



Université Mohamed Khider - Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Civil et Hydraulique  
Ref : ...../2018

جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم : الهندسة المدنية والرى  
المرجع : ...../2018

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat en sciences**  
**Filière : Hydraulique**  
Spécialité (Option) : Ouvrages Hydrauliques et Aménagement

Thème

# Contribution à l'étude de l'écoulement critique

Présentée par :

**NEBBAR Mohammed Lakhdar**

Soutenue publiquement le : 15 Novembre 2018

Devant le jury composé de :

<b>DEBABECHE Mahmoud</b>	<b>Professeur</b>	<b>Président</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>ACHOUR Bachir</b>	<b>Professeur</b>	<b>Rapporteur</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>REMINI Boualem</b>	<b>Professeur</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Blida</b>
<b>HOUICHI Larbi</b>	<b>Professeur</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Batna</b>

## REMERCIEMENTS

À l'issue de ce modeste travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à Monsieur **ACHOUR Bachir**, Professeur à l'Université de Biskra et directeur du laboratoire de recherche **LARHYSS**, qui a accepté de diriger ce travail, pour ses nombreux conseils, ses encouragements, pour la confiance qu'il m'a accordée durant toutes les étapes de cette thèse et son soutien infaillible.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur **DEBABECHE Mahmoud**, Professeur à l'Université de Biskra d'avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Monsieur **REMINE Boualem**, Professeur à l'Université de Blida et Monsieur **HOUICHI Larbi**, Professeur à l'Université de Batna pour avoir accepté d'être examinateurs de cette thèse.

Enfin, un grand merci à tous ceux qui ont contribué à mon aide, soit de près ou de loin pour que mon travail soit à la hauteur.

## **DEDICACE**

*Je dédie ce travail à :*

*Mes parents ;*

*Ma femme ;*

*Mes enfants ;*

*Mes frères et ma sœur ;*

*Toutes mes amies ;*

*Tous mes collègues ;*

*Tous ceux qui sont chers.*

*Nebbar Mohammed Lakhdar*

## RESUME

La profondeur critique est un paramètre important dans l'analyse des écoulements variés dans les canaux et dans les cours d'eau naturels. Pour les canaux triangulaires, rectangulaires, et des sections de canaux paraboliques, il est possible d'exprimer la profondeur critique de manière analytique. Cependant, pour de nombreuses sections pratiques, y compris la section trapézoïdale, circulaire et en profil U, les équations de la profondeur critique sont implicites. Pour ces sections la profondeur critique est actuellement obtenue soit par essai graphique et de la procédure d'approximation successive, ou en utilisant des équations empiriques ou semi-empiriques sur la base de l'ajustement des courbes. Dans la conception des canaux ouverts, il est important de calculer la profondeur critique afin de déterminer, la nature du régime d'écoulement.

Cette étude est consacrée à la détermination des relations de la profondeur critique pour les différentes formes géométriques des canaux ouverts, notamment les canaux ayant les formes géométriques complexes à l'instar de la forme trapézoïdale, circulaire et en forme de U. A cet effet un recueil des différentes formules les plus utilisées pour le calcul de la profondeur critique a été élaboré. La majorité des formules étudiées sont des relations semi-empiriques. Pour améliorer la consistance de ces solutions, d'une part une nouvelle approche théorique a été élaborée, basée sur le procédé itératif de calcul de la profondeur critique dans le canal en forme U. L'avantage de cette nouvelle méthode est qu'elle est simple et implicite, et elle converge au bout de la septième étape de calcul. Et d'autre part une contribution d'éclaircissement des notions clés des pratiques hydrauliques telles que la section de contrôle et la pente critique, de point de vue, définitions, rôles, caractéristique et modalités de fonctionnements a été effectuée.

**Les mots clés :** Profondeur critique, écoulement, pente critique, section de contrôle, procédé itératif, régime d'écoulement, profil en U.

## **ABSCTRACT**

Critical depth is an important parameter in the analysis of various flows in natural channels and streams. For triangular, rectangular channels, and parabolic channel sections, it is possible to express the critical depth analytically. However, for many practical sections, including the trapezoidal, circular and U-profile, equations for critical depth are implicit. For these sections the critical depth is currently obtained either by graphical testing and successive approximation procedure, or by using empirical or semi-empirical equations based on curve fitting. In open channel design, it is important to calculate the critical depth to determine the nature of the flow regime.

This work is devoted to the determination of the critical depth relationships for different geometric shapes open channels, including channels with complex geometrical shapes like the trapezoidal and circular shaped U. A this purpose a collection of different most used to calculate the critical depth was developed formulas. The majority of formulations studied are semi-empirical relationships. To improve the consistency of these solutions, firstly a new theoretical approach was developed based on iterative calculation method of critical depth in the channel shaped U. The advantage of this new method is simple and what is implied, and it converges at the end of the seventh stage of calculation. And secondly a contribution clarification of the key concepts of hydraulic practices such as control section and the critical slope, perceptively, definitions, roles, and feature operations procedures were performed.

**Key words:** Critical depth, Flow, Critical slope, Control section, Iterative process, Flow regime, U-profile.

## ملخص:

ويعتبر العمق الحرج معلمة هامة في تحليل التدفقات المختلفة في القنوات الطبيعية والجدول، وهذا لتحديد طبيعة نظام التدفق. بالنسبة للقنوات ذات المقاطع العرضية المثلثية، المستطيلة و القطع المكافئ، من الممكن التعبير عن العمق الحرج تحليليا. اما فيما يخص القنوات ذات المقاطع المعقدة، بما في ذلك المقطع الدائري والشبه المنحرف وكذلك مقطع الشكل U. فمعادلات العمق الحرج تتحقق عن طريق الرسم البياني او اجراء بالقريبات المتتالية .

تتخصص هذه الدراسة تحديد العلاقات للعمق الحرج لمختلف الاشكال الهندسية للقنوات المفتوحة . وقد وضعت صيغ مختلفة لحساب هذا العامل الهيدروليكي. وغالبية هذه الصيغ هي علاقات شبه تجريبية. ولتحسين معرفة هذه الحلول تم وضع نهج نظري جديد يستند الى عملية تكرارية لحساب العمق الحرج في القناة ذات المقطع العرضي على شكل حرف U . وتتمثل ميزة هذه الطريقة الجديدة في انها بسيطة ومباشرة ، حيث تتقارب في نهاية الخطوة الحسابية السابعة. ومن ناحية اخرى، تم تقديم اسهام لتوضيح المفاهيم الاساسية للتطبيقات الهيدروليكية مثل مراقبة قسم التحكم وقياس التدفق ومفهوم المنحدر الحرج ودوره في دراسة الجريان السطحي.

**الكلمات المفتاحية:** العمق الحرج، التدفق، المنحدر الحرج، قسم التحكم، العملية التكرارية، نظام التدفق، شكل حرف U .

## SOMMAIRE

<i>Titre</i>	<i>Page</i>
<b>Remerciements</b> .....	i
<b>Dédicace</b> .....	ii
<b>Résumé</b> .....	iii
<b>Abstract</b> .....	iv
<b>ملخص</b> .....	v
<b>Principales notations</b> .....	xii
<b>Liste des tableaux</b> .....	xiv
<b>Liste des figures</b> .....	xvi
<b>Introduction générale</b> .....	01

**Partie I**

<b>Introduction à la première partie</b> .....	05
--	----

***Chapitre I : Etat de connaissance sur l'écoulement uniforme***

<b>I. Etat de connaissance sur les écoulements à surface libre</b> .....	07
<b>I.1. Introduction</b> .....	07
<b>I.2. Rappel de quelques notions d'écoulement à surface libre</b> .....	07
<b>I.3. Différents types des canaux</b> .....	09
<b>I.3.1. Définition</b> .....	09
<b>I.3.2. Géométrie des canaux</b> .....	10
<b>I.4. Ecoulement dans les canaux</b> .....	12
<b>I.4.1. Type d'écoulement</b> .....	12
<b>I.4.1.1. Variabilité dans le temps</b> .....	12
<b>I.4.1.2. Variabilité dans l'espace</b> .....	12
<b>I.4.2. Les différents types d'écoulement</b> .....	14
<b>I.4.3. Régime d'écoulement</b> .....	15
<b>I.4.3.1. Nombre de <i>Froude</i></b> .....	15
<b>I.4.3.2. Nombre de <i>Reynolds</i></b> .....	16
<b>I.5. Ecoulement uniforme dans les canaux ouverts</b> .....	17

<b>I.5.1.</b> Introduction .....	17
<b>I.5.2.</b> Etablissement de l'écoulement uniforme.....	18
<b>I.5.3.</b> Formules usuelles de l'écoulement uniforme.....	21
<b>I.5.3.1.</b> <i>Formule de Chézy</i> .....	21
<b>I.5.3.1.1.</b> Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Ganguillet-Kutter</i> .....	23
<b>I.5.3.1.2.</b> Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Bazin</i> .....	24
<b>I.5.3.1.3.</b> Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Powell</i> .....	24
<b>I.5.3.1.4.</b> Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Manning</i> ....	25
<b>I.5.3.2.</b> Formule de <i>Manning-Stricler</i> .....	25
<b>I.5.3.3.</b> Formule de <i>Darcy-Weisbach</i> .....	30
<b>I.6.</b> Coefficient de frottement.....	31
<b>I.6.1.</b> Introduction et définition.....	31
<b>I.6.2.</b> Formule de <i>Colebrook-White</i> et diagramme universel de <i>Moody</i> .....	30
<b>I.6.2.1.</b> Formule de <i>Colebrook-White</i> .....	32
<b>I.6.2.2.</b> Diagramme universel de <i>Moody</i> .....	34
<b>I.6.3.</b> Effet de coefficient de forme sur l'application de l'équation de <i>Darcy-Weisbach</i> et l'équation de <i>Colebrook-White</i> aux canaux découverts.....	37
<b>I.6.4.</b> Formules explicites usuelles de coefficient de frottement .....	42
<b>I.6.4.1.</b> Formule de <i>Swamee et Jain</i> .....	42
<b>I.6.4.2.</b> Formule de <i>Achour et al.</i> .....	44
<b>I.6.4.3.</b> Formule de <i>Achour et Bjaoui</i> .....	45
<b>I.7.</b> Calcul de la profondeur normale.....	48
Conclusion.....	52

## ***Chapitre II : Description de l'écoulement critique***

<b>II.1.</b> Introduction.....	55
<b>II.1.</b> Définition et généralités.....	57
<b>II.1.1.</b> Célérité d'onde.....	57
<b>II.1.2.</b> Ecoulement avec onde.....	60
<b>II.2.</b> Ecoulement critique.....	63
<b>II.2.1.</b> Section de forme quelconque.....	64
<b>II.2.1.1.</b> Charge spécifique.....	64

<b>II.2.1.1.1.</b> Définition.....	64
<b>II.2.1.1.2.</b> Equation de la charge.....	64
<b>II.2.1.1.3.</b> Courbe $y(Q)$ pour $H_s$ constante.....	68
<b>II.2.1.1.4.</b> Courbe $H_s(y)$ pour $Q$ constant.....	70
<b>II.2.1.1.5.</b> Relation charge spécifique et le nombre <i>de Froude</i> .....	72
<b>II.2.1.1.6.</b> Vitesse moyenne critique.....	73
<b>II.2.1.2.</b> Force spécifique.....	75
<b>II.2.1.2.1.</b> Définition.....	75
<b>II.2.1.2.2.</b> Diagramme de la Force spécifique.....	78
<b>II.2.1.2.3.</b> Force spécifique et la profondeur critique.....	79
<b>II.2.2.</b> Section de forme rectangulaire.....	85
<b>II.2.2.1.</b> Energie spécifique.....	85
<b>II.2.2.1.1.</b> Les caractéristiques de l'écoulement critique dans un canal rectangulaire.....	85
<b>II.2.2.1.2.</b> Les caractéristiques de débit par unité de largeur.....	88
<b>II.2.2.2.</b> Force spécifique.....	91
<b>II.2.2.3.</b> La courbe de la charge spécifique sous la forme adimensionnelle.....	94
Conclusion.....	101

### ***Chapitre III : Notion de la pente critique***

<b>III.1.</b> Introduction.....	102
<b>III.2.</b> Expression de la pente critique .....	102
<b>III.3.</b> Propriété de la pente critique.....	107
<b>III.3.1.</b> La pente limite.....	107
<b>III.3.3.</b> Généralisation de l'expression de la pente critique .....	116
<b>III.3.4.</b> Les racines et les valeurs limites de $\bar{I}_c(\eta, m)$ pour les canaux trapézoïdaux... ..	120
<b>III.4.</b> La pente critique et la pente limite.....	124
Conclusion.....	125

### ***Chapitre IV : Calcul de la profondeur critique dans les canaux ouverts***

<b>IV.1.</b> Introduction.....	126
--------------------------------	-----

<b>IV.1.</b> Profil trapézoïdale.....	127
<b>IV.1.1</b> Caractéristique du profil trapézoïdale.....	127
<b>IV.1.2.</b> Calcule de la profondeur critique de la section trapézoïdale.....	129
<b>IV.1.2.1.</b> La méthode semi-empirique.....	129
<b>IV.1.2.2.</b> La méthode graphique .....	130
<b>IV.1.2.3.</b> Charge spécifique minimale en termes de profondeur critique.....	132
<b>IV.1.2.4.</b> La méthode d'approximations successives.....	135
<b>IV.1.2.4.</b> La méthode analytique .....	136
<b>IV.2.</b> Canal en profil circulaire .....	140
<b>IV.2.1.</b> Caractéristique de profile circulaire .....	141
<b>IV.2.2.</b> Calcul de la profondeur critique .....	142
<b>IV.2.2.1.</b> Relation empiriques pour le calcul de la profondeur critique.....	143
Conclusion.....	145

## ***Chapitre V : Description de la section de contrôle***

<b>V.1.</b> Introduction.....	146
<b>V.2.</b> La profondeur critique et la section de contrôle.....	146
<b>V.2.1.</b> Contrôle hydraulique.....	147
<b>V.2.1.1.</b> Définition.....	147
<b>V.2.1.2.</b> Types de contrôle.....	147
<b>V.2.1.1.</b> Le cas d'un changement de la pente .....	148
<b>V.2.1.2.</b> Réservoir alimente un canal .....	149
<b>V.2.1.3.</b> Un canal alimente un réservoir.....	150
<b>V.2.1.4.</b> Le cas d'une singularité.....	153
<b>V.2.1.4.1.</b> Le cas d'un déversoir.....	153
<b>V.2.1.4.2.</b> Le cas d'une structure de contrôle .....	154
<b>V.2.1.4.2.2.</b> Le cas d'un seuil épais.....	156
<b>V.2.1.4.3.</b> Cas d'une Chute brusque .....	157
<b>V.3.</b> Section de contrôle .....	159
<b>V.3.1.</b> L'essai de <i>Bélanger</i> .....	159
<b>V.3.2.</b> le point de control.....	162
<b>V.3.2.1.</b> l'influence de la géométrie du fond .....	162

V.3.2.1. l'influence de la géométrie de la section transversale.....	165
V.3.3. l'emplacement de la section de contrôle .....	167
V.3.3.1. l'équation générale de l'emplacement de la section de contrôle .....	168
Exemple d'applications .....	170
V.4.Conclusion .....	175
<b>Conclusion de la première partie.....</b>	<b>176</b>

## **Partie II**

<b>Introduction à la deuxième partie.....</b>	<b>181</b>
---	------------

### ***Chapitre I : Dimensionnement d'un canal rectangulaire en écoulement critique***

I.1.Introduction.....	183
I.2. Caractéristiques géométriques du canal.....	185
I.3. Dimensionnement du canal.....	187
I.3.1. Relations d'écoulement dans le canal .....	187
I.3.2. Calcul explicite de la dimension linéaire .....	190
I.4. Exemple d'application .....	194
Conclusion.....	197

### ***Chapitre II : Ecoulement critique dans un canal de profil en U***

II.1. Introduction .....	198
II.2. Canal triangulaire à fond arrondi.....	200
II.3. Caractéristiques géométriques du canal.....	201
II.4. Equation de l'écoulement critique.....	202
Exemple d'application II.1.....	206
Conclusion.....	209

### ***Chapitre III : Calcul de la profondeur critique dans une conduite circulaire***

<b>III.1.</b> Introduction.....	210
<b>III.2.</b> Caractéristique du profil circulaire.....	212
IV.1.2. Calcul de la profondeur critique.....	213
<b>III.3.</b> Charge spécifique minimale en termes de profondeur critique.....	217
<b>III.3.1.</b> Relation approchée de la Charge spécifique critique.....	221
Conclusion.....	224

### ***Chapitre IV : Ecoulement critique dans un canal de forme parabolique***

<b>II.1.</b> Introduction .....	226
<b>IV.2.</b> Propriétés géométriques de la section parabolique .....	227
IV.2.1. Considérations géométriques.....	228
<b>IV.3.</b> La solution exacte de la profondeur critique .....	231
Exemple d'application IV.1.....	232
<b>IV.4.</b> Charge spécifique en fonction de la profondeur critique.....	232
Conclusion.....	233
<b>Conclusion de la deuxième partie</b> .....	234
<b>Conclusion générale</b> .....	240
<b>Références bibliographiques</b> .....	247

## Principales notation

Notation	Nomenclature des notations	Unité
$A_c$	L'aire de la section mouillée critique	$m^2$
$b_c$	Largeur critique d'un canal rectangulaire	m
$B$	Dimension linéaire	m
$T_c$	Largeur au miroir critique	m
$\eta_c$	Paramètre de forme d'aspect critique	-
$P_c$	Périmètre mouillé critique	m
$Q_c$	Débit critique	$m^3/s$
$Q^*$	Débit relatif	-
$q$	Débit par unité de largeur	$m^3/s/m$
$y_c$	Profondeur critique	m
$R_{h,c}$	Rayon hydraulique critique	m
$D_{h,c}$	Diamètre hydraulique critique	m
$D$	Diamètre d'une conduite	m
$I_c$	Pente critique	-
$I_L$	Pente limite	-
$I_f$	Pente de fond	-
$J$	Gradient de perte de charge	-
$g$	Accélération de la pesanteur	$m/s^2$
$m$	Inclinaison des parois par rapport à l'horizontal	-
$V_c$	Vitesse d'écoulement critique	m/s
$y_c$	Profondeur d'écoulement critique	m
$H_{sc}$	Charge spécifique critique	m

Notation	Nomenclature des notations	Unité
$H_s^*$	Charge spécifique relative	-
$F_r$	Nombre de <i>Froude</i>	-
$R_e$	Nombre de <i>Reynolds</i>	-
$C$	Coefficient de rugosité de <i>Chézy</i>	$m^{1/2}/s$
$n$	Coefficient de <i>Manning</i>	$m^{-1/3}.s$
$\varepsilon$	Rugosité absolue des parois	m
$\varepsilon/D_{h,c}$	Rugosité relative	-
$f$	Coefficient de frottement	-
$x_c$	Position de la section critique	m
$\nu$	Viscosité du liquide en écoulement	$N/s^2$
$\theta$	Angle $\theta \in [0, 2\pi]$	<i>Radian</i>
$\xi_c$	Rapport d'aspect de l'écoulement critique	-
$r$	Rayon du segment arrondi	m
$\chi_1$	$\frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} - \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) \right)$	-
$z$	Caractérisé la géométrie du canal étudié, répond alors à la relation (II.15)	-
$T$	La largeur au miroir	m

**Liste des tableaux de la première partie**

<b>N° de Tableau</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
Tableau II.1	$(q/q_{max}) = f(y/y_c)$ selon la relation (II.85)	96
Tableau II.2	$(q/q_{max}) = f(y/y_c)$ selon la relation (II.85) et les valeurs de nombre de Froude $F_r$ selon la relation (II.89)	98

**Liste des tableaux de la deuxième partie**

<b>N° de Tableau</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
Tableau III.1	Valeur de la profondeur critique par différentes relations:	217
Tableau III.2	Valeurs de $H_s^*(\eta_c)$ calculées selon la relation (III.20)	219
Tablea III.3	Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (III.21) sur le calcul de la charge spécifique $H_s^*(\eta_c)$ de la conduite	222

## Liste des figures de la première partie

N° de la figure	Titre	Page
Figure I.1	Coupe transversale d'un canal naturel.	09
Figure I.2	Eléments géométrique de la section.	10
Figure I.3	Schéma des écoulements permanents et non permanents.	12
Figure I.4	Schéma représentant les différents régimes d'écoulement.	13
Figure I.5	Etablissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur.	19
Figure I.6	Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de formule de <i>Chézy</i> .	22
Figure I.7	La variation du paramètre $\phi$ en fonction de la rugosité relative $\varepsilon^*$ .	28
Figure I.8	Diagramme universel de <i>Moody</i> (1944).	37
Figure I.9	Formes de canaux rectangulaires possibles à rayon hydraulique $R_h$ identique selon l'équation (I.38) pour $\phi = 1$ . (-----) équation (I.36).	38
Figure I.10	Effet de la forme ( $h/b$ ) du profil rectangulaire découvert sur le coefficient de frottement $f$ en fonction du nombre de Reynolds $R_e$ dans le domaine turbulent lisse.	39
Figure I.11	Coefficient de forme $\phi$ en fonction de paramètre géométrique.	40
Figure I.12	Profil de canaux considérés <b>a</b> ) : trapèze, <b>b</b> ) plein trapèze, <b>c</b> ) : en $U$ , <b>d</b> ) : conduite partiellement remplie.	40
Figure I.13	Comparaison entre les relations de <i>Colebrook-white</i> (I.26) et de <i>Swamee et Jain</i> (I.42) pour quelques valeurs de $\varepsilon/D$ .	43
Figure I.14	Comparaison entre les relations de <i>Colebrook-White</i> (I.26) et de <i>Achour et al.</i> (I.43) pour quelques valeurs de $\varepsilon/D$ .	44
Figure I.15	Comparaison entre les relations de <i>Colebrook-White</i> (I.26) et de <i>Achour et Bedjaoui</i> (I.45) pour quelques valeurs de $\varepsilon/D$ .	46
Figure II.1	Schéma simplifié de définition de la propagation d'onde.	58
Figure II.2a	Ecoulement avec onde. Cas d'un régime sous-critique.	61
Figure II.2b	Ecoulement avec onde. Cas d'un régime supercritique.	61
Figure II.3b	Ecoulement avec onde. Cas d'un régime critique.	62
Figure II.4	Vue en coupe d'un ressaut hydraulique.	63
Figure II.5	Schéma pour l'équation de l'énergie dans une section.	65
Figure II.6	Schéma simplifié d'un écoulement à surface libre unidirectionnel.	66
Figure II.7	Profil en travers d'un canal naturel.	68
Figure II.8	Courbe $y(Q)$ pour $H_s$ constant.	69
Figure II.9	Courbe $H_s(y)$ à $Q$ constant ou "courbe ( $H_s$ )".	70
Figure II.10	Théorème de la quantité de mouvement intégré sur l'écoulement dans un tube	75
Figure II.11	Centre de gravité d'une section mouillée	76
Figure II.12	Schéma de définition des termes de la force spécifique.	77
Figure II.13	Courbe $F_s(y)$ à $Q$ constant ou "courbe de la force spécifique".	79
Figure II.14	Profil du canal a section triangulaire.	82
Figure II.15	Courbe $q(y)$ pour $H_s$ constant.	88
Figure II.16	Variation de débit par unité de largeur.	89

N° de la figure	Titre	Page
Figure II.17	La courbe de débit spécifique.	90
Figure II.18	Écoulement sur déversoir à seuil épais.	91
Figure II.19	Courbe $(H_s/y_c)$ en fonction de $(y/y_c)$ à $Q$ constant.	95
Figure II.20	Courbe $(q/q_{max})$ en fonction de $(y/y_c)$ à $H_s$ constant.	96
Figure II.21	Coupe transversale du canal rectangulaire.	100
Figure II.22	Schéma simplifié d'une coupe longitudinale d'un écoulement dans un canal raccordé avec un bassin de grandes dimensions.	100
Figure III.1a	Pente légère - Écoulement fluvial.	103
Figure III.1b	Pente critique - Écoulement critique.	103
Figure III.1c	Pente raide - Écoulement torrentiel.	103
Figure III.2	Coupe transversale du canal de section trapézoïdale.	105
Figure III.3	Pente critique pour un canal rectangulaire large.	107
Figure III.4	Variation de la pente critique en fonction de la profondeur critique pour un canal rectangulaire.	111
Figure III.5	La pente limite pour un canal rectangulaire.	111
Figure III.6	La variation de la pente critique dans le canal rectangulaire.	112
Figure III.7	Variation $(I_f/I_L)$ , en fonction de $(y_n/b)$ pour des valeurs constante de Nombre de Froude, cas d'un canal rectangulaire.	121
Figure III.8	la relation généralisée de l'écoulement.	123
Figure IV.1	Schéma de définition de la forme géométrique trapézoïdale.	127
Figure IV.2	Abaque d'estimation de profondeur critique.	131
Figure IV.3	Schéma de définition des paramètres géométriques du canal trapézoïdale pour un régime d'écoulement critique.	137
Figure IV.4	Écarts relatifs en % occasionnés par la relation (IV.39) sur le calcul du taux de remplissage critique $M_c$ .	140
Figure IV.5	Schéma de définition des paramètres géométriques en conduite circulaire pour un régime d'écoulement critique.	141
Figure V.1	Emplacement de la section de contrôle critique $L.P.C$ : Ligne de la profondeur critique, $L.P.N$ : Ligne de la profondeur normale $F_2$ et $T_2$ respectivement courbe de remous d'abaissement fluviale et torrentiel.	148
Figure V.2.1	Ressaut hydraulique entre deux contrôles.	149
Figure V.2.2	Emplacement de la section de contrôle critique.	149
Figure V.3	Emplacement de la section de contrôle $L.P.C$ : Ligne de la profondeur critique, $L.P.N$ : Ligne de la profondeur normale.	150
Figure V.4	Emplacement de la section de contrôle $T_1$ et $T_2$ respectivement courbe de remous d'exhaussement et d'abaissement.	152
Figure V.5.a	Régime critique.	153
Figure V.5.b	Régime fluvial.	153
Figure V.5.c	Régime rapide.	154
Figure V.6.a	Profil de la ligne d'eau dans un canal à faible pente.	154
Figure V.6.b	Profil de la ligne d'eau dans un canal à forte pente.	155
Figure V.6.c	Schéma des écoulements rencontrés dans un seuil dissipateur d'énergie.	156
Figure V.7	Emplacement de la section de contrôle critique. (A) L'écoulement dans un canal prismatique;(B) l'écoulement dans un canal non prismatique ou du débit spatialement variée.	157

N° de la figure	Titre	Page
Figure V.8	Notation pour les écoulements graduellement variés.	160
Figure V.9	Schéma de définition de l'écoulement sur un lit de canal à courbure en continue.	163
Figure V.10	Écoulement à débit constant : effet d'un extremum du profil du radier ( $dz/dx = 0$ (à gauche) et de largeur du canal $b = 0$ (à droite). La condition critique peut être réalisée seulement si, soit le radier à un maximum ( $d^2z/dx^2 < 0$ ), soit largeur atteint un minimum ( $d^2b/dx^2 > 0$ ). Avec les deux autres possibilités, représentées en haut, $F_r = 1$ ne peut donc pas être atteint.	167
Figure V.11	Schéma d'écoulement dans un canal rectangulaire franchi un seuil concave.	170
Figure V.12	Schéma d'écoulement unidimensionnel dans un canal rectangulaire franchi une Bosse.	172
Figure V.13	Profil de la profondeur d'eau $y = y(x)$ .	174
Figure V.14	Profil de la ligne d'eau $z = z(x)$ .	174

## Liste des figures de la deuxième partie

N° de la figure	Titre	Page
Figure I.1	Schémas de définition de l'écoulement uniforme critique dans un canal ouvert de section rectangulaire.	183
Figure I.2	Schéma de définition de l'écoulement critique dans un canal ouvert de section rectangulaire.	186
Figure II.1	Schéma simplifié de définition d'un canal sous forme de U.	200
Figure II.2	Coupe transversale d'un canal découvert: (a) triangle à fond arrondi et (b) trapézoïdal.	201
Figure II.3	Schéma de définition de l'écoulement critique dans un canal ouvert de section triangulaire à fond arrondi.	202
Figure II.4	Schéma de définition des caractéristiques géométriques de la forme triangulaire	203
Figure III.1	Schéma de définition des paramètres géométriques en conduite circulaire pour un régime d'écoulement critique.	212
Figure III.2	Variation du taux de remplissage critique $\eta_c$ en fonction du débit relatif $Q^*$ . Courbe tracée selon la relation (III.12).	214
Figure III.3	Écarts relatifs en % occasionnés par la relation (III.13) sur le calcul du taux de remplissage critique $\eta_c$ .	215
Figure III.4	Variation de la charge spécifique relative $H_s^*$ en fonction du taux de remplissage critique $\eta_c$ . Courbe tracée selon la relation (III.20).	220
Figure III.5	Variation de la charge spécifique relative $H_s^*$ en fonction du taux de remplissage critique $\eta_c$ , $0,25 \leq \eta_c \leq 0,75$ . Courbe tracée selon la relation (III.20).	221
Figure III.6	Écarts relatifs en (%) occasionnés par la relation (III.21) sur le calcul sur la charge spécifique relative $H_s^*$ .	222
Figure IV.1	Schéma de définition des paramètres géométriques d'une section de forme parabolique.	227
Figure IV.2	Schéma de définition de l'écoulement dans un canal parabolique.	228

## **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

## Introduction générale

La profondeur critique est un paramètre important dans l'analyse des écoulements variés dans les canaux et dans les cours d'eau naturels. Pour les canaux triangulaires, rectangulaires, et des sections de canaux paraboliques, il est possible d'exprimer la profondeur critique de manière analytique. Cependant, pour de nombreuses sections pratiques, y compris la section trapézoïdale, circulaire et en profil U, les équations de la profondeur critique sont implicites. Pour ces sections la profondeur critique est actuellement obtenue soit par essai graphique et de la procédure d'approximation successive, ou en utilisant des équations empiriques ou semi-empiriques sur la base de l'ajustement des courbes. Dans la conception des canaux ouverts, il est important de calculer la profondeur critique afin de déterminer, la nature du régime d'écoulement. Si l'écoulement est fluvial, il est relativement facile à contrôler l'écoulement à travers des transitions de canal car les écoulements sont tranquilles et l'action des vagues est minime. En écoulement fluvial, la profondeur en un point quelconque est influencée par un contrôle en aval. Si l'écoulement est torrentiel, sa profondeur de l'écoulement à un point quelconque, influencée par un contrôle en amont. La notion introduite par (*Bakhmettef*, 1936), définie la notion de la charge spécifique, son minimum correspond à la profondeur critique, traduite par une relation universelle, connue par la condition de criticité présentée par la relation:

$$\left( Q^2 / g \right) = \left( A^3 / T \right)_c$$

Cette équation est une équation de base régissant les conditions d'écoulement critiques. Plusieurs chercheurs (*Chow V. T.*, 1959, *Henderson F. M.*, 1966, *Hager W.*, 1983, *French R. H.*, 1986, *Draper N.R.*, *Smith H.*, 1998, *Swamee P. K.*, 1993), ont montrés que le calcul de la profondeur critique est basé sur la condition de criticité d'écoulement dans les canaux découverts, pour toutes les formes géométriques.

Deux grandes catégories de problèmes se rencontrent souvent dans l'étude des canaux ouverts. La première catégorie de problèmes est celle qui est liée au calcul de la profondeur critique dans ces canaux notamment le canal en profil U, et la conduite circulaire. La seconde catégorie de problèmes correspond à l'endroit de l'évolution de la profondeur critique, qui est définie par la section de contrôle.

Notre étude s'intéresse à la première catégorie de problème, c'est-à-dire au calcul de la profondeur critique  $y_c$ . Cela suppose que le débit d'écoulement  $Q$  est donné.

En règle générale, la détermination de la profondeur critique dans les canaux ouverts est effectuée par le recours à la relation qui régit l'écoulement critique, telle que la condition de criticité. Cependant, dans cette relation, l'effet de la viscosité cinématique du liquide et la rugosité des parois du canal n'est pas pris en considération. Selon les revues bibliographiques (LIGGETT, J.A. 1993 et CHANSON H. 2008), il se révéla que le premier qui a signalé à ce type de phénomènes est l'ingénieur des ponts et chaussées Jean-Baptiste Charles Joseph BÉLANGER (1790-1874) par sa contribution aux études des écoulements à surface libre. (BÉLANGER, 1828), à publier une étude de son essai qui montre que le thème principal était le calcul des écoulements à surface libre graduellement variés, avec le développement de l'équation du remous. Dans son essai, Jean-Baptiste BÉLANGER, dérivait l'équation du remous avec une lucidité remarquable, et sa dérivation donne des résultats d'une précision étonnante. (LIGGETT, J.A. 1993 et CHANSON H. 2008), ont montré que, J. B. BÉLANGER étudia les singularités de l'équation du remous. Il démontra que les deux conditions singulières consistent en premier dans l'écoulement uniforme, c'est-à-dire quand la pente de la ligne d'eau est égale à la pente du radier et la hauteur d'eau c'est la profondeur normale. La seconde condition singulière donne la hauteur d'eau critique pour un écoulement dans un canal de section irrégulière avec un champ de pressions hydrostatiques, bien que J. B. BÉLANGER, n'a pas introduit spécifiquement la notion de profondeur critique.

A travers les développements théoriques, les auteurs (Straub W.O, 1978), (Swamee P.K, 1993), (Wang et al., 1999) et (Vatankhah A. R, 2013) ont évalués la profondeur critique pour des canaux de forme trapézoïdale et circulaire et ont montés à travers leurs relations, que ces dernières sont caractérisées par une précision, traduite par l'erreur relatives. Les auteurs ont montrés avec l'introduction du paramètre de remplissage critique  $\eta_c$ , que la profondeur critique est une fonction des dimensions géométriques de la section est ainsi le débit d'écoulement.

L'approche théorique de (Wang Z. Z., 1998) a développé une solution explicite, il estime la profondeur d'écoulement critique  $y_c$ , dans un canal trapézoïdal par la fonction  $y_c = f(b, m, K_c)$ , l'application de cette fonction passe par la détermination du paramètre  $K_c$ , qui est même un paramètre lié au paramètre de forme  $M_c = \left( \frac{m y_c}{b} \right)$ , par la relation :

$M_c(1 + M_c) = K_c(1 + 2M_c)^{\frac{1}{3}}$ . (Wang *et al*, 1999) ont exprimés le paramètre  $M_c$  en fonction de  $\epsilon_c$ , tel que  $\epsilon_c = 4 \left( \frac{m^3 Q^2}{g b^2} \right)^{1/3}$ . Le calcul de la profondeur critique par cette formule

est menu par une erreur maximale, inférieure à 1,0 % dans la gamme pratique de  $0,00 \leq \epsilon_c \leq 1000$ . Par ailleurs, l'étude théorique de (Vatankhah A. R, 2013) a proposé une solution du calcul de la profondeur critique pour le canal trapézoïdal en l'utilisant la méthode analytique de *Newton-Raphson*. Celle-ci admet dans la gamme pratique de  $\epsilon_c \in [0, 213,4]$ , une erreur maximale inférieure à  $6 \times 10^{-6}$  % .

Le calcul de la profondeur critique dans une conduite circulaire, a trouver aussi une grande importance par plusieurs chercheurs à l'instar (Straub W. O, Swamee P.K, Ali R. Vatankhah, Bijankhan Said M et Easa). Les relations établies par (Straub W. O, 1978), (Swamee P.K,1993), sont des relations simples et explicite et la profondeur critique est calculé seulement en fonction de deux paramètres le diamètre de la conduite  $D$  et le débit volumique  $Q$ . La relation de (Straub W. O, 1978), est de dimensions inhomogène et celle-ci n'est pas très précise et son erreur dépend du diamètre  $D$  du canal, par exemple, pour  $D \geq 0,25$  m, l'erreur maximale est de 5,8 %. Tandis que l'erreur maximale de la relation (Swamee P.K, 1993), est inférieure à 1,46% dans une gamme pratique de  $0,02 \leq \eta_c \leq 1$ .

Les deux approches théoriques récentes, présentées par les auteures (Ali R. Vatankhah et Bijankhan, 2010) et (Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011), concernant la quantification de la profondeur critique  $y_c$  qui est exprimée par le paramètre d'aspect critique  $\eta_c = (y_c/D)$ , tel que celui-ci est donné par une fonction de débit relatif  $\eta_c = f(Q^*)$ . En pratique, les paramètres  $Q$  et  $D$ , par conséquent  $Q^*$ , sont connus et l'on recherche alors a déterminer la profondeur critique  $y_c$ . La détermination de  $y_c$ , passe par celle de  $\eta_c$ , puisque  $y_c = \eta_c D$ . L'erreur maximale de l'approche de (Ali R. Vatankhah et Bijankhan, 2010), est inférieure à 0,25 % dans la gamme pratique de  $0,00 \leq \eta_c \leq 0,92$ . Tandis que l'erreur maximale de la relation proposée par (Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011), est inférieure à 0,27 % dans la gamme pratique de  $0,01 \leq \eta_c \leq 1$ .

A l'heure actuelle, aucun développement théorique n'a pu mener à l'établissement d'une relation analytique permettant d'évaluer exactement la profondeur critique,  $y_c$  dans les canaux de sections complexes comme la section circulaire, trapézoïdale et la section en profil U. Par ailleurs, ces études concernant le calcul de la profondeur critique ne tiennent pas en considération l'effet de la rugosité des parois et aussi la viscosité de liquide. Dans la présente

étude l'attention est portée plus particulièrement sur la contribution de quantification de la profondeur critique dans les canaux de forme U, circulaire et de forme parabolique en utilisant le paramètre d'aspect critique  $\eta_c$  qui définit pratiquement le taux de remplissage.

Pour mener à bien notre étude, la présente thèse est subdivisée en deux grandes parties :

- 1.** La première partie de la thèse est entièrement dédiée à un état des connaissances sur l'écoulement uniforme et sur le régime d'écoulement critique. Cette partie a pour objet de recueillir tous les travaux entrepris par plusieurs chercheurs concernant l'étude de l'écoulement critique notamment le calcul de la profondeur critique, pour les différentes formes des canaux. Aussi la notion de la pente critique et la section de contrôle.
- 2.** La seconde partie de la thèse constitue notre propre contribution à l'étude de l'écoulement critique dans les canaux de forme circulaire, de forme U et aussi de la forme parabolique. Une étude est portée plus particulièrement sur le dimensionnement du canal rectangulaire en écoulement critique. Nous tenterons enfin de montrer, à travers des approches théoriques la quantification de la profondeur critique dans ces canaux.

# *Partie I*

*Chapitre I : Etat de connaissance sur l'écoulement uniforme*

*Chapitre II : Description de l'écoulement critique*

*Chapitre III : Notion de la pente critique*

*Chapitre IV : Calcul de la profondeur critique dans les canaux  
ouverts*

*Chapitre V : Notion de la section de contrôle*

## **INTRODUCTION A LA PREMIERE PARTIE**

La profondeur critique est un paramètre important dans l'analyse des écoulements variés dans les canaux et dans les cours d'eau naturels. Les études effectuées sur le phénomène de l'écoulement en régime critique se sont d'abord intéressées à la quantification de la profondeur critique dans les canaux ouverts ayant des sections complexes, telles que la section trapézoïdale, circulaire et la section en profil U.

Depuis longtemps, et plus particulièrement au cours dix-huitième siècle, les recherches des auteurs, (*BÉLANGER*, 1828; *Bresse*, 1860) se sont intéressées à l'étude de l'écoulement critique, qui est considéré comme un état non stable. Cette dernière est déconseillée de l'adopter lors du dimensionnement des ouvrages hydrauliques dédiés aux écoulements à surface libres.

Cinq chapitres seront présentés dans cette première partie. Le premier permettra de définir l'écoulement uniforme, siège de l'état critique, englobant d'une part ses propriétés, ses définitions ainsi que la théorie qui gouverne et qui mène à l'établissement de la relation de Chézy, et d'autre part nous avons examinés enfin les différentes approches de calcul du coefficient de frottement. Le second chapitre traitera la description de l'écoulement critique dans les canaux ouverts. A travers ce chapitre nous avons examinés la notion définie par (*BAKHMETTEF*, 1932), de la charge spécifique qui s'exprime par le minimum de celle-ci est qui correspond à la profondeur critique. Ceci implique que la profondeur critique est la solution analytique de l'équation de la condition de criticité. Le troisième chapitre s'intéressera à la notion de la pente critique et ces propriétés, qui est définie pour un débit donné, la pente que devrait prendre ce canal pour que la profondeur normale d'écoulement est considérée égale à la profondeur critique. Dans le quatrième chapitre nous tenterons a rappeler les relations et les approches les plus utilisées pour la quantification de la profondeur critique dans les canaux ayant les sections les plus avantageuse, telles que les sections trapézoïdales et circulaires. Cette étude englobe les relations établies par (*Straub W. O*, 1978), (*Swamee P.K*,1993), et (*Vatankhah A. R*, 2013) après avoir présenté les limites de leurs applications.

Enfin, dans le cinquième chapitre, nous tenterons de montrer comment se manifeste l'écoulement critique et les endroits des survenues de celle-ci d'une part et d'autre part, comment nous pouvons bénéficier de ces paradoxes dans la pratique de l'ingénieur

hydraulicien, par leur utilisation comme des sections de contrôles pour le jaugeage des débits dans les canaux irréguliers ou bien par un calcul direct dans les canaux réguliers.

# *Chapitre I*

*Etat de connaissance sur l'écoulement  
uniforme*

## I. Etat de connaissance sur les écoulements à surface libre

### I.1. Introduction

Ces écoulements présentent par définition la particularité de comporter une surface libre en contact avec l'air, généralement soumis à la pression atmosphérique et dont la forme peut varier, ce qui implique une variation possible de la forme et des dimensions de la section transversal de la masse liquide. L'écoulement à surface libre se distingue en charge par la présence d'une surface où l'écoulement est en contact direct avec l'air, tel que le gradient de pression ne peut plus être le moteur de l'écoulement, mais c'est la gravité également qui joue plutôt le rôle génératrice du mouvement. L'hydraulique fluviale s'intéresse surtout aux écoulements dans les cours d'eau, tel que les rivières et les fleuves, et également aux systèmes d'évacuation comme les réseaux d'assainissement pluvial, ainsi qu'aux différents aménagements des retenus d'eau, usine de production d'électricité et etc. Ces écoulements se caractérisent par une hauteur d'écoulement généralement faible par rapport à la longueur de celui-ci, ce type d'écoulement est appelé écoulement unidimensionnel caractérisé par les variables  $(x, t)$ .

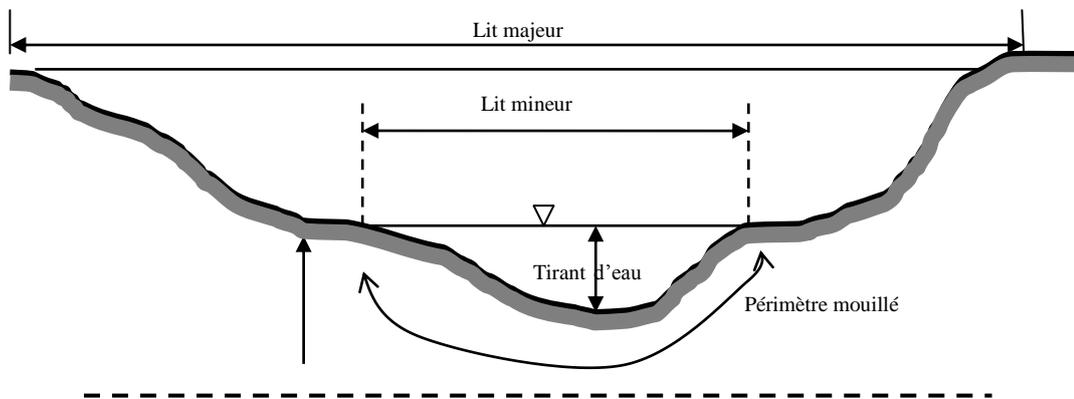
Nous limiterons dans cette étude la connaissance des écoulements uniforme, car celui-ci est toujours considéré théoriquement comme régime de référence (même pour les autres régimes), notamment c'est un siège de régime critique l'objectif de notre étude.

### I.2. Rappel de quelques notions d'écoulement à surface libre

- *Bief* : le bief est un tronçon homogène en terme de pente et de section d'écoulement ;
- *Type de cours d'eau* : on distingue des cours d'eau en fonction de la variation pente du fond  $I_f$  :
  - 1)  $I_f < 3\%$  on parle de la rivière;
  - 2)  $3\% < I_f < 6\%$ , on parle de rivière torrentielle.
  - 3)  $I_f > 6\%$ , on parle de torrent.
- *Section d'écoulement* (ou section mouillée)  $A$  : partie de la section du canal limité par les parois et la surface libre ;
- *Périmètre mouillé*  $P$  : longueur de la surface d'écoulement en contact avec le lit du cours d'eau (fond et berges) ; c'est-à-dire le périmètre de la section d'écoulement sans largeur au miroir;

- *Largeur au miroir  $T$* : largeur de la section d'écoulement au niveau de la surface libre. La pression du fluide à cette interface est égale à celle de l'atmosphère ;
- *Profondeur hydraulique  $y_h$*  : hauteur moyenne d'eau et défini par  $y_h = A/T$  ;
- *Profondeur normale  $y_n$*  : c'est la profondeur d'un écoulement permanent uniforme dans un bief. La profondeur normale est fonction du débit  $Q$ , de la rugosité, et de la pente moyenne  $I$  ;
- *Tirant d'eau* : profondeur maximale d'une section d'écoulement ;
- *Régime uniforme* : régime d'écoulement le long d'un bief où les caractéristiques d'écoulement qui définit par la vitesse et la profondeur sont constantes quelle que soit la position le long de la direction d'écoulement. Ce critère traduit par les expressions :  $\partial y/\partial x = 0$  et  $\partial V/\partial x = 0$  ;
- *Régime permanent* : régime où l'écoulement ne dépend pas du temps. On a ainsi  $\partial y/\partial t = 0$  ;
- *Régime graduellement varié* : régime d'écoulement où la variation de la hauteur d'eau dans la direction d'écoulement est très faible, typiquement si  $L$  désigne une longueur d'écoulement et  $\Delta y$  une variation de la hauteur, on a :  $\Delta y/L \ll 1$ . Les équations de Saint-Venant où le calcul différentiel des courbes de remous n'est valable que pour ce régime ;
- *Le régime rapidement varié* : régime d'écoulement où la variation de hauteur d'eau au sens d'écoulement est très importante, typiquement si  $L$  désigne une longueur d'écoulement et  $\Delta y$  une variation de la hauteur, on a :  $\Delta y/L = 0$ . En effet à l'approche d'une singularité ou bien en cas d'un ressaut hydraulique, l'écoulement peut entrer dans un régime rapidement varié ;
- *Ressaut hydraulique* : variation brusque de la hauteur d'eau où l'écoulement passe de régime torrentiel au régime fluvial ;
- *Pente moyenne* : pente moyenne longitudinale  $I = \tan\theta$  d'un bief exprimé en % ou en ‰ ;
- *Rayon hydraulique  $R_h$* : c'est la longueur caractéristique qui égal au rapport entre la surface  $A$  et le périmètre d'écoulement  $P$  définie par  $R_h = A/P$  ;
- *Régime torrentiel* : régime d'écoulement supercritique où Nombre de Froude  $F_r > 1$ . Ce régime est caractérisé par une forte vitesse et faible hauteur d'eau ;
- *Régime fluvial* : régime d'écoulement sub-critique où Nombre de Froude  $F_r < 1$ . Ce régime est caractérisé par une faible vitesse et hauteur d'eau élevée ;

- *Débit  $Q$*  : flux d'eau par unité de temps à travers la surface d'écoulement ;
- *Vitesse moyenne  $v$*  : c'est la vitesse moyenne d'écoulement qui également égale au rapport ( $Q/A$ ) ;
- *Coefficient de rugosité* : coefficient traduisant la rugosité des parois, le coefficient de Chézy noté  $C$  ou de Manning-Strickler noté  $K$  sont les plus universels utilisés ;
- *Lit mineur* : lit occupé ordinairement par un cours d'eau par opposition au lit majeur qui correspond à l'emprise maximale historique d'un cours d'eau ou à la plaine inondable. On parle aussi de *niveau des plus hautes eaux* (PHE) pour désigner la cote maximale atteint par la surface libre d'un cours d'eau ;
- *La berge ou la rive* : est le talus qui sépare le lit mineur du lit majeur. Lorsque la berge est couverte par la végétation, on parle de *ripisylve* ;
- *L'étiage* : c'est les plus basses eaux d'un cours d'eau, généralement correspond la période estivale. Le débit d'étiage est donc le débit minimal d'un cours d'eau, et le débit de plein bord est le débit atteint lorsque la rivière sort de son lit mineur. Durant une crue, on parle de débit de point pour désigner le débit maximal atteint.



**Figure 1.1 :** Coupe transversale d'un canal naturel

Pour un cours d'eau naturel, la géométrie du lit est très complexe. Un cours d'eau doit laisser à transiter un débit qui varie en fonction de temps. En général, celui-ci peut varier d'une année à l'autre d'une façon extrêmement variable en fonction des précipitations enregistrées.

### I.3. Les différents types des canaux

#### I.3.1. Définition

Un canal est un cours d'eau artificiel, c'est-à-dire fait partiellement ou totalement par l'homme, de section ouverte, navigable ou non.

On distingue:

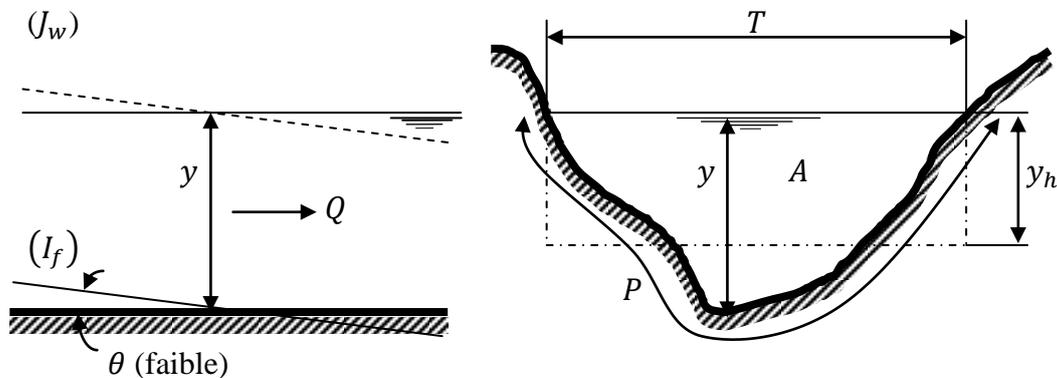
- 1) Les canaux qui servent à transporter de l'eau : canaux d'alimentation ou d'irrigation, pour lesquels il faut assurer un débit optimum;
- 2) Les canaux où l'eau sert à porter des engins de transport : canaux de navigation pour lesquels on cherche à obtenir la circulation la plus simple de ces engins avec le minimum de débit hydraulique.

Dans les deux cas, le canal sert de conduite canalisant l'eau dont on doit définir la section mouillée permettant le débit nominal ou le passage d'un ou plusieurs engins dont on a défini le gabarit en charge.

Un canal est une machine hydraulique aménagée par l'homme dont le concepteur doit assurer la permanence d'une alimentation en eau suffisante à sa fonction (voie navigable, voie d'alimentation en eau, ...) au milieu d'un environnement plus ou moins difficile

### I.3.2. Géométrie des canaux

La section transversale d'un canal est une section plane normale à la direction d'écoulement.



**Figure I.2 :** Eléments géométrique de la section

Un canal dont la section ne varie pas et dont la pente longitudinale et la rugosité restent constantes, la hauteur d'eau pouvant cependant varier, ce canal est alors appelé canal prismatique ; sinon on l'appelle canal non prismatique.

A part les variables géométriques d'une section, l'étude hydraulique des canaux prend également en considération les pentes longitudinales du canal, en l'occurrence :

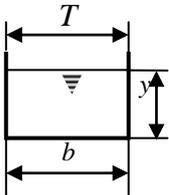
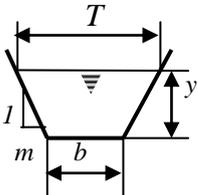
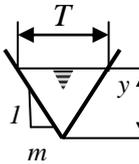
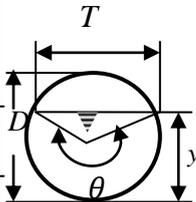
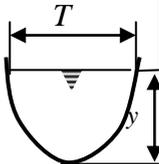
- ✓ La pente de fond du canal,  $I_f$ ;
- ✓ La pente piézométrique ou pente de la surface libre,  $J_w$ .

La valeur de la pente de fond dépend entièrement de la topographie et la constitution du terrain. Cette pente généralement faible, peut être exprimée par :  $I = \tan\theta = \sin\theta$  où  $\theta$  est l'inclinaison de la pente ;

Le périmètre mouillé,  $P$  est peut être composé d'un lit immobile constituant le béton, sèment ou la roche, ou bien d'un lit mobile constituant le granulat ou les alluvions.

Le tableau ci-après donne les formules des éléments géométriques pour cinq différents types de sections de canaux (voir Chow, 1959, p.21). Certains cours d'eau naturels ont une forme géométrique assez irrégulière, mais peuvent toutefois être approximés par des sections trapézoïdales ou paraboliques.

**Tableau I.1** : Eléments géométriques pour différents sections de canaux.

Forme du canal					
Paramètres géométriques					
Section mouillée $A$	$by$	$(b+my)y$	$my^2$	$\frac{1}{8}(\theta - \sin\theta)D^2$	$\frac{2}{3}Ty$
Périmètre mouillé $P$	$b + 2y$	$b + 2y\sqrt{1 + m^2}$	$2y\sqrt{1 + m^2}$	$\frac{1}{2}\theta D$	$T + \frac{8y^2}{3T} *$
Rayon Hydraulique $R_h$	$\frac{by}{b + 2y}$	$\frac{(b + my)y}{b + 2y\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{my}{2\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{D}{4}\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)$	$\frac{2T^2y}{3T^2 + 8y^2} *$
Largeur au miroir $T$	$b$	$b + 2my$	$2my$	$D(\sin(\theta/2))$ ou $2\sqrt{y(D - y)}$	$\frac{3A}{2y}$
Profondeur hydraulique $y_h$	$y$	$\frac{(b + my)y}{b + 2my}$	$\frac{y}{2}$	$\frac{D}{8}\left(\frac{\theta - \sin\theta}{\sin(\theta/2)}\right)$	$\frac{2}{3}y$

\*Valable pour

$0 < \xi < 1$ , avec  $\xi = 4y/T$ . Si  $\xi > 1$  :  $P = (T/2)\left[\sqrt{1 + \xi^2} + 1/\xi \ln(\xi + \sqrt{1 + \xi^2})\right]$  (voir Hydraulique Fluviale par W. H. Graf & M. S. Altinakar, 2000, p.5)

## I.4. Ecoulement dans les canaux

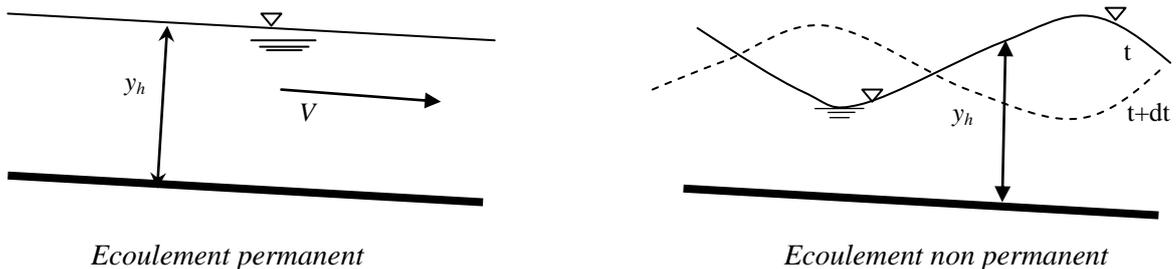
Les écoulements dans les canaux naturels et artificiels sont des écoulements à surface libre. Ce mouvement de l'eau est dû à la gravité grâce à la pente qui favorise l'écoulement, comme pour les conduites, à la différence de charge entre deux sections.

### I.4.1. Type d'écoulement

Une classification des écoulements peut faire suivant la variabilité de caractéristiques hydrauliques telles que de la profondeur  $y$  ou  $y_h$  et la vitesse en fonction du temps et à l'espace. Cette notion est exprimée par  $y_h = f(t, x)$ .

#### I.4.1.1. Variabilité dans le temps

- i) Le mouvement est permanent (ou stationnaire), si les vitesses moyennes  $V$ , et ponctuelles  $U$ , ainsi que la profondeur  $y$  ou  $y_h$  restent invariable dans le temps en grandeur et en direction. Par conséquent le débit est constant le long du canal sans apport latéral.



**Figure I.3 :** Schéma des écoulements permanents et non permanents

- ii) Le mouvement est non permanent, si les paramètres hydrauliques tels que la vitesse moyenne  $V$ , et la profondeur  $y(t), \dots$ cte, varient dans le temps. Par conséquent le débit n'est pas constant.

Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins les variations temporelles sont, dans certains cas suffisamment lents pour que l'écoulement puisse être considéré comme une succession de régime permanent, du moins dans un intervalle de temps relativement court.

#### I.4.1.2. Variabilité dans l'espace

Dans un canal suffisamment long, dont la pente, la section, la rugosité et le débit sont constants, c'est toujours le régime uniforme qui finit par s'établir. Dans ce régime, les pertes

par frottement sont entièrement compensées par la pente du fond. La présence d'une singularité (rétrécissement, élargissement, discontinuité du seuil, etc.), provoque non seulement une perte localisée d'énergie, comme dans les écoulements en charge, mais encore une modification de la surface libre (les courbes de remous). Le régime est alors différent du régime uniforme. On appelle régime varié.

Quand les vitesses croissent dans la direction de l'écoulement, celui-ci est dit accéléré ; quand elles diminuent, l'écoulement est dit retardé.

On peut diviser les mouvements variés en deux grands groupes : les mouvements graduellement variés, dont les caractéristiques hydrauliques ne changent que très lentement d'une section à l'autre ; les écoulements rapidement variés, où l'on constate une évolution rapide, parfois discontinue, des caractéristiques de l'écoulement, et qui, pour cela même, occupent en général une zone relativement courte ; les importants sont le *ressaut hydraulique*, la *chute brusque* (c'est en particulier le cas des déversoirs) et les *contractions*.

La figure ci-dessous montre un schéma simplifié représentant les différents régimes d'écoulement, généralement rencontrés dans les ouvrages hydrauliques.

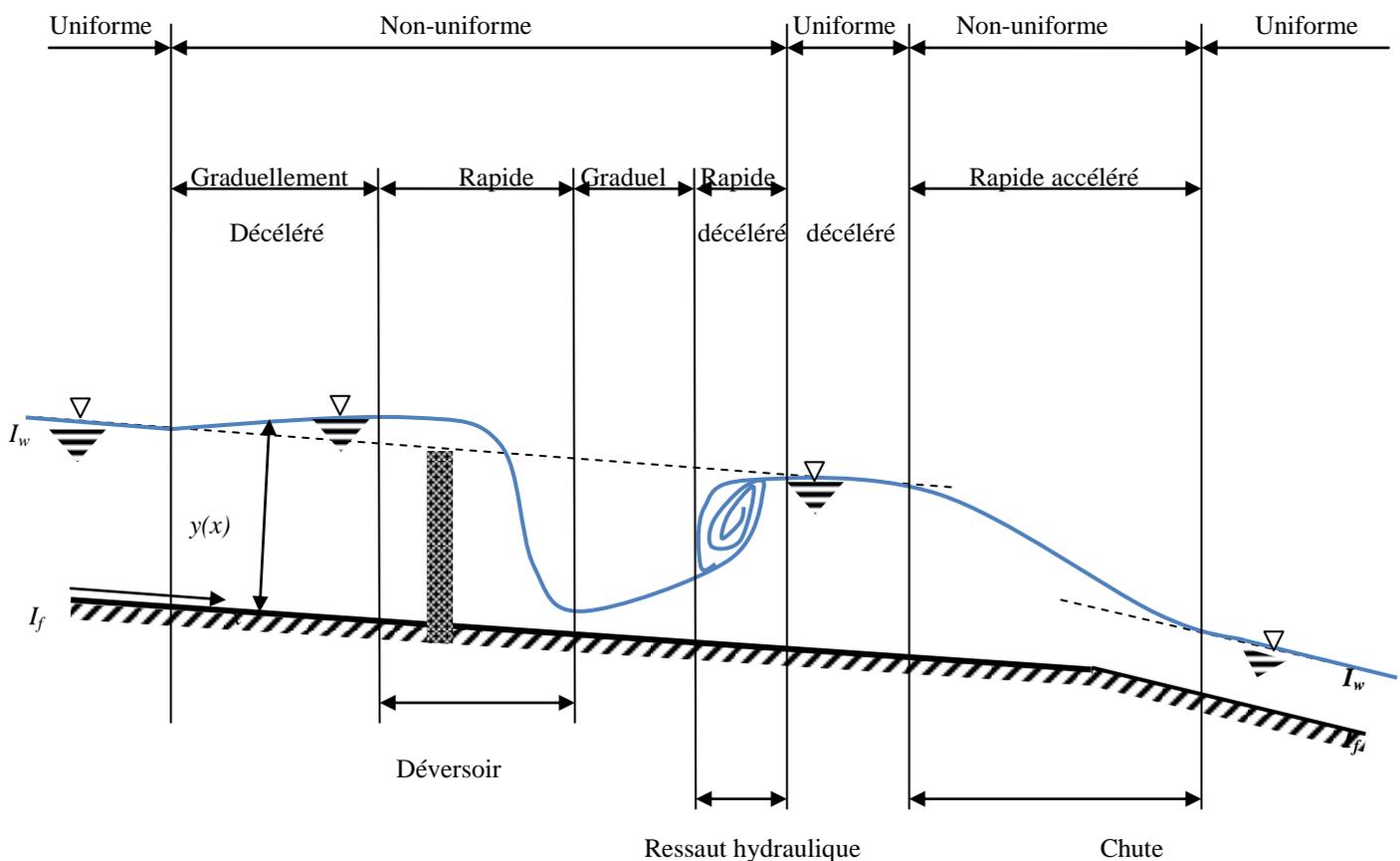


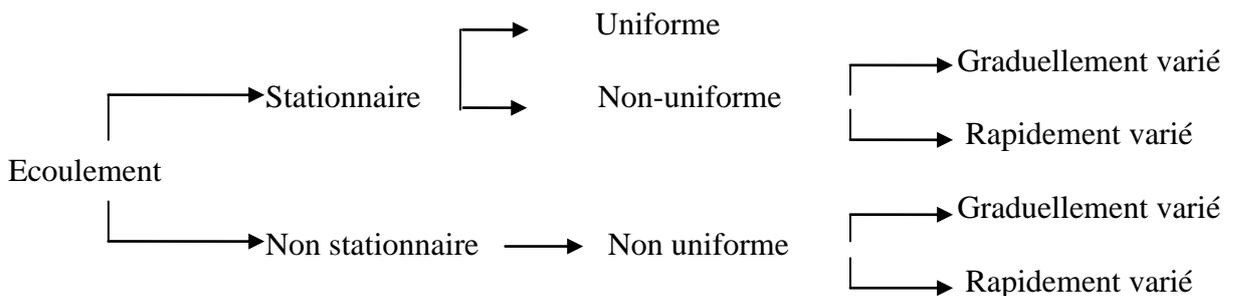
Figure I.4. Schéma représentant les différents régimes d'écoulement

Selon cet schématisation on peut envisager les différents mouvements comme suit :

- 1) Le mouvement est uniforme si les paramètres caractérisant l'écoulement restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente du fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre et l'on a  $I_f = I_w$  ;
- 2) Le mouvement est non-uniforme ou varie si les paramètres caractérisant l'écoulement changent d'une section à l'autre. La pente de la surface libre est différente de celle du fond ;
- 3) Un écoulement non-uniforme peut être accéléré, ou décéléré suivant que la vitesse croît,  $(dV/dx) > 0$ , ou décroît  $(dV/dx) < 0$ , dans le sens du mouvement ;
- 4) Lorsque le mouvement est graduellement varié, la profondeur  $y_h(x) \cong y_h$ , ainsi que les autres paramètres varient lentement d'une section à l'autre, on peut donc admettre que l'écoulement est quasi uniforme le long d'un petit tronçon et que la vitesse,  $V$ , reste quasiment constante ;
- 5) Lorsque le mouvement est rapidement varié, les paramètres caractérisant l'écoulement changent brusquement, parfois avec discontinuités. Cela se manifeste en général au voisinage d'une singularité, telle qu'un seuil, un rétrécissement, un ressaut hydraulique ou une chute brusque.

#### I.4.2. Les Différents Types D'écoulement

Les types d'écoulement qu'on rencontre en hydraulique peuvent être résumés ainsi :



#### I.4.3. Régime D'écoulement

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre est le siège des forces suivantes :

- Forces de gravité ;
- Forces de frottement dû la viscosité et/ou rugosité.

Les équations réduites du mouvement font intervenir les coefficients ou nombres adimensionnels suivants :

### I.4.3.1. Nombre de *Froude* ( $F_r$ )

Le nombre de *Froude* ( $F_r$ ), de l'hydrodynamicien anglais *William Froude*, est un nombre adimensionnel qui caractérise dans un fluide l'importance relative des forces liées à la vitesse et à la force de pesanteur. Ce nombre apparaît essentiellement dans les phénomènes à surface libre, en particulier dans les études de cours d'eau, de barrages, de ports et de navires (architecture navale). Il est également important en météorologie pour le calcul de l'écoulement de l'air en montagne.

Dans un cours d'eau et dans les canaux ouverts, le nombre de *Froude* correspond au rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse des ondes de surface. Les ondes se propagent en *eau peu profonde*, leur célérité est donc :  $C = \sqrt{gy}$

L'expression du nombre de *Froude* est :

$$F_r = \frac{V}{C} = \frac{V}{\sqrt{gy}};$$

Où :

- ✓  $V$  : vitesse moyenne de l'écoulement (m/s)
- ✓  $g$  : accélération de la pesanteur (9.81 m/s<sup>2</sup>)
- ✓  $y$  : hauteur d'eau (m)

Le nombre de *Froude*  $F_r = V/\sqrt{gy}$  est, par conséquent, une mesure de la "cineticité" du courant, c'est-à-dire de sa rapidité (ou de sa lenteur), cette expression est également appelée *coefficient cinétique*, et certains auteurs adoptent le carré de cette valeur.

Pour un cours d'eau un même débit peut être obtenu de deux façons différentes :

- $F_r > 1$  : régime torrentiel ou supercritique, avec une faible hauteur d'eau et une forte vitesse (équivalent d'un régime supersonique). Dans ce régime, l'écoulement est "tiré" par les forces qui le meuvent (la gravité le plus souvent), sans que la masse de fluide en aval soit un gêne.
- $F_r < 1$  : régime fluvial ou sub-critique, avec une forte hauteur d'eau et une faible vitesse (équivalent d'un écoulement subsonique). Ce régime est "pilote par l'aval" : le comportement des particules en mouvement est contraint par celles qui les précèdent.

Dans les deux solutions la hauteur d'eau et la vitesse sont déterminées suivant le nombre de *Froude* et le débit, mais les solutions ne se calculent pas de la même façon. La détermination du nombre de *Froude* est donc un préalable au calcul.

- $Fr = 1$  : régime critique, la transition du régime torrentiel au régime fluvial provoque un ressaut hydraulique où la hauteur d'eau s'accroît brusquement. Le phénomène est observable dans les ouvrages hydrauliques (bassin amortisseur). Dans la zone de transition et lorsque la vitesse de propagation d'onde égale la vitesse moyenne de l'écoulement, où  $V = C = \sqrt{gy}$ . Cette égalité exprime l'équilibre entre les forces de gravité et les forces d'inerties, cet équilibre est vérifié seulement à l'état limite, ce qui implique que la valeur de nombre de *Froude* égale à l'unité ( $Fr = 1$ ), dans ce contexte la vitesse  $V$  est dite vitesse critique et souvent appelée *célérité de l'onde gravitaire*, et la profondeur  $y$ , c'est une profondeur critique, et le régime de l'écoulement est appelé régime critique.

#### I.4.3.2. Nombre de *Reynolds* ( $R_e$ )

Le nombre de *Reynolds* ( $R_e$ ), est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par *Osborne Reynolds*. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Le nombre de *Reynolds* représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

On le définit de la manière suivante :

$$R_e = \frac{\rho V D_h}{\mu} = \frac{V D_h}{\nu};$$

Où

- $V$  est la vitesse moyenne du fluide [m/s]
- $D_h$  est le diamètre hydraulique [m]
- $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  [m<sup>2</sup>/s]
- $\rho$  est la masse volumique du fluide [kg/m<sup>3</sup>]
- $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide [Pa.s] ou Poiseuille [Pl]

L'influence du nombre de *Reynolds*, consiste dans les effets des forces d'inertie et de viscosité. Lorsque les forces d'inertie sont prépondérantes, l'écoulement est caractérisé par une vitesse élevée et son régime est en règle générale dans le domaine de pleine turbulence. Le coefficient de frottement prend alors une valeur quasi constante et ne dépend que celle de la rugosité relative. Par contre, lorsque les forces de viscosité sont prépondérantes, l'écoulement est caractérisé par une vitesse moins élevée et son régime appartient souvent au domaine de transition. Le coefficient de frottement dépend alors à la fois de la rugosité

relative et du nombre de *Reynolds*. Pour les canaux à parois lisses ou pratiquement lisses, le coefficient de frottement ne dépend que de la valeur de la rugosité relative caractérisant l'état des parois internes de l'ouvrage.

L'écoulement turbulent est celui que l'on rencontre souvent en pratique et correspond à des valeurs de nombre de *Reynolds* supérieure ou égales à 2300 et à des valeurs de rugosité relative comprises en 0 et 0,05.

Trois régimes de l'écoulement turbulent peuvent donc être observés. Il s'agit du domaine lisse, de transition et de pleine turbulence appelé aussi domaine du régime d'écoulement turbulent rugueux correspond souvent aux fortes valeurs de la rugosité relative.

## **I.5. Écoulement uniforme dans Les canaux ouverts**

### **I.5.1 Introduction**

Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur  $y_n$  de l'écoulement appelée aussi profondeur normale, l'aire de la section mouillée  $A$ , la vitesse  $V$  de l'écoulement et le débit  $Q$ . La ligne de charge totale est à la fois parallèle à la ligne piézométrique et à la pente géométrique du canal.

D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse  $V$  est généralement associée à la constante de la vitesse moyenne de l'écoulement; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée.

Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens stricte du terme, ne soit pas pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivière. Cette approche, bien que simplifiée, donne des résultats assez satisfaisants dans bon nombre de cas pratiques.

Le présent chapitre propose un état des connaissances sur les principes relations usuelles régissant l'écoulement uniforme.

Après avoir défini l'écoulement uniforme est les règles qui gouvernent son établissement, les relations de *Chézy*, de *Manning* (ou de *Manning – Strickler*) (*Chow*, 1973) et de *Darcy – Weisbach* (1854) sont développées. Compte tenu de leur emploi pratique et aux résultats satisfaisants auxquels elles aboutissent, cette étude est exclusivement consacrée à ces relations.

Les coefficients de résistance liés à ces formules sont particulièrement discutés et les relations permettant leur estimation sont présentées et commentées.

### **I.5.2. Établissement de l'écoulement uniforme**

L'écoulement uniforme peut être soit en régime laminaire soit en régime turbulent, mais il se produit sous de grandes vitesses. A vitesse élevée, l'écoulement uniforme est instable et il est le siège d'un fort entrainement d'air.

Dans les canaux ouverts, l'écoulement uniforme se développe lorsque les forces de résistance, proportionnelles à la vitesse moyenne,  $V$  et s'opposant à l'écoulement, sont équilibrées par les forces de gravité.

Lorsqu'un écoulement entrant dans un canal s'effectue de façon lente, la vitesse et par conséquent la résistance à l'écoulement sont faibles. Les forces de gravité sont alors prédominantes et l'écoulement subit alors une accélération depuis l'amont. La vitesse ainsi que la résistance augmentent au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, jusqu'à ce que les forces de gravité soient équilibrées. A cet instant, l'écoulement uniforme apparaît. La zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré, et au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît, est dite zone de transition. Si la longueur du canal est inférieure à la longueur de la zone de transitoire, l'écoulement uniforme ne peut être atteint.

Plus à l'aval de l'écoulement uniforme, les forces de gravités deviennent de plus en plus prédominantes en raison de l'accélération que subit l'écoulement. L'écoulement uniforme disparaît alors en laissant place un écoulement varié. La figure I.5 montre l'état d'un écoulement à l'entrée et l'intérieur d'un canal rectangulaire de grande longueur et de différentes pentes géométriques  $I_f$ . Celle-ci est comparée à la pente critique  $I_c$ .

Lorsque la pente  $I_f$  est faible (figure I.5.a), la zone transitoire se présente sous l'aspect d'ondulations. L'écoulement est uniforme au milieu du canal mais il subit une variation aux extrémités de celui-ci. D'un point de vue théorique, l'écoulement varié tend vers l'écoulement uniforme de manière graduelle et asymptotique. On considère généralement dans la pratique que la profondeur de l'écoulement reste constante si la variation qu'elle subit n'excède pas 1% de la valeur moyenne de la profondeur normale.

Lorsque la pente  $I_f$  correspond à la pente critique  $I_c$  (figure I.5.b), la surface libre de l'écoulement critique est instable. Des ondulations peuvent se produire au milieu du canal, mais la profondeur oscille autour d'une valeur moyenne et l'écoulement est alors considéré comme étant uniforme.

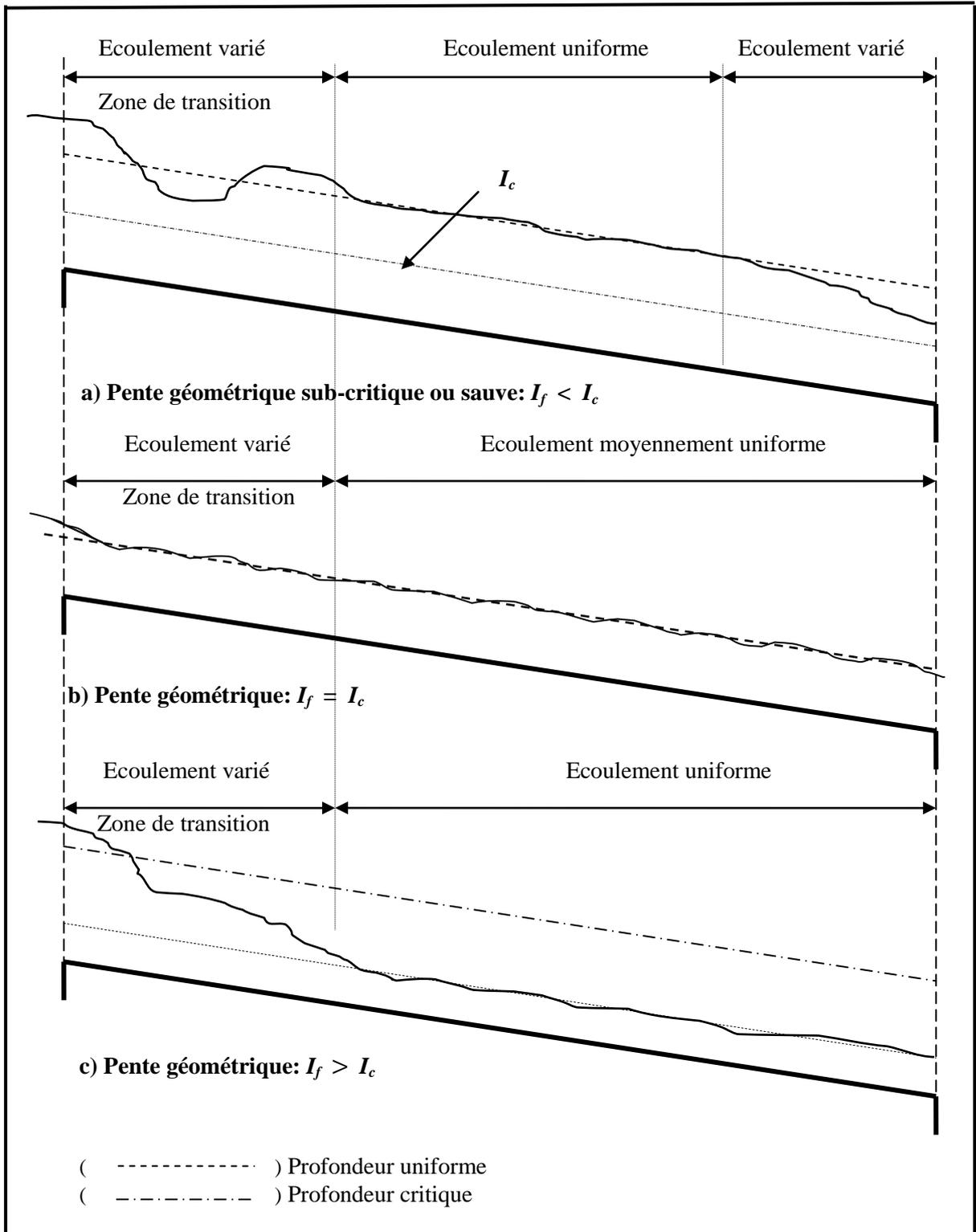


Figure I.5: Etablissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur (Chow, 1973)

Lorsque la pente  $I_f$  est supercritique ou prononcée (figure .I.5.c), la surface libre dans la zone transitoire chute de manière graduelle d'un niveau sub-critique ou saute à un niveau supercritique ou prononcé. Au-delà de la zone transitoire, l'écoulement devient uniforme.

La longueur sur laquelle s'étend la zone transitoire dépend essentiellement du débit volume  $Q$  entrant dans le canal ainsi que des caractéristiques de celui-ci, telles que la rugosité absolue de ses parois, la pente et la géométrie d'entrée. D'un point de vue hydrodynamique, la longueur de la zone transitoire ne doit pas être inférieure à la longueur pour laquelle, sous des conditions données de l'écoulement. La couche limite est pleinement développée.

Le calcul de la profondeur d'un écoulement uniforme, appelée hauteur normale de l'écoulement est très importante. Le classement des profils géométriques par exemples est très tributaire de la valeur de la profondeur normale. Comme le montre la (figure I.5.c), la profondeur normale est inférieure à la profondeur critique et c'est cette inégalité qui permet de conclure sur le caractère prononcé ou supercritique de la pente géométrique du canal.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux se base sur les relations dites « relations de l'écoulement normal ». Celles-ci expriment, de manière approximative, la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Les formules pratiques de l'écoulement uniforme s'expriment généralement sous la forme :  $V = CR_h^\beta J^\gamma$  ou  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $J$  est la pente de la ligne de charge. Comme nous l'avons déjà indiqué,  $J$  correspond également à la pente  $I_f$ . Le paramètre  $C$  traduit la résistance de l'écoulement et dépend de  $V$ , de  $R_h$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant les parois du canal, la viscosité du liquide  $\nu$  et beaucoup d'autres facteurs.

La distinction doit être faite entre l'écoulement uniforme se produisant dans les canaux artificiels et dans les canaux naturels. Dans la pratique, l'écoulement dans les canaux naturels est considéré comme étant uniforme à condition que la profondeur de l'écoulement ne subisse pas de variation brusque pouvant être causée par les irrégularités des parois du canal. L'application des relations de l'écoulement uniforme aux canaux naturels mène à des résultats plutôt approximatifs en raison du fait que l'écoulement dépend en réalité d'un plus grand nombre de facteurs que ceux qui influencent l'écoulement dans les canaux artificiels. Selon *Schnackenberg* (1951), une bonne relation de l'écoulement uniforme dans un canal naturel sans transport de sédiments est celle qui devrait tenir compte d'au moins 10 paramètres qui sont  $A$ ,  $V$ ,  $V_{ms}$  qui correspond à la vitesse maximale à surface, le périmètre mouillé  $P$ ,  $R_h$ , la profondeur maximale  $y$  de l'écoulement, la pente  $I_w$  de la surface libre, le coefficient  $n$  qui caractérise la rugosité du canal, la viscosité dynamique  $\mu$  du liquide et la température  $T$ .

Lorsque l'on se réfère à la bibliographie (*Houk*, 1918; *Forchheimer*, 1930; *Lindquist*, 1933; *Vladislavjevitch*, 1951), on peut s'apercevoir que très nombreuses relations ont été proposées au calcul de l'écoulement uniforme. Cependant, aucune d'entre elles ne répond au qualificatif de "bonne relation" selon la conception de *Schnackenberg* (1951).

Différentes approches ont été également présentées au calcul de la vitesse de l'écoulement dans les canaux naturels, telle que celle de *Toebes* (1955). Dans cette approche, une analyse par corrélation multiple est appliquée aux différents facteurs qui influencent la vitesse de l'écoulement dans un canal naturel. Ces facteurs, selon *Toebes* (1955) sont  $A$ ,  $V_{ms}$ ,  $I_w$ ,  $n$  et  $T$ . Par cette approche, il est possible d'estimer l'influence de chacun des dits facteurs sur la vitesse  $V$  et la valeur de celle-ci est égale à la somme algébrique des diverses contributions de chacun des paramètres en questions. Cependant, la méthode de *Toebes* (1955) ne peut être appliquée que dans la région géographique pour laquelle a été faite l'analyse de l'influence des facteurs ci-dessus cités, ce qui malheureusement exclu toute généralisation de cette méthode.

A travers de nombreux exemples pratiques concernant l'écoulement uniforme, on peut s'apercevoir que les formules dites de *Chézy* et de *Manning* (ou *Manning-Strickler*) sont les plus largement utilisées. La forme de leur expression est telle que nous l'avons déjà indiqué  $V = CR_h^\beta J^\gamma$  où les exposants  $\beta$  et  $\gamma$  ont des valeurs bien déterminées. En raison de leur utilisation fiable et très répandue, ces relations seront développées aussi clairement que possible, en tenant d'éclaircir leur limite et leur domaine d'applicabilité. D'autres relations seront également exposées, telle que la formule de *Darcy-Weisbach* (1854) dont l'application est universelle. Elle joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites, et sa généralisation aux canaux ouverts connaît à l'heure actuelle un grand succès.

Ce présent chapitre est consacré à un état de connaissance sur l'écoulement uniforme. Il se propose de passer en revue les principales formules de l'écoulement uniforme, en mettant l'action sur les relations de *Chézy*, *Manning-Strickler* et *Darcy-Weisbach*.

### I.5.3. Formules usuelles de l'écoulement uniforme

#### I.5.3.1. Formule de *Chézy*

La formule de *Chézy* est probablement la première formule destinée au calcul de l'écoulement uniforme. La vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement s'exprime par:

$$V = CR_h^{1/2} J^{1/2} \quad (I.1)$$

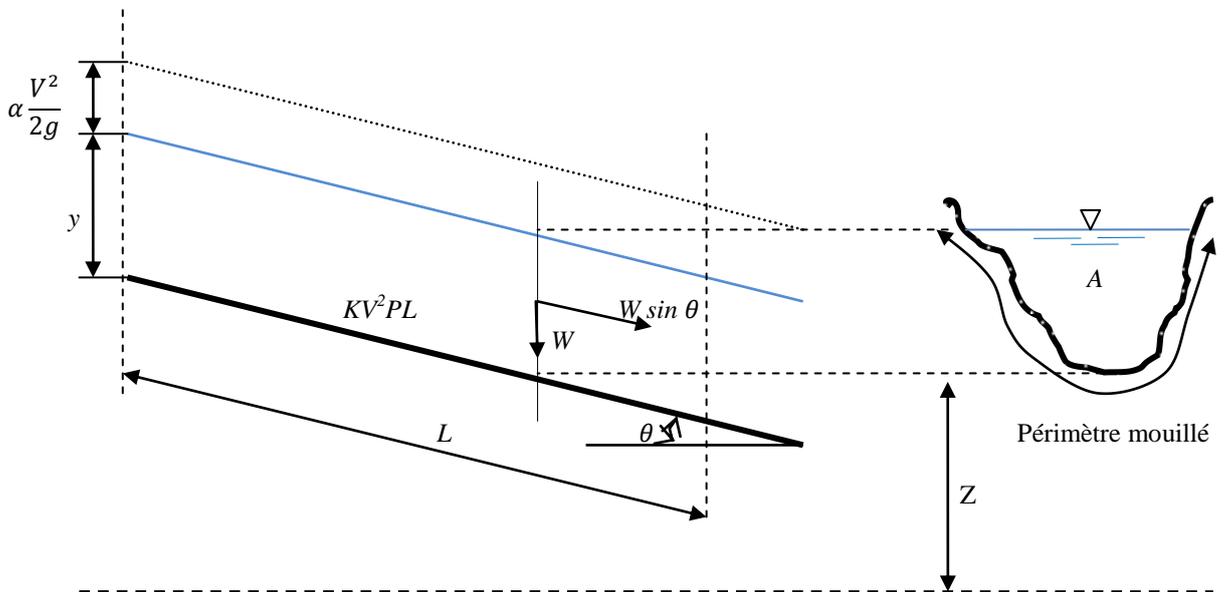
Où  $R_h$  est le rayon hydraulique,  $J$  est la pente de la ligne de charge totale ou gradient de perte de charge ( $J$  étant également la pente  $I_f$  du canal) et  $C$  est le facteur caractérisant la résistance de l'écoulement. Le facteur  $C$  est habituellement appelé coefficient de Chézy.

Chézy stipule que la force de résistance s'opposant à l'écoulement et par unité de surface de canal est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne  $V$ . Cette force peut donc s'écrire:

$$F_r = (1m^2) = KV^2 \quad (I.2)$$

Où  $K$  est le facteur de proportionnalité. Comme le montre la figure I.6, la surface du canal en contact avec le liquide est égale au produit du périmètre mouillé  $P$  par la longueur  $L$  du canal.

La force totale  $F_r$  mise en jeu s'écrit ainsi:



**Figure I.6:** Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de formule de Chézy

Nous avons déjà indiqué que l'écoulement uniforme s'établit lorsque les forces de gravité sont équilibrées par les forces de résistances  $F_r$ . La quantité  $(W \sin \theta)$  représentée sur la figure I.6 correspond à la composante tangentielle du poids propre  $W$  du liquide. C'est cette composante qui intervient dans l'écoulement et qui doit être équilibrée par la force  $F_r$ . Le poids propre  $W$  peut s'écrire  $W = \rho g A L$  où  $\rho$  est la masse volumique du liquide,  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Le produit  $(A \times L)$  désigne le volume de liquide sur toute la longueur  $L$ . Ainsi nous pouvons écrire  $W = \rho g A L \sin \theta = KV^2 PL$ , soit  $V^2 = \left( \frac{\rho g}{K} \right) \left( \frac{A}{P} \sin \theta \right)$ .

La quantité  $A/P$  représente par définition le rayon hydraulique  $R_h$ .

En désignant par  $C^2 = \left( \frac{\rho g}{K} \right)$  et par  $J = \sin \theta$ , il vient que:

$$V = CR_h^{1/2} J^{1/2} \quad (I.3)$$

Comme l'exige la relation (I.3), le coefficient  $C$  de *Chézy* est un paramètre dimensionnel doit avoir pour unité  $[L^{1/2}.T^{-1}]$ . Plusieurs et différentes relations d'origine empirique, ont été proposées au calcul du coefficient  $C$  de *Chézy*. Nous verrons dans ce qui suit, les plus importantes d'entre elles.

#### I.5.3.1.1. Détermination du coefficient $C$ de *Chézy* par la formule de *Ganguillet-Kutter*

**a) La formule de *Ganguillet-Kutter* (1869)** : exprime le coefficient  $C$  de *Chézy* en fonction de la pente  $I_f$  du canal, du rayon hydraulique  $R_h$  et du coefficient de rugosité  $n$ . Elle a été élaborée à partir de mesures expérimentales effectuées sur divers types de canaux et rivières naturelles.

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{I_f} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R_h}} \cdot \left( 23 + \frac{0,00155}{I_f} \right)} \quad (I.4a)$$

Le coefficient  $n$  figurant dans la relation (I.4) est connu sous le nom « coefficient  $n$  de *Kutter* ». Bien que la relation (I.4) apparaisse quelque peu encombrante, elle donne néanmoins des résultats assez satisfaisants. De nombreux auteurs proposent d'éliminer le terme contenant la pente  $I_f$ , afin de simplifier la forme de l'équation (I.4). On peut en effet s'apercevoir que le terme  $(0,00155/I_f)$  n'a pas d'effet remarquable sur la valeur de coefficient  $C$ , pour une même valeur du coefficient de rugosité  $n$  et de rayon hydraulique  $R_h$ . A titre indicatif, pour  $n = 0,01$  et  $R_h = 1,20$  m, le coefficient  $C$  ne subit pratiquement aucun changement dans une large gamme de valeurs de  $I_f$ :  $102 \leq C \leq 103$  lorsque  $0,00005 \leq I_f \leq 0,01$ .

**b) La formule simplifiée de *Kutter*** : Celle-ci présente le coefficient  $C$  de *Chézy* comme une fonction du rayon hydraulique  $R_h$  et d'un coefficient  $m_K$ , dit coefficient de *Kutter*. La formule de *Kutter* établie avec des données des canaux artificiels, mais utilisant les données des grandes fleuves. Selon *Kutter* le coefficient  $C$  de *Chézy* est :

$$C = \frac{100}{1 + \frac{m_K}{\sqrt{R_h}}} \quad (I.4b)$$

$m_K$ : Coefficient de *Kutter* traduit la rugosité dépendant de la nature de la matériau constituant des parois et le font d'un cours d'eau ou d'un canal dont l'unité est  $[m^{1/2}]$ .

### I.5.3.1.2. Détermination du coefficient $C$ de *Chézy* par la formule de *Bazin*

*Bazin* (1897) considère que la valeur du coefficient  $C$  de *Chézy* dépend du rayon hydraulique  $R_h$  mais ne dépend pas de la pente  $J$  du canal. Le coefficient  $C$  peut alors être déterminé par application de la relation:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m_B}{\sqrt{R_h}}} \quad (I.5)$$

$m_B$  est le coefficient de rugosité dépendant de la nature de la matériau constituant le canal considéré et dont la valeur est tabulée. Les valeurs de  $m_B$  sont sans commune mesure avec celles qui correspondent au coefficient de rugosité  $n$  figurant dans la relation (I.4) de *Ganguillet-Kutter* et ceci pour le même matériau. A titre indicatif, pour le cas d'un canal fabriqué en ciment lisse, les tables de valeurs indiquent que  $n = 0,01$  et  $m_B = 0,11 m^{1/2}$ . La formule de *Bazin* a été, à l'origine, élaborée pour des petits canaux si bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de *Ganguillet-Kutter*.

### I.5.3.1.3. Détermination du coefficient $C$ de *Chézy* par la formule de *Powell*

*Powell* (1950) propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient  $C$  de *Chézy*, mais elle se présente sous la forme implicite:

$$C = -23,2 \log \left( 1,811 \frac{C}{R_e} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (I.6)$$

« *Log* » désigne le logarithme décimal,  $R_e$  est le nombre de *Reynolds*,  $\varepsilon$  est la rugosité absolue des parois du canal et  $R_h$  est le rayon hydraulique.

A l'origine, la relation de *Powell* a été présentée en en unité anglaise et les constantes figurant dans la relation (I.6) sont alors différentes et beaucoup plus simples:

$$C = -42 \log \left( \frac{C}{4R_e} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (I.7)$$

Pour les cas des canaux rugueux, l'écoulement est en général turbulent correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds*  $R$ . Le terme  $(C/4R_e)$  tend alors vers zéro et la relation (I.7) devient:

$$C = -42 \log \left( \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (I.8)$$

Par contre pour les canaux lisses, l'effet de la rugosité est tellement faible que la relation (I.7) peut s'écrire:

$$C = -42 \log \left( \frac{C}{4R_e} \right) \quad (I.9)$$

Il existe aussi d'autres formules approchées pour la détermination de coefficient  $C$  de *Chézy*, comme exemple la formule de *Crump* (1956), mais s'applique aussi bien aux canalisations en charge qu'aux écoulements à surface libre.

#### I.5.3.1.4. Détermination du coefficient $C$ de *Chézy* par la formule de *Manning*

La formule de *Manning* la plus utilisée en pratique est la formule de *Manning* (1891). Elle exprime la vitesse de l'écoulement  $V$  comme étant :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (I.10)$$

Le coefficient  $n$  est appelé coefficient de *Manning* et son unité est [ $m^{-1/3} \cdot s$ ]. La formule de *Manning* est simple mais elle ne doit être utilisée que pour les écoulements turbulents rugueux, correspond aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* (*Graf et Altinakar*, 1993). Sous ces conditions, le coefficient  $n$  de *Manning* reste constant pour une rugosité donnée. Des tables de valeurs du coefficient  $n$  ont été établies par *Crausse* (1951). En règle générale  $n$  varie entre 0,012 et 0,15.

#### I.5.3.2. Formule de *Manning-Strickler*

La vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement uniforme peut être également évaluée pour la formule dite de *Manning-Strickler*. La vitesse  $V$  est liée au coefficient  $C$  de résistance de l'écoulement, au rayon hydraulique  $R_h$  et à la pente  $J$  ou  $I_f$  du canal. A l'origine, la formule de *Manning-Strickler* se présentait sous une forme compliquée, puis elle a été simplifiée pour s'écrire, avec  $k = C$  :

$$V = k R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (I.11)$$

La relation (I.11) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire en unité métrique,

$$\text{l'équation de } \textit{Manning} \text{ (I.10)} : V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J}$$

On désigne par  $n$  le coefficient de résistance selon *Manning* et par  $1/n = k$ , le coefficient de *Strickler*. La conversion en unité anglaise de la relation (10) donne:

$$V = \frac{1,486}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (I.12)$$

Dans cette conversion, la valeur numérique du coefficient de rugosité  $n$  reste inchangée et la même valeur est utilisée dans les deux systèmes d'unité. Comme l'exige la forme de la relation (I.12), le coefficient de rugosité  $n$  doit avoir pour dimension  $[T.L^{-1/3}]$ . Cependant, il paraît physiquement injustifié que la dimension de temps  $T$ , puisse intervenir dans l'unité d'une rugosité puisque celle-ci ne devrait dépendre que de la nature du matériau constituant les parois du canal considéré. Pour cette raison, certains auteurs énoncent que le numérateur de la relation (I.12) devrait contenir le terme  $(g^{1/2})$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur, ce qui conduirait à donner à  $n$  la dimension  $[L^{1/6}]$ . En outre, il a été démontré que le coefficient de rugosité  $n$  pouvait s'écrire:

$$n = \phi \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) \varepsilon^{1/6} \quad (I.13)$$

Où  $\varepsilon$  est la rugosité absolue.

Si la fonction  $\phi \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right)$  doit être considérée comme étant adimensionnelle, le coefficient de rugosité  $n$  doit alors avoir la même dimension que  $\varepsilon^{1/6}$ , c'est-à-dire  $[L^{1/6}]$ .

Hager (1987) a pu montrer que la rugosité absolue  $\varepsilon$  et le coefficient  $k$  de Strickler sont liés par une relation fortement intéressante s'écrite comme suit:

$$\frac{k \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{g}} = 1 \quad (I.14)$$

D'autre part, il est également possible d'admettre que le terme  $(1,486/n)$  figurant dans la relation (I.12) puisse contenir de manière implicite la dimension  $[T.L^{-1/3}]$ , ou que  $\phi(R_h/\varepsilon)$  contienne un facteur ayant une dimension. Ceci rendrait alors le coefficient  $n$  adimensionnel. Sous cette dernière condition, la conversion en unité anglaise conduit à la constante  $(3,2808)^{1/3} = 1,486$ , puisque 1 mètre = 3,2808 ft.

Si l'on considère que la dimension de  $n$  est  $[L^{1/6}]$ , sa valeur numérique en unité anglaise doit être différente de sa valeur en unité métrique, à moins de tenir compte d'un facteur de correction ou de compensation.

Si  $n$  est la valeur du coefficient de rugosité en unité métrique et  $n'$  en unité anglaise, on peut écrire alors  $n' = (3,2808)^{1/6} n = 1,219 n$ . Lorsque la formule de Manning subit la conversion de l'unité métrique vers l'unité anglaise, la constante figurant dans l'expression qui en résulte est égale à  $(3,2808)^{1/3 + 1/6} = (3,2808)^{1/2} = 1,811$  et la dimension de  $n$  est alors  $[L^{1/6}]$ .

L'application de la relation proposée par *Hager* (1987) doit se faire avec beaucoup de précaution étant donné les erreurs de calcul relativement appréciables qu'elle peut engendrer.

L'approche nouvelle établit par *B. Achour* (2005) repose sur la combinaison des relations de *Manning-Strickler* donnée par l'équation:  $V = kR_h^{2/3} \sqrt{J}$  et de *Darcy-Weisbach* (1854) donnée par l'équation:

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (I.15)$$

Dans la quelle  $f$  est le coefficient de frottement ou coefficient de résistance à l'écoulement, donné par une relation également connue sous le nom de formule de *Nikuradse* et s'écrit comme suit:

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (I.16)$$

Et  $D_h$  est le diamètre hydraulique également égal à  $(4R_h)$ . La combinaison de ces dernières relations par l'élimination de la vitesse moyenne montre une relation liée le coefficient  $k$  de *Strickler* et la rugosité  $\varepsilon$  des parois et de fond du canal par l'expression suivante:

$$k = 2^{17/6} \sqrt{g} \cdot D_h^{-1/6} \log \left( \frac{3,7}{\varepsilon / D_h} \right) \quad (I.17)$$

La multiplication des deux membres de la relation (I.17) par  $\varepsilon^{1/6}$ , nous obtenons une nouvelle relation dont les termes composés sont des termes adimensionnels, soit:

$$\frac{k \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{g}} = 2^{17/6} \left( \frac{\varepsilon}{D_h} \right)^{1/6} \log \left( \frac{3,7}{\varepsilon / D_h} \right) \quad (I.18)$$

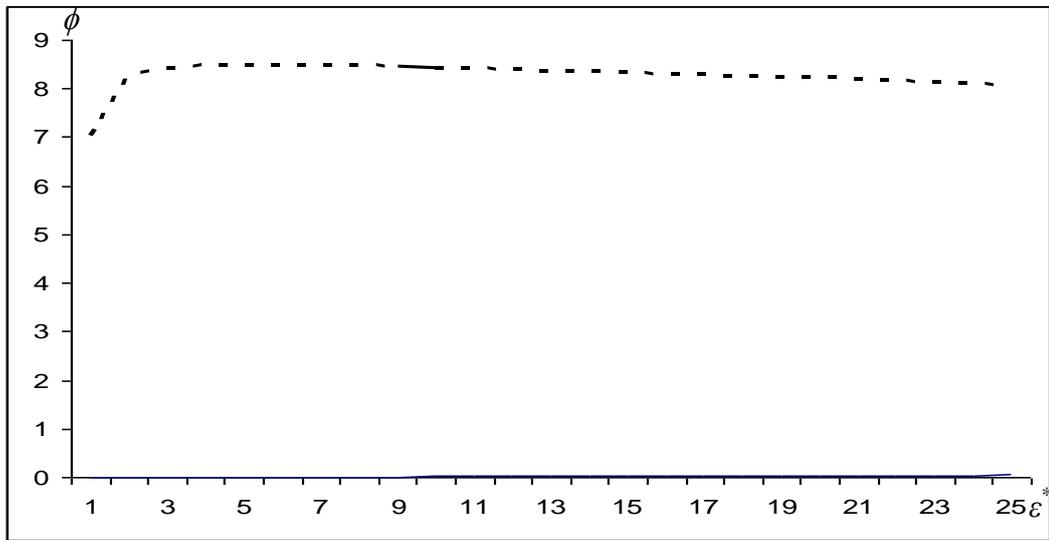
Posons  $\phi = \frac{k \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{g}}$  et  $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{D_h}$  où  $\varepsilon^*$  est la rugosité relative, la relation (I.18) s'écrit plus simplement:

$$\phi = 2^{17/6} \varepsilon^{*1/6} \log \left( \frac{3,7}{\varepsilon^*} \right) \quad (I.19)$$

Compte tenu de la forme de la relation (I.19), il apparaît clairement que le paramètre adimensionnel  $\phi$  est étroitement lié à la rugosité relative  $\varepsilon^*$ , tandis que *Hager* (1987) affecte au paramètre  $\phi$  une valeur constante égale à 8,2.

Dans un système d'axes à coordonnées cartésiennes la relation (I.18) est représentée. La figure I.7, montre que la courbe obtenue se distingue par deux branches, l'une ascendante

jusqu'à une valeur maximale de  $\phi$  et une branche descendante à partir de la valeur maximale de  $\phi$ .



**Figure I.7:** la variation du paramètre  $\phi$  en fonction de la rugosité relative  $\varepsilon^*$

La branche ascendante de la courbe s'étend sur une gamme relativement réduite  $\varepsilon^*$  en particulier pour les faibles valeurs de celle-ci. Dans la gamme  $0 < \varepsilon^* \leq 0,002$ , le paramètre  $\phi$  augmente en subissant une variation très rapide, tandis que sa variation devient plus lente dans la gamme  $0,002 < \varepsilon^* \leq 0,01$ . Au-delà de la valeur  $\phi_{max}$ , le paramètre  $\phi$  diminue lentement au fur et mesure de l'augmentation de  $\varepsilon^*$  et sa variation peut être considérée comme étant moyennement linéaire. Il est à noter que la gamme  $0 < \varepsilon^* \leq 0,002$  n'est pas pratique puisque l'écoulement est considéré dans cette approche est en régime turbulent rugueux. Il apparaît ainsi que la valeur préconisée par *Hager* semble être une valeur minimisée et la valeur moyenne appropriée de la fonction  $\phi$  serait non pas 8,2 mais 8,3. En remplaçant la relation (I.19) par  $\phi = 8,3$ , l'écart maximal observé sur l'évaluation de  $\phi$  est obtenu pour la valeur extrême de la rugosité relative  $\varepsilon^* = 0,05$ , soit :

$$\Delta\phi / \phi = (\phi_{moy} - \phi_{0,05}) / \phi_{moy} = (8,3 - 8,086) / 8,3 \cong 2,6\%$$

Où  $\phi_{moy}$  désigne la valeur moyenne de  $\phi$ . Le calcul montre aisément que cet écart est approximativement égal à 3,6% lorsque l'on considère la valeur moyenne  $\phi_{moy} = 8,2$  proposée par *Hager*. Cet écart est obtenu pour la valeur  $\varepsilon^* = 0,009$  de la rugosité relative.

On peut donc conclure, compte tenu de l'écart relatif acceptable obtenu sur le paramètre  $\phi$ , que le remplacement de la relation (I.19) par  $\phi = 8,3$  est justifié. En considérant ce résultat:

$$\frac{k\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{g}} = 8,3 \quad (I.20)$$

La formule de *Manning-Strickler*, en raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit, elle est largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts.

De nombreuses applications ont montré que les valeurs de  $n$  de *Manning* et  $m_K$  de *Kutter* sont pratiquement identiques lorsque la pente du canal est supérieure ou égale à 0,0001 pour un rayon hydraulique variait approximativement entre 0,30 m et 9 m.

En comparant la formule de *Manning* exprimée en unité métrique, à celle de *Chézy*, on peut écrire:

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \quad (I.21)$$

Ainsi la formule de *Manning-Strickler* est souvent considérée comme une variante de la formule de *Chézy*.

De nombreuses études, dont celle de *Bazin* et qui concernent les canaux artificiels, ont montré que l'exposant de  $R_h$  ne serait pas égal à 2/3 comme suggère *Manning*, mais sa valeur moyenne varie entre 0,6499 et 0,8395 suivant la forme du canal et la rugosité de celui-ci. Des études telles que celles de *Pavlovski* (1940) suggère de prendre la valeur 3/4 pour l'exposant de rayon hydraulique  $R_h$ , tandis que *Blench* (1939) considère que le coefficient  $C$  comme une variable qui dépend non seulement du coefficient de rugosité  $n$  mais aussi du rayon hydraulique  $R_h$  dont l'exposant dépend à son tour de  $n$  et de  $R_h$ , c'est la formule dit de *Pavlovski* (1940) qui s'exprime, en unité métrique, par:

$$C = \frac{1}{n} R_h^y \quad (I.22)$$

$$\text{Où: } y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - \frac{3}{4}\sqrt{R_h}(\sqrt{n} - 0,10)$$

La relation (I.22) est applicable pour un rayon hydraulique variant entre 0,10 m et 3 m et pour  $n$  compris entre 0,011 et 0,04. Des relations approchées au calcul de l'exposant  $y$  sont également proposées:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{n} \text{ pour } R_h < 1,0 \text{ m}$$

$$y = 1,3\sqrt{n} \text{ pour } R_h > 1,0 \text{ m}$$

L'application de la formule de *Manning-Strickler*, comme d'ailleurs celle de *Graguillet-Kutter*, est tributaire de la valeur du coefficient de rugosité  $n$ . Il n'existe aucune méthode

exacte qui permet d'évaluer  $n$ . Evaluer le coefficient  $n$  revient en fait à estimer la résistance de l'écoulement dans un canal donné, ce qui nécessite beaucoup d'expérience et de pratique. En se référant à la bibliographie, plusieurs auteurs concluent que pour estimer  $n$  les étapes suivantes sont nécessaires:

- i.* Recenser puis apprécier l'influence des paramètres pouvant affecter le coefficient  $n$ , tels que la présence de végétation dans le canal, la dimension moyenne des grains du matériau constituant les parois du canal, l'irrégularité du canal par la présence de courbures ou de variation même réduite de la section transversale de l'écoulement, etc... ;
- ii.* Consulter les tables de valeurs de  $n$  déjà évalué pour les canaux de différents types ;
- iii.* Examiner et s'informer de l'état physique caractérisant les canaux existants et dont la valeur de  $n$  a déjà été déterminée ;
- iv.* Déterminer la valeur de  $n$  par une approche analytique basée sur la répartition théorique de la vitesse dans les sections transversales de l'écoulement.

### I.5.3.3. Formule de *Darcy-Weisbach*

L'application de l'équation de *Darcy-Weisbach* définie par la relation (I.15) est également universelle; elle joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites et leur généralisation pour les canaux ouverts connaît un grand succès, en remplaçant le diamètre  $D$  par le diamètre hydraulique  $D_h$ .

Les relations de type *Manning-Strickler* ou de *Chézy* donne des résultats satisfaisante si et seulement si l'écoulement est turbulent rugueux, en effet on s'apparaît que dans ces relations l'effet de la viscosité cinématique est nul; est donc l'effet de nombre de *Reynolds* est laissé hors considération par contre la relation de *Darcy-Weisbach* dans laquelle figurant le coefficient de frottement dépendant du nombre de *Reynolds* sont applicables au régime d'écoulement de transition, turbulent rugueux et lisse.

C'est d'abord *Weisbach* qui fut le premier en 1845 à établir la relation du gradient de perte de charge dans les conduites circulaires. Indépendamment des travaux de *Weisbach*, *Darcy* a effectué en 1854 des travaux sur les écoulements en conduites. Il en est ainsi résulté

la formule  $J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g}$  portant le nom de *Darcy-Weisbach*, dans laquelle  $f$  est le coefficient de

frottement ou coefficient de résistance à l'écoulement,  $D_h$  est le diamètre hydraulique du canal et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Nous pouvons constater que la formule de *Darcy-Weisbach*, elle s'exprime la proportionnalité entre le gradient de perte de charge  $J$  et la vitesse

moyenne de l'écoulement  $V$  et le diamètre hydraulique  $D_h$ . Cette formule est aussi est bien valable au conduite fermée qui aux canaux ouverts. Lorsque l'écoulement uniforme établie dans un canal ouvert la relation (I.15) s'écrit plus simplement sous la forme :

$$I_f = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (I.23)$$

La relation (I.23) est peut s'écrire souvent sous la forme suivante :

$$V = \sqrt{8g/f} \sqrt{R_h I_f} \quad (I.24)$$

La relation (I.24), qui traduit l'expression de la vitesse moyenne d'écoulement, avait la même forme celle de la relation (I.1) de *Chézy*  $V = CR_h^{1/2} I_f^{1/2}$ , alors on peut déduire également l'expression de coefficient de résistance de l'écoulement  $C$  de *Chézy* en fonction de coefficient de frottement  $f$ , comme suit :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (I.25)$$

Le calcul du coefficient de frottement  $f$ , peut être évalué par divers relations selon la nature de régime d'écoulement.

## I.6. Coefficient de frottement

### I.6.1. Introduction et définition

Le coefficient figurant la relation universelle de *Darcy-Weisbach*, donnée par la relation (I.15) qui désigné par la lettre " $f$ " est définit comme étant le coefficient de frottement, il est également appelé coefficient de *Darcy-Weisbach* ou coefficient de perte de charge régulière. Ce coefficient est une grandeur sans dimensions représentant l'influence du type d'écoulement soit laminaire ou turbulent et de l'aspect de la conduite et du canal soit lisse ou rugueux sur la perte de charge.

Le premier à associer les concepts de *Darcy* et *Weisbach* est *J.T Fanning* (1877) qui publie un large échantillon de valeur de  $f$  en fonction du matériau de la conduite ou de canal, d'une grandeur caractéristique de sa géométrie et de la vitesse d'écoulement. Il est d'un grand intérêt d'exprimer le coefficient de frottement,  $f$ , pour les écoulements laminaire et turbulent par l'équation de *Darcy-Weisbach* et la précision des résultats obtenus avec celle-ci est étroitement liée au choix de coefficient de frottement  $f$ .

Dans les années 1830, la différence entre les régimes à faible vitesse et à grande vitesse devient évidente. *Osborne Reynolds* (1883) décrit la transition d'un régime à l'autre et la caractérise par un nombre qui aujourd'hui porte son nom,  $R_e$  donné par la relation :

$$R_e = \frac{\rho V D_h}{\mu} = \frac{V D_h}{\nu} ; \text{ où } \mu \text{ et } \nu \text{ respectivement la viscosité dynamique et cinématique de}$$

l'écoulement. Les faibles nombres de *Reynolds* correspondent à un régime lent dit laminaire tandis que les grands nombres de *Reynolds* sont caractéristiques d'écoulements rapides et désordonnés dits turbulents, ainsi que le nombre de *Reynolds* caractérise aussi l'état de liquide de l'écoulement au voisinage de la particule par sa viscosité cinématique.

Au début du XXème siècle, avec le développement de nouvelles théories, on cherche en fin une expression analytique de coefficient de frottement. Ce sont *Ludwing Prandtl* (1875-1953), grâce à sa théorie de la couche turbulente, et ses étudiants, *Théodore Von Karman* (1881-1963), *Paul Richard Heinrich Blasius* (1883-1970) et *Johann Nikuradse* (1894-1979) qui feront les premières propositions d'expression du coefficient de *Darcy-Weisbach* en fonction de nombre de *Reynolds*. Alors toutes ces études que nous allons maintenant exposer ont eu précisément pour objet de préciser la forme de la fonction:  $f = \psi(R_e, \varepsilon/D_h)$ , que le coefficient de frottement prend dans sa valeur l'état de liquide de l'écoulement exprimé par le nombre de *Reynolds*, ainsi que de la nature et la rugosité des parois de canalisations.

Un premier effort de synthèse sera fait par *Hunter Rouse* (1906-1966) puis *Lewis Moody* (1880-1953) dans les années quarante. Ils proposèrent des diagrammes récapitulant les formules les plus usitées des coefficients de frottement auteurs (*Poiseuille*, *Prandtl*, *Blasius*, etc). Ces diagrammes considèrent différents régimes d'écoulement en fonction du nombre de *Reynolds* et d'une taille caractéristique des rugosités de la surface. Plusieurs et différentes relations d'origine empirique, ont été proposées au calcul du coefficient  $f$  de frottement. Nous verrons dans ce qui suit, les plus importantes d'entre elles.

## I.6.2. Formule de *Colebrook-White* et diagramme universel de *Moody*

### I.6.2.1. Formule de *Colebrook-White*

Etablie en 1939, la formule de *Colebrook-White* est celle qui est largement adoptée pour le calcul du coefficient de frottement  $f$ .

Celui-ci s'exprime par :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (I.26)$$

Où "log" désigne le logarithme décimal. Dans la relation (I.26), les paramètres  $\varepsilon$ ,  $D$  et  $R_e$  correspondent respectivement à la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite, au diamètre intérieur de celle-ci et au nombre de *Reynolds* caractérisant

l'écoulement. Celui-ci est par définition le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, et s'écrit:

$$R_e = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (I.27)$$

La relation (I.26) s'applique à l'écoulement turbulent, pour peu que le nombre de *Reynolds*  $R$  soit supérieur à 2300 (*Sinniger et Hager*, 1989).

L'écoulement turbulent est non seulement caractérisé par la valeur du nombre de *Reynolds*  $R$  mais aussi par celle de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ .

Selon les valeurs de  $\varepsilon/D$  et de  $R$ , l'écoulement turbulent peut être en régime pratiquement lisse correspondant à  $\varepsilon/D \rightarrow 0$ , ou en régime rugueux appelé aussi régime de pleine turbulence ou turbulent rugueux. Celui-ci correspond en règle générale aux valeurs élevées de nombre de *Reynolds*  $R_e$ .

Ces deux régimes sont en réalité les deux états extrêmes de l'écoulement qui peut cependant se situer en zone intermédiaire dite zone de transition.

Dans le cas d'un régime d'écoulement pratiquement lisse ( $\varepsilon/D \rightarrow 0$ ), la relation (I.26) montre que le coefficient de frottement  $f$  ne dépend que de la valeur du nombre de *Reynolds*  $R$ , soit:

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{2,51}{R_e \sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (I.28)$$

Dans le cas d'un régime d'écoulement turbulent rugueux, correspondant aux valeurs élevées du nombre *Reynolds*  $R_e$  ( $R_e \rightarrow \infty$ ), le terme  $2,51/(R_e \sqrt{f})$  figurant dans la relation (I.26) tend alors vers le zéro et le coefficient de frottement  $f$  s'écrit alors par la relation (I.16);

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2}, \text{ est également connue sous le nom de formule de } \textit{Nikuradse}.$$

La rugosité relative  $\varepsilon/D$  est donc le seul paramètre dont dépend le coefficient de frottement  $f$  lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux.

Lorsque l'écoulement se situe en zone de transition, le coefficient de frottement  $f$  répond alors à la relation (I.26) et sa valeur dépend à la fois de celle de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et de celle du nombre de *Reynolds*  $R_e$ .

En admettant que les valeurs de  $\varepsilon/D$  et de  $R_e$  soient données, la relation (I.26) montre que la valeur du coefficient de frottement  $f$  ne peut être explicitement déterminée. La relation (I.26) est en effet implicite vis-à-vis de  $f$  puisque celui contenu à la fois dans les membres gauche et

droit de la relation. La détermination du coefficient de frottement  $f$  nécessite donc un procédé itératif ou graphique dans le cas où la relation (I.26) est utilisée.

### I.6.2.2. Diagramme universel de *Moody*

A ce sujet, un diagramme a été élaboré dans le but de déterminer par voie graphique la valeur du coefficient de frottement  $f$ , lorsque la rugosité relative de la conduite ainsi que le nombre de *Reynolds*  $R$  caractérisant l'écoulement sont donnés. Ce diagramme porte le nom de diagramme universel de *Moody* qui ne peut être dissocié de la relation (I.26) de *Colebrook-White*. En se basant sur les observations de *Nikuradse* et de *Colebrook-White* ainsi que sur un grand nombre d'expériences réalisées sur les conduites industrielles, *Moody* (1944) a élaboré un diagramme logarithmique dans lequel est représenté le coefficient de frottement  $f$  en fonction du nombre de *Reynolds*  $R_e$  pour diverses valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  telle que  $0 \leq \varepsilon/D \leq 5 \cdot 10^{-2}$ . Ce diagramme est présenté sur la figure I.8.

Sur ce diagramme, l'on fait figurer aussi les observations de l'allemand *Paul Richard Heinrich Blasius* (1913) représentées par la courbe d'équation :

$$f = \frac{0,224}{R_e^{1/4}} \quad (I.29)$$

Cette relation est applicable à l'écoulement turbulent pratiquement lisse ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) en conduite sous pression et dont la représentation graphique se traduit par une droite dans le système d'axes de coordonnées logarithmique de la figure I.8.

Tous les auteurs s'accordent à dire que la relation (I.29) ne serait valide que si le nombre de *Reynolds*  $R_e$  est compris entre 750 et  $2,5 \cdot 10^4$ . Cette restriction sur la valeur du nombre de *Reynolds* pourrait constituer une sérieuse contrainte dans l'emploi de la formule (I.29) étant donné que dans la plupart des cas pratiques les valeurs de  $R$  sont nettement supérieures à  $2,5 \cdot 10^4$ .

Sur le diagramme de la figure I.8 ont été également représentées les observations de *Prandtl-Nikuradse*, correspondant à des valeurs plus élevées du nombre de *Reynolds*  $R_e$  que celles issues des observations de *Blasius* (1913). En réalité, les observations de *Prandtl-Nikuradse* sont d'abord issues de celles de *Von Karman* (1930) qui a développé une relation généralisée du coefficient de frottement  $f$ , laquelle a été ensuite modifiée par *Prandtl* pour mieux être corrélée aux données obtenues par *Nikuradse*. C'est la raison pour laquelle ces observations portent le nom de *Prandtl-Nikuradse*.

Le coefficient de frottement  $f$  se traduit par l'équation :

$$f = [2 \log(R_e \sqrt{f}) + 0,4]^{-2} \quad (I.30)$$

Comme pour le cas de la formule de *Colebrook-White*, la relation (I.30) est implicite vis-à-vis du coefficient de frottement  $f$ .

Mais la relation (I.26) de *Colebrook-White* pourrait à elle seule représenter et couvrir l'ensemble du diagramme de *Moody*, à l'exception du régime laminaire que se traduit par la droite située à l'extrémité gauche du diagramme (figure I.8). La relation (I.26) est en effet exclusivement destinée à l'écoulement turbulent.

Pour l'écoulement turbulent lisse, la courbe enveloppe inférieure du diagramme de la figure I.8 correspondrait à la représentation graphique de la relation (I.28), tandis que les courbes en trait plein situées à la droite du diagramme de la figure I.8 occuperaient la zone de pleine turbulence. Cette zone s'étend au-delà de la courbe en trait discontinu.

Les courbes appartenant à la zone de pleine turbulence apparaissent comme étant des lignes quasi horizontales, traduisant le fait que le coefficient de frottement  $f$  pourrait être considéré comme étant une constante exclusivement dépendante de la valeur de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . En réalité, ces lignes décroissent très lentement au fur à mesure de l'accroissement du nombre du *Reynolds*  $R_e$  et quelle que soit la valeur de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . La valeur constante de  $f$  n'est théoriquement atteinte que pour  $R_e \rightarrow \infty$  conformément à la relation (I.16).

La courbe en trait discontinu correspondant à l'enveloppe inférieure de la zone de pleine turbulence (figure I.8) a été tracée en admettant un écart de 1,5% entre les valeurs de coefficient de frottement  $f$  calculées selon la relation (I.26) et celles issues de l'application de la relation (I.16). Si tout couple de valeurs ( $\varepsilon/D$ ,  $R_e$ ) indiquait un point situé au-dessus de la courbe en trait discontinu du diagramme de la figure I.8, il serait alors admis que l'écoulement soit en régime turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux. L'équation de la courbe en trait discontinu du diagramme de la figure I.8, délimitant par le bas de la zone de pleine turbulence, peut donc être obtenue en écrivant que :  $f_{\text{Colebrook-White}} = 1,015 \times f_{\text{Nikuradse}}$ . Rappelons que  $f_{\text{Colebrook-White}}$  est donné par la relation (I.26), tandis que  $f_{\text{Nikuradse}}$  est donné par la relation (I.16). Ainsi, nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{f}} \right) \right]^{-2} = 1,015 \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (a)$$

Dans la relation (a), la quantité  $(1/\sqrt{f})$  est exprimée par :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,015^{-1/2} \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right] \quad (b)$$

En tenant compte des relations (a) et (b), nous pouvons écrire :

$$\log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R_e} \left( - (1,015)^{-1/2} \times 2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right) \right] = 1,015^{-1/2} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right] \quad (I.31)$$

Après simplifications et réarrangements, la relation (I.31) devient :

$$\frac{\varepsilon/D}{3,7} - \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{0,992583} = \frac{4,982768}{R_e} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right] \quad (I.32)$$

Ou bien :

$$R_e = 4,982768 \frac{\log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)}{\left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) - \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{0,992583}} \quad (I.33)$$

Nous obtenons ainsi la relation  $R_e$  ( $\varepsilon/D$ ) qui traduit la courbe en trait discontinu de la figure I.8. Selon Hager (1987), la relation (I.33) peut simplement s'écrire, avec une excellente approximation :

$$\frac{\varepsilon}{D_h} = \frac{1050}{R_e} \quad (I.34)$$

Ainsi, en vertu de la relation (I.34), si le couple de valeurs ( $\varepsilon/D$ ,  $R_e$ ) est tel que :

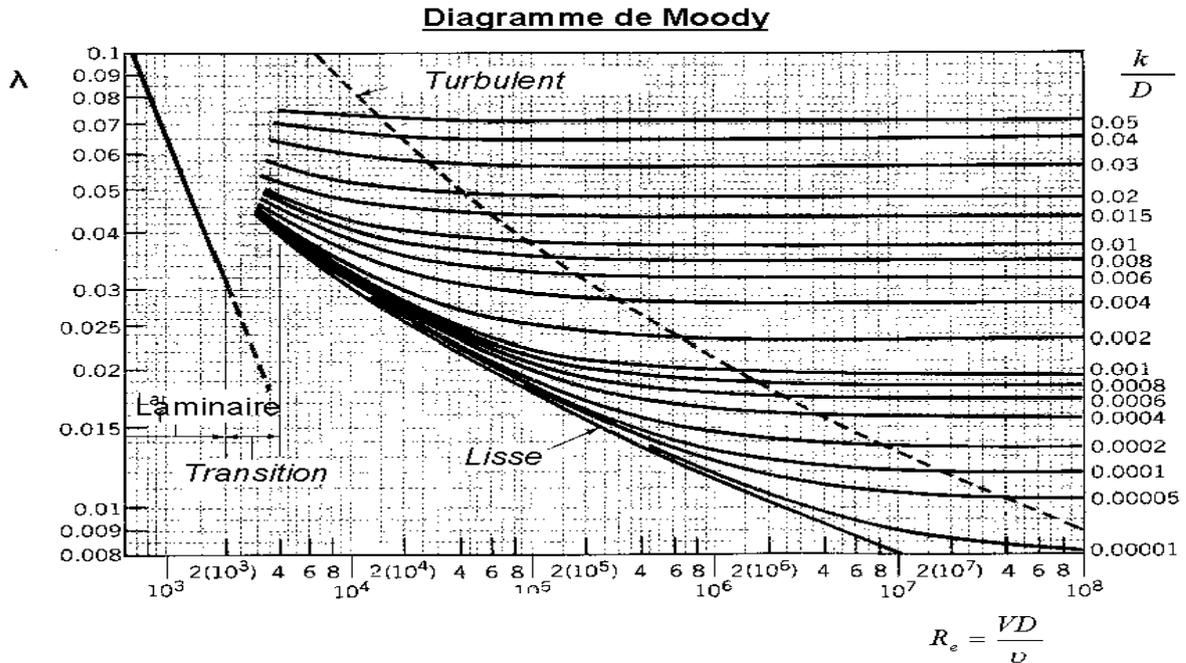
$$\frac{\varepsilon}{D_h} R_e \geq 1050 \quad (I.35)$$

Alors l'écoulement peut être considéré comme appartenant à la zone de pleine turbulence. Le régime de l'écoulement serait donc turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux.

Pour  $R_e \geq 10^7$  et  $\varepsilon/D < 10^{-6}$ , le coefficient de frottement  $f$  est indépendant de la rugosité relative et correspond au minimum possible. L'écoulement en régime turbulent lisse et les pertes de charge ne sont dues qu'à l'effet de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement.

Si la rugosité relative croît, tout en restant supérieur à  $10^{-6}$ , l'écoulement se situe dans la zone de transition et les effets du nombre de Reynolds  $R_e$  et de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  ont une influence sur la valeur du coefficient de frottement  $f$ . En augmentant davantage la rugosité

relative  $\varepsilon/D$  jusqu'à atteindre par exemple la valeur  $10^{-2}$ , soit par l'augmentation de la rugosité absolue  $\varepsilon$  ou par la diminution du diamètre  $D$ , l'écoulement serait alors en régime turbulent rugueux. Nous pouvons constater que pour  $R \geq 3.10^5$  et  $\varepsilon/D = 10^{-2}$ , le coefficient de frottement  $f$  prend une valeur pratiquement constante et vaut  $f \approx 0,038$ .



**Figure .I.8:** Diagramme universel de Moody (1944). Le coefficient de frottement  $f$  et la rugosité relative  $\varepsilon/D$  sont notés ici respectivement par  $\lambda$  et  $k/D$

- ( — ) Courbes  $f(R_e)$  pour divers valeurs de  $\varepsilon/D$ .  
 ( ..... ) Courbe au-delà de laquelle  $f \approx$  constante.

### I.6.3. Effet de coefficient de forme sur l'application des équations de Darcy-Weisbach et Colebrook-White aux canaux découverts

Comme cela à déjà été constaté au paragraphe précédent, les relations (I.15) et (I.26), respectivement celle de Darcy-Weisbach et Colebrook-White ont été originalement établies pour des conduites circulaires en charge. Cependant, en introduisant le rayon hydraulique  $R_h = D/4$ , donc en remplaçant  $D$  dans les équations (I.15) et (I.26) par  $4R_h$ , on obtient :

$$J = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (I.36)$$

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7(4R_h)} + \frac{2,51\nu}{V(4R_h)\sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (I.37)$$

L'idée d'appliquer ces équations également aux canaux découverts est évidente. Ce procédé à été vérifié au début des années quarante mais seulement Marchi (1981) au cours des années cinquante, a effectué les premiers essais systématiques correspondants. Bock (1966),

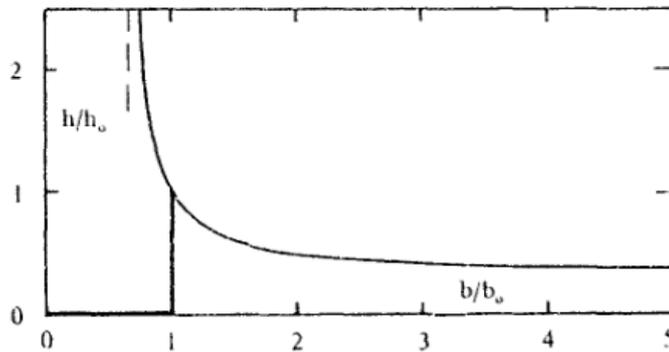
présente des mesures détaillées pour les écoulements dans les divers profils de canaux en régime presque lisse.

En réalité, le rayon hydraulique  $R_h$  est un paramètre arbitraire utilisé pour caractériser un écoulement. Par exemple le rayon hydraulique  $R_h$  d'une conduite carrée est celui de la conduite circulaire inscrite sont identique. De plus, le rayon hydraulique de la conduite pleine et de celle remplie à moitié sont également identique. Il est évident qu'un même  $R_h$  peut caractériser une infinité de profils de formes géométriques différentes. Par exemple, pour un canal rectangulaire de largeur  $b_0$  et de hauteur  $h_0$ , donc  $R_{h0} = b_0 h_0 / (b_0 + 2h_0)$ , toutes combinaisons satisfaisant la relation suivante :

$$\frac{b}{b_0} \cdot \frac{h}{h_0} = \frac{\left[ \frac{b}{b_0} + 2 \frac{h}{h_0} \phi \right]}{[1 + 2\phi]} \quad (I.38)$$

Avec  $\phi = (h_0/b_0)$  conduisant au même rayon hydraulique  $R_h = bh/(b+2h)$ . Cette est représentée dans la figure I.5 pour  $\phi = 1$ . On constate que

$$b/b_0 > 2\phi(1+2\phi)^{-1} \text{ et } h/h_0 > (1+2\phi)^{-1}.$$



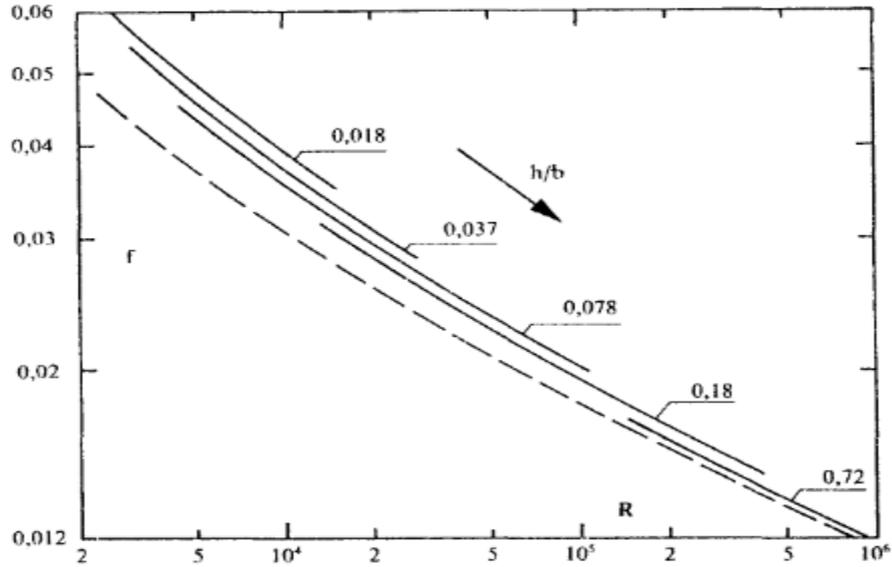
**Figure I.9:** Formes de canaux rectangulaires possibles à rayon hydraulique  $R_h$  identique selon l'équation (I.38) pour  $\phi = 1$ .  
(-----) équation (I.36).

Le travail de *Bock* (1966) à montrer que les courbes  $f(R_e)$  montrées sur la figure I.10, dans le cas d'un canal rectangulaire de largeur  $b$  sont parallèles à la courbe  $f(R_e, \varepsilon = 0)$ , (domaine turbulent lisse) correspondant à l'équation (I.37). Plus le rapport  $h/b$  décroît, plus les courbes correspondantes s'éloignent. Il doit donc exister un effet de forme du profil sur la fonction  $f(R_e)$ . *Bock* à montrer par la figure I.11, que toutes ces courbes peuvent être représentées par une seule courbe, si le nombre de *Reynolds*  $R_e$  est transformé correctement.

Si en introduisant le coefficient de forme  $\phi = (R_{he}/R_h)$  (qui dépend uniquement de la géométrie du profil de liquide). Où l'indice "  $he$  " caractérise le rayon hydraulique efficace, et avec le nombre de *Reynolds*  $R_e = 4(\phi R_h)V/v$  et  $\varepsilon/D = \varepsilon/(4(\phi R_h))$ , l'équation (I.37) s'écrit :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (I.39)$$

Cette dernière équation est identique à l'équation (I.26). De cette manière, la relation de Colebrook-White devient applicable universellement pour des conduites et des canaux.



**Figure I.10:** Effet de la forme ( $h/b$ ) du profil rectangulaire découvert sur le coefficient de frottement  $f$  en fonction du nombre de Reynolds  $R_e$  dans le domaine turbulent lisse.

(----)  $f(R_e)$  pour la conduite en charge selon Bock (1966)

[Extrait : Constructions Hydrauliques, W.H.Hager et A. J. Schleiss, 2009]

Bock (1966) à présenter le coefficient de forme  $\phi$  pour les canaux rectangulaire, triangulaire, trapézoïdale et circulaire partiellement remplis, dont la géométrie des profils est définie dans la figure I.12. La figure I.11 permet de constater que l'exception du profil triangulaire, pour  $m > 1$ , le coefficient de forme  $\phi$  est plus petit que l'unité. Par conséquent, le coefficient de frottement  $f$  est alors plus grand que pour  $\phi = 1$ . On a évidemment  $\phi (h/D = 1) = 1$ , comme le montre la figure I.11.d.

Bock (1966) à proposer les relations suivantes pour le coefficient de forme en régime turbulent lisse :

$$\phi = \left[ \frac{1,629(h/b)}{1 + 2(h/b)} \right]^{1/4} \quad \text{Profil rectangulaire ;} \quad (I.40.a)$$

$$\phi = \left[ 1,629 \left( \frac{h}{b} \right) \cdot \frac{1 + (h/m b)}{1 + 2\sqrt{1 + m^2 (h/m b)}} \right]^{1/4}, m \cong 1 \quad \text{Profil trapézoïdal ;} \quad (I.40.b)$$

$$\phi = [2,539m]^{0,15},$$

Profil triangulaire ; (I.40.c)

$$\phi = [h/D]^{1/4},$$

Profil circulaire ; (I.40.d)

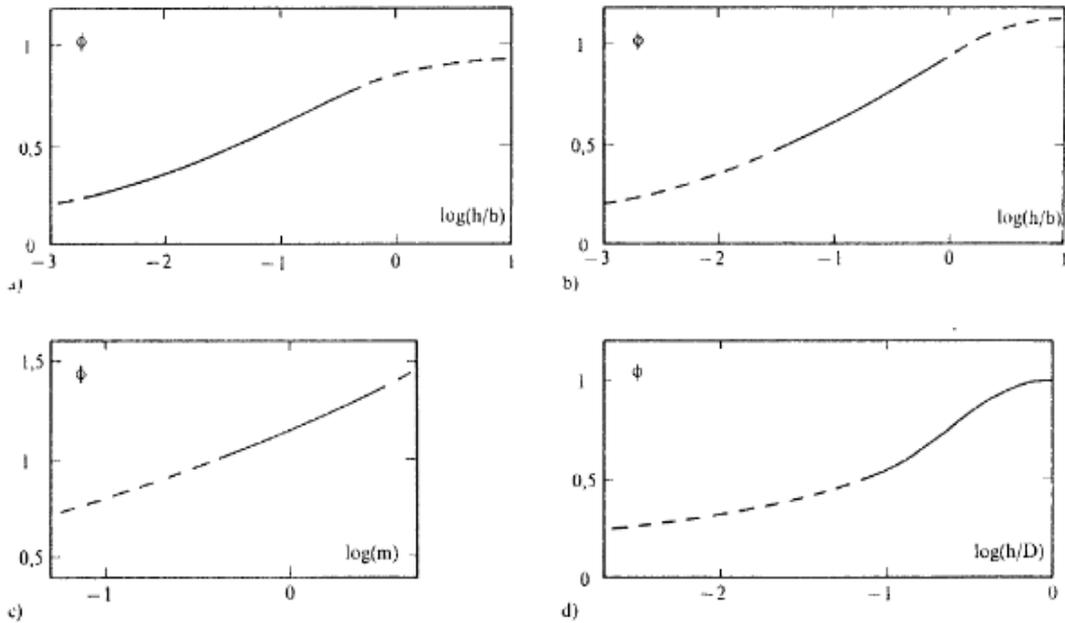


Figure I.11 : Coefficient de forme  $\phi$  en fonction de paramètre géométrique : a) profil trapézoïdal, b) profil trapézoïdal  $m=1$ , c) profil triangulaire, d) profil circulaire ; (—) essais, (---), extrapolation des mesures de Book (1966)

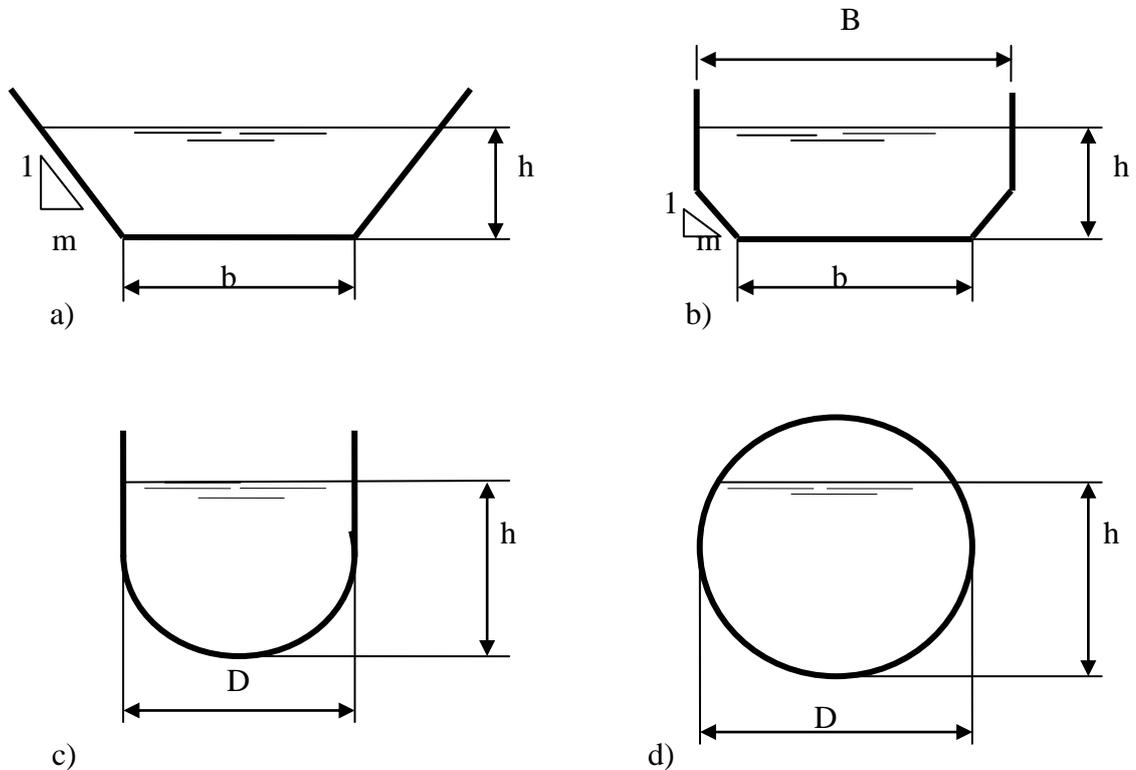


Figure I.12 : Profil de canaux considérés a) : trapèze, b) plein trapèze, c) : en U, d) : conduite partiellement remplie. [Extrait : Constructions Hydrauliques, W.H.Hager et A. J. Schleiss, 2009]

De plus, il propose d'appliquer ces relations également pour le régime turbulent rugueux.

En montrant l'effet de coefficient de forme sur le calcul des paramètres hydrauliques, à titre d'exemple on calcule la vitesse d'un écoulement uniforme et le débit correspondant, par l'application de l'équation de *Darcy-Weisbach* introduisant l'expression de coefficient de frottement donné par la relation de *Colebrook-White*, on aura :

$$V = -4\sqrt{2gI_f R_h} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51}{8\phi\sqrt{2gI_f R_h^3}} \right] \quad (I.41)$$

### Exemple d'application I.1

Soit un canal rectangulaire de pente  $I_f = 0,001$ , de largeur  $b = 2,5$  m et de la profondeur d'eau  $h = 1$  m. L'eau à une viscosité cinématique  $\nu = 1,15 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s et la rugosité des parois du canal  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$  m.

Avec

$$R_h = 2,5 \times 1 / (2,5 + 2) = 0,556 \text{ m ;}$$

$$h/b = 0,4 ;$$

On déduit de l'équation (I.40.a), le coefficient de forme  $\phi = 0,776$ . Donc  $R_{he} = \phi R_h = 0,431$  m.

De l'équation (I.41) on tire la vitesse de l'écoulement comme suit :

- ✓  $V = -4(19,62 \times 0,001 \times 0,556)^{1/2} \times \log[0,0005 / (14,8 \times 0,431) + 2,51 \times 1,15 \times 10^{-6} / (8 \times 0,776(19,62 \times 0,001 \times 0,556^3)^{1/2})] = 1,698$  m/s.
- ✓ Et donc le débit écoulé dans le canal est  $Q = 1,698 \cdot 2,5 \cdot 1,0 = 4,245$  m<sup>3</sup>/s.
- ✓ Par comparaison, en négligeant l'effet de forme sur la perte de charge où le coefficient de forme est également égal à l'unité ( $\phi = 1$ ), on déduit de l'équation (I.41)  $V = 1,744$  m/s, correspondant à une erreur de 2,7%.

D'autres études récentes sur le coefficient de forme ont été effectuées par Pillai (1970), Jayaraman (1979, Kazemipour et Apelt (1979, 1982).

Alors selon R. Sinniger et W.H. Hager (1988), l'effet du coefficient de forme  $\phi$  sur les écoulements dans les régimes turbulents lisse et rugueux, est un effet de deuxième ordre dans les conditions de base de l'écoulement uniforme,  $\phi$  peut souvent être posé égal à 1. Par conséquent, les résultats et les relations discutés préalablement et ce que nous allons à expliquer ultérieurement, sont immédiatement applicables avec succès aux canaux découverts, tel que le diamètre,  $D$  de la conduite étant remplacé par le diamètre hydraulique  $D_h = 4R_h$ .

#### I.6.4. Formules explicites usuelles du Coefficient de frottement

Le coefficient de résistance à l'écoulement ou coefficient de frottement désigné par  $f$ , est s'exprime par la relation de *Colebrook-White* (I.26). L'avantage de cette relation est qu'elle peut s'appliquer pour les régimes d'écoulement turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), mais le coefficient de frottement  $f$  doit être calculé selon un procédé itératif, c'est ce qu'elle se présente sous forme implicite.

Le calcul de  $f$  n'est explicite que lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux, correspond aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* ( $R_e \rightarrow \infty$ ).

L'analyse statistique des valeurs obtenues par l'application de la formule (I.26) de *Colebrook-white*, montre que celle-ci pouvait être remplacée avec une excellente approximation par des relations explicites suivantes :

##### I.6.4.1. Formule de Swamee et Jain

La formule de *Swamee* et *Jain* (1976) est destinée au calcul explicite du coefficient de frottement  $f$  de l'écoulement turbulent dans les conduites sous pression. Cette formule se veut être une solution approchée à la relation implicite (I.26) de *Colebrook-white*. Aucune méthode analytique n'a été proposée par les auteurs pour établir leur relation. Celle-ci a été déterminée par plusieurs tentatives basées sur un calcul laborieux. Selon *Swamee* et *Jain* (1976), la relation (I.26) de *Colebrook-white* peut être remplacée, avec une bonne approximation, par la relation approchée suivante :

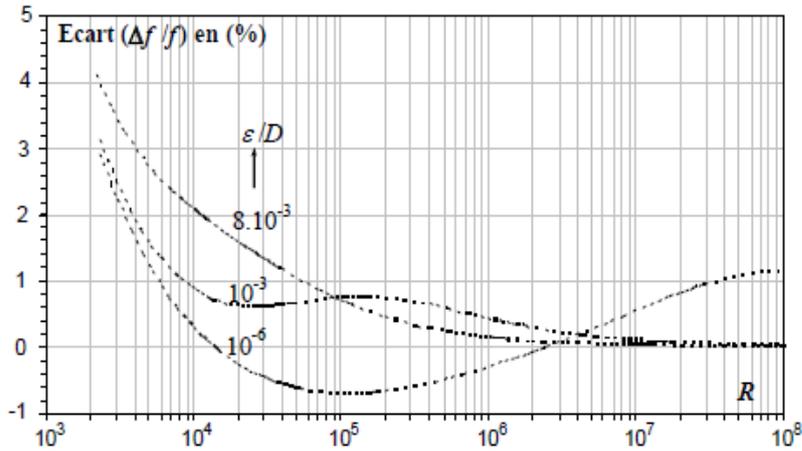
$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{5,74}{R_e^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (I.42)$$

Le caractère explicite de la relation (I.42) est évident. Le coefficient de frottement peut être en effet directement évalué à partir des valeurs connues de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_e$ . Cependant, *Swamee* et *Jain* indiquent que la relation (I.42) doit être appliquée dans la gamme des valeurs  $5 \cdot 10^3 < R_e < 10^8$  et  $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ . La relation (I.42) est donc restrictive vis-à-vis notamment de la gamme de valeurs admis de la rugosité relative. Celle du nombre de *Reynolds*  $R_e$  semble suffisante tant elle couvre une large gamme pratique, bien que les valeurs de  $R_e$  inférieures 5000 soient bien souvent rencontrées.

La relation (I.42) ne couvre donc pas l'ensemble du diagramme de *Moody*, mais elle est de nos jours la formule la plus largement adoptée en raison de sa simplicité. La formule historique (I.26) de *Colebrook-White* est ainsi peu à peu abandonnée au profit de la formule de *Swamee* et *Jain*, car elle nécessite le recours à un procédé itératif ou graphique tel que

nous l'avons montré au paragraphe précédent. Cependant, pour définir le domaine de validité de la relation (I.42) de *Swamee et Jain*, il serait intéressant de la comparer à la formule « exacte » de *Colebrook-white* exprimée par la relation (I.26), qui est prise comme référence.

Dans ce contexte une étude de comparaison a été effectuée par *B. Achour* (2006), et les résultats de cette recherche sont rapportés sur la figure I.13.



**Figure I.13 :** Comparaison entre les relations de *Colebrook-white* (I.26) et de *Swamee et Jain* (I.42) pour quelques valeurs de  $\varepsilon/D$ ,

[Extrait : Calcul des conduites et canaux par la MMR, B. Achour, 2007].

*B. Achour* a fait présenter, dans un système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques, les écarts  $(\Delta f)/f$  en (%) calculé entre les coefficients  $f_{S,J}$  et  $f_{C,W}$ , respectivement de *Swamee et Jain* et de *Colebrook-White* selon la relation  $[\Delta f/f = 100 \times (f_{S,J} - f_{C,W})/f_{S,J}]$ , en fonction du nombre de *Reynolds*  $R_e$  et pour trois valeurs seulement de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  choisies arbitrairement dans la gamme  $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ .

Pour la rugosité relative  $\varepsilon/D = 8.10^{-3}$ , la figure I.13, montre que la formule (I.42) de *Swamee et Jain* s'écarte de celle de *Colebrook-White* d'environ 3% pour un nombre de *Reynolds*  $R_e = 10^4$ . Cet écart diminue au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de *Reynolds* et atteint 2,2% environ pour  $R_e = 10^4$ . D'une manière générale, le diagramme de la figure I.13 indique clairement que la relation (I.42) de *Swamee et Jain* doit être appliquée avec beaucoup de précaution dans la gamme  $4.10^3 < R_e < 10^4$ , puisque des écarts relatifs  $(\Delta f)/f$  de 3% peuvent être obtenus et seraient inacceptables dans certaines applications pratiques. Cet aspect peut illustrer par la formule de *Darcy-Weisbach* qui permet d'écrire que  $(\Delta J)/J = (\Delta f)/f$ .

Ceci montre qu'un écart de 3% sur le coefficient de frottement  $f$  engendrait le même écart dans l'évaluation du gradient  $J$  de la perte de charge linéaire.

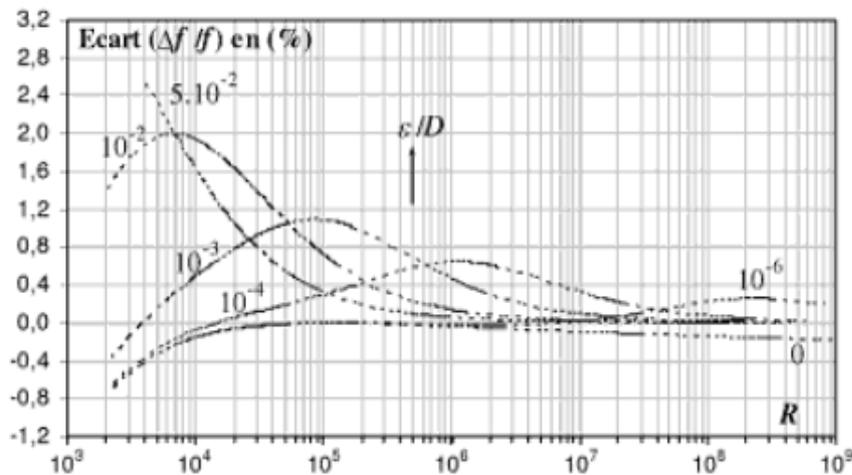
### I.6.4.2. Formule de B Achour et al.

Dans le but de faciliter le calcul du coefficient de frottement  $f$  dans tout le domaine de l'écoulement turbulent en conduite sous pression, Achour et al. (2002) proposent de remplacer la formule (I.26) de Colebrook-white par la relation approchée suivante :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{4,5}{R_e} \log \frac{R_e}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (I.43)$$

Pour large gamme de valeurs  $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$  de la rugosité relative, les auteurs préconisent l'usage de l'équation (I.43) pour les valeurs du nombre de Reynolds  $R_e$  tel que  $R_e \geq 10^4$ . L'écart maximal observé entre les valeurs de  $f$  calculées selon les relations (I.26) et (I.43) ne dépasserait guère 2%. Les forts écarts sont obtenus pour les fortes rugosités relatives et correspondent à l'état de l'écoulement en régime turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux.

Pour mieux préciser ces écarts, B Achour (2006) à établi une comparaison par le procédé graphique entre la relation (I.26) de Colebrook-white, prise comme référence, et celle de B Achour et al. (2002). L'étude comparative a suivi la même démarche que celle indiquée dans le paragraphe précédent et nous avons représenté sur la figure I.14 les résultats obtenus à l'issue de cette comparaison.



**Figure I.14 :** Comparaison entre les relations de Colebrook-White (I.26) et de Achour et al. (I.43) pour quelques valeurs de  $\varepsilon/D$ ,

[Extrait : Calcul des conduites et canaux par la MMR, B. Achour, 2007].

Nous pouvons ainsi observer, au regard du diagramme de la figure I.14, que l'écart relatif  $(\Delta f)/f$ , calculé selon les formules de Colebrook-White (I.26) et de B Achour et al., dépend à la fois de la valeur du nombre de Reynolds  $R_e$  et de celle de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . Dans la

gamme des rugosités relatives  $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$ , la valeur maximale observée de  $(\Delta f)/f$  est de 2% et s'obtient pour  $R_e = 7000$ . Au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de *Reynolds*  $R_e$ , l'écart  $(\Delta f)/f$  diminue sensiblement pour atteindre des valeurs inférieures à 1,2% pour  $R_e \geq 10^5$  et  $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$ . En restreignant la gamme de valeurs de la rugosité relative à  $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,01$ , nous pouvons observer que les écarts  $(\Delta f)/f$  sont également inférieurs à 1,2% pour toute valeur de  $R_e \geq 2300$ . Il est particulièrement intéressant de noter que pour l'écoulement turbulent lisse ou pratiquement lisse correspondant à  $\varepsilon/D \rightarrow 0$ , l'écart  $(\Delta f)/f$  reste insignifiant pour toutes les valeurs du nombre de *Reynolds*  $R_e$  supérieures à 2300. Pour cet état de l'écoulement, la relation (I.43) permet d'écrire que le coefficient de frottement  $f$  est de tel que :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{4,5}{R_e} \log \frac{R_e}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (I.44)$$

#### 1.6.4.3. Formule de B Achour et A Bedjaoui

La formule proposée par Achour et Bedjaoui (2006) constitue la solution exacte à la relation implicite (I.26) de Colebrook-White. Le coefficient de frottement  $f$  est exprimé sous la forme explicite suivante :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\overline{R}_e} \right) \right]^{-2} \quad (I.45)$$

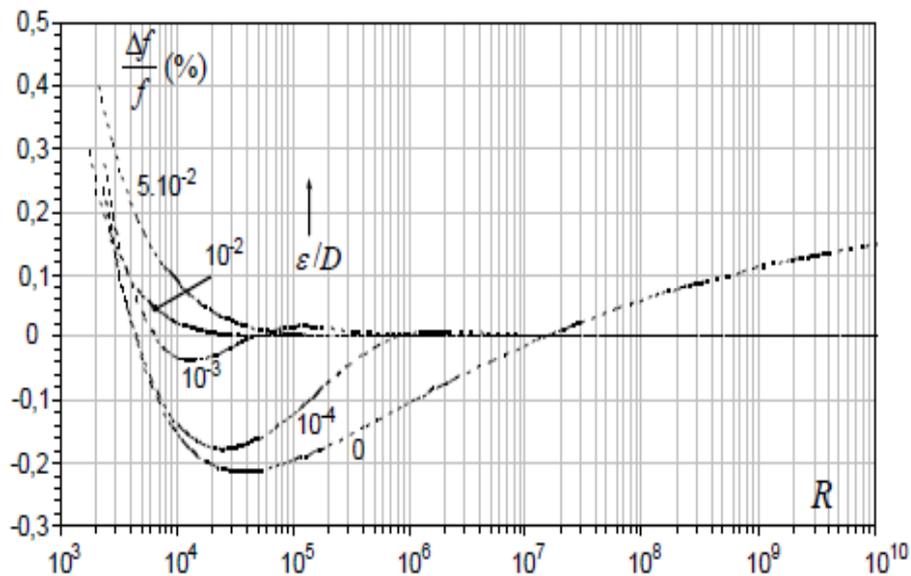
Le paramètre  $\overline{R}_e$  figurant la relation (I.45) représente le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans un modèle rugueux de référence. Celui-ci est une conduite circulaire sous pression de rugosité relative arbitrairement choisie égale  $3,7 \cdot 10^{-2}$ . La relation exacte de  $\overline{R}_e$  n'a pas été établie, mais une relation approchée a cependant été proposée par B Achour et Bedjaoui (2006) qui montre que  $\overline{R}_e$  est fonction de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_e$  caractérisant l'écoulement dans la conduite considérée :

$$\overline{R}_e = 2R_e \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R_e^{0,9}} \right) \right]^{-1} \quad (I.46)$$

Ainsi, lorsque la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et le nombre de *Reynolds*  $R_e$  sont les paramètres connus du problème, l'usage simultané des relations (I.45) et (I.46) permet alors d'évaluer de manière explicite le coefficient de frottement  $f$  recherché. Les relations (I.45) et (I.46) sont applicables

dans tout le domaine de l'écoulement turbulent et couvrent ainsi l'ensemble du diagramme de *Moody*.

Afin de mieux apprécier la validité de la relation (I.45), celle-ci a été comparée à la relation (I.26) de *Colebrook-White* pour  $R_e \geq 2300$  et  $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$ . Les résultats issus de cette comparaison ont été graphiquement représentés dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure I.15.



**Figure I.15 :** Comparaison entre les relations de *Colebrook-White* (I.26) et de *Achour et Bedjaoui* (I.45) pour quelques valeurs de  $\varepsilon/D$ ,

[Extrait : Calcul des conduites et canaux par la MMR, B. Achour, 2007].

La figure I.15 montre clairement que l'écart relatif maximal  $(\Delta f)/f$  entre les relations *Colebrook-White* (I.26) et de *Achour et Bedjaoui* (I.45) est inférieur à 0,4% dans tout le domaine de l'écoulement turbulent. Cet écart maximal est obtenu pour  $R_e = 2300$  et pour la plus forte rugosité relative  $\varepsilon/D = 0,05$ . L'écart  $(\Delta f)/f$  diminue au fur et à mesure que le nombre de *Reynolds*  $R_e$  augmente et que la rugosité relative  $\varepsilon/D$  diminue.

Comme nous l'avons déjà expliqué au paragraphe précédent, les relations explicites destinées au calcul de coefficient de frottement  $f$ , (I.42), (I.43) et (I.45) respectivement de *Swamee et Jain* (1976), *Achour et al.*(2002) et *Achour et Bedjaoui* (2006), sont applicables aux canaux découverts, en utilisant la notion de diamètre hydraulique  $D_h$ , consiste à remplacer le diamètre  $D$  figurant dans ces relations par le diamètre hydraulique  $D_h=4R_h$ . Alors on écrit

aisément les relations universelles destinées au calcul de coefficient de frottement  $f$ , qui sont été expliquées dans ce paragraphe comme suit :

- La formule de *Swamee et Jain* :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{5,74}{R_e^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (I.47)$$

- La formule de *B Achour et al.* :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{4,5}{R_e} \log \frac{R_e}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (I.48)$$

- La formule de *B Achour et Bedjaoui* :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{10,04}{R_e} \right) \right]^{-2} \quad (I.49)$$

Dont le paramètre  $\overline{R_e}$  est écrit comme suit :

$$\overline{R_e} = 2R_e \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{5,5}{R_e^{0,9}} \right) \right]^{-1} \quad (I.50)$$

Ces dernières relations représentent un outil exclusivement important, en raison de leur aspect explicite pour le calcul de coefficient de frottement  $f$  dans canaux découverts à écoulement à surface libre dans tout le domaine d'écoulement, soit laminaire, turbulent hydrauliquement rugueux ou turbulent hydrauliquement lisse et ainsi le domaine de transitoire qui sont englobés tous les régimes d'écoulement trouvés dans la pratique de l'ingénieur hydro-technicien.

### Exemple d'application I.2

Un écoulement se produisant dans une conduite circulaire sous pression est caractérisé par un nombre de *Reynolds*  $R_e = 5 \cdot 10^5$ . Sachant que la rugosité relative est  $\varepsilon/D = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculez la valeur de coefficient de frottement.

Résolvons le problème par la formule explicite (I.45). Le nombre de *Reynolds*  $\overline{R_e}$  est, selon la relation (I.46) :

$$\overline{R_e} = 2 \times 5 \cdot 10^5 \left[ -\log \left( \frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7} + \frac{5,5}{(5 \cdot 10^5)^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 248591 \quad ;$$

Le coefficient de frottement  $f$  est par suite, en vertu de la relation (I.45) :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{248591} \right) \right]^{-2} = 0,0154327$$

Ce résultat est pratiquement identique à celui calculé par application de la relation implicite de *Colebrook-White* qui mène à la valeur  $f = 0,0154335$ .

On calcule l'écart relatif de coefficient de frottement comme suit :

$$\frac{\Delta f}{f} = \left( \frac{f_{\text{Colebrook-White}} - f_{\text{Achour-Bjaoui}}}{f_{\text{Colebrook-White}}} \right) = \left( \frac{0,0154335 - 0,0154327}{0,0154335} \right) = (1 - 0,99994816) = 0,0000518$$

Soit 0,005%, de cet exemple il est montré clairement que l'écart relatif maximal  $((\Delta f)/f)\%$  entre les relations *Colebrook-White* (I.26) et de *Achour et Bedjaoui* (I.45) est inférieur totalement à 0,4% dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, cet écart. Cet écart est obtenu pour  $Re = 5 \cdot 10^5$  et pour une rugosité relative  $\varepsilon/D = 0,0002$ . L'écart  $(\Delta f)/f$  diminue brusquement au fur et à mesure que le nombre de *Reynolds*  $Re$  augmente et que la rugosité relative  $\varepsilon/D$  diminue.

### I.7. Calcul de la profondeur normale

Pour un débit donné et une pente de canal fixée, l'écoulement s'effectue avec une certaine profondeur d'eau, appelée profondeur normale  $y_n$ .

En comparant cette profondeur d'eau avec la profondeur critique, qui n'est pas fonction de la pente du canal, on est en mesure de déterminer si l'écoulement est fluvial, critique ou torrentiel. Cette information sera très utile lorsque l'on voudra évaluer les écoulements variés.

Le principe de base du calcul de la profondeur normale consiste à résoudre une équation d'écoulement en termes de débit (*Chézy, Manning*). De telle sorte que seule la profondeur soit inconnue. Ces équations de l'écoulement n'étant pas linéaires ni quadratiques il n'est pratiquement pas possible de trouver une solution analytique. On a alors recours aux méthodes itératives. Plusieurs ouvrages hydrauliques proposent une méthode par essais et erreurs, bien que cette méthode soit utilisable pour faire une évaluation rapide, il est difficile de l'introduire dans un calcul systématique, surtout si l'on fait effectuer les calculs par ordinateur.

Non seulement la solution est implicite, mais aussi les relations (I.1) et (I.11) de *Chézy* et de *Manning*, ne tiennent pas compte l'effet de la viscosité et par conséquent de celui du nombre de *Reynolds*. Leur emploi est donc réservé exclusivement aux écoulements uniformes en

régime turbulent rugueux. Des études récentes celle de (Achour, al., 2002) a été consacrée notamment de l'évaluation de la dimension linéaire d'un profil géométrique de forme quelconque. Cette dimension linéaire quelconque  $a_r$ , tel que « r » indique le régime d'écoulement turbulent rugueux, a pu être exprimée par la transformation de la relation *Manning-Strickler*. Les éléments à considérer dans l'écoulement permanent sont le débit volume  $Q$ , la pente de fond du canal  $I_f$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$ , une dimension linéaire  $a_r$  quelconque et le paramètre de forme de l'aire de la section mouillée  $\eta_r$ . Ces paramètres sont

liés par la relation fonctionnelle  $\varphi(a_r, Q, I_f, \varepsilon, \eta_r) = 0$  et la relation  $a_r = \left( \frac{Q}{k\sqrt{I_f}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$ , a

été obtenue. Cette dernière relation montre que toute dimension linéaire  $a_r$  d'un profil géométrique de forme quelconque véhiculant un écoulement en régime turbulent rugueux dépend de quatre paramètres :

- 1) Le débit volume  $Q$  ;
- 2) La pente  $I_f$  de fond du canal ;
- 3) Le coefficient  $k$  de *Strickler* ;
- 4) Du paramètre de forme exprimé par les variables  $P_1$  et  $A_1$ . Ceux-ci représentent respectivement le périmètre mouillé et l'aire de la section mouillée du profil considéré, lorsque la dimension linéaire  $a_r$  est égale à l'unité, soit  $P_1 = P/a_r$  et  $A_1 = A/a_r^2$ .

L'étude de (Achour, al., 2002) prend en compte la relation de *Hager*  $\frac{k\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{g}} = 1$ , qui traduit la

corrélation entre le coefficient de *Strickler*  $k$  et la rugosité absolue  $\varepsilon$ , la dimension linéaire  $a_r$ ,

devient  $a_r = \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gI_f}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$ . Cette dernière relation, qui s'applique à tout profil

géométrique. A été présentée de manière symbolique par  $a_r = \Lambda a_0$ , où  $\Lambda = \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gI_f}} \right)^{3/8}$  a la

dimension linéaire d'une longueur et  $a_0 = \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$  est un paramètre sans dimension qui est

désigné par paramètre de la dimension linéaire.

Le développement théorique a pu également établir de nouvelles expressions du nombre de Reynolds  $R_{e,r}$  de l'écoulement uniforme en régime turbulent rugueux ainsi que celle de la vitesse moyenne  $V_r$  :

$$R_{e,r} = \frac{4Q}{\Lambda v} \left( \frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{5/4}, V_r = \frac{Q}{\Lambda^2} \left( \frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{1/2}.$$

Pour l'écoulement en régime de transition l'étude de (Achour, al., 2002) a proposé de corriger la dimension linéaire  $a_r$  en régime turbulent rugueux par un coefficient  $\lambda$  qui est été désigné par *coefficient de transition*. La dimension linéaire  $a$  en régime de transition peut alors écrire

$$a = \lambda a_r = \lambda \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gI_f}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}. \text{ Le coefficient de transition } \lambda \text{ dépend à la fois de la rugosité}$$

relative à  $\varepsilon/D_{h,r}$  et du nombre de Reynolds  $R_{e,r}$  caractérisant l'écoulement en régime turbulent rugueux. L'expression du coefficient de transition  $\lambda$  a pu être établie et s'écrit  $\lambda = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5}$ .

Les coefficients de frottement  $f$  et  $f_r$  peuvent être évalués par la formule de *Colebrook-White* et celle de *Nikuradse*. Etant donné le caractère implicite de la formule de *Colebrook-White*, le choix de l'étude s'est porté sur la relation explicite de (Achour, 2001) et le coefficient de transition  $\lambda$  s'écrit :

$$\lambda^{-5/2} = \frac{\log \left[ \frac{\varepsilon/D_{h,r}}{3,7} + \frac{4,5}{R_{e,r}} \log \left( \frac{R_{e,r}}{6,97} \right) \right]}{\log \left( \frac{\varepsilon/D_{h,r}}{3,7} \right)}$$

La démarche précédente a été également adoptée en ce qui concerne le calcul de la dimension linéaire  $a$  en régime pratiquement lisse. La dimension linéaire  $a_r$  en régime turbulent rugueux est corrigée par un coefficient  $\psi$  tel que :

$$a = \psi a_r = \psi \Lambda a_0 = \psi \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gI_f}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$$

Le coefficient de correction  $\psi$  s'obtient de la même manière que celle ayant conduit à l'expression de transition  $\lambda$  et nous avons pu écrire que  $\psi = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5}$ . Les coefficients de frottement  $f$  et  $f_r$  sont donnés respectivement par la relation de *Achour* et celle de *Nikuradse*.

Cependant, le coefficient de frottement  $f_r$  selon la formule de *Nikuradse* n'a pas de signification physique puisque l'écoulement est pratiquement lisse et est donc caractérisé par une rugosité relative  $\varepsilon/D_{h,r} \rightarrow 0$ .

Afin de lever cette difficulté l'étude a suggéré de calculer le coefficient de frottement  $f_r$  pour un écoulement turbulent rugueux véhiculé par une conduite hypothétique de rugosité relative  $\varepsilon/D_{h,r} = 8,5 \cdot 10^{-3}$ . Une analyse particulière de l'expression du coefficient de correction  $\psi$  a montré que celui-ci pouvait être corrélé au nombre de *Reynolds*  $R_{e,r}$  de l'écoulement turbulent rugueux et un ajustement basé sur la méthode des moindres carrés non linéaires a permis

d'écrire une excellente approximation  $\psi = \left( \frac{3,673}{\log R_{e,r}} \right)^{0,478}$  pour  $R_{e,r} \geq 2350$ .

Les coefficients  $C$  et  $n$  de résistances à l'écoulement figurants respectivement les relations (I.1) et (I.11) de *Chézy* et de *Manning* sont injustement considérées comme des constantes, évaluées par expériences, selon le cas étudié et la nature de la paroi du canal ou de la conduite. Ce sont les valeurs tabulées que l'on peut consulter dans de nombreux ouvrages spécialisés. L'étude établie par (*Achour et Bedjaoui, 2006*) a été consacrée pour lever cette ambiguïté consiste notamment de l'évaluation de la dimension linéaire d'un profil géométrique de forme quelconque à travers l'exemple du canal rectangulaire, la possibilité d'un calcul explicite de la profondeur relative normale, ainsi que des contributions a bien été de proposer des relations explicites au calcul des coefficients de résistances de l'écoulement, de *Chézy* et de *Manning* ces relations sont basées sur le théorème de (*Lagrange, 1770*) et ces solutions sont données en termes d'une série infinie. Ces relations permettent la solution directe au problème que pose le calcul de la profondeur normale.

### Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tenté à montrer un aspect général de l'écoulement uniforme, compte tenu de son importance dans l'étude des écoulements critiques, due que l'écoulement uniforme est le siège d'un régime critique, et en raison que ce dernier est gouverné par les mêmes relations du calcul de l'écoulement uniforme, afin d'utiliser le critère de la criticité. L'écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur  $h$  ou  $y$  de l'écoulement appelée aussi hauteur normal, l'aire de la section mouillée  $A$ , la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement et le débit  $Q$ . Il en résulte que la surface libre est un plan parallèle au fond du canal et que le frottement visqueux est entièrement compensé par la pente du canal, soit  $\sin(\theta) = I_f = J$ . Ce type d'écoulement n'a lieu que loin des extrémités et des singularités observables sur le profil en long de l'ouvrage.

La condition d'un écoulement uniforme, dans le sens strict de terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières (Chow, 1973). Dans ce chapitre nous avons évoqué les relations et les formules usuelles de l'écoulement uniforme, telle que les formules de Chézy et Manning-Strickler, en raison de leur utilisation fréquente dans la pratique. Ces relations ont été établies sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Ce régime doit être considéré non seulement comme étant turbulent, mais aussi comme étant rugueux en raison du fait que l'effet des forces dues à la viscosité est laissé hors considération. Les relations appliquées comme nous avons présentées, en règle générale sous la forme  $V = CR_h^\beta J^\gamma$  où  $R_h$  est le rayon hydraulique,  $J$  est la pente de la ligne de charge,  $C$  est un paramètre qui traduit la résistance de l'écoulement et dépend de la vitesse moyenne  $V$ , de  $R_h$ , de la rugosité absolue des parois du canal, de la viscosité de liquide et de beaucoup d'autres facteurs. La relation de Chézy, correspondant à  $\beta = \gamma = 1/2$ . Le coefficient  $C$  de Chézy a été estimé par plusieurs auteurs (Ganguillet et Kutter, 1869 ; Bazin, 1897 ; Powell, 1950). Mais la relation la plus largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts est celle de Manning (1891) en raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit. Dans cette relation,  $\beta = 2/3$  et  $\gamma = 1/2$  tandis que  $C = k = 1/n$  où  $n$  est le coefficient de rugosité appelée aussi coefficient de Manning. La même forme de la relation ayant été introduite indépendamment par Strickler (1923), cette relation est souvent appelée formule de Manning-Strickler. Selon la littérature bibliographique, il n'existe aucune méthode exacte qui permet d'évaluer  $n$ . Evaluer  $n$  revient à estimer la résistance de l'écoulement dans

un canal donné, ce que nécessite beaucoup d'expérience et de pratique avec de grands débits d'eau sur de grosses canalisations, mais dans un domaine assez limité. Ces formules empiriques ont été parfois employées, par la suite, dans tous les cas possibles, avec des extrapolations que ceux qui les utilisent ne soupçonnent même pas. Le problème a été allégé par *Hager*, en 1987, qui fut le premier à pu lier, à travers une relation fortement intéressante, le coefficient  $k$  et la rugosité absolue  $\varepsilon$ . Cette relation a été améliorée par *Achour* en 2006.

Une autre relation qui servira de base à notre étude est celle de *Darcy-Weisbach*, initialement formulée par *Weisbach* (1845) et reprise par *Darcy* (1854) dans ces recherches expérimentales. Cette relation, développée pour les conduites, se présente sous la forme  $J = f.V^2/(2gD)$  où  $f$  est le coefficient de frottement,  $D$  est le diamètre de la conduite et  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Le coefficient de frottement  $f$  dépend à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R$ . La relation de *Darcy-Weisbach* ait été développée pour le cas des conduites, elle est cependant applicable aux canaux ouverts, en remplaçant  $D$  par le diamètre hydraulique  $D_h$ .

Le paramètre le plus important, qui sera utilisé dans notre développement théorique est le coefficient de frottement  $f$ , cette importance consiste dans la variation de  $f$  en fonctions à la fois des paramètres géométriques et hydrauliques. Les paramètres géométriques présentés par la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , et les paramètres hydrauliques présentés par le nombre de *Reynolds*  $R$ . Nous nous sommes donc limités aux méthodes graphiques et analytiques destinées pour la détermination du coefficient de frottement  $f$ . Ces deux méthodes ont largement expliquées dans ce chapitre en raison de leur application dans la pratique. Ces méthodes ont été établies dans les années trente par une contribution de plusieurs chercheurs (*Prandtl*, *Nikuradse*, *Karman*, *Millikan*...) a permet d'aboutir à une solution semi-empirique donnant, l'expression du coefficient de résistance ou coefficient de frottement  $f$ . Ces solutions font appel aux résultats de la similitude et à un certain nombre de raisonnements semi-théoriques faisant intervenir un grand nombre de constantes. C'est grâce à l'expérience que ces constantes ont été évaluées. Le coefficient de frottement,  $f$  a été caractérisé selon différents régimes d'écoulement, en passant du régime laminaire (écoulement de *Poiseuille*) à l'écoulement turbulent hydrauliquement lisse (loi logarithmique ou *Karman-Prandtl*), et enfin à l'écoulement hydrauliquement rugueux (*Nikuradse*). Dans le cas des rugosités aléatoires, *Colebrook-White* (1939) proposent pour le régime intermédiaire, hydrauliquement lisse et hydrauliquement rugueux, une relation composite ou implicite de telle sorte, pour  $R$  petit, on tombe sur la loi logarithmique et pour  $R$  grand, on à la formule de *Nikuradse*.

*Moody* et *Rouse* (1944) récapitulent par la suite ces formules dans un diagramme appelé usuellement diagramme de *Moody* qui représente le coefficient de frottement  $f$  en fonction du nombre de *Reynolds*  $R$  et la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . Notons que même si la formule proposée par *Colebrook-White* est celle qui est largement adoptée pour le calcul du coefficient de frottement  $f$ , les ingénieurs préfèrent toujours utiliser le diagramme de *Moody*, en raison de procédé itératif. L'analyse statistique des valeurs obtenues par l'application de la formule explicite de *Colebrook-White*, montre que celle-ci pouvait être remplacée avec une excellente approximation par des relations explicites établies par (*Swamee et Jain*, 1976), (*Achour et al.*, 2002) et (*Achour et Bedjaoui*, 2006).

Il faut noter cependant que ces relations ont souvent été établies dans des géométries circulaires de diamètre  $D$ . Comme nous avons déjà expliqué dans ce chapitre, l'idée d'appliquer ces équations également aux canaux découverts est évidente. Ce procédé a été vérifié par plusieurs auteurs (*Bock*, 1966 ; *Pillai*, 1970 ; *Jayaraman*, 1970 ; *Kazemipour, A.K. Apelt*, 1982). Donc on fait appel au concept du diamètre hydraulique  $D_h=4R_h$ . Notons également que relations de calcul de coefficient de frottement seront exploitées dans notre développement théorique pour le calcul de l'écoulement critique.

# ***Chapitre II***

## ***Description de l'écoulement critique***

## II.1. Introduction

La littérature bibliographique correspond à l'état de connaissances concernant les études des écoulements en régime critiques, dans sa figure générale à trouver une pénurie remarquable, que ce soit sur le plan théoriques ou expérimental. Néanmoins, les calculs, des écoulements à surface libre en régime critique, occupent une place importante dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Cette importance consiste dans la détermination de la profondeur critique pour les différentes formes géométriques des canaux ouverts. La valeur de profondeur critique est indispensable, surtout dans le choix des ouvrages de rétablissement des écoulements naturels.

L'établissement de l'écoulement en régime critique, est largement connu dans l'hydraulique à surface libre en écoulement permanent, à savoir le régime uniforme, graduellement varié, ou brusquement varié, comme le cas d'un ressaut hydraulique. Parmi les endroits où les régimes critiques se produit, c'est le plus souvent au-dessus des singularités insérées dans les canaux soit ouverts ou couverts. Ces singularités sont appelées les ouvrages de contrôles, comme les déversoirs à paroi mince, déversoirs à seuil épais, ainsi que les déversoirs de type *Creager*, et aussi les déversoirs latéraux, aussi bien que les déversoirs d'orages. Dans tous les cas cités auparavant, la section où le régime critique est établie, est appelée la section de contrôle. Dans d'autre cas l'écoulement peut devenir critique, c'est le cas d'un écoulement entre une vanne de fond et un réservoir, entre un divergent et un convergent et les évacuateurs des crues...etc. Dans l'étude d'écoulement graduellement varié, l'intérêt du régime critique la caractérisation de type de courbe de remous. Cet intérêt est prépondérant dans l'étude qualitative systématique de classification des différentes lignes d'eau des mouvements permanents graduellement variés.

Selon les revues bibliographiques (*LIGGETT, J.A. 1993* et *CHANSON H. 2008*), il se relève que le premier qui a signalé ce type de phénomènes est l'ingénieur des ponts et chaussées *Jean-Baptiste Charles Joseph BÉLANGER* (1790-1874) par sa contribution aux études des écoulements à surface libre. (*BÉLANGER ,1828*), il a publié son travail dans le thème le calcul des écoulements à surface libre graduellement variés, en utilisant le développement de l'équation du remous « *backwater equation* ». Dans son travail, *Jean-Baptiste BÉLANGER*, dérivait l'équation du remous avec une lucidité remarquable, et sa dérivation donne des résultats d'une précision étonnante. (*LIGGETT, J.A. 1993* et *CHANSON H. 2008*) ont montré que *BÉLANGER* a étudié les singularités de l'équation du remous. Il a démontré que les deux conditions singulières consistent en premier lieu dans l'écoulement

uniforme, quand la pente de la ligne d'eau égale la pente du radier et la hauteur d'eau est la profondeur normale, en second lieu, la condition singulière donne la hauteur d'eau critique pour un écoulement dans un canal de section irrégulière avec un champ de pressions hydrostatiques, bien que *BÉLANGER* n'introduisit pas spécifiquement la notion de profondeur critique.

D'une manière générale, la présence du régime critique dans un écoulement, est le résultat de plusieurs facteurs, agissant sur celui-ci. Le facteur distingué qui permet d'établir le régime critique c'est la caractéristique géométrique de l'ouvrage hydraulique, qui définit directement le rôle de l'ouvrage. C'est pour cette raison, on doit bien s'intéresser à ce genre d'écoulement, pour donner à l'ouvrage des dimensions admissible du point de vue technique et économique.

Cela est dû aux importances absolues du régime critique de l'écoulement dans le dimensionnement des ouvrages hydrauliques, et aussi dans l'étude de calcul de débit franchissant les ouvrages de contrôles. Comme nous l'avons cité précédemment, l'importance du calcul de l'écoulement critique est utile pour la classification de différentes lignes d'eau dans les mouvements permanents graduellement variés. Comme un écoulement uniforme, l'écoulement critique et aussi dépend de la géométrie de profil du canal. Dans ce qui suit, deux problèmes étroitement liés seront examinées; le premier est la définition et la description de l'écoulement critique, et le second est l'évaluation pratique de ceci.

Alors l'objet de ce présent chapitre est de tenter de mettre en évidence la conception d'un écoulement en régime critique, étant complexe, nous essayerons d'expliquer certaine compréhensions de ce dernier, qui sont nécessaires à la compréhension des conditions d'écoulement qui peuvent exister dans une portée, de présenter les caractéristiques générales de ce régime, et ainsi les formules de calcul de la profondeur critique dans les différentes formes géométriques des canaux. Nous essayerons a donné les méthodes de la détermination de la valeur de cette profondeur, telles que les méthodes analytiques, algébriques et graphique, ou bien tabulaire de conception.

## II.1. Définition et généralités :

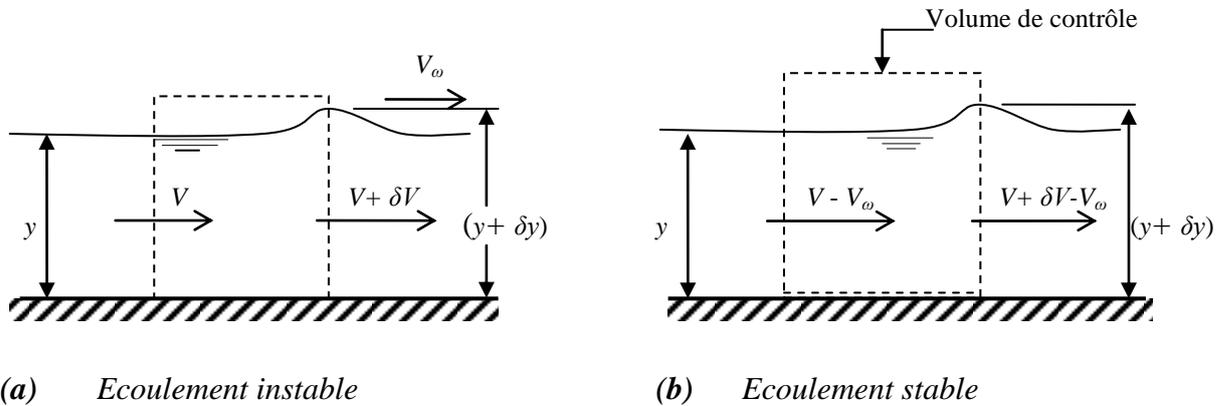
Une bonne description de l'écoulement en régime critique, nécessite une compréhension magistrale de ce phénomène à caractère complexe, vue son importance, car elle se conditionne entièrement au raisonnement hydraulique lors d'une étude. Dans le sens strict de l'hydraulique, le régime critique d'un écoulement, est correspond à l'état limite lors du passage de l'écoulement d'un régime torrentiel au régime fluvial, ou bien inversement. Cet état limite, correspond à un point critique, existe à l'endroit où le régime changera sa nature. On s'accorde à dire que le régime critique se produise dans l'écoulement transitoire. Généralement, le régime d'écoulement transitoire est instable, qui est caractérisé par une fluctuation de la surface libre, cette dernière apparait sous forme des ondulations superficielles infiniment petites, caractérisées par des petits amplitudes. L'interprétation de cette fluctuation, est due à la sensibilité de l'eau à la cohésion interne, qui est soumis à l'effet des forces d'inertie et des forces de gravité. Comme l'eau coule rapidement, elle s'éloigne de l'eau qui la suit lentement derrière elle, et celles-ci n'est pas encore séparées, mais s'étend au contraire, que les forces de cohésion, dont la gravité et de la viscosité, sont surmontées par la circulation croissante de l'eau. Ceci peut être vu comme un écoulement qui passe au-dessus d'un déversoir ou d'approches d'une singularité insérée dans un canal. Et dans le cas contraire, ces fluctuations produisent dans la zone de passage de l'écoulement de nature torrentielle à la nature fluviale, ceci se manifeste dans les écoulements à surface libre et qu'elles sont très facile d'observer en aval des déversoirs de barrage. Ce brusque changement de régime de l'écoulement est appelé, le ressaut hydraulique. La nature physique du celui-ci est liée aux ondes superficielles qui se propagent a l'écoulement.

Comme nous avons déjà, cité dans le paragraphe supra-visé, on pourrait dire que la physique du ce phénomène est donc forcée extérieurement, par l'introduction d'un paramètre dynamique, appelé la célérité d'onde ou bien, la vitesse de propagation d'une onde superficielle infiniment petite. Ce paramètre qui connu dans le domaine de l'hydrodynamique et qui désigné par le lettre «  $c$  », joue un rôle déterminant dans ce genre du phénomène.

### II.1.1. Célérité d'onde :

Pour déterminer l'expression de la célérité de l'onde, prenons une petite vague d'un écoulement dans un canal horizontal, en négligeant l'effet de frottement, comme montré dans la figure II.1.a. La vague est considérée comme faible si  $|\delta y| \ll y$ . Supposons que cette vague se déplace vers l'aval avec une vitesse d'onde absolue,  $V_\omega$ , et que, en raison de mouvement ondulatoire, la vitesse moyenne de l'écoulement est modifiée de  $V$  à  $(V + \delta V)$ . En

superposant une vitesse constante  $V_\omega$  dans le sens amont de l'écoulement, nous pouvons transformer l'écoulement instable de la figure II.1.a à l'écoulement stable et régulier de la figure II.1.b.



(a) Écoulement instable

(b) Écoulement stable

**Figure. II.1** : Schéma simplifié de définition de la propagation d'onde

Laissiez nous de considéré l'épaisseur du volume étudié (volume de contrôle par unité de largeur) est égale à l'unité, ce qui semble d'une feuille de papier parallèle aux parois du canal. Puisque le canal est horizontal, la composante du poids de l'eau du volume unitaire, dans la direction aval est égale à zéro. De même, il n'y a pas de force de cisaillement agissant sur la paroi du canal, car celui-ci est supposé être sans frottement, ce qui conduit à négliger les pertes de charge par frottement. On néglige aussi la résistance de l'air, et en considérant la distribution des vitesses est uniforme.

Sur ces considérations citées au paragraphe précédent, l'idée d'appliqué l'équation de la quantité de mouvement est simple, en raison que l'impulsion de l'onde, est dépend de la variation de quantité de mouvement. Cette définition est appuyée sur l'expression de l'impulsion, qui se peut également être la dérivée de la deuxième loi de mouvement de *Newton*, ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (II.1)$$

où

- ✓  $\vec{F}$  : Désigne la force extérieure exercée sur l'objet,
- ✓  $m$  : Est sa masse, et
- ✓  $\vec{a}$  : Correspond à l'accélération de son centre d'inertie G.

La relation (II.1) peut s'écrire sous forme,  $\vec{F} = m \cdot (\Delta\vec{V}/\Delta T)$ , puisque  $\vec{a} = (\Delta\vec{V}/\Delta T)$ ; alors on déduit une expression de la forme suivante :

$$\vec{F} \cdot \Delta T = m \cdot \Delta\vec{V} \quad (II.2)$$

Dans la dynamique, la quantité  $(\vec{F} \cdot \Delta T)$ , est appelée l'impulsion d'onde, qui est définie comme

le produit de la force multipliée par le temps. Egalement la relation (II.2) à permet suffisamment de conclure, que le changement de la quantité de mouvement qui été s'exprime par la quantité  $(m \cdot \Delta \vec{V})$ , est égale l'impulsion d'onde. Ceci permettre d'appliquer la relation de la quantité de mouvement pour déduire l'expression de la célérité d'onde.

Pour l'écoulement en mouvement de la figure (II.1.b), de la section d'écoulement unitaire  $dA$ , la quantité de mouvement élémentaire  $dp$  et s'écrit :

$$dp = (\rho dQ)V \quad (II.3a)$$

où la grandeur  $dQ$  est le débit élémentaire traversant la section  $dA$ , évalué par la relation  $dQ = VdA$ . Alors l'expression de la quantité de mouvement élémentaire pourrait s'écrire de la façon suivante :

$$dp = \rho V^2 dA \quad (II.3b)$$

Selon la relation (II.3b) et les considérations du volume étudié, nous pouvons énoncer que la variation de la quantité de mouvement moyenne de l'écoulement entre les sections  $A_1$  et  $A_2$ , correspondant respectivement le côté amont et celle en aval, est donnée par la relation suivante :

$$\Delta p = \rho y(V - V_\omega)[(V + \delta V - V_\omega) - (V - V_\omega)] \quad (II.4)$$

Selon le théorème d'*Euler*, la variation de quantité de mouvement d'une masse liquide est égale à la résultante des forces extérieures agissant sur cette masse. Alors les seules forces extérieures appliquées au volume étudié en mouvement, se résument aux forces de pressions hydrostatiques  $F_1$  et  $F_2$  s'exerçant respectivement sur le côté en amont et celle en aval de volume étudié. Ces forces s'écrivent :

$$F_1 = \bar{\omega} \cdot \bar{h}_1 \cdot A_1 \quad (II.5)$$

Et

$$F_2 = \bar{\omega} \cdot \bar{h}_2 \cdot A_2 \quad (II.6)$$

$\bar{\omega}$  désigne le poids spécifique du liquide,  $\bar{h}_1$  et  $\bar{h}_2$  sont respectivement la position du centre de gravité des sections  $A_1$  et  $A_2$  par rapport à la surface libre de l'écoulement des ces sections. On peut ainsi écrire que  $\bar{h}_1 = y/2$  et  $\bar{h}_2 = (y + \delta y)/2$ , et aussi  $\bar{\omega} = \rho \cdot g$ , où  $\rho$  est la masse volumique du liquide et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

En tenant compte des relations (II.5) et (II.6) et sachant que les sections  $A_1$  et  $A_2$ , sont des sections unitaire de largeur égale à l'unité, ces relations conduits à écrire :

$$F_1 = \frac{1}{2} \rho g y^2 \quad (II.7)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \rho g (y + \delta y)^2 \quad (II.8)$$

Alors la force résultante  $F_r$ , agissant sur le volume étudié, selon le sens d'écoulement mène à écrire :

$$F_r = F_1 - F_2 = \frac{1}{2} \rho g [(y^2 - (y + \delta y)^2)] \quad (II.9)$$

Enfin, en égalant les relations (II.4) et (II.9) et en divisant le tout par  $(\rho g)$ , il vient que :

$$\frac{y}{g} (V - V_\omega) [(V + \delta V - V_\omega) - (V - V_\omega)] = \frac{1}{2} [(y^2 - (y + \delta y)^2)] \quad (II.10)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, cette équation peut simplifier comme suit :

$$(V - V_\omega) \delta V = -g \delta y \quad (II.11)$$

Selon l'équation de la continuité de l'écoulement de la figure (II.1.b), permet à écrire :

$$y(V - V_\omega) = (y + \delta y)(V + \delta V - V_\omega) \quad (II.12)$$

Après des simplifications et la négligence des termes d'ordre supérieur, la relation précédente permet d'écrire :

$$y \delta V = -(V - V_\omega) \delta y \quad (II.13)$$

Combinant l'équation (II.11) et (II.13), nous obtenons l'égalité suivante :

$$(V - V_\omega)^2 = \rho g y \quad (II.14)$$

Ou

$$V_\omega = V \pm \sqrt{gy} \quad (II.15)$$

Comme nous l'avons défini précédemment, la relation (II.15) est l'expression de la célérité absolue d'onde d'un écoulement ayant une vitesse moyenne  $V$ , ce qui montre que la quantité définie par  $\sqrt{gy}$  s'exprime la célérité, avec laquelle se propage une onde de gravité, qui est long et de faible amplitude. Comme nous l'avons déjà noté que cette grandeur est désignée par,  $C$ , alors :

$$C = \sqrt{gy} \quad (II.16)$$

Cette formule est celle de *Lagrange* et qui donne la célérité  $C$ , d'une onde infiniment petite dans une eau au repos de profondeur  $y$ .

Les ondes de la célérité,  $C = \sqrt{gy}$ , appartiennent à la famille des ondes de surface en eau peut profonde, non périodiques et non dispersives, car  $C$ , est indépendant de la fréquence.

### II.1.2. Ecoulement avec onde :

Nous avons prouvé dans la section précédente, que le nombre de *Froude*  $F_r = 1$ , lorsque le régime d'écoulement est critique. En remplaçant l'expression de nombre de *Froude*  $F_r$  et en utilisant l'indice,  $c$ , pour désigner diverses quantités d'écoulement critique, nous obtenons les relations suivantes :

$$\frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \quad (II.17)$$

$$V_c = \sqrt{gy_c} \quad (II.18)$$

Donc, à partir des relations (II.16) et (II.18), nous pouvons écrire :

$$V_c = C \quad (II.19)$$

Comme nous l'avons défini précédemment, l'onde qui se superpose à un courant liquide à une célérité donnée par la relation (II.15), qui peut s'écrire par l'introduisant de la relation (II.16) comme suit :

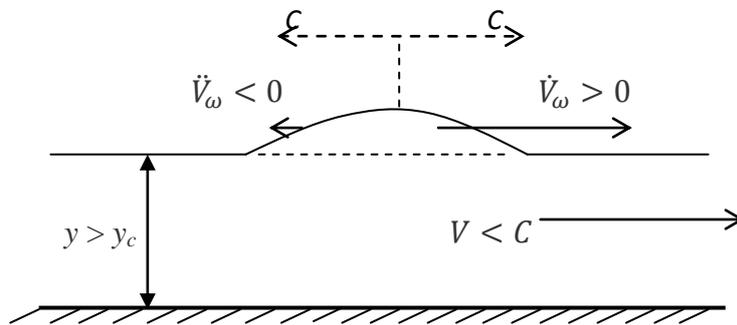
$$V_\omega = V \pm C \quad (II.20)$$

La célérité absolue,  $V_\omega$ , qui est la vitesse par rapport au sol, a évidemment deux valeurs :

$$\dot{V}_\omega = V + C \quad \text{et} \quad \dot{V}_\omega = V - C \quad (II.21)$$

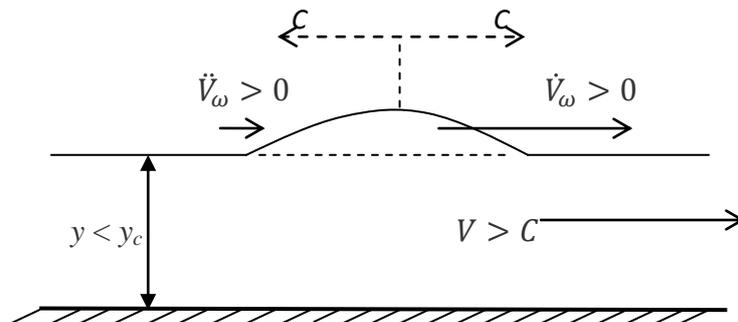
Trois situations différentes de l'écoulement pour la propagation d'une perturbation sont possibles en fonction de l'ampleur relative des vitesses  $V$  et  $C$ , c'est-à-dire soit l'écoulement sous-critique, critique ou supercritique. Ces trois cas sont :

- 1)  $V < C$ , l'onde avec la célérité,  $\dot{V}_\omega$ , se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité,  $\dot{V}_\omega$ , se propage vers l'amont ; c'est le régime sous-critique ou fluvial, voir la figure II.2a.



**Figure II.2a** : Écoulement avec onde. Cas d'un régime sous-critique

- 2)  $V > C$ , l'onde avec la célérité,  $\dot{V}_\omega$ , et l'onde avec la célérité,  $\dot{V}_\omega$ , se propagent vers l'aval ; c'est le régime supercritique ou torrentiel, voir la figure II.2b.

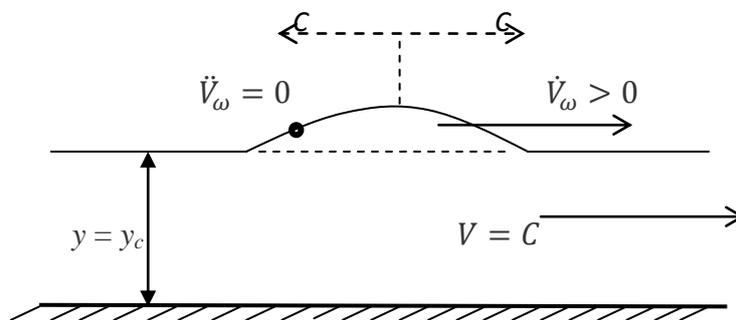


**Figure II.2b** : Écoulement avec onde. Cas d'un régime supercritique

- 3) A la profondeur pour laquelle la vitesse de courant,  $V$ , et la célérité d'onde,  $C$ , sont égales, donc :

$$V \equiv C = \sqrt{gy_c} \quad (\text{II.22})$$

La relation (II.22) correspond à l'état limite. Dans cet état les conditions de l'écoulement est dites critiques. Une section critique isole l'écoulement à l'amont de toute perturbation à l'aval, puisque les caractéristiques de l'onde de célérité,  $\dot{V}_\omega$ , ne peuvent la franchir, c'est-à-dire, l'extrémité supérieure de l'onde reste stationnaire, et seulement l'extrémité avale qui se propage dans le sens d'écoulement avec la célérité d'onde,  $\dot{V}_\omega$ , et  $y_c$  est la profondeur critique, voir la figure II.3b.



**Figure II.3b** : Ecoulement avec onde. Cas d'un régime critique

Cette propriété, qui définit le sens du déplacement d'une perturbation, peuvent être utilisés dans le domaine afin de déterminer le type d'écoulement en produisant une petite perturbation sur la surface d'écoulement, en jetant un petit objet et en notant les directions dans lesquelles cette perturbation se déplace. Si la perturbation se déplace à la fois en amont et en aval des directions, alors l'écoulement est sous-critique. Toutefois, si l'écoulement transporte la perturbation dans le sens aval, donc l'écoulement est en régime supercritique.

En éclaircissant cette notion par le phénomène de ressaut hydraulique. Si vous ouvrez un robinet, l'eau s'étale en une mince pellicule dans toutes les directions autour de l'impact. Puis son niveau remonte brusquement. Cette discontinuité trace autour du jet un cercle que l'on appelle « ressaut hydraulique ».

Des ondes de gravité peuvent se propager dans l'eau contre le courant si la vitesse de l'eau est inférieure à la célérité des ondes. Le rapport de la vitesse du courant à la célérité de l'onde est appelé nombre de *Froude*. Si ce nombre est inférieur à 1, l'écoulement est alors sous-critique. S'il est supérieur à 1, l'écoulement est supercritique. Le saut hydraulique est l'onde qui se produit là où le liquide passe de supercritique à sous-critique. Il y a un changement de hauteur

car la célérité de l'onde dépend de la racine carrée de la profondeur de l'eau ( $C = \sqrt{gh}$ ). Dans l'évier par exemple, la profondeur est plus basse à l'intérieur du cercle, la célérité de l'onde de gravité est faible et l'écoulement supercritique. A l'extérieur du cercle, la profondeur augmente, donc la célérité de l'onde est plus élevée et l'écoulement est sous-critique.

La figure II.4, montre que les célérités  $C$ , des ondes de surface sont inférieures à la vitesse  $V_1$  du liquide dans la région centrale ( $Fr > 1$ ), et supérieures à la vitesse  $V_2$  ( $Fr < 1$ ) dans l'anneau externe.

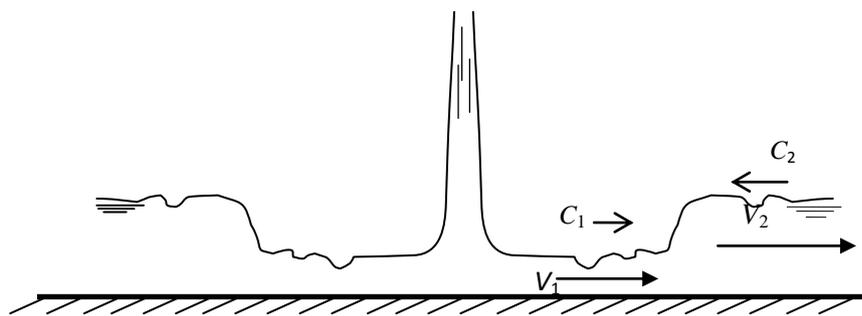


Figure II.4 : Vue en coupe d'un ressaut hydraulique

## II.2. Ecoulement critique

Evidemment, l'histoire n'a pas encore dit ce qu'il advenait lorsque le nombre de *Froude* égal à 1. Mais comme nous l'avons déjà abordé au paragraphe précédent, la valeur de nombre de *Froude*  $Fr$ , pour le régime critique, correspond à l'égalité entre la vitesse du courant,  $V$  et la célérité de propagation d'onde,  $C$ . Cette égalité mène à immobiliser les propagations des ondes vers l'amont, par l'annulation de la célérité d'onde,  $\check{V}_\omega$ , ce qui conduit à réduire la tension des perturbations par rapport aux autres régimes d'écoulement, celles des régimes supercritiques et sous-critiques. En mécanique des fluides cette notion décrit, que la charge dans une section critique est atteinte une valeur minimale. Alors pour prendre la mesure de ce que recèle l'expression,  $Fr = 1$ , cette égalité d'apparence si anodine, nous recourons à l'étude de la notion de charge spécifique et celle de la force spécifique. La base de cette étude nous dirigera à développer des relations traitant l'écoulement critique dans un canal de profil quelconque de manière généralisée et en suite nous les appliquons celles-ci par le choix de canal de section rectangulaire.

## II.2.1. Section de forme quelconque

### II.2.1.1 La charge spécifique

#### II.2.1.1.1 Définition

Dans cet énoncé, nous nous sommes attachés à rappeler quelques résultats fondamentaux concernant l'établissement de l'équation de la charge totale d'un élément d'un fluide incompressible presque rectiligne. En premier lieu nous avons rappelé les fondements théoriques qui conduisent à l'établissement de cette équation. Et subséquemment, on abordera la notion de l'énergie spécifique, dont laquelle s'avère très utile pour la compréhension de certains phénomènes, et celui que nous s'intéressons à ce sujet, c'est l'écoulement en régime critique et ces résultats seront largement utilisés par la suite dans des applications pratiques aux écoulements uniformes dans les canaux des profils différents.

#### II.2.1.1.2 Equation de la charge

Les fondements théoriques sont les suivants (*Graf & Altinakar, 2000, p.21*) :

- 1) L'équation de la charge est une expression du premier principe de la thermodynamique.
- 2) L'énergie pour un élément d'un fluide incompressible, écrite en quantités homogènes à des longueurs (voir Figure II.5), ici en hauteurs de liquide de poids volumique  $= \rho g$ , dans un écoulement presque rectiligne, par rapport à un plan de référence est donnée par :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + Z_p = \frac{P_t}{\gamma} = Cte;$$

Les différents termes représentent :

$$\frac{V^2}{2g}$$

La hauteur due à la vitesse ;

$$\frac{P}{\gamma}$$

La hauteur due à la pression ;

$$Z_p$$

La cote ;

$$\frac{P_t}{\gamma}$$

L'énergie (mécanique) ou la charge totale ;

$$\frac{P}{\gamma} + Z_p = \frac{P^*}{\gamma}$$

La hauteur piézométrique.

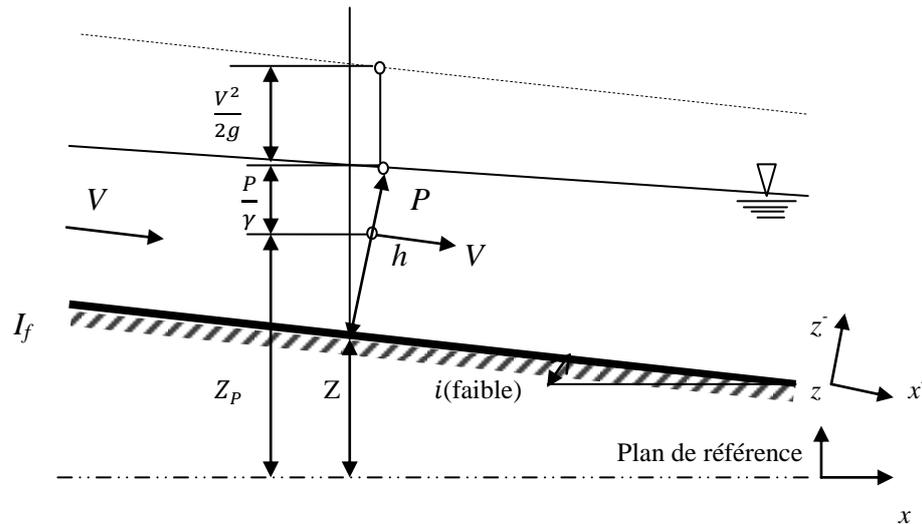


Figure II.5 : Schéma pour l'équation de l'énergie dans une section

3) On admet les hypothèses suivantes :

- i. La hauteur piézométrique,  $(P^*/\gamma)$ , est supposée constante à travers une normale au fond du canal, c'est-à-dire que la répartition de la pression est hydrostatique.
- ii. En considérant que  $z$  donne la cote du fond du canal, on définit la pente (faible) du canal,  $I_f$ , comme suit :

$$I_f = \operatorname{tg} i = -\frac{dz}{dx} \cong \sin i ;$$

- iii. Si  $h$  est la profondeur d'eau, la hauteur due à la pression sur le fond du canal est comme suit :

$$\left(\frac{P}{\gamma}\right)_s = h \cos i ;$$

Pour des pentes faibles, soit  $i < 6^\circ$  où  $I_f < 0,1$ , on prend  $\cos i \cong 1$ .

Le système des coordonnées,  $xz$ , et alors quasiment confondu avec le système des coordonnées,  $x'z'$ , (voir la figure II.5).

- iv. Dans un fluide parfait, chaque élément de celui-ci se déplace donc à la même vitesse, c'est-à-dire, la vitesse moyenne  $V$  dans la section.

En utilisant ces approximations raisonnables, l'expression de l'énergie ou (charge) totale dans une section est donnée par :

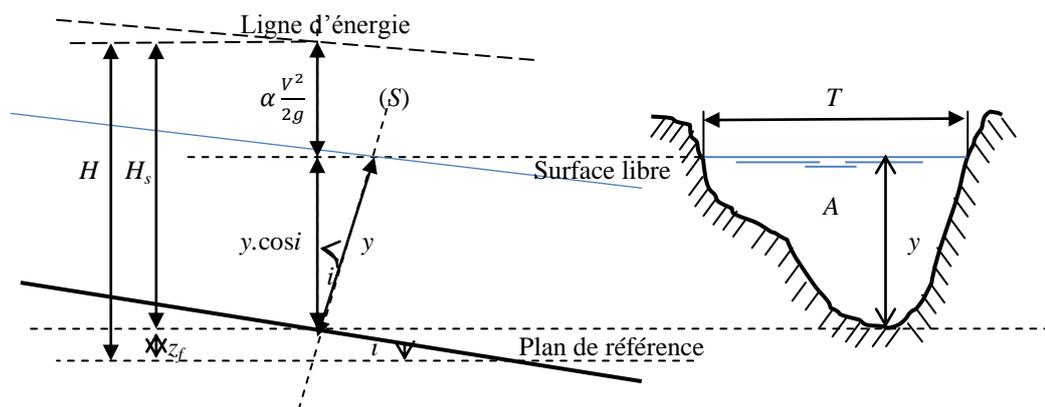
$$\frac{V^2}{2g} + h + z = H ;$$

L'écoulement est considéré ici comme unidimensionnel et rectiligne. L'équation de la charge totale indiquée ci-dessus, traduit le principe de la charge si le liquide est parfait. D'une section à l'autre, chacun des trois termes de l'expression peut prendre une valeur différente ; la somme,  $H$ , reste cependant constante.

D'après l'explication qui précède, ce que suit, nous pouvons définir la notion de la charge spécifique, qui est très commode ; elle facilite la compréhension et aide à résoudre différents problèmes d'écoulement à surface libre. Alors l'énergie spécifique (ou "charge spécifique") (désignée par le symbole  $H_s$ ) dans une section transversale mouillée est la valeur moyenne de l'énergie des molécules du liquide de cette section par unité de poids du liquide, cette énergie étant rapportée à l'axe horizontal passant par le point le plus bas de la section.  $H_s$  est donc homogène à une longueur. Cette notion, introduite par *Bakhmetef* (1912), joue un rôle essentiel dans l'étude des écoulements variés, (*M. Carlier*, 1986, p 347).

Nous considérons un écoulement à surface libre unidirectionnel et stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), turbulent et de faible pente, représenté par le schéma de la figure ci-dessous, considérons une section transversale ( $S$ ), et désignons par :

- ✓  $V$  est la vitesse moyenne dans cette section ;
- ✓  $A$  : l'aire de la section ( $S$ ) ;
- ✓  $h$  : la profondeur maximale et
- ✓  $J_s = \text{tg } i$ , la pente du fond du canal au droit de cette section.



**Figure II.6** : Schéma simplifié d'un écoulement à surface libre unidirectionnel.

(Extrait de *M. Carlier*, 1986)

Par définition, l'énergie spécifique dans la section ( $S$ ) sera :

$$H_s = y \cos i + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (II.23)$$

Très souvent la pente étant très faible, on supposera  $\cos i = 1$ . De plus le coefficient  $\alpha$  est le facteur de correction de l'énergie cinétique représentée par la quantité  $(V^2/2g)$ , il est appelé également facteur de *Coriolis*, qui tient compte de la non uniformité de la distribution de la vitesse dans une section donnée de l'écoulement. En règle générale, le facteur  $\alpha$  peut varier d'un minimum de 1,10 pour une distribution très uniforme, à 1,20 pour une distribution très peu uniforme. Néanmoins, dans une approche préliminaire, une valeur de  $\alpha$  est prise égale à l'unité et cette approximation retient l'unanimité lorsque la pente est au-dessous de 1% ( $i = 6^\circ$ ), (voir *Chow*, 1959, p.28, p.33). Et en définitive, on adoptera l'expression approchée suivante de la charge spécifique :

$$H_s = y + \frac{V^2}{2g} \quad (II.24)$$

Ou, en introduisant le débit volume  $Q$  tel que :

$$H_s = y + \frac{Q^2}{2g(A(y))^2} \quad (II.25)$$

Cette dernière relation montre que pour un débit  $Q$  donné, l'énergie spécifique dans une section donnée est uniquement fonction de la profondeur d'écoulement.

Si on désigne par  $z_f$  la cote du point le plus bas de la section transversale considérée et par  $H$  la charge totale dans cette section, (voir la figure II.6), on voit que,  $H = H_s + z_f$ .

L'énergie spécifique, représente donc la distance verticale de la ligne de charge au point le plus bas de la section.

Pour un canal prismatique, la section transversale de forme donnée ( $A$ ) est dépend uniquement de la hauteur d'eau,  $A = A(y)$ . Par conséquent, la fonction  $H_s$  ne dépend que de la hauteur d'eau,  $H_s = H_s(y)$  et l'expression (II.25) est une relation de forme :

$$\varphi(H_s, y, Q) = 0 \quad (II.26)$$

La fonction  $\varphi$ , représentée dans un espace à trois dimensions  $y, H_s, Q$ , par une surface dont nous allons étudier les intersections par les plans  $H_s = C^{te}$  et  $Q = C^{te}$ , étant entendu que cette étude sera faite pour des sections transversales des profils de canaux quelconques tels que rectangulaires ou évasées vers le haut qui sont d'ailleurs les formes les plus usuelles.

Il convient, en outre, de noter que la pente du canal et la rugosité des parois n'interviennent pas dans cette étude dont les conclusions seront donc indépendantes de ces paramètres.

### II.2.1.1.3. Courbe $y(Q)$ pour $H_s$ constant

Le débit volume  $Q$  est, en vertu de la relation (II.25) :

$$Q^2 = 2gA^2(H_s - y) \quad (II.27)$$

Ce qui montre d'après la relation (II.27), le débit volume  $Q$  est nul pour  $A = 0$ , c'est-à-dire  $y = 0$  et pour  $y = H_s$ .

La valeur maximale de débit volume  $Q$  s'obtiendra en annulant la dérivée de la quantité  $(Q^2/2g)$  par rapport au variable  $y$ , soit :

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2}{2g} \right) = \frac{d}{dy} [A^2(H_s - y)] = 0$$

Ou bien :

$$2A \frac{dA}{dy} (H_s - y) - A^2 = 0 \quad (II.28)$$

Or, près de la surface libre, l'aire  $dA$  est définie comme étant le produit de la largeur de la surface d'eau  $T$  par  $dy$

$$\frac{dA}{dy} = T \quad (II.29)$$

Où  $T$  étant la largeur au miroir (la largeur de la surface libre dans la section courante. Voir la figure II.7).

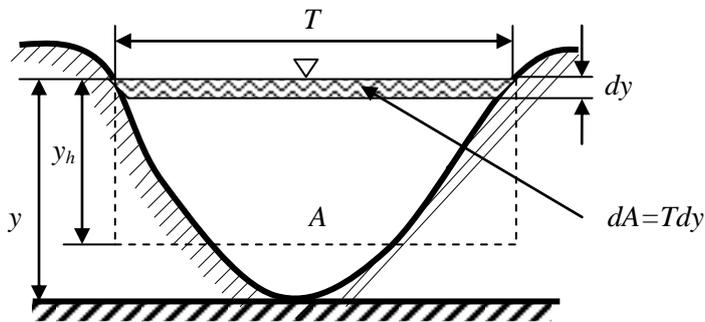


Figure II.7 : Profil en travers d'un canal naturel

Et en tenant compte les relations (II.27) et (II.29), la relation (II.28) s'écrit :

$$2A \cdot T \frac{Q^2}{2gA^2} - A^2 = 0$$

En désignant les conditions d'écoulement critique par l'indice " c " et par l'introduction de facteur de Coriolis on a :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = 1 ; \text{ où } \alpha \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \quad (II.30)$$

Il y correspond pour la profondeur  $y$  une valeur  $y_c$  qu'on appelle la profondeur critique et le régime correspondant, caractérisé par l'équation (II.30) c'est le *régime critique*; et cette équation est dite la condition de criticité. Cette condition a été étudiée et discutée par plusieurs auteurs (Chow, 1959 ; Henderson, 1966 ; French, 1985 et Naudascher, 1987). Ce régime est correspond au débit maximal ( $Q_{max}$ ) dans la section considérée pour l'énergie spécifique donnée.

En tenant compte la définition de la profondeur hydraulique moyenne de la section ; désignée par,  $y_h$ , qui est égale au quotient de  $A$  par la largeur de la surface libre  $T$ , définie par :  $y_h = (A/T)$ , alors la relation (II.28) peut s'écrire comme suit :

$$2(H_s - y) - y_h = 0 \quad (II.28a)$$

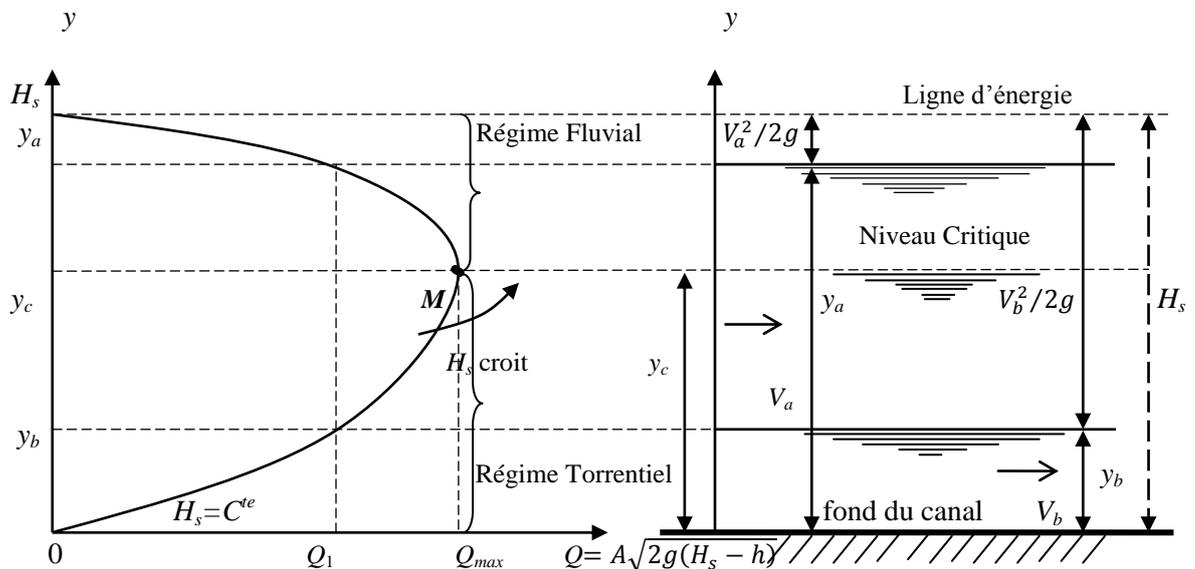
Les valeurs,  $y$  et  $y_h$ , qui correspondent à un débit maxima, ( $Q_{max}$ ), sont les *profondeurs critiques*,  $y_c$  et  $y_{h_c}$ . Il s'ensuit que l'équation (II.28a) s'écrit :

$$2(H_{s_c} - y_c) = y_{h_c};$$

Et que, en utilisant l'équation (II.27), le débit,  $Q_{max}$ , est donné par :

$$Q_{max} = A\sqrt{2g}(H_{s_c} - y_c)^{1/2} = A\sqrt{gy_{h_c}} \quad (II.28b)$$

La courbe  $y(Q)$  est représentée sur la figure II.8, son sommet  $M$  représentatif du régime critique s'éloigne de l'origine lorsque  $H_s$  augmente.



**Figure II.8 :** Courbe  $y(Q)$  pour  $H_s$  constant

La courbe de la figure II.8, montre que pour un débit donné  $Q_1$ , il existe généralement deux profondeurs  $y_a$  et  $y_b$  correspondant à la même énergie spécifique, si ce débit  $Q_1$  augmente, les deux profondeurs  $y_a$  et  $y_b$  se rapprochent l'une de l'autre et tendent vers une valeur commune

$y_c$ , profondeur critique qui obtenue pour le débit maximal  $Q_{max}$ . Si  $Q > Q_{max}$  il n'y a plus de solution, c'est-à-dire que l'écoulement n'est pas possible pour l'énergie spécifique  $E$  considérée.

#### II.2.1.1.4. Courbe $H_s(y)$ pour $Q$ constant

La fonction  $\varphi$ , donnée par la relation (II.25), montre que pour le débit volume  $Q$  soit localement constant, l'énergie spécifique dans une section donnée est uniquement fonction de la profondeur d'écoulement.

Quand, pour un débit donné  $Q$ , on trace l'énergie spécifique  $H_s$  en fonction de la profondeur d'écoulement, on obtient une courbe d'énergie  $H_s(y)$  qui présente deux limites comme représenté sur la figure II.9, respectivement sont :

1) A la première bissectrice  $H_s = y$  (pour  $y \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow \infty$  et  $H_s \rightarrow y$ )

2) A l'axe des  $H_s$  (pour  $y \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow 0$  et  $H_s \rightarrow \infty$ )

- La première limite est l'asymptote constituant la limite inférieure **MB** est définie par la première bissectrice  $H_s = y$ .
- La seconde est la limite supérieure **MA** représente l'asymptote constituant l'axe verticale des  $H_s$ .

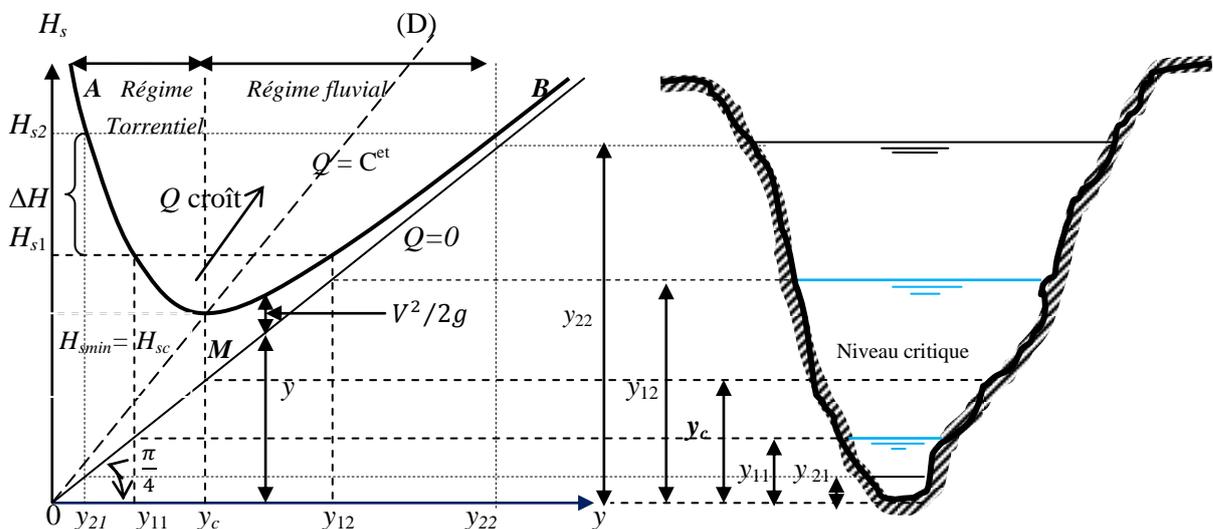


Figure II.9 : Courbe  $H_s(y)$  à  $Q$  constant ou "courbe ( $H_s$ )"

La figure ci-dessus montre que la courbe présente un minimum **M**, et sa valeur peut par conséquent être calculée en dérivant l'énergie spécifique donnée par la relation (II.25) par rapport à la profondeur d'écoulement  $y$  et en l'égalant à zéro.

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{2}{A^3} \frac{dA}{dy} \right) = 0 \quad (\text{II.31})$$

Les solutions de cette équation, présentent les valeurs extrêmes de la relation (II.25), présentées par le minimum  $M$  de la courbe qui avait un intérêt particulier. Comme  $(dA/dy) = T$ , l'équation (II.31) peut être réécrite :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = 1 ; \text{ ou } \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} ;$$

Cette dernière équation est une expression identique à celle de la relation (II.30) et qui est caractéristique du régime critique, c'est-à-dire doit être vérifiée pour les conditions de l'écoulement critique. Le membre de droite est fonction de la profondeur,  $y$ , et, en général il faut faire des approximations successives pour déterminer la valeur  $y$ , qui vérifie cette équation. Graphiquement l'abscisse de point,  $M$  prend la valeur  $y_c$  appelée la profondeur critique, qui n'est rien d'autre que la solution de la présente équation.

La courbe  $(H_s)$  présentée sur la figure II.9, montre que pour une énergie spécifique donnée  $H_{s1}$ , il existe deux profondeurs  $y_{1,1}$  et  $y_{1,2}$  correspondant au même débit volume  $Q$  ; elles sont appelées profondeurs correspondantes. Avec la profondeur la plus faible  $y_{1,1}$ , le débit est obtenu avec une vitesse plus élevée, et donc avec une énergie spécifique plus élevée, et le régime d'écoulement correspond est connu sous le nom de régime torrentiel. Et avec la profondeur la plus grande  $y_{1,2}$ , le débit passe à une vitesse plus lente, mais également avec une énergie spécifique plus élevée, est cette fois ci le régime d'écoulement correspond est connu comme régime fluvial. Si la charge spécifique,  $H_{s1}$  décroît, les profondeurs correspondantes tendent l'une vers l'autre et deviennent égales à  $y_c$  lorsque l'énergie spécifique prend sa valeur minimale pour le débit considéré, cette valeur minimale  $H_{s_{min}}$  est définit également l'énergie spécifique critique  $H_{s_c}$  correspond à l'ordonnée du sommet  $M$  de la courbe  $H_s(y)$  de la figure II.9. L'énergie dissipée entre deux sections de charges respectives  $H_{s1}$  et  $H_{s2}$ , n'est rien d'autre que ce qu'on appelle la perte de charge. Pour un régime fluvial, cette perte de charge se traduit par un abaissement de la ligne d'eau et une augmentation de l'énergie cinétique, alors que pour un régime torrentiel, elle se traduit par une augmentation de la ligne d'eau et un abaissement de l'énergie cinétique.

Dans une section transversale présentée par la figure II.9, un débit donné ne peut donc être assuré que si l'énergie spécifique est au moins égale à une valeur minimale  $H_{s_{min}}$  ; ce minimum est d'autant plus grand que le débit est lui-même plus grand car le sommet  $M$  s'éloigne de l'origine  $O$ , lorsque le débit volume  $Q$  croît. Par conséquent nous avons montré, par une voie graphique de la figure II.9, que dans une section critique ; dont le débit volume  $Q$

reste localement constant, la charge, ( $H_s = H - z_f$ ), est également atteint une valeur minimale  $H_{s_{min}}$ , qui définie comme la charge spécifique critique,  $H_{s_c}$ . Celle-ci est également correspond au nombre de *Froude*  $F_r = 1$ , qui est définie comme condition d'écoulement critique. Est-ce dernier se présente explicitement par un développement basé sur l'équation différentielle (II.31) tel que :

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{2}{A^3} \frac{dA}{dy} \right) = 0;$$

Comme,  $(dA/dy) = T$ , alors la relation précédente s'écrit :

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - \frac{1}{g} \left( \frac{Q}{A} \right)^2 \frac{T}{A} = 0 \quad (II.32)$$

En utilisant la notion de la profondeur hydraulique moyenne,  $y_h$ , de la section et en termes de vitesse moyenne, on a  $V = (Q/A)$ , alors l'équation (II.32) devienne :

$$1 - \frac{V^2}{gy_h} = 0;$$

Où

$$\frac{V}{\sqrt{gy_h}} = 1 = F_r. \quad (II.33)$$

Le nombre de *Froude*  $F_r$ , comme nous l'avons déjà vu est un paramètre sans dimension, qui traduit le rapport entre les forces d'inerties et les forces de pesanteurs. Etant que le régime critique correspond à un nombre de *Froude* égale à l'unité, cela veut dire que l'écoulement critique est caractérisé par un minimum d'énergie.

#### II.2.1.1.5. Relation charge spécifique et le nombre de *Froude* $Fr$

Comme il est montré dans le premier chapitre, le nombre de *Froude* qui désigné par les lettres ***Fr***, est défini par la quantité  $(V/\sqrt{gy})$ , c'est à dire, le rapport entre la vitesse du courant à la vitesse de l'onde.

Le nombre de *Froude* est analogue au nombre de *Mach* de la propagation des gaz, à savoir le rapport de la vitesse du gaz à la vitesse sonique. Dans le cas du canal à ciel ouvert, les écoulements supercritique ou sous-critique selon que le nombre de *Froude*  $Fr$  est supérieur ou inférieur à l'unité, pour ces raisons le nombre de *Froude*  $Fr$  entre autres est un paramètre très pratique qui peut être interprété comme indicateur de l'importance des effets d'inertie de l'écoulement considéré par rapport aux de pesanteur (*F.M. Henderson, 1966*).

L'écoulement dans les canaux découverts est caractérisé par l'équation (II.33), et comme  $y_h$ , la profondeur hydraulique, cette équation est devenue

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{g(A/T)}} \quad \Leftrightarrow \quad F_r^2 = \frac{V^2}{g(A/T)} = \frac{Q^2 T}{g A^3} = \frac{Q^2}{g A^3} \cdot \frac{\partial A}{\partial y};$$

Où

$F_r^2$ , est le carré du nombre de *Froude* qui est défini par l'expression ci-dessus.

$Q$  est le débit,  $g$  l'accélération gravitationnelle et  $A(x, y)$  la section mouillée. La coordonnée longitudinale est  $x$  et  $y$  est la profondeur d'eau.

Dans les canaux prismatiques à pente constante ( $\partial A / \partial x \equiv 0$ ) sont d'un intérêt particulier ; avec  $A = A(y)$ . Alors on peut déduire la relation suivante (W. H. Hager, constructions hydrauliques, 2009, p, 433) :

$$F_r^2 = \frac{Q^2}{g A^3} \cdot \frac{dA}{dy} \quad (II.34)$$

Nous notons que le dérivé de l'équation (II.25) et l'introduction de la relation (II.34) peut être simplement exprimé comme suit:

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - F_r^2 \quad (II.35)$$

Ce résultat à une importance remarquable consiste par une relation étroitement liée entre la charge spécifique et le nombre de *Froude*  $F_r$ .

### II.2.1.1.6. Vitesse moyenne critique

Pour déterminer l'expression la vitesse moyenne critique, ou la vitesse moyenne de l'écoulement en régime critique, en utilisant la condition de criticité définie par la relation (II.30), suivante :  $(Q^2/g) = (A_c^3/T_c)$ ;

Tel que en divisant  $Q^2$  par  $A_c^2$ , ou en fonction de la vitesse moyenne, l'équation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{V_c^2}{g} = \frac{A_c}{T_c} \quad \text{ou} \quad V_c = \sqrt{g \frac{A_c}{T_c}} = \sqrt{g y_{h_c}} \quad (II.36)$$

De plus la charge spécifique minimale  $H_{s_{min}}$ , ou la charge spécifique critique  $H_{s_c}$ , en utilisant les relations (II.24) et (II.36), est devenue comme suit :

$$H_{s_{min}} = H_{s_c} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{1}{2} y_{h_c} \quad (II.37)$$

D'autre part, nous pouvons analytiquement déduire si le nombre de *Froude*  $F_r = 1$ , est correspond à un minimum de la charge spécifique  $H_s$  et ceci pour des profils des canaux

quelconques, il suffit de démontrer que la dérivée seconde de la charge spécifique  $H_s$  donnée par la relation (II.25) par rapport au variable  $y$  est strictement positive, c'est-à-dire  $\frac{d^2(H_s)}{dy^2} > 0$ ;

Le calcul de la dérivée seconde menait à écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d^2(H_s)}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left( \frac{dH_s}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( 1 - \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{2}{A^3} \frac{dA}{dy} \right) \right) = \frac{d}{dy} \left( 1 - \frac{Q^2}{g} \left( \frac{T}{A^3} \right) \right); \\ \Rightarrow \frac{d^2(H_s)}{dy^2} &= \frac{d(1)}{dy} - \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{d\left(\frac{T}{A^3}\right)}{dy} = 0 - \left[ -\frac{Q^2}{g} \cdot \frac{d\left(\frac{T}{A^3}\right)}{dy} \right]; \\ \Rightarrow \frac{d^2(H_s)}{dy^2} &= \frac{Q^2}{gA^7} \left( 3T^2 - A \left( \frac{dT}{dy} \right) \right); \end{aligned}$$

Cette dernière expression reste positive à condition la quantité de la relation suivante est positive c'est-à-dire :

$$3T^2 - A \left( \frac{dT}{dy} \right) > 0;$$

Etant donné que ( $A \neq 0$ ), l'inégalité ci-dessus est vérifié la propriété suivante :

$$\frac{3T^2}{A} > \frac{dT(y)}{dy} \quad (II.38)$$

L'inégalité présentée par la relation (II.38), est une condition généralement satisfaite pour que la dérivée seconde de la charge spécifique  $H_s$  soit strictement positive. Par conséquent il existe une seule valeur extrême de la fonction  $H_s(y)$ , celle-ci est une valeur minimale, qui s'établit pour l'écoulement critique,  $F_r = 1$ . Soit  $H_s = H_{s_c}$  et  $y = y_c$  les valeurs correspondantes dénommées charge critique et profondeur critique.

Pour simplifier cette procédure, considérons un canal prismatique à section rectangulaire, dont le débit par unité de largeur est  $q = (Q/b)$ . Alors la charge spécifique selon la relation (II.25) est  $H_s = y + (q^2/2gy^2)$ . S'il s'agit d'un écoulement critique, il existe une valeur unique  $y = y_c$  qui définit une valeur extrême de la charge  $H_s = H_{s_c}$ . Cette dernière est obtenue par la solution de la relation (II.32) ; où  $dH_s/dy = 1 - (q^2/gy^3) = 0$ . Donc pour déterminer si  $F_r = 1$  correspond à un minimum ou maximum de la fonction  $H_s(y)$ , la dérivée second doit être analysée par l'inégalité (II.38) ; qui traduite par :  $(3T/y_c) > 0$ , évidemment cette expression reste toujours positive, ce que signifie que  $H_s(y)$  atteint un minimum pour nombre de Froude  $F_r$  égale à l'unité.

## II.2.1.2. Force spécifique

### II.2.1.2.1. Définition

Il existe un grand nombre de problèmes techniques pour lesquels il suffit de connaître les caractéristiques de l'écoulement autour de la *surface* du *volume de contrôle* sans qu'il soit nécessaire d'en connaître la structure interne. Comme déjà mentionné à la section II.1.1, le théorème de la quantité de mouvement exprime l'équilibre entre le changement temporel de la force d'inertie et les forces externes agissant sur le volume de contrôle.

Pour un écoulement stationnaire, l'équation (II.3a) représente l'expression de la quantité de mouvement élémentaire, et la quantité de mouvement moyenne est obtenue par l'intégrale de l'équation (II.13a) (Le Méhauté 1976, Truckenbrodt 1996) où :

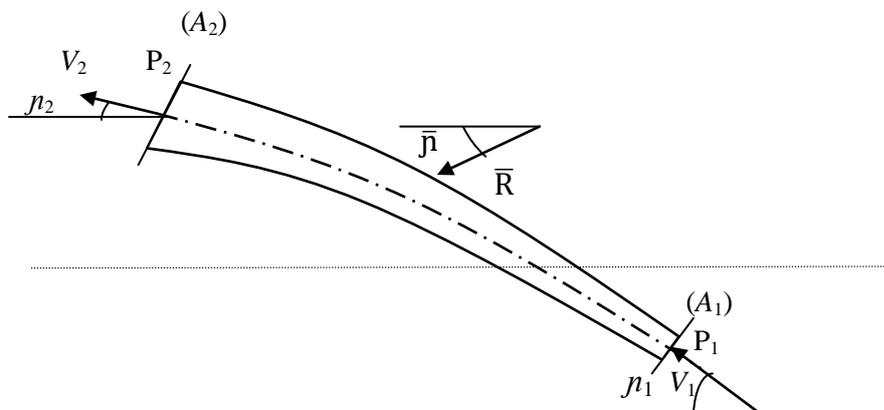
$$p = \int \rho \vec{V} dQ = \vec{R} \quad (II.39)$$

Le paramètre  $\vec{R}$ , correspond à la résultante des forces extérieures qui se compose normalement des forces de gravité, de pression et de viscosité.

La différence des quantités de mouvement entrant et sortant du volume de contrôle est égale aux forces extérieures agissant sur ce volume fixé. Cette relation ne demande pas la connaissance des mécanismes internes de l'écoulement.

L'équation (II.39), peut être simplifiée dans le cas où l'écoulement est déterminé par un tube de courant ; soit  $A_1$  et  $A_2$  les sections d'entrée et de sortie et  $n_1$ ,  $n_2$  les deux directions correspondantes (figure II.10). Pour un fluide de masse volumique  $\rho$  variable, le théorème de la quantité de mouvement exige que (Jaeger 1949) :

$$(P_1 + \rho_1(\beta_1 V_1^2))A_1 \cos n_1 - (P_2 + \rho_2(\beta_2 V_2^2))A_2 \cos n_2 = \vec{R} \cos \bar{n} \quad (II.40)$$



**Figure II.10 :** Application du théorème de la quantité de mouvement intégré sur l'écoulement dans un tube de courant.  
(.....) : Axe de référence

Où  $V_1$  et  $V_2$  sont les valeurs absolues des vitesses moyennes dans les sections  $A_1$  et  $A_2$  ; elles sont affectées respectivement des coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  pour tenir compte de l'inégale répartition des vitesses dans chacune de ces sections.

$\bar{R} \cos \bar{\eta}$  est la résultante de toutes les forces extérieures, à l'exception des forces de pression agissant sur les sections  $A_1$  et  $A_2$ . On appelle *force de courant* (Carlier 1980, Jaeger 1949) :

$$\bar{S} = (P + \rho(\beta V^2))A \cos \eta \quad (II.41)$$

La somme de la force de pression et de la quantité de mouvement dans une section de surface  $A$ . L'équation (II.40) exprime donc que la différence des forces de courant est égale à la somme des forces extérieures  $\bar{R} \cos \bar{\eta}$  entre deux sections. Elle est valable quelle que soit l'orientation de l'axe de référence considéré.

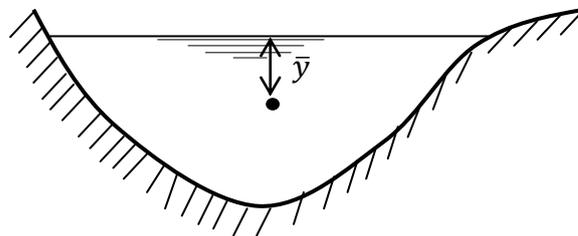
Maintenant on considère que  $\rho$  et  $g$  sont des valeurs constantes ; il est d'usage d'exprimer la quantité  $(\bar{S}/\rho g)$ , par l'*impulsion totale  $F_s$  du courant* [ $m^3$ ], (*specific force* en anglais ; *Stützkraft* en allemand) (Jaeger 1949), et donné par l'expression suivante :

$$F_s = \left( \frac{P}{\rho g} + \frac{\rho \beta V^2}{\rho g} \right) A \cos \eta = \left( \frac{\rho g \bar{y}}{\rho g} \cdot A + \frac{\rho \beta Q^2}{\rho g A^2} \cdot A \right) \cos \eta = \left( \bar{y} A + \frac{\beta Q^2}{g A} \right) \cos \eta \quad (II.42)$$

Où  $\bar{y}$  est la position du centre de gravité des sections  $A$  par rapport à la surface libre de l'écoulement de cette section.

Pour un écoulement stationnaire, dans un canal à pente très faible, (figure II.11). Dans la mesure où les projections sur l'axe longitudinal du canal du poids et des réactions des parois et du fond sont négligeables vis-à-vis des autres projections, en particulier des pressions. Dans ce cas la valeur  $\cos \eta$  est égale à 1, et l'équation de la quantité de mouvement donnée par la relation (II.40) s'écrit :

$$(P_1 + \rho(\beta_1 V_1^2))A_1 - (P_2 + \rho(\beta_2 V_2^2))A_2 = 0 ;$$



**Figure II.11:** Centre de gravité d'une section mouillée

Alors nous pouvons déduire l'égalité suivante :

$$(P_1 + \rho(\beta_1 V_1^2))A_1 = (P_2 + \rho(\beta_2 V_2^2))A_2 \quad (II.43)$$

En remplaçant l'égalité précédente par l'expression des forces des pressions hydrostatiques, donnée par :  $P_1 = \rho g \bar{y}_1 A_1$  et  $P_2 = \rho g \bar{y}_2 A_2$  et en utilisant l'équation de la continuité et ensuite après simplification et réarrangement, nous pouvons déduire de la relation (II.43) que :

$$\bar{y}_1 A_1 + \frac{\beta_1 Q^2}{g A_1} = \bar{y}_2 A_2 + \frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} \quad (\text{II.44})$$

Dans des nombreux cas, les termes dynamiques des équations (II.23) et (II.44) sont multipliés par des coefficients de corrections, notamment  $\alpha(V^2/2g)$  et  $\beta(QV/g)$ . Ces deux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , tiennent compte de la répartition non-uniforme des vitesses. (Jaeger 1949, Hager 2009) ont démontré que  $1 \leq \beta \leq \alpha$ . Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ne peuvent évidemment être déterminés que par des approches spatiales. Leurs effets sur l'écoulement ne sont pas encore complètement analysés. Dans la pratique de l'hydraulique, on admet que  $\alpha \equiv \beta \equiv 1$  pour les écoulements turbulents, alors la relation (II.44) s'écrit comme suit :

$$\bar{y}_1 A_1 + \frac{Q^2}{g A_1} = \bar{y}_2 A_2 + \frac{Q^2}{g A_2} \quad (\text{II.45})$$

Les termes des deux côtés de l'équation (II.45) sont analogues, où l'égalité définie par la relation précédente, que la force spécifique reste constante entre les deux sections  $A_1$  et  $A_2$  considérées. La relation peut être exprimée pour une section du canal par la fonction générale suivante :

$$F_s = \bar{y} A + \frac{Q^2}{g A} \quad (\text{II.46})$$

Comme nous l'avons montré au précédent, la relation (II.46) se compose par deux termes d'une particularité qui possède une dimension d'une force. Et cette force aussi est une force de l'écoulement par unité de poids de liquide, qui a été définie par la force spécifique. Nous pouvons expliquer clairement les expressions de deux termes de la relation (II.46), comme représenté le schéma ci-dessous de la figure II.12.

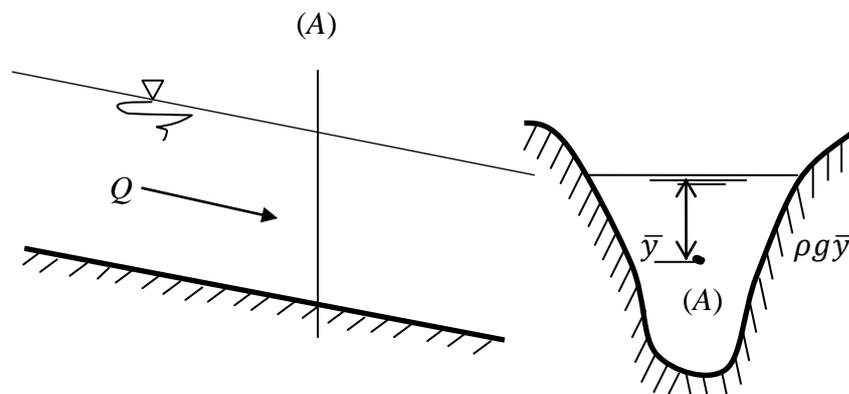


Figure II.12: Schéma de définition des termes de la force spécifique

La figure II.12, représente schématiquement un canal à pente faible, où les projections sur l'axe longitudinal du canal de poids du liquide et des réactions des parois et du fond sont négligeables vis-à-vis des autres projections, en particulier des pressions. On considère que le canal véhiculant un écoulement en régime uniforme, présente les deux termes de la force spécifique, tels que :

Le premier terme est la force par unité de poids de liquide, et le second terme est la quantité de mouvement de l'écoulement passant à travers la section considérée ( $A$ ) du canal par unité de poids de liquide.

- 1) Le premier terme est défini par la force hydrostatique exprimée par la quantité  $(\rho g \bar{y} A)$ , agissant sur l'aire de la section ( $A$ ), cette force est également rapportée par le poids de liquide, ce qui est montré que le premier terme est donné par la quantité  $(\rho g \bar{y} A / \rho g)$ , est celle-ci également égale à la quantité  $(\bar{y} A)$ , qui définit le premier terme de la relation (II.46).
- 2) Le second terme est défini par quantité de mouvement, tel que celle-ci est correspond à la variation de la masse,  $m$ , du liquide par l'unité de temps et de la vitesse, par une relation traduite par la quantité  $((m/dt)V)$ , en tenant compte que  $m = \rho W$ , où  $W$  est le volume de la masse liquide, ainsi que le débit volume  $Q$  où  $Q = (W/dt)$ . Alors la quantité précédente pourrait être réécrite par l'expression  $((\rho Q)/V)$ , cette quantité exprime la quantité de mouvement qui avait la dimension d'une force. Alors la quantité de mouvement de la section considérée ( $A$ ) rapporté au poids du liquide, soit égale à la quantité  $((\rho Q^2)/\rho g A)$ , est celle-ci également à la quantité  $(Q^2/gA)$  qui définit le seconde terme de la relation (II.46).

#### II.2.1.2.2. Diagramme de la force spécifique

Il ressort de la relation (II.46), que pour une section ( $A$ ) de forme donnée d'un canal à pente faible et un débit volume  $Q$  localement constant. On a les paramètres  $\bar{y}$  et  $A$  sont des fonctions de la profondeur  $y$ , de sorte que la relation (II.46) est de la forme :  $y = f(Q, F_s)$ .

Comme nous l'avons fait pour la charge spécifique  $H_s$ , on peut étudier de la même manière la variation de la profondeur  $y$  en fonction de l'une des deux variables  $Q$  et  $F_s$ , l'autre restant constante.

Cette étude est presque identique à celle faite précédemment pour la fonction  $H_s$ . Et nous bornerons à étudier plus spécialement la courbe  $F_s(y)$  pour le débit volume  $Q$  soit constant. La force spécifique ne dépend que de la profondeur de l'écoulement. Ainsi, la variation de la

force spécifique en fonction de la profondeur d'écoulement  $y$ , est représentée par la courbe  $F_s(y)$  de la figure montrée ci-dessous.

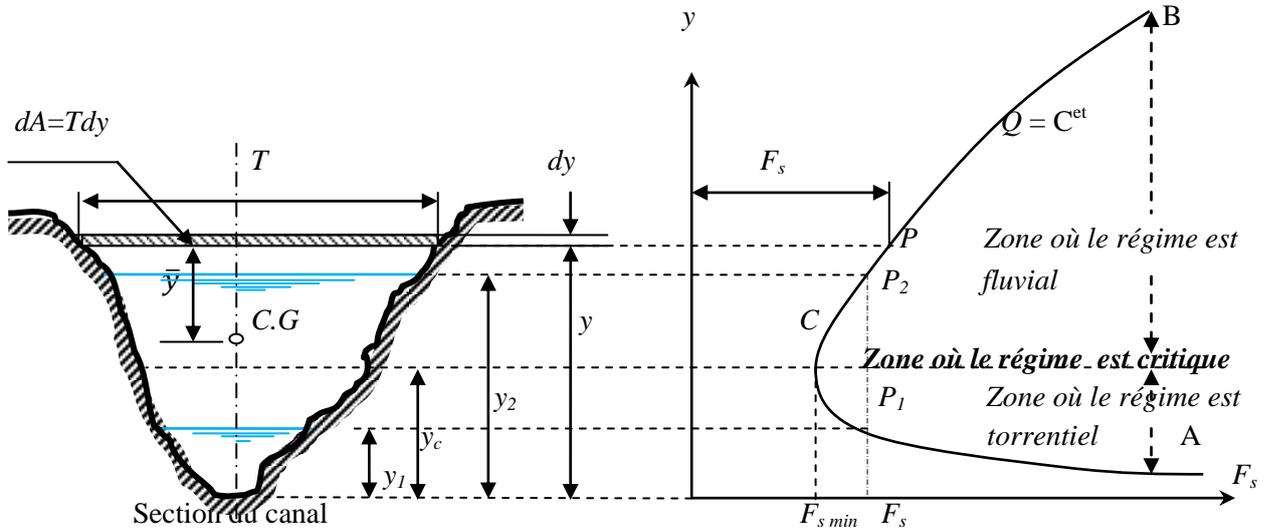


Figure II.13 : Courbe  $F_s(y)$  à  $Q$  constant ou "courbe de la force spécifique"

La courbe de la figure II.13, présente deux branches AC et BC. La branche AC se rapproche de l'axe des abscisses asymptotiquement vers une droite. Tandis que la branche BC s'élève vers le haut et s'étend indéfiniment vers une droite. Il peut être aperçu à partir de la courbe que pour une valeur donnée de la force spécifique, il existe deux profondeurs possibles  $y_1$  et  $y_2$  constituent les profondeurs conjuguées d'un ressaut hydraulique. Sur la courbe le point C correspond à la force spécifique minimale  $F_{s \min}$  et à une profondeur  $y_c$ .

### II.2.1.2.3. La force spécifique et la profondeur critique

Nous nous contentons ce qui indique dans le paragraphe précédent pour un débit localement constant,  $Q = C^{et}$ , l'expression donnée par la relation (II.46) montre que  $F_s \rightarrow \infty$  pour  $y \rightarrow 0$  ou  $y \rightarrow \infty$ . Entre ces deux valeurs 0 et  $\infty$ ,  $F_s$  passe donc par un minimum qui sera réalisé par la dérivation de l'équation (II.46) par rapport à  $y$ , puis d'examiner la quantité  $(dF_s/dy) = 0$ . Soit donc

$$\begin{aligned} \frac{dF_s}{dy} &= \frac{d}{dy} \left( A\bar{y} + \frac{Q^2}{gA} \right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dy} (A\bar{y}) + \frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2}{gA} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dF_s}{dy} &= \frac{d}{dy} (A\bar{y}) - \frac{Q^2}{g} \frac{1}{A^2} \frac{dA}{dy} = 0 \end{aligned} \quad (II.47)$$

Selon la figure II.13, près de la surface libre, on a  $(dA/dy) = T$ , où  $T$  est la largeur du canal à sa partie supérieure, la relation (II.47) s'écrit:

$$\frac{dF_s}{dy} = \frac{d}{dy}(A\bar{y}) - \frac{Q^2 T}{gA^2} = 0 \quad (II.48)$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus traduit par la quantité  $(d(A\bar{y})/dy)$ , exprime un accroissement du moment statique  $A\bar{y}$  de la section mouillée par rapport à la surface libre pour un accroissement  $dy$  de la profondeur. Soit de la figure II.13, le moment initial est défini par la quantité  $(A\bar{y})$  et après le changement de l'aire de la section mouillée par un accroissement  $dy$  de la profondeur, alors le moment de cette section est sera donné par la quantité  $[A(\bar{y} + dy) + (Tdy)\frac{dy}{2}]$ .

Donc nous pouvons aisément donner l'expression de l'accroissement du moment de la section mouillée par rapport à la surface libre pour un accroissement  $dy$  de la profondeur, par la relation suivante :

$$\frac{d}{dy}(A\bar{y}) = \frac{\left[ \left( A(\bar{y} + dy) + (Tdy)\frac{dy}{2} \right) - A\bar{y} \right]}{dy} \quad (II.49)$$

Après des simplifications et la négligence des termes d'ordre supérieur tel que  $(dy)^2 \approx 0$ , la relation (II.49) devient:

$$\frac{d}{dy}(A\bar{y}) = \frac{A(dy)}{dy} \quad (II.50)$$

En tenant compte de relation (II.50), la relation (II.48) s'écrit :

$$\frac{dF_s}{dy} = A - \frac{Q^2 T}{gA^2} = 0 \quad (II.51)$$

Les solutions de cette équation, présentent les valeurs extrêmes de la relation (II.46), présentées par le minimum  $C$  de la courbe de la figure II.13, qui est particulièrement important pour l'écoulement en régime critique. Cette dernière relation peut également s'écrire :

$$\frac{Q^2 T}{gA^3} = 1;$$

Cette dernière expression est déjà acquise par les développements des paragraphes **II.2.1.2** et **II.2.1.3** et qui est caractéristique du régime critique et cette expression se connue dans les ouvrages hydrauliques par la condition de criticité et ça solution est dite la profondeur critique, et celle-ci pourrais également s'écrite, comme suit :

$$\frac{1}{g} \left( \frac{Q}{A} \right)^2 \frac{T}{A} = 1 \quad (II.52)$$

Et en termes de vitesse moyenne,  $V = (Q/A)$ , et de la profondeur hydraulique  $y_h = (A/T)$ , alors l'équation (II.52) s'écrirait :

$$\frac{V^2}{gy_h} = 1 \quad (II.53)$$

Où

$$\frac{V}{\sqrt{gy_h}} = 1;$$

Cette dernière expression est bien évidemment donné physiquement l'égalité entre les forces d'inertie et les forces de la pesanteur, traduisant le fait que le nombre de Froude  $F_r$  égal à l'unité, ce qu'est correspond au régime d'un écoulement critique d'une profondeur égale à la profondeur critique  $y_c$ .

En définitive dans un canal sensiblement horizontal, lorsque la profondeur est égale à la profondeur critique, il y a simultanément du minimum de l'énergie spécifique et de celui de la force spécifique.

Et dans toutes les contributions mentionnées ci-dessus dans la section II.2.1.3, nous pouvons démontrer analytiquement si le nombre de Froude  $F_r = 1$ , est correspond à un minimum de la force spécifique  $F_s$ , pour cela il suffit de démontrer que la dérivée seconde de la fonction  $F_s$  donnée par la relation (II.46) par rapport au variable  $y$  est strictement positive, c'est-à-dire

$$\frac{d^2(F_s)}{dy^2} > 0;$$

Le calcul de la dérivée seconde menait à écrire :

$$\frac{d^2(F_s)}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dF_s}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( A - \frac{Q^2 T}{gA^2} \right) = \frac{dA(y)}{dy} - \frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2}{gA^2} T \right);$$

Cette dernière relation devient, après simplifications :

$$\frac{d^2(F_s)}{dy^2} = T + \frac{Q^2}{gA^3} \left( 2T^2 - A \frac{dT(y)}{dy} \right);$$

Et enfin cette dernière expression reste positive à condition la quantité de la relation suivante est positive c'est-à-dire :

$$2T^2 - A \left( \frac{dT}{dy} \right) > 0;$$

Etant donné que ( $A \neq 0$ ), l'inégalité ci-dessus est vérifié la propriété suivante :

$$\frac{2T^2}{A} > \frac{dT(y)}{dy} \quad (II.54)$$

L'inégalité présentée par la relation (II.54), est une condition généralement satisfaite pour que la dérivée seconde de la force spécifique  $F_s$  soit strictement positive. Par conséquent il existe une seule valeur extrême de la fonction  $F_s(y)$ , celle-ci est une valeur minimale, qui s'établit pour l'écoulement critique,  $Fr = 1$ .

Pour confirmer cette procédure, en considérant un canal prismatique à section triangulaire, présenté par la figure II.14, dont l'aire de la section mouillée est  $A(y) = my^2$  et la largeur en miroir  $T(y) = 2my$ , dont  $m$ , est la cotangente de l'angle d'inclinaison des parois du canal par rapport à l'horizontale.

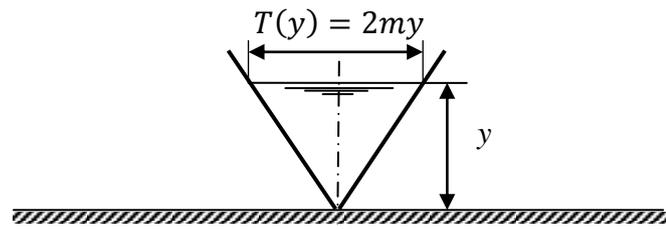


Figure II.14 : Profil du canal à section triangulaire

Donc pour déterminer si  $Fr = 1$  correspond à un minimum ou maximum de la fonction  $F_s(y)$ , la dérivée second doit être analysée par l'inégalité (II.54) ; qui traduit par :  $8m > 2m$ , évidemment cette expression est vérifiée, ce que signifie que  $F_s(y)$  atteint un minimum pour un nombre de Froude  $Fr$  égale à l'unité.

Retournons maintenant à l'équation (II.53) traduite par l'expression suivante :

$$\frac{V^2}{gy_h} = 1 ;$$

Cette relation est aussi trouvée et discutée par la section II.2.1.3. Celle-ci est vérifiée la propriété suivante :

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{y_h}{2} \quad (II.55)$$

Cette propriété est certifiée seulement dans le régime d'écoulement critique dans un canal à faible pente. Ce résultat s'exprime que l'énergie cinétique est égale à la moitié de la profondeur hydraulique moyenne.

En outre la résolution de l'équation (II.46) pour le débit  $Q$ , il peut être exprimée comme suit :

$$Q = \sqrt{(F_s - A\bar{y})gA} \quad (II.56)$$

Dans une section d'un canal donné et pour une valeur donnée de la force spécifique  $F_s$ , la condition de débit maximum peut être obtenue en mettant  $(dQ/dy)=0$ . Ainsi différencier l'équation (II.56) par rapport à  $y$  comme suit :

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{g \left[ F_s \left( \frac{dA}{dy} \right) - A \frac{d(A\bar{y})}{dy} - (A\bar{y}) \frac{dA}{dy} \right]}{2\sqrt{(F_s - A\bar{y})gA}} = 0 \quad (II.57)$$

La relation (II.57) est définie quand le numérateur de sa fraction est nulle, alors il vient que :

$$F_s \left( \frac{dA}{dy} \right) - A \frac{d(A\bar{y})}{dy} - (A\bar{y}) \frac{dA}{dy} = 0 \quad (II.58)$$

En substituant la relation (II.50) dans la relation (II.58) et comme,  $(dA/dy) = T$ , alors la relation (II.58) devienne :

$$\begin{aligned} F_s T - A A - (A\bar{y})T &= 0 \Leftrightarrow T(F_s - A\bar{y}) - A^2 = 0; \\ \Rightarrow (F_s - A\bar{y}) &= \frac{A^2}{T} \end{aligned} \quad (II.59)$$

Nous pouvons ainsi remplacer la relation (II.59) dans la relation (II.56) et après réarrangements, il vient que :

$$\frac{Q^2 T}{g A^3} = 1;$$

Le résultat correspondant à la relation trouvée ci-dessus, est encore le critère du régime critique de l'écoulement, ou bien la relation caractéristique de ceci, comme il est obtenu aux paragraphes précédents. Par conséquent, en écrivant que, pour une force spécifique donnée dans une section considérée d'un canal donné, le débit sera le maximum lorsque l'écoulement se trouve en régime critique. Dans cette relation, les paramètres  $A$  et  $T$  sont respectivement l'aire et la largeur superficielle de la section mouillée lorsque, dans cette section, la profondeur est égale à la profondeur critique  $y_c$  pour le débit considéré.

Compte-tenu de la forme géométrique de la section l'équation de la criticité traduite par la relation (II.30) est donc de la forme  $y_c = f(Q)$ . Autrement dit, dans un canal de forme donnée la profondeur critique ne dépend que du débit.

Ces résultats dans le contexte physique à des particularités primordiales dans l'intérêt du domaine hydraulique, concernant l'étude d'un écoulement en régime critique. Alors d'une manière définitive, le minimum de l'énergie spécifique et celui de la force spécifique est correspond un régime d'écoulement, dite le régime critique, et celui-ci est régné par une équation présentée précédemment par la relation (II.30).

Comme il été indiquer dans les sections précédentes les différentes caractéristiques de l'état critique d'un l'écoulement à travers une section d'un canal donné sensiblement horizontale, sont les suivantes:

**1.** L'énergie spécifique est minimale pour un débit donné (figure II.7) ;

2. Le débit est maximum pour une énergie spécifique donnée (figure II.6) ;
3. La force spécifique est minimale pour un débit donné (figure II.13) ;
4. Le débit est maximum pour une force spécifique donnée lorsque l'écoulement se trouve en régime critique ;
5. La charge cinétique est égale à la moitié de la profondeur hydraulique dans un canal à faible pente, (équation II.55) ;
6. Le nombre de Froude est égal à l'unité ;
7. Le régime critique est souvent instable due aux fluctuations de la surface libre, comme le montre la courbe  $H_s(y)$  (figure II.8), au voisinage de sommet  $M$  une petite variation de l'énergie  $H_s$  provoque des variations sensibles de profondeur de part et d'autre de  $y_c$  ;
8. L'écoulement ayant une vitesse moyenne critique  $V_c$ , égale à la quantité définie par  $\sqrt{gy_h}$  s'exprime la célérité, avec laquelle se propage une onde de gravité, qui est long et de faible amplitude ;
9. Par définition, au régime critique la charge spécifique  $H_s$  est minimale, c'est-à-dire  $dH_s = 0$ . En différentiant et en égalant à zéro l'équation (II.24) :

$$H_s = y + \frac{V^2}{2g};$$

Il vient :

$$dy + d\left(\frac{V^2}{2g}\right) = 0.$$

Ce qui montre qu'au voisinage du régime critique il s'établit une sorte de compensation entre la profondeur et l'énergie cinétique, les variations de ces deux grandeurs étant égales et opposées.

10. Compte-tenu de la forme géométrique de la section l'équation de la criticité traduite par la relation (II.30) est donc de la forme  $y_c = f(Q)$ . Ce là veut dire, que dans un canal de forme donnée la profondeur critique ne dépend que du débit.

Maintenant on faire halte vers l'application de la notion respectivement d'énergie spécifique et celle de la force spécifique, par un choix porter sur un canal de forme rectangulaire.

## II.2.2. Section de forme rectangulaire :

Pour plus de simplicité, dans cette présente section nous allons établir les expressions des caractéristiques d'écoulement en régime critique dans un canal ayant une section transversale rectangulaire, pour un débit donné  $Q$ , par l'utilisation respectivement de la notion de charge spécifique et celle de la force spécifique.

### II.2.2.1. Energie spécifique

En appliquant la notion de l'énergie spécifique développée dans les sections précédentes sur un canal ayant une section transversale rectangulaire.

#### II.2.2.1.1. Les caractéristique d'écoulement critique dans un canal rectangulaire

Sous les mêmes considérations que nous l'avons fait dans ce présent chapitre, pour un canal rectangulaire de largeur  $b$ . Ce canal ayant une répartition de pression hydrostatique et une distribution des vitesses uniforme, alors l'énergie spécifique de la relation (II.25) peut être s'écrite comme :

$$H_s = y + \frac{V^2}{2g} \quad (II.60)$$

Ou bien

$$H_s = y + \frac{Q^2}{2g(by)^2} = y + \frac{(qb)^2}{2g(by)^2} = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (II.61)$$

Dont les paramètres  $y$  et  $q$  sont respectivement la profondeur d'écoulement et le débit par unité de largeur où  $q = (Q/b)$ . Nous savons dans un écoulement en régime critique, la l'énergie spécifique  $H_s$  admet un minimum,  $H_{s\ min}$ , pour  $q$  donnée au point où la profondeur d'écoulement prend la valeur  $y_c$ . Par conséquent, en différenciant l'équation. (II-61) par rapport à  $y$  et en égalant l'expression obtenue à zéro, on obtient

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0 \quad (II.62)$$

Selon la définition ci-dessus, la profondeur à laquelle  $H_s$  est minimale appelée profondeur critique,  $y_c$ , qui définit comme étant la solution de l'équation (II.62), traduite par la condition de criticité,  $(q^2/gy_c^3) = 1$ , d'un régime d'écoulement. Par conséquent la valeur de la profondeur critique est donnée comme suit :

$$y_c = \sqrt[3]{q/g} \quad (II.63)$$

Cette relation est l'expression de l'un des paramètres les plus importants des caractéristiques de l'écoulement critique dans un canal de section rectangulaire, et peut être déterminée si le débit par unité de largeur est connu.

Quand  $(dH_s/dy) = 0$ , la charge spécifique  $H_s$  est strictement admet un minimum assuré par la valeur positive de la dérivée seconde de celle-ci par rapport à la profondeur critique de la manière suivante :

$$\frac{d^2 H_s}{dy^2} = \frac{3q^2}{gy_c^4} \quad (II.64)$$

Et le remplacement de la valeur de,  $y_c$  de la relation (II.63) dans l'équation (II.64), en obtient l'expression suivante :

$$\frac{d^2 H_s}{dy^2} = \frac{3}{y_c} \quad (II.65)$$

Ce résultat a été également prouvé par l'application d'inégalité présentée par la relation (II.38), donné comme suit :

$$\frac{3T^2}{A} > \frac{d(T(y))}{dy} \Leftrightarrow \frac{3b^2}{by} > \frac{d(b)}{dy} = 0;$$

où la largeur au miroir  $T$ , égale à largeur  $b$ , du canal ;

Effectivement pour,  $y = y_c$ , la quantité  $(3b/y_c)$  est strictement positive.

Comme des résultats importants, en peut déduire de la relation (II.63), les propriétés de l'écoulement critique suivantes :

1. Il résulte de la relation (II.63) que

$$q^2 = gy_c^3 \quad (II.66)$$

En premier part, cette dernière relation est la résultante de la relation (II.28b), pour donner la valeur de débit maximum par unité de largeur dans un canal de forme rectangulaire, tel que :

$$\frac{Q_{max}}{A} = \sqrt{gy_{hc}} \Leftrightarrow q_{max} = g^{1/2} y_{hc}^{3/2} \Rightarrow q_{max}^2 = gy_{hc}^3 \text{ ou } q_{max} = \sqrt{gy_c^3} \quad (II.67)$$

Notons dans le cas d'un canal de forme rectangulaire la profondeur hydraulique moyenne critique,  $y_{hc}$ , est également celui de la profondeur critique, car les paramètres  $T$  et  $b$  sont égaux.

En second part, si en désignant  $V_c$  comme la vitesse critique de l'écoulement en régime critique, en peut déduire de la relation (II.66), l'expression suivante :

$$\frac{V_c^2}{2g} = \frac{1}{2} y_c \quad \text{où } y_c = 2 \left( \frac{V_c^2}{2g} \right) \quad (II.68)$$

Par conséquent la charge cinétique critique est égale à la moitié de la profondeur critique. Ou bien la profondeur critique  $y_c$  a comme valeur double de hauteur d'énergie cinétique.

2. En substituant l'équation (II.68) dans l'équation (II.60), on obtient ce qui suit :

$$H_{s_{min}} = H_{s_c} = H_s(y_c) = y_c + \frac{1}{2}y_c = \frac{3}{2}y_c ;$$

Où à

$$y_c = \frac{2}{3}H_{s_c} \quad (II.69)$$

Cela veut dire que la profondeur critique d'écoulement dans un canal rectangulaire est égale à deux tiers de la charge spécifique critique. Et ainsi en peut déduire de l'équation (II.68) et celle de l'équation (II.69) l'égalité suivantes

$$\frac{V_c^2}{2g} = \frac{1}{3}H_{s_c} \quad (II.70)$$

3. Il résulte de l'équation (II.68) que :

$$V_c^2 = gy_c ;$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 ;$$

Où le nombre de Froude.

$$Fr = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 ;$$

Cette équation. montre que le nombre de Froude,  $Fr = 1$  à écoulement critique.

Pour résumer, il résulte d'après les expressions données par les relations (II.63), (II.67) et (II.69) que les caractéristiques de l'écoulement critique dans un canal rectangulaire sont :

$$a) \quad y_c = \frac{2}{3}H_{s_c} = \frac{V_c^2}{g} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} ;$$

$$b) \quad H_{s_{min}} = H_{s_c} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} ;$$

$$c) \quad q_{max} = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{g \left(\frac{2}{3}H_{s_c}\right)^3} ;$$

$$d) \quad \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = Fr = 1 ;$$

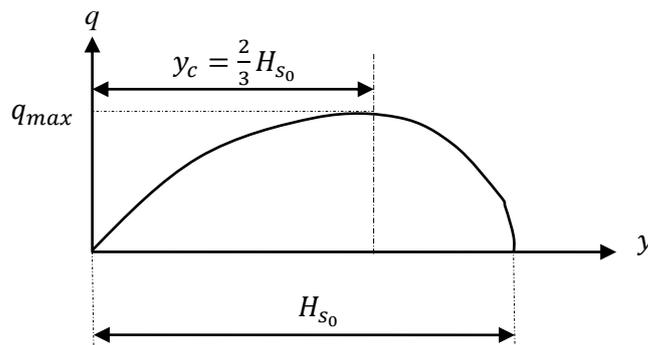
$$e) \quad \frac{V_c^2}{2g} = \frac{1}{3}H_{s_c} ;$$

f) L'écoulement fluvial ou sub-critique a lieu quand  $Fr < 1$  et  $y/y_c > 1$ .

g) L'écoulement torrentiel ou sur-critique quand  $Fr > 1$  et  $y/y_c < 1$

### II.2.2.1.2. Les caractéristique de débit par unité de largeur

Les équations ci-dessus sont établies en tenant compte de la variation de  $H_s$  avec  $y$  pour un débit unitaire  $q$  donné. C'est aussi un intérêt pratique pour étudier comment varie le débit unitaire  $q$  en fonction de  $y$  sous une charge spécifique donnée,  $H_s = H_{s_0} = C^{et}$ . Évidemment la courbe sera de la forme générale représentée sur la figure II.15, et quand le paramètre  $y \rightarrow H_{s_0}$ , alors la vitesse de l'écoulement,  $V \rightarrow 0$  et donc le débit unitaire,  $q \rightarrow 0$ . Similaire sont quand  $y \rightarrow 0, q \rightarrow 0$ , et il sera sans aucun doute une valeur maximale de  $q$  pour une certaine valeur de  $y$  entre 0 et  $H_{s_0}$ . (Manifestement  $y$  ne peut pas être supérieure à  $H_{s_0}$ ).



**Figure II.15 :** Courbe  $q(y)$  pour  $H_s$  constant

(Extrait de F.M, Henderson, *Open Channel Flow*, 1966)

Nous trouvons ce maximum refonte équation (II.61) pour une charge spécifique donnée,  $H_s = H_{s_0} = C^{et}$  telle que :

$$q^2 = 2gy^2(H_{s_0} - y) \quad (II.71)$$

Cette fonction doit atteindre forcément un extrême traduit par la valeur maximale de débit unitaire  $q_{max}$ , ce qui exige  $dq/dy = 0$ . En annulant la dérivée de l'équation (II.71) par rapport au variable  $y$ , soit :

$$q \frac{dq}{qy} = gy(2H_{s_0} - 3y) \quad (II.72)$$

Assimiler la dérivée à zéro et en simplifiant, nous obtenons l'équation suivante :

$$y(2H_{s_0} - 3y) = 0 \quad (II.73)$$

Cette équation admet deux solutions :  $y = 0$  et  $y = \frac{2}{3}H_{s_0}$

Nous avons discuté précédemment que  $q = 0$ , lorsque  $y = 0$ . Par conséquent, ne sera pas obtenir des informations plus par l'étude de cette racine plus loin. La seconde racine donne la même profondeur que la profondeur critique donnée par la relation (II.69). Donc nous avons mise en place d'une autre propriété importante de l'écoulement critique, il est non seulement

de la charge spécifique minimale pour un débit unitaire, mais aussi le débit maximal par unité de largeur pour une charge spécifique donnée.

Le maximum de débit par unité de largeur est simplement affirmé par la deuxième dérivée de l'équation (II.72) ;

$$\frac{d^2q}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dq}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{gy(2H_{s_0} - 3y)}{q} \right) = \frac{g}{q} (2H_{s_0} - 3y);$$

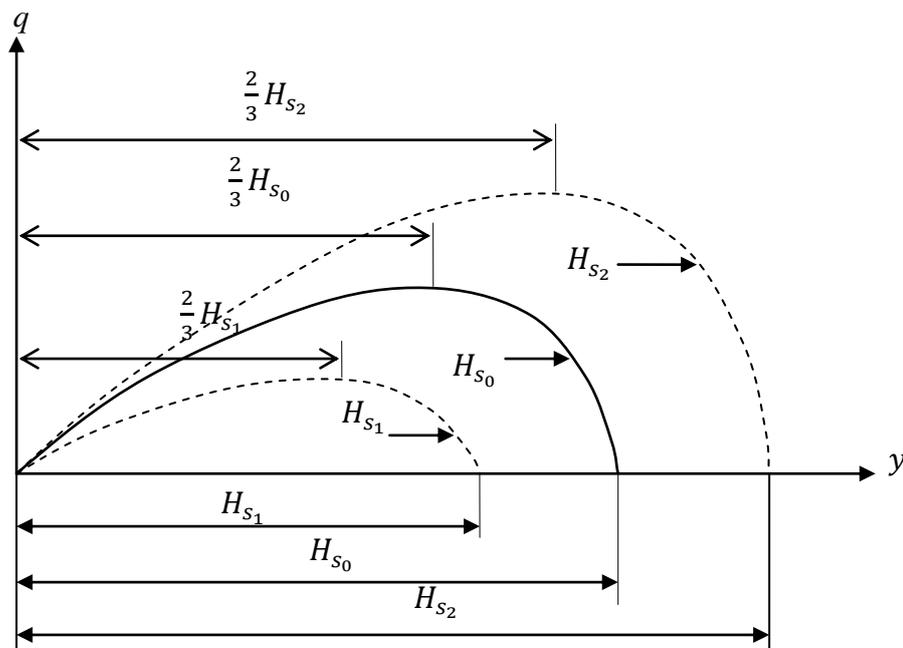
En vertu de la relation  $y = \frac{2}{3}H_{s_0}$ , dans l'expression ci-dessus par suite :

$$\frac{d^2q}{dy^2} = -\frac{2g}{q}H_{s_0} \quad (II.74)$$

Il est clair à partir de cette équation que la dérivée seconde de  $q$  par rapport à  $y$  est toujours négatif, ce que signifie, que pour une charge spécifique donnée,  $q(y)$  atteint un maximum à la profondeur critique,  $y_c$ . Une expression de débit maximal par unité de largeur peut être obtenue par remplacement,  $y = \frac{2}{3}H_{s_0}$ , dans l'équation (II.71), puis la simplification de l'expression résultante. Cette procédure mène à la relation suivante :

$$q_{max}^2 = \frac{8}{27}gH_{s_0}^3 \quad (II.75)$$

Sur la base des relations qui précèdent, une courbe typique  $q(y)$  pour  $H_{s_0}$  spécifiée, peut être tracée comme indiqué sur la figure II.16. Les courbes,  $q(y)$  pour deux autres valeurs d'énergie spécifique, telle que  $H_{s_1} < H_{s_0} < H_{s_2}$ , sont également représentés sur cette figure.



**Figure II.16 :** Variation de débit par unité de largeur

(Extrait de M. Hanif Chaudhry, *Open-Channel Flow*, 2008)

**Exemple d'application II.1.**

Un écoulement dans canal rectangulaire de 9 m de large et de 1,00 m de profondeur d'un débit de 7,6 m<sup>3</sup>/s.

- 1) Quelle est l'énergie spécifique ?
- 2) L'écoulement est-il fluvial ou torrentiel ?

**Solution**

$$(a) \quad H_s = y + \frac{V^2}{2g} = y + \left(\frac{1}{2g}\right) \left(\frac{Q}{A}\right)^2 = 1,00 + \left(\frac{1}{2 \times 9,81}\right) \left(\frac{7,6}{9 \times 1}\right)^2 = 1,04 \text{ m}$$

$$(b) \quad y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{\left(7,6/9\right)^2 / 9,81} = 0,417 \text{ m}$$

L'écoulement est fluvial puisque la profondeur de l'eau dépasse la profondeur critique, tel que  $y > y_c$ .

**Exemple d'application II.2.**

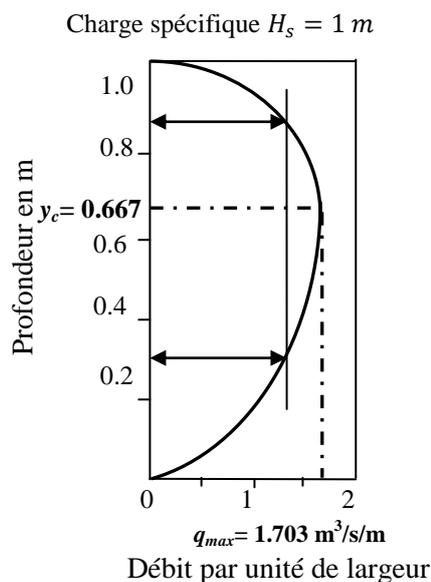
Considérons un débit  $Q$ , passant à travers un canal de section rectangulaire de largeur  $b$ . En tenant compte d'étudier la variation de débit unitaire  $q$  avec  $y$  sous une charge spécifique donnée,  $H_s = H_{s_0} = C^{\text{et}}$ . Le débit par unité de largeur égal à  $((Q/b) = q)$ .

$$H_s = y + \frac{V^2}{2g} = y + \left(\frac{1}{2g}\right) \left(\frac{q}{y}\right)^2$$

Puisque  $q = by$

De l'équation précédente on a :

$$q = \sqrt{2gy^2(H_s - y)} ;$$



**Figure II.17 :** La courbe de débit spécifique

Évidemment la courbe sera de la forme générale représentée sur la figure II.17, cette courbe est tracée pour  $H_s = 1 \text{ m}$  et lorsque le paramètre  $y \rightarrow H_{s_0}$ , alors la vitesse de l'écoulement,  $V \rightarrow 0$  et donc le débit unitaire,  $q \rightarrow 0$ . Similaire sont quand  $y \rightarrow 0, q \rightarrow 0$ , et il sera sans aucun doute une valeur maximale de  $q$  pour une certaine valeur de  $y$  comprise entre 0 et  $H_{s_0}$  (Manifestement  $y$  ne peut pas être supérieure à  $H_{s_0}$ ), celle-ci est appelée la profondeur critique. La figure II.17, montre que le même débit  $Q$  peut se produire à deux profondeurs  $y_1$  et  $y_2$ , ils sont connus par les profondeurs conjuguées de débit et de solutions de l'équation :

$$H_s = y + \frac{q^2}{2gy^2};$$

La valeur de débit  $q$  est maximum quand  $y_c = 2/3H_s$ .

Alors on peut écrire les résultats suivants :

$$\frac{q_{max}^2}{2gy_c^2} = \frac{1}{3}H_s \Leftrightarrow q_{max}^2 = 2gy_c^2 \times \frac{1}{3}H_s = 2g \times \frac{4}{9}H_s^2 \times \frac{1}{3}H_s;$$

Or

$$q_{max} = \sqrt{2g} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{27}}H_s^{3/2} = 1,703H_s^{3/2}.$$

Cette équation s'applique à l'écoulement sur un déversoir à seuil épais comme il est montré par figure II.18.

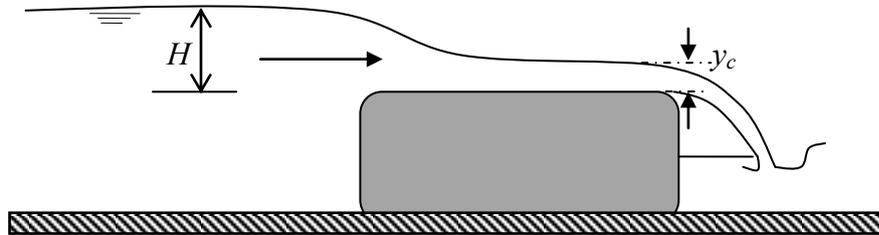


Figure II.18 : Ecoulement sur déversoir à seuil épais

### II.2.2.2. force spécifique

L'application de la notion de force spécifique,  $F_s$ , d'un écoulement de débit volume  $Q$ , localement constant véhiculant un canal de section rectangulaire de largeur  $b$ , c'est le même procédé traité et discuté dans la section (II.2.1.2.1). Dans ce sens l'application de la relation (II.46) mène à écrire :

$$F_s = A\bar{y} + \frac{Q^2}{gA} = by \left( \frac{1}{2}y \right) + \frac{(qb)^2}{gby} = \frac{1}{2}by^2 + \frac{q^2}{gy}b;$$

Où  $\bar{y}$  est la position du centre de gravité des sections  $A$  par rapport à la surface libre de l'écoulement de cette section

Ou d'une manière générale :

$$F_s = \frac{1}{2}y^2 + \frac{q^2}{gy} \quad (II.76)$$

On démontre que la valeur minimum de la force spécifique correspond à la profondeur critique par différentiation de  $F_s$  de l'équation (II.76) par rapport à  $y$  et en égalisant à zéro, nous obtenons

$$\frac{dF_s}{dy} = y - \frac{q^2}{gy^2} = 0 \quad (II.77)$$

Les solutions de cette équation, présentent les valeurs extrêmes de la relation (II.77). La solution est présentée par :  $y = y_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ .

Notant que  $V = q/y$ , cette équation peut être écrite, en utilisant l'expression de la profondeur critique :

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2}y \quad (II.78)$$

Cette équation est la même que l'équation (II.68), qui est valable lorsque l'écoulement est en régime critique. Pour déterminer si  $F_s$ , est maximale ou minimale au profondeur critique, nous différencier l'équation (II.77) par rapport au variable  $y$  et on substituer à nouveau  $y = y_c$ .

Cela la procédure donne :

$$\frac{d^2F_s}{dy^2} = 1 + \frac{2q^2}{gy_c^3} \quad (II.79)$$

La partie droite de cette équation toujours positif, la force spécifique est minimale à la profondeur critique, de la même façon en montrant par l'application de l'inégalité (II.54) tel que :

$$\frac{2T^2}{A} > \frac{dT(y)}{dy};$$

Etant  $T = b$

$$\Rightarrow \frac{2b^2}{by} > 0 \Rightarrow \frac{2b}{y_c} > 0;$$

Cette condition est vérifiée, alors la force spécifique admet un extrême minimal correspondant un écoulement critique.

**Exemple d'application II.3.**

La section transversale d'une rivière est rectangulaire de largeur  $b$  égale à 25 m. A un point où le lit de la rivière est horizontale, les piliers du pont ont rétréci la largeur à 20 m. Un débit de  $Q = 400 \text{ m}^3/\text{s}$  ; c'est passé sous le pont avec une profondeur amont ascendante minimale. Etant donné que ceci se produit quand l'écoulement sous le pont est en régime critique, déterminer :

- 1- La profondeur de l'eau sous le pont ;
- 2- La profondeur de l'eau en amont.

**Solution**

1- Désignant les conditions ascendantes par le suffixe 1, et ceux sous le pont par le suffixe 2. L'écoulement sous le pont est en régime critique. Par conséquent, de la (figure II.8 de la section II.2.1.1.3),  $y_1 > y_2$ . En outre  $V_2 = \sqrt{gy_2}$ , et à partir de l'équation de la continuité :

$$Q = b_2 y_2 V_2 = b_2 g^{1/2} y_2^{3/2} ;$$

Alors

$$y_2 = \left( \frac{Q}{b_2 g^{1/2}} \right)^{2/3} = \left( \frac{400}{20 \cdot 9,81^{1/2}} \right)^{2/3} = 3,44 \text{ m} ;$$

Selon le principe de la conservation de la charge on a :

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = y_2 + \frac{y_2}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)y_2 ;$$

Ou

$$y_1 + \frac{1}{2g} \left( \frac{Q}{y_1 b_1} \right)^2 = \frac{3y_2}{2}$$

Et par suite :

$$y_1 + \frac{1}{2 \times 9,81} \left( \frac{400}{25 y_1} \right)^2 = \frac{3 \times 3,44}{2}$$

Après simplifications et réarrangements, la relation précédente prend la forme suivante :

$$y_1^3 - 5,16 y_1^2 + 13,05 = 0$$

Nous obtenons ainsi une relation linéaire de troisième ordre, on admet la résolution par la méthode des approximations successives, qui a donné la solution exacte :

$$y_1 = 4,522 \text{ m}.$$

### II.2.2.3. La courbe de la charge spécifique sous la forme adimensionnelle:

La courbe de la charge spécifique présentée sur la figure II.9 (section II.2.1.1.4. Courbe  $H_s(y)$  pour  $Q$  constant) montre la variation de la charge spécifique en fonction de la profondeur d'écoulement  $y$ , pour un débit localement donné  $Q$ .

Pour un débit différent, mais toujours reste invariable, la courbe relative  $H_s(y)$  serait de forme similaire, mais la valeur de la charge spécifique  $H_s$  correspond à chaque valeur de la profondeur  $y$ , serait bien sûr différente. Une courbe plus générale, applicable à toute valeur de débit unitaire  $q$ , peut être obtenue en réduisant l'équation (II.61), à une forme adimensionnelle, dont nous rappelons que l'équation (II.61) s'exprime comme suit :

$$H_s = y + \frac{Q^2}{2g(by)^2} = y + \frac{(qb)^2}{2g(by)^2} = y + \frac{q^2}{2gy^2}$$

En rapportant celle-ci par le paramètre de profondeur critique est transformée, en tenant compte de fait que la profondeur critique  $y_c$  de l'écoulement dans un canal de section droite rectangulaire s'écrit selon la relation (II.63),  $y_c = \sqrt[3]{q^2/g}$  :

$$\frac{H_s}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2} \left( \frac{y_c}{y} \right)^2 \quad (II.80)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels  $\phi_1 = H_s/y_c$  et  $\phi_2 = y/y_c$ , la relation (II.80) s'écrit :

$$\phi_1 = \phi_2^{-1} + \frac{1}{2} \phi_2^2 \quad (II.81)$$

Soit :

$$\phi_2^3 - 2\phi_1\phi_2 + 2 = 0 \quad (II.82)$$

La relation (II.82) est une équation de troisième degré permet ainsi le calcul explicite du paramètre adimensionnel  $\phi_2 = y/y_c$ , lié à la profondeur critique d'écoulement  $y_c$ , en fonction du paramètre  $\phi_1 = H_s/y_c$ , dont la valeur est généralement connue en pratique par la valeur de débit volume  $Q$ . Le caractère critique de l'écoulement dans un canal de section droite rectangulaire, conduit à écrire  $\phi_1 = 3/2$ , traduisant la valeur de la charge spécifique minimale, et la relation (II.82) devient :

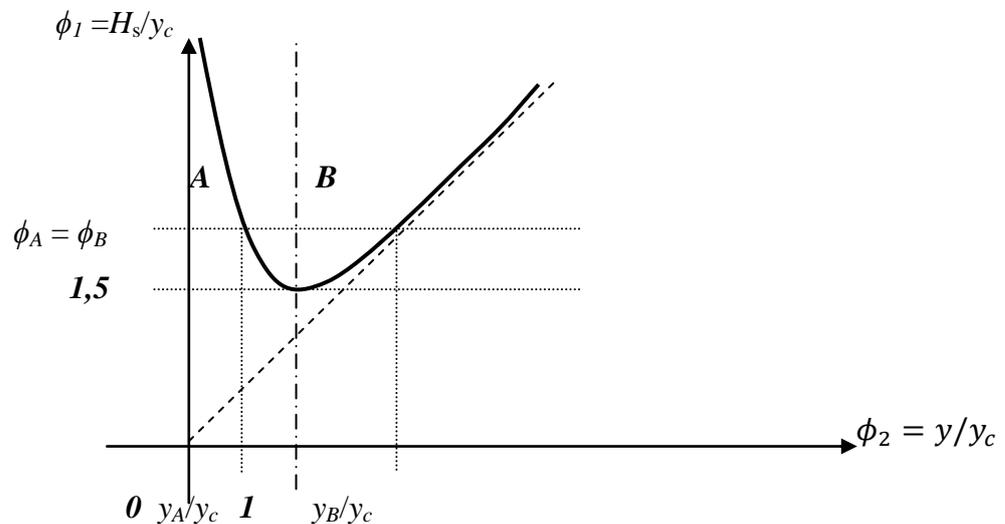
$$\phi_2^3 - 3\phi_2 + 2 = 0 \quad (II.83)$$

Nous obtenons ainsi une équation de troisième degré en  $\phi_2$ , sans terme du second ordre et le discriminant de cette équation soit :

$$\Delta = -(2)^2(-3)^3 - (3)^2(2)^2 = 0$$

Le discriminant est nul, alors l'équation possède une racine double ou triple et l'équation (II.83) peut s'écrire sous la forme suivante:  $(\phi_2 - 1)^2(\phi_2 + 2) = 0$ , il est évident de cette forme il apparaît que l'équation physiquement admet une racine double présentée par  $\phi_2 = 1$ . Cette solution montre que la profondeur correspond à la charge spécifique minimale est la profondeur critique.

La figure ci-dessous présente la relation adimensionnelle (II.82), pour ce type de diagramme, nous pouvons déterminer les deux valeurs possibles  $\phi_2 = y/y_c$ , l'une supérieure à l'unité et l'autre inférieure à l'unité comme indiqué l'exemple par les points **A** et **B** de la figure (II.19) correspondant à une valeur particulier,  $\phi_1 = H_s/y_c$  et les profondeurs correspondantes ces point sont les profondeurs correspondantes.



**Figure II.19** : Courbe  $H_s/y_c$  en fonction de  $y/y_c$  à  $Q$  constant

De la même manière la figure (II.8) montre une relation entre le débit et la profondeur pour une charge spécifique donnée exprimée par la relation (II.61). Celle-ci peut être déduite en terme adimensionnel en la divisant par le paramètre de débit unitaire maximal  $q_{max}^2$  est transformée, en tenant compte de fait que la valeur de débit maximum par unité de largeur dans un canal de forme rectangulaire, s'écrit  $q_{max}^2 = gy_c^3$ , soit:

$$\frac{H_s}{q_{max}^2} = \frac{y}{q_{max}^2} + \frac{1}{2gy^2} \left( \frac{q}{q_{max}} \right)^2 ;$$

Or

$$\frac{H_s}{gy_c^3} = \frac{y}{gy_c^3} + \frac{1}{2gy^2} \left( \frac{q}{q_{max}} \right)^2 ;$$

En multipliant cette dernière relation par  $gy_c^2$ , et compte tenu du fait que  $H_s/y_c = 3/2$  il vient que :

$$\frac{3}{2} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2} \left( \frac{y_c}{y} \right)^2 \left( \frac{q}{q_{max}} \right)^2 ;$$

Après simplification et réarrangement, la relation précédente devient :

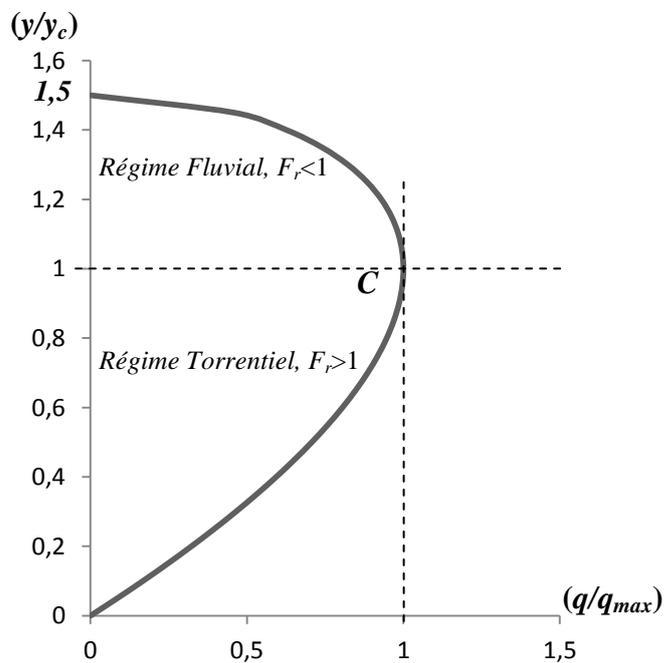
$$\left( \frac{q}{q_{max}} \right)^2 = 3 \left( \frac{y}{y_c} \right)^2 - 2 \left( \frac{y}{y_c} \right)^3 \quad (II.84)$$

La relation (II.84) traduit le fait que la profondeur  $y$  de l'écoulement est égale à la profondeur critique  $y_c$ , la valeur de débit par unité de largeur du canal est exclusivement la valeur maximale, c'est-à-dire  $q = q_{max}$ . En introduisant les paramètres adimensionnels  $\phi_3 = H_s/y_c$  et  $\phi_2 = y/y_c$  et  $\phi_3 = q/q_{max}$ , la relation (II.84) s'écrit :

$$\phi_3 = (3\phi_2^2 - 2\phi_2^3)^{1/2} \quad (II.85)$$

**Tableau II.1 :**  $(q/q_{max}) = f(y/y_c)$  selon la relation (II.85)

N°	$(q/q_{max})$	$(y/y_c)$
01	0,00	0,00
02	0,085	0,05
03	0,167	0,1
04	0,246	0,15
05	0,322	0,2
06	0,395	0,25
07	0,464	0,3
08	0,530	0,35
09	0,593	0,4
10	0,652	0,45
11	0,707	0,5
12	0,758	0,55
13	0,804	0,6
14	0,847	0,65
15	0,885	0,7
16	0,918	0,75
17	0,946	0,8
18	0,969	0,85
19	0,985	0,9
20	0,996	0,95
21	1,00	1,00
22	0,996	1,05
23	0,983	1,1
24	0,962	1,15
25	0,929	1,2
26	0,883	1,25
27	0,822	1,3
28	0,739	1,35
29	0,626	1,4
30	0,458	1,45
31	0,00	1,50



**Figure II.20 :** Courbe  $q/q_{max}$  en fonction de  $y/y_c$  à  $H_s$  constant

Les calculs obtenus regroupés dans le tableau ci-dessus par l'application de la relation (II.85) ont montrés que la présentation graphique de la relation (II.8) prend la même allure du diagramme de la figure (II.8) de section (II.2.1.1.3. Courbe  $y(Q)$  pour  $H_s$  constant).

Nous pouvons considérer les diagrammes des figures (II.17) et (II.18) respectivement comme des versions des diagrammes universelles de la courbe  $H_s(y)$  pour  $Q$  constant de la figure II.9 et la courbe  $y(Q)$  pour  $H_s$  constant de la figure II. 8. On y distingue les trois régimes connus de l'écoulement : fluvial, torrentiel et critique. Sur les figures II.19 et II.20 nous avons fait figurer, en trait discontinu, la droite limite pratique définis par le régime critique et délimitant les deux régimes de l'écoulement fluvial et torrentiel.

Le régime fluvial, correspond à  $y/y_c > 1$ , et le régime torrentiel ainsi correspond à  $0 < y/y_c < 1$ . Le diagramme de la figure II.20, montre que dans l'ensemble du régime d'écoulement à surface libre. C'est, transformé en variable adimensionnelles, la courbe  $y(Q)$  pour  $H_s$  constant qui a été définie à la section II.2.1.1.3. Compte tenu de l'utilisation des variables adimensionnelles  $\phi_2$  et  $\phi_3$ , la courbe  $\phi_3 = f(\phi_2)$  est valable pour un canal de forme rectangulaire, de dimensions et de débit quelconques. Le sommet  $C$ , est une caractéristique de la courbe correspond à la valeur maximale de  $\phi_3$  obtenue en annulant la dérivée de la relation (II.85), soit :

$$(\phi_3)' = \frac{3(1 - \phi_2)}{\sqrt{3 - 2\phi_2}} = 0 ;$$

Les solutions de cette équation, présentent les valeurs extrêmes de la relation (II.85), présentées par le maximum  $C$  de la courbe, une seule solution de l'équation se consiste dans la valeur de  $\phi_2 = 1$ , et la valeur correspondante de paramètre  $\phi_3 = 1$ , est donnée par la relation (II.85). Et le point  $C$  avait un intérêt représentatif du régime critique.

Dans ce contexte on peut établir une autre relation possède la même forme que celle (II.85), mais avec une meilleure définition des paramètres qui la composent, après avoir l'introduction le nombre de *Froude*  $F_r$ , soit :

La charge spécifique dans une section transversale de l'écoulement est :

$$H_s = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{V.V}{2g} = y + \frac{V.V}{2\sqrt{g}\sqrt{g}} ;$$

En divisant par  $y$  les deux membres de la relation précédente il vient :

$$\frac{H_s}{y} = \frac{y}{y} + \frac{V.V}{2\sqrt{gy}\sqrt{gy}} ;$$

Avec  $F_r = V/\sqrt{gy}$ , nombre de *Froude* caractéristique de l'écoulement, d'où on déduit :

$$\frac{H_s}{y} = 1 + \frac{F_r^2}{2} \quad (II.86)$$

Rappelons que le débit unitaire  $q$  est donné par la relation (II.71), soit  $q = \sqrt{2gy^2(H_s - y)}$ , pour les valeurs connues des paramètres  $y$  et  $H_s$ .

En reportant la relation (II.86) dans l'expression du débit unitaire, on obtient après simplification :

$$q = \sqrt{gy^3} F_r \quad (II.87)$$

Cette dernière relation conduit à écrire la relation (II.85) des variables adimensionnelles comme suit :

$$\phi_3 = (\phi_2)^{3/2} \cdot F_r \quad (II.88)$$

Ou

$$F_r = \frac{\phi_3}{(\phi_2)^{3/2}} \quad (II.89)$$

Cette relation liant étroitement le nombre de *Froude*  $F_r$  et les variables adimensionnelles  $\phi_2$  et  $\phi_3$  qui permettent de graduer les deux branches de la courbe (II.20) via le tableau de valeurs suivant :

**Tableau II.2 :**  $(q/q_{max}) = f(y/y_c)$  selon la relation (II.85) et les valeurs de nombre de *Froude*  $F_r$  selon la relation (II.89).

N°	$(q/q_{max})$	$(y/y_c)$	$F_r$
01	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	-
02	0,085	0,05	7,615
03	0,167	0,10	5,291
04	0,246	0,15	4,242
05	0,322	0,20	3,605
06	0,395	0,25	3,162
07	0,464	0,30	2,828
08	0,530	0,35	2,563
09	0,593	0,40	2,345
10	0,652	0,45	2,160
11	0,707	0,50	2,00
12	0,758	0,55	1,858
13	0,804	0,60	1,732
14	0,847	0,65	1,617
15	0,885	0,70	1,511
16	0,918	0,75	1,414
17	0,946	0,80	1,322
18	0,969	0,85	1,236
19	0,985	0,90	1,154
20	0,996	0,95	1,0767
21	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>
22	0,996	1,05	0,925
23	0,983	1,1	0,852

N°	$(q/q_{max})$	$(y/y_c)$	$F_r$
24	0,962	1,15	0,780
25	0,929	1,2	0,707
26	0,883	1,25	0,632
27	0,822	1,3	0,554
28	0,739	1,35	0,471
29	0,626	1,4	0,377
30	0,458	1,45	0,262
31	0,00	1,50	0,00

Il ressort de ce tableau en particulier ; que les valeurs de nombre de Froude  $F_r$ , calculées par la relation trouvées (II.89) pour une série des coordonnées  $(\phi_2, \phi_3)$ , sont réparties sur deux branches de la courbe présentée sur la figure (II.20). La première branche correspond au nombre de Froude  $F_r$ , supérieur à l'unité qui représente le régime torrentiel de l'écoulement, et la deuxième branche correspond au nombre de Froude  $F_r$ , inférieur à l'unité et celle-ci présente le régime fluvial de l'écoulement. Il faut également noter que le sommet C, correspond à la valeur maximale de paramètre adimensionnel  $\phi_3$ , représente également le régime critique qui correspond au nombre de Froude  $F_r$  égal à l'unité.

#### **Exemple d'application II.4.**

On considère un canal de section rectangulaire de largeur  $b = 2 \text{ m}$  et de profondeur d'écoulement incident  $y_1 = 0,5 \text{ m}$ , où le débit d'eau est  $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ , débouche dans un bassin de grande dimensions.

- 1- Quel est le régime d'écoulement dans le canal ?
- 2- Quel est le niveau d'eau,  $y$  dans le bassin à une distance telle qu'on puisse considérer la vitesse nulle ?

(On négligeant la perte de charge à l'entrée du bassin)

#### **Solution**

- 1- Le régime d'écoulement dans le canal est déterminé par la valeur de la profondeur critique.

L'expression de la profondeur critique d'un écoulement franchissant un canal rectangulaire est donnée par la condition de criticité, réduite à la relation (II.59).

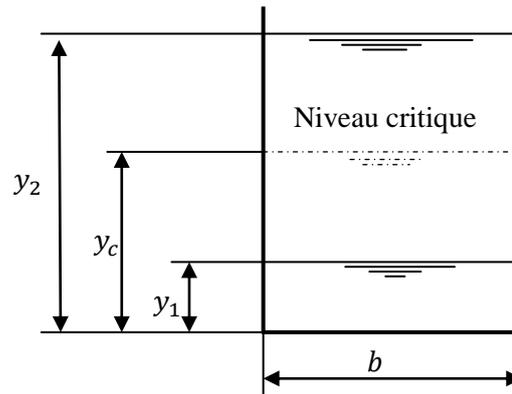


Figure II.21 : Coupe transversale du canal rectangulaire

$$\Rightarrow y_c = \sqrt[3]{\frac{1}{g} \left( \frac{Q}{b} \right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{9,81} (10/2)^2} = 1,37 \text{ m.}$$

Pour un écoulement uniforme dans ce canal et pour une profondeur d'eau,  $y_1 = 0,5 \text{ m}$ . Puisque,  $y_n = y_1 = 0,5 \text{ m} < y_c = 1,37 \text{ m}$ , (la profondeur normale est strictement inférieure à la profondeur à la profondeur critique), alors le régime d'écoulement est torrentiel.

- 2- Quand l'eau enfonce dans le bassin ; le régime devient fluvial. En effet de la cause du passage brutal du régime torrentiel dans le canal au régime fluvial dans le bassin, il ya un ressaut hydraulique dans le canal comme montre la figure ci-dessous.

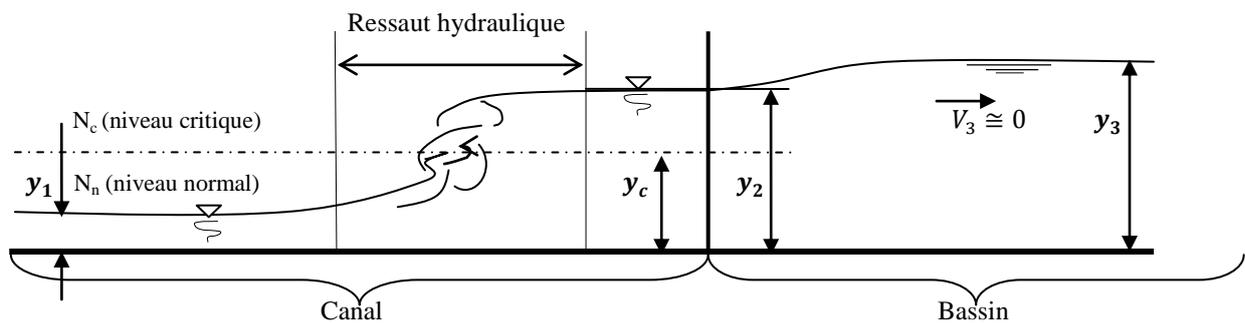


Figure II.22 : Schéma simplifier d'une coupe longitudinale d'un écoulement dans un canal raccordé avec un bassin de grandes dimensions

La valeur de la profondeur d'eau  $y_2$ , juste après le ressaut hydraulique dans le canal est donnée par la relation des profondeurs conjuguées avec la profondeur critique ou par la relation de (Bélanger, 1838) suivante :

$$2y_c^3 = y_1 y_2 \cdot (y_1 + y_2);$$

Avec  $y_1 = 0,5 \text{ m}$  et  $y_c = 1,37 \text{ m}$ , on trouve  $y_2 = 2,95 \text{ m}$ .

Si on néglige la perte de charge singulière engendrée par l'élargissement à l'entrée du bassin, la charge spécifique est constante entre la section ( $S_2$ ) de la profondeur  $y_2$  et le bassin, c'est-à-dire :

$$H_{S_2} = H_{S_{bassin}} \Leftrightarrow y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = y_3 + \frac{V_3^2}{2g};$$

Etant la vitesse  $V_3$ , dans le bassin est très faible, le carré de cette vitesse est tend vers le zéro, alors l'égalité ci-dessus est devenue comme suit :

$$y_3 = y_2 + \frac{V_2^2}{2g};$$

Et avec  $V_2 = (Q/by_2)$  on a la valeur de la profondeur d'eau dans le bassin égale à  $y_3 = 3,1 \text{ m}$ .

### Conclusion

Le présent chapitre de notre étude a eu pour objectif de proposer un état de connaissance sur la description l'écoulement critique ; nous avons également montré que ce type d'écoulement présente un état instable, dues aux fluctuations de la surface libre caractérisées par une vitesse critique égale la célérité d'onde. (*Bakhmetef 1932, Chow, 1959 ; Henderson, 1966 ; French, W. Hager, 1983 ; French ,1985 et Naudascher, 1987*) ont montré que

l'écoulement critique est régie par la relation universelle,  $\left( \frac{Q^2}{g} \right) = \left( \frac{A^3}{T} \right)_c$  et la solution

de cette équation présente la profondeur critique. Cette profondeur correspond au minimale de la charge et au maximum de débit franchissant la section critique. Dans ce chapitre nous avons examiné cette notion sur les canaux de forme rectangulaire et triangulaire et montre que la solution de la condition de criticité est exacte, et pour les autres formes nous nous sommes traités le chapitre suivant de cette étude.

# ***Chapitre III***

## ***Notion de la pente critique***

### III.1. Introduction

La pente critique est aussi un paramètre hydraulique, celle-ci n'a pas la moindre égalité d'importance que la profondeur critique. Cette importance capitale consiste dans les calculs des dimensions des ouvrages hydrauliques, notamment pour la désignation du régime d'écoulement, torrentiel ou fluvial ou bien critique, comme il est illustré dans la figure III.1.a, b et c, ci-dessous. Et ainsi que dans la détermination des équations des courbes de remous et ces classifications qui sont obtenus dans les écoulements graduellement variés.

Dans cette section, nous allons éclaircir la notion de la pente critique (*M. Carlier. 1986*), considérons un canal de section constante et de pente variable portant un débit constant.

La profondeur critique  $y_c$ , comme nous l'avons montré est constante puisqu'elle ne dépend que du débit, mais la profondeur normale  $y_n$  c'est-à-dire la profondeur correspondante au régime uniforme (voire chapitre I), pour le débit considéré, celui-ci qui dépend à la fois du débit et de la pente, va se varier tel que se diminuera si la pente du fond,  $I_f$  croît et inversement. Pour certaine valeur de la pente,  $y_n$  sera égale à  $y_c$ . Cette valeur particulière de la pente du fond du canal est appelée *pente critique* et est désignée par  $I_c$ , et on l'appelle parfois aussi « pente limite »

Bien entendu si, pour le débit considéré,

$$I_f > I_c \quad \text{on a} \quad y_n < y_c ;$$

$$I_f = I_c \quad \text{on a} \quad y_n = y_c$$

et

$$I_f < I_c \quad \text{on a} \quad y_n > y_c$$

La pente critique d'un canal uniforme pour un débit donné est donc la pente que devrait prendre ce canal pour que la profondeur normale du courant considéré soit égale à la profondeur critique, c'est-à-dire pour que le régime  $y$  soit à critique dans le siège d'un écoulement uniforme, dans ce cas le débit donné s'écoule en régime uniforme critique. Autrement dit, la pente où le débit s'écoule sous un minimum de charge.

### III.2. Expression de la pente critique

On peut déterminer l'expression de la pente critique  $I_c$  pour un débit donné  $Q$ , par la résolution simultanée des équations de débit d'écoulement uniforme, et la condition de criticité de régime critique.

De l'équation la plus utilisée du régime uniforme est la relation de *Chézy*, on a :

$$Q = AC\sqrt{R_h} \cdot \sqrt{I};$$

Ou

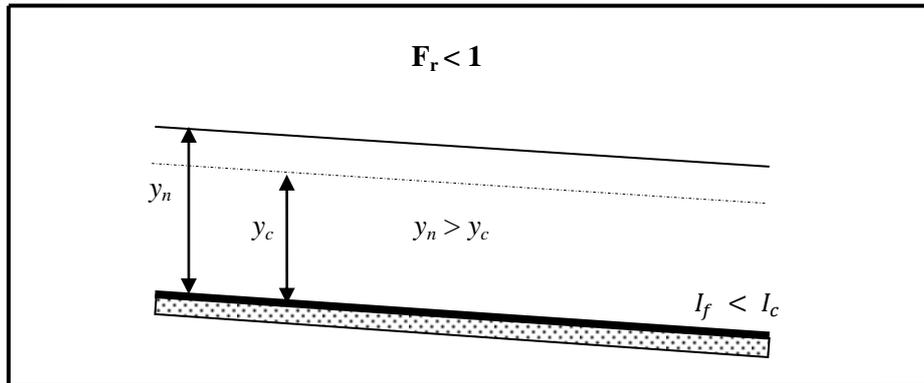


Figure III.1.a : Pente légère - Ecoulement fluvial

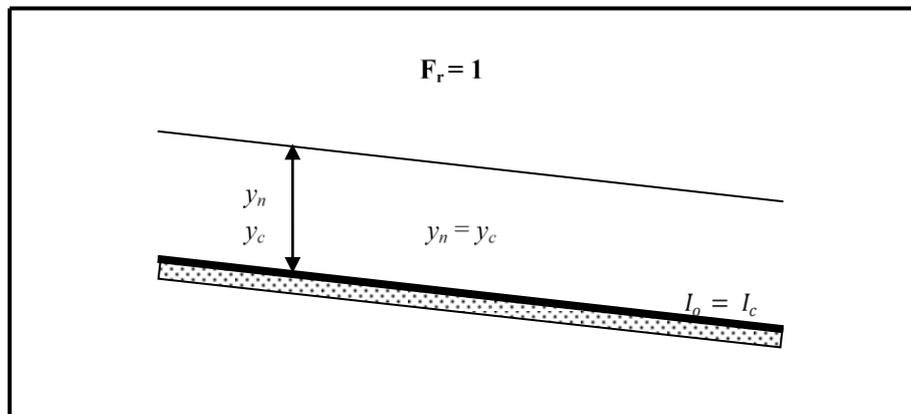


Figure III.1.b : Pente critique - Ecoulement critique

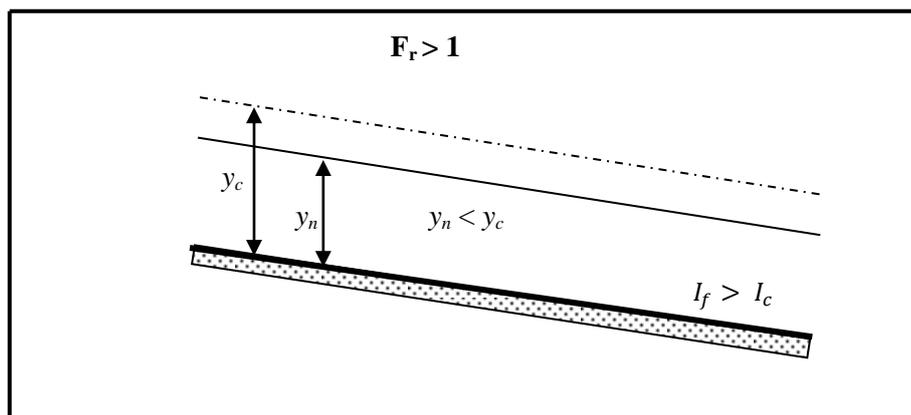


Figure III.1.c : Pente raide - Ecoulement torrentiel

$$Q^2 = A^2 C^2 R_h I;$$

En substituant dans l'équation de la criticité (II.30) de la partie I, on trouve :

$$\frac{\alpha A_c^2 C_c^2 R_{hc} I_c}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

Ou

$$I_c = \frac{g(A_c/T_c)}{\alpha C_c^2 R_{hc}} \quad (III.1)$$

Ou si on prend en considération l'estimation la valeur de coefficient de *Chézy* par la formule de *Manning-Strickler*  $C = (1/n)R_h^{1/6}$  ; on a :

$$I_c = g \frac{n^2(A_c/T_c)}{\alpha R_{hc}^{4/3}};$$

Le rapport  $(A_c/T_c)$  est la profondeur moyenne correspondant au régime critique ;  $C$ , le coefficient de *Chézy*,  $\alpha$  coefficient de l'énergie cinétique et  $n$  le coefficient de la rugosité de *Manning*.

On peut aussi écrire l'expression de la pente critique de la relation (III.1) en fonction de débit  $Q$ , comme suit :

$$I_c = \left( \frac{nQ}{A_c R_{hc}^{3/2}} \right)^2 \quad (III.2)$$

Nous pouvons ainsi d'établir la relation de la pente critique en fonction de coefficient de frottement  $f(R_e, \epsilon/D_h)$ , défini et expliqué au premier chapitre, tel que la relation définie le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* par le coefficient de frottement, soit :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}};$$

Compte tenu de cette relation, la relation (III.1), s'écrit :

$$I_c = \frac{g(A_c/T_c)}{\alpha C_c^2 R_{hc}} = \frac{g(A_c/T_c)}{\alpha (\sqrt{8g/f})^2 R_{hc}} = \frac{f}{8R_{hc}} \left( \frac{A}{T} \right)_c \quad (III.3)$$

### Exemple d'application III.1

Déterminer la pente critique  $I_c$  pour un lit trapézoïdal, figuré ci-dessous, si  $b = 5$  m, le facteur de *Coriolis*  $\alpha = 1,1$ ,  $m = 1,5$ ,  $y_c = 0,55$  m,  $Q = 6,6$  m<sup>3</sup>/s et  $n = 0,030$ .

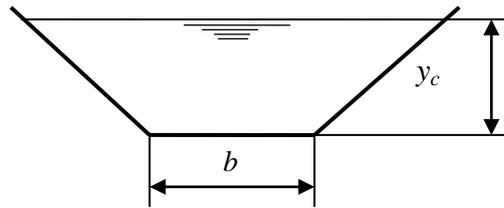


Figure III.2 : Coupe transversale du canal de section trapézoïdale

**Solution.**

On trouve :

$$A_c = by_c + my_c^2 = 5 \times 0,55 + 1,5 \times 0,55^2 = 3,20 \text{ m}^2;$$

$$P_c = b + 2y_c\sqrt{1 + m^2} = 5 + 2 \times 0,55\sqrt{1 + 1,5^2} = 6,98 \text{ m};$$

$$R_{h_c} = \frac{A_c}{P_c} = \frac{3,20}{6,98} = 0,46 \text{ m};$$

$$T_c = b + 2my_c = 5 + 2 \times 1,5 \times 0,55 = 6,65 \text{ m};$$

Pour un rayon hydraulique variant entre 0,10 m et 3 m et pour  $n$  compris entre 0,011 et 0,04 la formule de Pavlovski (1940) (voir chapitre I) est applicable pour déterminer la valeur de coefficient de Chézy.

$$C_c = (1/n)R_{h_c}^y;$$

$$\text{Où } y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R_{h_c}}(\sqrt{n} - 0,10),$$

$$y = 2,5\sqrt{0,030} - 0,13 - 0,75\sqrt{0,46}(\sqrt{0,030} - 0,10) = 0,265775125;$$

Donc

$$C_c = (1/0,030)0,46^{0,265775125} = 27,1 \text{ m}^{0,5}/\text{s}.$$

Définitivement

$$I_c = \frac{9,81 \times \left( \frac{3,20}{6,65} \right)}{1,1 \times 27,1^2 \times 0,46} = 0,01270.$$

Maintenant il est utile d'obtenir une relation explicite simple pour les canaux et rivière très larges par rapport à leur profondeur. Dans ce cas en examinant la relation (III.1) sur un canal de section droite rectangulaire, on a  $A_c = T_c h_c$  et l'expression (III.1) devient :

$$I_c = \frac{g y_c}{\alpha C_c^2 R_{h_c}} \quad (\text{III.4})$$

Dans le cas où largeur du canal rectangulaire est très grande par rapport à sa profondeur  $h \ll b$ , (cours d'eau très large et peu profond avec  $\alpha \cong 1$ ) on a pratiquement :

$$R_{h_c} = \frac{A_c}{P_c} = \frac{by_c}{b + 2y_c} \approx y_c;$$

Et

$$I_c = \frac{g}{C_c^2} \quad (III.5)$$

Cette expression peut être réécrite en fonction de coefficient de frottement, soit :

$$I_c = \frac{f}{8} \quad (III.6)$$

On peut exprimer également la pente critique en fonction du débit et de la rugosité des parois ; en effet, dans l'expression (III.5) calculons le coefficient  $C$ , de Chézy par exemple, la formule de Manning :

$C = (1/n)R_h^{1/6}$  avec  $R_{h_c} = y_c$  (canal de section infiniment large en régime critique) ; il vient ainsi :

$$I_c = \frac{n^2 g}{\alpha R_{h_c}^{1/3}} = \frac{n^2 g}{\alpha y_c^{1/3}} = \frac{n^2 g}{\alpha \left( \sqrt[3]{\left(\frac{q}{g}\right)^2} \right)^{1/3}} = g^{10/9} \frac{n^2}{q^{2/9}} = 12,65 \frac{n^2}{\alpha q^{2/9}};$$

Où

$$I_c = 12,65 \frac{n^2}{\alpha q^{2/9}} \quad (III.7)$$

Comme la pente critique,  $I_c$  varie en fonction du débit inverse, on constate donc que la pente critique d'un tel canal est fonction décroissante du débit et fonction croissante de la rugosité du lit.

La pente critique d'un cours d'eau peut donc être supérieure à la pente réelle de ce cours d'eau pour les petits débits et dans ce cas on dit que le cours d'eau est à légère pente. Dans le cas contraire où la pente critique est inférieure à la pente réelle pour les forts débits, dans ce cas, on dit que le cours d'eau est à raide pente pour ces débits. Ce qui présente le caractère fluvial d'un cours d'eau à l'étiage et le caractère torrentiel en période de crue de celui-ci.

Par ailleurs, la pente critique est proportionnelle au carré de la rugosité  $n$  et son évaluation exacte est donc difficile en raison de l'imprécision sur la valeur à attribuer au coefficient de rugosité  $n$ .

### III.3. Propriété de la pente critique

Dans un canal, à chaque débit volume,  $Q$ , correspond une profondeur critique  $y_c$ , déterminée à partir de l'équation de criticité (II.30), et une pente critique,  $I_c$ , déterminée à partir de l'équation (III.2). La courbe de l'équation (III.2), définit par conséquent un rapport entre le débit,  $Q$ , et la pente critique  $I_c$ , cette courbe est désignée par *courbe des pentes critiques*,  $I_c = f(Q)$ . La pente critique  $I_c$ , est une fonction du débit, de sorte qu'une pente du fond particulier peut être légère à certaines débits et raide à d'autres. Ce point est illustré facilement avec un canal rectangulaire très large, tel que la pente critique est donnée par la relation (III.5) à partir de laquelle la pente critique décroît avec l'augmentation de débit. Par exemple, un canal rectangulaire de la rugosité  $n = 0,015$  et à une pente du lit égale à  $0,004$ , comme indiqué dans la figure III.3, ci-après. A cette valeur de pente du lit, les changements de pente douce à raide pour un débit de  $0,216 \text{ m}^3/\text{s/m}$ , qui est appelé le débit critique,  $Q_c$ .

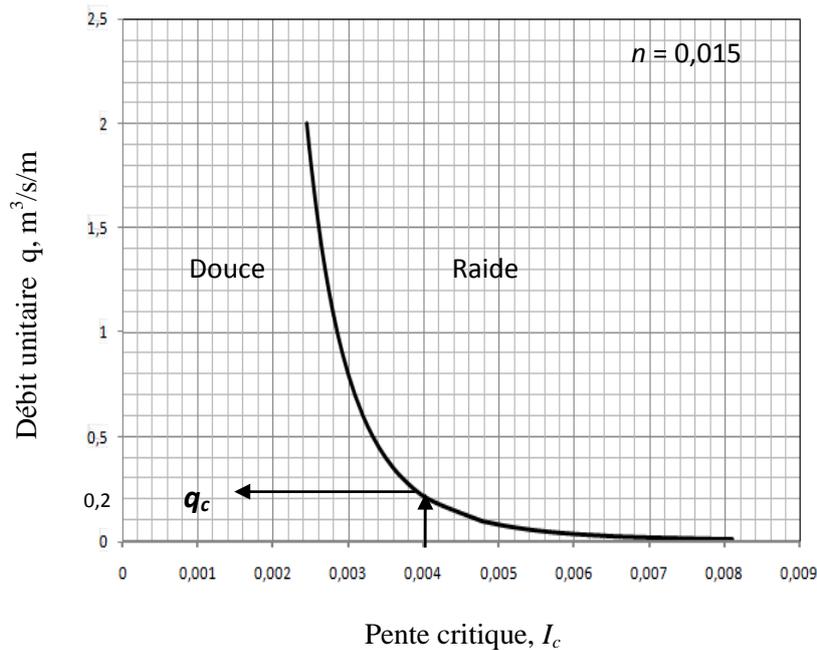


Figure III.3 : Pente critique pour un canal rectangulaire large

#### III.3.1. La pente limite

La valeur minimale possible de la pente critique pour le canal rectangulaire large approche asymptotiquement à zéro, et c'est ce qu'on appelle la pente limite, et qui est désignée par  $I_l$ .

La pente limite pour le canal rectangulaire qui ne peut être classé comme très large est fini (Rao et Sridharan, 1970). Si les expressions de rayon hydraulique pour un canal rectangulaire sont substituées dans l'équation (III.4) et le débit est éliminé par la relation entre la profondeur critique et de débit, la pente devient critique comme suit :

$$I_c = n^2 g y_c \left[ \frac{b + 2y_c}{b y_c} \right]^{\frac{4}{3}} \quad (III.8)$$

La figure III.3, montre clairement que la courbe représentative de la fonction de la pente critique admet un minimum due à la concavité présentée sur la courbe, ce qu'est implique la différenciation de l'équation (III.8), par rapport à  $y_c$  égale à zéro, alors on a :

$$\frac{dI_c}{dy_c} = \frac{d}{dy_c} \left( n^2 g y_c \left[ \frac{b + 2y_c}{b y_c} \right]^{\frac{4}{3}} \right) = 0 \quad (III.9)$$

Et selon la définition ci-dessus, la valeur de la profondeur  $y_c$  à laquelle  $I_c$  égale la pente limite, qui définit comme étant la solution de l'équation (III.9), tel que :

$$\frac{dI_c}{dy_c} = \frac{d}{dy_c} \left( n^2 g y_c \left[ \frac{b + 2y_c}{b y_c} \right]^{\frac{4}{3}} \right) = \frac{g n^2}{b^{1/3}} \frac{d}{dy_c} \left( \frac{\left(1 + \frac{2y_c}{b}\right)^{4/3}}{\left(\frac{y_c}{b}\right)^{1/3}} \right) = 0;$$

En posant  $z = y_c/b$ , comme changement de variable, donc

$$dz = \frac{1}{b} dy_c \Rightarrow dy_c = b dz.$$

Et la quantité  $\left( \frac{g n^2}{b^{1/3}} \right)$  égale à la constante  $C_1$ . Alors on a :

$$\frac{dI_c}{dz} = b C_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{(1 + 2z)^{4/3}}{z^{1/3}} \right) = 0;$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI_c}{dz} = b C_1 \left( \frac{\frac{8}{3} (1 + 2z)^{1/3} z^{1/3} - \frac{1}{3} (1 + 2z)^{4/3} z^{-2/3}}{z^{2/3}} \right) = 0;$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI_c}{dz} = b C_1 \frac{1}{3} \left[ 8 \left( \frac{1 + 2z}{z} \right)^{1/3} - \left( \frac{1 + 2z}{z} \right)^{4/3} \right] = 0;$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI_c}{dz} = bC_1 \frac{1}{3} \left( \frac{1+2z}{z} \right)^{1/3} \left[ 8 - \left( \frac{1+2z}{z} \right) \right] = 0;$$

De cette équation, le côté qui est défini par la quantité,  $bC_1 \frac{1}{3} \left( \frac{1+2z}{z} \right)^{1/3}$ , est strictement positif  $\forall z \in \mathbb{R}$ , alors on a :

$$\left[ 8 - \left( \frac{1+2z}{z} \right) \right] = 0;$$

Cette dernière équation est une équation linéaire de premier degré de la solution :

$$z = \frac{1}{6}.$$

Alors la pente limite, se produit à  $\left( \frac{y_c}{b} = \frac{1}{6} \right)$ , de l'équation (III.8) tel que :

$$I_L = \frac{gn^2}{b^{1/3}} \left[ \frac{\left( 1 + \frac{1}{3} \right)^{4/3}}{\left( \frac{1}{6} \right)^{1/3}} \right] = \frac{8gn^2}{3b^{1/3}};$$

$$I_L = \frac{8gn^2}{3} \frac{1}{b^{1/3}} \tag{III.10}$$

Ces résultats sont obtenus par Rao et Sridharan (1970)

### **Exemple d'application III.2.**

Un écoulement dans un canal rectangulaire en acier de coefficient de Manning  $n = 0,014$ , et de largeur  $b = 1$  m. L'écoulement de la profondeur  $y$  est en régime critique,  $F_r = 1$ .

- 1) Tracer la courbe de la pente critique, comme fonction de  $y$ , pour les valeurs  $0,05 \text{ m} \leq y \leq 5,0 \text{ m}$ .
- 2) Quelle est la pente maximale autorisée si l'écoulement critique est de ne pas se produire indépendamment de la profondeur ?

### **Solution**

1) L'expression de la pente critique est donnée par relation (III.2) comme suit :

$$I_c = \left( \frac{nQ}{A_c R_{h_c}^{3/2}} \right)^2 ;$$

Tels que les éléments  $A_c$ , et  $R_{h_c}$  figurant dans la relation, sont bien entendu les éléments critique du canal c'est-à-dire calculés à partir de la profondeur critique  $y_c$  qui correspond au débit considéré  $Q$ .

L'expression de la pente critique en fonction de la profondeur critique pour un canal rectangulaire, donnée par la relation (III.8), peut être réécrite comme suit :

$$I_c(y_c) = \frac{gn^2}{b^{1/3}} \left( \frac{\left(1 + \frac{2y_c}{b}\right)^{4/3}}{\left(\frac{y_c}{b}\right)^{1/3}} \right) \quad (III.11)$$

L'application numérique donne ce que suit :

$$I_c(y_c) = \frac{9,81 \times 0,014^2}{1^{1/3}} \left[ \frac{\left(1 + \frac{2y_c}{1}\right)^{4/3}}{\left(\frac{y_c}{1}\right)^{1/3}} \right] = 0,00192 \left( \frac{(1 + 2y_c)^4}{y_c} \right)^{1/3} ;$$

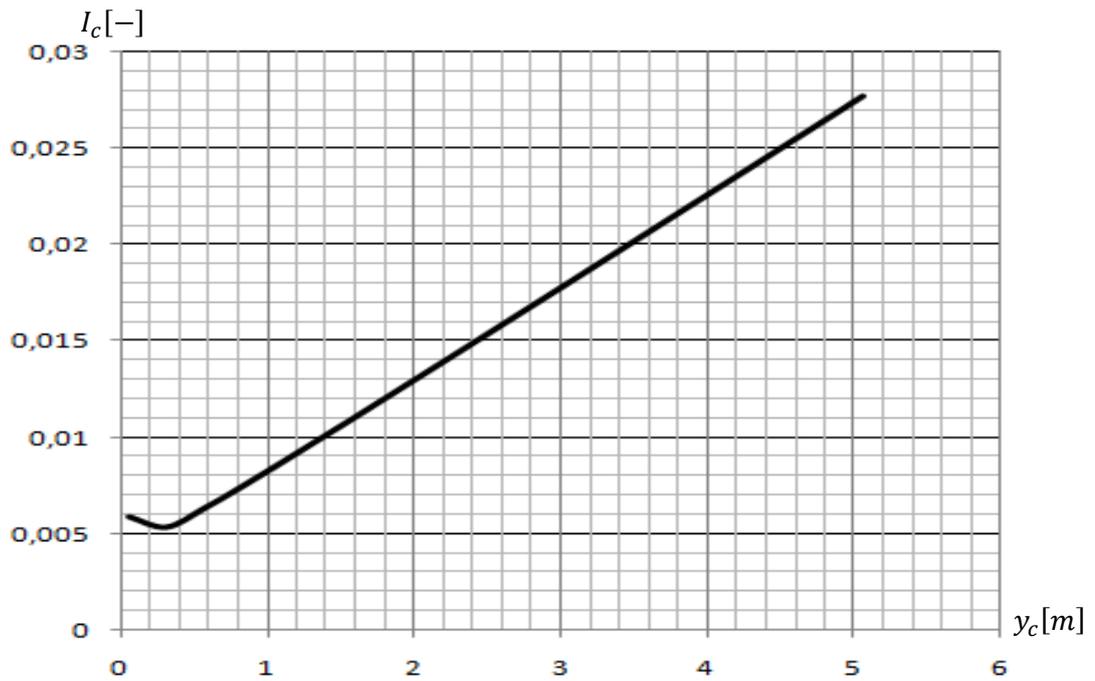
Les courbes représentatives ci-après de la fonction  $I_c = f(y_c)$ , présentée la variation de la pente critique,  $I_c$  en fonction des valeurs de la profondeur critique  $y_c$  compris entre (0,05 m à 0,5 m).

La courbe de la figure III.5, comporte une concavité, présentée comme la valeur minimale de la pente critique qui est définie comme la pente limite. Analytiquement la valeur de la pente limite est égale à la valeur de la pente critique pour  $y_c = (b/6) = (1/6)$  m, et celle-ci déterminée par la relation (III.10) tel que :

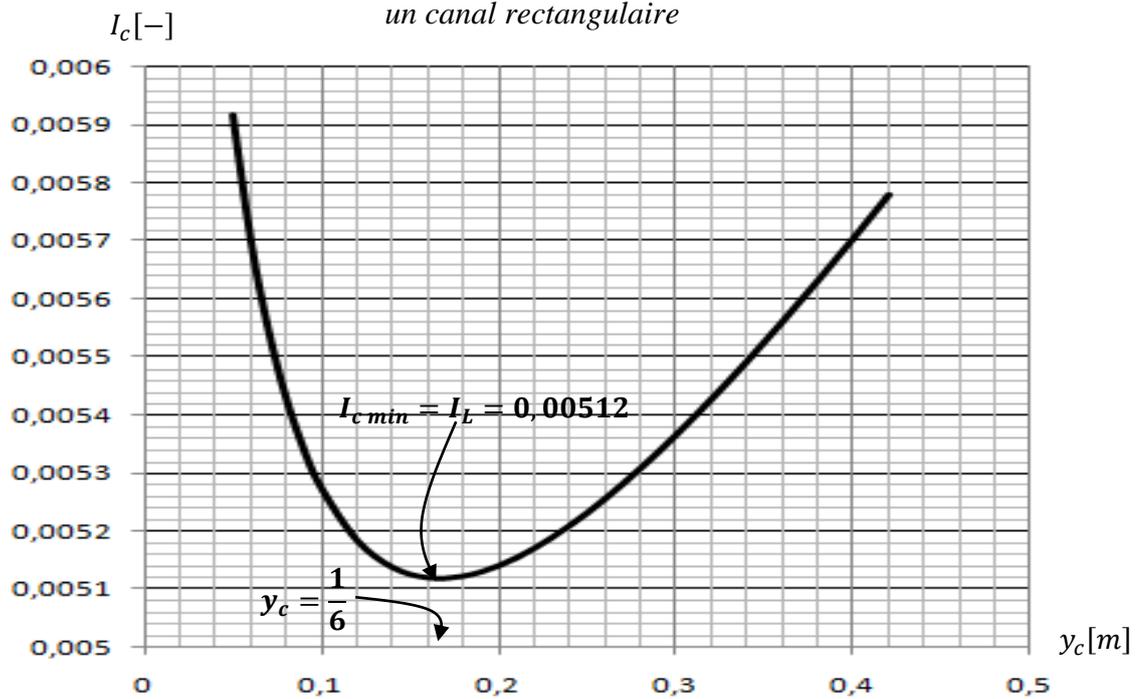
$$I_L = \frac{8gn^2}{3} \frac{1}{b^{1/3}} = \frac{8}{3} \times \frac{9,81 \times 0,014^2}{1^{1/3}} = 0,005127 [-];$$

Où

$$I_L = 0,5127\%.$$



**Figure III.4 :** Variation de la pente critique en fonction de la profondeur critique pour un canal rectangulaire



**Figure III.5:** La pente limite pour un canal rectangulaire

- 2) Si la pente du canal  $I_0 < I_L = 0,00512$ , dans ce cas l'écoulement critique ne peut se produire à n'importe quelle profondeur. De cet exemple et selon la courbe représentative de la fonction de la pente critique, il est clair que pour chaque canal, il n'existe qu'une seule valeur de  $I_L$ .

De cet exemple, comme nous allons vu, la pente critique pour un canal rectangulaire est donnée par:

$$I_c(y_c) = \frac{gn^2}{b^{1/3}} \left( \frac{\left(1 + \frac{2y_c}{b}\right)^{4/3}}{\left(\frac{y_c}{b}\right)^{1/3}} \right);$$

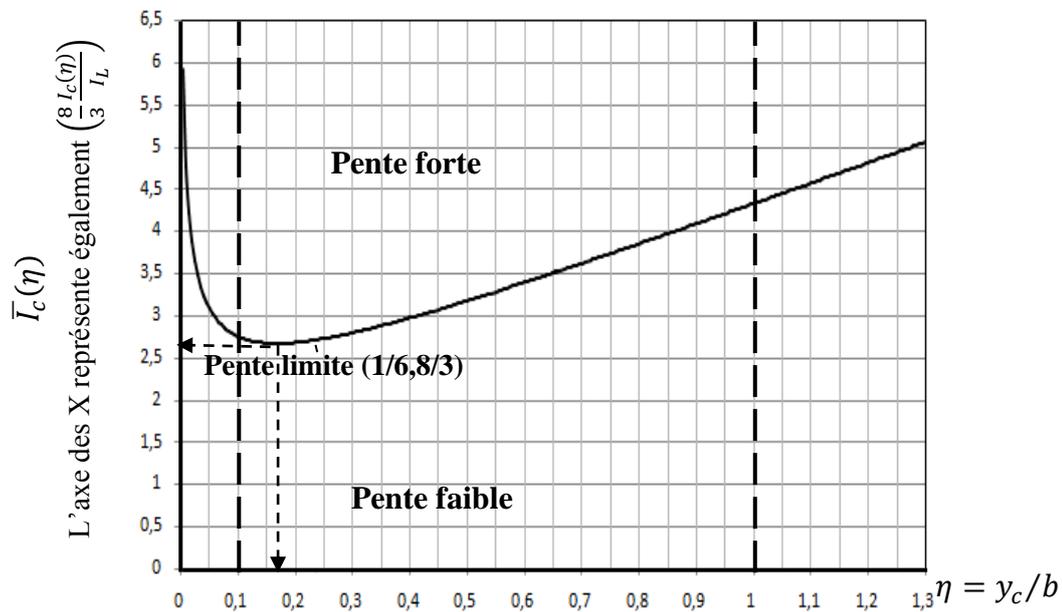
Pour le paramètre adimensionnel,  $\eta = y_c/b$ , on peut étudier la variation de l'expression en termes adimensionnels suivante en fonction de  $\eta$ :

$$\bar{I}_c(\eta) = \frac{I_c(\eta)b^{1/3}}{gn^2} = \frac{(1 + 2\eta)^{4/3}}{\eta^{1/3}} \quad (III.12)$$

Pour ( $\eta = \eta_{min} = 1/6$ ), la valeur de terme  $\bar{I}_c(\eta_{min})$ , est également donné comme suit :

$$\bar{I}_c(\eta_{min}) = \frac{I_c(\eta_{min})b^{1/3}}{gn^2} = \frac{I_L b^{1/3}}{gn^2} = \frac{8}{3};$$

Nous pouvons présenter dans le système d'axes de coordonnées à divisions cartésiennes de la figure ci-dessous, la variation de  $\bar{I}_c(\eta)$  en fonction de  $\eta$ , selon la relation (III.12), pour les valeurs extrêmes minimales et maximales respectivement  $\eta = 0,005$  et  $\eta = 1$ .



**Figure III.6:** La variation de la pente critique dans le canal rectangulaire

La division du terme  $\bar{I}_c(\eta)$  par la constante,  $\bar{I}_c(\eta_{min})$ , n'est pas d'influence sur sa variation. Cette division peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\bar{I}_c(\eta)}{\bar{I}_c(\eta_{min})} = \frac{I_c(\eta)}{I_c(\eta_{min})} = \frac{I_c(\eta)}{I_L};$$

Et évidemment selon la relation (III.12), on obtient la relation suivante :

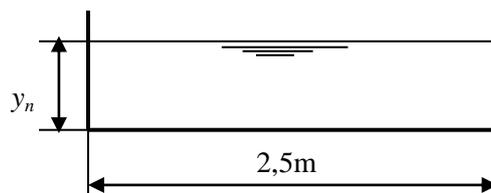
$$\frac{I_c(\eta)}{I_L} = \frac{3(1+2\eta)^{4/3}}{8\eta^{1/3}} = \left[ \frac{3}{8} \bar{I}_c(\eta) \right] \quad (III.13)$$

De la figure III.6, on peut observer que la pente du canal est faible pour toute la zone située au-dessous de la courbe de la pente critique, et elle est forte pour toute la zone située au-dessus de cette courbe. De l'équation (III.10), on peut observer que la diminution de la pente limite  $I_L$ , est proportionnelle avec l'augmentation de la valeur  $b$ , largeur du canal. Et pour les très grandes valeurs de  $b$ , la valeur de la pente limite tend vers le zéro où  $I_L \approx 0$ . L'inexistence de pente limite pour un canal rectangulaire large est également considérée par le comportement de pente critique pour l'expression que donnée par l'équation (III.7).

Ainsi, l'axe des abscisses de la figure III.6, représente également  $(I_c(\eta)/I_L)$ , une unité de l'axe  $x$ , étant  $(8/3)$  unités d' $(I_c(\eta)/I_L)$ . Si la pente du fond  $I_f$ , du canal est inférieure à la pente limite  $I_L$ , le canal est considéré comme un canal à faible pente pour toutes les valeurs de la profondeur d'écoulement imposées. Toutefois, pour toute  $I_c > I_L$ , il existe une gamme de profondeurs entre  $y_{c1}$  et  $y_{c2}$  pour lesquelles la pente du canal sera forte et en dehors de cette plage, la pente se comporte comme une pente faible. En plus, pour une profondeur donnée, il n'existe qu'une seule pente critique et pour une pente donnée supérieure à  $I_L$ , il y aura deux profondeurs auxquelles la pente va se comporter comme pente critique.

### Exemple d'application III.3.

Un canal rectangulaire en béton armé doublé de coefficient de Manning  $n = 0,013$  le canal à une largeur  $b = 2,5$  m et de pente de fond  $I_f = 0,006$ .



- 1- Estimer la pente critique pour la profondeur normale de l'écoulement  $y_n = 1,5$  m, et quel sera le débit pour cet état ?
- 2- Calculer la pente limite de ce canal

- 3- Identifier les zones des pentes fortes et celle des pentes faibles, quelque soit la variation de la profondeur normal de 0,5 m à 6,0 m dans ce canal.

**Solution**

1)

- a- Calcul de la pente critique pour la profondeur  $y_n = 1,5 \text{ m}$ .

L'écoulement en régime critique est dans le siège d'un écoulement uniforme, alors  $y_n = y_c$ ;

Et par l'application de la relation (III.8), on a :

$$I_c(y_c = 1,5) = \frac{gn^2}{(2,5)^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{\left(1 + 2 \frac{1,5}{2,5}\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(\frac{1,5}{2,5}\right)^{\frac{1}{3}}}\right) = 0,004144.$$

- b- Le débit est maximum pour cet état et sa valeur est donnée par l'application de la condition de criticité tel que

$$\frac{Q_{max}^2}{g} = \left(\frac{A^3}{T}\right)_c \Rightarrow Q_{max} = \sqrt{g \frac{A^3}{T}} = b \sqrt{g y_c^3} = 2,5 \sqrt{9,81 \times 1,5^3} = 14,38505 \text{ m}^3/\text{s}$$

2) Le calcul de la pente limite est comme suit :

$$I_L = I_c \left( y_c = \frac{b}{6} \right) = \frac{8}{3} \frac{gn^2}{b^{\frac{1}{3}}};$$

$$\Leftrightarrow I_L = \frac{8}{3} \times \frac{9,81 \times 0,013^2}{2,5^{\frac{1}{3}}} = 0,00325741.$$

3) On a pour  $y_c = y_n = 1,5 \text{ m}$ ,  $I_L < I_c < I_f$

Etant donné que  $I_f > I_L$ , l'écoulement aura la possibilité de s'écouler à la fois dans un canal à forte pente et de faible pente selon la variation de valeurs des profondeurs.

A travers la courbe de a figure III.6, on voit qu'il y aura deux profondeurs critiques  $y_{c1}$  et  $y_{c2}$  à travers lesquelles l'écoulement sera critique, ainsi que la pente se comporte comme pente critique. De plus, dans une gamme des profondeurs appartient à l'intervalle  $y_{c1}$  et  $y_{c2}$  le canal est considéré comme un canal de forte pente. En d'hors de cette gamme de profondeurs, le canal est considéré comme un canal de faible pente.

On cherche à trouver les deux profondeurs  $y_{c1}$  et  $y_{c2}$  par la résolution de l'équation (III.13), et comme définition le paramètre  $I_c = 0,006$ , il vient que :

$$\frac{I_c(\eta)}{I_L} = \frac{3(1+2\eta)^{4/3}}{8\eta^{1/3}} = \left[ \frac{3}{8} \bar{I}_c(\eta) \right] \Leftrightarrow \frac{0,006}{0,00325741} \times \frac{8}{3} = \frac{(1+2\eta)^{4/3}}{\eta^{1/3}};$$

$$\frac{(1+2\eta)^{4/3}}{\eta^{1/3}} = 4,91187.$$

Cette équation admet deux racines positives, en raison que la courbe représentative de cette équation de la figure III.6 se caractérise par une concavité, et en utilisant la résolution par Excel qui sont les suivantes :

$$\eta_1 = y_{c1}/b = 0,00907 \Rightarrow y_{c1} = 2,5 \times 0,00907 = 0,022675 \text{ m};$$

$$\eta_2 = y_{c2}/b = 1,2413 \Rightarrow y_{c2} = 2,5 \times 1,2413 = 3,10325 \text{ m}.$$

On voit bien que l'inégalité suivante est vérifiée :  $y_{c1}/b < (1/6) < y_{c2}/b$ .

Ainsi, pour toute profondeur normale  $y_n \in [0,5 \text{ m}; 6,0 \text{ m}]$ , les zones de pente faible et forte sont les suivantes:

- i) Pour  $0,022675 \text{ m} < y_n < 3,10325 \text{ m}$ , la pente du canal est forte
- ii) Pour  $y_n > 3,10325 \text{ m}$ , la pente du canal est faible.

#### **Exemple d'application II.4.**

Un canal rectangulaire en béton de largeur  $b = 3,0 \text{ m}$ , et un coefficient de Manning  $n$ , égale à 0,015. La pente de fond du canal  $I_f = 0,007$ , et le débit devrait varier de zéro à 60,0  $\text{m}^3/\text{s}$ .

- 1- Déterminer si la pente est forte ou faible sur l'ensemble de gamme des débits.
- 2- A quelle pente serait-elle pour que le canal est devenu à faible pente pour tous les débits?

#### **Solution**

1) Tous d'abord on cherche à trouver la valeur de la pente limite,  $I_L$ .

$$I_L = \frac{8}{3} \frac{gn^2}{b^{1/3}} = \frac{8}{3} \times \frac{9,81 \times 0,015^2}{3^{1/3}} = 0,00408;$$

On a  $I_f > I_L$ , alors le débit d'écoulement est s'écouler dans un canal peut considéré à la fois canal à forte pente ou un canal à faible pente selon les valeurs de profondeurs critiques qui sont délimitant les zones des types de pente. Ces profondeurs critiques sont les solutions de l'équation (III.13), et en mettre le paramètre,  $I_c = 0,007$ , il vient que :

$$\frac{I_c(\eta)}{I_L} = \frac{3(1+2\eta)^{4/3}}{8\eta^{1/3}} = \left[ \frac{3}{8} \bar{I}_c(\eta) \right] \Leftrightarrow \frac{0,007}{0,00408} \times \frac{8}{3} = \frac{(1+2\eta)^{4/3}}{\eta^{1/3}};$$

$$\frac{(1+2\eta)^{4/3}}{\eta^{1/3}} = 4,57516.$$

L'équation admet deux racines positives et par l'utilisation de l'Excel, on a les racines suivantes :

$$\eta_1 = y_{c1}/b = 0,01143 \Rightarrow y_{c1} = 3,0 \times 0,01143 = 0,03429 \text{ m};$$

$$\eta_2 = y_{c2}/b = 1,1029 \Rightarrow y_{c2} = 3,0 \times 1,1029 = 3,3087 \text{ m}.$$

On voit bien que l'inégalité suivante est vérifiée :  $y_{c1}/b < (1/6) < y_{c2}/b$ .

Ainsi, pour toute gamme des débits  $Q \in [0,0 \text{ m}^3/\text{s}; 60,0 \text{ m}^3/\text{s}]$ , les zones de pente faible et forte sont les suivantes:

- i) Pour  $Q > b\sqrt{gy_{c2}^3} = 3\sqrt{9,81 \times 3,3087^3} = 56,551 \text{ m}^3/\text{s}$ , la pente du canal est faible
- ii) Pour  $Q < b\sqrt{gy_{c1}^3} = 3\sqrt{9,81 \times 0,03429^3} = 0,060 \text{ m}^3/\text{s}$ , la pente du canal est faible.
- iii) Pour  $0,060 \text{ m}^3/\text{s} < Q < 56,551 \text{ m}^3/\text{s}$  le canal est considéré comme un canal de forte pente

2) Pour considérer le canal à faible pente pour toute gamme de débits, il faut construire le canal avec une pente égale à la pente limite.

Ces exemples montrent clairement pour un canal rectangulaire, la notion de la raideur ou de douceur d'une pente, ou bien la notion d'un canal à forte ou à faible pente, qui traduite par la relation (III.7) n'est pas absolue, mais dépend plus précisément par les racines de l'équation (III.13), pour lesquelles on délimite les zones de forte ou de faible pente pour des profondeurs d'écoulement imposées.

### III.3.3. Généralisation de l'expression de la pente critique

En peut généraliser la relation de la pente critique pour les canaux prismatiques, tel que si un débit donné  $Q$  s'écoule dans un canal en régime uniforme, la pente du fond  $I_f$ , nécessaire pour maintenir et assurer ce débit; est donnée par la formule de *Manning* présentée par la relation (III.2). Et comme nous l'avons vu précédemment l'écoulement dans les canaux

ouverts peut être caractérisé par le *nombre de Froude* donné par la relation (II.34) de la première partie.

Donc on a les deux relations suivantes:

$$I_f = \left( \frac{nQ}{AR_h^{\frac{3}{2}}} \right)^2 ;$$

$$F_r^2 \cdot \frac{A^3}{T} = \frac{Q^2}{g} ;$$

En substituant la deuxième relation dans l'expression de la pente et après simplification et réarrangement, il vient que :

$$I_f = \frac{gn^2 F_r^2}{T} \left( \frac{P^4}{A} \right)^{1/3} ;$$

Où

$$\frac{I_f}{F_r^2 gn^2} = \frac{P^{4/3}}{TA^{1/3}} = f(y) \quad (III.14)$$

Pour un canal de section droite trapézoïdale d'un angle d'inclinaison des parois par rapport à l'horizontale  $\theta$ , tel que  $m = \cotg\theta$ . Les paramètres géométriques sont comme suit :

$$A = b \cdot y + my^2 = y(b + my);$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + m^2};$$

$$T = b + 2my.$$

En tenant compte ces paramètres, la relation (III.14) s'écrit:

$$\frac{I_f}{F_r^2 gn^2} = \frac{(b + 2y\sqrt{1 + m^2})^{\frac{4}{3}}}{(b + 2my)^1 [y(b + my)]^{\frac{1}{3}}} \quad (III.15)$$

En termes adimensionnels, en multipliant les deux membres de la relation (III.15) par  $b^{1/3}$ , celle-ci peut s'écrire comme :

$$\frac{I_f b^{1/3}}{F_r^2 g n^2} = \frac{\left(1 + 2 \frac{y}{b} \sqrt{1 + m^2}\right)^{4/3}}{\left(1 + 2m \frac{y}{b}\right)^1 \left(1 + m \frac{y}{b}\right)^{1/3} \left(\frac{y}{b}\right)^{1/3}};$$

En désignant par  $\eta$ , la quantité  $(y/b)$ ,  $\eta$  présente le rapport adimensionnel de forme, ou bien le rapport d'aspect, il s'ensuit que la relation ci-dessus devient:

$$\frac{I_f b^{1/3}}{F_r^2 g n^2} = \frac{\left(1 + 2\eta \sqrt{1 + m^2}\right)^{4/3}}{(1 + 2m\eta)(1 + m\eta)^{1/3} \eta^{1/3}};$$

Pour lequel,  $\eta = y/b$ . Nous désignons le terme suivant, la pente généralisée :

$$\bar{I}(\eta, m) = \left(\frac{I_f b^{1/3}}{F_r^2 g n^2}\right) = \frac{\left(1 + 2\eta \sqrt{1 + m^2}\right)^{4/3}}{(1 + 2m\eta)(1 + m\eta)^{1/3} \eta^{1/3}} \quad (III.16)$$

Et par conséquent

$$\bar{I}(\eta, m) = f_n(\eta, m) \quad (III.17)$$

L'équation (III.16) représente une relation généralisée entre les différents éléments de l'écoulement uniforme dans un canal de forme trapézoïdale. La relation fonctionnelle de l'équation (III.16) est représentée sur la figure III.6. Cette figure peut être utilisée, pour un canal de section trapézoïdale donné, pour déterminer les paramètres suivants :

- a) La pente du lit, et celle-ci est nécessaire pour produire un écoulement uniforme à une profondeur et un nombre de *Froude* donnés;
- b) La profondeur d'écoulement est nécessaire pour produire un écoulement uniforme d'un nombre de *Froude* donné dans un canal de la pente de fond,  $I_f$  connue.

Comme conclusion, en appliquant la relation (III.16) pour déduire l'expression de la pente critique, pour les canaux de forme rectangulaire et triangulaire.

Pour un régime critique dans le siège d'écoulement uniforme où  $F_r^2 = 1$ ,  $y_c = y_n$  et  $\eta = y_c/b$ , dans ce cas le paramètre  $I_c = I_f$ . Alors la relation (III.16) pour un écoulement de régime critique s'écrit :

$$\bar{I}_c(\eta, m) = \left(\frac{I_c b^{1/3}}{g n^2}\right) = \frac{\left(1 + 2\eta \sqrt{1 + m^2}\right)^{4/3}}{(1 + 2m\eta)(1 + m\eta)^{1/3} \eta^{1/3}} \quad (III.18)$$

Pour un canal de section rectangulaire, le paramètre de l'inclinaison des parois est également nul, où  $m = 0$  et par conséquent l'équation (III.18) devient :

$$\bar{I}_c(\eta) = \frac{I_c(\eta)b^{1/3}}{gn^2} = \frac{(1 + 2\eta)^{4/3}}{\eta^{1/3}};$$

Cette équation est celle de la relation (III.12).

Pour le canal de forme triangulaire, le paramètre de largeur est également nul, tel que  $b = 0$ , et par conséquent on pourra pas appliquer l'équation (III.18). Cependant, la définition de la pente généralisée pour les canaux triangulaires par l'équation (III.15). Avec les mêmes considérations de régime critique, l'équation (III.15) devient :

$$\bar{I}_c(m) = \frac{I_c(m)y^{1/3}}{gn^2} = \sqrt[3]{2} \left( \frac{1 + m^2}{m^2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (III.19)$$

La relation (III.19) mène à établir l'expression de la pente critique pour le canal de forme triangulaire :

$$I_c(m, y) = \sqrt[3]{2} \times \frac{gn^2}{y_c^{1/3}} \left( \frac{1 + m^2}{m^2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (III.20)$$

Pour une gammes des profondeurs d'écoulement imposées, la pente limite  $I_L$ , est définie comme la pente au-dessous de laquelle le régime d'un canal est toujours lent, quelque soit le débit.

La dérivée de l'équation (III.20) est de signe négatif celle-ci est donnée par la relation suivante :

Pour  $m$ , constant on à

$$\begin{aligned} \frac{dI_c}{dy_c} &= \frac{d}{dy_c} \left( \sqrt[3]{2} \times \frac{gn^2}{y_c^{1/3}} \left( \frac{1 + m^2}{m^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right) = \sqrt[3]{2} gn^2 \left( \frac{1 + m^2}{m^2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dy_c} \left( \frac{1}{y_c^{1/3}} \right); \\ \Leftrightarrow \frac{dI_c}{dy_c} &= -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} gn^2 \left( \frac{1 + m^2}{m^2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{y_c^{4/3}} \end{aligned} \quad (III.21)$$

Quelle que soit la profondeur d'écoulement imposée l'équation (III.21) est négative et n'accepte aucune solution quand en égalant celle-ci à zéro, se que signifier que la fonction (III.20) de pente critique n'admet pas un minimum quel que soit la valeur de  $y_c$ , cela veut dire

qu'il n'existe pas une pente limite,  $I_L$  pour un canal de forme triangulaire. Et par conséquent, le régime de celui-ci n'est pas lent, ce qui favorise pratiquement les déversoirs à échancrures triangulaire pour les faibles débits.

**Exemple d'application III.5.**

Trouver la pente critique d'un canal de forme triangulaire de la cotangente d'inclinaison des parois  $m = 3$ , et de coefficient de rugosité de Manning  $n = 0,012$  ainsi que le débit transporté par ce canal est égal à  $Q = 12 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**Solution**

L'expression de la pente critique pour un canal triangulaire est comme suit :

$$I_c(m, y) = \sqrt[3]{2} \times \frac{gn^2}{y_c^{1/3}} \left( \frac{1+m^2}{m^2} \right)^{\frac{2}{3}} ;$$

Pour déterminer la valeur de la pente critique, on calcul d'abord la valeur de la profondeur critique.

$$y_c = \sqrt[5]{\frac{2}{g} \left( \frac{Q}{m} \right)^2} \Leftrightarrow y_c = \sqrt[5]{\frac{1}{9,81} \left( \frac{12}{3} \right)^2} = 1,27 \text{ m};$$

Alors on a

$$I_c(m = 3, y_c = 1,27\text{m}) = 0,00176$$

**III.3.4. Les racines et les valeurs limites de  $\bar{I}_c(\eta, m)$  pour les canaux trapézoïdaux**

L'équation (III.18) peut être écrite comme:

$$\bar{I}_c(\eta, m)^3 = \frac{(1 + 2\eta\sqrt{1 + m^2})^4}{(1 + 2m\eta)^3(1 + m\eta)\eta} \quad (\text{III.22})$$

Il s'agit d'une équation du cinquième degré pour le rapport d'aspect  $\eta$ , à l'exception quand il se réduit à une équation du quatrième degré pour  $m = 0$ .

De ses cinq racines, on peut montrer que :

- a) Au moins une racine doit être réel et positif et ;
- b) Deux racines sont toujours imaginaire.

Ainsi, en fonction de la valeur de  $m$  et de  $\bar{I}_c(\eta, m)$ , il peut y avoir un, deux ou trois racines. Les valeurs limites de  $\bar{I}_c(\eta, m)$  sont obtenues en mettant  $(d \bar{I}_c(\eta, m) / d \eta = 0)$ , ce qui entraîne :

$$8\eta\sqrt{1+m^2}(1+m\eta)(1+2m\eta) - (1+2\eta\sqrt{1+m^2})(1+10m\eta+10m^2\eta^2) = 0 \quad (III.23)$$

On obtient les résultats significatifs (*Jones, L E and Tripathy, BN, 1965*) suivants :

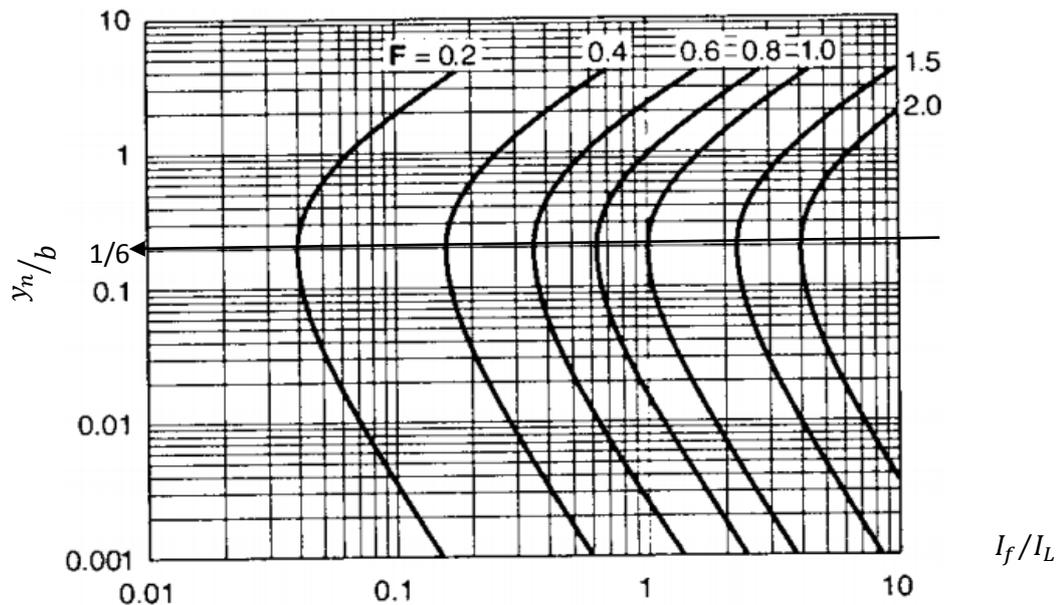
1. Les canaux rectangulaires, une valeur limite unique avec  $\bar{I}_c(\eta) = 8/3$  et  $\eta_L = 1/6$ .
2. Entre  $m = 0$  et  $m = 0,46635$ , il existe deux valeurs limites.
3. Pour  $m = 0,46635$ , les deux valeurs limites se confondent en un seul à  $\bar{I}_c(\eta) = 2,1545$  et  $\eta = 0,7849$
4. pour  $m > 0,46635$ , il n'y a pas de points limites

Pour les canaux rectangulaires, une extension intéressante de premier résultat mentionné ci-dessus est la suivante: A l'état limite, pour une largeur  $b$ , la pente du fond  $I_f$  et le coefficient de Manning  $n$  donné, le nombre de Froude est le maximum pour un écoulement uniforme :

$$\bar{I}_L = \left( \frac{I_f b^{1/3}}{F_{r_{max}}^2 g n^2} \right) = \frac{8}{3};$$

Et par l'utilisation de l'équation (III.10) on obtient :

$$\frac{I_f}{I_L} = F_{r_{max}}^2;$$



**Figure III.7:** Variation  $(I_f/I_L)$ , en fonction de  $(y_n/b)$  pour des valeurs constante de Nombre de Froude, cas d'un canal rectangulaire (*Rao et Sridharan, 1970*)

La figure III.7, montre que la valeur maximale du nombre de Froude se produit à  $y_n/b = 1/6$  et a une valeur de:

$$F_{r \max} = \sqrt{\frac{I_f}{I_L}} \quad (\text{III. 24})$$

Cela soulève la possibilité de concevoir un canal rectangulaire de telle sorte qu'une valeur donnée du nombre de *Froude* soit pas dépassée pendant tous les débits du canal qu'on peut rencontrer. Il est souhaitable d'empêcher le nombre *Froude* maximal  $F_{r \max}$ , de devenir trop proche de l'unité en raison de l'instabilité de la surface libre associé à écoulement critique.

### Exemple d'application III.6.

Un canal rectangulaire de largeur 4,0 m et le coefficient de *Manning*  $n = 0,015$ .

(a-1) Déterminer la pente de fond  $I_f$ , nécessite pour maintenir un écoulement uniforme dans ce canal pour une profondeur d'écoulement égale à 1,25 m et pour les valeurs de nombre de *Froude*  $F_r$  égal à : (i) 2,0, (ii) 1,0 et (iii) 0,5.

(a-2) Trouver la pente limite  $I_L$ , et la profondeur correspondante cette pente.

(b) Trouver la pente longitudinale nécessite pour fournir un écoulement uniforme de nombre de *Froude*  $F_r$ , inférieur ou égal à une valeur égale 0,5 pour tous les débits.

### Solution

(a-1) l'expression généralisée pour un canal rectangulaire est comme suit :

$$\bar{I}(\eta) = \frac{I_f b^{1/3}}{F_r^2 g n^2} = \frac{(1 + 2\eta)^{4/3}}{\eta^{1/3}};$$

Le paramètre de forme  $\eta = y_n/b = (1,25/4,0) = 0,3125$ .

$$\Rightarrow \bar{I}(\eta = 0,3125) = \frac{(1 + 2 \times 0,3125)^{4/3}}{0,3125} = 2,81528;$$

$$\Leftrightarrow I_f = 2,81528 \frac{F_r^2 g n^2}{b^{1/3}} \Rightarrow I_f = 2,81528 \times \frac{9,81 \times 0,015^2}{4,0^{1/3}} F_r^2 = 0,003914587 \times F_r^2;$$

Donc

$$(i) \quad F_r = 2,0 \Rightarrow I_f = 0,003914587 \times 2^2 = 0,015658.$$

$$(ii) \quad F_r = 1,0 \Rightarrow I_f = I_c = 0,003914587 \times 1^2 = 0,003915 \text{ et}$$

$$(iii) \quad F_r = 0,5 \Rightarrow I_f = 0,003914587 \times 0,5^2 = 0,0009787.$$

(a-2) La pente limite est donnée lorsque les paramètres suivants sont égaux à :

$$F_r = 1;$$

$$\eta_c = \frac{1}{6} \Rightarrow \bar{I}_c(\eta_c) = \frac{8}{3};$$

Alors par l'application de la formule généralisée indiquée ci-dessus on a :

$$I_L = \frac{8}{3} \times \frac{1^2 \times 9,81 \times 0,015^2}{4^{1/3}} \Rightarrow I_L = 0,003708$$

La profondeur critique correspond à cette pente est tirée à partir de paramètre de forme critique  $\eta_c$ , tel que

$$\eta_c = \frac{y_c}{b} = \frac{1}{6} \Rightarrow y_c = \frac{4}{6} = 0,667 \text{ m};$$

Cette profondeur est la profondeur critique limite correspondant la pente limite d'un canal rectangulaire.

(b) La pente de fond du canal ou la pente longitudinale pour que nombre de *Froude* ne dépasse pas la valeur maximale qui été égale à 0,5.

Par l'application de la relation (III.22) on a :

$$I_f = I_L F_r^2_{max} \Rightarrow I_f = 0,003708 \times (0,5)^2;$$

$$\Leftrightarrow I_f = 0,000927.$$

Il est intéressant d'observer dans la figure III.8, ci-dessous :

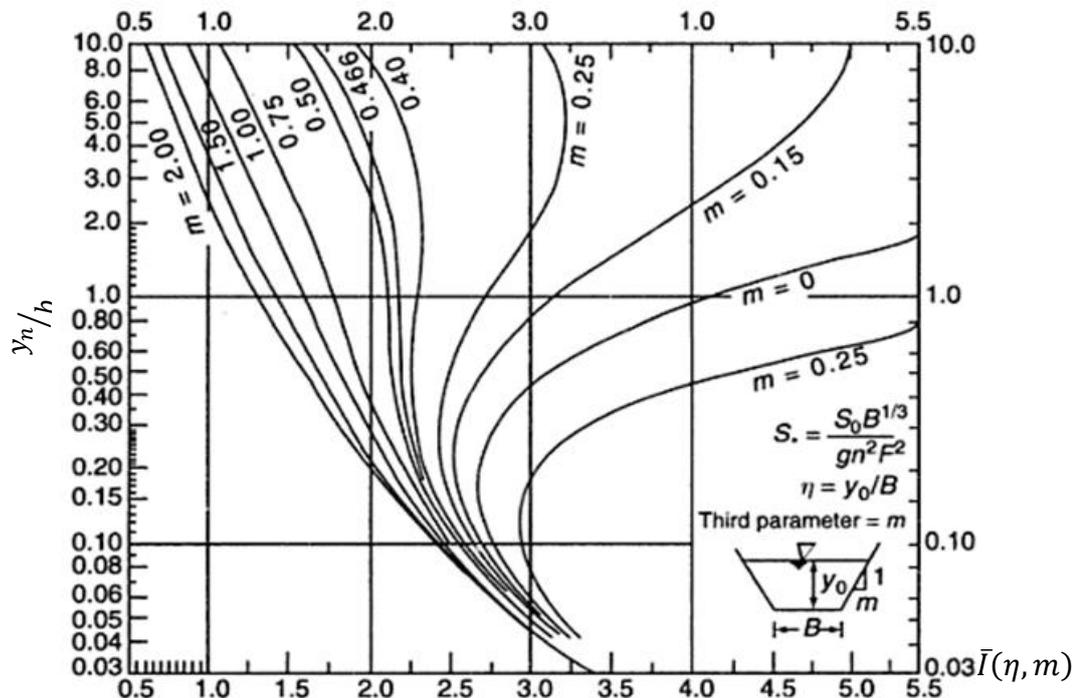


Figure III.8: la relation généralisée de l'écoulement

Jones, L E and Tripathy, BN "Generalized Critical slope for trapezoidal channels", Jour of Hyd Div, Proc. ASCE, Vol.91, Pt.1 Paper 4202, Jan. 1965, pp 85-91

$S_*$  et  $S_0$  correspond respectivement  $\bar{I}(\eta, m)$  et  $I_f$

Pour  $m = 0,46635$ , le paramètre,  $\bar{I}(\eta)$  est essentiellement constant à une valeur de 2,15 sur une plage de valeurs de  $\eta$  s'étendant de 0,5 à 1,5 et  $\bar{I}(\eta)$ , et varie très lentement avec  $\eta$ , dans le reste de tracé. Ainsi, une section trapézoïdale avec  $m = 0,46635$  peut donner un canal dans lequel le nombre de Froude  $F_r$  de l'écoulement est essentiellement constant sur un nombre suffisamment important de profondeurs.

#### III.4. La pente critique et la pente limite

La pente d'un canal transporte un débit donné d'un écoulement uniforme à la profondeur critique est appelée la pente critique  $I_c$ . La condition régissant la pente critique dans n'importe quel canal ; peut être facilement obtenue à partir de l'équation (III.16) en mettant  $Fr = 1$ . Pour les canaux trapézoïdaux, en dénotant la pente critique généralisée, le comportement de  $\bar{I}_c(\eta, m)$ , peut être étudiée en utilisant la figure III.8. Toutes les conclusions tirées dans la section précédente pour  $\bar{I}(\eta, m)$  s'appliqueront également à la relation  $\bar{I}_c(\eta, m) - \eta_c$ .

Pour un canal de forme et rugosité donnée,  $I_c$  aura une valeur minimum dans une condition correspondant à une valeur limite de  $\bar{I}_c(\eta, m)$ . La plus petite valeur de  $I_c$ , est appelée la pente limite,  $I_L$ . On s'occupe de la pente critique et limite avec un vif intérêt. La figure III.8 peut être étudiée pour produire les points suivants:

1. Pour un canal de forme trapézoïdale et de la rugosité donnée, une profondeur donnée de l'écoulement critique peut être mis à jour par une et une seule pente critique. Toutefois, pour une pente critique donnée, il peut y avoir plus d'une profondeur critique.
2. Pour les canaux de seconde espèce ( $m$  négative) et pour les canaux rectangulaires ( $m = 0$ ), il existe un seul pente limite. Pour un canal rectangulaire  $\bar{I}_L = 8/3$ , et le rapport d'aspect critique  $\eta_c = 1/6$ .
3. Pour  $m \geq 0.46635$ , toutes les pentes peuvent être critique, et pour chaque pente il existe une profondeur critique. Dans cette gamme il n'y a pas des pentes limites. Pour  $m = 0.46635$ , la valeur limite de  $\bar{I}_c(\eta, m)$  est 2.15446 et le rapport d'aspect critique  $\eta_c = 0.7849$ .
4. Pour  $0 < m < 0.46635$  il ya deux valeurs de la pente limite  $(\bar{I}_c(\eta, m))_1$  et  $(\bar{I}_c(\eta, m))_2$ , avec  $(\bar{I}_c(\eta, m))_1 < (\bar{I}_c(\eta, m))_2$ . Alors pour :
  - 4.1.  $(\bar{I}_c(\eta, m))_1 < I_c < (\bar{I}_c(\eta, m))_2$ , il ya trois profondeurs critiques pour chaque,  $I_c$  ;

4.2.  $(\bar{I}_c(\eta, m))_1 = I_c$  ou bien  $(\bar{I}_c(\eta, m))_2 = I_c$ , il ya deux profondeurs critiques ;

4.3.  $I_c > (\bar{I}_c(\eta, m))_2$  ou bien  $(\bar{I}_c(\eta, m))_1 > I_c$  dans ce cas il ya une seule profondeur critique pour chaque pente.

### Conclusion

Le présent chapitre a montré l'importance de la pente critique ainsi que ces propriétés, notamment, la pente limite, ça valeur indique la nature de la pente de canal, soit une pente forte ou bien faible. Cette pente est définie comme la limite minimale de la pente critique calculée selon les relations régissant l'écoulement uniforme en introduisant la condition critique de l'écoulement. Une relation de la pente limite généralisée à été établit pour un canal de forme trapézoïdale en fonction des paramètres géométriques, la nature des parois, la pente du fond et ainsi que le *nombre de Froude*. Cette relation nous permet de soulever la possibilité de concevoir des canaux de telle sorte qu'une valeur donnée du *nombre de Froude* ne soit pas dépassée pendant tous les débits du canal qu'on peut rencontrer. Il est souhaitable d'empêcher le *nombre Froude* maximal  $F_{r \max}$ , de devenir trop proche de l'unité en raison de l'instabilité de la surface libre associé à écoulement critique.

# *Chapitre IV*

*Calcul de la profondeur critique dans les  
canaux ouverts*

#### IV.1.Introduction

La profondeur critique est un paramètre important dans l'analyse des écoulements variés dans les canaux et les cours d'eau naturels. Pour les canaux triangulaires, rectangulaires, et des sections de canaux paraboliques, il est possible d'exprimer la profondeur critique de manière analytique. Cependant, pour de nombreuses sections pratiques, y compris la section trapézoïdale et circulaire, les équations de la profondeur critique sont implicites. Pour ces sections la profondeur critique est actuellement obtenue par essai et par la procédure d'erreur, ou en utilisant des équations empiriques ou semi-empiriques sur la base de l'ajustement des courbes. Dans la conception des canaux ouverts, il est important de calculer la profondeur critique afin de déterminer, la nature du régime d'écoulement. Si l'écoulement est fluvial, il est relativement facile de contrôler l'écoulement à travers les transitions du canal car les écoulements sont tranquilles et l'action des vagues est minime. En écoulement fluvial, la profondeur en un point quelconque est influencée par un contrôle en aval. Par contre si l'écoulement est torrentiel, la profondeur de l'écoulement en un point quelconque est influencée par un contrôle en amont.

La profondeur critique ne dépend que de la vitesse d'écoulement et la géométrie du canal (Chow,1959 ; Henderson, 1966), et l'équation générale du calcul de la profondeur critique a été établie au deuxième chapitre de cette partie qui s'exprimée comme suit :

$$\left( Q^2 / g \right) = \left( A^3 / T \right)_c$$

Cette équation est une équation de base régissant les conditions d'écoulement critiques dans un canal. On peut noter que la condition d'écoulement critique est régie uniquement par la géométrie du canal et de débit d'écoulement. D'autres caractéristiques du canal tel que la pente du lit et la rugosité n'influent pas sur l'état d'écoulement critique pour toutes les valeurs de débit.

L'objectif de ce chapitre, est de faire le point sur l'état de connaissances de principales relations classiques établies pour le calcul de la profondeur d'écoulement critique dans les canaux ouverts. Notre étude bibliographique se limitera aux cas des canaux ouverts les plus avantageux tels que canal trapézoïdal, circulaire.

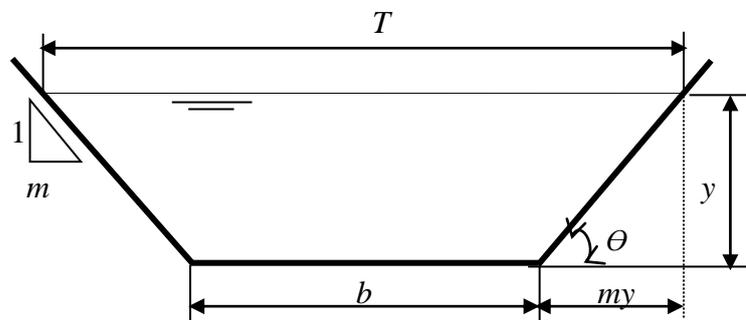
### IV.1. Profil trapézoïdale

La section trapézoïdale est toujours préférée dans les canaux en terre, et cela pour la stabilité des talus latéraux. Dans les sols mous, les pentes latérales plates sont plus employées tandis que dans un sol dur les talus utilisés de pentes raides.

#### IV.1.1. Caractéristiques du profil trapézoïdal

La figure IV.1, est un schéma représentatif d'un canal de forme trapézoïdale, elle est caractérisée par sa base de largeur  $b$ , la pente  $m$ , égal à la cotangente de l'angle d'inclinaison  $\theta$  des parois du canal par rapport à l'horizontale.

L'écoulement est défini par sa profondeur  $y$ .



**Figure IV.1 :** Schéma de définition de la forme géométrique trapézoïdale

Les équations de l'aire de la section mouillée et celle du périmètre mouillé peut s'écrire :

$$A = (b + my)y \quad (IV.1)$$

$$P = b + 2 \left( \sqrt{y^2 + (my)^2} \right) = b + 2y\sqrt{1 + m^2} \quad (IV.2)$$

Selon l'équation (IV.1), l'expression de la base  $b$  peut s'écrire :

$$b = \frac{A}{y} - my \quad (IV.3)$$

En tenant compte de la relation (IV.3), le périmètre mouillé  $P$  est donc :

$$P = \left( \frac{A}{y} - my \right) + 2y\sqrt{1 + m^2} \quad (IV.4)$$

Pour obtenir la condition de la section économique, en dérivant l'équation de périmètre mouillé donnée par la relation (IV.4) par rapport à la profondeur d'écoulement  $y$  et en l'égalant à zéro. En gardant  $A$  et  $m$  comme des constantes.

$$\frac{dP}{dy} = \frac{A}{y^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0 \quad ;$$

De cette équation, nous pouvons écrire :

$$A = (2\sqrt{1+m^2} - m)y^2 \quad (IV.5)$$

En égalant les relations (IV.1) et (IV.5), il devient :

$$(b + my)y = (2\sqrt{1+m^2} - m)y^2 \quad ;$$

$$\Leftrightarrow by + my^2 = (2\sqrt{1+m^2} - m)y^2$$

De cette dernière égalité, il devient que :

$$b = 2y(\sqrt{1+m^2} - m) \quad (IV.6)$$

L'équation (IV.6) est la condition nécessaire pour la section de canal trapézoïdal pour être plus efficace et économique. Ainsi nous pouvons écrire :

$$T = (b + 2my) = 2y\sqrt{1+m^2} \quad (IV.7)$$

Ce qui signifie que la largeur au miroir le plus efficace doit être égale à deux fois la longueur d'un côté incliné de ce canal.

Dans l'expression de périmètre mouillé, il existe deux variables  $y$  et  $m$ . La condition de la section la plus efficace obtenu ci-dessus, a été déduit en tenant  $m$  comme constante. Maintenant, en maintenant  $y$  constant et en différenciant par rapport à  $m$ , et en égalant à zéro, une deuxième condition peut être obtenue.

$$\frac{dP}{dm} = -y + \frac{2my}{1+m^2} = 0 ;$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2my}{1+m^2} ;$$

$$\Leftrightarrow 2m = \sqrt{1+m^2} ;$$

Ainsi

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Si  $\theta$  est l'angle que les côtés du canal font avec l'horizontale, alors :

$$\tan \theta = (1/m) = \sqrt{3}$$

Ou

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ \quad (IV.8)$$

Ce qui signifie que le périmètre mouillé est minimal, lorsque  $\theta = 60^\circ$ .

Le rayon hydraulique de la section trapézoïdale la plus efficace peut être obtenu en remplaçant la première condition (IV.6), dans la définition du rayon hydraulique  $R_h$ :

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{(b + my)y}{b + 2y\sqrt{1 + m^2}} = \frac{[2y(\sqrt{1 + m^2} - m) + my]y}{[2y(\sqrt{1 + m^2} - m) + 2y\sqrt{1 + m^2}]} = \frac{(2y\sqrt{1 + m^2} - my)y}{(2y\sqrt{1 + m^2} - my)2},$$

$$\Leftrightarrow R_h = y/2 \quad (IV.9)$$

Nous remarquons que la valeur de  $R_h$  est indépendante de la pente du talus  $m$ . De plus, notons que l'on retrouve le même rayon hydraulique que pour la section semi-circulaire inscrite dans le trapèze.

#### IV.1.2. Calcul de la profondeur critique de la section trapézoïdale

L'un des aspects importants de génie hydraulique consiste à calculer la profondeur critique si le débit volume  $Q$  est donné. Du fait que la forme de la section trapézoïdale est compliquée, les méthodes les plus utilisées pour l'estimation de la profondeur critique, dans le siège d'un écoulement uniforme ; dans un canal de section trapézoïdale sont la méthode semi-empirique et la méthode graphique.

##### IV.1.2.1. La méthode semi-empirique

La relation la plus recommandée est celle de *Straub*, 1982, (*Richard H. French*, 1985), telle que :

$$y_c = 0.81 \left( \frac{\psi}{m^{0.75} b^{1.25}} \right)^{0.27} - \frac{b}{30m} \quad (IV.10)$$

Ou  $\psi = \alpha Q^2 / g$ , en supposant que le paramètre,  $\alpha$  égale à l'unité.

La relation (IV.10), proposée par *Straub* est applicable lorsque  $0.1 < (Q/b^{2.5}) < 4.0$ , et si la quantité  $(Q/b^{2.5}) < 0.1$ , la valeur de  $y_c$  est calculée en utilisant la relation de la profondeur critique pour un canal de section rectangulaire.

**Exemple d'application IV.1**

On veut calculer la profondeur critique d'un écoulement dans canal trapézoïdale, avec les données suivantes :

$$b = 6.0 \text{ m}, m = 2 \text{ et } Q = 17.0 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Solution :**

Tous d'abord on calcul la valeur de la quantité  $Q/b^{2.5}$ , pour vérifier l'applicabilité de la relation de *Straub*.

$$\frac{Q}{b^{2.5}} = \frac{17}{6^{2.5}} = 0,19;$$

La condition est vérifiée, et maintenant on calcul la valeur du paramètre  $\psi$ , l'application de la relation mène à écrire :

$$\psi = \frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{1 \times 17^2}{9.81} = 29.5;$$

La profondeur critique  $y_c$  en vertu de la relation (IV.10) :

$$y_c = 0.81 \left( \frac{29.5}{2^{0.75} \times 6^{1.25}} \right)^{0.27} - \frac{6}{30 \times 2} = 0.86 \text{ m} .$$

Par la comparaison avec la relation universelle, proposée par (*Agroskin, 1953*) soit :

$$y_c = k \left( 1 - \frac{\delta_c}{3} + 0.105\delta_c^2 \right) \quad (IV.11)$$

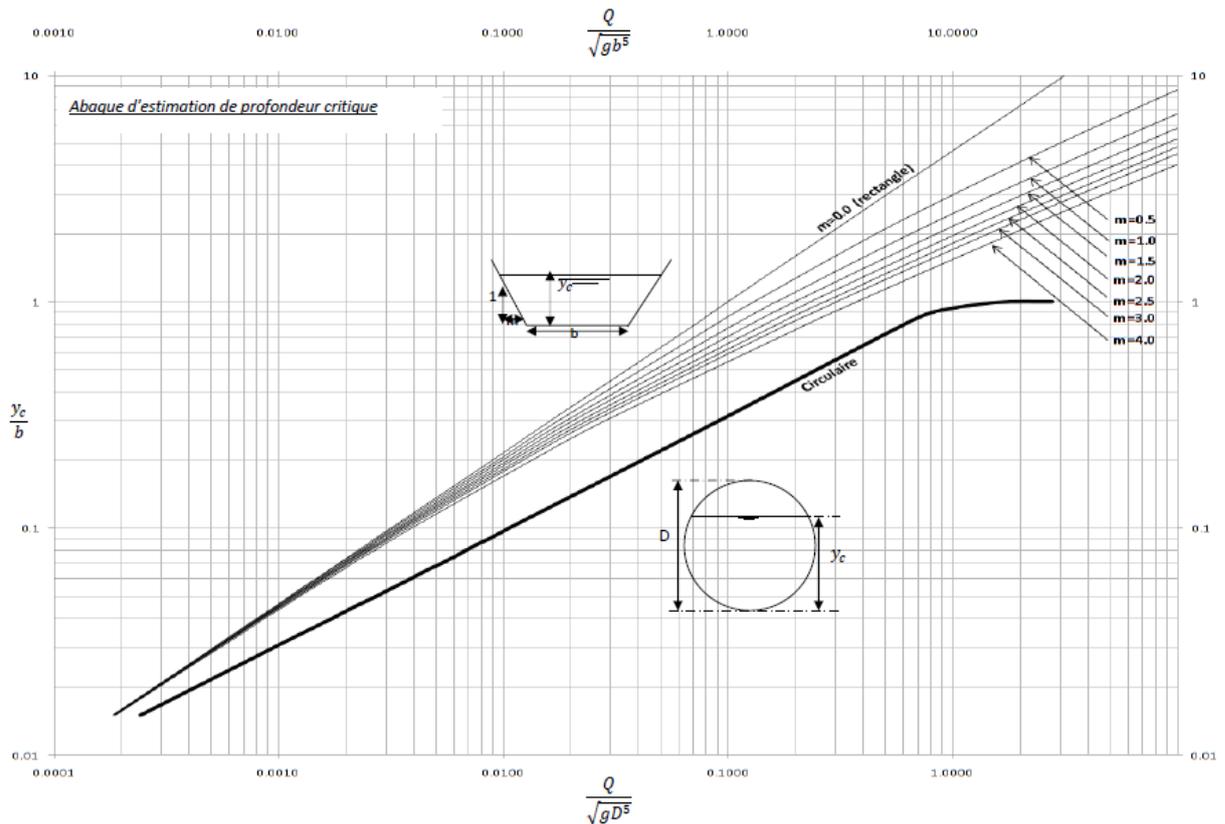
Ainsi les expressions des auxiliaires sont données comme suit :

$$k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} \quad \text{et} \quad \delta_c = \frac{mk}{b} \quad (IV.12)$$

Pour les mêmes données de l'exemple la profondeur critique  $y_c = 0.845 \text{ m}$  .

**IV.1.2.2. La méthode graphique**

La première des méthodes que nous présentons est celle qui utilise les abaques préétablies et ceci pour certaines section particulières : circulaire, rectangulaire, trapézoïdale.



**Figure IV.2 :** Abaque d'estimation de profondeur critique  
(Source : Laboratoire Eau Dépollution Ecosystème et Santé (LEDES) ; version 2009)

L'abaque est aisément à manipuler tel que :

1) On sélectionne dans la famille des courbes, celle qui correspond au fruit de berge  $m$  de l'ouvrage ( $m = 1/\tan \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle que fait le talus avec l'horizontal). Pour un canal rectangulaire,  $m = 1$ , le cas du canal circulaire étant mentionné sur l'abaque.

On calcul la grandeur  $\left(Q/\sqrt{gb^5}\right)$  (pour les ouvrages de sections trapézoïdale et rectangulaire) qu'on positionne en abscisse (sur l'axe du bas) ou  $\left(Q/\sqrt{gD^5}\right)$  (pour les ouvrages de sections circulaires) qu'on positionne en abscisse (sur l'axe du haut) qu'on projette sur de la courbe choisie précédemment.

2) Le rapport,  $y_c/b$  est donné par l'intersection des deux courbes citées auparavant, ensuite on déduit  $y_c$  connaissant  $b$ .

**Exemple d'application IV.2**

On répète le même exemple cité ci-dessus, mais cette fois-ci on utilise la méthode des abaques, soit :

$$Q/\sqrt{gb^5} = \frac{17}{\sqrt{9.81 \times 6^5}} = 0.06155 \quad ;$$

Positionné sur l'axe (de dessus) des abscisses et projeté sur la courbe (abaque de profondeur critique) correspondant à  $m = 2$  (6<sup>ième</sup> par celle du rectangle, de haut en bas), on lit  $y_c/b = 0.14$ , soit  $y_c = 0.84$  m

On peut constater que l'écart compris entre les valeurs de la profondeur critique calculée en utilisant les relations semi-empiriques celle de *Straub* et *Agroskine* et la valeur trouvée en utilisant les abaques, est très acceptable, il est dans l'ordre de quelques centimètres.

**IV.1.2.3. Charge spécifique minimale en terme de profondeur critique**

Pour une valeur constante, de la charge spécifique,  $H_s = C^{et}$ , la valeur de débit volume  $Q$  est maximale lorsqu'on a :

$$\frac{dQ}{dy} = 0 \quad (IV.13)$$

La charge spécifique comme nous l'avons vue dans le chapitre précédent, est donnée par :

$$H_s = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2};$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q^2}{2gA^2} = H_s - y$$

$$\Leftrightarrow Q^2 = 2gA^2(H_s - y);$$

Or :

$$Q = A\sqrt{2g(H_s - y)} \quad (IV.14)$$

Maintenant, pour trouver le débit maximum,  $Q_{max}$ , en différentiant la relation (IV.14) par rapport à  $y$ , pour une charge spécifique donnée.

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{d}{dy} \left( A\sqrt{2g(H_s - y)} \right) = \frac{dA}{dy} \sqrt{2g(H_s - y)} - \frac{2gA}{2\sqrt{2g(H_s - y)}} = 0;$$

Après la simplification et réarrangement de cette dernière équation, on obtient la condition suivante :

$$[2g(H_s - y)] \frac{dA}{dy} - gA = 0 \quad (IV.15)$$

En tenant compte de la relation (IV.1), de l'aire de la section mouillée  $A$ , la relation (IV.15) devient alors:

$$2g(H_s - y)(b + 2my) - g(by + my^2) = 0 \quad (IV.16)$$

En terme de la variable  $y$  cette équation, peut s'écrire :

$$y^2 + \left(\frac{3b - 4mH_s}{5m}\right)y - \frac{2bH_s}{5m} = 0 \quad (IV.17)$$

La relation (IV.17) est une équation de deuxième ordre de la variable  $y$  l'une de ces solutions, à un caractère physique et d'un intérêt pratique.

Dans l'aspect simplifié, nous posons les termes figurant dans la relation (IV.17) par :

$$\left(\frac{3b - 4mH_s}{5m}\right) = c;$$

Et

$$-\frac{2bH_s}{5m} = d.$$

Introduisons le changement des paramètres dans la relation (IV.17). Nous obtenons :

$$y^2 + cy + d = 0$$

Le discriminant  $\Delta$ , de l'équation est positif et elle admet deux solutions tels que :

$$y_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{\Delta}}{2};$$

On admet la solution positive qui a une signification physique qui exprime la profondeur critique. Cette solution correspond respectivement au débit maximal  $Q_{max}$  et à une charge spécifique minimale  $H_s$ .

Alors :

$$y_c = \frac{-\left(\frac{3b - 4mH_s}{5m}\right) + \sqrt{\left(\frac{3b - 4mH_s}{5m}\right)^2 + \frac{8bH_s}{5m}}}{2} \quad (IV.18)$$

La relation (IV.18) de la profondeur critique  $y_c$  correspond à la charge spécifique minimale  $H_s$ , et s'écrit alors plus simplement :

$$y_c = \frac{1}{10} \left[ \sqrt{\left(2 \left(\frac{b}{m}\right) + 4H_s\right)^2 + 5 \left(\frac{b}{m}\right)^2} + 4H_s - 3 \left(\frac{b}{m}\right) \right] \quad (IV.19)$$

Cette équation permet de définir la relation de la profondeur critique en fonction la charge spécifique pour un canal sa section trapézoïdale.

Notons que lorsque :

1)  $m = 0$ , correspond à un angle d'inclinaison des parois du canal  $\theta = 90^\circ$ , la forme rectangulaire est alors obtenue, alors pour  $m = 0$ , la relation (IV.16), devient :

$$2g(H_s - y_c)b - g(by_c) = 0;$$

Et

$$y_c = \frac{2}{3}H_s$$

2)  $b = 0$ , la forme triangle est alors obtenue, alors pour  $b = 0$ , la relation (IV.19), devient :

$$y_c = \frac{4}{5}H_s$$

Maintenant en peut établir la relation de la charge spécifique minimale, en fonction de la profondeur critique, en vertu de la relation (IV.17), soit :

$$H_s = \frac{(5my_c + 3b)y_c}{4my_c + 2b} \quad (IV.20)$$

Nous voulons vérifier la concordance des relations (IV.19) et (IV.20), par l'exemple ci-dessous :

### **Exemple d'application IV.3**

Calculer la profondeur critique d'un écoulement dans canal trapézoïdale, avec les données suivantes :

$$b = 2.0 \text{ m}, \quad m = 1 \quad \text{et} \quad H_s = 1.0 \text{ m}.$$

**Solution :**

L'application de la relation (IV.19), conduit à :

$$y_c = \frac{1}{10} \left[ \sqrt{\left(2 \left(\frac{b}{m}\right) + 4H_s\right)^2 + 5 \left(\frac{b}{m}\right)^2 + 4H_s} - 3 \left(\frac{b}{m}\right) \right] ;$$

$$\Leftrightarrow y_c = \frac{1}{10} \left[ \sqrt{\left(2 \left(\frac{2}{1}\right) + 4 \times 1\right)^2 + 5 \times \left(\frac{2}{1}\right)^2 + 4 \times 1} - 3 \times \left(\frac{2}{1}\right) \right] = 0,716515139 \text{ m.}$$

La charge spécifique minimale,  $H_s$ , correspondant à la profondeur critique,  $y_c$  calculée par la relation (IV.19), en tenant compte de la relation (IV.20) :

$$H_s = \frac{(5my_c + 3b)y_c}{4my_c + 2b} = \frac{(5 \times 1 \times 0,716515139 + 3 \times 2) \times 0,716515139}{4 \times 1 \times 0,716515139 + 2 \times 2} = 1 \text{ m.}$$

Notons que les résultats des calculs ne peuvent pas être arrondis, pour des raisons que ce régime est instable (fluctuation de la surface libre). Une petite variation de l'énergie spécifique provoque des variations sensibles de profondeur de part et d'autre de  $y_c$ .

#### IV.1.2.4. La méthode d'approximations successives

Cette procédure, est aussi opérationnelle pour la détermination de la profondeur critique. Pour des sections de formes arbitraire ou complexe. La méthode consiste à l'introduction d'un paramètre  $Z_c$ , appelé facteur de la section pour le calcul de l'écoulement critique. (*Bakhmeteff, 1932*) a introduit le concept de ce facteur, qui est défini par son expression donnée par :

$$\left( A \sqrt{\frac{A}{T}} \right)_c = Z_c = \frac{Q}{\sqrt{g}} \quad (IV.21)$$

(*Bakhmeteff, 1932*) a utilisé ce facteur, pour déterminer la profondeur critique d'un écoulement dans une section du canal pour que le facteur  $Z_c$ , doit être égale à la quantité  $(Q/g^{0.5})$ . Pour un canal prismatique, il est possible qu'une seule profondeur  $y_c$  ce qui rend l'écoulement à l'état critique dans ce canal pour un débit volume  $Q$  donné.

L'expression de facteur  $Z_c$  pour la section trapézoïdale, en vertu de la relation de définition (IV.21) soit :

$$Z_c = \frac{((b + my_c)y_c)^{3/2}}{(b + 2my_c)^{1/2}} \quad (IV.22)$$

On calcule la valeur donnée de la quantité,  $(Q/g^{0.5})$ . En prenant les différentes valeurs de  $y$ , on trouve les valeurs respectives de  $Z$ , jusqu'au moment où nous obtenons l'égalité donnée par la relation (IV.21). La valeur de  $y$  à laquelle l'égalité (IV.21) se trouve remplie est celle de la profondeur critique  $y_c$ . On peut également construire la courbe de la relation,  $Z = f(y)$ .

#### IV.1.2.4. La méthode analytique

Comme nous l'avons vu, plusieurs chercheurs (*Chow V. T., 1959, Henderson F. M., 1966, Hager W., 1983, French R. H., 1986, Draper N.R., Smith H., 1998, Swamee P. K., 1993*), ont montré que le calcul de la profondeur critique est basé sur la condition de criticité d'écoulement dans canaux découverts, pour toutes les formes géométriques, tel que :

$$\frac{\alpha Q^2 T_c}{g A_c^3} = 1 \quad (IV.23)$$

L'expression de la profondeur critique  $y_c$  d'un écoulement, pour les sections respectivement rectangulaire et triangulaire en vertu l'équation (IV.23), sont :

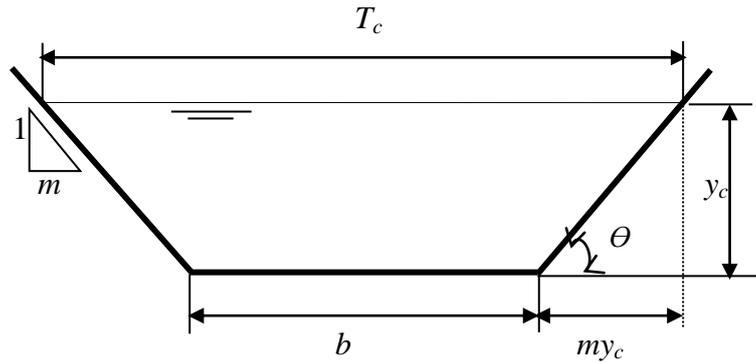
$$y_c = \left( \frac{\alpha q^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (IV.24)$$

$$y_c = \left( \frac{2\alpha Q^2}{g m^2} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (IV.25)$$

Les relations (IV.24) et (IV.25) sont des solutions exactes de l'équation (IV.23), tels que :

$y_c$  est la profondeur critique en (m),  $g$  est l'accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ ),  $q$  est le débit par unité de largeur en ( $m^2/s$ ) et  $\alpha$  est le facteur de correction de l'énergie ( $\alpha = 1.0$ ) et  $m$  est la pente des talus du canal.

Pour un canal trapézoïdal illustré dans la figure IV.3, la profondeur critique  $y_c$ , n'a pas pu être déterminée explicitement, due à sa forme géométrique complexe.



**Figure IV.3 :** Schéma de définition des paramètres géométriques du canal trapézoïdale pour un régime d'écoulement critique

Où :

$T_c$  : est la largeur au miroir à l'état critique en (m)

$A_c$  : est l'aire de la section mouillée critique en ( $m^2$ ).

Ces paramètres critiques on peut les écrire respectivement de la manière suivante :

$$T_c = \left(1 + \frac{2my_c}{b}\right) b; \quad (IV.26)$$

Et

$$A_c = \left(1 + \frac{my_c}{b}\right) by_c \quad (IV.27)$$

Selon les relations (IV.26) et (IV.27), le facteur de *Bakhmeteff*,  $Z_c$  est donc :

$$Z_c = \left(A \sqrt{\frac{A}{T}}\right)_c = \left(1 + \frac{my_c}{b}\right) by_c \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{my_c}{b}\right) y_c}{\left(1 + \frac{2my_c}{b}\right)}} \quad (IV.28)$$

On définit le paramètre sans dimension critique  $M_c$ , tel que :  $M_c = (my_c/b)$  et selon la relation (IV.21), le carré de facteur de section critique devient :

$$Z_c^2 = \frac{(1 + M_c)^2 (1 + M_c) (b^2 y_c^3)}{(1 + 2M_c)} = \frac{Q^2}{g} \quad (IV.29)$$

En multipliant les deux membres de l'égalité (IV.29) par la quantité  $\left(m^3/b^5\right)$ , il vient que :

$$\frac{(1 + M_c)^3 M_c^3}{(1 + 2M_c)} = \left(\frac{Q^2}{gb^2}\right) \frac{m^3}{b^3} \quad (IV.30)$$

La relation (IV.30) est une équation d'ordre six, représente la forme classique, qui définit les paramètres hydrauliques et géométriques de l'écoulement critique dans un canal de forme trapézoïdale. A l'exception de débit volume  $Q$  ; le calcul du paramètre sans dimension critique  $M_c$ , ne peut être explicitement déterminée.

Notons que le paramètre  $M_c = (my_c/b)$ , à une signification physique, est telle que lorsque le trapèze est caractérisé par une base  $b = 1$  et angle d'inclinaison de ces parois  $\theta = 45^\circ$ , celui-ci est appelé trapèze de référence. Donc  $M_c$  est défini la profondeur critique  $y_c$ , dans ce profil de référence.

La relation (IV.30) pour le trapèze de référence s'écrit comme suit :

$$\frac{(1 + y_c)^3 y_c^3}{(1 + 2y_c)} = \left(\frac{Q^2}{g}\right) \quad (IV.31)$$

Plusieurs chercheurs ont proposé des méthodes pour résoudre ce problème. (Wang Z. Z., 1998) a inspiré une équation adimensionnelle de l'équation (IV.30), pour le calcul de la profondeur critique par le changement de variable suivant :

$$K_c = \frac{my_{c\text{rec}}}{b} \quad (IV.32)$$

Où :

$$y_{c\text{rec}} = \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{gb}\right)^2};$$

$y_{c\text{rec}}$  est définie comme la profondeur d'un canal rectangulaire de largeur  $b$ .

Selon la relation (IV.32), l'équation (IV.30), alors s'écrit:

$$\frac{(1 + M_c)^3 M_c^3}{(1 + 2M_c)} = K_c^3 \quad (IV.33)$$

En peut écrire cette équation de la manière suivante :

$$M_c(1 + M_c) = K_c(1 + 2M_c)^{\frac{1}{3}} \quad (IV.34)$$

Pour résoudre l'équation (IV.34), (Wang Z. Z., 1998) a développé une solution explicite, il estime la profondeur d'écoulement critique  $y_c$ , dans un canal trapézoïdale donnée comme suit :

$$y_c = \frac{b}{2m} \left[ \sqrt{1 + 4K_c \left( 1 + 4K_c \left( 1 + 4K_c \left( 1 + 4K_c \right)^{\frac{1}{5}} \right)^{\frac{1}{6}} \right)^{\frac{1}{6}}} - 1 \right] \quad (IV.35)$$

La relation (IV.30) peut s'écrire par une expression plus explicitement comme suit :

$$t_c^6 - \epsilon_c t_c - 1 = 0 \quad (IV.36)$$

Où :

$$t_c = (2M_c + 1)^{1/3}, \quad M_c = \left( my_c/b \right) \quad \text{et} \quad \epsilon_c = 4 \left( m^3 Q^2 / gb^2 \right)^{1/3} .$$

Plusieurs chercheurs ont proposé des solutions de l'équation (IV.36) tels que :

- 1) (Wang et al., 1999) ont utilisé l'équation (IV.36) pour développer une relation de la profondeur d'écoulement critique pour un canal trapézoïdale, donnée par :

$$M_c = \frac{my_c}{b} = \frac{\sqrt{1 + \epsilon_c(1 + \epsilon_c)^{0.2}} - 1}{2} \quad 0 < \epsilon_c \leq \infty \quad (IV.37)$$

L'erreur maximale de l'équation (IV.37), est inférieure à 1.0% dans la gamme pratique de  $0,00 \leq \epsilon_c \leq 1000$ .

- 2) (Vatankhah A. R., Easa S., 2011) ont proposé une solution de l'équation (IV.36) par autre expression de la profondeur critique, soit :

$$y_c = 0.25 \frac{b}{m} \epsilon_c (1 + 0.2722 \epsilon_c^{1.041})^{-0.339} \quad 0 \leq \epsilon_c \leq 25 \quad (IV.38)$$

Dans la gamme pratique de  $\epsilon_c \in [0, 25]$ , de l'équation (IV.38), celle-ci admet une erreur maximale inférieure à 0.07% .

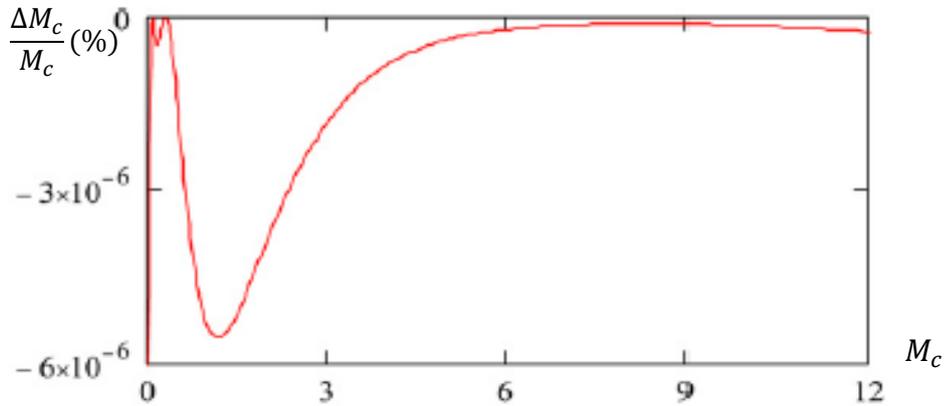
- 3) (Vatankhah A. R., 2013) a proposé une solution de l'équation (IV.36) par l'utilisation de la méthode analytique de *Newton-Raphson*, telle que :

$$M_c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{5t_{c0}^{0.864} + 1}{6t_{c0}^{0.720} - \epsilon_c} \right)^3 \quad (IV.39)$$

Où :

$$t_{c0} = 1 + 1.161 \epsilon_c (1 + 0.666 \epsilon_c^{1.041})^{0.374} .$$

La relation (IV.39) a été établie dans la gamme  $0 \leq M_c \leq 12$  correspondant à  $0 \leq \epsilon_c \leq 213,4$ . L'écart relatif maximal qu'elle occasionne est inférieur à  $6 \times 10^{-6} \%$ , comme l'indique la figure IV.4.



**Figure IV.4:** Ecart relatif en % occasionnés par la relation (IV.39) sur le calcul du taux de remplissage critique  $M_c$ , (Ali R. Vatankhah, 2013)

Aussi, (Swamee P. K., Rathie P. N, 2005) ont rapporté des équations analytiques exactes pour la profondeur critique dans les sections trapézoïdales transversales. La plupart des équations suggérées pour le calcul de la profondeur critique des canaux trapézoïdaux ont des formes complexes et sont utilisés dans des conditions spéciales.

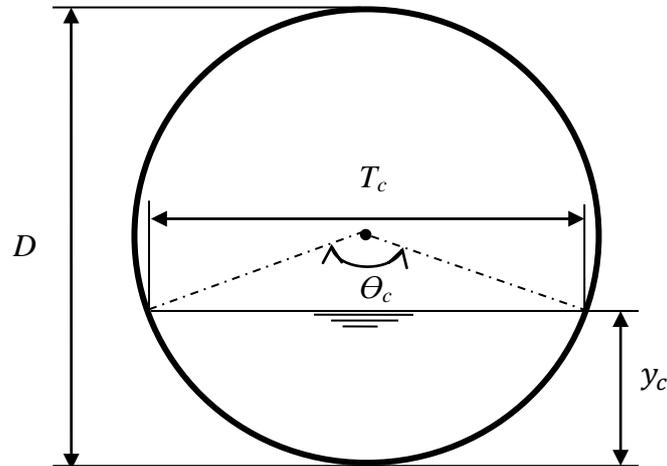
## IV.2. Canal en profil circulaire

Les canaux de forme circulaire sont des canaux couverts partiellement occupés (drains, égouts,..). Pour qu'un canal couvert se comporte comme un canal à surface libre, il faut que la pression reste la pression atmosphérique est donc qu'il reste une tranche d'air suffisante pour qu'il ne se produise pas d'effet pneumatiques. Cela arrive par exemple lorsqu'un réseau de drain urbain tend à se mettre en charge.

Les canaux à profil circulaire partiellement pleins, sont à multiples usages dues aux caractéristiques hydrauliques avantageux de ce profil dans son efficacité d'évacuation. De par leur caractéristique hydraulique avantageuse, les cadres entièrement fermés de forme circulaire s'opposent mieux au soulèvement de la structure et offrent une meilleure résistance aux poussées latérales. C'est pour ces raisons que ce profil nécessite une étude détaillée pour le calcul de la profondeur critique.

### IV.2.1. Caractéristiques géométriques de profil circulaire

La figure IV.5, est un schéma représentatif d'un canal de forme circulaire partiellement remplie, elle est caractérisée par son diamètre  $D$ . L'écoulement est défini par sa profondeur critique  $y_c$



**Figure IV.5 :** Schéma de définition des paramètres géométriques en conduite circulaire pour un régime d'écoulement critique

Les caractéristiques de la conduite circulaire partiellement occupée par l'écoulement en état critique sont, en particulier :

- 1) La relation entre la profondeur critique  $y_c$  et l'angle au centre s'écrit :

$$\cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) = \left(1 - 2\frac{y_c}{D}\right) \quad (IV.40)$$

- 2) L'aire de la section mouillée critique  $A_c$ , telle que :

$$A_c = \frac{D^2}{8} (\theta_c - \sin \theta_c) \quad (IV.41)$$

- 3) Le périmètre mouillé critique  $P_c$ , tel que :

$$P_c = \frac{1}{2} \theta_c \cdot D \quad (IV.42)$$

- 4) La largeur au miroir critique :

$$T_c = D \cdot \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \quad (IV.43)$$

- 5) Le rayon hydraulique  $R_{hc} = A_c/P_c$ , qui s'exprime, en ayant recours aux relations (IV.41) et (IV.42), par :

$$R_{hc} = \frac{D}{4} \left(1 - \frac{\sin \theta_c}{\theta_c}\right) \quad (IV.44)$$

### IV.2.2. Calcul de la profondeur critique

L'écoulement critique est régi par la relation (IV.23) de condition de criticité. En insérant les relations (IV.41) et (IV.43) dans la relation (IV.23), celle-ci devient :

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} = \frac{\left[\frac{D^2}{8}(\theta_c - \sin \theta_c)\right]^3}{D \cdot \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right)} \quad (IV.45)$$

Après un réarrangement, la relation ci-dessus peut s'écrire comme suit :

$$\frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{0.044194[(\theta_c - \sin \theta_c)]^{3/2}}{\sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right)^{1/2}} = f(y_c/D) \quad (IV.46)$$

Si  $\eta_c = (y_c/D)$  est le taux de remplissage de la conduite à l'état critique, et si en introduisant le débit relatif :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} \quad (IV.47)$$

La relation (IV.46) permet alors de déduire que :

$$Q^* = \frac{0.044194[(\theta_c - \sin \theta_c)]^{3/2}}{\sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right)^{1/2}} = f(\eta_c) \quad (IV.48)$$

C'est la relation (IV.48) qui permet de définir le débit limite au-delà duquel l'écoulement dans le canal de forme circulaire est rendu à l'état critique.

Selon la relation (IV.40), La relation (IV.48), peut s'exprimer par :

$$Q^* = \frac{\left[\cos^{-1}(1 - 2\eta_c) - 2(1 - 2\eta_c)\sqrt{\eta_c(1 - \eta_c)}\right]^{\frac{3}{2}}}{8\sqrt{2}[\eta_c(1 - \eta_c)]^{\frac{1}{4}}} \quad (IV.49)$$

La relation (IV.49) est celle qui régit l'écoulement critique dans une conduite circulaire. En pratique, les paramètres  $Q$  et  $D$ , par conséquent  $Q^*$ , sont connus et l'on recherche alors à déterminer la profondeur critique  $y_c$ . La détermination de  $y_c$ , passe par celle de  $\eta_c$ , puisque  $y_c = \eta_c D$ . La relation (IV.49) montre clairement que  $\eta_c$  est implicite vis-à-vis de  $Q^*$  et l'évaluation de  $\eta_c$  nécessiterait un procédé itératif ou graphique. Cependant les scientifiques

(Straub W. O, 1978 ; Swamee P.K, 1993), tentent de développer des relations empiriques de la profondeur critique dans un canal en profil circulaire.

#### IV.2.2.1. Relations approchées pour le calcul de la profondeur critique

A) Les relations empiriques, approchées, au calcul de la profondeur critique  $y_c$ , sont :

- 1) Straub W. O, en 1978 ; propose la relation empirique suivante :

$$y_c = \frac{1.01}{D^{0.265}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g}} \right)^{0.506} \quad \text{pour} \quad 0.02 < \frac{y_c}{D} \leq 0.85 \quad (IV.50)$$

- 2) Swamee P.K, en 1993 ; propose la relation empirique approchée du taux de remplissage critique  $\eta_c = (y_c/D)$ , par l'utilisant de la méthode d'ajustement des courbes, telle que :

$$\frac{y_c}{D} = [0.77F_D^{-6} + 1.0]^{-0.085} \quad \text{où,} \quad F_D = \frac{Q}{D^2 \sqrt{gD}} \quad (IV.51)$$

Comme (Ali R. Vatankhah, Said M. Easa, 2011) ont indiqué, que l'équation (IV.50) est de dimensions inhomogène. Cette équation n'est pas très précise et son erreur dépend du diamètre du canal. Par exemple, pour  $D \geq 0,25$  m, l'erreur maximale est de 5,8%. Tandis que l'erreur maximale de l'équation (IV.51), est inférieure à 1,46% dans une gamme pratique de  $0,02 \leq \eta_c \leq 1$ .

- 3) Récemment, (Vatankhah et Bijankhan, 2010) ont utilisé la méthode d'ajustement de courbe, pour obtenir une équation plus précise de la profondeur critique  $y_c$  d'un canal de forme circulaire, par la relation suivante :

$$\eta_c = \frac{0.9584Q^{*0.5}}{(1 + 0.0106Q^{*0.52} - 0.0132Q^{*3.726})^{-10.022}} \quad (IV.52)$$

L'erreur maximale de l'équation (IV.52), est inférieure à 0.25% dans la gamme pratique de  $0,00 \leq \eta_c \leq 0,92$ .

- 4) Autre relation a été proposé par (Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011) pour le calcul de la profondeur critique, exprimée par le paramètre d'aspect critique  $\eta_c$ , soit :

$$\eta_c = (13,6Q^{*-4.227} - 13Q^{*-4.2} + 1)^{-0,1156} \quad (IV.53)$$

L'erreur maximale de l'équation (IV.53), est inférieure à 0.27% dans la gamme pratique de  $0,01 \leq \eta_c \leq 1$ .

#### Exemple d'application IV.4

Trouver la valeur de la profondeur critique  $y_c$ , pour un écoulement d'un débit volume égale à  $5.0 \text{ m}^3/\text{s}$  dans un canal circulaire partiellement rempli de diamètre  $D = 2.0$  m et  $\theta = 120^\circ$ , en utilisant les relations de : Straub W. O et Swamee P.K.

**Solution :**

1) Par *Straub W. O*, en 1978 :

$$y_c = \frac{1.01}{D^{0.265}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g}} \right)^{0.506} = y_c = \frac{1.01}{2^{0.265}} \left( \frac{2.0}{\sqrt{9.81}} \right)^{0.506} = 1.065 \text{ m};$$

2) Par *Swamee P.K*, en 1993 :

$$F_D = \frac{Q}{D^2 \sqrt{gD}} = \frac{5.0}{2^2 \times \sqrt{9.81 \times 2}} = 0.2822;$$

$$\frac{y_c}{D} = [0.77F_D^{-6} + 1.0]^{-0.085} \Rightarrow \frac{y_c}{2} = [0.77 \times 0.2822^{-6} + 1.0]^{-0.085} \Rightarrow y_c = 1.072 \text{ m}$$

#### **Exemple d'application IV.5**

Soit une conduite circulaire de diamètre  $D = 1,9 \text{ m}$ , siège d'un écoulement critique, écoule un débit volume  $Q = 1,8 \text{ m}^3/\text{s}$ , en veut déterminer la profondeur  $y_c$  par l'application des relations (*Ali R. Vatankhah et Bijankhan, 2010*) et (*Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011*)

La solution ce fait par deux étapes :

i. Selon la relation (V.47), le débit relatif  $Q^*$  est

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 1,9^5}} = 0,1154925;$$

ii. En application respectivement de la relation (IV.52) et (IV.53), la profondeur critique est :

(1) La profondeur critique calculée par la relation (*R. Vatankhah et Bijankhan, 2010*) :

$$\text{Eq (IV. 52)} \Rightarrow y_c = \frac{D \times 0.9584Q^{*0.5}}{(1 + 0.0106Q^{*0.52} - 0.0132Q^{*3.726})^{-10.022}},$$

$$\Rightarrow y_c = \frac{1.9 \times 0.9584 \times 0,115492^{0.5}}{(1 + 0.0106 \times 0,115492^{0.52} - 0.0132 \times 0,115492^{3.726})^{-10.022}} = 0,6405 \text{ m}$$

$$\Rightarrow y_c \cong 0,640 \text{ m.}$$

La condition d'appliquer la relation (IV.52) est satisfaisante en raison

$$0,0 \leq \eta_c = (y_c/D) = 0,3368 \leq 0,92.$$

(2) La profondeur critique  $y_c$ , selon la relation (*R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011*) :

$$\text{Eq (IV.53)} \Rightarrow y_c = D(13,6Q^{*-4.227} - 13Q^{*-4.2} + 1)^{-0,1156},$$

$$\Rightarrow y_c = 1,9 \times (13,6 \times 0,115492^{-4.227} - 13 \times 0,115492^{-4.2} + 1)^{-0,1156} = 0,6399$$

$$\Rightarrow y_c \cong 0,640 \text{ m.}$$

La condition d'appliquer la relation (IV.53) est satisfaisante en raison  $0,01 \leq \eta_c =$

$$(y_c/D) = 0,33789 \leq 1.$$

A titre de comparaison, en vertu la relation de *P.K.Swamee* :

$$F_D = \frac{Q}{D^2 \sqrt{gD}} = \frac{1,8}{1,9^2 \times \sqrt{9,81 \times 1,9}} = 0,11549;$$

$$\frac{y_c}{D} = [0,77F_D^{-6} + 1,0]^{-0,085} \Rightarrow \frac{y_c}{1,9} = [0,77 \times 0,11549^{-6} + 1,0]^{-0,085} \Rightarrow y_c = 0,646 \text{ m.}$$

On peut conclure que les résultats obtenus à travers cette application sont très proches entre eux. Autrement dit que les relations sont très fiables et d'un intérêt pratique important.

## Conclusion

Le chapitre précédent a pour but de donner les relations et les expressions définissant la profondeur critique des écoulements évoluant des canaux de différentes formes. Dans ce chapitre, nous avons étudié les canaux les plus utilisés en pratique, tels que les canaux de profil trapézoïdal et circulaire. Généralement ces canaux possèdent une efficacité considérable au même temps ce sont des canaux de section transversale complexe.

Les profils géométriques de ces canaux considérés comme une contrainte présente un défi majeur ; pour déterminer une relation exacte déterminant la profondeur critique. La seule équation de base pour la détermination de la profondeur critique est l'équation de la criticité qui régit l'écoulement critique telle que :  $Q^2 T_c - g A_c^3 = 0$ . A l'exception des canaux rectangulaire et triangulaire, la solution devienne implicite.

(*Straub W. O*, 1978), (*Swamee P.K*,1993), (*Wang et al.*, 1999) et (*Vatankhah A. R*, 2013) ont évalué la profondeur critique pour ces canaux et ont monté à travers leurs relations, que les valeurs de la profondeur critique sont caractérisées par une grande précision, traduite par l'erreur relatives résultantes qui sont généralement considérées négligeables . Les auteurs ont montré que la profondeur critique est une fonction des dimensions géométriques de la section considérée ainsi que le débit franchissant cette dernière.

# *Chapitre V*

## *Description de la section de contrôle*

## V.1.Introduction

La mesure du débit, ainsi que le contrôle d'écoulement des cours d'eau trouvent prioritairement leur utilité dans l'évaluation et la prévention des risques liés aux inondations, mais aussi dans la connaissance des volumes disponibles à des fins d'alimentation en eau potable des populations, usage majeur est parfois remis en cause pour des raisons soit qualitatives ou quantitatives. Ces mesures s'introduisent au sein d'une opération dite « contrôle hydraulique ». Cette dernière est importante pour la compréhension du fonctionnement du bief hydrométrique. Le contrôle hydraulique s'exerce sous différentes formes, deux types essentiels parmi eux leur correspondent le tronçon de contrôle et la section de contrôle. Dans ce présent chapitre nous tenterons de montrer comment se manifeste l'écoulement critique et les endroits des survenues de celle-ci d'une part et d'autre part, comment nous pouvons bénéficier de ces paradoxes dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien, par leur utilisation comme des sections de contrôles pour le jaugeage des débits dans les canaux irréguliers ou bien par un calcul direct dans les canaux réguliers.

## V.2. La profondeur critique et la section de contrôle

L'écoulement critique se produit non seulement par un changement de la pente du canal, mais aussi peut se produire à cause des singularités présentées par des ouvrages hydrauliques réalisés devant l'écoulement comme des rétrécissements, élargissements, seuils, déversoirs etc. Il est évident qu'en analysant des problèmes d'écoulement dans des canaux ouverts il est important de savoir au départ si l'écoulement critique se produit n'importe où, si oui, lequel à la section il doit se trouve, particulièrement parce que ces conditions imposent une limitation au débit, et sont ainsi interviennent comme des données indispensables dans les dimensions des ouvrages concernés.

Il se peut qu'en une ou plusieurs sections, la profondeur de l'écoulement devienne égale à la profondeur critique  $y_c$ , correspondant au débit  $Q$  ; pour chacune de ces sections on dira que l'écoulement traverse une *section critique* ; dans telle section la vitesse sera égale à la vitesse critique  $V_c$  et la charge spécifique sera minimale. Notons comme nous l'avons vu antérieurement, que dans cette section le siège d'un écoulement critique, la profondeur  $y_c$  pour un canal de forme donnée, ne dépend que du débit  $Q$  et donc de la forme  $y_c = f(Q)$ . Cette notion a été exploitée adroitement dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien qu'est été exclusivement employée pour le tarage et le calcul des débits au moyen des stations

hydrométriques. Ces opérations sont incluses au sein du contrôle hydraulique. Dans ce contexte la section critique est examinée comme un point de contrôle.

### V.2.1 Contrôle hydraulique

La notion de contrôle hydraulique est importante pour la compréhension du fonctionnement du bief hydrométrique, il s'agit des méthodologies et techniques de la mesure des hauteurs d'eau et des débits dans les cours d'eau. Le contrôle s'exerce sous différentes formes, et tout le tracé de la courbe de tarage dépend de ses propriétés.

#### V.2.1.1. Définition

Avec les auteurs américains, nous appellerons "contrôle" toute singularité du canal (fort accroissement de pente, rétrécissement important, seuil déversant dénoyé, etc.....) qui provoque une augmentation suffisante de la vitesse de l'eau pour faire passer l'écoulement du régime fluvial au régime torrentiel. Il existe donc dans l'emprise du "contrôle" une section où la vitesse moyenne de l'eau est juste égale à la vitesse critique afférente à cette section; cette dernière est désignée sous le nom de "section de contrôle" (G. REMENIERAS, 1949).

#### V.2.1.2. Types de contrôle

Il a été mis en évidence deux types d'écoulement dans lesquels le débit volume  $Q$  est analytiquement associé à la hauteur d'eau  $y$  lue à l'échelle limnimétrique par une relation bi-univoque  $Q = f(y)$ . Ces deux types d'écoulement sont :

1. Ecoulement **uniforme** régi par la relation de *Mannig-Strikcler*,  $Q = kAR_h^{2/3} I^{1/2}$ .
2. Ecoulement **graduellement varié** avec conditions aux limites dans le temps.

Dans la pratique les conditions requises pour qu'un écoulement permanent, soit :

1- Strictement uniforme ne peuvent guère être réalisées en pratique que dans un long canal artificiel de pente et de section constantes, transitant un débit constant et sur des secteurs suffisamment éloignés de toute singularité (seuils, vannes, coudes, etc ..). Dans ce type d'écoulement, chaque débit est associé à la hauteur normale  $y_n$ , qui dépend des dimensions du canal, de la rugosité et de la pente du fond selon la relation de *Mannig-Strikcler*. C'est cette propriété que les hydrologues anglo-saxons désignent le contrôle hydraulique sous le nom de *Channel-Control*. Il est rarement de trouver dans les lits naturels où les conditions sont favorables, c'est à dire loin des singularités, et la pente du fond doit être suffisante pour assurer un bon transfert du débit, puisqu'un régime uniforme ne peut s'établir dans un lit à fond plat. Par ailleurs le profil transversal du lit doit être de forme géométrique régulière ; ceci limite généralement l'effet du *Channel-Control* au seul lit apparent, (G. JACCON, 1986).

2- Les conditions de l'écoulement uniforme seront rarement remplies sur les cours d'eau naturels même canalisés, susceptibles de produire un remous qui détruirait le parallélisme entre la ligne d'eau et le profil en long du radier du canal. Si de telles conditions peuvent exister sur un canal d'aménée d'usine hydroélectrique ou d'irrigation, on ne les rencontre jamais sur les cours d'eau naturels même canalisés. Cet écoulement est dit écoulement graduellement varié, dont la variation des formes du lit et des caractéristiques hydrauliques d'un point à un autre est suffisamment progressive. Et entre ces points, on observe un remous soit d'exhaussement, soit d'abaissement et le principe de contrôle hydraulique et via une section de contrôle.

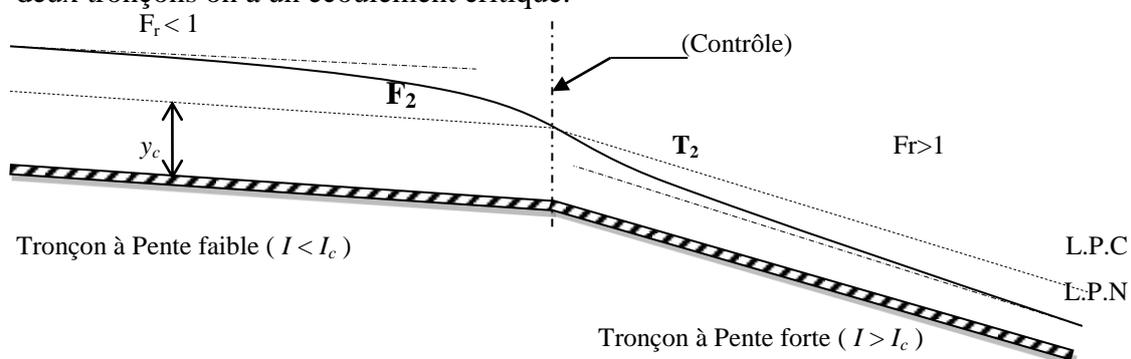
Du point de vue d'intérêt pratique la section de contrôle est alors une section à écoulement critique, dans laquelle la profondeur pour un débit donné (profondeur critique) ne dépend que de la géométrie de la section. Dans le domaine de l'hydraulique et exclusivement dans l'hydrométrie.

L'étude du profil de la ligne d'eau d'un écoulement permanent non uniforme sortirait du cadre de cette étude. On trouvera dans les manuels d'hydraulique les douze (12) types de profils qui peuvent exister dans les canaux prismatiques de section constante et tout profil de la ligne d'eau aura au moins une section de contrôle. Nous nous bornerons ici à noter les points suivants il est mieux de préciser ces indications dont nous examinerons successivement :

### V.2.1. Le cas d'un changement de la pente

#### V.2.1.1. Tronçon de faible pente raccordé par un autre à forte pente

En premier cas une application importante de la théorie de l'écoulement critique est le *contrôle de l'écoulement*. On peut démontrer à travers la figure ci-dessous qu'une perturbation ou une variation du niveau en aval n'influence pas le niveau amont si entre les deux tronçons on a un écoulement critique.



**Figure V.1 :** Emplacement de la section de contrôle critique  
 L.P.C: Ligne de la profondeur critique, L.P.N: Ligne de la profondeur normale  
 $F_2$  et  $T_2$  respectivement courbe de remous d'abaissement fluviale et torrentiel

La section de contrôle d'une installation de mesure se situe aux endroits où existe un écoulement critique et où l'écoulement lent passe à l'écoulement rapide. Ceci signifie que s'il y a un écoulement critique dans la section de contrôle d'une installation de mesure, le niveau amont sera indépendant du niveau aval.

### V.2.1.2. Tronçon de forte pente raccordé par un autre à faible pente

On rencontre ce type d'ouvrage dans les ouvrages de dissipation d'énergie qui sont situés au pied des barrages. Le phénomène qui apparaît dans tous ces ouvrages est une diminution locale de la vitesse moyenne sur une faible longueur, accompagnée d'une réduction importante de l'énergie mécanique par la formation d'un ressaut hydraulique.

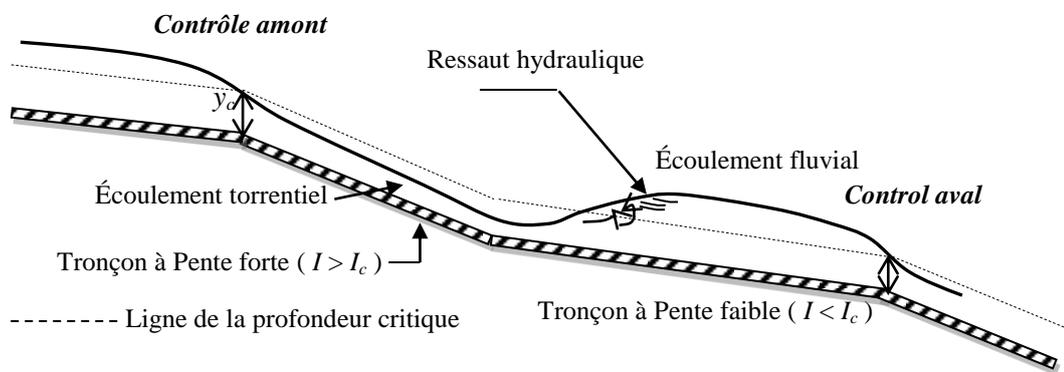


Figure V.2.1 : Ressaut hydraulique entre deux contrôles

Dans la figure IV.2, un ressaut hydraulique est localisé entre deux sections de contrôles, amont et aval. Si l'écoulement est fluvial dans le profil en travers considéré, cette section de contrôle se trouve à l'aval, tandis que si l'écoulement est torrentiel elle se trouve à l'amont.

### V.2.2. Réservoir alimente un canal

Un cas pratique rencontré à l'état vaste représenté par des ouvrages hydrauliques d'irrigations et d'assainissement, et notamment dans les ouvrages d'évacuation des eaux quel que soit leurs nature.

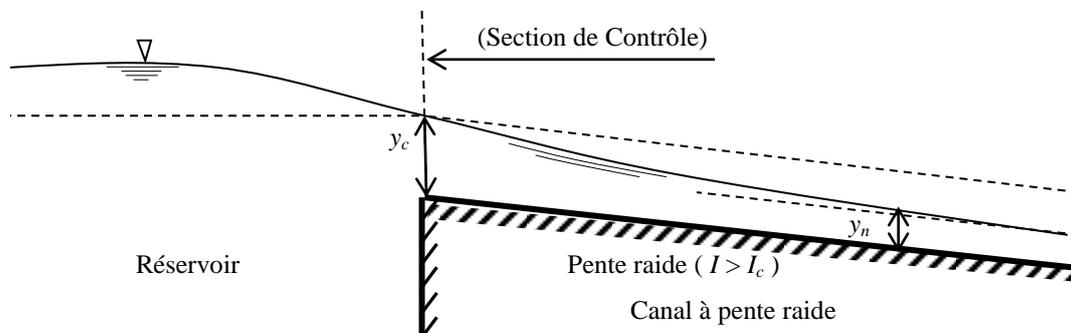


Figure V.2.2 : Emplacement de la section de contrôle critique

Le schéma simplifié ci-dessus montre un écoulement entre le réservoir et un canal, et ce dernier est tout simplement assuré par la différence de charge, cette dernière établit une courbe de remous du passage d'un régime fluvial en amont à un régime torrentiel en aval. Si ce n'est que une petite subtilité en ce qui concerne la section de contrôle exactement à la jonction entre le réservoir et le canal. S'agissant d'une section de contrôle unique pour deux régimes différents, il ne peut s'agir que de la hauteur critique  $y_c$ . Pour ces deux cas cette propriété intéressante se rencontre à chaque fois qu'un régime fluvial amont jouxte un régime torrentiel aval par une section de contrôle, ce qui est bien pratique lorsqu'on veut mesurer un débit.

### V.2.3. Un canal alimente un réservoir

On rencontre ce cas, généralement dans les stations de pisciculture et les ouvrages de débouchés des eaux de l'inondation. Le schéma simplifié ci-dessous présente un canal rectangulaire alimente un réservoir d'une surface constante. Nous citons deux cas suivant le type d'écoulement dans le canal, fluvial ( $F_r < 1$ ) ou torrentiel ( $F_r > 1$ ) :

#### V.2.3.1. Alimentation par un écoulement fluvial

Un canal de pente douce débouchant dans un réservoir d'élévation variable de surface, et l'écoulement dans le canal est en régime fluvial. Selon le schéma de principe ci-dessous, différents types d'écoulement sont possibles suivant le niveau du réservoir par rapport aux lignes de la profondeur normale LPN et critique LPC.

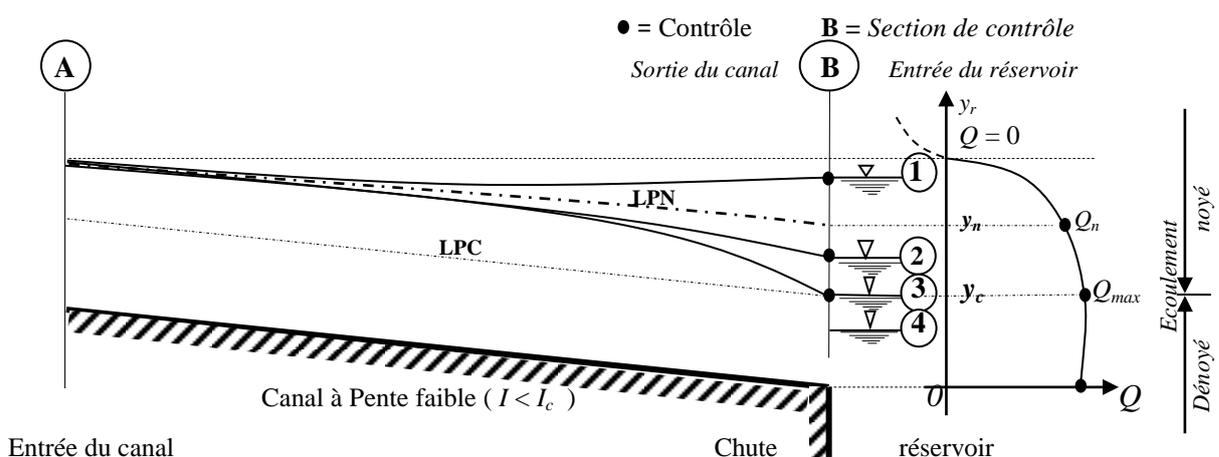


Figure V.3: Emplacement de la section de contrôle

L.P.C: Ligne de la profondeur critique, L.P.N: Ligne de la profondeur normale

1) Le niveau d'eau dans le réservoir est supérieur à la ligne de la hauteur d'écoulement uniforme au point **B1** ; cela donne lieu à une noyade de l'extrémité du canal. Un profil du type **F1** (courbe de remous d'exhaussement) est produit avec le niveau du réservoir au point **B** ; comme témoin.

2) L'écoulement uniforme se produit dans le canal lorsque la profondeur  $y = y_n$  et en appliquant l'équation de *Manning-Strickler* pour déterminer le débit volume  $Q_n$ .

Au point **B2**, l'élévation du réservoir est inférieure à l'élévation de la ligne de profondeur normale *L.P.C*, mais supérieure à la ligne de profondeur critique *L.P.C*. L'élévation dans le réservoir agit comme un contrôle de la courbe **F2**.

3) Le débit du canal est *maximum*,  $Q = Q_{max}$ , lorsqu'on l'élévation du réservoir est descendre jusqu'à la ligne de profondeur critique  $y = y_c$ , au point **B3**. Et le contrôle est toujours au niveau de réservoir.

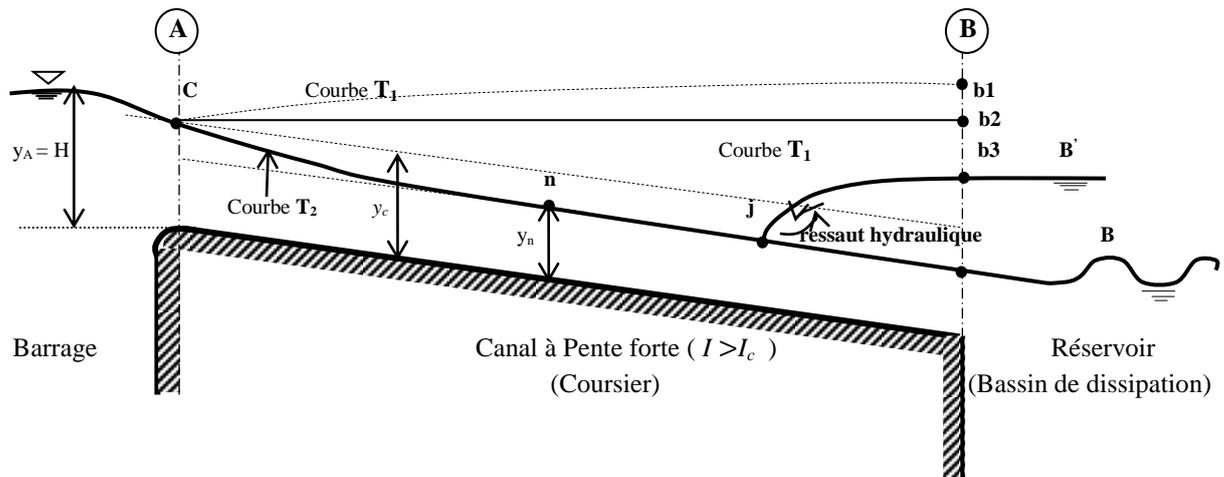
4) Pour un débit maintenu constant, la profondeur d'eau à la section **B**, ne peut pas descendre en dessous de la profondeur critique à l'endroit de point **B4**, même si le niveau d'eau dans le réservoir contenu de s'abaisser. Dans ce cas, une chute libre se forme à la sortie du canal avec une profondeur d'eau égale à la profondeur critique. La profondeur critique  $y_c$ , à un intérêt pratique particulier:

- i. Pour  $y_r \leq y_c$  l'écoulement est dit *dénoyé* ; le débit est constant et égal au débit maximum,
- ii. Pour  $y_r > y_c$  l'écoulement est dit *noyé* ; le débit varie en fonction de  $y_r$  ou ( $y_B$ ).

Le débit maximum,  $Q_{max}$ , ne peut pas être calculé directement. Il s'agit de déterminer le débit qui permet de rejoindre le niveau constant à l'entrée du canal **A**, en partant de la profondeur critique  $y_c$ , à la section **B**. le calcul se fait par tâtonnement en variant le débit, (*Walter H. Graf et M. S. Altinakar, 2000*).

### V.2.3.2. Alimentation par un écoulement torrentiel

Lorsque la pente du canal est en pente raide, ( $I > I_c$ ), l'écoulement dans le canal devient supercritique. Dans les applications pratiques, le coursier est l'ouvrage hydraulique le plus reconnu par ce type d'écoulement, et celui qui évacuer l'eau jusqu'au pied de la retenue souvent avec une vitesse très élevée. À travers le schéma de principe de la figure IV.4, les cas qui pourraient apparaître le plus souvent est comme suit :



**Figure V.4:** Emplacement de la section de contrôle  $T_1$  et  $T_2$  respectivement courbe de remous d'exhaussement et d'abaissement

Etant donné que la section de contrôle est située à l'extrémité **A**, à l'amont du canal, l'écoulement est entièrement régi par une charge critique  $H_c$ , et donc il est prend la ressemblance torrentielle. Trois cas examinés sont :

1)-Lorsque le niveau d'eau aval, en point **B** est supérieur au niveau d'eau à l'amont au point **C**, toute augmentation de la profondeur en allant de l'amont vers l'aval survient progressivement et le profil en long de la ligne d'eau est une courbe de remous type  $T_1$  de remous qui est prend naissance à la profondeur critique,  $y_c$ , orthogonalement et se termine, en croissant, tangentiellment à une horizontale au point **b1**.

2)-Lorsque la profondeur d'eau en aval **B'** est supérieure à la profondeur d'écoulement dans le canal, la ligne d'eau franchit la profondeur critique,  $y_c$ , par augmentation brusque de la profondeur, pour former une courbe de remous de type  $T_1$ . Conséquemment, il se produit un ressaut hydraulique entre les points **j** et **b3**. Cependant, l'écoulement en amont du ressaut hydraulique ne sera pas influencé par l'écoulement d'aval.

3)- Comme le niveau d'eau augmente encore, le ressaut hydraulique se déplace en amont, en conservant sa hauteur et la forme dans la zone d'écoulement uniforme ( $n, b$ ), jusqu'à ce qu'il atteigne le point **n**. La surélévation du ressaut devient nulle quand il atteint la profondeur critique à **c**. Dans l'intervalle, le profil d'écoulement atteint sa limite théorique **cb1** du profil  $T_1$ . Au-delà de cette limite, le débit entrant sera directement influencé par le niveau aval.

Dans les applications pratiques, la **cb2** ligne horizontale peut être considérée comme la limite pratique de l'étape de l'écoulement dans le canal, (Chow, 1959, Henderson 1966).

#### V.2.4. Le cas d'une singularité

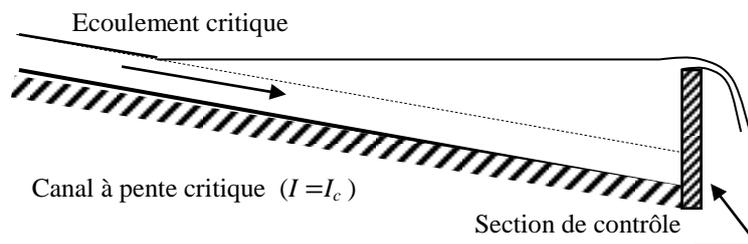
L'écoulement à travers une singularité n'est contrôlé par ce dernier que s'il y a une transition de l'écoulement fluvial à l'écoulement torrentiel. Dans ce cas, les conditions à l'aval de la section critique n'ont pas d'influence sur l'écoulement amont.

Nous tentons à travers ces exemples de montrer trois conditions d'écoulement dans un canal où un bassin a été créé par une singularité barrant le canal.

##### V.2.4.1. Le cas d'un déversoir

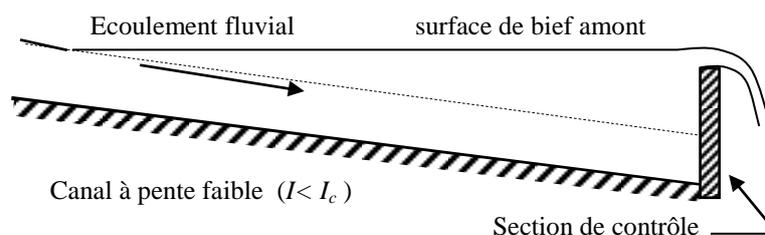
Les trois régimes d'écoulement critique, fluvial et torrentiel avec les pentes correspondantes : critique, douce et raide.

- 1) Si initialement l'écoulement est critique et uniforme (fig V.5.a), la présence d'un barrage induira un écoulement fluvial dans le bassin. La surface du bassin sera pratiquement horizontale



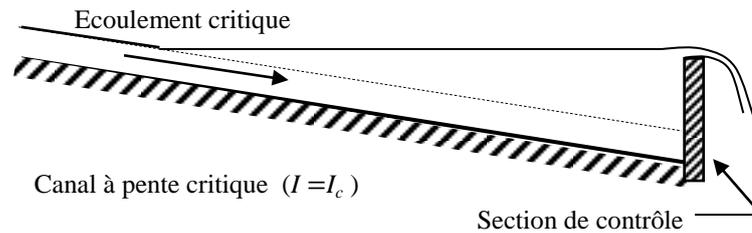
**Figure V.5.a :** Régime critique

- 2) Si initialement l'écoulement est fluvial (fig V.5.b), la surface du bassin remontra sur une longue distance vers l'amont. C'est ce qu'on appelle l'effet de remous. Il faut augmenter la profondeur de l'eau afin d'augmenter la charge qui donnera la vitesse nécessaire à l'eau pour passer au-dessus du barrage de déversoir.



**Figure V.5.b:** Régime fluvial

- 3) Si initialement le courant est rapide (fig V.5.c), on observe un ressaut hydraulique. La surface de l'eau de bassin ne sera pas horizontale mais courbée.



**Figure V.5.c:** Régime rapide

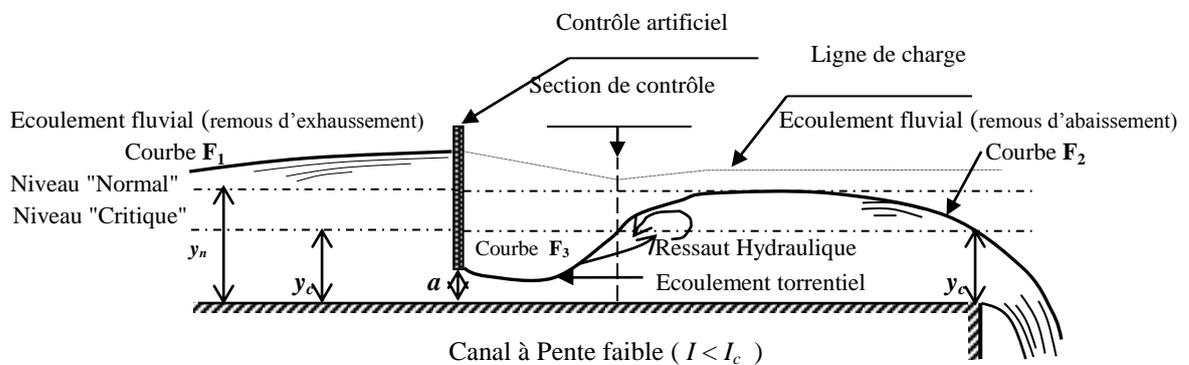
#### V.2.4.2. Le cas d'une structure de contrôle

Dans sa forme la plus simple, une structure de contrôle est conçue pour varier la profondeur de l'eau à (ou par) la profondeur critique (PC), de sorte que le débit est fixe par rapport à la profondeur. Dans la pratique, la plupart des structures de contrôle accélèrent un écoulement fluvial, à travers le régime critique, afin de produire un écoulement supercritique rapide peu profond. Les exemples les plus courants de ces structures comprennent des écluses et déversoirs (Figure V.6.a, V.6.b et V.6.a).

Pour un contrôle efficace au sein d'un canal ouvert, l'écoulement supercritique produit par un contrôle en amont doit être transformé en un écoulement fluvial. Ceci est habituellement réalisé par un ressaut hydraulique dans lequel les caractéristiques de l'écoulement sous-critique sont déterminées par une deuxième structure en aval. Les cas des structures de contrôle les plus rencontrées sont :

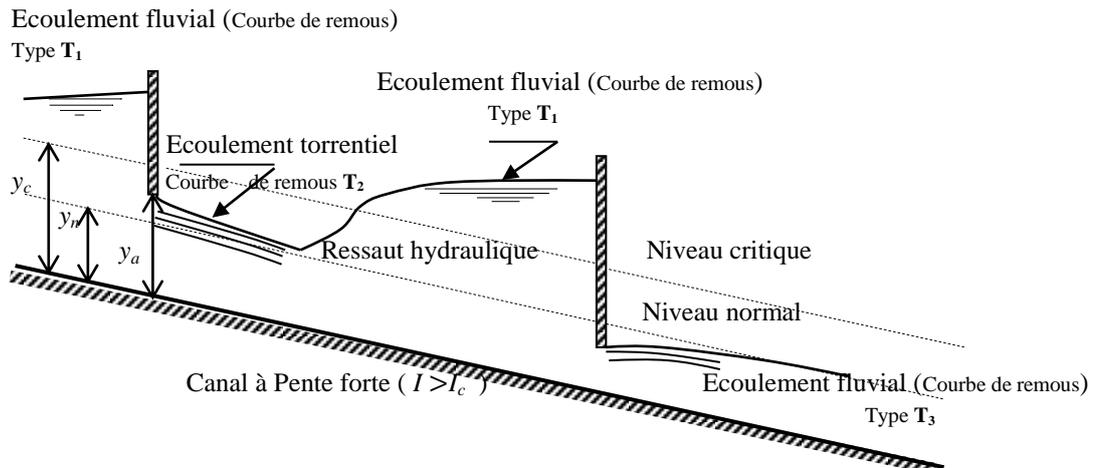
##### V.2.4.2.1. Le cas d'une vanne écluse

La section de contrôle se produit par une vanne d'écluse qui est définie comme une structure de contrôle artificiel placée en amont, à laquelle la profondeur de contrôle  $y_a$ , est soit connue ou peut être déterminée.



**Figure V.6.a:** Profil de la ligne d'eau dans un canal à faible pente

Dans la figure V.6.a, la courbe  $F_3$  est une courbe de remous



**Figure IV.6.b:** Profil de la ligne d'eau dans un canal à forte pente

Dans la figure V.6.a, la courbe  $F_3$  est une courbe de remous d'exhaussement et correspond à un mouvement graduellement retardé; c'est un cas assez rare d'un régime torrentiel ( $y < y_c$ ), elle se rencontre quand, dans un canal de pente inférieure à la pente critique, on oblige la ligne d'eau à descendre en-dessous du niveau critique par une structure de contrôle par exemple à l'aval d'une vanne de fond dénoyée dont la levée  $y_a$ , est plus petite que  $y_c$  ( $y_a < y_c$ ). La courbe  $F_3$  est souvent prolongée par un ressaut permettant de passer du régime torrentiel au régime fluvial à travers une section de contrôle.

La ligne d'eau est représentée en  $T_2$  (Figure V.6.b). C'est une courbe de remous d'abaissement qui correspond à un mouvement graduellement accéléré. On rencontre cette courbe sur les cours d'eau dont la pente est supérieure à la pente critique à l'aval d'une singularité obligeant la ligne d'eau à franchir le niveau critique, par exemple à l'aval une augmentation brusque de pente (Figure V.1).

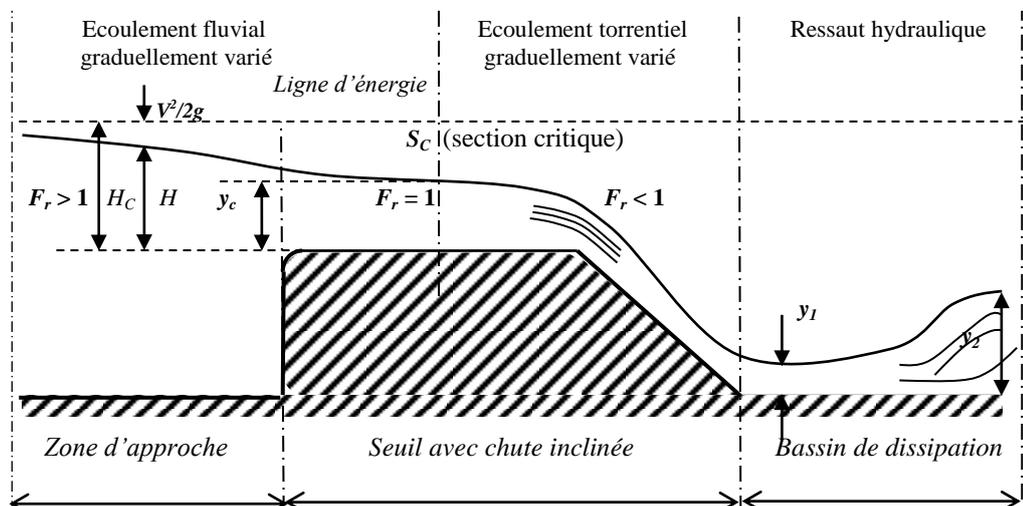
La ligne d'eau est représentée en  $T_3$  (Figure V.6.b). C'est une courbe de remous d'exhaussement qui correspond à un mouvement graduellement retardé. On rencontre cette courbe sur les cours d'eau dont la pente est supérieure à la pente critique, en aval d'un obstacle obligeant la ligne d'eau à s'abaisser en-dessous du niveau normal, par exemple à l'aval d'une vanne de fond dénoyée dont la hauteur de levée  $y_a$ , est inférieure à  $y_n$  ( $y_a < y_n$ ).

Ces considérations sont importantes en hydrométrie pratique. Il est important de savoir que sur des pentes faible, ( $I < I_c$ ), où l'écoulement fluvial, un changement du niveau d'eau en aval se transmet vers l'amont par courbe de remous. Ainsi dans un canal à écoulement fluvial, les conditions d'écoulement sont influencées par les conditions "àval", mais dans un canal à écoulement torrentiel, les conditions d'écoulement dépendent uniquement des

conditions "amont". Le contrôle de l'écoulement se fait à l'extrémité "aval" pour des canaux à écoulement fluvial, et en amont pour des canaux à écoulement torrentiel.

#### V.2.4.2.2. Le cas d'un seuil épais

Un seuil est un ouvrage hydraulique permettant de contrôler ou de mesurer le débit s'écoulant au-dessus de l'ouvrage. Les caractéristiques de l'écoulement par-dessus de cette structure sont d'un intérêt particulier. Il contracte plus ou moins la section d'écoulement et peut permettre de stopper les érosions régressives (évolution de la rivière à l'aval de ponts ou de digues), de stabiliser la rivière ou de relever la ligne d'eau (éventuellement pour l'alimentation de canaux en dérivation). La figure V.6.c, illustre le comportement de l'écoulement au moyen d'un seuil épais.



**Figure V.6.c :** Schéma des écoulements rencontrés dans un seuil dissipateur d'énergie.

Lorsque le déversoir occupe la pleine largeur du cours d'eau, l'écoulement à l'amont du déversoir passera d'un écoulement uniforme à un écoulement graduellement varié pour devenir un écoulement critique quelque part au-dessus de la crête du seuil (figure V.6.c). Cela implique que la vitesse de l'écoulement va graduellement augmenter pour atteindre la vitesse critique au-dessus du seuil.

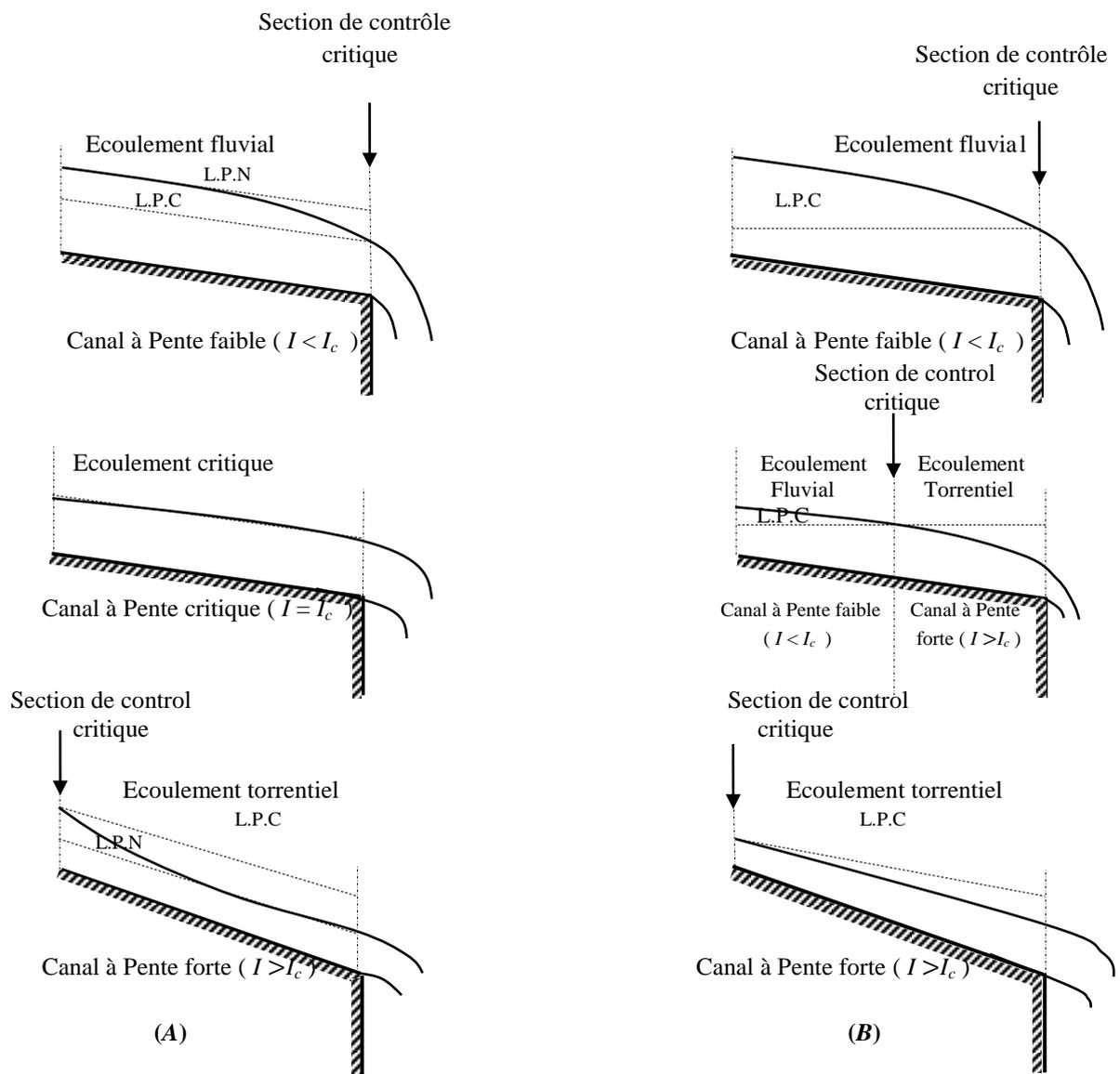
Si on admettant que la vitesse d'approche de l'écoulement soit faible, on peut écrire que  $H_c = H$  charge sur le seuil, et  $y_c = (2/3)H$ , on retrouve le résultat classique. Par ailleurs, on vérifie bien que l'apparition de la section critique correspond à l'obtention du débit maximal.

En aval de la section critique dans la zone de chute l'écoulement  $y$  devient torrentiel (supercritique) et le ressaut hydraulique se forme dans le bassin avec les hauteurs conjuguées  $y_1$  et  $y_2$  respectivement à l'entrée et à la sortie du ressaut. Ce dernier est l'élément clé du seuil

car le passage de l'écoulement torrentiel à l'écoulement fluvial provoque un bouillonnement de l'eau qui dissipe une grande quantité d'énergie.

### V.2.4.3. Cas d'une Chute brusque

L'analyse de l'écoulement se complique par le fait que la section de contrôle peut se produire à une section du canal et sa position ne peut être déterminée facilement. Considérons en particulier l'écoulement au voisinage d'une chute brusque dans un canal large avec une faible inclinaison. La forme de la surface libre pour l'eau est très bien connue (Chow, 1959). Le régime d'écoulement est critique, dans une section proche de la chute. A l'amont de cette section critique, la profondeur de l'écoulement croît graduellement. Les conditions d'écoulement uniforme sont bien vérifiées en allant loin vers l'amont de la chute



**Figure V.7:** Emplacement de la section de contrôle critique.

(A) L'écoulement dans un canal prismatique;

(B) l'écoulement dans un canal non prismatique ou du débit spatialement variée. (V.T Chow, 1959)

Considérer trois pentes différentes de canal pour trois types d'écoulement: (1) écoulement continu dans un canal prismatique (fig. V-7A), (2) écoulement dans un espace varié de débit croissant dans un canal prismatique (fig. V-7B), et (3) écoulement continu dans un canal non prismatique ayant une pente constante mais d'une section transversale variable (fig. V-8B). Tous les canaux débitant librement, en chute brusque.

Dans le premier type d'écoulement, le régime passe du fluvial au régime torrentiel comme la pente du canal varie d'intensité faible à forte. En conséquence, la section critique de contrôle sera déplacée de l'extrémité aval vers l'extrémité amont. Il convient de noter que le déplacement de la section de contrôle critique se produit presque instantanément. Au moment de la transition, l'écoulement critique se déroule sur toute la longueur du canal (vue du milieu de la Figure V.7.A), et donc, n'importe quelle section dans le canal est une, section critique.

Dans le deuxième et troisième type d'écoulement, la transition de l'état de régime aura lieu graduellement d'une section à l'autre et la section de contrôle se déplace en amont. À tout moment pendant la transition (vue du milieu de la Figure V.7.B), l'écoulement en aval de la section de control est torrentiel, et celui qui se trouve en amont est devenu fluvial. La détermination de l'endroit de la section de contrôle sera décrite dans l'article suivant.

La section de contrôle est l'endroit où se localise la profondeur critique, cet état est vérifié si et seulement la condition d'écoulement d'un fluide idéal avec des lignes de courant parallèles, autrement dit à la traversée d'une section critique  $S_c$  la charge spécifique  $H_s$  est minimale,  $(dH_s)/dy = 0$ , c'est-à-dire que la tangente à la ligne de la charge est parallèle au fond du canal.

Il faut cependant signaler qu'au voisinage d'une chute brusque, où les lignes de courant ne sont pas parallèles avec le fond, forment des courbes (convexe), les auteurs (*Rouss, 1938, Bauer et Graf, 1971*) ont montré que la profondeur critique  $y_c$ , apparaît en amont d'une chute brusque et que la profondeur au droit d'une telle chute est d'environ :

$$y_b = 0.72y_c = 0.72^3 \sqrt{q^2/g} ;$$

Pour les canaux de section non rectangulaire à pente faible  $I < I_c$ , (*Rajaratnam et al., 1964*) ont montré, que le coefficient numérique figurant l'équation ci-dessus, peut être pris à 0,75 près. Cependant, dans certaines applications pratiques (*Walter H. Graf et M. S. Altinakar, 2000*) ont admet souvent que la profondeur d'une chute brusque  $y_b$ , est la même que la profondeur  $y_c$ .

### V.3. Section de contrôle

Et comme nous l'avons déjà montré, la section de contrôle est définie comme étant le lieu où, pour toutes les conditions d'écoulement, le débit volume  $Q$  représente une fonction unique de la géométrie  $A(y)$  de cette section. La condition de l'écoulement uniforme ne peut être réalisée dans cette section car elle dépend de plus de la pente du radier  $I$  et de la rugosité  $k$  du canal.

#### V.3.1. L'essai de Bélanger

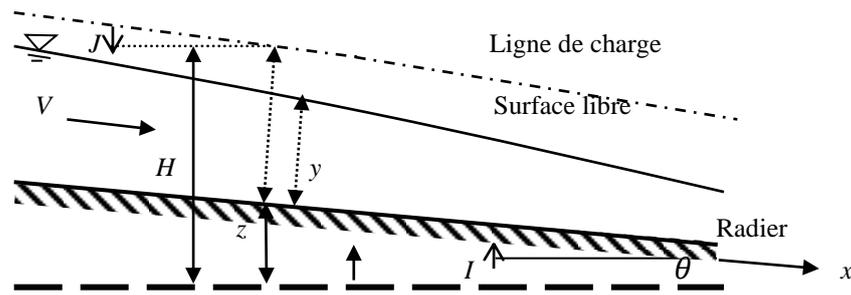
Il est bien de signaler que la section de contrôle est l'une des conditions aux limites des écoulements graduellement variés. Ces derniers se produisent parfois sur des distances importantes et conduisent aux formes de la surface libre appelées courbes de remous. La revue bibliographiée à montrer que la formule fondamentale reliant la courbe de remous aux autres paramètres de l'écoulement a été proposée, en 1828, par *Jean-Baptiste Charles Joseph Bélanger* (1790-1874), (*The backwater equation and the Bélanger equation, Hubert Chanson 2008*). Dans son essai, *Jean-Baptiste Bélanger* dérivait l'équation de remous présentée sur la figure IV.8 à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement avec une lucidité remarquable. Il a développé l'équation de remous au sein d'une série d'hypothèses de base. Ceux-ci sont les suivantes:

- 1) un débit constant,
- 2) un mouvement d'écoulement unidimensionnel,
- 3) une variation progressive de la surface mouillée avec la distance  $x$  le long du canal,
- 4) les pertes dues au frottement qui sont les mêmes pour un écoulement uniforme pour même débit et même profondeur, et
- 5) une répartition de la pression hydrostatique.

Dans les hypothèses ci-dessus, il obtint :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( y \cos \theta + \frac{V^2}{2g} \right) = \cos \theta \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} = S_0 - S_f \quad (V.1)$$

Où  $\theta$  indique l'angle entre le radier et l'horizontal,  $y$  est la hauteur d'eau,  $x$  est la distance longitudinale,  $V$  est la vitesse,  $Q$  est le débit volumique,  $g$  est l'accélération de la gravité,  $A$  est la surface mouillée. Et dans la littérature la pente du radier  $S_0$  et le frottement  $S_f$  sont parfois désignés par  $I$  et  $J$ , respectivement.



**Figure V.8 :** Notation pour les écoulements graduellement variés

*Bélangier* étudia les singularités de l'équation du remous. Il démontra que les deux conditions singulières sont :

La première singularité correspond l'écoulement uniforme, quand la pente de la ligne d'eau égale la pente du radier, dont la profondeur d'eau est égal à la profondeur normale obtient l'expression de la profondeur normale de *PRONY* (1804).

La seconde singularité de l'équation de remous correspond à  $\partial x / \partial y = 0$  et il a abouti à la condition:

$$\frac{Q^2}{g \cos \theta A^3} \frac{\partial A}{\partial y} = 1 \quad (V.2)$$

qui correspond aux conditions d'écoulement critique dans un canal de section transversale irrégulière avec une répartition de la pression hydrostatique. Dans le cas particulier d'un canal ouvert rectangulaire prismatique, l'équation (V.2) donne le résultat classique:  $V^2 = gy \cos \theta$  (*LIGGETT 1993, CHANSON 2006*). *BÉLANGIER* (1828, p. 29) n'a pas utilisé le terme «*écoulement critique*», mais il a souligné explicitement la singularité de l'écoulement: "cas un peu ordinaire" ou un cas particulier. Il a souligné en outre l'impossibilité physique d'observer  $(\partial y / \partial x) = + \infty$ ; pour ce cas spécial d'un écoulement vertical.

*Charles Bresse* (1860) à établir l'équation de remous sous forme différentielle ordinaire du premier ordre pour l'inconnue  $y(x)$  que celle-ci a été l'étendue des écoulements dans les canaux non prismatiques, l'équation comme elle est connue actuellement :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I - J + \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x}}{1 - \beta \cdot \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial y}} \quad (V.3)$$

Où

$\beta$  : est un coefficient de forme qui tient compte de la répartition non-uniforme de la vitesse dans la section transversale,

*Bresse* (1860) insiste sur l'intérêt de connaître la valeur du nombre  $(Q^2/gA^3) \cdot (\partial A/\partial y)$  (c'est le nombre de *Froude*  $F_r$  introduit dans ce problème dans la suite) qui intervient dans le dénominateur de l'équation de mouvement. Il partage ainsi l'écoulement en deux catégories suivant que ce nombre est plus petit ou plus grand que l'unité. Des classifications plus rigoureuses ont été utilisées dans la suite suivant le signe de dénominateur et numérateur de l'équation du mouvement. Pour un canal prismatique ( $\partial A/\partial x \equiv 0$ ) à pente,  $I$  du radier constante est d'un intérêt particulier ; avec  $A = A(y)$ , et sous un modèle simplifié lorsqu'on suppose l'écoulement dans lequel :

- ✓ les variations transversales des paramètres influençant l'écoulement sont négligeables et ne sont fonction que de  $x$  (écoulement unidirectionnel),
- ✓ la répartition des pressions est hydrostatique,
- ✓ la répartition des vitesses est uniforme,
- ✓ l'axe du canal présente une faible courbure,
- ✓ la pente maximale du radier ne dépasse pas 10%, et
- ✓ le fluide est homogène et incompressible.

L'équation (IV.3) devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I - J}{1 - \beta \cdot F_r^2} \quad (V.4)$$

Où  $F_r$  est le carré du nombre de *Froude* qui est définie par

$$F_r^2 = \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} \quad (V.5)$$

Le calcul et la construction exacts du profil de la surface libre nécessitent la résolution de l'équation différentielle du mouvement (V.3). Dans la littérature, plusieurs méthodes de résolutions ont été utilisées :

- ✓ Méthode de *Bakhmeteff*
- ✓ Méthode par approximations successives
- ✓ Méthode graphique de *Raytchine*
- ✓ Méthode de *Silber*
- ✓ Méthode de *Bresse*

Mais quel que soit le procédé de calcul utilisé, le résultat ne donnera l'équation de la ligne de la surface libre qu'à un constant pré. Et il faudra obligatoirement connaître l'un de ses points ; celui-ci, appelé point de repère. Le point de repère est également appelé "section de contrôle", il dépend de la singularité responsable de l'écoulement varié. En général, ce point est calculé séparément de l'écoulement à l'endroit même de la singularité, car c'est ici qu'un changement du régime d'écoulement se produit correspondant plus généralement à  $Fr = 1$  (qui donne la profondeur critique représentant l'énergie minimale de l'écoulement). Mais, comme au voisinage des singularités le régime est brusquement varié, cette hauteur théorique ne correspond jamais à la réalité.

### V.3.2. le point de control

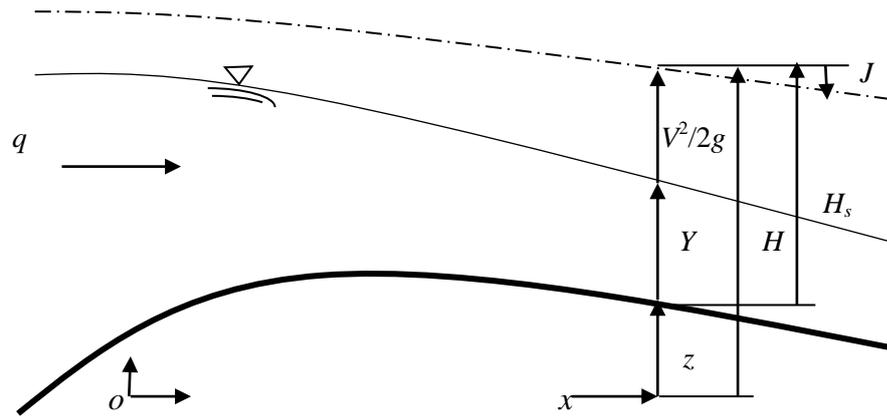
Le point de contrôle,  $x = x_c$  correspond à l'endroit où la section de contrôle s'établit. Dans ce point la fonction  $Q = f(y)$  est unique de même que la fonction  $H_s(y)$  où  $H_s$  est la charge spécifique par rapport au radier.

Dans cette section nous examinons l'influence de deux cas de gain pratique, l'influence de la géométrie du fond et celle de la géométrie de la section transversale.

#### V.3.2.1. l'influence de la géométrie du fond

Pour le premier cas et comme nous l'avons indiqué au deuxième chapitre le calcul de ces écoulements s'effectue à partir de considérations énergétiques. Afin d'examiner cette question, considérons un canal à géométrie du fond variablement continue,  $z(x)$  comme montre la figure ci-dessous (figure V. 9). L'origine  $O$ , du système de coordonnées est arbitrairement choisie telle que la charge locale,  $H$ , est donnée par l'équation

$$H(y) = z + y + \frac{Q^2}{2g(A(y))^2} \quad (V.6)$$



**Figure V.9:** Schéma de définition de l'écoulement sur un lit de canal à courbure en continue

Donc  $H_s = H - z$ , dans laquelle  $z = z(x)$  caractérise la géométrie du radier par rapport un niveau de référence fixé,  $y$  est la hauteur d'eau,  $Q = Q(x)$  est le débit et  $A = A(y, x)$  la surface mouillée de l'écoulement. Pour que  $H_s(y)$  soit unique, cette fonction doit atteindre forcément un extremum, ce exige  $(dH_s/dy) = 0$ .

Pour simplifier les calculs, considérons un canal prismatique à section rectangulaire, dont le débit par unité de largeur est  $q = (Q/b)$ , la charge

$$H_s = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (V.7)$$

ne dépend que de la hauteur d'eau  $y$ . S'il s'agit d'une section de contrôle, il existe une valeur unique  $y = y_c$  qui définit une valeur extrême de la charge  $H_s = H_{sc}$ . Cette dernière est obtenue par

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 1 - Fr^2 = 0 \quad (V.8)$$

Par conséquent il existe une valeur extrême de la fonction  $H_s(y)$ , qui s'établit pour l'écoulement critique,  $Fr = 1$ . Soit  $H_s = H_{sc}$  et  $y = y_c$  les valeurs correspondantes dénommées *charge critique* et *profondeur critique* (chap. II). Pour déterminer si  $Fr = 1$  correspond à un maximum ou un minimum de la fonction  $H_s(y)$ , la dérivée seconde doit être analysée,

$$d^2H_s/dy^2 = \frac{3q^2}{gy^4} = \frac{3Fr^2}{y} \quad (V.9)$$

Cette expression reste toujours positive, ce qui signifie que  $H_s(y)$  atteint un *minimum* pour  $Fr = 1$ .

Selon l'équation (V.7), il est égal  $H_{sc} = y_c[1 + q^2/(2gy_c^3)] = y_c[1 + Fr^2/2] = (3/2)y_c$ . La relation entre le débit critique  $q_c$  et la profondeur critique  $y_c$  est obtenue également à l'aide de l'équation (V.7) et s'écrit :  $q_c = (gy_c^3)^{1/2} = g^{1/2}[(3/2)H_{sc}]^{3/2}$ , (Chap II).

Après trouvé que l'écoulement est critique dans la section de contrôle, il faut encore déterminer la position du point critique :  $x = x_c$ . On considère un écoulement potentiel avec une charge constante

$$H = z + y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (V.10)$$

Pour un radier  $z(x)$  continu, les deux premières dérivées de la charge par rapport à la coordonnée longitudinale  $x$ , deviennent :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{q^2}{gy^3}\right) = 0 \quad (V.11),$$

$$d^2H/dx^2 = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} \left(1 - \frac{q^2}{gy^3}\right) + 3 \frac{q^2}{gy^4} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad (V.12).$$

Par l'introduction de l'expression de nombre de *Froude* dans les relations (V.11) et (V.12), celles ces deviennent respectivement :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} (1 - Fr^2) = 0 \quad (V.13),$$

$$d^2H/dx^2 = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} (1 - Fr^2) + 3 \frac{q^2}{gy^4} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad (V.14).$$

Sachant que la section de contrôle exige  $Fr = 1$ , l'équation (V.13) indique que  $(dz/dx) = 0$ . Il existe donc un extremum du radier au point de contrôle. Pour analyser si cet extremum correspond à un minimum ou un maximum de la fonction de fond, l'équation (V.14) donne, au point de contrôle la relation suivante :

$$d^2H/dx^2 (Fr = 1) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_c + \frac{3}{y_c} \left(\frac{dy}{dx}\right)_c^2 = 0 \quad (V.15)$$

Cette équation fournit une relation entre la courbure du radier au point critique et la pente de la surface d'eau correspondante

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \mp \left(-\frac{1}{3}y_c \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_c\right)^{\frac{1}{2}} \quad (V.16)$$

Une solution réelle de cette équation n'existe que pour  $(d^2z/dx^2) < 0$ , correspond à un maximum du profil du fond comme montre la figure V.9. La pente de ligne d'eau à une valeur de deux signes, si  $(dy/dx)_c < 0$ , la section de contrôle caractérise la transition de l'écoulement fluvial ( $Fr < 1$ ) à l'écoulement torrentiel ( $Fr > 1$ ). Et si le cas  $(dy/dx)_c > 0$ , la section de contrôle correspond à la transition de l'écoulement torrentiel à l'écoulement fluvial (ressaut hydraulique), ce dernier n'est cependant plus un écoulement potentiel (*Willi H. Hager et Anton J. Schleiss, 2009*).

Si les pertes par frottements pris en considération à ce moment l'à  $dH/dx = -J$  et  $d^2H/dx^2 = -dJ/dx$ , on les remplacées dans les équations (V.13) et (V.14) on conclure les résultats suivants :

- 1) Ecoulement critique se produit à l'endroit où le fond pente du canal  $I = - (dz / dx)$  est égale à la pente de la ligne d'énergie  $J$ . La condition est vérifiée si la pente du fond égale à la pente critique  $I = I_c$ .
- 2) Étant donné que la courbure de la ligne d'énergie  $(dJ / dx)$  est normalement beaucoup plus faible que la courbure de la pente du fond, le point critique se trouve pas à la crête, mais légèrement en aval de celui-ci.

### V.3.2.1. l'influence de la géométrie de la section transversale

Le second cas examine l'influence de la géométrie de la section transversale. Ce cas représente un écoulement dans un canal horizontal, de façon faire varier uniformément la géométrie transversale. Pour la simplicité, on considérer encore un canal rectangulaire de largeur variable  $b = b(x)$ . La charge par rapport au fond du canal est alors :

$$H_s = y + \frac{Q^2}{2gb^2y^2} \quad (V.17)$$

Avec  $dH/dx = d^2H/dx^2 = 0$ , les deux premières dérivées de la charge par rapport à la coordonnée longitudinale  $x$ , deviennent :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{Q^2}{gb^2y^3}\right) - \frac{Q^2}{gb^3y^2} \frac{db}{dx} = 0 \quad (V.18),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2H}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} \left(1 - \frac{Q^2}{gb^2y^3}\right) - \frac{Q^2}{gb^3y^2} \frac{d^2b}{dx^2} + \frac{3Q^2}{gb^4y^2} \left(\frac{db}{dx}\right)^2 + \frac{4Q^2}{gb^3y^3} \frac{db}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{3Q^2}{gb^2y^4} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (V.19)$$

Si le nombre de Froude  $F_r^2 = Q^2/(gb^2y^3)$  introduit dans ce développement, il en résulte

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dy}{dx} (1 - F_r^2) - \frac{y}{b} F_r^2 \frac{db}{dx} = 0 \quad (V.20),$$

Et

$$\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} (1 - F_r^2) - \frac{y}{b} F_r^2 \frac{d^2b}{dx^2} + \frac{3y}{b^2} F_r^2 \left(\frac{db}{dx}\right)^2 + \frac{4}{b} F_r^2 \frac{db}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{y} F_r^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad (V.21)$$

La section de contrôle exige  $F_r = 1$ , on obtient à partir de l'équation (V, 20) la condition  $(y/b)(db/dx) = 0$ . En général, cette condition est satisfaite que si  $(db/dx) = 0$  puisque ni  $y = 0$ , ni  $b^{-1} = 0$ . Alors l'écoulement critique est établi à un emplacement extrême de la géométrie en section transversale déterminée par l'équation (IV.21). Si  $(d^2b/dx^2 > 0)$  cet emplacement est à une contraction ou bien si  $(d^2b/dx^2 < 0)$  l'emplacement est à un élargissement mais cette possibilité ne peut donc pas être atteinte, (*Willi H. Hager, 2010*).

Pour analyser si cette valeur extremum correspond à une contraction on exige  $F_r = 1$ , l'équation (V.21) donne, au point de contrôle la relation suivante :

$$-\frac{y_c}{b} \frac{d^2b}{dx^2} + \frac{3}{y_c} \left(\frac{dy}{dx}\right)_c^2 = 0 \quad (V.22)$$

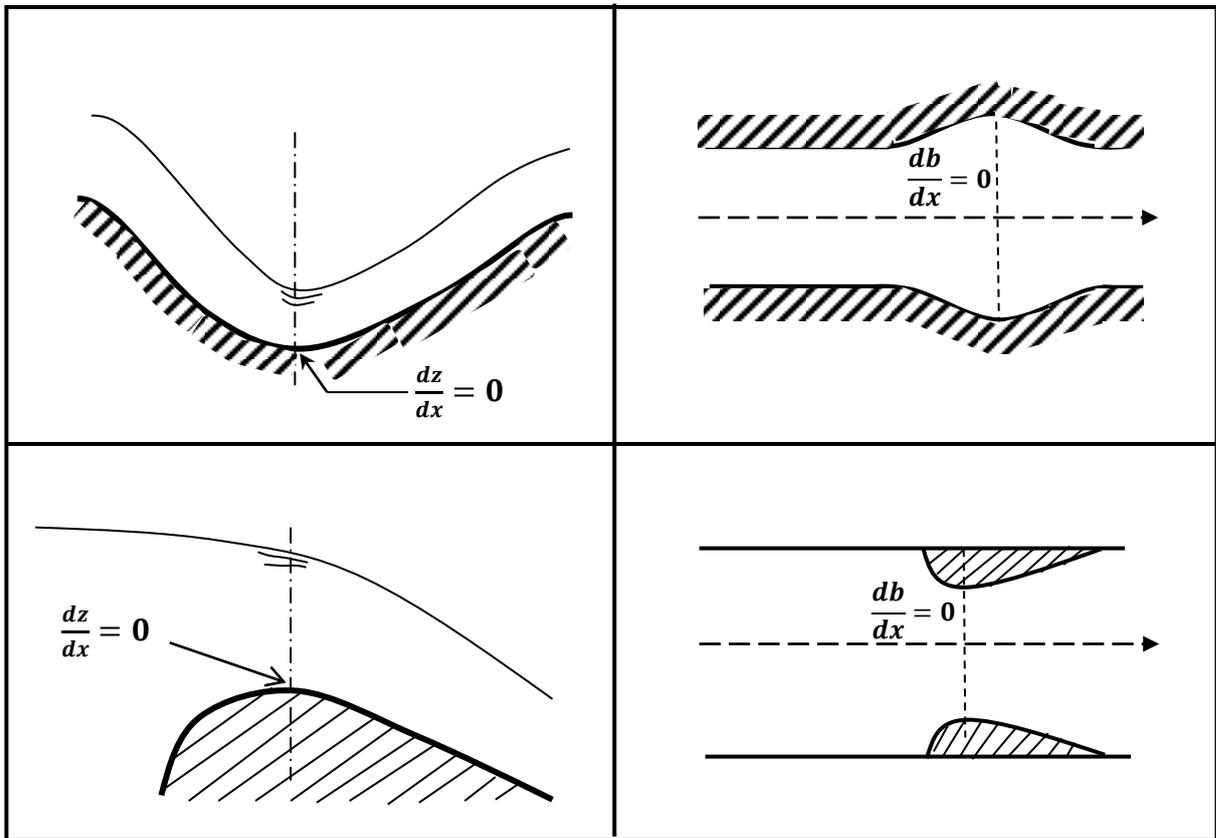
L'équation (V.22) fournit une relation entre la courbure de l'extrémité au point critique et la pente de la surface d'eau correspondante

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \mp \left(\frac{1}{3} \frac{y_c}{b} \frac{d^2b}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (V.23)$$

Cette solution est physiquement pertinente que si  $(d^2b/dx^2 > 0)$ . La valeur extrême correspond donc, à une contraction de la section transversale.

Si l'hypothèse d'écoulement potentiel est exclu et la ligne pente de l'énergie est  $dH/dx = -J$ , l'emplacement de l'écoulement critique est déterminé par la relation  $(y/b)(db/dx) = -J$ ; l'emplacement correspond à un point légèrement en aval de la géométrie constriction. En principe, cela ne modifie pas le calcul simplifié, (*W. H. Hager, 2010*).

Le schéma simplifié ci-dessous illustre l'influence de la géométrie du canal sur la présence de la section de contrôle présentée par la production de la profondeur critique.



**Figure V.10:** Ecoulement à débit constant : effet d'un extremum du profil du radier  $dz/dx = 0$  (à gauche) et de largeur du canal  $b = 0$  (à droite). La condition critique peut être réalisée seulement si, soit le radier à un maximum ( $d^2z/dx^2 < 0$ ), soit largeur atteint un minimum ( $d^2b/dx^2 > 0$ ). Avec les deux autres possibilités, représentées en haut,  $F_r = 1$  ne peut donc pas être atteint.

### V.3.3. l'emplacement de la section de contrôle

Pour résoudre l'équation d'écoulement variée, la solution doit commencer à la section de contrôle. La section de contrôle est à l'extrémité aval d'un canal lorsque le gradient de perte de charge augmente de zéro à une valeur dépendante à la configuration de l'écoulement. Lorsque cette valeur s'augmente, la section de commande se déplace en amont et, pour un certain gradient, celle-ci est se localiser à l'extrémité amont du canal. Cette partie décrit le procédé de localisation de la section de contrôle pour différentes configurations d'écoulement.

### V.3.3.1. l'équation générale de l'emplacement de la section de contrôle

Soit un écoulement dans un canal, s'éloigner à une certaine distance :  $x = x_c$ , de l'extrémité amont d'une section critique. C'est-à-dire, à la section  $x = x_1$ , où  $x_1 < x_c$ , l'écoulement est en régime fluvial, et à l'autre section  $x = x_2$ , où  $x_2 > x_c$ , l'écoulement est en régime torrentiel. Cette condition s'explique au moyen des relations suivantes :

$$\text{à } x = x_1; \quad \frac{V^2}{gy_{hm}} < 1 \quad (V.24)$$

$$\text{à } x = x_1; \quad \frac{V^2}{gy_{hm}} = 1 \quad (V.25)$$

$$\text{à } x = x_1; \quad \frac{V^2}{gy_{hm}} > 1 \quad (V.26)$$

Rappelons que le paramètre de l'écoulement,  $y_{hm}$  est la profondeur hydraulique moyenne définie par  $y_{hm} = A/T$ .

On suppose le point zéro où  $x = x_c$ , à  $x = x_c$  et comme nous l'avons montré ( $dy/dx = 0$ ), alors l'équation de profil en long d'un écoulement graduellement varié dans un canal prismatique, avec  $Q = Q(x)$ , soit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I - J - \left(\frac{2Q}{gA^2}\right)(dQ/dx)}{1 - \left(\frac{Q^2}{gA^2 y_{hm}}\right)} \quad (V.27)$$

A  $x = x_c$  la condition d'écoulement de l'équation (IV.25) est :

$$\frac{V^2}{gy_{hm}} = \left(\frac{Q^2}{gA^2 y_{hm}}\right) = 1 \Rightarrow Q^2 = \frac{gA^3}{T} \quad (V.28)$$

En plus le numérateur de second membre de l'équation (V.27) est également égale à zéro, ce qu'est donne :

$$I - J = \frac{2Q(dQ/dx)}{gA^2} \quad (V.29)$$

Supposons que le débit est varié linéairement en fonction de  $x$ , ainsi que il n'est y a pas de variation latéralement à  $x = 0$ , nous avons :

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{Q}{x} = q_i \quad (V.30)$$

Où  $q_i$  est le taux d'entrée, supposée constante. En remplaçant cette quantité dans l'équation (V.29), nous constatons que l'écoulement à une distance  $x$  à l'amont d'une singularité est critique, si l'équation obtenue suivante est satisfaisante, soit :

$$I - J = \frac{2q_i^2 x}{gA^2} \quad (V.31)$$

On peut déduire de la relation (V.28) l'expression suivant :

$$A^2 = \frac{Q^{4/3} T^{2/3}}{g^{2/3}} = \frac{q_i^{4/3} x^{4/3} T^{2/3}}{g^{2/3}};$$

En introduisant cette résultats dans la relation (V.31), il vient que :

$$I - J = \frac{2q_i^{2/3}}{g^{1/3} T^{2/3} x^{1/3}};$$

De cette dernière relation il vient que :

$$x = \frac{8q_i^2}{gT^2(I - J)^3} \quad (V.32)$$

Cette équation est permet de déterminer la position de la section de contrôle à condition  $I \neq J$ .

En raison de la présence du gradient de perte de charge dans la relation, ce qui mène à rendre la solution implicite. Cette problématique est faite l'objet des approches théoriques par des chercheures éventuelles.

**Exemple d'application V.1**

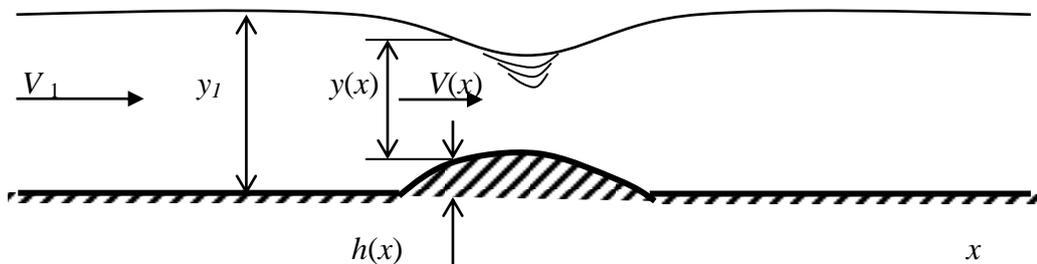
Un écoulement dans un canal rectangulaire franchi un seuil concave d'une élévation  $h = h(x)$  par rapport au fond du canal, comme il est indiqué dans la figure ci-dessous. Si on néglige les pertes de charges de l'écoulement.

- 1) Montrer que la pente de la ligne d'eau, est donnée par:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(dh/dx)}{(1 - V^2/gy)}$$

où:  $V = V(x)$  et  $y = y(x)$ , respectivement la vitesse moyenne et la profondeur de l'écoulement.

- 2) Commenter les signes de  $(dy/dx)$  relativement au signe de  $(dh/dx)$ .



**Figure V.11** : Schéma d'écoulement dans un canal rectangulaire franchi un seuil concave

**Solution**

- 1) Pour deux points de la surface libre de l'écoulement, on a:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2;$$

Où  $P_1 = P_2 = 0$ ,  $z_1 = y_1$  et  $z_2 = h + y_2$ .

Ainsi,

$$\frac{V^2}{2g} + h + y = C^{et}$$

Aussi la différentiation par  $x$ , donne :

$$\frac{2V}{2g} \frac{dV}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1)$$

Ainsi la conservation de la masse permet à écrire :

$$V_1 y_1 = V y, \quad \text{or } V \frac{dy}{dx} + y \frac{dV}{dx} = 0, \quad \text{or } \frac{dV}{dx} = - \frac{V}{y} \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

La combinaison des équations (1) et (2), mène à écrire :

$$\frac{V}{g} \left( -\frac{V}{y} \frac{dy}{dx} \right) + \frac{dh}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0;$$

Donc la pente de la ligne d'eau est définie comme suit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(\frac{dh}{dx}\right)}{\left(1 - \left(\frac{V^2}{gy}\right)\right)}$$

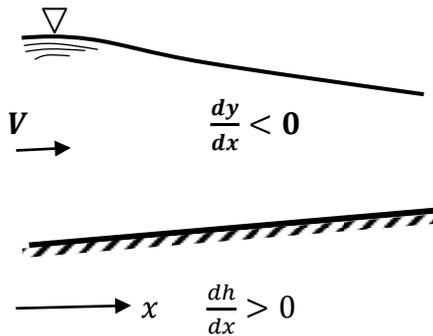
2) L'examinations des signes de  $(dy/dx)$  relativement au signe de  $(dh/dx)$  est dépend essentiellement par la valeur de *nombre de Froude*  $F_r$  :

Si

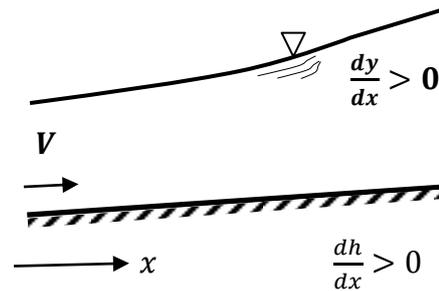
1)  $F_r = \frac{V}{\sqrt{gy}} < 1$ , les signes de  $(dy/dx)$  et  $(dh/dx)$  sont opposés.

2)  $F_r = \frac{V}{\sqrt{gy}} > 1$ , les grandeurs  $(dy/dx)$  et  $(dh/dx)$  sont de même signe.

Nous pouvons schématiser cette analyse par suit :



Cas 1 :  $F_r < 1$

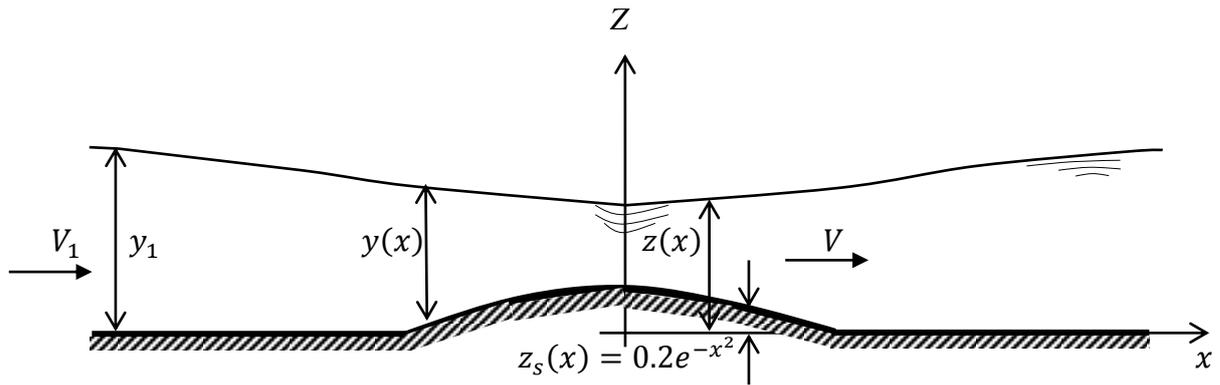


Cas 2 :  $F_r > 1$

### Exemple d'application V.2

La figure ci-dessous présente un écoulement unidimensionnel dans un canal rectangulaire franchi une bosse plantée dans le fond du canal. Celle-ci à une équation :  $z_s(x) = 0,2e^{-x^2}$ , par rapport au fond du canal, avec un débit unitaire de  $4,0 \text{ m}^2/\text{s}$ .

Avec un débit unitaire de  $4.0 \text{ m}^2/\text{s}$ , la profondeur en amont de la bosse  $y_1 = 2 \text{ m}$ . Si on néglige les pertes de charges de l'écoulement, tracer un graphique de la profondeur d'eau  $y = y(x)$  et l'élévation de la surface d'eau  $z = z(x)$  pour :  $0,0 \text{ m} \leq x \leq 4,0 \text{ m}$ .



**Figure V.12 :** Schéma d'écoulement unidimensionnel dans un canal rectangulaire franchi une Bosse

### Solution

L'application de la relation de Bernoulli entre amont et aval de la bosse, mène à écrire :

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P}{\gamma} + \frac{V}{2g} + z; \quad (1)$$

Où  $P_1 = P = 0$ ,  $z_1 = y_1 = 2m$  et  $z = y + z_s$  ou bien  $z = y + 0.2e^{-x^2}$ .

On a  $V_1 = (q/y_1) = (4/2) = 2m/s$ , et  $V = (q/y) = (4/y)$ .

En tenant compte de ces considérations la relation (1) devient alors :

$$\frac{2^2}{2 \times 9.81} + 2 = \frac{(4/y)^2}{2 \times 9.81} + y + 0.2e^{-x^2} \quad (2)$$

La relation (2) peut s'écrire plus simplement :

$$y^3 - (2.2 - 0.2e^{-x^2})y^2 + 0.815 = 0 \quad (3)$$

La relation (3) est une équation de troisième degré avec un terme de second ordre :

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \quad (4)$$

Avec  $a = -(2.2 - 0.2e^{-x^2})$ ,  $b = 0$  et  $c = 0.815$ .

Pour résoudre l'équation (4) en procédant au changement des variables :  $y = (x - a/3)$  et l'équation (4) devient :

$$X^3 + pX + q = 0 \quad (5)$$

Avec

$$p = b - \frac{a^2}{3} = -\frac{(2.2 - 0.2e^{-x^2})^2}{3};$$

$$q = 2 \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{a}{3}\right)b + c = -\frac{2}{27} (2.2 - 0.2e^{-x^2})^3 + 0.815$$

Le discriminant de l'équation (5) est :

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (6)$$

Alors les solutions de l'équation (5) dépendent du signe du discriminant  $\Delta$ .

Le régime d'écoulement en amont de la bosse est déterminé par la valeur de nombre de Froude  $F_r$  soit :

$$F_r = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{2}{\sqrt{9.81 \times 2}} = 0.452 < 1$$

L'écoulement en amont de la bosse est en régime fluvial.

La résolution de l'équation (3) pour le variable  $y$ , et que  $z = y + 0.2e^{-x^2}$ , pour  $0,0 \text{ m} \leq x \leq 4,0 \text{ m}$  mène à établir les résultats dans le tableau ci-dessous :

Tableau des résultats de calcul :

$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$F_r = \frac{V}{\sqrt{gy}}$
0,0	1,727	1,927	0,563
0,5	1,790	1,946	0,533
1,0	1,901	1,974	0,487
1,5	1,969	1,990	0,462
2,0	1,996	1,994	0,455
2,5	1,995	1,995	0,453
3,0	1,995	1,995	0,453
3,5	1,995	1,995	0,453
4,0	1,995	1,995	0,453

- 1) Les valeurs de Nombre de Froude  $F_r$ , dans chaque section d'écoulement située à l'endroit de la bosse, montrent que l'écoulement maintient son régime fluvial.
- 2) Le profil de la ligne d'eau au-dessus la bosse est montré par la Figure V.13, et le profil de l'élévation de la surface de l'eau est montré sur la figure V.14.

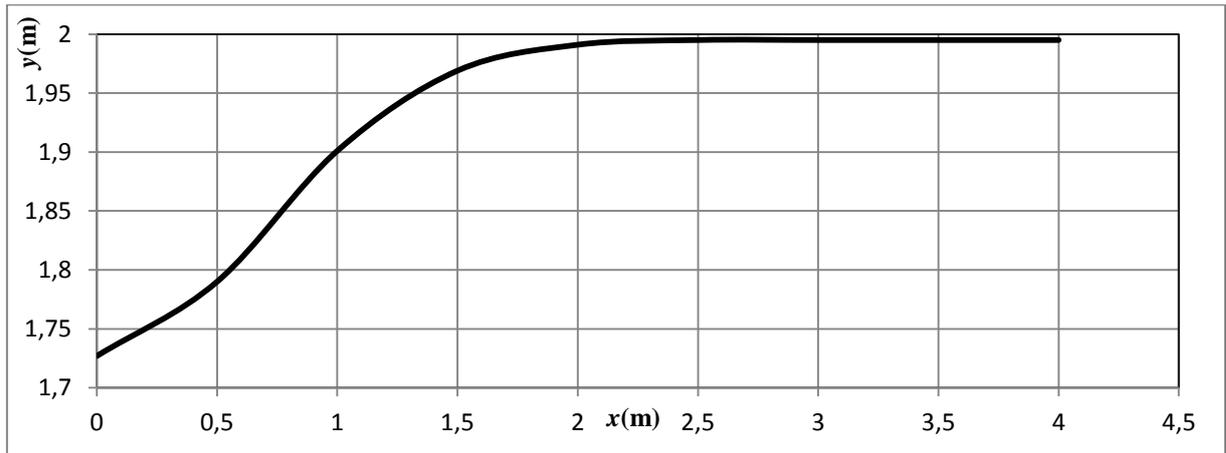


Figure V.13 : profil de la profondeur d'eau  $y = y(x)$

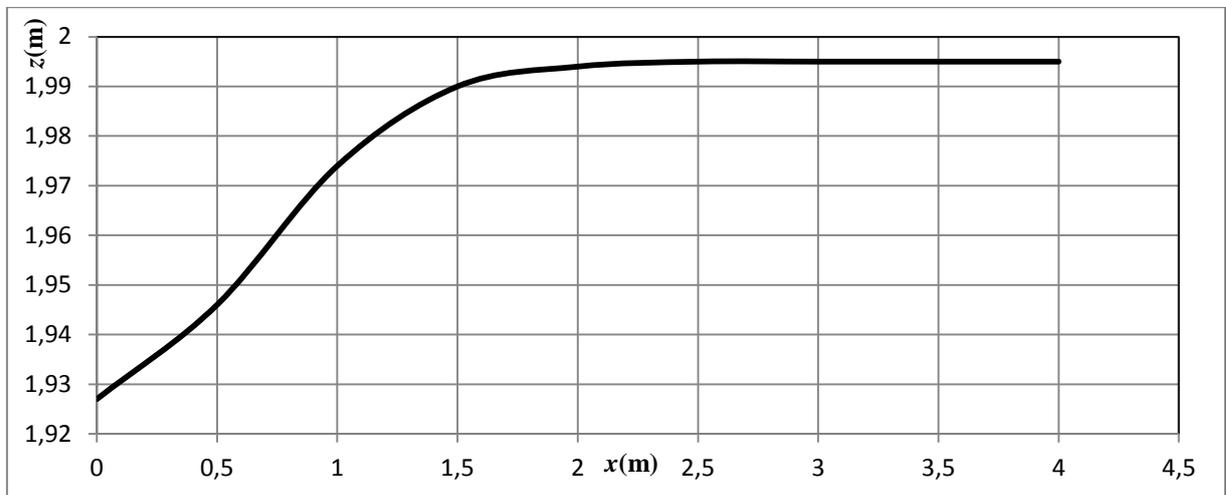


Figure V.14 : profil de la ligne d'eau  $z = z(x)$

On peut conclure que l'ouvrage implanté au fond du canal rectangulaire n'a aucune influence sur le régime d'écoulement.

## Conclusion

L'étude de la section de contrôle qui correspond à la section critique à intérêt pratique important en hydrauliques et mécaniques tels que :

On dit que l'ouvrage fonctionne en contrôle amont ou que sa section de contrôle est situé en amont. Une perturbation à l'aval ne peut remonter la ligne d'eau et donc n'a aucune influence sur le remous concerné.

Dans le cas d'un régime fluvial, ce sont les conditions à l'aval, la perte de charge ainsi que la rugosité qui vont déterminer le débit à évacuer par l'ouvrage. On dira que l'ouvrage fonctionne en contrôle aval ou que la section de contrôle de l'ouvrage se qui vont déterminer le débit de l'ouvrage trouve en aval. Dans ces conditions, la ligne d'eau dans l'ouvrage et donc la ligne d'eau à l'amont de celui-ci vont être contrôlée par le niveau d'eau à l'aval de l'ouvrage.

A travers ce présent chapitre une revue bibliographique montre que la formule fondamentale reliant la courbe de remous aux autres paramètres de l'écoulement a été proposée, en 1828, par *Jean-Baptiste Charles Joseph Bélanger* (1790-1874). Dans son essai, *Jean-Baptiste Bélanger* dérivait l'équation de remous présenté sur la figure IV.8 à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement avec une lucidité remarquable. (LIGGETT, 1993, CHANSON, 2006). *BÉLANGER* (1828, p. 29) n'a pas utilisé le terme «*écoulement critique*», mais il a souligné explicitement la singularité de l'écoulement: "cas Un peu ordinaire» ou un cas particulier. Il a souligné en outre l'impossibilité physique d'observer  $(\partial y/\partial x) = +\infty$  pour ce cas spécial d'un écoulement vertical.

Nous nous sommes intéressés également dans ce chapitre à l'étude de l'emplacement de la section de contrôle qui a un intérêt particulier et cela dû à l'instabilité de l'écoulement dans cette endroit.

## CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

La première partie de notre étude a eu pour objectif de proposer un état des connaissances sur l'écoulement uniforme et l'écoulement critique; cinq chapitres ont été nécessaires pour résumer les principaux travaux relatifs à ce sujet.

Le premier chapitre a eu pour but de définir les caractéristiques de l'écoulement uniforme; nous avons également montré que ce type d'écoulement, dans le sens strict de terme, ne soit pratiquement jamais satisfait, il est cependant fréquemment admis lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières (*Chow*, 1973). Dans ce chapitre nous avons évoqué les relations et les formules usuelles de l'écoulement uniforme, telle que les formules de *Chézy* et *Manning-Strickler*, en raison de leur utilisation fréquente dans la pratique. Nous avons présentées ces relations, en règle générale sous la forme :  $V = CR_h^\beta J^\gamma$  où  $R_h$  est le rayon hydraulique,  $J$  est la pente de la ligne de charge,  $C$  est un paramètre qui traduit la résistance de l'écoulement et dépend de la vitesse moyenne  $V$ , de  $R_h$ , de la rugosité absolue des parois du canal, de la viscosité de liquide et beaucoup d'autres facteurs. La relation de *Chézy*, correspondant à  $\beta = \gamma = 1/2$ . Le coefficient  $C$  de *Chézy* a été estimé par plusieurs auteurs (*Ganguillet et Kutter*, 1869 ; *Bazin*, 1897 ; *Powell*, 1950).

A travers ce chapitre, nous avons aussi montré une autre relation qui servira de base à notre étude est celle de *Darcy-Weisbach*, initialement formulée par *Weisbach* (1845) et reprise par *Darcy* (1854) dans ces recherches expérimentales. Cette relation, développée pour les conduites, se présente sous la forme  $J = f.V^2/(2gD)$  où  $f$  coefficient de frottement,  $D$  diamètre de la conduite et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Le coefficient de frottement  $f$  dépend à la fois de la rugosité relative ( $\varepsilon/D$ ) et du nombre de *Reynolds*  $R$ . La relation de *Darcy-Weisbach* ait été développée pour le cas des conduites, elle est cependant applicable aux canaux ouverts, en remplaçant  $D$  par le diamètre hydraulique  $D_h$ . Le paramètre le plus important, qui sera utilisé dans notre développement théorique est le coefficient de frottement  $f$ . Dans le cas des rugosités aléatoires, *Colebrook-White* (1939) proposent pour le régime intermédiaire, hydrauliquement lisse et hydrauliquement rugueux une relation composite ou implicite de telle sorte, pour  $R$  petit, on tombe sur la loi logarithmique et pour  $R$  grand, on à la formule de *Nikuradse*. Notons que même si la formule proposée par *Colebrook-White* est celle qui est largement adoptée pour le calcul du coefficient de frottement  $f$ , les ingénieurs préfèrent toujours utiliser le diagramme de *Moody*, en raison de procédé itératif. L'analyse statistique des valeurs obtenues par l'application de la formule explicite de *Colebrook-White*, montre que

celle-ci pouvait être remplacée avec une excellente approximation par des relations explicites établies par (Swamee et Jain, 1976), (Achour et al., 2002) et (Achour et Bedjaoui, 2006).

Le second chapitre a été consacré à la description de l'écoulement en régime critique. L'attention a été portée sur l'état de connaissance et la description de l'écoulement critique ; nous avons également montré que ce type d'écoulement présente un état instable, dues aux fluctuations de la surface libre caractérisées par une vitesse critique égale la célérité d'onde. (Bakhmettef, 1932, Chow, 1959 ; Henderson, 1966 ; W. Hager, 1983 ; French ,1985 et Naudascher, 1987) ont montrés que l'écoulement critique est régie par la relation universelle,

$$\left( \frac{Q^2}{g} \right) = \left( \frac{A^3}{T} \right)_c$$

profondeur correspond au minimale de la charge et au maximum de débit franchissant la section critique. Dans ce chapitre nous avons examinés cette notion sur les canaux de forme rectangulaire et triangulaire et montre que la solution de la condition de criticité est exacte, et pour les autres formes nous les avons traité dans le chapitre suivant de cette étude.

Le troisième chapitre de la première partie de notre thèse a été entièrement consacré à la notion de pente critique. Ce paramètre hydraulique possède aussi une importance comme la profondeur critique. Cette importance capitale consiste aux calculs des dimensions des ouvrages hydrauliques, et à la désignation du régime d'écoulement, torrentiel ou fluvial ou bien critique. La pente critique engendre un écoulement à état critique, ce qui permet aux constructeurs d'éviter de construire les ouvrages hydrauliques avec cette pente. Les chercheurs ; (Rao et Sridharan, 1970), se sont intéressés à l'étude de la pente limite pour un canal rectangulaire, et ont montrés que la pente limite, se produite avec  $\left( \frac{y_c}{b} = \frac{1}{6} \right)$ , et

l'expression de la pente limite est devenue:  $I_L = \frac{8}{3} \left( \frac{gn^2}{\sqrt[3]{b}} \right)$ , tel que le paramètre

adimensionnel  $(y_c/b)$  est le taux de remplissage critique,  $n$  le coefficient de la rugosité de Manning et  $g$  accélération de la pesanteur. L'étude de (Rao et Sridharan, 1970), montre que la valeur maximale du nombre de Froude se produit à  $y_n/b = 1/6$  et a une valeur de :  $F_{r\max} = \left( \sqrt{\frac{I_f}{I_L}} \right)$ . Cela soulève la possibilité de concevoir un canal rectangulaire de telle sorte que

n'importe qu'elle valeur valeur donnée du nombre de Froude ne soit pas dépassée pendant tous les débits du canal qu'on peut rencontrer. Il est souhaitable d'empêcher le nombre Froude maximal  $F_{r\max}$ , de devenir trop proche de l'unité en raison de l'instabilité de la surface libre

associé à écoulement critique. Dans le même chapitre nous avons examiné la relation généralisée de la pente critique désignée par:

$$\bar{I}(\eta, m) = \left( \frac{I_c b^{1/3}}{gn^2} \right) = \frac{(1 + 2\eta\sqrt{1 + m^2})^{\frac{4}{3}}}{(1 + 2m\eta)(1 + m\eta)^{1/3}\eta^{1/3}}$$

En désignant par  $\eta$ , la quantité  $(y/b)$ ,  $\eta$  présente le rapport adimensionnel de forme,  $m$  la cotangente d'angle d'inclinaison des parois par rapport à l'horizontale.

Pour un canal de section rectangulaire, le paramètre de l'inclinaison des parois est également nul, où  $m = 0$ . Et pour le canal de forme triangulaire, le paramètre de largeur est également nul, tel que  $b = 0$ . Cependant, la définition de la pente généralisée pour les canaux triangulaires par l'équation:

$$\bar{I}_c(m) = \frac{I_c(m)y^{1/3}}{gn^2} = \sqrt[3]{2} \left( \frac{1 + m^2}{m^2} \right)^{\frac{2}{3}};$$

Et par conséquent:

$$I_c(m, y_c) = \sqrt[3]{2} \times \frac{gn^2}{y_c^{1/3}} \left( \frac{1 + m^2}{m^2} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Le quatrième chapitre de notre travail a pour l'objet de donner les relations et les expressions définissant la profondeur critique des écoulements évoluant des canaux de différentes formes. Dans ce chapitre, nous avons étudiés les canaux les plus utilisés en pratique, tels que le canal trapézoïdal et ce de forme circulaire. Généralement ces canaux possèdent une efficacité considérable au même temps ce sont des canaux de section transversales qui sont complexes. Les auteurs (*Straub W. O, 1978*), (*Swamee P.K, 1993*), (*Wang et al., 1999*) et (*Vatankhah A. R, 2013*) ont évalués la profondeur critique pour ces canaux et ont montés à travers leurs relations, que les valeurs de la profondeur critique sont caractérisées par une grande précision, traduite par les erreurs relatives résultantes qui sont généralement considérées négligeables. Les auteurs ont montrés que la profondeur critique est une fonction de la dimension géométrique de la section considérée ainsi que le débit d'écoulement. Ces relations sont également explicites et englobent le taux de remplissage de

la conduite à l'état critique,  $\eta_c = (y_c/D)$ , et le débit relatif  $Q^* = \left( \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} \right)$ . On peut déduire

que la relation la plus fonctionnelle est celle de (Swamee P.K, 1993), réservée pour le calcul de la profondeur critique dans une conduite circulaire du diamètre  $D$  telle que:

$$\frac{y_c}{D} = [0.77F_D^{-6} + 1.0]^{-0.085} \quad \text{où,} \quad F_D = \frac{Q}{D^2 \sqrt{gD}};$$

Cette relation accepte une erreur maximale inférieure à 1,46% dans une gamme pratique de  $0,02 \leq \eta_c = (y_c/D) \leq 1$ .

Et pour le canal trapézoïdal (Vatankhah A. R., Easa S., 2011) ils ont proposés une excellente expression explicite de la profondeur critique, soit :

$$y_c = 0.25 \frac{b}{m} \epsilon_c (1 + 0.2722 \epsilon_c^{1.041})^{-0.339};$$

$$\text{pour} \quad 0 \leq \epsilon_c \leq 25; \quad \text{où,} \quad \epsilon_c = 4 \left( \frac{m^3 Q^2}{g b^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dans la gamme pratique de  $\epsilon_c \in [0, 25]$ , celle-ci admet une erreur maximale inférieure à 0.07% .

Le dernier chapitre de la première partie de cette thèse est entièrement consacré à la notion de la section de contrôle. L'étude de la section de contrôle qui correspond à la section critique à un intérêt pratique fondamental pour l'hydrologue qui doit la recherche avec obstination, dans la prospection des sites de station. On dit que l'ouvrage fonctionne en contrôle complet, si la section critique est confondue avec la section de contrôle. Dans ce cas, le bief amont est totalement isolée du bief aval par la section critique et aucune perturbation à l'aval ne peut remonter la ligne d'eau et donc n'a aucune influence sur le remous concerné. La section de contrôle est alors une section à écoulement critique, dans laquelle la profondeur d'écoulement pour un débit donné (profondeur critique) ne dépend que de la géométrie de la section.

La section de contrôle est l'endroit où se localise la profondeur critique, cet état est vérifié si seulement la condition d'écoulement d'un fluide idéal avec des lignes de courant parallèles, autrement dit à la traversée d'une section critique  $S_c$  la charge spécifique  $H_s$  est minimale,  $(dH_s)/dy = 0$ , c'est-à-dire que la tangente à la ligne de la charge est parallèle au fond du canal. Il faut cependant signaler qu'au voisinage d'une chute brusque, où les lignes de courant ne sont pas parallèles avec le fond, forment des courbes (convexe), les auteurs (Rouss, 1938, Bauer et Graf, 1971) ont montré que la profondeur critique  $y_c$ , apparaît en amont d'une chute brusque et que la profondeur au droit d'une telle chute est d'environ :

$$y_b = 0.72y_c = 0.72 \sqrt[3]{q^2/g} ;$$

Pour les canaux de section non rectangulaire à pente faible  $I < I_c$ , (Rajaratnam et al., 1964) ont montrés, que le coefficient numérique figurant dans l'équation ci-dessus, peut être pris à 0,75 près. Cependant, dans certaines applications pratiques (Walter H. Graf et M. S. Altinakar, 2000) ont admet souvent que la profondeur d'une chute brusque  $y_b$ , est la même que la profondeur  $y_c$ .

Les auteurs (Willi H. Hager et Anton J. Schleiss, 2009) se sont intéressés à l'étude de la notion de la section de contrôle, ils ont montrés en premier lieu que la section de contrôle correspond à la transition de l'écoulement torrentiel à l'écoulement fluvial (ressaut hydraulique), ce dernier n'est cependant plus un écoulement potentiel. En second lieu les auteurs ont montrés l'influence de la géométrie du fond tel que, s'il s'agit d'une section de contrôle, il existe une valeur unique  $y = y_c$  qui définit une valeur extrême de la charge  $H_s = H_{sc}$ . Pour un radier  $z(x)$  continu et par l'introduction de l'expression de nombre de Froude dans les relations de la charge spécifique critique, alors la section de contrôle exige  $Fr = 1$ , et indique que  $(dz/dx) = 0$ . Donc il existe un extremum du radier au point de contrôle

# *Partie II*

*Chapitre I : Dimensionnement d'un canal rectangulaire en écoulement critique*

*Chapitre II : Ecoulement critique dans un canal en forme U*

*Chapitre III : Calcul de la profondeur critique dans une conduite circulaire*

*Chapitre IV: Ecoulement critique dans un canal de forme parabolique*

## INTRODUCTION A LA DEUXIEME PARTIE

Comme nous l'avons montré au cours de la première partie de notre étude, de nombreuses recherches effectuées jusqu'à présent sur le régime d'écoulement critique se sont surtout intéressées à la quantification de la valeur de la profondeur critique, qui a de l'importance dans la conception des ouvrages hydrauliques. Le calcul de la profondeur critique dans les canaux a été l'un des principaux problèmes de l'ingénieur hydraulicien. Et le canal de profil en U n'a pas connu un aussi grand intérêt et les quelques travaux qui s'y rapportent concernent la valeur de sa profondeur critique.

La présente partie de notre étude se propose de décrire et de déterminer les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement en régime critique dans les canaux à profil rectangulaire, en U, circulaire et parabolique.

L'objectif de premier chapitre de cette partie est de proposer une nouvelle approche au calcul de dimensionnement d'un canal rectangulaire en écoulement critique, dont les parois internes sont caractérisées par la rugosité relative  $\varepsilon / D_h$ , et la viscosité cinématique  $\nu$  de liquide en écoulement. Cette approche repose d'une part sur les relations universellement admises celles de *Darcy-Weisbach* (1854) et de *Colebrook-White* (1939), et d'autre part sur l'application de la relation de l'écoulement critique, celle-ci est connue sous le nom de condition de criticité. Des relations explicites sont déduites et les résultats qui en découlent peuvent être considérés comme étant exactes. Elles s'appliquent dans toute la gamme de rugosités relatives  $0 \leq \varepsilon / D_h \leq 5.10^{-2}$  et pour toute valeur du nombre de *Reynolds*  $R_e > 2300$ .

L'intérêt d'application de la notion de criticité est mis en évidence et servira de base au dimensionnement de canal de forme rectangulaire véhiculant un écoulement en régime critique faisant l'objet du présent chapitre.

Le deuxième chapitre de cette partie de notre travail s'intéresse entièrement sur l'écoulement critique dans un canal de profil en U. Ce type du canal appartient à la catégorie des canaux à fond arrondi, et notre choix s'est porté sur ce type; en se basant sur l'importance de cette forme efficace et économique. Nous allons également élaborer une approche nouvelle d'évaluation de la profondeur critique basée sur un procédé itératif, à la base de considéré le canal de profil en U, comme un canal triangulaire avec un fond arrondi due à sa géométrie simple.

Le troisième chapitre est consacré essentiellement sur l'écoulement critique dans les conduites circulaires, qui sont les plus utilisées dans l'assainissement urbain, les grandes

adductions de transfert, irrigation et dans de nombreux cas d'aménagements hydrauliques. Le calcul de la profondeur d'écoulement critique présente un intérêt majeur pour les projeteurs. Pour répondre à cette préoccupation, on proposera une relation approchée fiable pour la détermination explicite de taux de remplissage critique  $\eta_c$  où la profondeur critique  $y_c$ . En outre, une méthode fiable est proposée pour l'estimation directe donnant la valeur de la charge spécifique critique  $H_{sc}$ .

Finalement dans le quatrième chapitre de cette partie on s'intéresse à l'étude, d'un canal découvert de la section transversale parabolique, qui est considéré parmi les formes les plus inspirées de la nature. Pour la détermination de la profondeur critique, d'une parabole élancée on propose une formule qui vise à présenter une nouvelle solution graphique dans les sections paraboliques basé sur des considérations géométriques. On outre de nombreux exemples d'applications seront présentés pour une meilleure compréhension des différentes étapes de calcul.

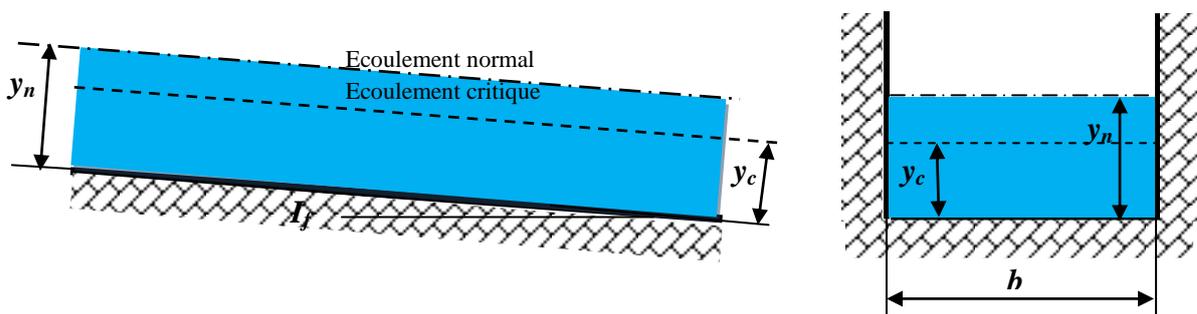
# *Chapitre I*

## *Dimensionnement d'un canal rectangulaire en écoulement critique*

### I.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est le dimensionnement théorique d'un canal rectangulaire en écoulement critique. Le choix de ce type des canaux est due à sa large utilisation dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien, à savoir l'évacuation des crues, l'irrigation, protection contre les inondations, dérivation et protection des rives d'oued d'une part et d'autre part ces canaux peuvent assurer le support des dalles qui servent comme une route sur les Oueds couverts et cela surtout dans les milieux urbains. La figure ci-dessous schématise l'écoulement uniforme en régime critique de profondeur  $y_c$  dans un canal rectangulaire de largeur  $b_c$ , et l'indice "c" se réfère l'état critique de l'écoulement.

Afin de définir la géométrie de l'écoulement dans un canal rectangulaire partiellement rempli, en introduisant une variable adimensionnelle définie par ;  $\eta_c = y_c / b_c$  appelé paramètre de forme de l'aire de la section mouillée critique ou la profondeur relative normale critique. Ce paramètre à un intérêt particulier dans la détermination des dimensions des ouvrages hydrauliques ayant la forme rectangulaire à l'instar de coursier et les bassins à ressaut.



**Figure I.1 :** Schémas de définition de l'écoulement uniforme critique dans un canal ouvert de section rectangulaire

L'écoulement est considéré uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Les éléments à considérer dans l'écoulement permanent sont le débit volume  $Q$ , la pente de fond du canal  $I_f$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$ , une dimension linéaire  $a$  quelconque (Achour et al., 2002), le paramètre de forme de l'aire de la section mouillée  $\eta$  et la viscosité cinématique du liquide  $\nu$  en écoulement. Ces paramètres sont liés par la relation fonctionnelle  $\varphi(a, Q, I_f, \varepsilon, \eta, \nu) = 0$ .

Trois catégories de problèmes peuvent se présenter dans la pratique d'ingénieur hydraulicien. La première catégorie répond au besoin de dimensionnement et consiste à évaluer la dimension linéaire  $a$  à partir des valeurs connues des cinq autres paramètres régissant l'écoulement (Achour et al., 2002). En se référant à la bibliographie, il n'existe à l'heure actuelle aucune relation explicite susceptible de répondre à cette catégorie de problème, lorsque l'écoulement est de nature lisse ou transition. Ceci s'explique par l'impossibilité d'évaluer le nombre de Reynolds  $R_e$  qui est fonction de la dimension linéaire  $a$  recherchée. Le problème peut être résolu en s'appuyant sur un procédé itératif. Dans le domaine rugueux, pour lequel  $a$  est indépendante de  $R_e$ , la littérature bibliographique montre que l'écoulement uniforme est souvent abordé en ayant recours aux formules usuelles telles que celle de Chézy ou de Manning-Strickler. Ces dernières donnent des résultats satisfaisants, et expriment la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement et s'écrivent respectivement :

$$V = C \sqrt{R_h I_f} \quad (I.1)$$

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{I_f} \quad (I.2)$$

Dans les relations (I.1) et (I.2), les paramètres  $C$ ,  $n$ ,  $I_f$  et  $R_h$  désignent respectivement les coefficients de résistance à l'écoulement de Chézy et de Manning, la pente du fond et le rayon hydraulique.

Les valeurs de  $C$  et  $n$  sont injustement considérées comme des constantes ; elles sont évaluées par expériences, selon le cas étudié et la nature de la paroi du canal ou de la conduite. Ce sont des valeurs tabulées que l'on peut consulter dans de nombreux ouvrages spécialisés. Des études récentes de (Achour et Bedjaoui, 2006) ont montré à travers l'exemple du canal rectangulaire, la possibilité d'un calcul explicite de la profondeur relative normale. Ils ont proposé des relations explicites au calcul des coefficients  $C$  et  $n$  basées sur le théorème de (Lagrange, 1770), et exprimées en termes d'une série infinie. Ces relations permettent la solution directe du problème que pose le calcul de la profondeur normale.

La deuxième catégorie de problème consiste à évaluer le débit volume  $Q$ . Ce type de problème est solutionné de manière explicite par la combinaison des relations de Colebrook-White et de Darcy-Weisbach, quelle que soit la nature du régime d'écoulement. Enfin, la troisième catégorie de problèmes consiste à évaluer la pente longitudinale du canal  $I_f$ .

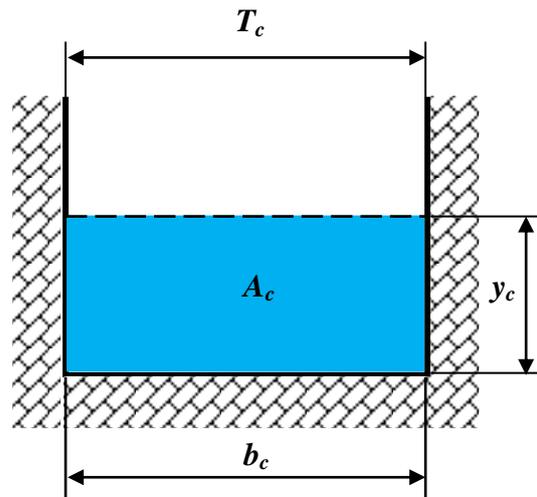
Seul le problème du dimensionnement sera considéré dans la présente partie de l'étude qui sera basée sur une nouvelle approche de dimensionnement des conduites circulaires sous

pression (Achour et Bedjaoui, 2010), en considérant l'écoulement uniforme en régime critique et en introduisant la condition de criticité. Il s'agit donc de proposer une solution explicite, permettant de calculer, avec une précision suffisante la largeur critique  $b_c$ . Cette approche sera fondée sur les deux relations universellement admises de *Darcy-Weisbach* et de *Colebrook-White* valables pour les écoulements turbulent rugueux, transition et pratiquement lisse. Ceci explique l'introduction de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Cette démarche pourrait éventuellement suggérer de présenter une relation, également explicite, au calcul de la profondeur critique  $y_c$ .

Le calcul de la largeur critique  $b_c$  nécessite la connaissance des quatre autres paramètres régissant l'écoulement, le coefficient  $f_c$  de *Darcy-Weisbach* où le coefficient de frottement critique, le paramètre de forme de l'aire de la section mouillée normale critique  $\eta_c$ , la pente critique  $I_c$  du canal et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Ces paramètres sont liés par la relation fonctionnelle  $\varphi_c(a_c, Q_c, I_c, \varepsilon, \eta_c, \nu) = 0$ . L'emploi de cette relation, pour la détermination de la dimension linéaire présentée par la largeur  $b_c$ , mène à une équation de troisième ordre. La résolution analytique de cette équation en utilisant des fonctions trigonométriques conduit à une expression exacte de la dimension linéaire  $a_c$ . Et lorsqu'il s'agit de calculer le débit volume critique  $Q_c$ , pour des valeurs données des paramètres :  $f_c, I_c, \eta_c$  et  $b_c$ , le problème est alors explicite en vertu la condition de criticité. Il n'existe à l'heure actuelle aucune méthode susceptible de résoudre la relation fonctionnelle  $\varphi_c(a_c, Q_c, I_c, \varepsilon, \eta_c, \nu) = 0$ . Pour répondre à cette catégorie de problèmes lorsque l'écoulement est de nature lisse ou de transition, les études existantes proposent soit une résolution graphique ou des solutions itératives basées toutes sur un coefficient de résistance à l'écoulement constant.

## **I.2. Caractéristiques géométriques du canal**

Le canal considéré dans la présente partie de l'étude est uniforme et découvert, d'une section rectangulaire où ses parois ne se referment pas au-dessus de la surface libre et conservent la même nature d'une section à l'autre. A la surface libre la pression est égale à la pression atmosphérique. Les principaux éléments que l'on peut définir à partir de la section mouillée sont représentés par la figure I.2 ci-dessous.



**Figure I.2 :** Schéma de définition de l'écoulement critique dans un canal ouvert de section rectangulaire

Le canal est caractérisé par les paramètres géométriques et hydrauliques critiques suivants :

- ✓  $T_c$  : la largeur au miroir critique, ou largeur mouillée critique ;
- ✓  $b_c$  : largeur du canal siège d'un écoulement à l'état critique ;
- ✓  $y_c$  : profondeur critique d'écoulement ;
- ✓  $A_c$  : l'aire de la section mouillée critique, son expression s'écrit :

$$A_c = b_c y_c \quad (I.3)$$

- ✓  $P_c$  : périmètre mouillé critique ; son expression s'écrit :

$$P_c = b_c + 2y_c \quad (I.4)$$

- ✓  $I_c$  : pente critique.

A partir de ces éléments on définit les paramètres suivants :

- ✓  $R_{h,c} = \frac{A_c}{P_c}$  : rayon hydraulique critique ;
- ✓  $D_{h,c} = 4R_{h,c} = \frac{4A_c}{P_c}$  : diamètre hydraulique critique ;
- ✓  $\eta_c = \frac{y_c}{b_c}$  : profondeur relative normale critique ;
- ✓  $R_{e,c} = \frac{4Q_c}{p_c \nu}$  : nombre de *Reynolds* critique.

### **I.3. Dimensionnement du canal**

Le dimensionnement du canal étudié, consiste essentiellement à la détermination de la dimension linéaire présenté par le paramètre  $b_c$ , pour les valeurs données des paramètres  $f_c$ ,  $I_c$ ,  $\eta_c$  et  $\nu$ . La détermination de la profondeur critique  $y_c$  passe par celle de  $\eta_c$ , où  $y_c = \eta_c b_c$ .

#### **I.3.1. Relations d'écoulement dans le canal**

Dans notre approche de calcul on suit la démarche suivante :

- 1) On fait recours à la relation qui régie l'écoulement critique ;
- 2) On applique la relation universelle de *Colebrook-White* ;
- 3) On introduit l'équation de *Darcy-Weisbach*.

La condition de criticité énonce que, quelle que soit la forme de la section droite du canal considéré, celle-ci s'écrit :

$$\frac{Q_c^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \quad (I.5)$$

Où

$T_c$  est la largeur du plan d'eau qui correspond à la largeur  $b_c$  du canal rectangulaire étudié : c'est-à-dire  $T_c = b_c$ , où  $A_c$  est l'aire de la section mouillée critique et  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

- Toutes les relations régissant l'écoulement uniforme, restent applicables pour le cas de régime critique.

- En particulier l'introduction de paramètre de forme critique  $\eta_c$ , mène à écrire:

1. L'aire de la section mouillée critique est donnée par la relation (I.3) qui s'écrit :

$$A_c = b_c^2 \eta_c \quad (I.6)$$

2. Le périmètre mouillé critique  $P_c$  est calculé selon la relation (I.3). Nous obtenons l'expression suivante :

$$P_c = b_c (1 + 2\eta_c) \quad (I.7)$$

3. Le diamètre hydraulique critique  $D_{h,c}$  s'écrit, en vertu des relations (I.6) et (I.7) :

$$D_{h,c} = 4R_{h,c} = 4b_c \frac{\eta_c}{1 + 2\eta_c} \quad (I.8)$$

4. La condition de criticité donnée par la relation (I.5) conduit à écrire que :

$$Q_c = \sqrt{g} b_c^{5/2} n_c^{3/2} \quad (I.9)$$

La relation (9) ne permet pas d'évaluer le débit critique  $Q_c$ , en l'absence de la valeur de la largeur  $b_c$  du canal.

5. Le nombre de Reynolds  $R_{e,c}$ , caractérisant l'écoulement critique, est :

$$R_{e,c} = \frac{4Q_c}{\rho_c \nu}, \text{ il est à noter que le régime critique est défini par le nombre de Reynolds } R_l,$$

appelé parfois *critérium* (M. Carlier, 1986) qui marque la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent. Le régime critique peut, en effet, exister dans l'un ou l'autre de ces deux modes d'écoulement.

Où bien :

$$R_{e,c} = 4\sqrt{g} b_c^{3/2} \frac{\eta_c^{3/2}}{(1 + 2\eta_c)\nu} \quad (I.10)$$

- En dépit du fait que la formule de *Colebrook-White* (1939) ait été établie en conduite, elle semble être cependant fort intéressante lorsqu'elle est appliquée aux canaux ouverts (Bock, 1966 ; Chow, 1973 ; Sinniger et Hager, 1989). Cette formule exprime le coefficient de résistance  $f$ . Et en paramètres critiques, elle s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f_c}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7 D_{h,c}} + \frac{2,51}{R_{e,c} \sqrt{f_c}} \right) \quad (I.11)$$

La relation (I.11) couvre tout le domaine de diagramme de *Moody* (1944) et reste applicable dans toute la gamme de rugosités relatives  $0 < \varepsilon/D_{h,c} < 5 \cdot 10^{-2}$  et pour toute valeur de nombre de Reynolds critique  $R_{e,c} > 2300$ . Elle est en effet exclusivement destinée à l'écoulement turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse en régime critique. Au regard de la forme implicite de la relation (I.10), il est important de signaler que le nombre de Reynolds critique figurant dans la relation (I.11) ne peut être évalué puisque la largeur critique  $b_c$  est le paramètre inconnu du problème. C'est d'ailleurs le paramètre que l'on cherche à déterminer dans la présente étude.

- Une autre relation qui servira de base à notre étude est celle de *Darcy-Weisbach* (1854), relation développée pour les écoulements en conduites circulaires en charges, se présente sous forme :

$$J = \frac{f}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (I.12)$$

Dans laquelle  $f$  est le coefficient de frottement ou coefficient de résistance à l'écoulement,  $V$  est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite,  $D$  est le diamètre de la conduite,  $J$  est le gradient de perte de charge correspondant à la pente du canal dans l'écoulement soit uniforme et  $g$  l'accélération de la pesanteur. L'application de la relation (I.12), est également universelle, elle joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites, leur généralisation pour les canaux ouverts connaît un grand succès, en remplaçant  $D$  par le diamètre hydraulique  $D_h$ .

En tenant compte des considérations de l'écoulement uniforme en régime critique évoluant dans un canal ouvert rectangulaire, la relation (I.12) devient :

$$I_c = \frac{f_c}{D_{h,c}} \cdot \frac{V_c^2}{2g} \quad (I.13)$$

La relation (13) exprime la proportionnalité entre la pente critique  $I_c$  du canal, la vitesse moyenne critique  $V_c$  et le diamètre hydraulique critique  $D_{h,c}$ .

La forme la plus usuelle de la relation (I.13) est celle que l'on obtient après y avoir insérer l'équation de la continuité, soit :

$$I_c = \frac{f_c}{D_{h,c}} \frac{Q_c^2}{2gA_c^2} \quad (I.14)$$

Nous pouvons ainsi constater que la pente critique du canal est proportionnelle au carré du débit critique que celle-ci écoule, qui devient, en tenant compte la condition de criticité et le paramètre de forme de la section critique :

$$I_c = \frac{f_c}{8} (1 + 2\eta_c) \quad (I.15)$$

### I.3.2. Calcul explicite de la dimension linéaire

Pour calculer la dimension linéaire critique  $a_c$  représenté par la largeur  $b_c$ , il est nécessaire de disposer les données du problème étudié, présentés par ; la profondeur relative normale critique  $\eta_c$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant l'état des parois du canal, la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement et la pente critique  $I_c$  du canal. On remplace l'expression de diamètre hydraulique critique et le nombre de *Reynolds* critique donnés respectivement par les relations (I.8) et (I.10) dans la relation (I.11) de *Colebrook-White*, on aura:

$$\frac{1}{\sqrt{f_c}} = -2 \log \left( \frac{(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8b_c\eta_c} + \frac{2,51(1+2\eta_c)\nu}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c}b_c^{3/2}\eta_c^{3/2}} \right) \quad (I.16)$$

La relation obtenue est une fonction logarithme décimal sous forme:

$$y = \log x ;$$

Le logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction  $f(x)=10^x$  permet de déduire que :

$$\forall x \in ] 0 ; +\infty [ \text{ et si } y = \log x, \text{ alors } x = 10^y ;$$

Fondée sur cette propriété, la relation précédente (I.16) permet à écrire:

$$\left( \frac{(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8b_c\eta_c} + \frac{2,51(1+2\eta_c)\nu}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c}b_c^{3/2}\eta_c^{3/2}} \right) = 10^{-\frac{1}{2\sqrt{f_c}}} \quad (I.17)$$

Nous pouvons déduire de cette dernière relation que:

$$\frac{10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8b_c\eta_c} + \frac{2,51 \times 10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\nu}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c}b_c^{3/2}\eta_c^{3/2}} - 1 = 0 \quad (I.18)$$

En suite, en multipliant l'équation (I.18) par  $b_c^{3/2}$  et on obtient l'équation suivante:

$$b_c^{3/2} - \frac{10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8\eta_c} b_c^{1/2} + \frac{2,51 \times 10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\nu}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c}\eta_c^{3/2}} = 0 \quad (I.19)$$

Cette dernière relation permet de déduire que :

$$b_c^{3/2} - pb_c^{1/2} - q = 0 \quad (I.20)$$

Où :

$$p = \frac{1}{14,8} \frac{10^2 \sqrt{f_c} (1 + 2\eta_c) \varepsilon}{\eta_c} \quad (I.21)$$

$$q = \frac{1}{4\sqrt{g} \sqrt{f_c}} \frac{2,51 \cdot 10^2 \sqrt{f_c} (1 + 2\eta_c) \nu}{\eta_c^{3/2}} \quad (I.22)$$

En adoptant le changement de variables :

$$x = b_c^{1/2} ;$$

Pour des considérations précédentes, nous obtenons l'équation de troisième degré suivante qui est exprimé implicitement par la relation :

$$b_c = \varphi(f_c, \eta_c, \varepsilon, \nu, g) :$$

$$x^3 - px - q = 0 \quad (I.23)$$

La relation (I.23) est une équation de troisième degré en  $x$ , sans terme du second ordre, et la résolution de celle-ci est basée essentiellement sur le théorème de (*J. Cardan*, 1545), consiste à étudier le discriminant  $\Delta$  de cette équation, en particulier son signe, dont le discriminant est :

$$\Delta = q^2 - 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (I.24)$$

Alors les solutions de l'équation (I.23) dépendent du signe du nombre réel  $q^2 - 4(p/3)^3$ .

1) Si  $q^2 - 4(p/3)^3 \geq 0$ , l'équation (I.23) admet une racine réelle donnée par la relation suivante :

$$x = \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}(\Delta)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}(\Delta)^{1/2}\right)^{1/3} \quad (I.25)$$

2) Si  $q^2 - 4(p/3)^3 < 0$ . Dans ce cas l'équation (I.23) admet trois racines cubiques complexes, et au lieu s'empêtrer dans les racines carrées de nombres complexes, ainsi il est possible de mener la résolution de l'équation (I.23), en se basant sur les changements de variables trigonométriques, selon les étapes suivantes :

*i*) En adoptant le changement de variables sous forme trigonométrique

$$x = \rho \cos \theta ;$$

avec :

$$\rho \text{ est un nombre réel et } \theta \in [0, 2\pi].$$

Avec ce changement de variable, l'équation (I.23) serait alors :

$$\rho^3 \cos^3 \theta - p\rho \cos \theta - q = 0 \tag{I.26}$$

*ii*) Cette étape vise la linéarisation de l'équation (I.26) en utilisant la transformation trigonométrique suivante :

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta .$$

A l'aide de ce résultat, la forme linéaire de l'équation (I.26) s'écrit:

$$\rho^3 \left( \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta \right) - p\rho \cos \theta - q = 0$$

On a encore:

$$\frac{1}{4} \rho^3 \cos 3\theta + \left( \frac{3}{4} \rho^3 - p\rho \right) \cos \theta - q = 0 \tag{I.27}$$

*iii*) Puisque nous n'avons pas choisi la valeur de  $\rho$ , on peut l'obtenir par l'annulation de la constante de  $\cos \theta$ , de l'équation (I.27) comme suit :

$$\left( \frac{3}{4} \rho^3 - p\rho \right) = 0 \Rightarrow \rho \left( \frac{3}{4} \rho^2 - p \right) = 0;$$

$$\text{Puisque on a } \rho \neq 0 \Rightarrow \left( \frac{3}{4} \rho^2 - p \right) = 0;$$

Ce que revient à déterminer la valeur de  $\rho$  par l'expression suivante :

$$\rho = \sqrt{\frac{4p}{3}} \tag{I.28}$$

La valeur du paramètre  $p$  donné par la relation (I.21) est strictement positive et puisque le discriminant  $\Delta$  est négatif, ce qui assure l'existence de  $\rho$ . Et avec ce choix, l'équation (I.27) se réduit à :

$$\frac{1}{4} \rho^3 \cos 3\theta - q = 0 \tag{I.29}$$

*iv*) Il s'agit maintenant de résoudre une simple équation trigonométrique présentée par la relation (I.29), avec la connaissance des paramètres  $\rho$  et  $q$ .

L'équation (I.29) permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \frac{4q}{\rho^3} = \frac{4q}{4p\sqrt{\frac{4p}{3}}} = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} ; \\ \Leftrightarrow \cos 3\theta &= \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} \end{aligned} \quad (I.30)$$

On sait bien que :

$$\left( \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} \right)^2 = \frac{27q^2}{4p^3} < 1, \text{ ce que revient à } \Delta < 0.$$

Car étant :

$$27\Delta = 27p^2 - 4q^3, \text{ alors, } \frac{27\Delta}{4p^3} = \frac{27q^2}{4p^3} - 1.$$

La résolution de l'équation considérée (I.29) se fait par ce changement,  $\beta = 3\theta$ .

Pour résoudre l'équation,  $\cos \beta = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$ , avec  $\left| \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} \right| \leq 1$ , on utilise le principe d'équivalence:

$$\cos \beta = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} \Leftrightarrow \beta = \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right) + 2k\pi$$

Où

$$\beta = -\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right) + 2k\pi$$

(I.31)

avec  $k \in \mathbb{Z}$ , où  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

Et seulement, en retenant également les racines de signes positifs et en excluant ceux négatifs, car la solution désigne la racine carrée d'une grandeur géométrique  $b_c$ .

**I.4. Exemple d'application**

Pour mettre en évidence ce travail, on considère un écoulement uniforme en régime critique dans un canal de forme rectangulaire, dont les parois internes sont caractérisées par la rugosité absolue  $\varepsilon = 5.10^{-4} m$  et de la viscosité cinématique du liquide  $\nu = 10^{-6} m^2 / s$ . Le paramètre de forme de la section mouillée critique  $\eta_c = y_c / b_c$  est supposé égal à 0,628, tandis que la pente critique est  $I_c = 4.10^{-3}$ .

On cherche à déterminer la largeur  $b_c$  du canal ainsi que le débit critique  $Q_c$  écoulé.

**Solution**

On résout ce problème à l'aide de l'équation implicite (I.23) qui exprime la relation  $b_c = \varphi(f_c, \eta_c, \varepsilon, \nu, g)$ . Les données nécessaires aux calculs sont :

i) Le coefficient de frottement critique  $f_c$  est déterminé par la relation (I.15) :

$$f_c = \frac{8I_c}{(1 + 2\eta_c)} = \frac{8 \times 4.10^{-3}}{1 + 2 \times 0,628} = 0,014184397 ;$$

ii) Les paramètres  $p$  et  $q$  de l'équation (I.23) sont respectivement évalués selon les relations (I.21) et (I.22) comme suit :

$$p = \frac{10^{\frac{1}{2\sqrt{0,014184397}} (1 + 2 \times 0,628) 5.10^{-4}}}{14,8 \quad 0,628} ;$$

Soit :

$$p = 1,915586072 .$$

$$q = \frac{2,51 \times 10^{\frac{1}{2\sqrt{0,014184397}} (1 + 2 \times 0,628) 10^{-6}}}{14,8 \quad 0,628^{3/2}} ;$$

Soit :

$$q = 0,120361432 .$$

L'équation (I.23) s'écrit :

$$x^3 - 1,915586072x - 0,120361432 = 0 .$$

iii) La valeur de discriminant  $\Delta$ , est donnée par la relation (I.24) :

$$\Delta = 0,120361432^2 - 4\left(\frac{1,915586072}{3}\right)^3 ;$$

Soit :

$$\Delta = -1,026873959 .$$

Le discriminant  $\Delta$  est donc de signe négatif, et l'équation précédente de l'inconnu  $x$ , admet trois racines réelles. En adoptant le changement de variables sous forme trigonométrique :

$$x = \rho \cos \theta ;$$

L'équation (I.23) s'écrit sous forme trigonométrique (I.27) :

$$\rho^3 \cos^3 \theta - 1,915586072 \rho \cos \theta - 0,120361432 = 0 ;$$

Pour des considérations de linéarisation et de choix de la valeur de paramètre  $\rho$ , la relation ci-dessus s'écrit sous la forme de l'équation (I.29) :

$$1,020470888 \cos 3\theta - 0,120361432 = 0 ;$$

Posons  $\beta = 3\theta$  et tel que :

$$\cos \beta = \frac{0,120361432}{1,020470888} = 0,117946953 ;$$

$$\text{Avec } \left| \frac{0,120361432}{1,020470888} \right| = |0,117946953| \leq 1 ;$$

En appliquant le principe d'équivalence, l'équation (I.31) devient :

$$\beta = -\arccos(0,117946953) + 2k\pi ;$$

Avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

On déduit que :

1) Pour  $k = 0$

$$\beta = \arccos(0,117946953) + 2\pi \times 0 ;$$

$$\Rightarrow \beta = 1,452574178 \text{ Radians.}$$

Ou

$$\beta = -\arccos(0,117946953) + 2\pi \times 0 ;$$

$$\Rightarrow \beta = -1,452574178 \text{ Radians.}$$

2) Pour  $k = 1$

$$\beta = 7,735759485 \text{ Radians ;}$$

Ou

$$\beta = 4,830611129 \text{ Radians.}$$

3) Pour  $k = 2$

$$\beta = 14,01894479 \text{ Radians ;}$$

Ou

$$\beta = 11,11379644 \text{ Radians.}$$

La représentation de l'ensemble de ces valeurs sur le cercle trigonométrique, montre que l'on peut se limiter à  $\beta \in \{1,452574178; -1,452574178; 7,735759485; 4,830611129; 14,01894479; 11,11379644\}$  Radians.

En reportant dans:

$$x = 2\sqrt{p/3} \cos(\beta/3) ;$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{1,915586072/3} \cos(\beta/3).$$

Ou bien :

$$x = 1,598159805 \cos(\beta/3).$$

On constate qu'il nous reste seulement les valeurs qui sont les trois racines réelles de l'équation à résoudre qui sont les suivantes:

$$x_1 = 1,414453956m^{1/2};$$

$$x_2 = -1,351490959m^{1/2};$$

$$x_3 = -0,062962997m^{1/2}.$$

On retient seulement la racine positive et on tient compte du changement de variables opéré :

$$b_c = x^2 = (1,414453956)^2 ; \Rightarrow b_c = 2,000679994m.$$

Ou bien :

$$b_c \approx 2m.$$

Le débit critique  $Q_c$  écoulé est, selon la relation (I.9) est donné par :

$$Q_c = \sqrt{g} b_c^{5/2} n_c^{3/2} ;$$

$$\Rightarrow Q_c = \sqrt{9,81} \times 2^{5/2} \times 0,628^{3/2};$$

Ou bien :

$$Q_c \approx 8,825 m^3 / s$$

### **Conclusion**

Dans ce chapitre on a présenté une approche théorique pour la résolution du problème du dimensionnement d'un canal rectangulaire en écoulement critique. Cette approche est basée sur les deux relations universellement admises de *Darcy-Weisbach* et de *Colebrook-White* qui sont appliquées au cas du canal rectangulaire. Ces relations sont valables pour les natures d'écoulement turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse, ceci s'explique par l'introduction de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. En considérant l'écoulement uniforme en régime critique et en introduisant la condition de criticité. L'objectif était de proposer une solution explicite, permettant de calculer, avec une précision suffisante la largeur d'un canal rectangulaire, désigné par  $b_c$ . Cette démarche présente une relation acquise, également implicite de forme  $b_c = \varphi(f_c, I_c, \eta_c, \varepsilon, \nu, g)$  et sa résolution se fait à l'aide d'un modèle mathématique présenté par une résolution analytique d'une équation de troisième degré, qui conduit à l'expression exacte de la dimension linéaire, et en ayant recours aux fonctions trigonométriques. Cette démarche présente des relations, également explicites permettant la solution directe au problème que pose le calcul de la profondeur critique,  $y_c$ . Pour tous les profils géométriques connus, notre travail a montré, à travers l'exemple du canal rectangulaire, la possibilité d'un calcul explicite de la dimension linéaire pour un écoulement en régime critique évoluant un canal de forme optée, basé sur les démarches de cette étude.

# ***Chapitre II***

***Ecoulement critique dans un canal de profil en U***

## II.1. Introduction

Plusieurs types d'ouvrages peuvent servir à transporter l'eau, soit dans le milieu urbain ou dans le milieu rural. Le *canal à découvert* est le plus couramment employé dans plusieurs domaines d'activité humaine. A titre d'exemple les fermes agricoles sont équipées de divers types de canaux découverts pour le transport de l'eau, généralement par gravité; on distingue quatre principaux types d'utilisation qui sont :

- 1) *Les canaux d'alimentation*, pour amener l'eau depuis la prise principale jusqu'aux bassins d'accumulation ; une ferme importante qui possède habituellement un canal d'alimentation principal, et qui se divise en canaux secondaires et même tertiaires;
- 2) *Les canaux de drainage*, pour évacuer l'eau des bassins, par exemple vers une vallée;
- 3) *Les canaux de dérivation* pour détourner les débits d'eau excédentaires;
- 4) *Les canaux de protection* pour détourner les eaux de ruissellement.

C'est pour cette raison, que tous les canaux doivent être soigneusement conçus de façon à avoir la capacité de débit requise. Or, la conception d'un canal repose sur l'application de formules mettant en rapport sa capacité du débit, son profil, sa pente ou sa perte de charge effective et la rugosité de ses parois. La relation de *Manning* est la formule la plus couramment employée, mais nous considérons tout d'abord quelques facteurs fondamentaux pour la conception d'un canal, traduite par le profil du canal adopté qui permet d'intervenir dans le coût d'excavation et le coût de revêtement. Le calcul hydraulique à rependu sur ces interventions, si le débit est imposé par les contraintes de l'irrigation. Sa valeur, pour un écoulement uniforme est:

$$Q = AV = \frac{1}{n} R_h^{2/3} I^{1/2}$$

Ou encore selon le rayon hydraulique on a:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} I^{1/2}$$

On voit que l'on ne peut satisfaire en même temps la minimisation de  $A$  et de  $P$ . Il convient donc de poser le problème autrement par exemple en fixant  $A$ , et en minimisant  $P$  pour maximiser le débit, ce qui revient au même.

Posé sous cette forme, le problème devient un problème de maximisation du rayon hydraulique  $R$ . Cherchons maintenant la forme de section qui répond à l'optimum décrit : pour une aire mouillée fixée. Donc il faut minimiser le périmètre mouillé, et maximiser le rayon hydraulique. Le profil semi-circulaire étant en principe le plus efficient, tel que le rayon hydraulique qui est égale a :

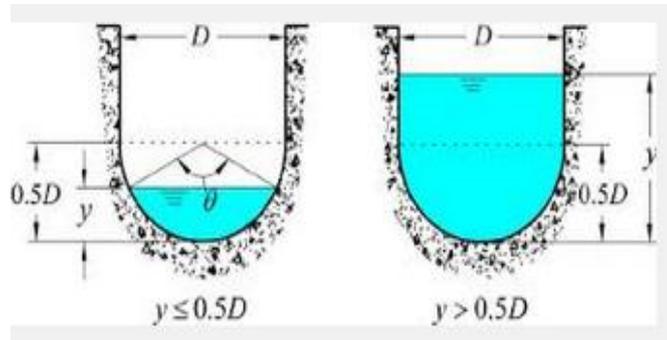
$$R = \frac{A}{P} = \frac{\frac{1}{2}(\pi r^2)}{\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{y}{2}$$

C'est donc la forme idéale pour faire passer le plus grand débit dans la section ayant le plus petit périmètre, par rapport aux autres formes rencontrés dans la pratique. Ce type de profil appartient à la famille des canaux à fond arrondi. D'après les expériences de M. *Bazin* on peut conclure que la résistance à l'écoulement est notablement moindre dans un canal arrondi qui ne présente aucune angle vif à l'intérieur. Ce fait s'explique très facilement lorsqu'on étudie la distribution des vitesses à l'intérieure d'un courant d'écoulement. On reconnaît en effet que, dans un canal rectangulaire, la vitesse dans les angles est très petite relativement à la vitesse moyenne, de telle sorte que ces endroits ne contribuent que pour de faible quantité débit total. Dans un canal circulaire, au contraire, la vitesse est la même sur toute l'étendue de la paroi et se diffère moins de la vitesse moyenne. C'est donc avec beaucoup de raison que l'on adopte souvent pour le profil transversal de cuvette des égouts; une forme à peu près circulaire. Cette forme est celle qui donne le maximum d'écoulement pour une pente et une section donnée. La catégorie des canaux à fond arrondi pour plusieurs situations est la meilleure forme pour un canal ouvert. L'un de ces avantages est la capacité à maintenir une vitesse plus élevée et à faible débit, qui réduit la tendance à déposer des sédiments. Une autre caractéristique est sa plus grande profondeur à faibles rejets qui lui permet de transporter des débris flottants et semi-flottants plus facilement qu'un canal à fond plat. (*Chow, V.T.1959*) a montré que le canal à profil en U est une approximation de triangle à fond a rondi, et c'est une forme généralement réalisée avec une excavation par pelles. Cette catégorie de forme a été longuement étudié par plusieurs chercheurs (*Loganathan, G.V.1991 ; Monadjemi, P.1994 ; Froehlich, D.C.1994 ; Babaeyan-Koopaei, K. et al. 2000 ; Jain, A. et al. 2004 ; Bhattachariya, R.K.and Satish, M.G.2008 ; Das, A.2008 ; Hussein, A.S.A.2008*), ils ont montrés par des modèles d'optimisations mathématiques qu'elle a des avantages multiples dans son model technico-économique.

Pour la mesure de débit dans les rivières et canaux artificiels à régime permanent ou à variation lente, trois types de canaux jaugeurs couvrent une grande gamme d'utilisations. Ces types sont recommandés et traités par une norme internationale : *ISO 4359,1983* à savoir canaux jaugeurs à col rectangulaire, à col trapézoïdal et à col en U, c'est-à-dire à fond arrondi. Et à l'année 2013, cette norme a été révisée par : *ISO 4359:2013*.

Le présent chapitre propose au lecteur une approche théorique rigoureuse visant à définir une relation fonctionnelle au calcul de la profondeur critique d'écoulement dans un canal de section transversale de profil en U. Cependant, sur la conception du canal en forme de U et le

traitement des calculs hydrauliques sur la profondeur critique, il n'y a pas jusqu'à nos jours une solution analytique, pour faire face à l'équation de degré plus élevé et avec les paramètres caractérisant ce type de forme compliquée, indiquée ci-dessous



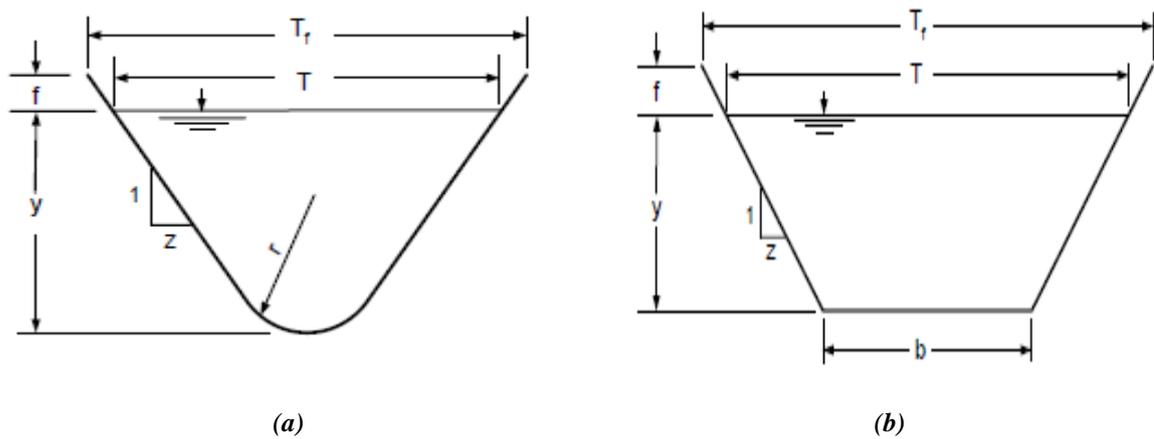
**Figure II.1 :** Schéma simplifié de définition d'un canal sous forme de U

Le canal de la section transversale de forme U, est composé d'une partie semi-circulaire de diamètre  $D$  inférieurement surmonté d'une partie rectangulaire de largeur  $D$ . Ici, le canal est considéré en forme U seulement si  $y > 0,5D$ .

Cette forme est rendue par plusieurs chercheurs sous forme pratiquement plus simple à celle de triangle à fond arrondi, (X.Y.Zhang, L.Wu, 2012, F. L. Li, H. Wen, X. G. Lin, 2012), à l'objet d'établir une expression explicite pour le calcul de la profondeur critique. L'une des études récentes a été établie par (F. L. Li, H. Wen, X. G. Lin, 2012) en utilisant les méthodes graphiques d'ajustement des courbes, avec une erreur relative maximale de la profondeur critique de 0,683% environ, ce qui peut être une erreur relative importante pour un certain nombre de cas pratiques.

## II.2. Canal triangulaire à fond arrondi

Comme nous l'avons vu, ce type du canal appartient à la catégorie des canaux à fond courbé, et notre choix s'est porté sur ce type; en se basant sur l'importance de cette forme efficace et économique. Les canaux à fond arrondi dont la parabole et en forme de U, ils sont bénéfiques pour la prévention du soulèvement par le gel du sol et ont une excellente performance hydraulique. C'est un choix favorable dans les ouvrages d'irrigation, en particulier dans les régions froides (X.Y.Zhang, L.Wu, 2012). Une étude récente a été faite par (Ayman T. Hameed, 2010), il a montré à travers sa recherche que la comparaison du canal triangulaire à fond arrondi et le canal le plus utilisé présenté par le canal trapézoïdal, comme c'est illustre sur la figure ci-dessous.



**Figure II.2** : Coupe transversale d'un canal découvert:

(a) triangle à fond arrondi et (b) trapézoïdal (Ayman T. Hameed, 2010)

L'auteur utilisa un modèle d'optimisations par le programme MATLAB. Tel que pour les mêmes valeurs de débit volume  $Q$  et de l'inclinaison des parois par rapport à l'horizontale et pour la même valeur de la rugosité, les résultats obtenus montrent d'une part que les coûts sommaire de la construction pour la forme triangulaire à fond arrondi sont sensiblement inférieurs à ceux de la forme trapézoïdale. D'autre part il a noté que les valeurs du coût total de la construction augmentent avec l'augmentation de l'inclinaison des parois latérales. Dans l'ordre de la validation et pour une meilleure concordance de ce travail l'auteur a comparé avec les résultats obtenus par (Babaeyan-Koopaei, K. et al., 2000) qui a utilisé la forme trapézoïdale optimisée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cette comparaison a donné un bon accord entre les résultats obtenus, pour les mêmes valeurs de débit, coefficient de rugosité, pente longitudinale et la pente latérale.

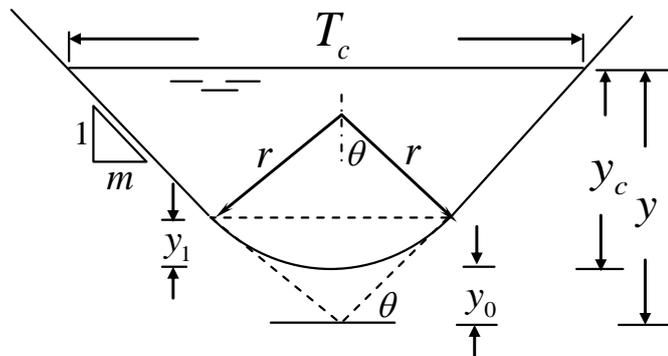
Pour toutes les raisons ci-dessus, et pour une erreur relative admissible du calcul de la profondeur critique, nous avons préféré d'effectuer notre approche de calcul de cette profondeur. En plus le canal de profil en U peut être considéré comme un canal triangulaire avec un fond arrondi due à sa géométrie simple. Et comme nous l'avons montré au cours de la première partie de notre étude, la profondeur critique joue un rôle majeur dans la détermination de la nature d'écoulement fluviale ou torrentielle et de la classification des écoulements variés.

### II.3. Caractéristiques géométriques du canal

Le canal considéré dans la présente étude est un canal de section droite en U, peut être considéré comme un canal triangulaire à fond arrondi. Lors de l'utilisation des propriétés

géométriques d'un triangle, on obtient des relations simples qui régissent les caractéristiques hydrauliques du canal en U. La forme triangulaire à fond arrondi est une forme uniforme découvert composée au fond d'un segment circulaire du rayon  $r$ , et surmontée par des parois d'un triangle symétriques d'un angle d'inclinaison  $\theta$ , par rapport à l'horizontal, de telle façon que ces parois forment des tangente au segment circulaire. Les parois ne se referment pas au-dessus de la surface libre et conservent la même nature d'une section à l'autre. A la surface libre la pression est égale à la pression atmosphérique.

Les principaux éléments que l'on peut définir à partir de la section mouillée sont représentés par la figure II.3 ci-dessous.



**Figure II.3 :** Schéma de définition de l'écoulement critique dans un canal ouvert de section triangulaire à fond arrondi

La figure II.3 montre l'écoulement critique dans un canal en forme de U. La profondeur critique est  $y_c$  et la largeur au miroir critique est  $T_c$ , où l'indice "c" désigne la condition de l'état critique de l'écoulement. Le canal est caractérisé par une pente de  $m$  du côté horizontal par une unité verticale. La dimension linéaire verticale  $y$  est égale à la profondeur de l'écoulement dans le triangle hypothétique obtenu en prolongeant les côtés du canal.

#### II.4. Equation de l'écoulement critique

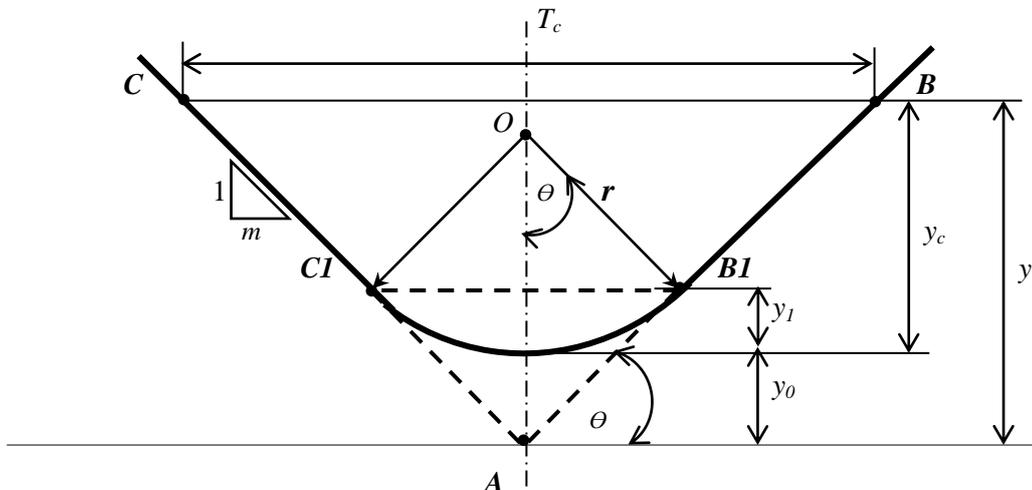
En utilisant les propriétés d'un triangle, on obtient des équations de forme simple telle que l'aire de la section mouillée critique et la largeur au miroir critique qui entrent en compte dans le critère d'écoulement critique.

La largeur au miroir critique, ou largeur mouillée critique peut s'écrire comme :

$$T_c = 2my \quad (II.1)$$

Où  $m = \cot\theta$ .

On cherche à travers le présent schéma ci-dessous ; à établir l'expression de l'aire de la section mouillée critique



**Figure II.4 :** Schéma de définition des caractéristiques géométriques de la forme triangulaire

Selon le schéma ci-dessus, la surface de la section mouillée critique,  $A_c$  est également présentée par :

$$A_c = A_{ar} + A_{tp} \quad (a)$$

Où  $A_{ar}$  et  $A_{tp}$  sont respectivement l'aire du fond arrondi et l'aire du trapèze **BBICIC**, et

$$A_{tp} = A_{t1} - A_{t2} \quad (b)$$

Où  $A_{t1}$  et  $A_{t2}$  sont respectivement l'aire de triangle **ABC** et l'aire de triangle **ABICI**.

Tels que

$$A_{ar} = \theta r^2 - r^2 \cos \theta \sin \theta = r^2(\theta - \cos \theta \sin \theta) \quad (c);$$

$$A_{tp} = my^2 - r \sin \theta (y_0 + y_1) = my^2 - r \sin \theta (y_0 + r(1 - \cos \theta)) \quad (d)$$

Selon la relation (a), l'aire de la section mouillée critique  $A_c$  est, en vertu des relations (c) et (d) :

$$A_c = r^2(\theta - \sin \theta \cos \theta) + my^2 - r \sin \theta (y_0 + r(1 - \cos \theta)) \quad ;$$

$$\Leftrightarrow A_c = r^2\theta - r^2 \sin \theta \cos \theta + my^2 - r \sin \theta y_0 - r^2 \sin \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta \quad ;$$

$$\Leftrightarrow A_c = my^2 - (r^2 \sin \theta + r y_0 \sin \theta) + r^2\theta \quad ;$$

En termes adimensionnels, la relation précédente s'écrit :

$$A_c = mr^2 \left( \left( \frac{y}{r} \right)^2 + \left( \frac{\theta}{m} \right) \right) - r^2 \sin \theta \left( 1 + \left( \frac{y_0}{r} \right) \right) \quad ;$$

Nous pouvons donc écrire que :

$$A_c = mr^2 \left( (y/r)^2 + (\theta/m) - \frac{\sin \theta}{m} (1 + (y_0/r)) \right) \quad (II.2)$$

En utilisant les propriétés de triangle pour rendre l'équation (II.2) plus explicite, afin de traduire le rapport adimensionnel de forme  $(y_0/r)$  à une expression de cotangente d'inclinaison  $m$ , et ce fait à l'aide des transformations trigonométriques :

$$\tan \theta = \frac{y_0 + y_1}{r \sin \theta} = \frac{y_0}{r \sin \theta} + \frac{y_1}{r \sin \theta} = \frac{y_0}{r \sin \theta} + \frac{r(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} = \frac{y_0}{r \sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} - \cot \theta ;$$

$$\Leftrightarrow (\tan \theta + \cot \theta) \sin \theta - 1 = \frac{y_0}{r} ;$$

A partir des relations connues suivantes :

$\tan \theta = 1/m$  et  $\sin \theta = 1/\sqrt{1+m^2}$ , la relation précédente devienne comme suit :

$$\frac{y_0}{r} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} - 1 \quad (II.3)$$

En remplaçant le rapport adimensionnel  $(y_0/r)$  par son expression (II.3) obtenue ; dans la relation (II.2), soit :

$$A_c = mr^2 \left( (y/r)^2 + (\theta/m) - \frac{\sin \theta}{m^2} \sqrt{1+m^2} \right) = mr^2 \left( (y/r)^2 + (\theta/m) - (1/m^2) \right) ;$$

$$\Leftrightarrow A_c = mr^2 \left( (y/r)^2 + \frac{\sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right)}{m} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (II.4);$$

Pour réduire l'expression de paramètre  $A_c$ , posons

$$\chi_1 = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} - \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) \right) \quad (II.5)$$

De ce fait, la relation (II.4) s'écrit sous la forme définitive suivante :

$$A_c = mr^2 [(y/r)^2 - \chi_1] \quad (II.6)$$

La condition de criticité énonce que, quelle que soit la forme de la section droite du canal considéré. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = 1 \quad (II.7)$$

En introduisant les relations (II.1) et (II.6) dans la relation (II.7), la condition de criticité donc devient :

$$\frac{2myQ^2}{gm^3r^6[(y/r)^2 - \chi_1]^3} = 1 \quad (II.8)$$

Qui peut également s'écrire :

$$\frac{2Q^2(y/r)}{gm^2r^5[(y/r)^2 - \chi_1]^3} = 1 \quad (II.9)$$

On définit la conductivité relative  $Q^*$  telle que :

$$Q^* = \frac{\sqrt{2}Q}{\sqrt{gm^2r^5}} \quad (II.10)$$

On définit également le paramètre de forme suivant:

$$\eta = \frac{y}{r} \quad (II.11)$$

Ainsi, l'équation (II.9) est réduite à:

$$Q^{*2} = \frac{(\eta^2 - \chi_1)^3}{\eta} \quad (II.12)$$

En admettant le changement des variables suivants :

$$z = \eta^2 - \chi_1 \quad (II.13)$$

L'équation (II.12), peut s'écrire tous simplement :

$$Q^{*2} = \frac{z^3}{\sqrt{z + \chi_1}} \quad (II.14)$$

Ou bien :

$$z = Q^{*3} (z + \chi_1)^{\frac{1}{6}} \quad (II.15)$$

Lorsque l'écoulement se situe à l'état critique, la variable,  $z$  caractérisé la géométrie du canal étudié, répond alors à la relation (II.15) et sa valeur dépend à la fois de celle de la cotangente d'inclinaison,  $m$  des parois, et de celle du rayon,  $r$  du segment arrondi.

En admettant que les valeurs de  $m$  et de  $r$  soit données, la relation (II.15) montre que les valeurs du paramètre  $z$ , ne peut être explicitement déterminée. La relation (II.15) est en effet implicite vis-à-vis de  $z$  puisque celui est contenu à la fois dans les membres gauche et a droit de la relation. La détermination de paramètre,  $z$  nécessite donc un procédé itératif où la relation (II.15) est utilisée, après la sélection d'une première valeur de  $z$ . On suppose que la première valeur de  $z$  est égal à  $z_0 = \chi_1$ . Par conséquent, les valeurs suivantes de  $z$  sont obtenues, de telle sorte que :

$$z_1 = Q^{*\frac{2}{3}}(2\chi_1)^{\frac{1}{6}} \quad (II.16)$$

$$z_2 = Q^{*\frac{2}{3}}(z_1 + \chi_1)^{\frac{1}{6}} \dots \text{ainsi de suite} \quad (II.17)$$

Le processus de calcul s'arrête quand  $z_i$  et  $z_{i+1}$  ; sont suffisamment proches. Il est évident que la vitesse de convergence du processus itératif décrit dépend fortement de la valeur initiale de  $z_0$ , sélectionnée. Avec  $z_0 = \chi_1$ , les calculs intensifs ont montrés que la valeur obtenue de  $z$ , est presque exacte à la fin de la septième étape de calcul seulement pour le pire des cas. La procédure montre que le calcul n'est donc pas difficile.

Une fois la valeur finale de  $z$  est déterminée, le rapport de forme d'aspect  $\eta$ , est établit à partir de l'équation. (II.13) comme suit:

$$\eta = \sqrt{z + \chi_1} \quad (II.18)$$

On définit le paramètre de forme d'aspect critique comme suit :

$$\eta_c = \frac{y_c}{r} \quad (II.19)$$

Le rapport adimensionnelle d'aspect critique peut s'exprimé comme suit:

$$\eta_c = \frac{y_c}{r} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{y}{r} - \frac{y_0}{r} \quad ;$$

Donc

$$\eta_c = \eta - y_0/r \quad (II.20)$$

Et selon la relation (II.3), la relation (II.20) devient :

$$\eta_c = \sqrt{z + \chi_1} - \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} + 1 \quad (II.21)$$

L'expression de la profondeur critique est donc :

$$y_c = r\eta_c \quad (II.22)$$

### ***Exemple d'application II.1***

On estime ce travail par application pratique présentée par l'exemple suivant :  
Calculer la profondeur critique  $y_c$  dans un canal en forme de U représenté sur la figure II.3 pour les données suivantes:

$Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $m = 1$  ( $\theta = 45^\circ$ ) et  $r = 0.8 \text{ m}$ .

### Solution

Résolvons le problème à l'aide de la démarche suivante :

1) Selon l'équation. (II.10), la conductivité relative  $Q^*$  est :

$$Q^* = \frac{\sqrt{2}Q}{\sqrt{gm^2r^5}} = \frac{\sqrt{2} \times 10}{\sqrt{9.81 \times 1^2 \times 0.8^5}} = 7.8877934;$$

2) Compte tenu  $z_0 = \chi_1$  et en utilisant l'équation (II.5). Par conséquent

$$\chi_1 = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} - \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) \right) = \frac{1}{1} \left( \frac{1}{1} - \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) \right) = 0.21460184$$

On peut montrer à travers cet exemple, que le procédé itératif recommandé est convergent d'une part, et d'autre part cette convergence s'accomplit vers la fin de la septième étape de calcul. Alors pour montrer la convergence de la méthode, il suffit de vérifier que la première dérivée de la fonction de membre droite de l'équation (II.15), pour  $z_1$  est inférieure à l'unité. Nous avons:

$$F(z) = Q^{*\frac{2}{3}}(z_0 + \chi_1)^{\frac{1}{6}};$$

Ainsi :

$$F'(z) = \frac{1}{6} \frac{Q^{*\frac{2}{3}}}{(z + \chi_1)^{\frac{5}{6}}}$$

La valeur de variable de  $z_1$  est calculée par :

$$z_1 = Q^{*\frac{2}{3}}(z_0 + \chi_1)^{\frac{1}{6}} = 7.8877934^{\frac{2}{3}} \times (0.21460184)^{\frac{1}{6}} = 3.44149854$$

Donc :

$$F'(z_1) = \frac{1}{6} \frac{Q^{*\frac{2}{3}}}{(z_1 + \chi_1)^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{6} \times \frac{7.8877934^{2/3}}{(3.44149854 + 0.21460184)^{5/6}} = 0.2242009$$

Comme nous pouvons le voir, la première dérivée est inférieure à l'unité, ce qui confirme la convergence de procédé.

Nous pouvons aussi calculer le nombre nécessaire d'itérations pour résoudre le problème. Pour cela, nous considérons une erreur absolue et un intervalle pour la variable,  $z$ . Estimant

une erreur relative,  $\varepsilon = 10^{-5}$  et un intervalle  $I$  de valeurs  $z$  fermé de  $\mathbb{R}$ , où la fonction (II.15) soit définie sur lui, telle que  $I = [a; b] = [0.21460184; 6]$ . Ceci est une gamme extrêmement large qui englobe la plupart des cas pratiques. La valeur  $a = 0.21460184$  ; correspond à  $z_0 = \chi_1$ . Et le nombre d'itérations  $n$  est exprimé par la relation suivante:

$$n \geq \frac{\ln \varepsilon - \ln(b - a)}{\ln[F'(b)]}$$

Le calcul conduit à :

$$F'(b) = F'(6) = \frac{1}{6} \times \frac{7.8877934^{2/3}}{(6 + 0.21460184)^{5/6}} = 0.14409249$$

Soit :

$$n \geq \frac{\ln 10^{-5} - \ln(6 - 0.21460184)}{\ln[0.14409249]} = 6.84884305 \cong 7$$

Le processus itératif converge après la septième étape de calcul.

L'insertion des valeurs obtenues de  $Q^*$  et  $\chi_1$  dans l'équation (II.15) et la sélection du processus itératif décrit pour  $z_0 = \chi_1$ , la valeur finale de  $z$  est tel que:

$$z_6 \approx z_7 = z = 5.260588152$$

3) Selon l'équation (II.18), le rapport d'aspect  $\eta$  est que :

$$\eta = \sqrt{z + \chi_1} = \sqrt{5.260588152 + 0.21460184} = 2.339912389$$

4) Par conséquent, le rapport adimensionnel de la profondeur critique,  $\eta_c$  est élaboré à partir de l'équation (II.21) comme :

$$\eta_c = \sqrt{z + \chi_1} - \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} + 1 = 2.339912389 - \frac{\sqrt{1 + 1^2}}{1} + 1 = 1.925698827$$

5) Enfin, la profondeur critique  $y_c$  demandée est donnée par l'équation (II.22):

$$y_c = r\eta_c = 0.8 \times 1.925698827 = 1.54 \text{ m}$$

6) Cette étape vise à vérifier le critère d'écoulement critique régie par l'équation (II.7). La largeur au miroir critique  $T_c$  est donnée par l'équation (II.1) comme suit:

$$T_c = 2my = 2mr(y/r) = 2mr\eta$$

Par conséquent:

$$T_c = 2mr\eta = 2 \times 1 \times 0.8 \times 2.339912389 = 3.743859822 \text{ m}$$

Selon l'équation (II.6), l'aire de la section mouillée critique  $A_c$  est:

$$A_c = mr^2[(y/r)^2 - \chi_1] = mr^2[(\eta)^2 - \chi_1]$$

Ainsi :

$$A_c = mr^2[(\eta)^2 - \chi_1] = 1 \times 0.8^2(2.339912389^2 - 0.21460184) = 3.366776417 \text{ m}^2$$

L'insertion des valeurs de,  $A_c$  et  $T_c$  dans l'équation (II.7) se traduit par :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = \frac{10^2 \times 3.743859822}{9.81 \times 3.366776417^3} = 1.000017829 \approx 1$$

Ainsi, le critère d'écoulement critique est vérifié, confirmant la validité des calculs.

### Conclusion

L'étude a été consacrée au calcul de la profondeur critique dans un canal de profil en U. Les paramètres hydrauliques de l'écoulement, comme la largeur au miroir critique et l'aire de la section mouillée critique, ont été déduits des propriétés géométriques d'un triangle. Par conséquent, le critère de l'écoulement critique a conduit à une équation implicite de forme simple; sur laquelle a été appliquée la méthode de point fixe avec une valeur initiale judicieusement choisie. Aux fins de la présente résolution était de déterminer le rapport de forme d'aspect du triangle hypothétique. Ce paramètre a été étroitement lié à la profondeur critique adimensionnelle par une relation explicite simple. Un exemple de calcul a été fourni pour expliquer la procédure de calcul de la profondeur critique. Le processus itératif préconisé n'a pas été contraignant puisque la solution a été obtenue après la septième étape de calcul seulement. La dernière étape de calcul a vérifié avec succès le critère d'écoulement critique, confirmant ainsi la validité des calculs.

# *Chapitre III*

## *Calcul de la profondeur critique dans une conduite circulaire*

## **II.1.Introduction**

Pour l'écoulement qui est présenté dans les ouvrages hydrauliques, il est important de connaître la profondeur critique, en raison que celle-ci est un paramètre important dans l'analyse des écoulements variés dans les canaux et les cours d'eau naturels. Et comme nous l'avons montré au cours de la première partie de notre étude, les nombreuses recherches effectuées sur l'écoulement critique dans les canaux découverts, se sont surtout intéressées aux profils trapézoïdale et circulaire. Ces deux types de profils des canaux a un intérêt particulier dans la pratique d'hydraulique dues à ces caractéristiques géométriques et hydrauliques, qui sont essentiellement révélées par l'évacuation, stabilité et le mode de fabrication.

Dans le présent chapitre on s'intéresse à contribuer dans l'étude de l'écoulement critique dans une conduite de forme circulaire. La pratique d'hydraulique montre que celle-ci est largement utilisée; pour l'évacuation des eaux dans les domaines d'assainissement, de l'aménagement et ainsi l'obligation de couvrir les aqueducs a conduit tout naturellement, dans le cas des adductions modernes destinées à l'eau potable, et à abandonner les canaux de section trapézoïdale ou rectangulaire et à utiliser des ovoïdes ou des conduites circulaires de grand diamètre. Pour l'eau qui s'écoule dans une conduite circulaire, il est important de connaître la profondeur critique. Bien que l'eau ne puisse pas être réellement s'écoule en régime critique, il est utile de savoir si la profondeur d'écoulement est supérieure ou inférieure à celle critique. La profondeur critique est une quantité d'une importance fondamentale pour comprendre les caractéristiques d'écoulement. Si la profondeur d'écoulement est supérieure à la profondeur critique, le régime d'écoulement est considéré comme sous-critique. Celui-ci est un écoulement lent et est influencé par des conditions en aval. Si la profondeur réelle d'écoulement est inférieure à la profondeur critique, alors le régime d'écoulement est supercritique. Ce dernier est un écoulement rapide et il est influencé par les conditions en amont. Il coule plus vite que la vitesse de l'onde et n'est pas affecté par les conditions en aval. Autre objectif de cette grandeur vise à éviter l'établissement de régime critique dans tous les ouvrages hydrauliques, a fin d'évité ses destructions.

Le calcul de la profondeur critique dans les conduites est un problème qui se produit souvent dans la conception des systèmes de transport des fluides. Cependant, la complexité mathématique des expressions rendre impossible de soulever des solutions de nature explicites pour le cas général. Ajouté à cela, les travaux de mise en œuvre des approches

traditionnelles telles que (Straub W. O, 1978, Swamee P. K, 1993, Frensh, 1999, Vatankhah et Bijankhan, 2010, Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011) donnent des résultats qui n'étaient pas exactes à 100% mais également suffisantes avec des erreurs maximales pratiquement acceptables dans des gammes pratiques bien définies. En outre les méthodes numériques classiques sont des méthodes extrêmement complexes qui fournissent la convergence pour toutes les conditions d'écoulement.

La profondeur critique ne dépend que de la vitesse d'écoulement et la géométrie du canal (Chow, 1959 ; Henderson, 1966), et l'équation générale du calcul de la profondeur critique a été établie au deuxième chapitre de cette partie qui s'exprimée comme suit :

$$\left( Q^2/g \right) = \left( A^3/T \right)_c \quad (III.1)$$

Cette équation est une équation de base régissant les conditions d'écoulement critiques dans un canal. On peut noter que la condition d'écoulement critique est régie uniquement par la géométrie du canal et de débit d'écoulement. D'autres caractéristiques du canal tel que la pente du lit et la rugosité n'influent pas sur l'état d'écoulement critique pour toutes les valeurs de débit. L'équation (III.1) peut s'écrire en terme adimensionnel, elle permet de traduire que les forces d'inertie ont la même valeur que les forces de gravitation (Chow, 1988). En d'autres termes, cela signifie que le rapport entre ces deux effets; que le nombre de Froude  $F_r$  prend une valeur de l'unité. Cette condition peut être exprimée par l'équation (III.2), sur la base de l'équation :(III.1)

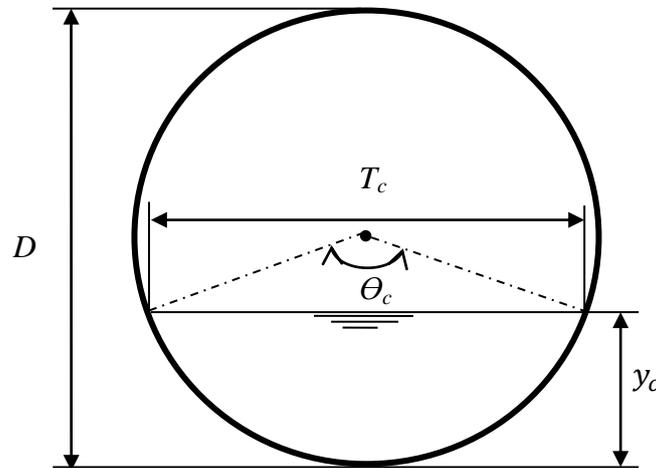
$$F_r = 1 = \frac{Q}{A \sqrt{g \left( \frac{A}{T} \right)_c}} \quad (III.2)$$

Notez que toutes les conditions sur le côté gauche de l'équation (III.1) sont constantes, contrairement aux termes du côté droit, qui se réfèrent à la géométrie de la section transversale d'écoulement à l'état critique, qui à leur tour, dépendent de la profondeur d'écoulement. La solution de l'équation (III.1) pour les profils des canaux rectangulaires, triangulaires et paraboliques est explicite. Pour d'autres sections, telles que trapézoïdales et circulaires, ont des expressions de profondeur critique implicites, en fonction des paramètres hydrauliques et géométries (Swamee, 2005). Toutefois, lorsque vous voulez résoudre le problème de section circulaire, l'équation (III.1), en fonction de la profondeur, acquiert un degré de complexité dans le traitement des équations utilisées assez élevé.

Au regard de la forme des relations (III.1) et (III.2), il est bien utile de constater que l'effet de la viscosité cinématique  $\mathcal{V}$  et, la rugosité des parois internes,  $\varepsilon$  du canal et aussi l'effet de la pente  $I$  n'est pas considéré, ce qui permet d'établir des approches théoriques de taux de remplissage critique  $\eta_c$  et de la charge spécifique critique  $H_{sc}$  en utilisant le paramètre  $\theta$  est décrit dans la figure des caractéristiques de profile circulaire.

### III.2. Caractéristiques de profile circulaire

La figure III.1, est un schéma représentatif d'un canal de forme circulaire partiellement remplie, elle est caractérisée par son diamètre  $D$ . L'écoulement est défini par sa profondeur critique  $y_c$ .



**Figure III.1 :** Schéma de définition des paramètres géométriques en conduite circulaire pour un régime d'écoulement critique

Les caractéristiques de la conduite circulaire partiellement occupées par l'écoulement en état critique sont, en particulier:

- 1) La relation entre la profondeur critique  $y_c$  et l'angle au centre s'écrit :

$$\cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) = \left(1 - 2\frac{y_c}{D}\right) \quad (III.3)$$

- 2) L'aire de la section mouillée critique  $A_c$ , telle que :

$$A_c = \frac{D^2}{8}(\theta_c - \sin \theta_c) \quad (III.4)$$

- 3) Le périmètre mouillé critique  $P_c$ , tel que :

$$P_c = \frac{1}{2}\theta_c \cdot D \quad (III.5)$$

4) La largeur au miroir critique :

$$T_c = D \cdot \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \quad (III.6)$$

5) Le rayon hydraulique  $R_{hc} = A_c/P_c$ , qui s'exprime, en ayant recours aux relations (III.4) et (III.5), par :

$$R_{hc} = \frac{D}{4} \left(1 - \frac{\sin \theta_c}{\theta_c}\right) \quad (III.7)$$

### III.3. Calcul de la profondeur critique

L'écoulement critique est régi par la relation (III.1) de condition de criticité. En insérant les relations (III.4) et (III.7) dans la relation (III.1), celle-ci devient :

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} = \frac{\left[\frac{D^2}{8}(\theta_c - \sin \theta_c)\right]^3}{D \cdot \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right)} \quad (III.8)$$

Après un réarrangement, la relation ci-dessus peut s'écrire comme suit :

$$\frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{0.044194[(\theta_c - \sin \theta_c)]^{3/2}}{\sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right)^{1/2}} = f(y_c/D) \quad (III.9)$$

Si  $\eta_c = (y_c/D)$  est le taux de remplissage de la conduite à l'état critique, et si en introduisant le débit relatif :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} \quad (III.10)$$

La relation (III.9) permet alors de déduire que :

$$Q^* = \frac{0.044194[(\theta_c - \sin \theta_c)]^{3/2}}{\sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right)^{1/2}} = f(\eta_c) \quad (III.11)$$

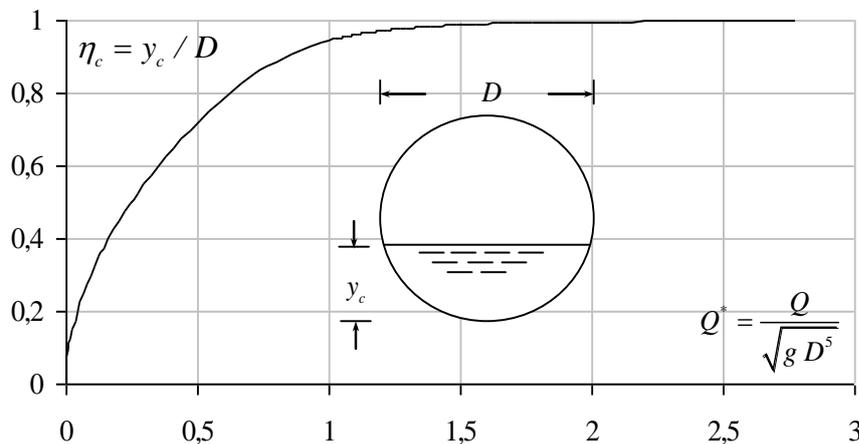
C'est la relation (III.11) qui permet de définir le débit limite au-delà duquel l'écoulement dans le canal de forme circulaire est devenu à un état critique.

Selon la relation (III.3), La relation (III.11), peut s'exprime par :

$$Q^* = \frac{[\cos^{-1}(1 - 2\eta_c) - 2(1 - 2\eta_c)\sqrt{\eta_c(1 - \eta_c)}]^{\frac{3}{2}}}{8\sqrt{2}[\eta_c(1 - \eta_c)]^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{III.12})$$

L'équation (III.12) est celle qui régit l'écoulement critique dans une conduite circulaire. En pratique, les paramètres  $Q$  et  $D$ , par conséquent  $Q^*$ , sont connus et l'on recherche alors à déterminer la profondeur critique  $y_c$ . La détermination de  $y_c$ , passe par celle de  $\eta_c$ , puisque  $y_c = \eta_c D$ . La relation (III.12) montre clairement que  $\eta_c$  est implicite vis-à-vis de  $Q^*$  et l'évaluation de  $\eta_c$  nécessiterait un procédé itératif ou graphique. Cependant les scientifiques (Straub W. O, 1978, Swamee P. K, 1993, Frensh, 1999, Vatankhah et Bijankhan, 2010, Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011), tentent de développer des relations empiriques approchées pour le calcul de la profondeur critique dans un canal en profil circulaire, comme il est montré dans le quatrième chapitre de la première partie de notre thèse.

L'objectif principal de ce chapitre est de proposer une relation approchée, fiable, au calcul du taux de remplissage critique  $\eta_c$ , basé sur le procédé graphique de la relation (III.12), qui se présente par la figure III.2. Celle-ci montre que le taux de remplissage  $\eta_c$  à l'état critique augmente avec l'accroissement du débit relatif  $Q^*$ . En outre, nous pouvons constater que lorsque  $Q^* \rightarrow \infty$ , le taux de remplissage à l'état critique  $\eta_c \rightarrow 1$ .



**Figure III.2 :** Variation du taux de remplissage critique  $\eta_c$  en fonction du débit relatif  $Q^*$ .  
Courbe tracée selon la relation (III.12).

La relation implicite (III.12) a fait l'objet d'un programme de calcul intense, plus particulièrement dans la gamme  $0,05 \leq \eta_c \leq 0,75$ . La valeur limite supérieure  $\eta_c = 0,75$  de la

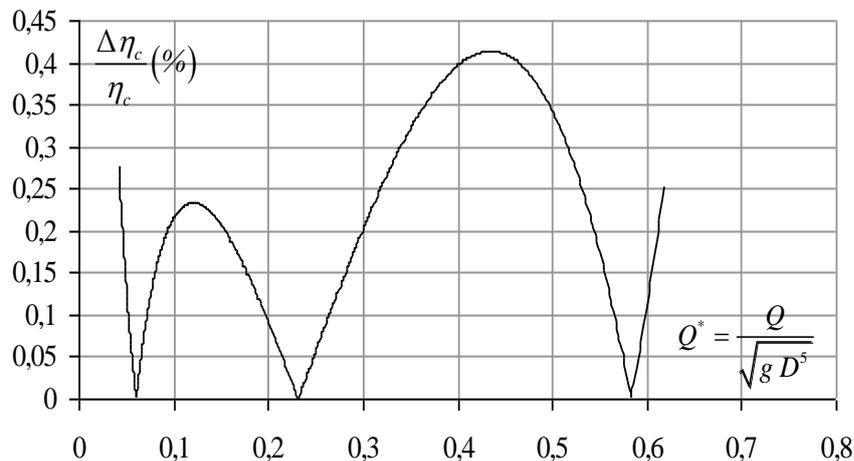
gamme choisie de  $\eta_c$  a été dictée par des considérations pratiques, puisque la conduite est dimensionnée en règle générale pour des taux de remplissage dépassant rarement les 75%. Un taux de remplissage de la conduite allant au-delà de 75% n'est que très rarement observé.

Les calculs sont montrés que l'une des relations fiables qui approche le mieux la relation implicite (III.12) est :

$$\sinh(0,3\eta_c) = 0,312Q^{*0,52} \quad (III. 13)$$

Cette relation a été établie dans la gamme  $0,2 \leq \eta_c \leq 0,80$  correspondant à  $0,042 \leq Q^* \leq 0,618$ .

L'écart relatif maximal qu'elle occasionne est inférieur à 0,42%, comme l'indique la figure III.3.



**Figure III.3 :** Ecarts relatifs en % occasionnés par la relation (III.13) sur le calcul du taux de remplissage critique  $\eta_c$ .

La relation (III.13) permet alors d'écrire que :

$$y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{asinh}(0,312Q^{*0,52}) \quad (III. 14)$$

A partir des valeurs connues du débit volume  $Q$  et du diamètre  $D$  de la conduite, le débit relatif  $Q^*$  est alors déduit de la relation (III.10). Par suite, la relation (III.14) donne de manière explicite la valeur de la profondeur critique  $y_c$ .

**Exemple d'application III.1**

Soit une conduite circulaire de diamètre  $D = 1,9$  m, siège d'un écoulement critique, écoule un débit volume  $Q = 1,8$  m<sup>3</sup>/s, en veut déterminer la profondeur  $y_c$ .

La solution ce fait par deux étapes :

i. Selon la relation (III.10), le débit relatif  $Q^*$  est

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 1,9^5}} = 0,1154925;$$

ii. En application de la relation (III.14), la profondeur critique est :

$$y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{asinh}(0,312Q^{*0,52}) = \frac{1,9}{0,3} \operatorname{asinh}(0,312 \times 0,1154925^{0,52}) = 0,64205 \cong 0,642 \text{ m}$$

Par conséquent le taux de remplissage critique, est :

$$\eta_c = \frac{y_c}{D} = \frac{0,642}{1,9} = 0,33789;$$

La condition d'appliquer la relation (III.14) est satisfaisante en raison  $0,05 \leq y_c/D = 0,33789 \leq 0,75$ .

A titre de comparaison, en vertu l'application des relations décrivant au troisième chapitre de première partie telles que:

1) La relation (IV.51) de (P.K.Swamee, 1993), du chapitre IV, partie II:

$$F_D = \frac{Q}{D^2 \sqrt{gD}} = \frac{1,8}{1,9^2 \times \sqrt{9,81 \times 1,9}} = 0,11549;$$

$$\frac{y_c}{D} = [0,77F_D^{-6} + 1,0]^{-0,085} \Rightarrow \frac{y_c}{1,9} = [0,77 \times 0,11549^{-6} + 1,0]^{-0,085} \Rightarrow y_c = 0,646 \text{ m.}$$

2) La relation (IV.52) de (Vatankhah et Bijankhan, 2010), du chapitre IV, partie II:

$$\text{Eq (IV. 52)} \Rightarrow y_c = \frac{D \times 0,9584Q^{*0,5}}{(1 + 0,0106Q^{*0,52} - 0,0132Q^{*3,726})^{-10,022}},$$

$$\Rightarrow y_c = \frac{1,9 \times 0,9584 \times 0,1154925^{0,5}}{(1 + 0,0106 \times 0,1154925^{0,52} - 0,0132 \times 0,1154925^{3,726})^{-10,022}} = 0,6405 \text{ m}$$

$$\Rightarrow y_c \cong 0,640 \text{ m.}$$

3) La relation (IV.53) de (Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011), du chapitre IV, partie II:

$$y_c = D(13,6Q^{*-4.227} - 13Q^{*-4.2} + 1)^{-0,1156},$$

$$\Rightarrow y_c = 1,9 \times (13,6 \times 0,115492^{-4.227} - 13 \times 0,115492^{-4.2} + 1)^{-0,1156} = 0,6399 \text{ m}$$

$$\Rightarrow y_c \cong 0,640 \text{ m.}$$

On regroupe dans le tableau ci-dessous, les valeurs de la profondeur critique obtenues par l'application des différentes approches théoriques pour les mêmes valeurs de débit relatif  $Q^*$ , et de diamètre  $D$ :

**Tableau III.1:** Valeur de la profondeur critique par différentes relations:

N°	La relation approchée	La valeur de la profondeur critique $y_c$	L'erreur maximale en %	La gamme pratique
01	L'approche développée (III.14)	$y_c = 0,642 \text{ m}$	< 0,42	$0,2 \leq \eta_c \leq 0,80$
02	<i>P.K.Swamee,</i>	$y_c = 0,646 \text{ m.}$	< 1,46	$0,02 \leq \eta_c \leq 1$
03	<i>Vatankhah et Bijankhan</i>	$y_c = 0,640 \text{ m.}$	< 0,25	$0,00 \leq \eta_c \leq 0,92$
04	<i>Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa</i>	$y_c = 0,640 \text{ m.}$	< 0,27	$0,01 \leq \eta_c \leq 1$

On peut conclure que les résultats obtenus à travers cette application sont très proches entre eux. Autrement dit que les relations sont très fiables et d'un intérêt pratique important.

### III.3.Charge spécifique minimale en terme de profondeur critique

Dans la conception des canaux à écoulement libre, il doit strictement éviter l'écoulement en régime critique c'est pour ça il est indispensable de connaître la valeur de la profondeur critique  $y_c$ , ainsi que la charge spécifique critique  $H_{s_c}$ . Comme nous l'avons vu d'après le chapitre II de la première partie, que cette dernière a pris une valeur minimale pour une profondeur critique  $y_c$  désignée par  $H_{s_{min}} = f(y_c)$ . Cette exigence engendre des fluctuations superficielles d'une vitesse de propagation d'onde.

Pour une valeur constante, de la charge spécifique,  $H_s = C^{et}$ , la valeur de débit volume  $Q$  est maximale lorsqu'on a :

$$\frac{dQ}{dy} = 0 \quad (III.15)$$

La charge spécifique comme nous l'avons vue dans le chapitre précédent, est donnée par :

$$H_s = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2};$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q^2}{2gA^2} = H_s - y$$

$$\Leftrightarrow Q^2 = 2gA^2(H_s - y);$$

Or :

$$Q = A\sqrt{2g(H_s - y)} \quad (III.16)$$

Maintenant, pour trouver le débit maximum,  $Q_{max}$ , en différentiant la relation (III.16) par rapport à  $y$ , pour une charge spécifique donnée.

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{d}{dy} \left( A\sqrt{2g(H_s - y)} \right) = \frac{dA}{dy} \sqrt{2g(H_s - y)} - \frac{2gA}{2\sqrt{2g(H_s - y)}} = 0;$$

Après la simplification et réarrangement de cette dernière équation, on obtient la condition suivante :

$$[2g(H_s - y)] \frac{dA}{dy} - gA = 0 \quad (III.17)$$

La relation (III.17), est une équation généralisée de la charge spécifique  $H_s$  à l'état d'écoulement critique, correspondant au débit volume maximal,  $Q_{max}$ .

En tenant compte des relations (III.4) et (III.7), respectivement l'aire de la section mouillée  $A_c$  et de la largeur au miroir,  $T_c$  la relation (III.17) devient alors:

$$2g(H_s - y).D. \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) - g \cdot \frac{D^2}{8} (\theta_c - \sin \theta_c) = 0 \quad (IV.18)$$

En terme de la variable  $\eta_c = (y_c/D)$  qui définit le taux de remplissage de la conduite à l'état critique, et si en introduisant la charge spécifique critique relative:

$$H^* = \frac{H_s}{D} \quad (III.19)$$

L'équation (III.18), peut s'écrire :

$$H_s^* = \eta_c + \frac{1}{32\sqrt{\eta_c}} \left[ \frac{\cos^{-1}(1 - 2\eta_c)}{\sqrt{1 - \eta_c}} - 4(1 - 2\eta_c) \right] \quad (III.20)$$

L'équation (III.20) est celle qui exprime une relation entre deux paramètres adimensionnels caractérisant l'écoulement critique dans une conduite circulaire, tels que la charge spécifique

relative  $H_s^*$  et le taux de remplissage critique  $\eta_c$ . En pratique, le taux de remplissage critique  $\eta_c$  est connu par l'application de la relation (III.12), parce que les paramètres  $Q$  et  $D$ , sont connus et l'on recherche alors à déterminer la charge critique relative  $H_s^*$ . L'équation (III.20) est une relation à caractère adimensionnel entre deux paramètres d'un intérêt pratique primordiale, puisqu'elle est applicable pour toutes les dimensions des conduites circulaires.

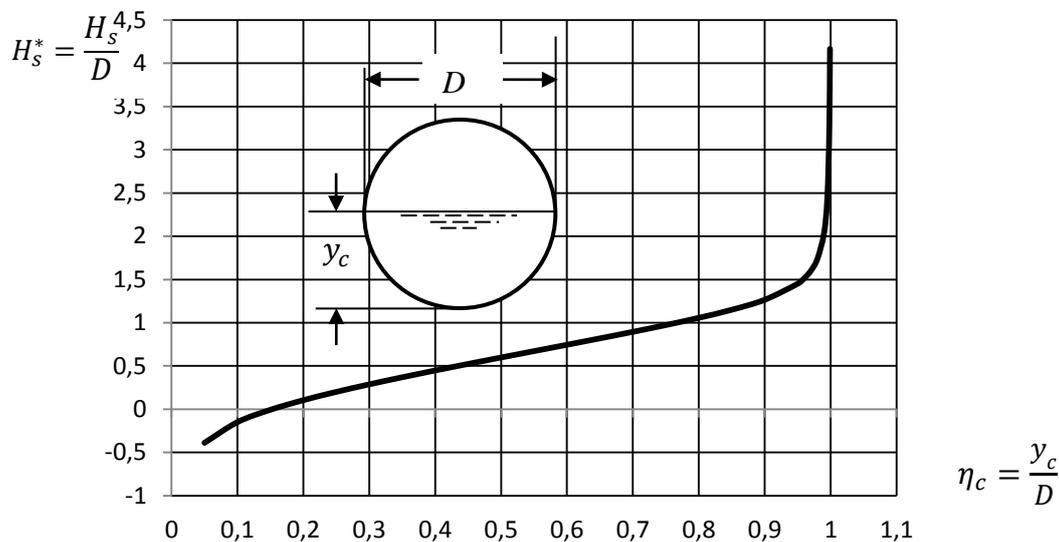
Comme il est montré, la charge spécifique relative  $H_s^*$  est fonction du taux de remplissage critique  $\eta_c$  conformément à la relation (III.20). En faisant varier le taux de remplissage critique  $\eta_c$  dans la gamme  $0 < \eta_c < 1$ , la relation (III.20) a permis de dresser le tableau III.2.

Il ressort du tableau III.2 que la charge spécifique relative  $H_s^*$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage critique  $\eta_c$ , jusqu'à la valeur maximale  $H_{s_{max}}^* = 4.167383$ , indiquée en gras dans le tableau, correspondant à  $\eta_c = 0,999$ .

**Tableau III.2:** Valeurs de  $H_s^*(\eta_c)$  calculées selon la relation (III.20)

N°	$\eta_c = (y_c/D)$	$H_s^*$ calculée par la relation (III.20)
01	0.05	-0.3884449
02	0.1	-0.1491964
03	0.15	-0.0063127
04	0.2	0.10473984
05	0.25	0.20057497
06	0.3	0.28776776
07	0.35	0.36956576
08	0.4	0.44782636
09	0.45	0.52374345
10	0.5	0.59817477
11	0.55	0.67181636
12	0.6	0.74531845
13	0.65	0.81939094
14	0.7	0.89494149
15	0.75	0.97331873
16	0.8	1.05684454
17	0.85	1.15024011
18	0.9	1.26562712

N°	$\eta_c = (y_c/D)$	$H_s^*$ calculée par la relation (III.20)
19	0.95	1.4512089
20	0.96	1.51414551
21	0.97	1.60103308
22	0.98	1.73911977
23	0.99	2.03689067
24	0.995	2.44823636
25	0.998	3.25749438
26	<b>0.999</b>	<b>4.167383</b>



**Figure III.4 :** Variation de la charge spécifique relative  $H_s^*$  en fonction du taux de remplissage critique  $\eta_c$ . Courbe tracée selon la relation (III.20).

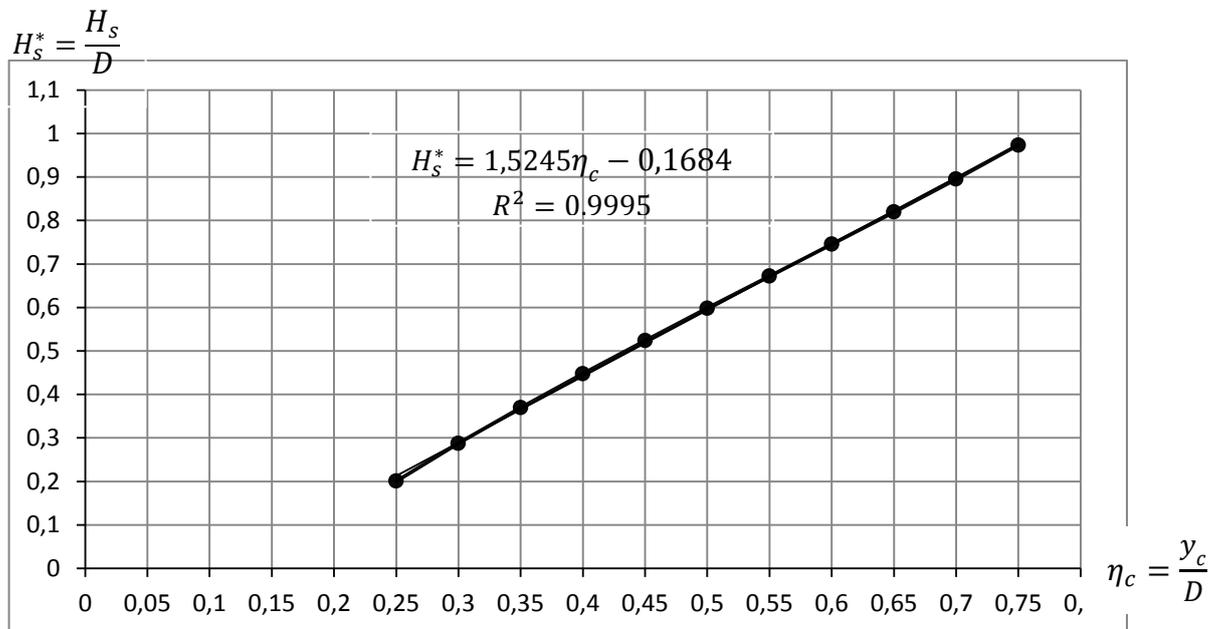
La relation (III.20) a été présentée graphiquement sur la figure III.4. Celle-ci montre qu'il y a une possibilité de décomposer la courbe en trois secteurs. De cette courbe on remarque l'apparition d'un éclaircissement sur deux points d'inflexion liés par une droite croissante. Puisque la conduite est dimensionnée plus particulièrement dans la gamme pratique pour des taux de remplissage  $0,25 \leq \eta_c \leq 0,75$ , il est évident de considérer la droite comme un segment limité par cette gamme. Cette considération correspond respectivement aux valeurs minimales et maximales de la charge spécifique relative  $H_s^*$ ,  $H_{s_{min}}^* = 0.20057497$  et  $H_{s_{max}}^* = 0.97331873$ .

Au-delà de sa valeur maximale,  $H_s^*$  elle prend une augmentation sous forme asymptotique verticale avec l'augmentation du taux de remplissage critique vers l'état de remplissage de la conduite  $\eta_c \rightarrow 1$ , et la charge spécifique relative prend la valeur  $H_s^* = 4,5$ . En plus les

valeurs du taux de remplissage critique  $\eta_c$  qui sont inférieures à 25% correspondent à des valeurs négatives de la charge spécifique relative  $H_s^*$ . Le signe négatif explique que la limite inférieure de la gamme d'application du taux de remplissage est de 25%.

### III.3.1. Relation approchée de la charge spécifique critique

La représentation graphique de la relation adimensionnelle (III.20) sur la figure III.4 a fait l'objet d'un calcul intense, plus particulièrement dans la gamme  $0,25 \leq \eta_c \leq 0,75$ , établi dans le tableau III.2. Comme il est illustré sur la courbe de la figure III.4, la courbe avait deux points d'inflexions c'est-à-dire le taux de remplissage de la conduite est limité pratiquement entre deux extrémités, telles que la valeur limite inférieure est  $\eta_c = 0,25$  et la limite supérieure est  $\eta_c = 0,75$ . Entre ces limites la variation de la charge spécifique relative est définie comme une droite tracée sur la figure III.5 ci-dessous.



**Figure III.5 :** Variation de la charge spécifique relative  $H_s^*$  en fonction du taux de remplissage critique  $\eta_c$ ,  $0,25 \leq \eta_c \leq 0,75$ . Courbe tracée selon la relation (III.20).

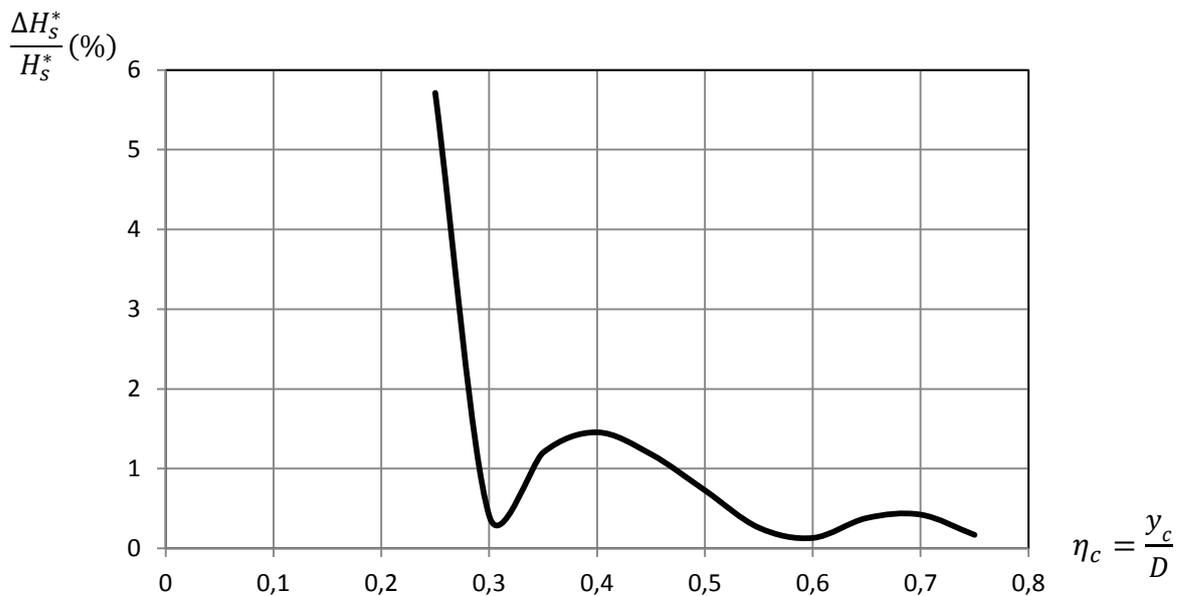
Dans large gamme pratique  $0,25 \leq \eta_c \leq 0,75$ , correspondant  $0,20057 \leq H_s^* \leq 0,97331$ , les calculs ont montré que la meilleure courbe de tendance de  $H^*(\eta_c)$  se traduit par la relation :

$$H_s^* = 1,549\eta_c - 0,1827 \quad (III.21)$$

**Tableau III.3:** Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (III. 21) sur le calcul de la charge spécifique  $H_s^*(\eta_c)$  de la conduite

N°	$\eta_c = (y_c/D)$	$H_s^* = (H_s/D)$ par la relation (III.20)	$H_s^* = (H_s/D)$ par la relation (III.21)	Ecarts relatifs (%)
01	0,25	0,20057497	0,212725	<b>5,710</b>
02	0,30	0,28776776	0,288950	0,409
03	0,35	0,36956576	0,365175	1,202
04	0,40	0,44782636	0,44140	1,456
05	0,45	0,52374345	0,517625	1,182
06	0,50	0,59817477	0,59385	0,728
07	0,55	0,67181636	0,670075	0,260
08	0,60	0,74531845	0,746300	0,131
09	0,65	0,81939094	0,822525	0,381
10	0,70	0,89494149	0,898750	0,424
11	0,75	0,97331873	0,974975	0,170

Le tableau III.3 regroupe les valeurs de la charge spécifique relative  $H_s^* = H_s/D$  calculées selon la relation (III.20) ainsi que celles de  $(H_s^* = H_s/D)_{\text{approchée}}$  déterminées par application de la relation approchée (III.21). L'erreur relative maximale occasionnée par la relation approchée (III.21) est, dans tous les cas, inférieure à 5,71% (Tableau III.3). Le plus grand écart relatif est observé pour la valeur minimale de la gamme choisie de  $\eta_c$ , indiqué en gras dans le tableau III.3. Au regard des écarts relatifs réduits indiqués dans le tableau III.3, nous pouvons aisément conclure à la fiabilité de la relation approchée (III.21).

**Figure III.6 :** Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation (III.21) sur le calcul de la charge spécifique relative  $H_s^*$ .

La relation (III.21) a été établie dans la gamme  $0,25 \leq \eta_c \leq 0,75$  correspondant  $0,21272 \leq H_s^* \leq 0,97497$ . L'écart relatif maximal qu'elle occasionne est inférieur à 5,71%, comme l'indique la figure III.6.

La relation (III.21) permet alors d'écrire que :

$$H_{s \min} = 1,549y_c - 0,1827D \quad (\text{III. 22})$$

A partir des valeurs connues du débit volume  $Q$  et du diamètre  $D$  de la conduite, le débit relatif  $Q^*$  est alors déduit de la relation (III.10). Et ainsi, la relation (III.14) donne de manière explicite la valeur de la profondeur critique,  $y_c$  et par la suite, la relation (III.22) donne la valeur de la charge spécifique critique  $H_{s c}$ .

### Exemple d'application III.2

Une conduite circulaire de diamètre  $D = 1,9 \text{ m}$ , siège d'un écoulement critique, écoule un débit volume  $Q = 1,8 \text{ m}^3/\text{s}$ . Déterminer la valeur de la charge spécifique critique  $H_{s c}$ .

#### Solution

i. Selon la relation (III.10), le débit relatif  $Q^*$  est

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 1,9^5}} = 0,1154925;$$

ii. En appliquant la relation (III.14), la profondeur critique est :

$$y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{asinh}(0,312Q^{*0,52}) = \frac{1,9}{0,3} \operatorname{asinh}(0,312 \times 0,1154925^{0,52}) = 0,64205 \cong 0,642 \text{ m}$$

Par conséquent le taux de remplissage critique, est :

$$\eta_c = \frac{y_c}{D} = \frac{0,642}{1,9} = 0,33789;$$

La condition d'appliquer la relation (III.14) est satisfaisante en raison  $0,25 \leq y_c/D = 0,33789 \leq 0,75$ .

iii. En application de la relation approchée (III.22), la charge critique est :

$$H_{s \min} = 1,549y_c - 0,1827D = 1,549 \times 0,642 - 0,1827 \times 1,9 = 0,65 \text{ m};$$

Par la comparaison avec la relation (III.20), la valeur de la charge spécifique relative devient :

$$H_s^* = \eta_c + \frac{1}{32\sqrt{\eta_c}} \left[ \frac{\cos^{-1}(1 - 2\eta_c)}{\sqrt{1 - \eta_c}} - 4(1 - 2\eta_c) \right];$$

$$H_s^* = 0,3378 + \frac{1}{32\sqrt{0,3378}} \left[ \frac{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,3378)}{\sqrt{1 - 0,3378}} - 4(1 - 2 \times 0,3378) \right] = 0,350$$

La détermination de la charge critique  $H_{sc}$  passe par la valeur du diamètre de la conduite  $D$ .

$H_{sc} = 0,665 m$ . Ce résultat à montrer la fiabilité de la relation approchée (III.22).

### Conclusion

Le troisième chapitre de la deuxième partie de notre mémoire a eu pour objectif l'étude de l'écoulement critique dans une conduite circulaire de diamètre  $D$ . Les caractéristiques géométriques de la conduite ont été données ainsi les propriétés hydrauliques de l'écoulement, telles que la largeur au miroir, le rayon hydraulique, le périmètre mouillé et l'aire de la section mouillée. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du taux de remplissage critique  $\eta_c = y_c/D$ , de la conduite. Leur variation a été représentée graphiquement en fonction la conductivité relative  $Q^* = Q/\sqrt{gD^5}$ , où  $Q$  est le débit volume,  $g$

l'accélération de la pesanteur et  $D$  diamètre de la conduite. Celle-ci montre que le taux de remplissage  $\eta_c$  à l'état critique augmente avec l'accroissement du débit relatif  $Q^*$ . En outre, nous pouvons constater que lorsque  $Q^* \rightarrow \infty$ , le taux de remplissage à l'état critique  $\eta_c \rightarrow 1$ .

Des calculs intense, plus particulièrement dans la gamme  $0,05 \leq \eta_c \leq 0,75$  ont montrés que nous avons pu proposer une excellente relation fiables qui s'approche mieux de la relation implicite de  $\eta_c$  en fonction de la conductivité relative  $Q^*$  est :  $\sinh(0,3\eta_c) = 0,312Q^{*0,52}$ . Cette relation a été établie dans la gamme  $0,2 \leq \eta_c \leq 0,80$  correspondant à  $0,042 \leq Q^* \leq 0,618$  avec un écart relatif maximal qu'elle occasionne est inférieur à 0,42%. Celle-ci a permet alors

d'écrire que :  $y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{asinh}(0,312Q^{*0,52})$ . A partir des valeurs connues du débit volume  $Q$  et du diamètre  $D$  de la conduite, le débit relatif  $Q^*$  est alors déduite. Par suite, cette dernière relation donne de manière explicite la valeur de la profondeur critique  $y_c$ . Des exemples d'application ont été proposés dans le but d'illustrer la fiabilité d'application cette relation pour le calcul de la profondeur critique  $y_c$ . Il se fait par la comparaison, en vertu l'application des relations les plus récentes, décrivant au troisième chapitre de la première partie telles que : (P.K.Swamee, 1993), (Vatankhah et Bijankhan, 2010) et (Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011). Cette comparaison a montré qu'on peut conclure que les résultats obtenus à travers cette

application sont très proches entre eux. Autrement dit que les relations sont très fiables et d'un intérêt pratique important.

Dans la conception des canaux à écoulement libre, il est strictement obligatoire éviter l'écoulement en régime critique c'est pour ça il est indispensable de connaître la valeur de la profondeur critique  $y_c$ , ainsi que la charge spécifique critique  $H_{sc}$ . En ayant recours aux définitions des variations de la charge spécifique en fonction de la profondeur d'écoulement qui ont montrées que cette dernière a pris une valeur minimale pour une profondeur critique  $y_c$  désignée par  $H_{s_{min}} = f(y_c)$ . Cette exigence engendre des fluctuations superficielles d'une vitesse de propagation d'onde. En terme des paramètres adimensionnels nous avons établi une relation entre deux paramètres adimensionnels caractérisant l'écoulement critique dans une conduite circulaire, tels que la charge spécifique relative  $H_s^* = H_s/D$  et le taux de remplissage critique  $\eta_c = y_c/D$ . Cette relation a été présentée graphiquement. Ce graphe montre qu'il y a une possibilité de décomposer la courbe en trois secteurs. De celle-ci en remarque l'apparition d'un éclaircissement sur deux points d'inflexion liés par une droite croissante. Puisque la conduite est dimensionnée plus particulièrement dans la gamme pratique pour des taux de remplissage  $0,25 \leq \eta_c \leq 0,75$ , il est évident de considérer la droite comme un segment limité par la gamme pratique de  $\eta_c$ . Cette considération correspond respectivement aux valeurs minimales et maximales de la charge spécifique relative  $H_s^*$ ,  $H_{s_{min}}^* = 0.20057497$  et  $H_{s_{max}}^* = 0.97331873$ . Entre ces limites la variation de la charge spécifique relative en fonction du taux de remplissage critique de la conduite,  $H_s^* = f(\eta_c)$  est définie comme une droite d'équation  $H_s^* = a\eta_c + b$  où le paramètre  $a$  est la pente de la droite, ainsi que  $b$  est un paramètre correspond à la charge spécifique de taux de remplissage  $\eta_c$  nul, ce qui est laissé hors des considérations pratiques pour le taux de remplissage  $\eta_c < 0,25$ . Cette relation est donnée comme suit :  $H_s^* = 1,549\eta_c - 0,1827$  et celle-ci permet, pour la valeur connue du taux de remplissage  $\eta_c$  dicté par des considérations pratiques, la détermination de la charge spécifique relative  $H_s^*$  et par conséquent celle de charge spécifique critique  $H_{scr}$ . En suite un exemple d'application a été proposé dans le but de montrer la démarche à suivre pour le calcul de la charge spécifique critique d'une manière explicite pour un taux de remplissage donné.

# *Chapitre IV*

## *Ecoulement critique dans un canal de forme parabolique*

#### **IV.1. Introduction**

Dans ce présent chapitre, on s'intéresse à l'étudier, un canal découvert de la section transversale parabolique, qui considéré parmi les formes les plus inspirées de la nature, telles que le lit des rivières, des canaux non revêtus, et les sillons d'irrigations, qui sont tous en tendance à se rapprocher d'une forme parabolique. Un canal parabolique ne contient pas d'angles vifs, qui sont considérées comme étant des contraintes de construction, où les fissures peuvent se produire. La réalisation et la pose des canaux paraboliques peuvent être préfabriquées en sections moulées, où les petites fosses de celles-ci peuvent être construites par des bulldozers. (Laycock ,2007) a indiqué également que, dans la forme de segments préfabriqués en béton, la parabole possède une résistance structurelle inhérente, en particulier si les parois ne sont pas présent en charge.

(Mironenko et al., 1984, Babaeyan-Koopaei et al.,2001), ont cité que l'un de ses avantages est la capacité de maintenir une vitesse plus élevée à faible débit, qui réduit la tendance à déposer des sédiments. Un autre avantage de sa grande profondeur en contrepartie de faibles rejets qui lui permet de transporter les flottantes et semi-flottants de débris, plus facilement qu'un canal à fond plat.

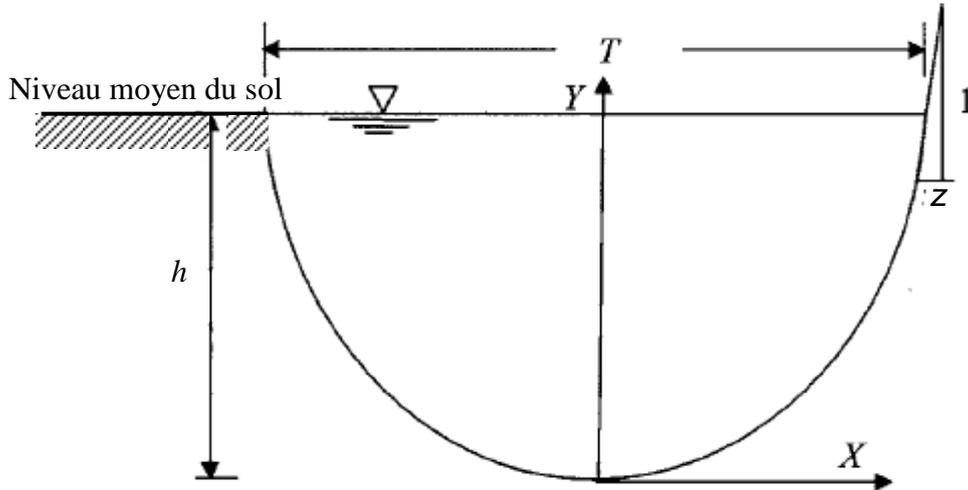
Ainsi que la section parabolique est hydrauliquement et économiquement la plus efficace, et donc à partir de ses caractéristiques avantageuses le canal de forme parabolique à intérêt pratique, qui nécessite la détermination de l'expression de la profondeur critique évoluant dans ce type de canal.

#### IV.2. Propriétés géométriques de la section parabolique

Un canal parabolique présenté dans la Figure IV.1, est décrit par l'équation:

$$Y = aX^2 \quad (IV.1)$$

Dans laquelle  $Y$  est l'ordonnée et  $X$  est l'abscisse et le paramètre  $a$  est un facteur de forme du canal parabolique



**Figure IV.1:** Schéma de définition des paramètres géométriques d'une section de forme parabolique

L'aire de la section mouillée  $A$ , la largeur au miroir  $T$  et le périmètre mouillé  $P$ , sont données en termes de la profondeur maximale  $h$ , du canal et de la pente maximale d'inclinaison admissible des parois  $1/Z$ . Ceux-ci respectivement sont :

$$A = 2 \left[ \frac{hT}{2} - \int_0^{T/2} Y dX \right] = \frac{2}{3} hT = \frac{8}{3} Zh^2 \quad (IV.2)$$

$$T = 4Zh \quad (IV.3)$$

Le périmètre mouillé est obtenu par l'intégration d'un élément d'une longueur  $ds$ , de la parabole comme suit :

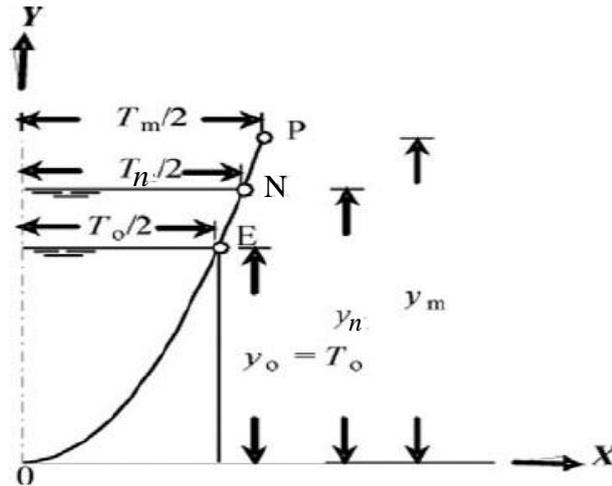
$$P = \int ds = \int \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2};$$

$$\Leftrightarrow P = 2hZ^2 \left[ \frac{1}{Z} \sqrt{1 + \frac{1}{Z^2}} + \ln \left( \frac{1}{Z} + \sqrt{1 + \frac{1}{Z^2}} \right) \right] \quad (IV.4)$$

Pour la détermination de la profondeur critique, on propose une formule qui vise à présenter une nouvelle solution graphique pour la profondeur critique dans les sections paraboliques basé sur des considérations géométriques.

#### IV.2.1.Considérations géométriques

La forme de la parabole est définie par l'équation (IV.1) est présenté sur la figure IV.2 comme suit :



**Figure IV.2 :** Schéma de définition de l'écoulement dans un canal parabolique

Pour  $X \geq 0$ , où  $X$  la coordonnée longitudinale. Trois points sont particulièrement indiqués :

- i.  $P(T_m/2, y_m)$  ce qui est bien définie par les éléments géométriques de la parabole.
- ii.  $N(T_n/2, y_n)$  ce qui coïncide avec l'écoulement uniforme, caractérisé par  $T_n$ , largeur au miroir et  $y_n$  la profondeur normale.
- iii.  $E(T_o/2, y_o)$  ce qui se traduit par le fait que la largeur au miroir  $T_o$  est égale à la profondeur  $y_o$ . Sinon, l'aire de la section mouillée est inscrit dans un carré de largeur  $y_o = T_o$  de telle sorte le rapport d'aspect  $\xi_o = y_o/T_o = 1$ . Ce cas particulier est unique et seule pour donner une parabole. Pour une parabole élancée, le point E est situé au-dessous de point P et correspond à  $y_o < y_m$ , tandis que  $y_o > y_m$  pour une forme large ou une parabole plus ouverte.

Pour le point  $P(T_m/2, y_m)$ , l'équation (IV.1) donne  $y_m = a(T_m/2)^2$ , donc le paramètre  $a$  s'écrit :

$$a = 4 \frac{y_m}{T_m^2} \tag{IV.5}$$

En remplaçant l'équation (IV.5) dans la relation (IV.1), il résulte que :

$$Y = \frac{4}{B} X^2 \quad (IV.6)$$

Où :

$$B = \frac{T_m^2}{y_m} \quad (IV.7)$$

Le paramètre  $B$  présente une dimension linéaire, et il est bien défini par les éléments géométriques  $T_m$  et  $y_m$  du canal parabolique.

Pour le point  $N(T_n/2, y_n)$  et le point  $E(T_o/2, y_o)$ , la relation donne respectivement:

$$B = \frac{T_n^2}{y_n} \quad (IV.8)$$

$$B = T_o \quad (IV.9)$$

L'équation (IV.9) indique que le paramètre  $B$  est égal à la longueur du côté de carré défini sur la Figure IV.2, tel que  $y_o = T_o = B$ .

Maintenant et selon cette analyse nous pouvons déterminer les paramètres correspondant à l'écoulement critique ou  $y_n = y_c$ .

Supposons que  $\xi_c$  le rapport d'aspect de l'écoulement critique de l'aire de la section mouillée  $A_c$ , définie par :

$$\xi_c = y_c/T_c \quad (IV.10)$$

En vertu les relations (IV.8) et (IV.10) nous pouvons écrire que :

$$\xi_c = T_c/B \quad (IV.11)$$

Et en plus, on peut exprimer le rapport d'aspect  $\xi_c$  comme :

$$\xi_c = \sqrt{y_c/B} \quad (IV.12)$$

De cette équation le paramètre  $y_c$ , désigne la profondeur critique, est alors :

$$y_c = B\xi_c^2 \quad (IV.13)$$

Selon la relation (IV.7), largeur au miroir critique  $T_c$ , devient :

$$T_c = \sqrt{By_c} \quad (IV.14)$$

Et l'aire de la section mouillée critique d'un canal parabolique est donnée par :

$$A_c = \frac{2}{3} T_c y_c \quad (IV.15)$$

Ou bien :

$$A_c = \frac{2}{3} y_c^{\frac{3}{2}} \sqrt{B} \quad (IV.16)$$

La relation (IV.15), peut s'écrire à l'aide des équations (IV.11) et (IV.13) comme suit :

$$A_c = \frac{2}{3} B^2 \xi_c^3 \quad (IV.17)$$

D'autre part, le périmètre mouillé critique  $P_c$  est donné par:

$$P_c = \frac{T_c^2}{8y_c} \left[ \sigma \sqrt{1 + \sigma^2} + \ln \left( \sigma + \sqrt{1 + \sigma^2} \right) \right] \quad (IV.18)$$

avec :

$$\sigma = \frac{4y_c}{T_c} \quad (IV.19)$$

Ou bien :

$$\sigma = 4 \xi_c \quad (IV.20)$$

Par l'introduction des relations (IV.14) et (IV.19) dans (IV.17), il devient que :

$$P_c = \frac{B}{8} \left[ 4\xi_c \sqrt{1 + 16\xi_c^2} + \ln \left( 4\xi_c + \sqrt{1 + 16\xi_c^2} \right) \right] \quad (IV.21)$$

Avec l'aide des relations (IV.17) et (IV.21), l'expression du rayon hydraulique critique  $R_{hc}$ , par définition est égale au rapport de l'aire de la section mouillée critique  $A_c$  par le paramètre mouillé critique  $P_c$ , soit :

$$R_{hc} = \frac{16}{3} \frac{B\xi_c^3}{4\xi_c\sqrt{1+16\xi_c^2} + \ln(4\xi_c + \sqrt{1+16\xi_c^2})} \quad (IV.22)$$

### IV.3. La solution exacte de la profondeur critique

A partir de l'équation de l'état critique de l'écoulement, nous avons:

$$\frac{Q^2}{g} = \left(\frac{A^3}{T}\right)_c \quad (IV.23)$$

L'application de cette condition de criticité, qui régit l'écoulement critique dans un canal parabolique, mène à écrire :

$$\frac{Q^2\sqrt{By_c}}{gy_c^{9/2}B^{3/2}} = (2/3)^3;$$

Et par conséquence :

$$y_c = \sqrt[4]{\frac{27Q^2}{8gB}} \quad (IV.24)$$

Connaissant le débit volume  $Q$  et le paramètre  $B$ , la relation (IV.24) permet explicitement de déterminer la profondeur critique  $y_c$ . Bien que le paramètre  $B$  est défini par les éléments géométriques  $T_m$  et  $y_m$  du canal parabolique selon la relation (IV.7). En outre, en remplaçant l'expression de  $y_c$  de la relation (IV.24) dans la relation (IV.14), la largeur au miroir critique  $T_c$ , est explicitement exprimé comme suit:

$$T_c = \left(\frac{27B^3Q^2}{8g}\right)^{\frac{1}{8}} \quad (IV.25)$$

D'autre part, le rapport d'aspect critique  $\xi_c$ , est donné par la combinaison des relations (IV.12) et (IV.24), tel que :

$$\xi_c = \left(\frac{27Q^2}{8gB^5}\right)^{\frac{1}{8}} \quad (IV.26)$$

De cette relation on peut constater clairement que le rapport d'aspect critique  $\xi_c$ , est défini par le paramètre  $Q$  et le paramètre  $B$ .

**Exemple d'application IV.1**

Déterminer la valeur de la profondeur critique  $y_c$  d'un canal parabolique avec ces caractéristiques géométriques :  $T_m = 4$  m et  $y_m = 2$  m, et le débit transporté  $Q = 8.0$  m<sup>3</sup>/s.

**Solution**

1. A l'aide de la relation (IV.7), la valeur de paramètre  $B$ , soit :

$$B = \frac{T_m^2}{y_m} = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ m}$$

2. Avec les valeurs de débit  $Q$  et de paramètre  $B$ , et selon la relation (IV.24), la valeur de la profondeur critique  $y_c$ , soit :

$$y_c = \sqrt[4]{\frac{27Q^2}{8gB}} = \sqrt[4]{\frac{27 \times 8^2}{8 \times 9.81 \times 8}} \cong 1.288 \text{ m}$$

3. On veut vérifier la condition de criticité de cet écoulement, telle que les valeurs de largeur au miroir critique  $T_c$ , ainsi que l'aire de la section mouillée critique  $A_c$ , sont respectivement calculés par les relations (IV.14) et (IV.16), soit :

$$T_c = \sqrt{By_c} = \sqrt{8 \times 1.288} = 3.21 \text{ m}$$

$$A_c = \frac{2}{3} y_c^2 \sqrt{B} = \frac{2}{3} \times 1.288^{3/2} \times \sqrt{8} \cong 2.7563 \text{ m}^2$$

Alors :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = \frac{8^2 \times 3.21}{9.81 \times 2.7563^3} = 1.00008 \cong 1$$

La condition d'écoulement critique est vérifiée ce qui signifie que les résultats de calcul sont exactes.

**IV.4. Charge spécifique en fonction de la profondeur critique**

La charge spécifique à l'état critique, est minimale, et alors s'écrit :

$$H_{sc} = H_{s \min} = y_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} = y_c + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{T} \right)_c \quad (IV.27)$$

En introduisant les relations (IV.14) et (IV.16), respectivement de l'aire de la section mouillée critique  $A_c$  et de la largeur au miroir critique  $T_c$ , dans la relation (IV.27), il devient :

$$H_{sc} = y_c + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{T} \right)_c = y_c + \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{2}{3} y_c^2 \sqrt{B}}{\sqrt{B} y_c} \right) = y_c + \frac{1}{3} y_c = \frac{4}{3} y_c;$$

Ou :

$$H_{sc} = H_{s \min} = \frac{4}{3} y_c \quad (IV.28)$$

### **Conclusion**

Le chapitre précédent a pour but de donner les relations et les expressions définissant les paramètres critiques d'un écoulement évoluant un canal de forme parabolique. Cette forme est caractérisée par plusieurs avantages à l'intérêt pratique de l'hydraulique. Ces derniers sont révélés par l'absence d'angles vifs, où les fissurations ne peuvent pas se produire. Ainsi celle-ci peut réduire la tendance à déposer les sédiments et aussi par sa grande profondeur qui permet son utilisation dans la navigation. En plus il est montré que cette forme est inspirée de la nature, telles que le lit des cours d'eau à courant torrentiel et des canaux non revêtus. Autre avantage plus spectaculaire consiste dans sa structure, qui correspondant la réalisation et la pose des canaux paraboliques, qui peuvent être préfabriquées en sections moulées, où les petites fosses de celles-ci peuvent être aisément construites. Également correspond à la forme des segments préfabriqués en béton, la parabole possède une résistance structurelle inhérente, en particulier si les parois ne sont pas prisent en charge. Généralement le canal de forme parabolique possède une efficience considérable et au même temps une section transversale simple.

Pour déterminer la profondeur critique, une seule équation de base qui répond à cette question. Celle-ci est l'équation de la criticité telle que :  $Q^2 T_c - g A_c^3 = 0$ , mène à écrire :

$$y_c = \sqrt[4]{\frac{27 Q^2}{8 g B}};$$

Connaissant le débit volume  $Q$  et le paramètre  $B$ , cette relation permet explicitement de déterminer la profondeur critique  $y_c$ . Bien que le paramètre  $B$  est défini par les éléments géométriques  $T_m$  et  $y_m$  du canal parabolique. Et enfin nous avons déduire les valeurs de la largeur au miroir critique  $T_c$ , et ainsi le rapport d'aspect critique  $\xi_c$ , respectivement comme suit:

$$T_c = \left( \frac{27 B^3 Q^2}{8 g} \right)^{\frac{1}{8}}; \quad \text{et} \quad \xi_c = \left( \frac{27 Q^2}{8 g B^5} \right)^{\frac{1}{8}}.$$

## CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

L'objectif de cette seconde partie s'est intéressé au calcul de l'écoulement critique en différents profils géométriques de canaux et conduite à surface libre. L'objectif principal a été surtout de proposer des nouvelles approches destinées à la détermination de la profondeur critique de l'écoulement.

Pour bien mener notre étude, nous avons subdivisé cette partie en quatre chapitres.

Le premier chapitre de cette partie a été consacré à présenter une approche théorique pour la résolution du problème du dimensionnement d'un canal rectangulaire en écoulement critique. Cette approche est basée sur les deux relations universellement admises de *Darcy-Weisbach* et de *Colebrook-White* qui sont appliquées au cas du canal rectangulaire. Ces relations sont valables pour les types d'écoulement : turbulent rugueux ; de transition et pratiquement lisse ; ceci s'explique par l'introduction de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. En considérant l'écoulement uniforme en régime critique et en introduisant la condition de criticité. L'objectif était de proposer une solution explicite, permettant de calculer, avec une précision suffisante la largeur d'un canal rectangulaire, désigné par  $b_c$ . Cette démarche présente une relation acquise, également implicite de forme  $b_c = \varphi(f_c, I_c, \eta_c, \varepsilon, \nu, g)$  et sa résolution se fait à l'aide d'un modèle mathématique présenté par une résolution analytique d'une équation de troisième degré, qui conduit à l'expression exacte de la dimension linéaire, et en ayant recours aux fonctions trigonométriques. Cette démarche présente des relations, également explicites permettant la solution directe au problème que pose le calcul de la profondeur critique,  $y_c$ .

Les méthodes de calcul destinées à la détermination de la profondeur critique dans les canaux conduisent également à des relations implicites. Leurs auteurs ont proposés des relations approchées que nous avons largement discutées.

Au cours du second chapitre de notre recherche, la notion introduite par (*Bakhmetef*, 1936), définie la notion de la charge spécifique, tel que son minimum correspond à la profondeur critique, traduite par une relation universelle, connue par la condition de criticité

présentée par la relation:  $\left(Q^2/g\right) = \left(A^3/T\right)_c$  a été appliquée. Nous nous sommes

particulièrement intéressés au calcul de la profondeur critique dans un canal de profil en U. Celui-ci, peut être considéré comme un canal triangulaire à fond arrondi. Lors de l'utilisation des propriétés géométriques d'un triangle, on obtient des relations simples qui régissent les

caractéristiques hydrauliques du canal de profil en U. La forme triangulaire à fond arrondi est une forme uniforme découverte composée au fond d'un segment circulaire du rayon  $r$ , et surmontée par des parois d'un triangle symétriques d'un angle d'inclinaison  $\theta$ , par rapport à l'horizontal, de telle façon que ces parois forment des tangente au segment circulaire. Les parois ne se referment pas au-dessus de la surface libre et conservent la même nature d'une section à l'autre.

Afin d'éviter les solutions graphiques entachées d'erreurs grossières et les calculs itératifs souvent laborieux, au cours de ce chapitre, le modèle du calcul a été présenté par une excellente approche capable d'évaluer la profondeur critique de manière explicite avec un écart relatif. Cette nouvelle approche de calcul se fait à l'aide d'un processus itératif et s'opère sur la relation :  $z = Q^{*\frac{2}{3}}(z + \chi_1)^{\frac{1}{6}}$ . Rappelons que le paramètre  $\chi_1$  ne dépend que de la cotangente d'inclinaison des parois  $m$ , par la relation :  $\chi_1 = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} - \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) \right)$ . Cette relation indique clairement que la variable  $z$ , et par conséquent le rapport d'aspect  $\eta$  dépend exclusivement de la cotangente d'inclinaison des parois  $m$  et de la conductivité relative  $Q^*$ , il est donc possible de calculer le rapport d'aspect  $\eta$ .

En admettant que les valeurs de  $m$  et de  $r$  soit données, la relation de variable  $z$  :  $z = Q^{*\frac{2}{3}}(z + \chi_1)^{\frac{1}{6}}$ , montre que les valeurs du paramètre  $z$ , ne peut être explicitement déterminées. Cette relation est en effet implicite vis-à-vis de  $z$ , et la détermination de ce paramètre, nécessite donc un procédé itératif, après avoir choisi une première valeur de  $z$ .

On suppose que la première valeur de  $z$  est égal à  $z_0 = \chi_1$ . Par conséquent, les valeurs suivantes de  $z$  sont obtenues, de telle sorte que :

$$z_1 = Q^{*\frac{2}{3}}(2\chi_1)^{\frac{1}{6}}$$

$$z_2 = Q^{*\frac{2}{3}}(z_1 + \chi_1)^{\frac{1}{6}} \dots \text{ainsi de suite}$$

Le processus de calcul s'arrête lorsque  $z_i$  et  $z_{i+1}$  sont suffisamment proches. Il est bien évident que la rapidité de convergence du processus itératif ainsi décrit dépend fortement de la valeur  $z_0$  initialement choisie. Nous suggérons de calculer la valeur de  $z_0$  au lieu de la choisir de manière arbitraire. Le calcul a montré que la valeur la plus appropriée de  $z_0$  est  $\chi_1$ . Cette démarche permet d'évaluer  $z$  avec une erreur relative extrêmement faible, à l'issue de la septième étape de calcul seulement pour le pire des cas.

Une fois la valeur finale de  $z$  adoptée, le rapport de forme d'aspect  $\eta$ , est établi à partir de l'équation :  $\eta = \sqrt{z + \chi_1}$ , et puis le rapport d'aspect critique  $\eta_c$ , est déterminé selon la relation :  $\eta_c = \eta - y_0/r$ . Enfin, la valeur de la profondeur critique  $y_c$  recherchée est déduite de la relation :  $y_c = r\eta_c$ . Donc on peut conclure que la procédure montre que le calcul n'est donc pas difficile.

Le troisième chapitre de la deuxième partie de notre thèse a eu pour objectif l'étude de l'écoulement critique dans une conduite circulaire de diamètre  $D$ . Les caractéristiques géométriques de la conduite ont été données ainsi les propriétés hydrauliques de l'écoulement, telles que la largeur au miroir, le rayon hydraulique, le périmètre mouillé et l'aire de la section mouillée. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du taux de remplissage critique :  $\eta_c = y_c/D$ , de la conduite. Leur variation a été représentée graphiquement en fonction la conductivité relative  $Q^* = Q/\sqrt{gD^5}$ , où  $Q$  est le débit volume,  $g$

l'accélération de la pesanteur et  $D$  diamètre de la conduite. Celle-ci montre que le taux de remplissage  $\eta_c$  à l'état critique augmente avec l'accroissement du débit relatif  $Q^*$ . En outre, nous pouvons constater que lorsque  $Q^* \rightarrow \infty$ , le taux de remplissage à l'état critique  $\eta_c \rightarrow 1$ .

Des calculs intenses, plus particulièrement dans la gamme  $0,05 \leq \eta_c \leq 0,75$  ont montrés que nous avons pu proposer une excellente relation fiables qui s'approche mieux de la relation implicite de  $\eta_c$  en fonction de la conductivité relative  $Q^*$  est :  $\sinh(0,3\eta_c) = 0,312Q^{*0,52}$ . Cette relation a été établie dans la gamme  $0,2 \leq \eta_c \leq 0,80$  correspondant à  $0,042 \leq Q^* \leq 0,618$  avec un écart relatif maximal qu'elle occasionne est inférieur à 0,42%. Celle-ci a permis alors

d'écrire que :  $y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{arcsinh}(0,312Q^{*0,52})$ . A partir des valeurs connues du débit volume  $Q$  et du diamètre  $D$  de la conduite, le débit relatif  $Q^*$  est alors déduit. Par suite, cette dernière relation donne de manière explicite la valeur de la profondeur critique  $y_c$ . Des exemples d'application ont été proposés dans le but d'illustrer la fiabilité d'application cette relation pour le calcul de la profondeur critique  $y_c$ . Il se fait par la comparaison, en vertu l'application des relations les plus récentes, décrivant au troisième chapitre de la première partie telles que : (P.K.Swamee, 1993), (Vatankhah et Bijankhan, 2010) et (Ali R. Vatankhaha, Said M. Easa, 2011). Cette comparaison a montré qu'on peut conclure que les résultats obtenus à travers cette application sont très proches entre eux. Autrement dit que les relations sont très fiables et d'un intérêt pratique important.

Dans la conception des canaux à écoulement libre, il est strictement obligatoire d'éviter l'écoulement en régime critique c'est pour ça ; qu'il est indispensable de connaître la valeur de la profondeur critique  $y_c$ , ainsi que la charge spécifique critique  $H_{sc}$ . En ayant recours aux définitions des variations de la charge spécifique en fonction de la profondeur d'écoulement ; qui ont montrées que cette dernière a pris une valeur minimale pour une profondeur critique  $y_c$  désignée par  $H_{smin} = f(y_c)$ . Cette exigence engendre des fluctuations superficielles d'une vitesse de propagation d'onde. En terme des paramètres adimensionnels nous avons établi une relation entre deux paramètres adimensionnels caractérisant l'écoulement critique dans une conduite circulaire, tels que la charge spécifique relative  $H_s^* = H_s/D$  et le taux de remplissage critique  $\eta_c = y_c/D$ . Cette relation a été présentée graphiquement, et montre qu'il y a une possibilité de décomposer la courbe en trois secteurs. De celle-ci on remarque l'apparition d'un éclaircissement sur deux points d'inflexion liés par une droite croissante. Puisque la conduite est dimensionnée plus particulièrement dans la gamme pratique pour des taux de remplissage  $0,25 \leq \eta_c \leq 0,75$ , il est évident de considérer la droite comme un segment limité par la gamme pratique de  $\eta_c$ . Cette considération correspond respectivement aux valeurs minimales et maximales de la charge spécifique relative  $H_s^*$ ,  $H_{smin}^* = 0.20057497$  et  $H_{smax}^* = 0.97331873$ . Entre ces limites la variation de la charge spécifique relative en fonction du taux de remplissage critique de la conduite,  $H_s^* = f(\eta_c)$  est définie comme une droite d'équation  $H_s^* = a\eta_c + b$  où le paramètre  $a$  est la pente de la droite, ainsi que  $b$  est un paramètre qui correspond à la charge spécifique du taux de remplissage  $\eta_c$  nul, ce qui nous a laissés hors des considérations pratiques pour le taux de remplissage  $\eta_c < 0,25$ . Cette relation est donnée comme suit :  $H_s^* = 1,549\eta_c - 0,1827$  et celle-ci permet, pour la valeur connue du taux de remplissage  $\eta_c$  dicté par des considérations pratiques, la détermination de la charge spécifique relative  $H_s^*$  et par conséquent celle de charge spécifique critique  $H_{scr}$ . En suite un exemple d'application a été proposé dans le but de montrer la démarche à suivre pour le calcul de la charge spécifique critique d'une manière explicite pour un taux de remplissage donné.

La seconde partie de notre thèse s'est achevée par un chapitre qui a eu pour l'objectif l'étude de l'écoulement critique dans un canal ouvert de forme parabolique. L'attention portée par les recherches sur ce type de profil de canal est purement pratique tant qu'il est largement utilisé dans les structures hydrauliques. Ils ont cités que l'un de ses avantages est la capacité de maintenir une vitesse plus élevée à faible débit, qui réduit la tendance à déposer des sédiments. Un autre avantage de sa grande profondeur en contrepartie de faibles rejets qui lui

permet de transporter les flottantes et semi-flottants de débris, plus facilement qu'un canal à fond plat.

Le calcul de la profondeur critique se base principalement sur une formule qui vise à présenter une nouvelle solution graphique. Celle-ci est basée sur des considérations géométriques d'une section de forme parabolique décrit par l'équation:  $Y = aX^2$ ; dans laquelle  $Y$  est l'ordonnée et  $X$  est l'abscisse et le paramètre  $a$  est un facteur de forme du canal parabolique. Ces considérations géométriques se fait par trois points, qui sont particulièrement indiqués sur la figure (IV.2) :

- i. **P**( $T_m/2, y_m$ ), ce qui est bien définie par les éléments géométriques de la parabole ;
- ii. **N**( $T_n/2, y_n$ ), ce qui coïncide avec l'écoulement uniforme, caractérisé par  $T_n$ , largeur au miroir et  $y_n$  la profondeur normale ;
- iii. **E**( $T_o/2, y_o$ ), ce qui se traduit par le fait que la largeur au miroir  $T_o$  est égale à la profondeur  $y_o$ . Sinon, l'aire de la section mouillée est inscrit dans un carré de largeur  $y_o = T_o$  de telle sorte le rapport d'aspect  $\xi_o = y_o/T_o = 1$ . Ce cas particulier est unique et seule pour donner une parabole. Pour une parabole élancée, le point **E** est situé au-dessous de point **P** et correspond à  $y_o < y_m$ , tandis que  $y_o > y_m$  pour une forme large ou une parabole plus ouverte.

Par l'introduction de rapport d'aspect de l'écoulement critique  $\xi_c$ , définie par :  $\xi_c = y_c/T_c$  et par la définition du paramètre  $B$  qui est égal à la longueur du côté de carré montré sur la figure (IV.2), tel que  $y_o = T_o = B$ . Et avec l'aire de la section mouillée critique d'un canal parabolique est donnée par :  $A_c = \frac{2}{3}y_c^2\sqrt{B}$ . Alors pour déterminer la profondeur critique en connaissant le débit volume  $Q$  et le paramètre  $B$ , une seule équation de base qui répond à cette question est l'équation de la criticité telle que :  $Q^2T_c - gA_c^3 = 0$ , qui permet aisément à

déterminer la valeur exacte de la profondeur critique par la relation :  $y_c = \left(\frac{27}{8} \cdot \frac{Q^2}{gB}\right)^{1/4}$ .

Bien que le paramètre  $B$  est défini par les éléments géométriques  $T_m$  et  $y_m$  du canal parabolique. Et puis nous avons déduire les valeurs de la largeur au miroir critique  $T_c$ , et ainsi le rapport d'aspect critique  $\xi_c$ , respectivement comme suit:

$$T_c = \left(\frac{27B^3Q^2}{8g}\right)^{\frac{1}{8}}; \quad \text{et} \quad \xi_c = \left(\frac{27Q^2}{8gB^5}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

Cette partie a été dédiée aux applications pratiques, basées sur les approches théoriques proposées. Ces applications ont exclusivement concerné les canaux à surface libre examinés tels que le canal de la forme rectangulaire, profil en U, circulaire et la forme parabolique. Les exemples d'applications que nous avons considérés pour expliquer le processus de calcul ont montrés la fiabilité des méthodes proposées ainsi que ses simplicités et sons efficacités.

## Conclusion générale

La présente étude a eu comme objectif la détermination des relations de la profondeur critique pour les différentes formes géométriques des canaux ouverts, notamment les canaux ayant les formes géométriques complexes à l'instar de la forme circulaire, en profil en  $U$  et de la forme parabolique. L'objectif principal a été surtout de proposer des nouvelles approches destinées à la détermination de la profondeur critique de l'écoulement.

Dans ce travail deux grandes parties ont alors été nécessaires de voir: une partie bibliographique se rapportant au sujet à travers laquelle des travaux antérieurs ont été examinés. Et enfin une seconde partie comportant des approches théoriques pour la détermination de la valeur de profondeur critique dans les canaux examinés.

La première partie est composée de cinq chapitres :

- i.* Le premier chapitre est essentiellement consacré à la présentation de l'état de connaissance sur les formules usuelles de l'écoulement uniforme, leur développement théorique et leur limite d'application. Au cours de ce chapitre, nous avons exposé les différentes relations actuellement en vigueur régissant l'écoulement uniforme, telles que les relations de *Chézy*, de *Manning* et de *Darcy-Weisbach* qui constituent les relations les plus utilisées en pratique. Nous avons également rappelé les formules usuelles destinées à l'évaluation du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, de *Manning* et de *Colebrook*, en mettant l'accent sur leur caractère implicite et l'impossibilité de les évaluer en l'absence de la profondeur normale de l'écoulement. Une attention particulière des relations universelles pour le calcul du coefficient de frottement de la manière explicites est celles des relations de (*B.Achour et A. Bjaoui, 2006*).
- ii.* Le second chapitre comprend la description de l'écoulement critique dans les canaux ouverts. L'établissement de l'écoulement en régime critique, est largement connu dans l'hydraulique à surface libre en écoulement permanent, soit uniforme ou graduellement varié, ou soit un écoulement brusquement varié, comme dans le cas d'un ressaut hydraulique. Parmi les endroits où les régimes critiques se produisent, c'est le plus souvent au-dessus des singularités insérées dans les canaux soit ouverts ou découverts. Ce régime correspond au minimum de la charge spécifique de l'écoulement, il est caractérisé par des fluctuations superficielles

d'une vitesse critique égale à la célérité d'onde  $V_c = \sqrt{gh_c}$ . On recommande d'éviter ce régime d'écoulement pour ne pas franchir les ouvrages hydrauliques, en raison qu'une petite variation de l'énergie spécifique provoque des variations sensibles de profondeur de part et d'autre d'une valeur de  $y_c$ .

*iii.* Le troisième chapitre a montré l'importance de la pente critique ainsi que ces propriétés, notamment la pente limite, telle que ça valeur indique la nature de la pente de canal, soit une pente forte ou bien faible. Cette pente est définie comme la limite minimale de la pente critique calculée selon les relations qui régissent l'écoulement uniforme en introduisant la condition critique de l'écoulement. Une relation de la pente limite généralisée a été établit pour un canal de forme trapézoïdale en fonction des paramètres géométriques, de la nature des parois, de la pente du fond et ainsi que du *nombre de Froude*. Cette relation nous permet de soulever la possibilité de concevoir des canaux de telle sorte qu'une valeur donnée du *nombre de Froude* ne soit pas dépassée pendant tous les débits du canal qu'on peut rencontrer. Il est souhaitable d'empêcher le *nombre Froude* maximal  $F_{r\ max}$ , de devenir trop proche de l'unité en raison de l'instabilité de la surface libre associé à écoulement critique.

*iv.* Le quatrième chapitre de cette partie de notre étude est consacré entièrement au calcul de la profondeur critique des canaux les plus pratiques, tels que trapézoïdales et circulaires. Nous avons attiré l'attention sur le fait que les travaux effectués sur ce sujet sont peu nombreux, à l'exception des travaux de (*Straub W. O, 1978*), (*Swamee P.K,1993*) et (*Vatankhah A. R, 2013*). En outre, le calcul de la profondeur critique d'écoulement dans une conduite partiellement remplie, a été examiner par (*Swamee P.K,1993*) qui à montrer que la profondeur critique est une fonction de la dimension géométrique ; de la section considérée ; ainsi que le débit d'écoulement. Ces relations sont également explicites et englobent le taux de remplissage de la

conduite à l'état critique,  $\eta_c = (y_c/D)$ , et le débit relatif :  $F_D = \left( Q / \sqrt{gD^5} \right)$ . On

peut déduire que la relation de (*Swamee P.K, 1993*), est la relation la plus opérationnelle réservée pour le calcul de la profondeur critique dans une conduite circulaire du diamètre  $D$  telle que:

$$\frac{y_c}{D} = [0.77F_D^{-6} + 1.0]^{-0.085} \quad \text{où,} \quad F_D = \frac{Q}{D^2 \sqrt{gD}};$$

Cette relation accepte une erreur maximale inférieure à 1,46% dans une gamme pratique de  $0,02 \leq \eta_c = (y_c/D) \leq 1$ .

Et pour le canal trapézoïdal (Vatankhah A. R., Easa S., 2011), ils ont proposé une excellente expression explicite de la profondeur critique, soit :

$$y_c = 0.25 \frac{b}{m} \epsilon_c (1 + 0.2722 \epsilon_c^{1.041})^{-0.339} \quad \text{pour} \quad 0 \leq \epsilon_c \leq 25; \text{ où,}$$

$$\epsilon_c = 4 \left( \frac{m^3 Q^2}{g b^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Cette relation admet une erreur maximale inférieure à 0,07%.

- v. Dans le cinquième chapitre nous avons une exposition sur la notion de la section de contrôle, qui montre pratiquement un endroit clé, pour le contrôle hydraulique. Cette section est pratiquement le siège d'écoulement critique, dans laquelle la profondeur pour un débit donné (profondeur critique) ne dépend que de la géométrie de cette section. Dans ce chapitre nous avons montré l'importance de cette section, tel que l'écoulement dans l'ouvrage qui peut être établi en régime torrentiel, c'est-à-dire si l'écoulement peut se faire à un tirant d'eau voisin du tirant d'eau critique, la capacité de l'ouvrage est directement fonction de la charge spécifique disponible en amont. Dans ce cas, ce sont les conditions à l'entrée de l'ouvrage, qui contrôlent sa capacité. On dit que l'ouvrage fonctionne en contrôle amont ou que sa section de contrôle est située en amont. Il n'y a aucune perturbation à l'aval qui peut remonter la ligne d'eau et donc qui n'a aucune influence sur le remous concerné.

Dans le cas d'un régime fluvial, ce sont les conditions à l'aval, la perte de charge ainsi que la rugosité qui vont déterminer le débit à évacuer par l'ouvrage. On dira donc que l'ouvrage fonctionne en contrôle aval ou que cette section de contrôle de l'ouvrage, va déterminer le débit de l'ouvrage trouvé en aval. Dans ces conditions, la ligne d'eau dans l'ouvrage est donc la ligne d'eau à l'amont de celui-ci va être contrôlée par le niveau d'eau à l'aval de l'ouvrage.

Dans ce chapitre nous avons essentiellement montré l'analyse effectuée par (W. H. Hager, 2010) concernant la position de cette endroit, pour un canal rectangulaire de

largeur  $b$ . Cette position est influencée par la géométrie du fond d'une part et de la géométrie des parois d'autre part, afin de fournir respectivement une relation entre la courbure du radier au point critique et la pente de la surface d'eau correspondante. La relation entre la courbure de l'extrémité au point critique et la pente de la surface d'eau correspondante est la suivantes:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \mp \left(-\frac{1}{3}y_c \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_c\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \mp \left(\frac{1}{3} \frac{y_c}{b} \frac{d^2b}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce chapitre aussi a traité un point d'une importance primordiale, tel que l'établissement de l'équation générale de l'emplacement de la section de contrôle donnée par la relation (V.32) suivante:

$$x = \frac{8q_i^2}{gT^2(I - J)^3}$$

Cette équation est permet de déterminer la position de la section de contrôle à condition  $I \neq J$ .

La seconde partie de notre thèse, constitue notre contribution à l'étude de l'écoulement critique. Celle-ci, a pour but de proposer des nouvelles approches théoriques pour le dimensionnement et l'évaluation de la profondeur critique qui a été appliquées à différents profils géométriques de canaux et conduite à surface libre. Quatre principaux chapitres ont été présentés.

- i.* Le premier chapitre est consacré au dimensionnement d'un canal rectangulaire, pour un écoulement en régime critique. La détermination de la dimension linéaire (la largeur d'un canal rectangulaire le siège d'un écoulement uniforme en régime critique, désigné par  $b_c$ ), ce fait a l'aide d'une nouvelle approche théorique proposée, s'est basée sur la combinaison des deux relations universellement admises celle de *Darcy-Weisbach* et de *Colebrook-White*. Ces relations sont valables pour les natures d'écoulement turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse, ceci explique l'introduction de la viscosité cinématique de liquide en écoulement. En considérant l'écoulement uniforme en régime critique et en introduisant la condition de criticité, cette démarche présente une relation

acquise, également implicite de forme  $b_c = \varphi(f_c, I_c, \eta_c, \varepsilon, \nu, g)$  et sa résolution se fait à l'aide d'un modèle mathématique présenté par une résolution analytique d'une équation de troisième degré conduit à l'expression exacte de la dimension linéaire  $b_c$ . Cette démarche présente des relations, également explicites qui permettent la solution directe au problème que pose le calcul de la profondeur critique  $y_c$ .

*ii.* Au cours du deuxième chapitre, une approche théorique liant le taux de remplissage à la conductivité relative a été proposée pour le calcul de la profondeur critique de l'écoulement dans un canal de profil en U. Celui-ci, peut être considéré comme un canal triangulaire à fond arrondi. Lors de l'utilisation des propriétés géométriques d'un triangle, on obtient des relations simples qui régissent les caractéristiques hydrauliques du canal de profil en U. Par conséquent, le critère de l'écoulement critique a conduit à une équation implicite de forme simple; sur laquelle a été appliquée la méthode de point fixe avec une valeur initiale judicieusement choisie. La fin de la présente résolution était de déterminer le rapport de forme d'aspect du triangle hypothétique  $\eta$ . Ce paramètre a été étroitement lié à la profondeur critique  $y_c$  recherchée par une relation explicite simple :  $y_c = r\eta_c$ , où le rapport d'aspect critique  $\eta_c$ , est déterminé selon la relation :  $\eta_c = \eta - y_0/r$ . Le processus itératif préconisé n'a pas été contraignant puisque la solution a été obtenue après la septième étape de calcul seulement, avec une erreur relative extrêmement faible, à l'issue de la septième étape de calcul seulement pour le pire des cas. La dernière étape de calcul a vérifié avec succès le critère d'écoulement critique, confirmant ainsi la validité des calculs. Cette méthode offre de grande possibilité pour résoudre les problèmes de dimensionnement liés à l'écoulement à ciel ouvert des canaux à profils complexes.

*iii.* Concernant le troisième chapitre de la seconde partie de notre thèse, nous nous sommes particulièrement intéressés également au calcul de la profondeur critique dans une conduite circulaire de diamètre  $D$ , partiellement remplie. Nous avons proposé une relation, qui permet de déterminer directement la valeur de la profondeur critique  $y_c$ . Nous avons montré que le débit relatif a été exprimé, sous une forme implicite, en fonction du taux de remplissage critique et sa

représentation graphique a montré une courbe ascendante, tendant vers un taux de remplissage critique égal à l'unité lorsque le débit relatif tend vers l'infini. A partir des valeurs connues du débit volume  $Q$  et du diamètre  $D$  de la conduite, le débit relatif  $Q^*$  est alors déduit de la relation :  $Q^* = Q/\sqrt{gD^5}$ . Et par la suite, la relation donne de manière explicite la valeur de la profondeur critique  $y_c$  :

$$y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{arcsinh}(0,312Q^{*0,52})$$

Cette formule occasionne une erreur relative maximale est inférieure à 0,42% pour gamme pratique du taux de remplissage  $0,2 \leq \eta_c \leq 0,80$ . L'avantage de cette méthode est que la grandeur hydraulique  $y_c$  est directement donnée par le calcul. C'est pour cela, cette approche est présentée dans le but de répondre aux problèmes courant de l'écoulement à ciel ouvert dans la conduite.

*iv.* Finalement aux cours du quatrième chapitre, nous avons proposé une nouvelle solution graphique, basée sur des considérations géométriques d'une section de forme parabolique décrite par l'équation:  $Y = aX^2$ ; dans laquelle  $Y$  est l'ordonnée et  $X$  est l'abscisse, le paramètre  $a$  est un facteur de forme du canal parabolique. Ces considérations géométriques se fait par trois points, qui sont particulièrement indiqués sur la figure (IV.2).

Par l'introduction de rapport d'aspect de l'écoulement critique  $\xi_c$ , alors pour déterminer la profondeur critique en connaissant le débit volume  $Q$  et le paramètre  $B$ , une seule équation de base peut répondre à cette question est l'équation de la criticité telle que :  $Q^2 T_c - g A_c^3 = 0$ , et permet aisément à déterminer la valeur exacte de la profondeur critique par la relation :  $y_c = \left(\frac{27}{8} \cdot \frac{Q^2}{gB}\right)^{1/4}$ .

Bien que le paramètre  $B$  est défini par les éléments géométriques  $T_m$  et  $y_m$  du canal parabolique. Et puis nous alons déduire les valeurs de la largeur au miroir critique  $T_c$ , et ainsi le rapport d'aspect critique  $\xi_c$ , respectivement comme suit:

$$T_c = \left(\frac{27B^3 Q^2}{8g}\right)^{\frac{1}{8}}; \quad \text{et} \quad \xi_c = \left(\frac{27Q^2}{8gB^5}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

A travers les résultats et les vérifications obtenus pour les nombreux exemples d'application d'évaluation de la profondeur critique de l'écoulement à ciel ouvert, dans les canaux et conduites les plus pratiques, nous ont montré la fiabilité et la simplicité, pour qu'elles deviennent ainsi un outil très performant pour le dimensionnement des ouvrages hydrauliques, en régime d'écoulement critique.

Le but premier de cette étude doctorale était d'ordre très pratique c'est-à-dire: outiller les personnes œuvrant dans les communautés techniques et économiques en particulier ; les secteurs hydrauliques, génie civil et travaux publics. Alors l'objet de cette thèse est de viser à la fois le plan académique comme un outil fondamental destiné à la communauté estudiantine et ainsi que le plan pratique de l'ingénieur hydraulicien. Ce travail a beaucoup suggéré les contraintes rencontrées devant les difficultés de calcul de la profondeur critique et aussi la pente critique, généralement pour tous les types des canaux utilisés.

***REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES***

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :**

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., KHATTAOUI, M., DEBABECHE, M., *Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge*, Lahryss/Journal, N° 2, 7-36, 2002.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., *Calcul du coefficient de frottement en conduite circulaire sous pression*, Lahryss/Journal, N° 5, pp.197-200, 2006.

ACHOUR, B., and BEDJAOUI, A., *Discussion of Explicit Solutions for Normal Depth Problem*, J. Hydraulic Research, IAHR, 2006, 44, No. 5, pp. 715-717.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., *Contribution au calcul de la profondeur normale dans un canal rectangulaire*, Lahryss/Journal, N° 05, Juin 2006 pp.139-147.

ACHOUR, B., *Calcul des conduites et canaux par la MMR – Conduites et canaux en charge*, Larhyss Edition Capitale, Tome 1, 2007, 610p.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., *Nouvelle approche pour le dimensionnement des conduites circulaires sous pression*, Courrier du savoir- N° 10, Avril 2010, pp.23-29.

ACHOUR, B., NEBBAR, M L., *New Approach for the Calculation of Critical Depth in a U-Shaped Channel*, Journal of Scientific Research, Article no.JSRR.20056. 8(6): 1-6, 2015.

ANGELBERT CHABI BIAOU, "Cours d'hydraulique routière". 2iE : Institut international d'ingénierie de l'eau et de l'environnement ; version 2009.

ARMENDO LENCASTRE. "*Hydraulique général*". Ed Eyrolles. Quatrième tirage 2005, 633 pages.

AYMAN T. HAMEED, "*Optimal Design of Round Bottomed Triangle Channels*" Tikrit Journal of Eng. Sciences /Vol.17/No.3/September2010, (31-43)

A. LAYCOCK, *Irrigation systems: Design, Planning and construction*, CAB International, Cambridge, 2007.

BABAEYAN-KOOPAEI, K. 2001. "*Dimensionless curves for normal depth calculations in canal sections*" *J. Irrig. Drain. Eng.*, 1276,386–389

BABAEYAN-KOOPAEI, K., VALENTINE, E.M., and WAILES, D.C. "*Optimal Design of Parabolic- Bottomed Triangle Canals*". *J.Irrig. Drain.Eng.*, 126(6), 408-411, (2000)

BAKHMETEFF, B.A., FEODOROFF N.V., *Discussion on open channel flow*, Transactions, American Society of Engineers, Vol.108, p.492-502, 1943.

BAZIN H., *Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts*, Mémoire n°41, Annales des ponts et chaussées, Vol.14, ser.7, 4ème trimestre, p.20-70, 1897.

BLASIUS, H. "*Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten*", Forschungsheft des Vereins deutscher Ingenieure, N° 131, Berlin, 1913.

- BLENCH T., *A new theory of turbulent flow in liquids of small viscosity*, Journal, Institution of Civil Engineers, London, Vol.11, n°6, p.611-612, April, 1939.
- BOCK, J., Einfluss der Querschnittsform auf die Widerstandsbeiwerte offener Gerinne, Technischer Bericht 2, Inst. Hydromechanik und Wasserbau, TH Darmstadt, ed. O. Kirshmer, Darmstadt, 1966.
- CAMP T.R., *Design of sewers to facilitate flow*, Sewage Works Journal, Vol.18, p.1-16, 1946.
- CHOW, V.T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 1973.
- COLEBROOK, C.F., WHITE, C.M., *Experiments with fluid friction in roughened pipes*, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1937, 161, pp. 367-381.
- CRAUSSE, E., *Hydraulique des canaux découverts*, Ed. Eyrolles, Paris, 1951.
- DARCY, H. *Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux*. Comptes rendues des séances de l'académie des Sciences, Vol.38, 1109-1121, 1854.
- DAVID BUTLER AND JOHN W. DAVIS "Urban Drainage " p.176, 3<sup>rd</sup> Edition published in the Taylor & Francis e-Library, 2010
- DRAPER N.R., SMITH H., *Applied regression analysis*, Wiley-Interscience, New York. (1998).
- FENG LING L, HUI W, XU GUAN L. *New formula for critical depth of the u-shaped channels*. Appl. Mech. Mater. 2012;212- 213:1136-1140.
- FINNING, J. T., A Practical Treatise on Water-supply Engineering, Relating to the Hydrology, Hydrodynamics, and Practical Construction of Water-works, in North America, p.619, Ed. D.Van Nostrand. Pub. ; New York. 1877.
- FORCHHEIMER P., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig and Berlin, p.139-163, 1930.
- FRENCH, R.H., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 1985
- FRENCH. *Hydraulic constructions*, Ed. Press Polytechnic French-Speaking. Switzerland; 1989.
- F. L. LI, H. WEN, X. G. LIN, "A New Formula for Critical Depth of the U-Shaped Channels", Applied Mechanics and Materials, Vols. 212-213, pp. 1136-1140, 2012
- G. JACCON « MANUEL D'HYDROMETRTE » Institut Français de recherche scientifique pour le développement en coopération, Brasilia - 1986
- GRAF, W.H., ALTINAKAR, M.S., « *Hydraulique Fluviale, Ecoulement permanent uniforme et non uniforme* », Traité de Génie-Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Tome 1, 1993.
- GRAF W.H., ALTINAKAR M.S., « *Hydrodynamique* », Ed. Eyrolles, Paris, 1991.

- GANGUILLET E., KUTTER W.R., « *An investigation to establish a new general formula for uniform flow of water in canals and rivers* », Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines, Vol.21, n°1, p.6-25, n°2-3, p.46-59, 1869.
- HENDERSON F. M., « *Open channel flow* », Mac Millan, New York. (1966).
- HOUK I.E., « *Calculation of flow in open channels* », Miami Conservancy District, Technical report, Pt. IV, Dayton, Ohio, 1918.
- IS: 10430-1982 “*Criteria for design of lined canals and guidelines for selection of type of lining*”
- JAYARAMAN, V. V. (1979) “Resistance studies on smooth open channels”. Proc. ASCE, J. Hydraulics Division 96(HY5), 1129-1142; 96(HY9), 1925-1926; 96(HY12), 2667-2668; 97(HY1), 204-207; 97(HY2), 365-367; 97(HY11), 1889-1891.
- JONES, L.E, AND TRIPATHY, B.N, “*Generalized Critical Slope For Trapezoidal Channels*” Jour of Hydraulic Div. Proc .ASLE, vol.91, NO.Hy1, Jan pp85.91, 1965.
- KAZEMIPOUR, A. K., APELT, C.J. « *Shape effects on resistance to uniform flow in open channels* ».J. Hydraulic Research 17(2), 129-147; 18(2), 169-185, 1979.
- KAZEMIPOUR, A. K., APELT, C.J. « *New data on shape effect in smooth rectangular channels* ». J. Hydraulic Research 20(3), 225-233, 1982.
- KEULEGAN G.H., *Laws of turbulent flow in open channels*, Research paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, p.707-741, December, 1938.
- K. SUBRAMANYA “*Flow in open channels*” third edition, Tata MacGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 2009
- LENCASTRE, A. “*Hydraulique générale*”, Ed. Eyrolles, Paris, 1966.
- LINDQUIST E., *On velocity formulas for open channels and pipes*, Transactions of the World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, Vol.1, p.177-234, 1933.
- LIU JL, WANG ZZ, FANG X. *Formulas for computing geometry and critical depth of general horseshoe tunnels*. Trans. ASABE. 2010;53 (4):1159-1164.
- LOGANATHAN, G.V. "Optimal Design of Parabolic Canals" .J. Irrig. Drain. Eng., 117 (5), 716 735, (1991).
- MANNING R., *On the flow of water in open channels and pipes*, Transactions, Institution of Civil engineers of Ireland, Vol.20, p.161-207, Dublin, 1891.
- MATI NAQVI “*Design of linear drainage system*” Ed by Thomas Telford; London, 2003,
- MIRONENKO, A. P., WILLARDSON, L. S., AND JENAB, S. A.1984. “*Parabolic canal design and analysis*” J. Irrig. Drain. Eng., 1102, 241.246.
- MONADJEMI, P. "General Formulation of Best Hydraulic Channel Section" J.Irrig. Drain.Eng., 120(1), 27-35, (1994).

- MOODY, L.F. Trans. ASME, Vol.66, 671-684, 1944.
- M. CARLIER “*Hydraulique générale et Appliquée*” Edition Eyrolles, Paris France, 1986.
- M. HANIF CHAUDHRY “*Open-Channel Flow*” second edition, Springer Science + Business Media, LLC, 2008.
- N. KREMÉNENTSKI, D. SCHOTMRERNLIHT; Y.ALYCHEV, L.YAKOVLÉVA “*Hydraulique*“ ;p 230. Edition MIR MOSCOU, 1984.
- OSCAR CASTRO-ORGAZ, WILLI H. HAGER, F.ASCE “FORUM Critical Flow: A Historical Perspective “
- PAVLOVSKI N.N., “*Handbook of Hydraulic*”, *Kratkil Gidravlicheskil, Spravochnik, Gosstroizdat*, Leningrad and Moscow, 1940, 314p.
- POWELL R.W., “ *Resistance to flow in rough channel*”s, Transactions, American Geophysical Union, Vol.31, n°4, p.575-582, August, 1950.
- PRANDTL L., *On fully developed turbulence*, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Congress of Applied Mechanics, Zurich, P.62-74, 1926.
- P.N. MODI , S.M.SETH “*HYDRAULICS AND FLUID MECHANICS*” STANDARD BOOK HOUSE New delhi -110002 ph, Eighteenth Edition ,2011
- RAIKAR RV, REDDY MS, VISHWANADH GK. “*Normal and critical depths computations for egg-shaped conduit sections*. Flow Meas. Instrum. 2010;21(3):367-372.
- REMINERASE “*Annuaire hydrologique de la France*”. Rue de Grenelle. PARIS-VII· 1949.
- RICHWELL MUBITA MWIYA: “*Parabolic Channel Design*”. International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 4, April-2013.
- SCHNACKENBERG E. C., “*Slope discharge formulae for alluvial streams and rivers*”, Proceeding, New Zealand Institution of Engineers, Vol. 37, p.340-409, Wellington, 1951.
- SINNIGER, R.O., HAGER W.H., . “*Constructions hydrauliques*”, *Traité de Génie Civil de l’Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, Presses Polytechniques Romandes, (15), 1<sup>ère</sup> Edition, Suisse, 1989.
- STRICKLER, A. “*Beiträge zur frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauigkeitszahlen für Ströme, Känale und geschlossene Leitungen*”. Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft, N° 16, Bern, 1923.
- SUBHASH C.JAIN, “*OPEN-CHANNEL FLOW*” Printed In The USA, 320 pag , 2001.
- SWAMEE P.K., JAIN A.K., *Explicit equations for pipe-flow problems*, Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol.102, HY5, p.657-664, 1976.
- SWAMEE PK. “*Critical Depth Equations for Irrigation Canals*”. J. Irrig. Drain. Eng. 1993;119(2):400-409.
- SWAMEE PK, RATHIE PN. “*Exact equations for critical depth in a trapezoidal canal*”. J.Irrig. Drain. Eng. 2005;131(5):474-476.

- TERRY W. STRUM «*Open channels Hydraulics* », Georgia Institute Technology McGaw-Hill
- TOEBES C., Stream flow : «*Poly-dimensional treatment of variable factors affecting the velocity in alluvial streams and rivers* », Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol.4, n°3, pt. III, p.900-938, December, 1955.
- VATANKHAH A. R., EASA S., *Flow Meas. Instrum.* 22 (2011) 9.
- VATANKHAH A. R., *Ain Shams Eng. J.* 4 (2013) 17
- VATANKHAH AR, KOUCHAKZADEH S. Discussion. "Exact equations for critical depth in a trapezoidal canal". *J. Irrig. Drain.Eng.* 2007;133(5):508-508.
- VATANKHAH AR, EASA MS. *Explicit solutions for critical and normal depths in channels with different shapes.* *Flow Meas. Instrum.*2011;22(1):43-49.
- VLADISLAVLJEVITCH Z., *Aperçu critique sur les formules pour la prédétermination de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme*, Transactions of the 1st Congress, International Commission on Irrigation and Drainage, New Delhi, Vol.2, rept.12, question 2, p.405-428, 1951.
- WALTER H.GRAF, M.S ALTINAKAR *.Hydraulique fluvial* , volume 16 Edition presse polytechniques, université romandes Lausanne 2000,
- WANG Z. Z., "formula for calculating critical depth for trapezoidal open channel". *J. Hydraul. Eng* , 124 (1998) 90. 11.
- WANG Z. Z., Yuan S., Wu C.L., " An inquiry on a formula for calculating critical depth for open channel with trapezoidal cross section " *J. of Hydraul. Eng.*, 43 (1999) 7, (In Chinese).
- WEISBACH, J., *Lehrbuch der Ingenieur and Maschinenmechanik*, Brunswick, Germany 1845.
- WILI H.HAGER "wastewater hydraulics theory and Practice" second Edition Springer, 2010
- WILI H.HAGER, ANTON J.SHELIESS « *Constructions Hydrauliques* » volume 15. Presse Polytechniques Université Romandes,2009.
- X.Y.ZHANG, L.WU "Direct solutions for normal depths in curved irrigation canals" *College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling 712100, P.R. China* ,(2012)
- ZELLA, L., HYDRAULIQUE GENERALE, "Hydrostatique et Hydrodynamique". Edition N° 5253, OPU, 4-2012.