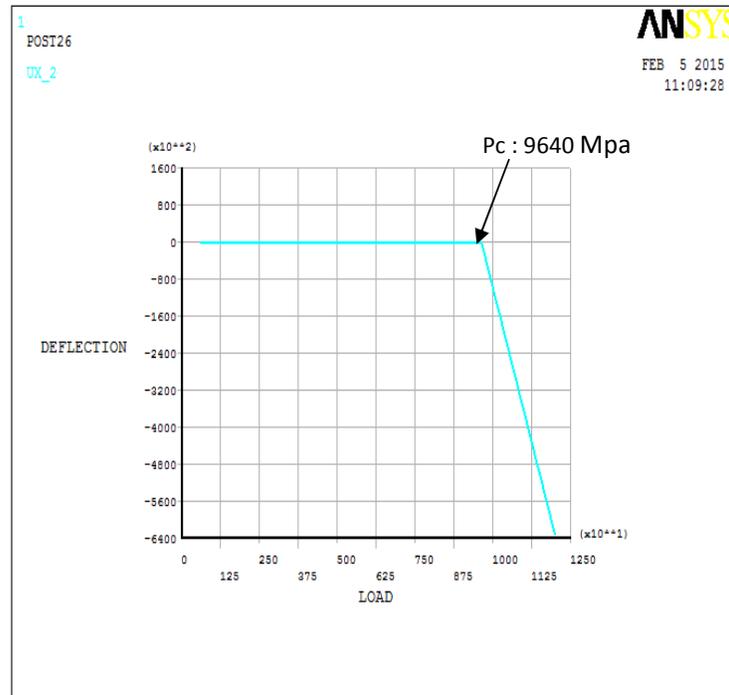


Figure 3.86: Courbe charge-déplacement – test 02-

**Test 03:**  $A/t=2$ ,  $\lambda/t=2$  et  $d=0$  avec  $Nb_{\text{défaut}} = 01$

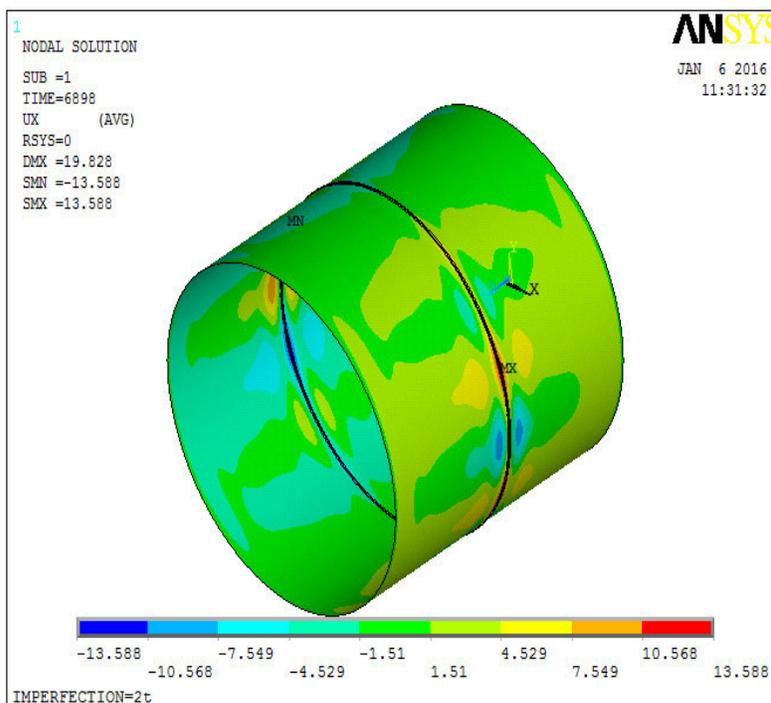


Figure 3.87: Mode de flambage de coque cylindrique –Test 03

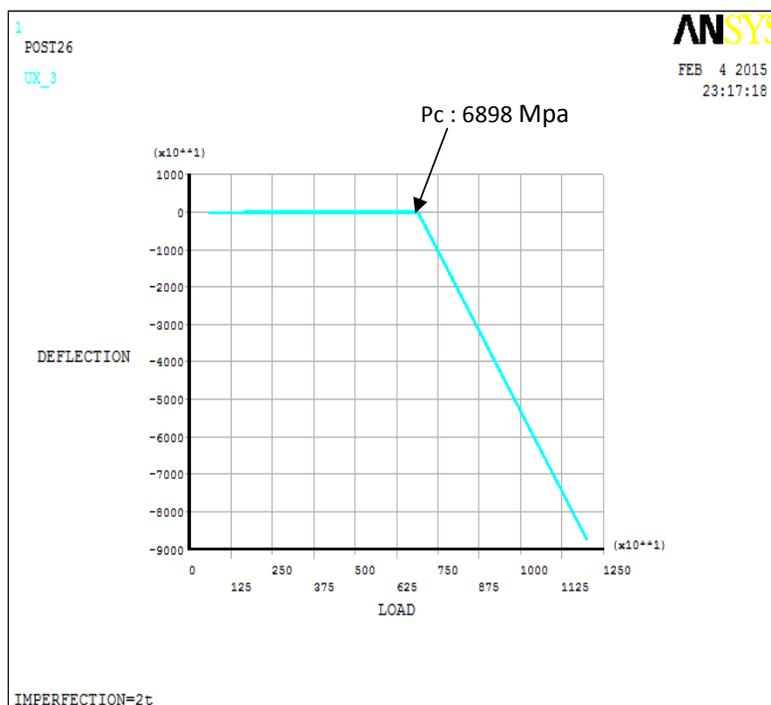


Figure 3.88: Courbe charge-déplacement –test 03 -

**Test 04:**  $A/t=1$ ,  $\lambda/t=1$  et  $d=0$  avec  $Nb_{\text{défaut}} = 02$

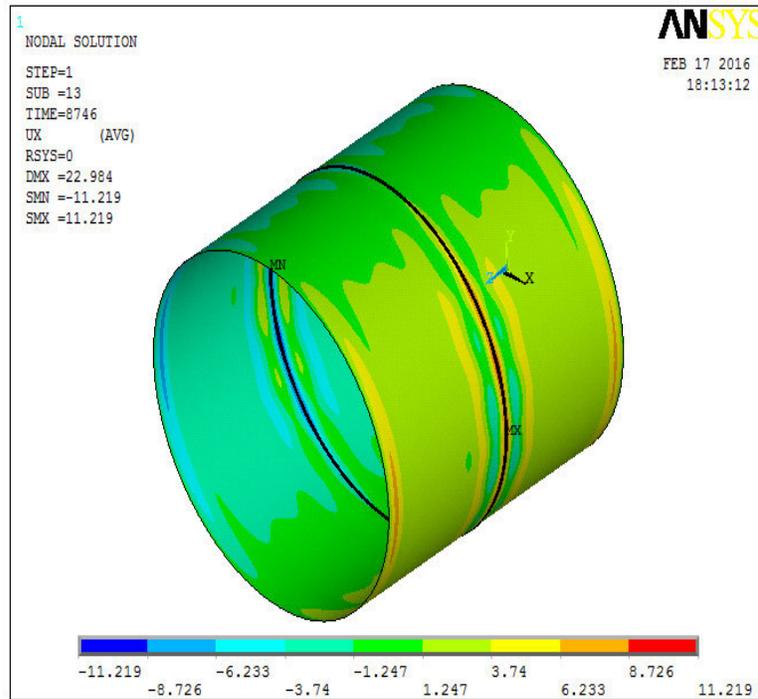


Figure 3.89: Mode de flambage de coque cylindrique –Test 04

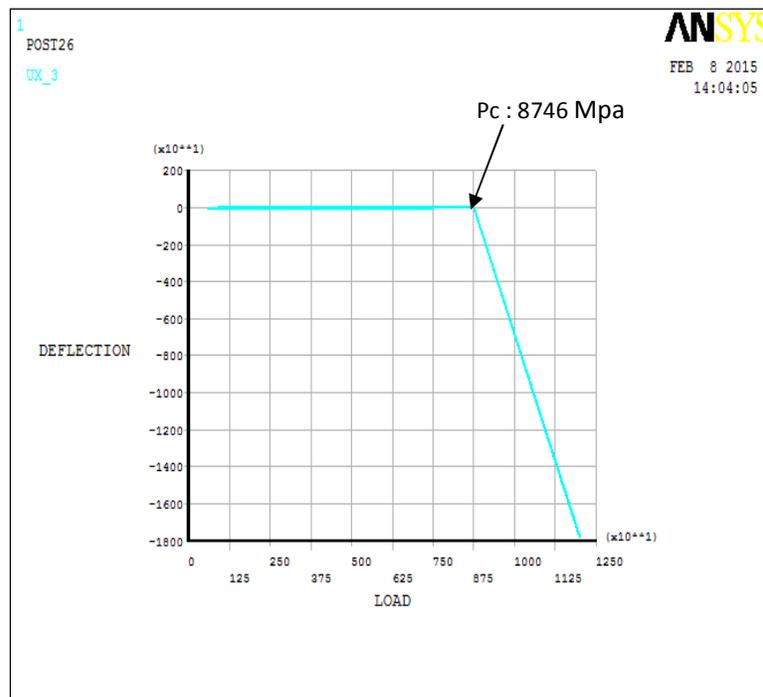
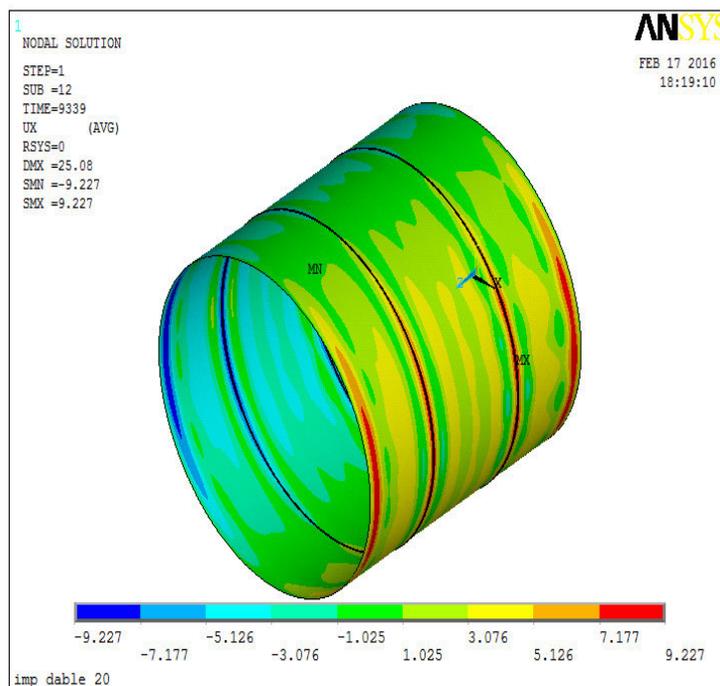
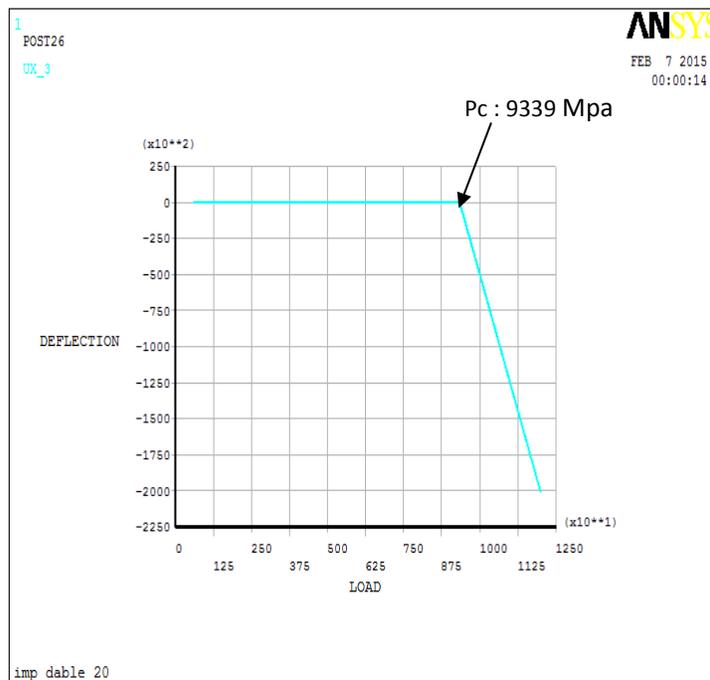


Figure 3.90: Courbe charge-déplacement - test 04 -

**Test 05 :**  $A/t=1$ ,  $\lambda/t= 1$  et  $d=250$  avec  $Nb_{\text{défaut}} = 02$



*Figure 3.91: Mode de flambage de coque cylindrique –Test 05*



*Figure 3.92: Courbes charge-déplacement –test 05-*

La simulation qui a été conduite dans cette étude sur la base de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la variation de la charge critique dans le problème du flambage des coques cylindriques minces soumises à un chargement de compression axial lorsque celles-ci présentent, deux défauts géométriques axisymétriques localisés.

L'étude montre qu'en présence de situation de couplage complet entre ces défauts, on obtient une chute de la charge critique très supérieure à celle observée dans le cas des défauts isolés de référence. Cette variation a un intérêt important dans le cas du dimensionnement des coques cylindriques minces. L'effet de l'interaction est important car il dégrade les performances vis-à-vis du flambage lorsque l'amplitude du défaut devient comparable à l'épaisseur de la coque.

D'après le tableau 3.16 on constate que la probabilité de défaillance en flambement diminue lorsque les défauts sont éloignés entre eux comparativement entre le test 04 et 05. Dans ce sens, on peut considérer que la distance de couplage comme variable aléatoire a un effet important sur la détermination de la charge critique.

Test N°	Nb défaut	A/t	$\lambda/t$	D en mm	$\sigma_c$
01	00	0	0	/	10154
02	01	1	1	/	9640
03	01	2	2	/	6897.9
04	02	1	1	0	8746.2
05	02	1	1	250	9338.7

*Tableau 3.16 : Evolution de la charge critique avec interaction des défauts*

7.1 Effacement du défaut axisymétrique par pression

Afin d'étudier l'influence de la pression interne sur les défauts axisymétriques soit triangulaires où paraboliques et déterminer la valeur de pression interne idéale nous procéderons à plusieurs essais sur des coques cylindriques avec des imperfections initiales de différents types et amplitudes ;

7.1.1 Avec Défaut triangulaire :

$\lambda$	A/t	Pression (en Mpa)				
		0	0,01	0,05	0,1	0,2
		$\sigma_c/\sigma_{cl}$				
1	0,5	0,62	1,04	1,18	1,21	1,09
1	1	0,45	1,03	0,98	0,82	0,59
1	1,5	0,39	1,01	0,82	0,62	0,40
1	2	0,36	0,98	0,70	0,49	0,30
1	2,5	0,36	0,95	0,61	0,40	0,24
1	3	0,35	0,92	0,54	0,34	0,20

Tableau 3.17 : Contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut triangulaire initial) pressurisée sous compression axiale

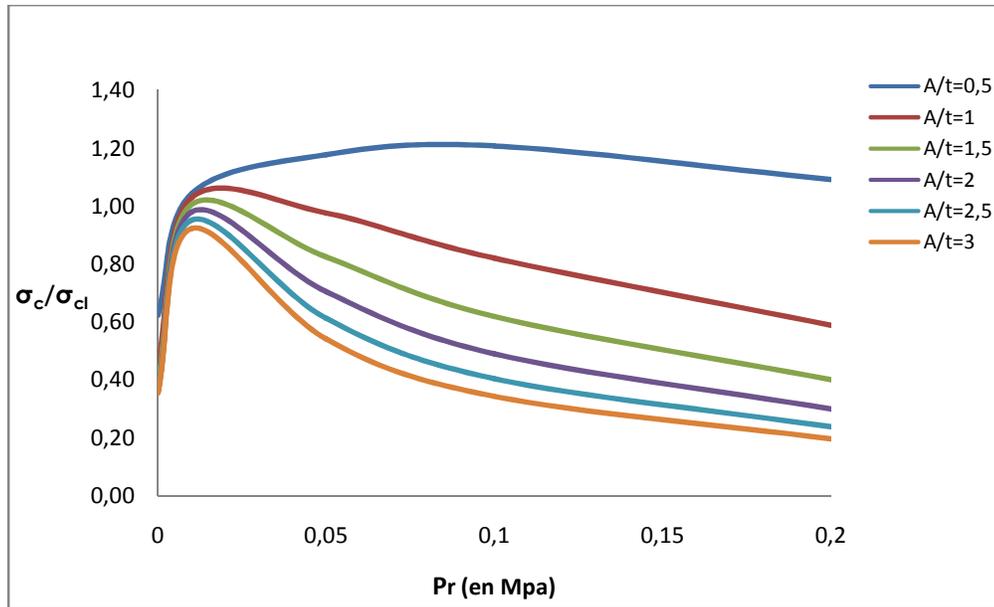


Figure 3.93 : Evolution de la contrainte critique pour une coque cylindrique (avec défaut triangulaire initial) pressurisée sous compression axiale

7.1.2 Avec Défaut parabolique :

$\lambda$	A/t	Pression (en Mpa)				
		0	0,01	0,05	0,1	0,2
		$\sigma_c/\sigma_{cl}$				
1	0,5	0,56	1,04	1,14	1,12	0,96
1	1	0,40	1,01	0,91	0,74	0,51
1	1,5	0,35	0,99	0,75	0,54	0,34
1	2	0,33	0,96	0,64	0,43	0,26
1	2,5	0,33	0,92	0,55	0,35	0,20
1	3	0,36	0,89	0,48	0,30	0,17

Tableau 3.18 : la contrainte critique pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial) pressurisée sous compression axiale

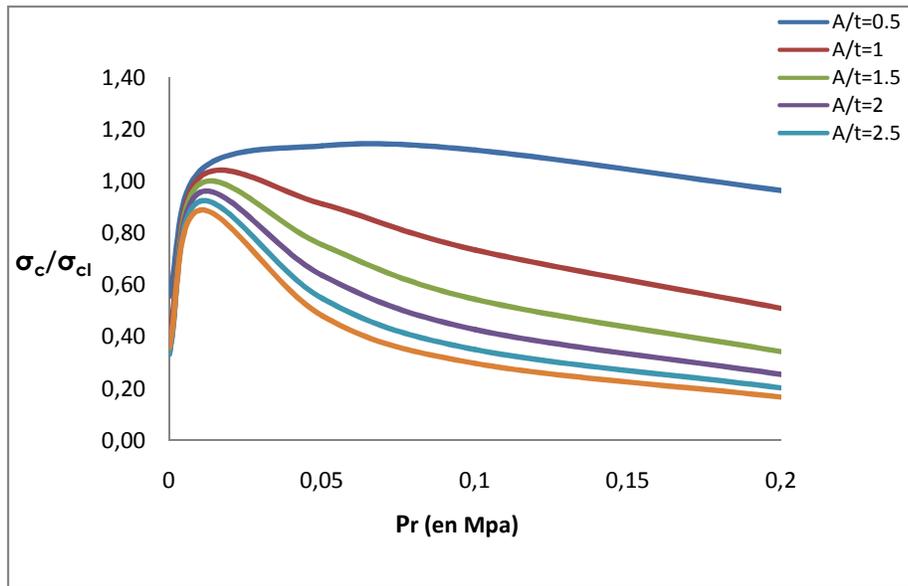


Figure 3.94 : Evolution de la contrainte critique pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial) pressurisée sous compression axiale

Les tableaux et les figures ci-dessus montrent que la pression interne idéale est de 0,01MPa, pour le renforcement de la structure de la coque cylindrique présentant différentes amplitudes de défaut sous chargement axial.

Cas 01 :  $A/t=0,5$  et  $P_r=0.01$  Mpa

Imperfection		Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Sans pression) (Mpa)	Pc ANSYS (avec pression) (Mpa)	Evolution (%)
$\lambda$	A/t					
1	0,5	0.01	10167	5654,7	10558	+ 87%

Tableau 3.19 : comparaison entre les contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial ( $A/t=0.5$ )) pressurisée et non pressurisée sous compression axiale

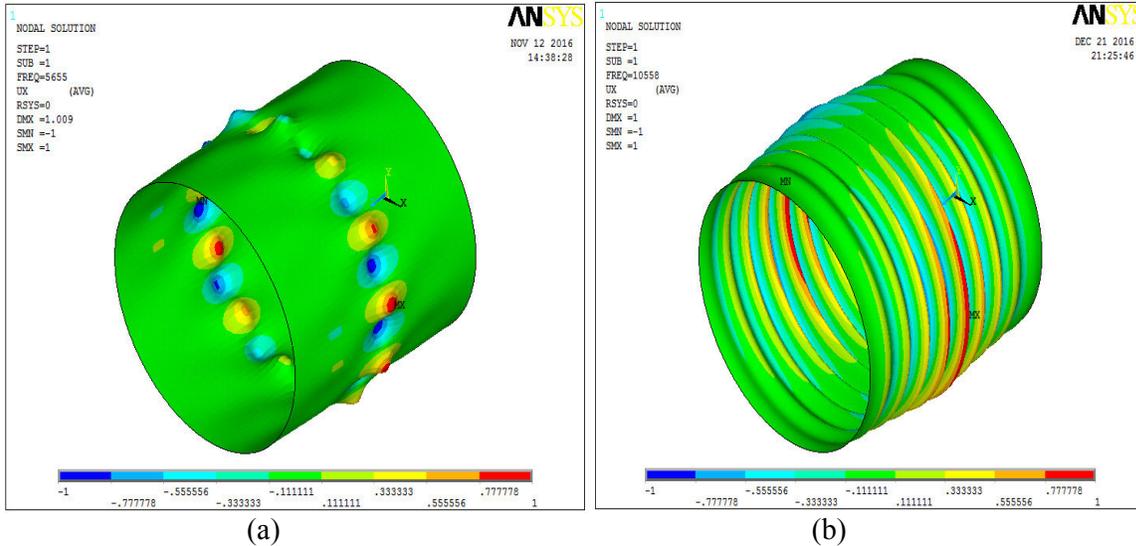


Figure 3.95 : mode de flambage de coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=0.5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée ( $P_r=0.01$ Mpa)

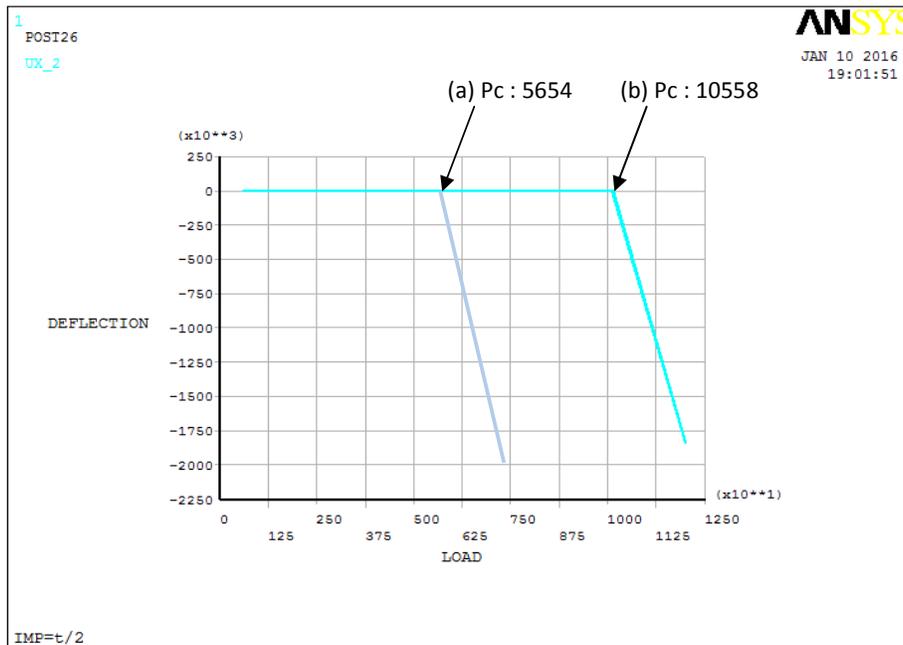


Figure 3.96 : Courbes chargement-déplacement pour coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=0.5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée

Cas 02 :  $A/t=1$  et  $P_r=0.01$  Mpa

Imperfection		Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Sans pression) (Mpa)	Pc ANSYS (avec pression) (Mpa)	Evolution (%)
$\lambda$	A/t					
1	1	0.01	10167	4043	10318	+ 155%

Tableau 3.20 : comparaison entre les contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial ( $A/t=1$ )) pressurisée et non pressurisée sous compression axiale

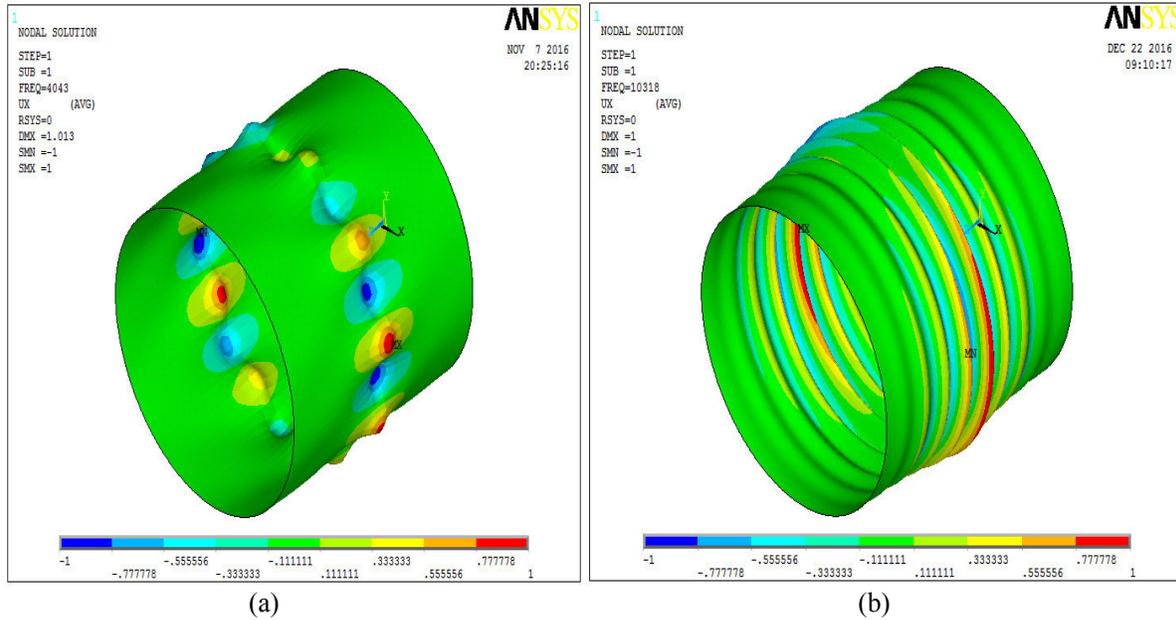


Figure 3.97 : mode de flambage de coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=1$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée

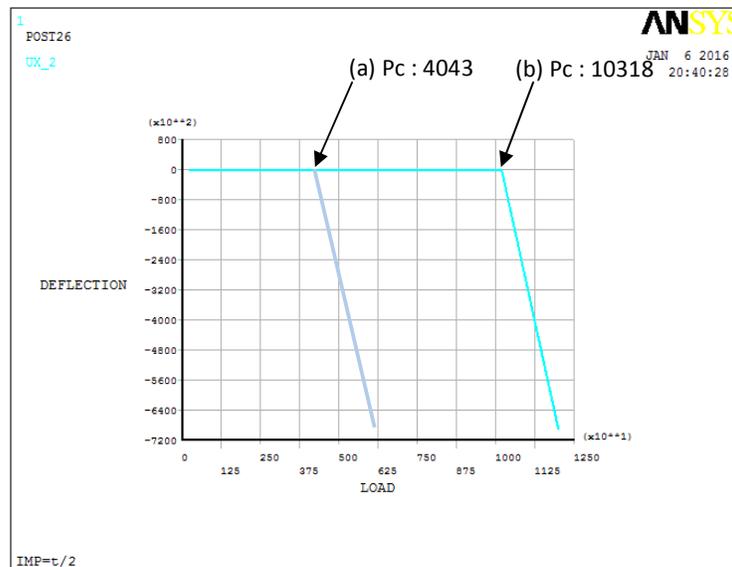


Figure 3.98 : Courbes chargement-déplacement pour coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=1$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée

Cas 03 :  $A/t=1,5$  et  $P_r=0.01$  Mpa

Imperfection		Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Sans pression) (Mpa)	Pc ANSYS (avec pression) (Mpa)	Evolution (%)
$\lambda$	A/t					
1	1,5	0.01	10167	3533,5	10052	+ 184%

Tableau 3.21 : comparaison entre les contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial ( $A/t=1,5$ )) pressurisée et non pressurisée sous compression axiale

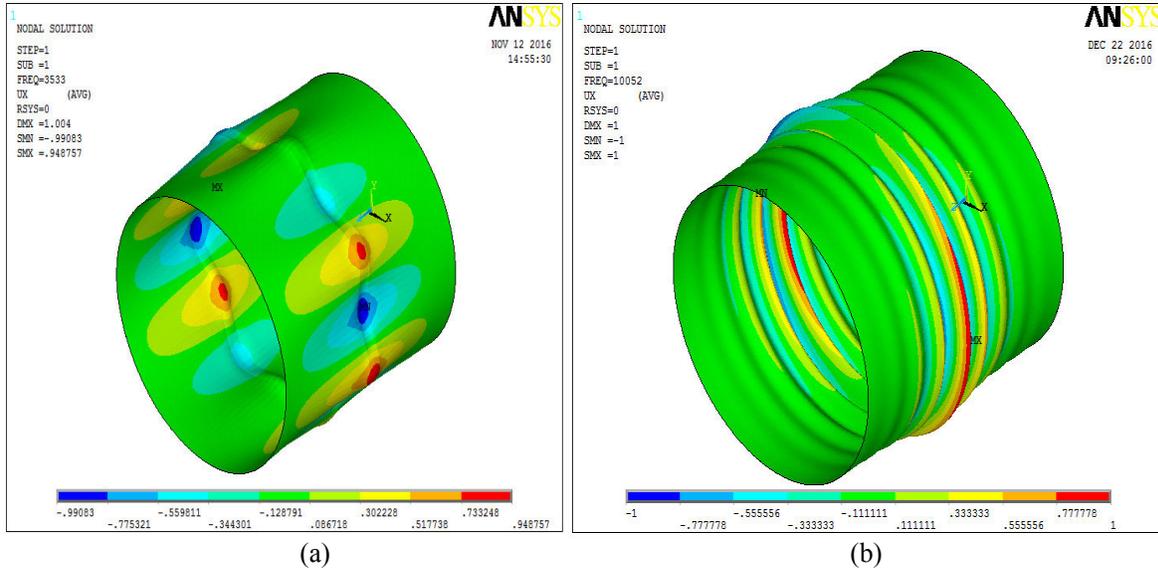


Figure 3.99 : mode de flambage de coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=1.5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée ( $P_r=0.01$ Mpa)

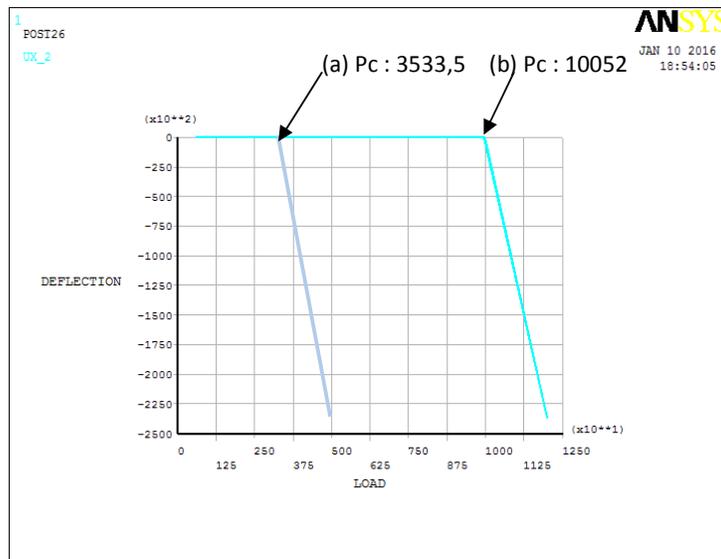


Figure 3.100 : Courbes chargement-déplacement pour coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=1,5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée

Cas 04 :  $A/t=2,5$  et  $P_r=0.01$  Mpa

Imperfection		Pression interne (Mpa)	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Sans pression) (Mpa)	Pc ANSYS (avec pression) (Mpa)	Evolution (%)
$\lambda$	A/t					
1	2,5	0.01	10167	3373,6	9377	+ 178%

Tableau 3.22 : comparaison entre les contraintes critiques pour une coque cylindrique (avec défaut parabolique initial ( $A/t=2,5$ )) pressurisée et non pressurisée sous compression axiale

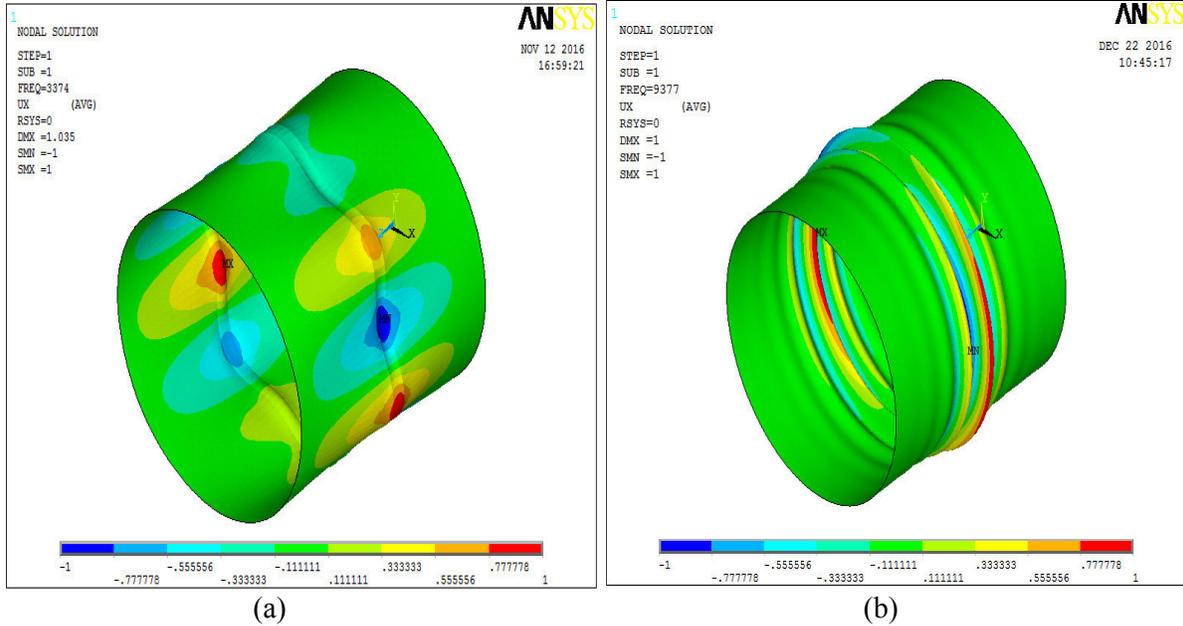


Figure 3.101 : mode de flambage de coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=2.5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée ( $P_r=0.01$  Mpa)

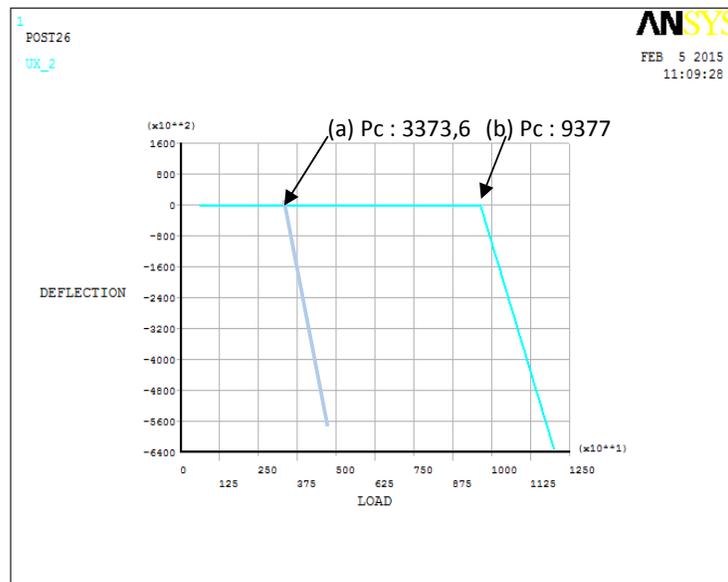
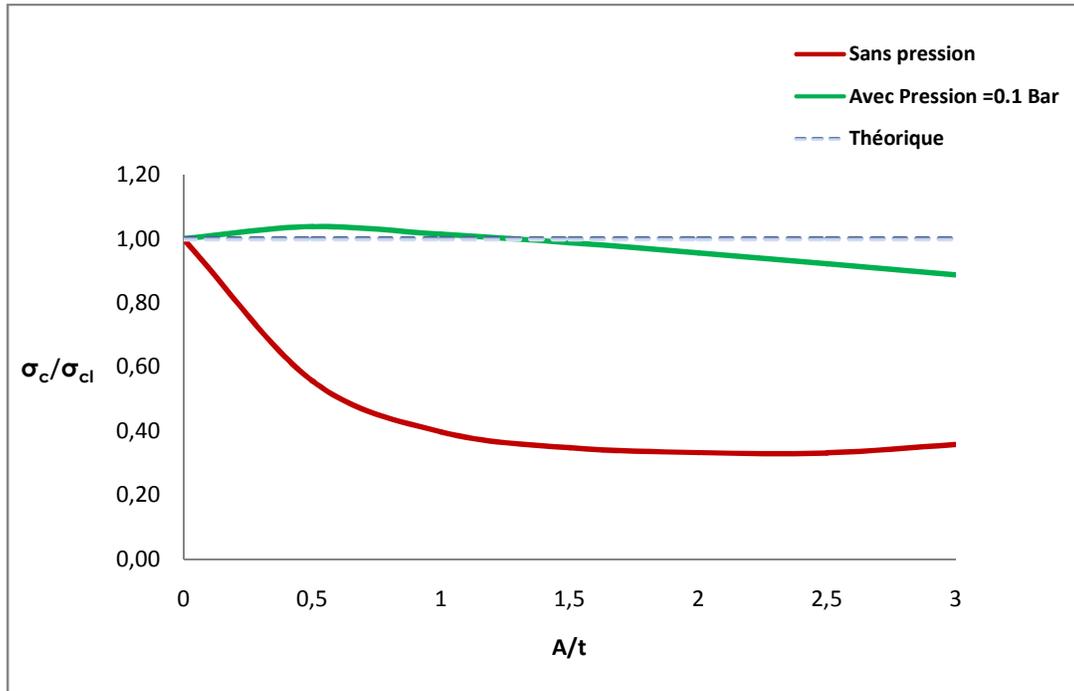


Figure 3.102 : Courbes chargement-déplacement pour coque cylindrique avec défaut parabolique ( $A/t=2,5$ ) sous chargement axial (a) : non pressurisée (b) : pressurisée



*Figure 3.103: Coque cylindrique pressurisée avec une imperfection géométrique initiale sous compression axiale*

La mise en pression augmente la charge critique dès les basses pressions avec effacement des défauts comme montré dans la figure (3.95),(3.97),(3.99) et (3.101). Cet effacement est relatif à la pression interne et quelque soit son amplitude initiale. On constate aussi que la contrainte critique tend vers la contrainte classique lorsqu'on injecte des basses pressions (Figure3.103).

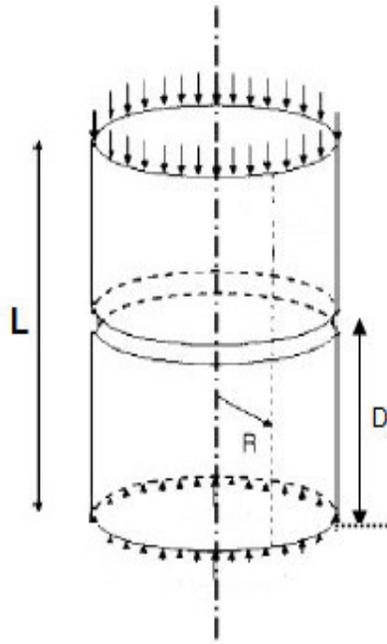
Nous concluons que la pression inhibe l'effet déstabilisant des imperfections initiales, qui sont les causes principales de diminution de la charge critique.

Lorsque le cylindre n'est pas pressurisé l'imperfection provoque une chute de la capacité portante. Le gain de charge critique avec pression est rapide dans le cas purement axisymétrique.

## 7.2 Influence de la position du défaut sur la contrainte critique :

Nous allons continuer, dans ce travail, à étudier les différents paramètres significatifs sur la contrainte critique pour une coque cylindrique sous chargement axial avec une imperfection initiale, mais dans cette partie nous allons étudier l'influence du positionnement axial de cette imperfection sur la valeur de la contrainte critique.

Afin de connaître précisément l'influence du positionnement des défauts sur l'évolution de la charge critique pour une coque cylindrique sous chargement axial nous allons implanter le défaut sur différentes positions axiales de la coque cylindrique avec  $L=2R$ ,  $A/t = 0.5, 1$  et  $2$ .  $D$  étant la variable qui mesure la distance entre le fond de la coque cylindrique et la localisation axiale de l'imperfection axisymétrique figure (3.104).



*Figure 3.104 : Coque cylindrique sous compression axiale avec différente position du défaut axisymétrique initial*

Cas de  $A/t=0.5$  :

A/t	L (mm)	D (mm)	D/L	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	$\sigma / \sigma_{cl}$
0.5	10000	2500	0.25	10167	5772	0.568
		5000	0.5	10167	5685.4	0.559
		7500	0.75	10167	5576.7	0.549

Tableau 3.23 : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique ( $A/t=0.5$ )

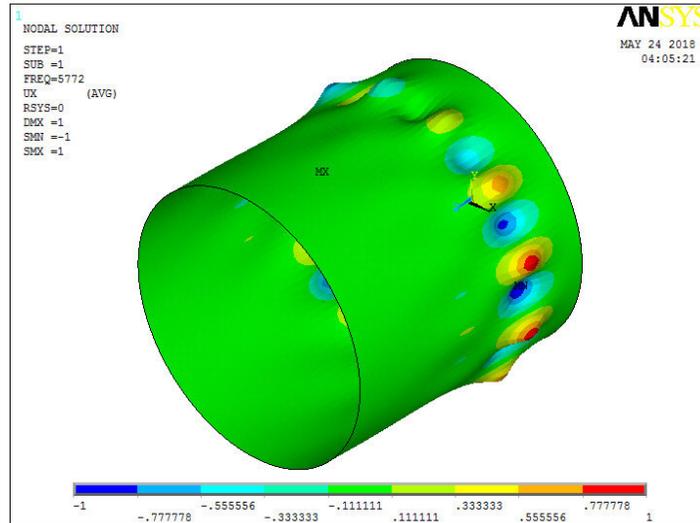


Figure 3.105 : Mode de flambage-Cas de  $A/t=0.5$  ( $D/L=0.25$ )

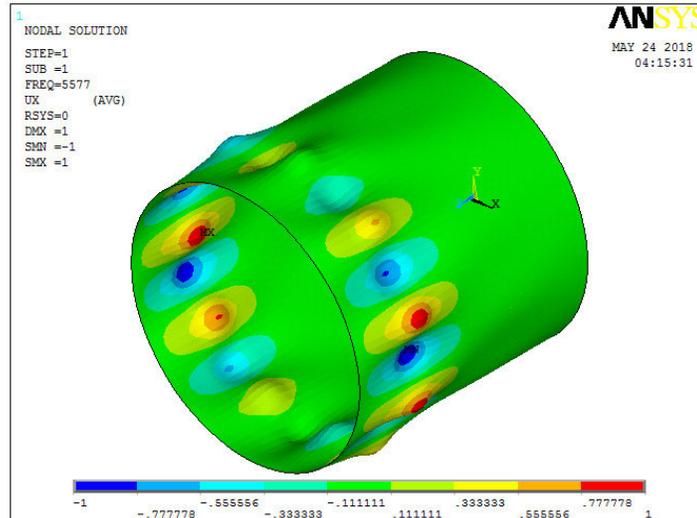


Figure 3.106 : Mode de flambage-Cas de  $A/t=0.5$  ( $D/L=0.75$ )

Cas de  $A/t=1$  :

A/t	L (mm)	D (mm)	D/L	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	$\sigma / \sigma_{cl}$
1	10000	2500	0.25	10167	3598.1	0.354
		5000	0.5	10167	3434	0.338
		7500	0.75	10167	3168.9	0.312

Tableau 3.24 : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique ( $A/t=1$ )

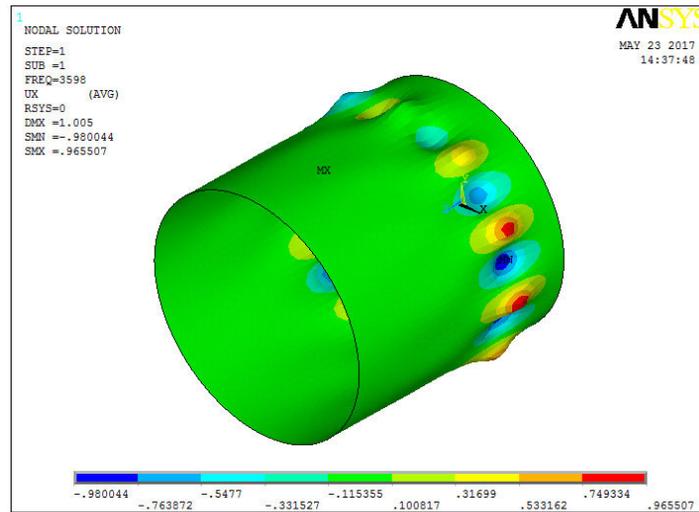


Figure 3.107 : Mode de flambage-Cas de  $A/t=1$  ( $D/L=0.25$ )

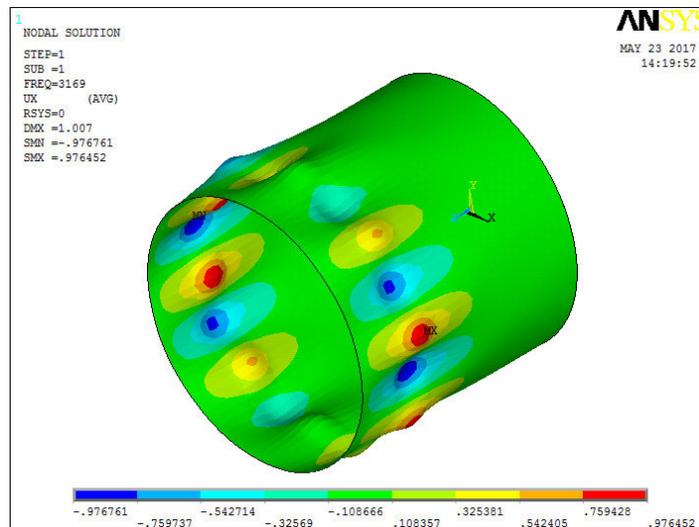


Figure 3.108 : Mode de flambage-Cas de  $A/t=1$  ( $D/L=0.75$ )

Cas de  $A/t=2$  :

A/t	L (mm)	D (mm)	D/L	Pc théorique (Mpa)	Pc ANSYS (Mpa)	$\sigma / \sigma_{cl}$
2	10000	2500	0.25	10167	2727	0.268
		5000	0.5	10167	2087.2	0.205
		7500	0.75	10167	1596	0.157

Tableau 3.25 : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique ( $A/t=2$ )

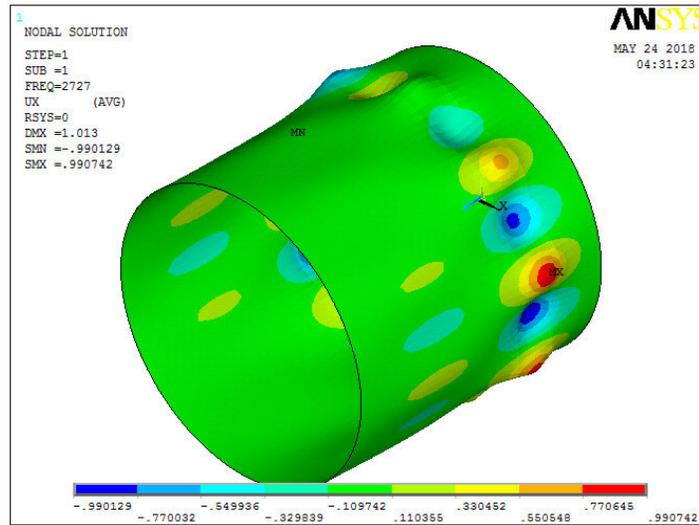


Figure 3.109 : Mode de flambage-Cas de  $A/t=2$  ( $D/L=0.25$ )

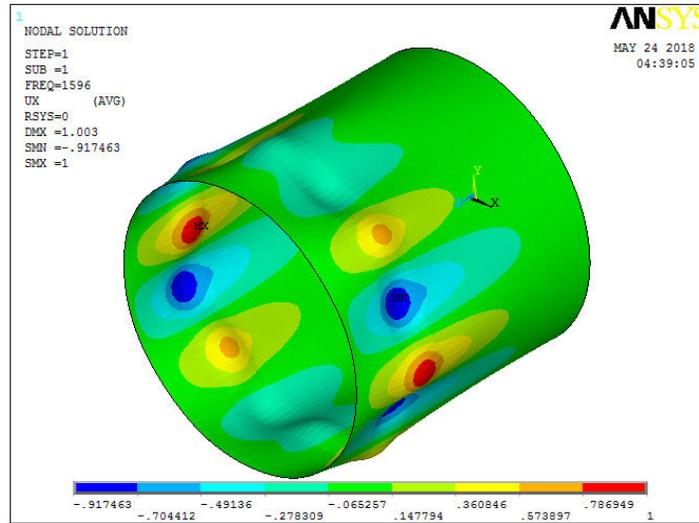
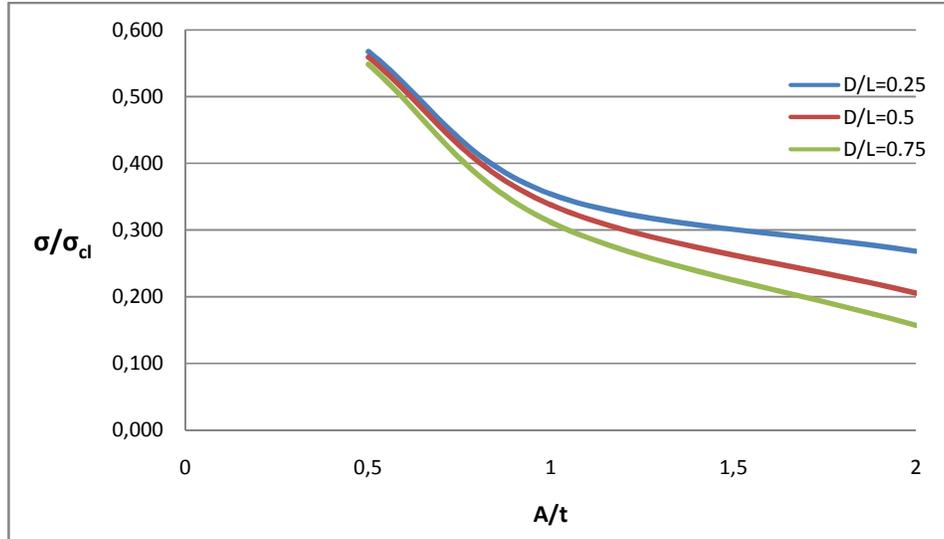


Figure 3.110 : Mode de flambage-Cas de  $A/t=2$  ( $D/L=0.75$ )



*Figure 3.111 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'amplitude de défaut axisymétrique implanté sur différente position axiale*

Les courbes de la figure (3.111) présentent la variation de la charge critique en fonction du paramètre  $A/t$  où le défaut est implanté sur différente position axiale d'une coque cylindrique sous chargement axial. On constate que l'évolution de la charge critique est en fonction du positionnement du défaut. La probabilité de défaillance en flambement augmente lorsque les défauts sont positionnés à la partie supérieure des coques cylindriques. L'influence du positionnement de défaut est augmentée proportionnellement avec le paramètre  $A/t$ . Dans ce sens, on peut considérer que le positionnement de défaut comme variable aléatoire à un effet important sur la détermination de la charge critique et son influence est proportionnelle avec le paramètre  $A/t$ .

7.2.1. Influence du rapport L/R sur le positionnement du défaut

Cas de L=R :

A/t	L	D (variable)	D/L	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cL}$	$\sigma_c/\sigma_{cl}$
1	5000	1250	0.25	4366.2	10167	42.9%
		2000	0.4	3753.3	10167	36.9%
		2250	0.45	3631.1	10167	35.7%
		2500	0.5	3363.6	10167	33.1%
		2750	0.55	3323.1	10167	32.7%
		3000	0.6	3205.3	10167	31.5%
		3750	0.75	3059.8	10167	30.1%

Tableau 3.26 : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique L= 5000

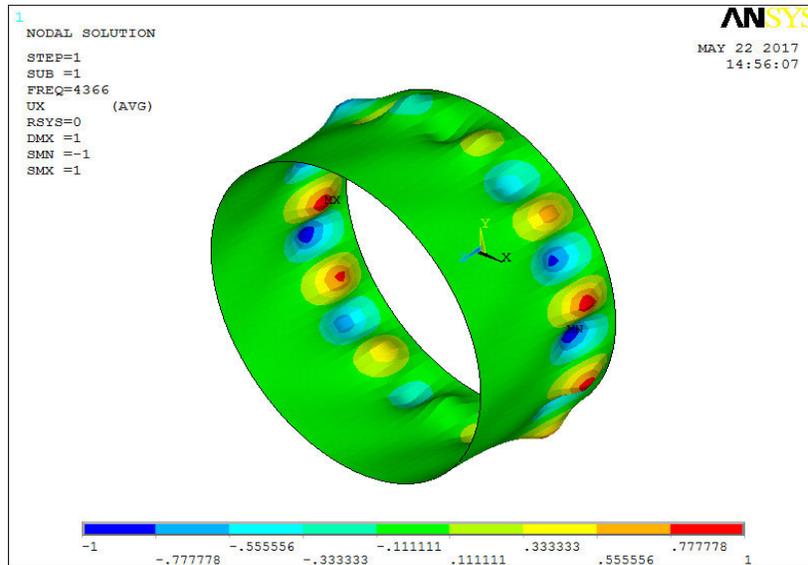


Figure 3.112 : Mode de flambage-Cas de L=R et ( D/L=0.25)

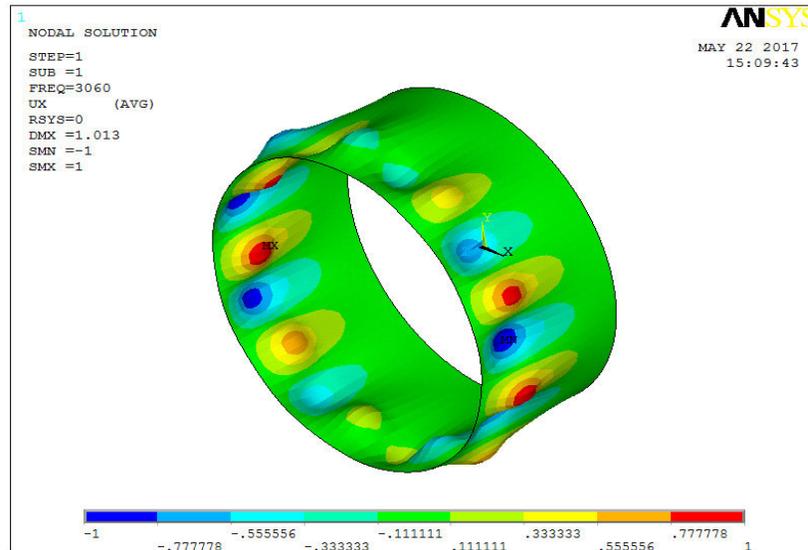


Figure 3.113 : Mode de flambage-Cas de L=R (D/L=0.75)

Cas de  $L=2R$  :

A/t	L	D (variable)	D/L	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cl}$	$\sigma_c/\sigma_{cl}$
1	10000	2500	0.25	3598.1	10167	35.4%
		4000	0.4	3447.6	10167	33.9%
		4500	0.45	3445.7	10167	33.9%
		5000	0.5	3434	10167	33.8%
		5500	0.55	3449.2	10167	33.9%
		6000	0.6	3438	10167	33.8%
		7500	0.75	3168.9	10167	31.2%
		9000	0.9	3085.1	10167	30.3%

Tableau 3.27 : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique  $L= 10000$

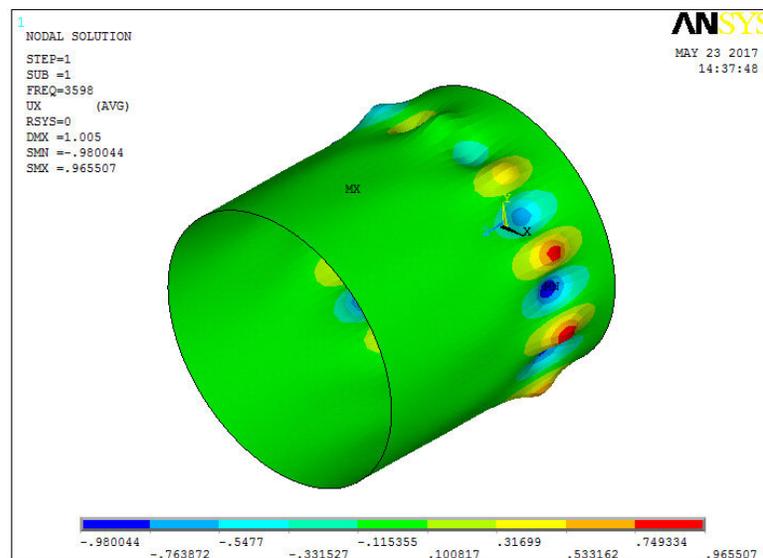


Figure 3.114 : Mode de flambage-Cas de  $L=2R$  ( $D/L=0.25$ )

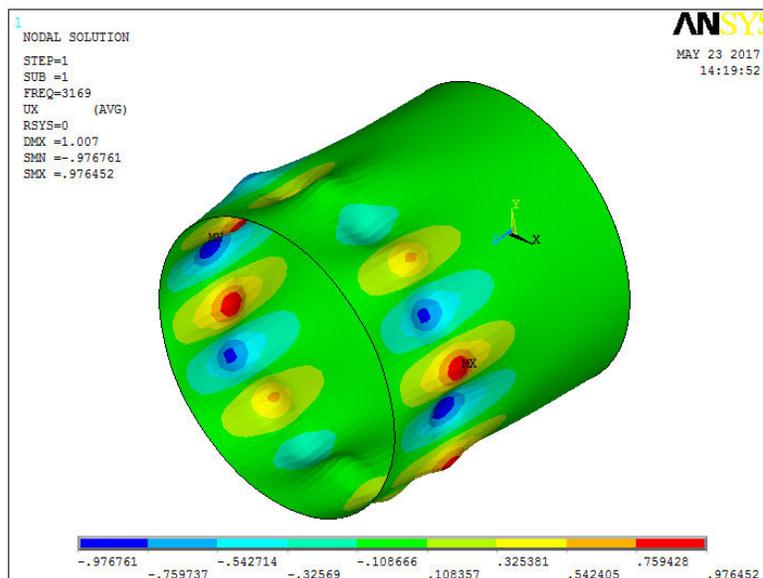


Figure 3.115 : Mode de flambage-Cas de  $L=2R$  ( $D/L=0.75$ )

Cas de  $L=3R$  :

A/t	L	D (variable)	D/L	$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cl}$	$\sigma_c/\sigma_{cl}$
1	15000	3750	0.25	3449.1	10167	33.9%
		6000	0.4	3416.8	10167	33.6%
		6750	0.45	3410.6	10167	33.5%
		7500	0.5	3404.6	10167	33.5%
		8250	0.55	3406	10167	33.5%
		9000	0.6	3409.9	10167	33.5%
		11250	0.75	3376.9	10167	33.2%

Tableau 3.28 : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique  $L= 15000$

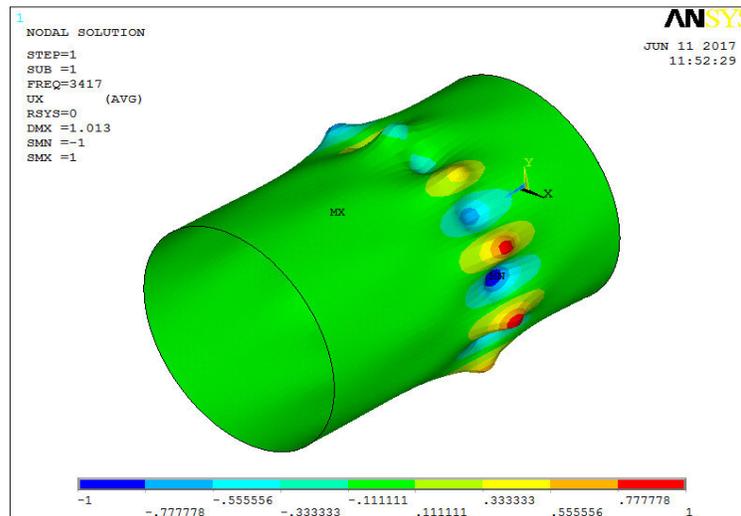


Figure 3.116 : Mode de flambage-Cas de  $L=3R$  ( $D/L=0.4$ )

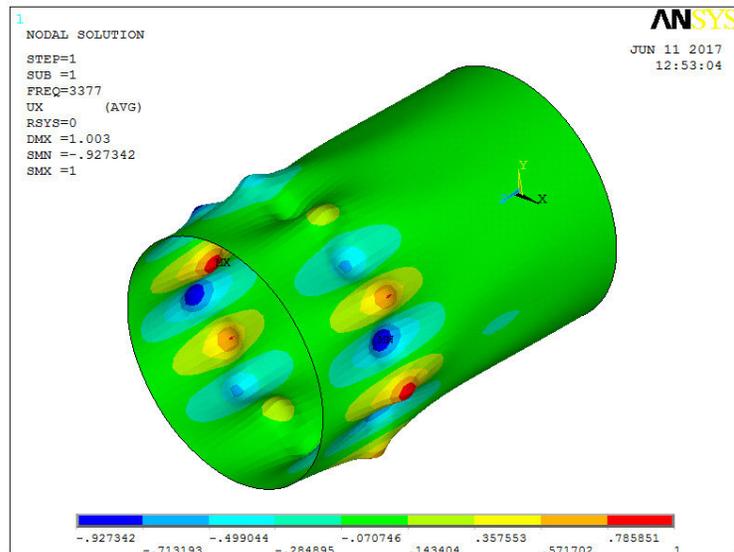
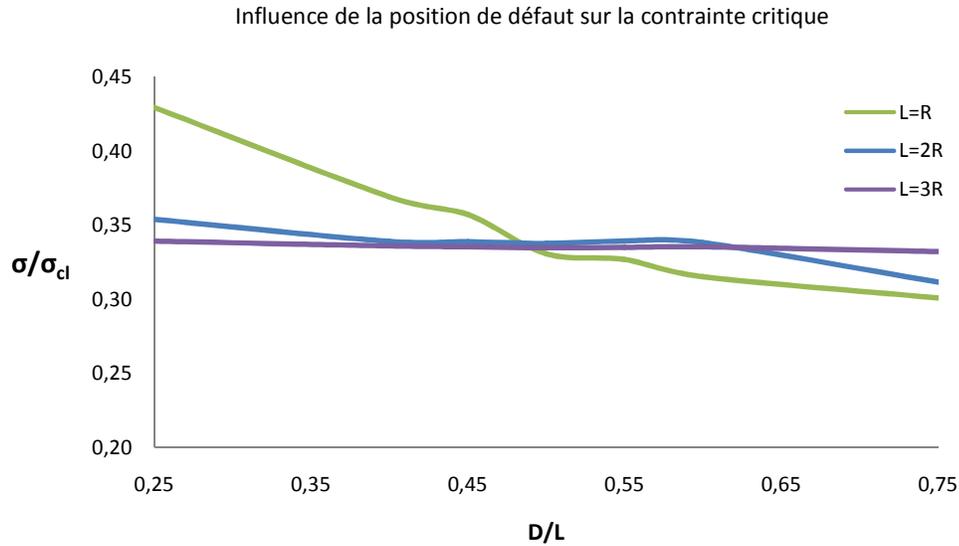


Figure 3.117 : Mode de flambage-Cas de  $L=3R$  ( $D/L=0.75$ )



*Figure 3.118 : Evolution de la contrainte critique en fonction de la position du défaut axisymétrique*

Les graphes présentent l'influence de différentes implantations axiales des défauts sur coques cylindriques sous chargement axial. L'évolution de la charge critique est en fonction du positionnement du défaut et le rapport L/R. Son influence arrive jusqu'à 13% pour le cas L=R.

### 8. CONCLUSION

Notre étude montre que la branche post-critique fortement instable d'une coque cylindrique parfaite non pressurisée sous chargement axial est significativement stabilisée par la mise en pression, et le mode de flambage passe progressivement d'un mode asymétrique à un mode axisymétrique.

La déformation de pré-flambage peut donc être considérée comme une imperfection initiale axisymétrique.

Nous avons montré que la charge critique est considérablement réduite en présence des imperfections géométriques initiales dans le cas du cylindre sous compression axiale. Sous chargement axial, le cylindre présente alors une grande sensibilité aux imperfections.

Le comportement de la coque est fortement lié au rapport  $A/t$  aussi la sensibilité de la coque au flambement est étudiée en fonction de ce rapport.

D'une manière générale on note une perte considérable de rigidité de la structure due aux défauts localisés en comparaison avec la formule de la charge classique de flambement des coques en compression.

Le défaut parabolique est un défaut défavorable sur le comportement de la structure suivant la géométrie de la coque étudiée  $R/t= 250$  et  $L/R=2$ , cette configuration nous place dans le cas des coques minces et donc très sensibles aux défauts de formes localisées.

Ce défaut est très facilement modélisable sous ANSYS à l'aide de l'élément SHELL63.

Le rapport  $L/R$  n'a aucune influence sur la charge critique suivant notre étude.

La méthode des éléments finis utilisant l'élément SHELL 63 ANSYS a permis de valider la formule analytique présentée par Donnel pour évaluer la charge critique de flambage des coques cylindriques minces soumises à un chargement de compression axiale uniforme.

Le comportement des coques cylindriques sous pression externe est très sensible aux flambements radiaux comme nous l'avons montré dans notre étude.

La branche post-critique fortement instable du cylindre parfait non pressurisé est significativement stabilisée par la mise en pression. La déformation de pré-flambage peut donc être considérée comme une imperfection initiale axisymétrique.

Notre étude confirme que la charge critique augmente dès les basses pressions.

L'étude montre qu'on obtient une chute de la charge critique et cela est dû à l'influence des caractéristiques physiques des défauts et plus spécialement leurs amplitudes. Cette variation a un intérêt important dans le cas de dimensionnement des coques cylindriques minces.

L'approche numérique nous a permis de mieux jauger l'incidence des défauts sur le comportement de ces structures en prenant en compte des défauts axisymétriques de

forme parabolique. On montre que la charge critique est considérablement réduite par la présence de ce type de défaut.

On constate aussi que quelque soit l'amplitude du défaut considéré, les charges critiques obtenues avec un défaut triangulaire sont toujours plus grandes que celles calculées avec un défaut parabolique. Le défaut parabolique est le plus défavorable sur le comportement de la structure et ce pour les géométries de coques que l'on a étudiée  $R/t=250$  et  $L/R=2$ .

La simulation conduite dans ce travail sur la base de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la variation de la charge critique dans le problème du flambage des coques cylindriques minces soumises à un chargement de compression axiale lorsque celles-ci présentent deux défauts géométriques axisymétriques localisés qui interagissent entre eux. On montre aussi que le couplage a quasiment le même effet sur le comportement de la structure étudiée en présence de deux défauts. L'effet de l'interaction est important car il dégrade les performances vis-à-vis du flambage lorsque l'amplitude du défaut devient comparable à l'épaisseur de la coque. L'étude a montré que les paramètres les plus influents dans ce problème sont la longueur d'onde, l'amplitude du défaut et la distance du couplage.

Dans notre étude on constate que la probabilité de défaillance au flambement diminue lorsque les défauts sont éloignés entre eux. Dans ce sens, on peut considérer que la distance de couplage comme variable aléatoire a un effet important sur la détermination de la charge critique.

On a montré que le positionnement de défaut comme variable aléatoire, à prendre en considération, a un effet important sur la détermination de la charge critique.

La probabilité de défaillance au flambement augmente lorsque les défauts sont positionnés à la partie supérieure des coques cylindriques et leurs influences sont proportionnelles avec les rapports  $A/t$  et  $L/R$ .

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVE DU TRAVAIL

Cette étude menée dans le but d'étudier la stabilité des coques cylindriques minces pressurisées et non pressurisées soumises aux chargements axiaux et radiaux, a essentiellement été abordée par une approche numérique.

Nous avons essayé de procéder aux plus grands nombres possible d'essais numérique, afin de mettre en lumière les paramètres pouvant exercer une influence significative sur le comportement d'une coque cylindrique mince. Nous rappelons ci-dessous les principales conclusions que nous avons pu en tirer :

Le rapport  $L/R$  n'a aucune influence sur la charge critique suivant notre étude ;

La méthode des éléments finis utilisant l'élément SHELL 63 ANSYS a permis de valider la formule analytique présentée par Donnell pour évaluer la charge critique de flambage des coques cylindriques minces soumises à un chargement de compression axiale uniforme ;

Le comportement des coques cylindriques sous pression externe est très sensible aux flambements radiaux comme nous l'avons montré dans notre étude ;

La branche post-critique fortement instable du cylindre parfait non pressurisé est significativement stabilisée par la mise en pression. La déformée de pré-flambage peut donc être considérée comme une imperfection initiale axisymétrique ;

Notre étude montre que la charge critique augmente dès les basses pressions ;

L'étude montre qu'on obtient une chute de la charge critique, cela est dû à l'influence des caractéristiques physiques des défauts et plus spécialement leurs amplitudes. Cette variation a un intérêt important dans le cas de dimensionnement des coques cylindriques minces ;

L'approche numérique nous a permis de mieux jauger l'incidence des défauts sur le comportement de ces structures en prenant en compte des défauts axisymétriques de forme parabolique. On montre que la charge critique est considérablement réduite par la présence de ce type de défaut ;

Nous avons constaté aussi que quelle que soit l'amplitude du défaut considéré, les charges critiques obtenues avec un défaut triangulaire sont toujours plus grandes que celles calculées avec un défaut parabolique. Le défaut parabolique est le plus défavorable sur le comportement de la structure et ce pour les géométries de coques que l'on a étudiées  $R/t=250$  et  $L/R=2$  ;

La simulation qui a été conduite dans ce travail sur la base de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la variation de la charge critique dans le problème du flambage des coques cylindriques minces soumises à un chargement de compression axiale lorsque celles-ci présentent deux défauts géométriques axisymétriques localisés qui interagissent entre eux. On a montré aussi que le couplage a quasiment le même effet sur le comportement de la structure étudiée en présence de deux défauts. L'effet de l'interaction est important car elle dégrade les performances vis-à-vis du flambage lorsque l'amplitude du défaut devient comparable à l'épaisseur de la coque. L'étude a montré que les paramètres les plus influents dans ce problème sont la longueur d'onde, l'amplitude du défaut et la distance du couplage ;

D'après notre étude nous constatons que la probabilité de défaillance au flambement diminue lorsque les défauts sont éloignés entre eux. Dans ce sens, nous pouvons considérer que la distance de couplage comme une variable aléatoire a un effet important sur la détermination de la charge critique.

Nous avons montré que le positionnement de défaut comme variable aléatoire, à prendre en considération, a un effet important sur la détermination de la charge critique ;

La probabilité de défaillance au flambement augmente lorsque les défauts sont positionnés à la partie supérieure des coques cylindriques et leurs influences sont proportionnelles avec les rapports  $A/t$  et  $L/R$ .

Nous proposons d'étudier l'interaction entre les imperfections axisymétrique et asymétrique car dans la réalité, la méthode de fabrication de coques les plus communes, utilisée pour les silos et les réservoirs métalliques où des panneaux courbes sont soudés un à un pour former une coque puis chaque coque est soudée à une autre pour construire la structure entière. Cette méthode produit des imperfections quasi-axisymétriques au niveau des soudures entre les différents étages, ainsi que des défauts asymétriques au niveau des lignes de soudage verticales entre les différents panneaux d'un même étage. L'introduction des imperfections réelles permettent de mieux comprendre l'instabilité des coques minces sous flambement.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ALM66]Almroth, B.O., *Influence of Edge Conditions on the Stability of Axially Compressed Cylindrical Shells*. AIAA Journal, 1966, Vol.4, pp.134-140.
- [AND11]André Da Silva. " *Flambage de coques cylindriques minces sous chargement combines : pression interne, compression, flexion et cisaillement*". Other. INSA de Lyon, 2011. French ,pp.77-83
- [ANS]ANSYS online help.
- [ANS]ANSYS Inc. Release 12.1 Documentation for ANSYS "ANSYS Mechanical APDL Element Reference".
- [ARB69]Arbocz, J., Babcock, C.D., *The Effect of General Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells*. Journal of Applied Mechanics, 1969, Vol.36, pp.28-38.
- [ARB87]Arbocz J. " *Post-buckling behaviour of structures, numerical techniques for more complicated structures. Buckling and postbuckling of structures*". Springer-Verlag, Berlin.1987.
- [ARB95]Arbocz J. & All. *Collapse of axially compressed cylindrical shells with random imperfections. Thin-Walled Structures*,1995, n°23, pp 131-158.
- [BLA10]Blachut, J., *Buckling of Axially Compressed Cylinders With Imperfect Length*. Computers and Structures, 2010, Vol.88, pp.365-374.
- [BRO60] Brown, J.K., Rea, R.H., *The elastic stability of thin-walled pressurised conical shells under compression and compression-bending interaction*. M.S. Thesis, Wright-Patterson Air Force Base : Institute of Technology, 1960.
- [BUD58]Budiansky, B., Hu, P. C. and Connor, R. W., " *Notes on the lagrangian multiplier method in elastic-stability analysis*," NACA Technical (1948), Note No. 1558, Washington, DC.
- [BUD66]Budiansky B and Hutchinson JW " *A survey of some buckling problems*". (1966). AIAA J 4(9), 1505-1510.
- [BUD74]Budiansky, B. " *Theory of Buckling and post Buckling behavior of elastics structures*" (1974), advance in App. Mech., L 4 ,p 1-65
- [CAL88]Callandine CR " *Buckle propagation in submarine pipeline*. *Ing J Mech Sci* (1988) 30 (3/4),217-228
- [CHU12] Chu-lin YU, Zhi-ping CHEN, Ji WANG, Shun-juan YAN, Li-cai YANG " *Effect of weld reinforcement on axial plastic buckling of welded steel*

*cylindrical shells*''Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering),2012.79-90p.

- [CLO82]CLOUGH R.W., NIWA A.Buckling of cylindrical liquid-storage tanks under earthquake loading.Earthquake engineering and structural dynamics, 1982, Vol. 10, p. 107-122
- [CMW05]C. M. Wang C. Y. Wang J. N. Reddy ''Exact solutions for buckling of structural'' Chapitre 01: introduction ,CRS Press 2005 ;p05 et 06
- [DAN95]Daniel Choï '' *Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application a la théorie des coques élastiques minces*'' Thèse de doctorat, de l'Université Paris 6,1995.
- [DID14] DIDIER J. «*Etude du comportement au flambage des coques cylindriques multicouches métal/matériau mousse sous chargements combines pression interne/cisaillement/flexion* Thèse en Génie Civil ,2014 .Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [DON50] Donnell LH and Wan CC ''*Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression*'' . J Appl Mech, ASME,(1950)17(1), 73-83
- [DOW60] Dow, M.B., Peterson, J.P., *Bending and compression tests of pressurized ringstiffened cylinders*. NASA TN D-360, Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1960, 27p.
- [DRA05]Draïdi, Z., *Renforcement et Réparation des Coques Métalliques par Matériaux Composites (TFC) : Etude du Comportement au Flambage – Approche expérimentale et numérique*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 2005, 162p.
- [FIS65] Fischer G''*Influence of boundary conditions on stability of thin walled cylindrical shells under axial load and internal Pressure*'' . (1965) AIAA J 3,736-738.
- [FLU32] Flugge, W., *Die Stabilität der Kreiszyinderschalen*. Ingenieur-Archiv, 1932, Vol.3, pp.463-506.
- [FUN57]Fung, Y.C., Sechler, E.E., ''*Buckling of thin-walled circular cylinders under axial compression and internal pressure*'' . Journal of Aeronautical Sciences, 1957, Vol.24, pp.351-356.
- [GER97]Gérard MICHEL'' *Flambage de coques cylindriques sous un chargement de cisaillement dynamique*'' .Thèse de doctorat, l'institut national des sciences appliquées de Lyon,1997.

- [GOR70]Gorman DJ and Evan-Wanowski RM ‘ ‘*An analytical and experimental investigation of the effects of large prebuckling deformations on the buckling of clamped thin-walled circular cylindrical shells subjected to axial loading and internal pressure*’’. Dev in Theor and Appl Mech 4,(1970), 415-426.
- [GOT99]Goto Y, Shang C. ‘ ‘*Plastic buckling transition modes in moderately thick cylindrical shells*’’. J Eng Mech 1999;125(4):426–34.
- [GWH03] G.W. Hunt,G. J. Lord and M.A. Peletier’’ *cylindrical shell buckling: a characterization of localization and periodicity*’’. Discrete and continuous dynamical systems–series b volume 3, number 4, November 2003.pp. 505–518
- [HAI15]Haifeng Qiana, Dengfeng Wang’’*Review on Stability of Thin-Walled Cylindrical Shells Subjected to Axial Compression*’’.5th International Conference on Advanced Design and Manufacturing Engineering (ICADME) 2015.1522-1525p.
- [HAR57] Harris, L.A., Suer, H.S., Skene, W.T., Benjamin, R.J., *The Stability of Thin-Walled Unstiffened Circular Cylinders Under Axial Compression Including the Effects of Internal Pressure*. Journal of the Aeronautical Sciences, 1957, Vol.4, pp.587-596.
- [HAR07]Harvey C. Lee’’*Buckling Analysis of a Submarine with Hull Imperfections*’’ Rensselaer Polytechnic Institute Hartford, Connecticut April, 2007.
- [HOF65]Hoff, N.J., *Low Buckling Stresses of Axially Compressed Circular Shells of Finite Length*, ASME Journal, 1965, Vol.32, pp.533-541.
- [HOF66] Hoff NJ “*The perplexing behavior of thin cylindrical shells in axial Compression*” . Israel, (1966),J Tech 4( I ), 1-28.
- [HOL00] Holst, J.M.F.G., Rotter, J.M., Calladine, C.R., *Imperfections and buckling in cylindrical shells with consistent residual stresses*. Journal of Constructional Steel Research, 2000, Vol.54, pp.265-282.
- [HUT65]Hutchinson, J.W., *Axial Buckling of Pressurized Imperfect Cylindrical Shells*. AIAA journal, 1965, Vol.3, pp.1461-1466
- [HUT71]Hutchinson, J.W., Tennyson, R.C, Muggeridge, D.B., *Effect of a Local Axisymmetric Imperfection on the Buckling Behavior of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression*. AIAA Journal, 1971, Vol.9, pp.48-53.
- [HUT73]Hutchinson, J. W. “*Post-bifurcation behavior in the plastic range*” Journal of Mechanics and Physics of Solids, (1973), 21, 163–190.

- [IME99] Imen KALLEL-KAMOUN ‘ ‘Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique’ ’.Thèse doctorat .l'école centrale de Lyon ,1999.
- [JIN96] Jin Guang Teng ‘ ‘Buckling of thin shells: Recent advances and trends’ ’; American Society of Mechanical Engineers,1996 ,vol. 49, pp.263
- [JAM99]Jamal, M., Midani, M., Damil, N., Potier-Ferry, M., *Influence of localized imperfections on the buckling of long cylindrical shells under axial compression*. International Journal of Solids and Structures, 1999, Vol.36, pp.441-464.
- [JAM03]Jamal, M., Lahlou, L., Midani, M., Zahrouni, H., Limam, A., Damil, N., Potier - Ferry, M., *A semi-analytical buckling analysis of imperfect cylindrical shells under axial compression*. International Journal of Solids and Structures, 2003, Vol.40, pp.1311-1327.
- [J.EL09]J.El bahaoui , L.El bakkali , A.Khamlichi , A Limam’’*Effet de l'interaction entre défauts localisés sur le flambage des coques cylindriques axisymétriques sous compression axiale*’’.19ème Congrès Français de Mécanique .Marseille,2009
- [J.EL09]J. El bahaoui, l. El bakkali,a. Khamlichi, A. IMAM’’*Modélisation de l'effet du couplage des défauts géométriques localises sur le flambage des coques cylindriques axisymétriques*’’,9ième Congrès de Mécanique, FS Semlalia, Marrakech,2009
- [J.EL11]J. El Bahaoui et el Bakkali L., “ *Instabilité des coques axisymétrique mince avec imperfection localisées : approche numérique et analytique*”, 20<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique 29 Aout au 2 Septembre 2011.
- [JER15]Jérôme Didier. ‘ ‘*Etude du comportement au flambage des coques cylindriques multicouches métal/matériau mousse sous chargements combinés pression interne/cisaillement/flexion*’ ’. INSA de Lyon, 2015. French ,pp.17-34
- [KHA04a] Khamlichi A. & All. *Buckling of elastic cylindrical shells considering the effect of localized axisymmetric imperfections*. Thin-Walled Structures, (2004).n°42, pp 1035-1047.
- [KHA04b] Khamilchi A.,Bezzazi M. and Liman A. “ Buckling of elastic cylindrical shells considering the effect of localized axisymmetric imperfection”.Thin Walled structures,Vol.42,Issue7,pp.1035-1047, July 2004.
- [KOI45] Koiter, W.T., *On the Stability of Elastic Equilibrium*. Ph.D. Thesis, 1945, THDelft,Netherlands, H.J. Paris, Amsterdam (In Dutch). (English translation : NASA TT F-10, 1967, 322p).

- [KOI63] Koiter W.T. “ *The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression*”. Proceeding of the Royal Netherlands Academy of Sciences, Amsterdam, 1963, Serie B, Vol.66, N°5, pp.265-279,
- [LAH93] Lahcen AZRARA “ *Etude du comportement poste critique des coques cylindriques par une méthode synoptique numérique*”.Thèse doctorat.Université de Metz.France, 1993.
- [LIM04] Limam A.. *Coques cylindriques sous chargement combine de pression interne et de flexion Rapport interne*, 2004, URGC, INSA-Lyon.
- [LO,H51] Lo, H., Crate, H., Schwartz, E.B., *Buckling of Thin-Walled Cylinder Under Axial Compression and Internal Pressure*. NACA Report 1027, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1951, pp.647-655.
- [LOR08]Lorenz, Z., *Achsensymmetrische Verzerrungen in dunwandigen Hohlzylinder*. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 1908, Vol. 52, pp.1766-1793.
- [LUN33]Lundquist, E.E., *Strength Tests of Thin-Walled Duralumin Cylinders in Compression*. NACA TR 473, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1933, 18 p.
- [MAN93]Mandara A, Mazzolani M. ‘ *Stocky cylinders if compression: postcritical path evaluation and collapse load prediction with ABAQUS*’ . In: Proceedings of ABAQUS User’s Conference, Archen, Germany 1993; 421–35
- [MAT04]Mathon, C., *Flambage Sous Flexion et Pression Interne de Coques cylindriques Minces*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 2004, 265p.
- [MAT06]Mathon, C., Limam, A., *Coques Cylindriques sous Chargements Combinés : Pression Interne et Flexion Pure – Prise en Compte de la Plasticité et Proposition de Dimensionnement*. Rapport EADS-INSA de Lyon, 2006,p 47
- [MAT14]Mathon C. INSA. *Flambage Sous Flexion et Pression Interne de Coques Cylindriques Minces* . Lyon ,2014 *Thèse doctorat,pp.20-33*
- [MIC99]Michel BERNADOU et Bernard LALANNE ‘ *Flambement linéaire d’une coque mince élastique de forme générale*’ .Rapports de recherche N°1435.Institut national de recherche en informatique et en Automatique, 1991.

- [OHI61] Ohira H. ‘*Local buckling theory of axially compressed cylinders*’, in Proceedings of the 11 th Japanese National Congress on applied Mechanics, 1961, 37-4 I.
- [OHI63] Ohira H. ‘*Linear local buckling theory of axially compressed cylinders and various eigen values*’, in Proceedings of 5th international symposium on space technology and science, Tokyo, 1963,511-526.
- [PIR01] Pircher, M., Bridge, R. ‘*the influence of circumferential weld-induced imperfections on the buckling of silos and tanks*’ Journal of constructional steel research, 2001, Vol.57, pp.569-580.
- [POT78a] Potier-Ferry, M. "*Fondements mathématiques de la théorie de la stabilité élastique*". Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, 1978.
- [POT78b] Potier-Ferry, M. "*Bifurcation et stabilité pour des systèmes dérivant d'un potentiel*", J. Mécanique, 17, 1978, p 579-608.
- [RAD89] Radhi Abdel Moula’’ *flambage des coques cylindriques sous pression influence des conditions aux limites et des défauts*’’.Thèse de Doctorat, université de Metz ,France 1989.
- [RAF42] Rafel, N., *Effect of Normal Pressure on the Critical Compressive Stress of Curved Sheet*. NACA WR L258, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1942, 9 p.
- [ROB29] Robertson A. ‘*The Strength of tubular struts*’’. ARC Report and Memorandum No 1185. 1929
- [ROT89] Rotter, J.M., Teng, J.G., *Elastic Stability of Cylindrical Shells with Weld Depressions. Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1989, Vol.115, pp.1244-1263.
- [ROT06] Rotter, J.M., *Elephant’s Foot Buckling in Pressurized Cylindrical Shells* . Stahlbau, 2006, Vol.75, pp.742-747
- [SAA79] Saal, H., Kahmer, H., Reif, A., *Beullasten axial gedruckter Kreiszyinderschalen mit Innendruck; Neue Versuche und Vorschriften*. Der 1979.
- [SCH59] Schnell, W., *Zur Stabilität dünnwandiger längsgedrückter Kreiszyinderschalen bei zusätzlichem Innendruck*. In: Proceedings of the IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, 1959, Delft, Netherlands, pp.167-188.
- [SEI60] Seide, P., Weingarten, V.I., Morgan, E.J., *Final Report on the Development of Design Criteria for Elastic Stability of Thin Shell Structures*. Space technology Laboratories, STL/TR 60-0000-19425, 1960, 196 p.

- [SEU02]Seung-Eock Kim , Chang-Sung Kim'' *Buckling strength of the cylindrical shell and tank subjected to axially compressive loads''*, International Journal of Impact Engineering 32 : ELSEVIER 2002, 329–353p.
- [SIM85] Simitises, G J, Shaw, D, Sheinman, I, and Giri, J (1985). Imperfection sensitivity of fiber-reinforced, composite, thin cylinders, Compos Sci Tech 22, 259-276.
- [SIN82a]Singer J. ‘‘Vibration correlation techniques for improved buckling predictions of imperfect stiffened shells, in *Buckling of Shell in offshore Structures’’*(eds JE Harding, PJ Dowling, and N Agelidis),Granada, London, 1982,pp 285-329.
- [SIN82b]Singer J. ‘‘The status of experimental buckling investigations of shells, in *Buckling of Shells’’*, Springer-Verlag, New York, 1982, pp 501-534.
- [SIN98] Singer J., Arbocz. J., Weller T.,’’ *Buckling Experiments’’*. New York : J. Wiley & Sons, 1998.
- [SIN79]Singer J and Abramovich H. ‘‘Vibration techniques for definition of practical boundary conditions in stiffened shells’’. AIAA J 17(7),1979, 762-769.
- [SOU14]Southwell, R.V., ‘‘On the general theory of elastic stability’’. Philosophical transactions of the Royal Society, London, 1914, Series A, n°213, pp.187-202.
- [STE62]Stein M ‘‘The effect on the buckling of perfect cylinders of prebuckling deformations and stresses induced by edge support, in *Collected Papers on Instability of Shell Structures’’*, 1962, NASA Technical Note, D-1510, 217-226.
- [STU66]Stuhlman, C E, De Luzio, A, and Aimroth, B 0. ‘‘Influence of stiffener eccentricity and moment on stability of cylinders in compression’’,1966, AIAA J 4, 872-877.
- [TEN69]Tennyson, R.C., Muggeridge, D.B., *Buckling of Axisymmetric Imperfect Circular Cylindrical Shells Under Axial Compression*. AIAA Journal, 1969, Vol.17, pp.2127-2131.
- [TEN92]Teng, J.G., Rotter, J.M., ‘‘Buckling of Pressurised Axisymmetrically Imperfect Cylinders under Axial Loads’’. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1992, Vol.118, pp.229-247.
- [TIM10]Timoshenko, S.P., Einigestabiats Probleme der Elastizitatstheorie. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik, 1910, Vol. 58, pp.337-357.

- [TIM61]Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. ‘‘*Theory of Elastic Stability*’’, McGraw-Hill , New York. 1961,
- [TRA91]Trahair, N. S. and Bradford, M. A. (1991), ‘ ‘*The Behavior and Design of Steel Structures*’’, Revised 2nd ed., Chapman & Hall, London, UK.
- [VON41]Von Kirmann T and Tsien HS (1941) ‘ ‘*The buckling of thin cylindrical shells under axial compression*’’. J Aerospace Sci 8, 303-312.
- [WAE84]Waeckel, N., *Imperfections Géométriques Initiales et Instabilités de Structures Minces*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1984, 306 p.
- [WAN04] WANG X., JUN XIAO, Y.C. ZHANG: *A method for solving the buckling problem of a thin-walled shell*,2004.
- [WEL74]Wellcr, T, Singcr, J, and Batterman, S C. *Influence of eccentricity of loading on buckling of stringer-stiffened cylindrical shells, in Thin-shell structures; theory)*, experiment and design, Y C Fung and E E Scchler, Eds, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ.1974.
- [WIL33] Wilson, W.M., Newmark, N.M., *The strength of thin cylindrical shells as columns*.Bulletin n°255, Engineering Experimental Station, University of Illinois, 1933, 50p.
- [XIA07]Xiaoqing Zhang, Qiang Han.‘‘*Buckling and post buckling behaviors of imperfect cylindrical shells subjected to torsion*’’.2007.
- [X-L.G03] X-L.Gao "*Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory*".Int.J.Solides Stuct 2003.
- [YAM72]Yamaki N and Kodama S. ‘ ‘ *Buckling of circular cylindrical shells under compression-report 3: solutions based on the Donnell type equations considering prebuckling edge rotations*. Report of the Inst. of High Speed Mech, No 25, Tohoku Univ, 1972, pp 99-141.
- [YAM84]YAMAKI, N. "*Elastic stability of circular cylindrical shells*".North-Holland, Amsrerdam (1984).
- [ZGW05]Z.G. Weia,b, J.L. Yua,\_, R.C. Batra’’ *Dynamic buckling of thin cylindrical shells under axial impact*’’,International Journal of Impact Engineering 32 : ELSEVIER 2005, 575–592p.