

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider– BISKRA  
Faculté des sciences et de la Technologie  
Département de génie civil et hydraulique  
Réf : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم الهندسة المدنية و الري  
المرجع : .....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Magistère en génie civil**

Option : Interaction Sol-Structures

**FORMULATION ISOPARAMETRIQUE DES ELEMENTS  
FINIS A CHAMPS DE DEFORMATION**

Présenté par :

**Fortas Lahcène**

Soutenu-le: 17-06-2014

Devant le jury composé de :

Président:	BENMEBAREK Sadok	Prof	Université de Biskra.
Rapporteur :	BELOUNAR Lamine	Prof	Université de Biskra.
Examineur:	BOURAZANE Massaoud	M.C	Université de Biskra.
Examineur:	TATI Abdelouahab	M.C	Université de Biskra.



## Résumé

L'objectif de ce travail est de faire introduire la notion d'isoparamétrie sur l'élément à champs de déformation ***SBRIE*** [Sabi.95], ainsi que l'évaluation des éléments finis du code *ANSYS*.

Une confrontation des résultats donnés par l'élément **SBRIE**, l'élément classique Q4 et les éléments du code *ANSYS* "PLANE 42, SOLID 82-2D" avec les résultats analytique a été réalisée pour la validation, l'exactitude et la robustesse de chacun de ces éléments. L'adaptation de la notion d'isoparamétrie sur les éléments à champs de déformation a permis de palier à plusieurs problèmes de modélisation en particulier les formes irrégulières.

### **Mots-Clés :**

**Eléments finis – Isoparamétrie – Approche en déformation – Elasticité plane – Verrouillage- Blocage – Interpolation.**

## **Abstract**

The aim of this work is to introduce the concept of isoparametrie on the strain field based element **SBRIE** [Sabi.95] and evaluation of the elements of the ANSYS finite element code.

A comparison of the results given by the **SBRIE** element, the Q4 element and the classic element of ANSYS code "PLANE 42, SOLID 82-2D" with analytical results was conducted to validate the accuracy and robustness of each of these éléments.

The adaptation of the isoparametrie concept in the strain field based elements has allowed to overcome several modeling problems in particular irregular shapes.

### **Key words :**

**Finte éléments – Isoparametrie – Deformation approach – Plane elasticity – locking – Interpolation**

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو إدخال مفهوم isoparamétrie على العنصر المحدود الذي يعتمد على التقريب في التشوه **SBRIE** [Sabi.95]، وايضا تقييم العناصر المحدودة الموجودة في برنامج **ANSYS**.

نقارن نتائج العنصر **SBRIE** و العنصر الكلاسيكي **Q4** بالإضافة الى عناصر برنامج **ANSYS** مع النتائج النظرية من اجل اثبات دقة كل عنصر من هذه العناصر.

إن تكيف مدلول isoparamétrie على العناصر في مجال التقريب على التشوه تسمح بدراسة مختلف مشاكل النمذجة خاصة فيما تعلق بالأشكال غير النظامية.

## *Remerciements*

*Tout d'abord, je remercie Allah, le clément et le miséricordieux de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.*

*Je voudrais exprimer mes remerciements à mon encadreur **Prof BELOUNAR. L***

*Je voudrais aussi remercier tous les professeurs qui ont contribué à ma formation.*

*Que tous les membres du jury trouvent ici l'expression de mes profonds*

*Respects pour avoir pris la peine d'examiner le manuscrit.*

*Mes remerciements vont également à tous ceux qui de près ou de loin m'ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.*

# *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail à :*

- ❖ *Ma très chère mère.*
- ❖ *Mon très cher père.*
  
- ❖ *Mes frères et mes sœurs et à toute ma famille*
  
- ❖ *Tous les enseignants de U M K-BISKRA*
  
- ❖ *qui nous ont beaucoup aidé*
  
- ❖ *Mes amis sans exception.*

**LAHCENE**

**NOTATIONS**

$[B]$  Matrice dérivée des fonctions de forme

$[D_{ij}]$  Tenseur des constantes élastiques

$[K_e]$  Matrice de rigidité élémentaire

$a, b$  Dimensions de l'élément

$E$  Module de Young

$G$  Module de coulomb

$N$  Fonction de forme

$\{u, v, w\}$  Vecteur déplacements

$[\varepsilon_{ij}]$  Tenseur des déformations

$[\sigma_{ij}]$  Tenseur des contraintes

$\nu$  Coefficient de Poisson

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  D.D.L de rotation

## **ABREVIATIONS**

1-D	Uni- dimensionnel
2-D	Bi- dimensionnel
3-D	Tri- dimensionnel
ddl	Degré De Liberté
MCR	Mouvement de Corps Rigide
MEF	Méthode des Eléments Finis

## Liste des figures

$N^0$	Figures	Page
2.1	Exemple d'un maillage avec des éléments et des nœuds correctement numérotés.	15
2.2	Élément 1D: (a) coordonnée cartésienne $x$ ( $-a \leq x \leq a$ ) ; (b) coordonnée naturelle $\xi$ ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ).	16
2.3	Fonctions d'interpolation lagrangiennes : (a) linéaires ; (b) paraboliques ; (c) cubiques.	18
2.4	Éléments finis triangulaires avec continuité $C^0$ : (a) linéaire ; (b) quadratique ; (c) cubique.	18
2.5	Triangle de Pascal.	19
2.6	Fonctions d'interpolation du triangle quadratique.	19
2.7	Élément rectangulaire en coordonnées cartésiennes et en coordonnées naturelles.	20
2.8	Famille des rectangles de Lagrange et quelques fonctions d'interpolation: (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bicubique.	20
2.9	Fonctions d'interpolation typiques de l'élément biquadratique.	21
2.10	Termes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Lagrange.	21
2.11	Famille des rectangles de Serendip : (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bicubique ; (d) fonctions d'interpolation de l'élément biquadratique.	22
2.12	Modes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Serendip.	22
2.13	Éléments tridimensionnels : (a) tétraèdres à 4 et 10 nœuds ;(b) briques à 8 et 20 nœuds ;(c) prismes à 6 et 15 nœuds.	24
3.1	Équilibre d'un solide.	26
3.2	Notion de contraint	27
3.3	Équilibre de volume.	28

$N^0$	Figures	Page
3.4	Équilibre de surface.	30
3.5	déplacement d'un point.	32
3.6	Déformations planes.	34
3.7	État plan de déformation.	37
3.8	État plan de contrainte.	38
3.9	Conditions de contour en contraintes planes.	39
3.10	Contraintes sur deux facettes orthogonales.	40
4.1	Élément isoparamétriques bidimensionnelle quadrilatère mappé à partir d'un élément rectangulaire: (a) l'élément rectangulaire, (b) l'élément déformé.	45
4.2	Élément rectangulaire et ses coordonnées cartésiennes $(x, y)$ et $(\zeta, \eta)$ naturelles.	48
4.3	Les étapes nécessaires de programme.	52
5.1a	Poutre console mince élancée soumise à une force au bout.	57
5.1b	Flèche normée au point A d'une poutre console mince élancée soumise à une force de cisaillement à l'extrémité ( maillage 1x6 élément [PLANE 42] du code calcul ANSYS ).	58
5.2	Poutre console élancée soumise à la flexion pure.	59
5.3a	Flèche normée au point A d'une poutre console soumise à la flexion pure.	60
5.3b	Flèche normée au point A d'une poutre console soumise à la flexion pure (maillage 1x12 élément [PLANE 42] du code de calcul ANSYS).	61
5.4	Poutres consoles large moyennement large et mince.	62
5.5a	Flèche normée pour une console large.	64

---

<i>N</i> <sup>0</sup>	<b>Figures</b>	<b>Page</b>
<b>5.5.b</b>	Flèche normée pour une console large maillage 2x2 élément [ <i>PLANE 42</i> ] du code calcul <i>ANSYS</i>	64
<b>5.5c</b>	Flèche normée pour une console moyennement large.	66
<b>5.5d</b>	Flèche normée pour une console moyennement large maillage 2x2 élément [ <i>PLANE 42</i> ] du code calcul <i>ANSYS</i>	66
<b>5.5e</b>	Flèche normée pour une console mince.	68
<b>5.5f</b>	Flèche normée pour une console mince maillage 10x16 éléments [ <i>PLANE 42</i> ] du code calcul <i>ANSYS</i>	68
<b>5.6</b>	Poutre simplement appuyée chargée au milieu.	69
<b>5.7</b>	Contraintes de flexion normées au point A	70
<b>5.8</b>	Contraintes de flexion normées au point A maillage 10x20 élément [ <i>PLANE 42</i> ] du code calcul <i>ANSYS</i> .	70
<b>5.9</b>	Contraintes de cisaillement normée au point B.	72
<b>5.10</b>	Contraintes de cisaillement normée au point B maillage 10x20 élément [ <i>PLANE 42</i> ] du code calcul <i>ANSYS</i>	72

---

## Liste des tableaux

$N^0$	Tableaux	Page
4.1	Fonctions de forme de l'élément SBRIE	51
4.2	Composantes de la matrice [B] de l'élément SBRIE	51
5.1	Flèche normée au point A d'une poutre console mince élancée soumise à une force de cisaillement à l'extrémité	57
5.2	Flèche normée au point A, d'une poutre console soumise à la flexion pure	60
5.3a	Flèche normée pour une console large.	63
5.3b	Flèche normée pour une console moyennement large.	65
5.3c	Flèche normée pour une console mince.	67
5.4	Contraintes de flexion normées au point A.	69
5.5	Contraintes de cisaillement normées au point B.	71

## SOMMAIRE

Résumé	i
Remerciements	iv
Dédicaces	v
Notations	vi
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Sommaire	xii

### INTRODUCTION GENERALE

1 Introduction	2
2 Plan de la thèse	3

### CHAPITRE 01

#### RECHERCHE BIBLIOGRAPHIE

1.1. Introduction	5
1.2. Revue de littérature	5
1.2.1. Les élément à champ de déformation	5
1.2.2 Les éléments isoparamétriques	9

### CHAPITRE 02

#### NOTION DE BASE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

2.1. Introduction	12
-------------------	----

2.2. Définition d'un élément fini	13
2.2.1. Les nœuds géométriques	13
2.2.2. Attributs d'un élément fini	13
2.2.3. Représentation des éléments finis	14
2.3. Procédure de la méthode des éléments finis	14
2.3.1. Discrétisation de domaine	14
2.3.2. Interpolation déplacement	15
2.3.2.1. Introduction	15
2.3.2.2. Interpolation 1-D	16
2.3.2.3. Interpolation 2-D	17
2.3.2.3.1. Continuité aux frontières	17
2.3.2.3.2. Éléments finis triangulaires	18
2.3.2.3.3. Éléments finis rectangulaires	19
2.3.2.4. Interpolation 3-D	23

## **CHAPITRE 03**

### **ELASTICITE PLANES**

3.1. Introduction	26
3.2. Les équations générales d'élasticité	26
3.2.1. Les contraintes	26
3.2.1.1. Notion de contrainte	26
3.2.1.2. Équations internes	28
3.2.1.3. Équations externes	30
3.2.1.4. Les équations de compatibilité	31
3.2.2. Les déformations	31
3.2.2.1. Notion de déformation	31
3.2.2.2. Déplacements	32
3.2.2.3. Relations entre déplacements et déformations	32
3.2.3. Relations entre déformations et contraintes	34
3.2.4. Relations entre contraintes et déformations	35

---

3.2.5. État plan de contrainte et de déformation	36
3.3. Les équation fondamentales de l'élasticité plane	39
3.3.1. Les équations d'équilibre	39
3.3.1.1. Les équations différentielles d'équilibre	39
3.3.1.2. Les conditions de contour	39
3.3.1.3. Changement d'axe	40
3.3.2. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes	40

## **CHAPITRE 04**

### **FORMULATION ISOPARAMETRIQUE DE QUELQUES ELEMENTS FINIS**

4.1. Introduction	43
4.2. Formulation isoparamétrique de l'élément membranaire Q4	44
4.3. Formulation isoparamétrique de l'élément (SBRIE)	48
4.4. Présentation du programme	52
4.4.1. Présentation des différentes étapes du programme	53

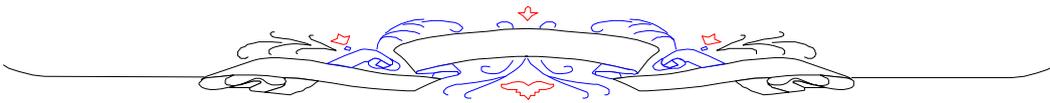
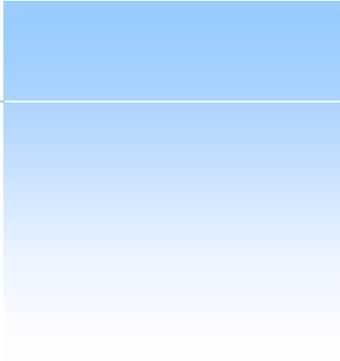
## **CHAPITRE 05**

### **VALIDATION NUMERIQUE**

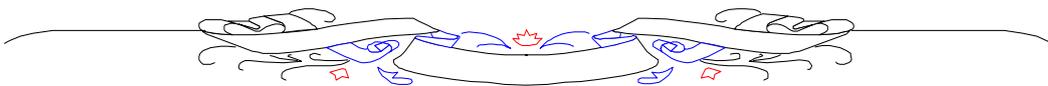
5.1. Introduction	56
5.2.1 Poutre console mince élançée soumise à une force à l'extrémité	57
5.2.2 Poutre console mince élançée soumise à une flexion pure à l'extrémité	59
5.2.3 Les tests du rapport de forme pour une poutre console	62
5.2.4 Poutre simplement appuyée, chargée au milieu	69

### **CONVLUSION ET RECOMMANDATIONS** 75

### **BIBLIOGRAPHIE** 77



# *INTRODUCTION GENERALE*



## INTRODUCTION GENERALE

### 1. Introduction :

En mécanique de l'ingénieur, un phénomène physique est soumis à l'observation, à sa représentation en formules ou équations et à l'étude des méthodes de résolution de ces équations. Ces trois opérations liées directement aux trois disciplines (domaines) de la mécanique. Premièrement, vient lieu la mécanique expérimentale qui nous aide à observer directement ces phénomènes physiques en laboratoire. En second lieu la mécanique appliquée qui va faire la représentations pertinente en modèle mathématique, c'est la modélisation. Enfin la mécanique numérique étudie les méthodes de résolution de ces modèles ou ces équations conclues du domaine précédent.

La résolution par voie numérique de ces équations constitue la base d'une méthode communément appelée Méthode des Eléments Finis (en abrégé M.E.F). L'un des domaines fertiles pour l'application de cette méthode est la mécanique des structures : barres, poutres, plaques et coques. La MEF une procédure numérique approximative pour l'analyse des grandes structures. Elle est devenue très connue avec les avancements des calculateurs numériques puisqu'ils permettent aux ingénieurs de résoudre rapidement et efficacement de grands systèmes d'équations. Cette méthode est un outil très utile pour la solution de plusieurs types de problèmes technologique tels que l'analyse des structures, transfère de chaleur et l'écoulement des fluides. Elle est spécialement dans la conception des armatures, des bateaux, des moteurs électriques, des moteurs de chaleurs et des vaisseaux spatiaux.

Comme le montre la pratique, les ingénieurs préfèrent modéliser leurs structures avec des éléments finis simples, comme les quadrilatères, les triangulaires...etc, le résultat de garder le modèle en déplacement classique est, des interpolations de degré peu élevé et une forte sensibilité aux phénomènes de blocage ou verrouillage de membrane et de cisaillement. A partir de ce point de vue l'utilisation du modèle en déformation naturel joue un rôle nécessaire dans la construction d'éléments finis robustes et de bonne qualité. Les éléments à champs de déformation démontrés comme des éléments robustes pour l'analyse des structures sont formulés avec des formes régulières (rectangle, triangle rectangle, parallélépipède rectangle). Les éléments finis isoparamétriques sont utiles pour modéliser des structures avec des limites irrégulières. L'isoparamétrique mot dérivé du «iso» («même») et «paramétrique» («paramètre») indique que les mêmes fonctions sont utilisées pour définir la forme et les déplacements de l'élément. Il est

souvent difficile de modéliser la géométrie d'une structure avec seulement les éléments de forme régulière triangulaire ou rectangulaire. Les éléments isoparamétriques sont utiles pour la modélisation de structures, puisque les éléments isoparamétriques peuvent avoir des côtés incurvés. De tels éléments sont formulés en utilisant des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur. Des éléments isoparamétriques sont formulés dans le système de coordonnées naturel qui mappe la géométrie de l'élément en fonction des coordonnées naturelles indépendamment de l'orientation d'un élément dans le système de coordonnées global; toutefois, la relation entre les deux systèmes doivent être utilisés dans la formulation des éléments [Cook.74].

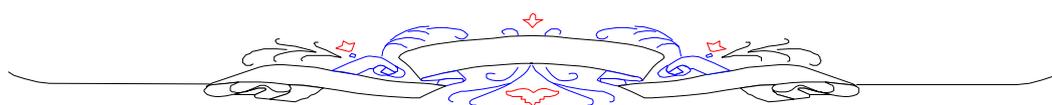
La modélisation des structures dont le comportement est membranaire a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches surtout en ce qui concerne l'approche en déformation et la formulation isoparamétrique.

Notre objectif en s'intéresse à faire introduire la notion d'isoparamétrie pour la famille des éléments finis basés sur l'approche en déformation.

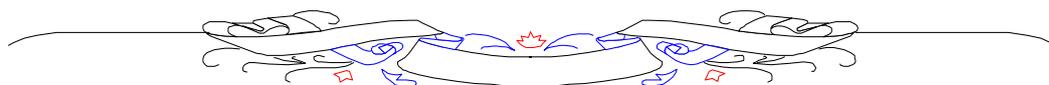
Donc, nous avons utilisé et testé l'efficacité des éléments isoparamétriques membranaires à quatre nœuds "*les éléments SBRIE, Q4*" avec deux DDL par nœud comparés avec les éléments du code ANSYS "*PLANE 42, SOLID 82-2D*" avec deux DDL par nœud et la solution exacte.

## **2. Plan de la thèse :**

Le premier chapitre est une recherche bibliographique sur les éléments à champs de déformation et les éléments isoparamétriques. Le deuxième chapitre présente les notions de base de la méthode d'éléments finis. Le troisième est consacré à des rappels et des bases théoriques de l'élasticité plane. Le quatrième est consacré à la formulation isoparamétrique des éléments finis "*SBRIE* et *Q4*" qui sont basés sur le modèle en déformation. Le dernier chapitre traite la validation numérique des éléments formulés et comparé les résultats avec les éléments du logiciel ANSYS.



*RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE*



## Chapitre 01: RECHERCHE BIBLIOGRAPHIE

### 1.1. Introduction

Aux XXe siècles l'humanité a connu ce qu'on peut appeler « une révolution scientifique » qui a touchée tous les domaines. Parmi ces domaines on note ceux des *éléments finis*.

Les recherches dans ce domaine existent jusqu'à nos jours. Le fruit de ces recherches était la découverte de nouveaux éléments tels les éléments à champ de déformation et les éléments isoparamétriques.

### 1.2. Revue de littérature

#### 1.2.1. Les élément à champ de déformation

La majorité des chercheurs de l'université de Cardiff au Royaume Uni, ont choisi et pendant longtemps le modèle basé sur le modèle en déformation. Ce choix était surtout lié aux performances des éléments développés, qui sont utilisés en un nombre très réduit. L'approche basée sur la déformation est l'une des approches les plus utilisées en sciences appliquées de l'ingénieur et il existe une grande littérature sur le sujet. Ashwell et Sabir [Ashw.71a] dans une étude sur les structures courbées (arcs circulaires), ont fait le constat suivant: Pour un arc modérément profond, avec une nervure épaisse, toutes les fonctions de forme convergent rapidement pour corriger les solutions avec un nombre croissant d'éléments. Pour un arc profond avec une nervure mince, il n'ya pas de fonctions de forme qui ont donné des solutions satisfaisantes pour un certain nombre d'éléments jusqu'à 34. Juste après cette constatation les mêmes auteurs [Ashw.71b] ont eu de très bons résultats en utilisant des fonctions de déformation indépendantes dans le développement des éléments pour l'analyse des coques cylindriques. Dans la même année Sabir et Ashwell [Sabi.71] ont comparé les fonctions de forme les plus importantes en les utilisant pour obtenir des fréquences naturelles d'un anneau vibrant dans son plan. Un retour sur l'analyse des coques cylindriques à travers l'article de Sabir et Lock [Sabi.72] l'élément est une forme simplifiée de l'élément coque de Cantin et Clough [Cant.68], en réduisant la dimension de la matrice de rigidité 24x24 à 20x20, Sabir et Lock ont montré que si les termes  $(\cos \Phi - \cos \beta)$  et  $(1 - \cos \Phi \cos \beta)$  dans les équations de forme de l'élément de Cantin et Clough sont négligés, et aussi le degré de liberté  $w_{xy}$ , on obtient un élément non conforme qui a une matrice de rigidité minimale. Cet élément a un avantage que tous ces degrés de liberté sont

externes. Par la suite des améliorations ont été apportées [Ashw.72] aux éléments rectangulaire de coque cylindrique, le résultat est un élément non conforme à 20 degrés de liberté, il satisfait les conditions du mode du corps rigide et l'état de déformation constante. Pour cet élément, on utilise seulement des degrés de liberté externes, trois déplacements linéaires  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et deux rotations  $\theta_y, \theta_x$  afin d'éviter les difficultés associées aux degrés de liberté interne et les nœuds internes. Des résultats plus précis ont été atteints que ceux de l'élément simplifié de Sabir [Sabi.72]. Un autre pas en avant avec des éléments pour l'analyse des arcs circulaires dans le domaine géométriquement non-linéaire, ces éléments sont supérieurs aux éléments classiques. Un autre travail en plus du précédant a été apporté par [Sabi.73], afin de développer des éléments arcs qui se déforment hors plan de courbure [Sabi.75]. Une grande attention a été faite dans le but de développer des éléments de coque [Sabi.78], pour les charges concentrées et le calcul des contraintes aux voisinages de ces charges, pour les coques minces, forces radiales ou moments concentrés. Des résultats qui correspondent aux solutions théoriques données par Flugge [Flug.66] sont atteints. Un grand intérêt pour les éléments rectangulaires et quadrilatéraux de coque cylindriques avec les recherches de Sabir et Cherchafi [Sabi.82] montrent que l'élément est une modification de l'élément développé par Ashwell et Sabir [Ashw.72]. L'élément résultant a les mêmes représentations géométriques que l'élément [Ashw.72], sauf que la formulation de cet élément est basée sur les hypothèses de [Sander – Koiter] au lieu des hypothèses de Kirchhoff - Love utilisées dans la formulation de l'élément précédant. Une autre version de cette élément où on inclut le coefficient de Poisson dans les expressions des déformations afin de satisfaire les équations d'équilibre, on trouve un élément qui nous va permettre peut être d'avoir des meilleurs résultats. Ensuite l'accent est mise sur l'analyse des problèmes généraux de l'élasticité plane [Sabi.83a], avec le développement d'éléments rectangulaires avec deux degrés de liberté pour chaque nœud convenable avec le MCR, les déformations constantes, les équations de compatibilités, et pour d'autres versions la satisfaction de l'équilibre local. Le grand pas à l'époque, c'était l'insertion de la rotation dans le plan par Sabir et Chow [Sabi.83b] pour l'analyse du flambement des panneaux plans avec ouvertures circulaires et carrées. L'année ultérieure était marquée par l'emploi des mêmes éléments [Sabi.84] pour l'analyse des voiles avec ouvertures. Ensuite, la concentration s'est centralisée sur le développement et l'amélioration des éléments rectangulaires et triangulaires qui ont des rotations dans le plan au niveau des nœuds avec aboutissement à des résultats très satisfaisants avec un nombre réduit d'éléments [Sabi.85a]. Des éléments secteurs en coordonnées polaires ont été développés ensuite [Sabi.85b]. Toujours avec les

éléments secteurs en coordonnées polaires [Sabi.86] avec 2 d.d.l. par nœud pour l'analyse des problèmes en élasticité plane, différents tests internes, ont été menés avec différents rapports de forme (aspect ratio) sur des cylindres épais sous pression. Une bonne précision a été atteinte avec seulement un nombre limité d'éléments. Ensuite, Bouzrira a développé un élément secteur [Bouz.86] en incorporant des rotations dans le plan (12ddl/élément). Cet élément a été modifié et amélioré par Djoudi [Djou.90], qui a suggéré que les déformations de cisaillement soient indépendantes. Sabi et Sfendji [Sabi.95a] dans une étude sur les éléments rectangulaires et triangulaires, ont fait le constat suivant: Une triangulaire et une déformation des éléments rectangulaires base sont élaborés pour les problèmes généraux d'élasticité plane. L'élément triangulaire a deux degrés essentiels de liberté à l'extérieur de chacun des trois nœuds d'angle et à un nœud à mi-côté. L'élément rectangulaire possède les mêmes degrés de liberté à chacun des quatre nœuds de coins ainsi que des centres de gravité au niveau du nœud. Ces éléments sont utilisés sous diverses formes, y compris la condensation statique et l'équilibre satisfaisant pour obtenir des solutions à des problèmes d'élasticité 2D où la contribution de la contrainte de cisaillement sur la déformation peuvent être importantes [Sabi.95b]. Dans le présent article, l'élément de coque rectangulaire peu profond développé dans l'article [Sabi.85b] est utilisé dans l'étude du comportement non linéaire des coques cylindriques ainsi que sphérique. [Djou.95] Dans cet article, les éléments finis de coques sont appliquées à l'analyse des barrages doublement incurvés. Les éléments ayant seulement les cinq degrés de liberté extérieurs essentiels par nœud d'angle, satisfait la représentation exacte de modes des corps rigides et sont basés sur la formulation de coque peu profonde. L'année suivante a vu la naissance de l'élément fini cité dans [Sabi.96] pour l'analyse des réservoirs de stockage cylindro-conique en utilisant des éléments de déformation. Dû à Sabir et Moussa, ces mêmes auteurs ont développé des éléments [Sabi.97a] sous la forme d'un segment conique. Les champs de déplacement des éléments sont en terme de coordonnées curvilignes, satisfait à l'exigence exacte de modes de corps rigide de la déformation et possède six degrés de liberté à chacun des quatre nœuds d'angle. Le toit est formé de plusieurs segments de cône réunis le long des lignes de générateurs. Pour satisfaire l'équilibre et la compatibilité le long de ces jonctions et à réduire le temps de calcul, la matrice de rigidité pour tout élément à côté de ces lignes est développée d'une manière spéciale. Sabir et Davis, durant cette période, on concentré leurs travaux sur les éléments modélisant les plaques avec ouvertures. Ces dernières ont été soumises à un cisaillement dans le plan uni axial, bi axial et uniformément réparties le long des quatre bords extérieurs avec calcul des fréquences naturelles [Sabi.97b], [Sabi.97c]. Des auteurs [Bela.98a] en Algérie, ont développé un nouvel élément secteur basé sur le

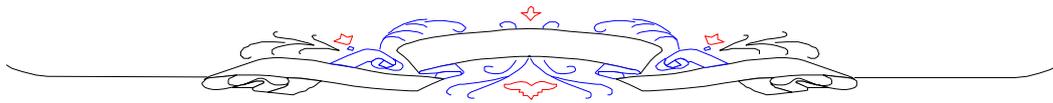
modèle de déformation avec rotation dans le plan avec 12 ddl/ élément. Dans la même année Belarbi [Bela.98b] a développé, un nouveau élément Quadrilatère avec rotation Drilling et aussi un nouvel élément Hexaédrique simple pour l'étude des plaques minces et épaisses [Bela.98c]. L'année suivante un développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques mince et épaisses [Bela.99]. L'analyse des compositions de forme en « barils » a bénéficié de l'évolution d'éléments traités [Assa.99]. Un élément tridimensionnel vérifiant les équations d'équilibre pour la flexion des plaques minces et épaisses a été développé [Maal.02]. Un retour sur les éléments rectangulaires avec rotation dans le plan [Mous.02], dans un but de les améliorer. L'année suivante Djoudi et Bahai ont développé un élément de coque sur baissée cylindrique basé sur le modèle en déformation désigné pour l'analyse géométrique linéaire et non linéaire des coques cylindriques. L'élément est un élément rectangulaire dans le plan ayant seulement les 5 degrés de liberté essentiels dans chaque nœud. Le champ des déplacements de l'élément satisfait les conditions des modes du corps rigide. L'efficacité de l'élément est démontrée dans l'analyse linéaire et non linéaire géométrique des structures coques, cet élément a été aussi utilisé dans le calcul des fréquences naturelles des coques cylindriques [Djou.03]. Les mêmes auteurs [Djou.04a] ont développé un élément de coque cylindrique pour le calcul des fréquences propres de panneaux cylindriques et des cylindres complets. Djoudi et Bahai [Djou.04b] se sont en suite intéressés à l'analyse des vibrations des panneaux cylindriques avec ouvertures et l'influence de ces dernières sur le comportement dynamique des structures citées. Retour sur les éléments pour l'analyse des problèmes anti-plans, Belounar et Guenfoud [Belo.05] ont développé un nouvel élément fini rectangulaire basé sur l'approche de déformation pour la flexion des plaques. Cet élément se trouve numériquement plus efficace que le déplacement correspondant basé sur l'élément. Sa précision est évaluée à travers une série de tests liés aux plaques minces et épaisses. En même année [Bela.05] un nouvel élément, basé sur le modèle de déformation, a été développé. L'élément membranaire triangulaire à trois degrés de liberté par nœud présente de très bonnes performances et peut être utilisé dans divers problèmes pratiques. Récemment, un intéressement pour le développement d'éléments secteurs par Bourezane [Bour.06]. L'année suivante [Maal.07] traite de la formulation et de l'évaluation d'un nouvel élément fini membranaire rectangulaire, pour l'analyse des problèmes plans de l'élasticité linéaire. Il possède seulement les deux degrés de liberté nécessaires par nœud. Un nouvel élément fini parallélépipède, simple et efficace (Strain Based Parallelepiped 8-nodes Condensed). Cet élément peut être utilisé pour l'analyse de trois dimensions et également des problèmes pour la flexion des plaques minces et épaisses. Des tests sur des problèmes classiques

ont été examinés. Cet élément a une meilleure performance par rapport à celle basée sur le modèle de déplacement [Hama.10]. Himeur et Guenfoud ont développé un élément fini de plaque triangulaire d'élasticité plane développé en perspective de construction des éléments de coques. Sa formulation utilise des concepts relatifs à l'approche en déformation, au quatrième nœud fictif, à la condensation statique, à l'intégration analytique et se base sur les hypothèses de la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff). La démarche adoptée a permis d'aboutir à un élément fini de plaque (HIMEUR) concurrentiel, robuste et performant [Hime.11]. Rebiai et Belouar ont développé un nouvel élément fini de type membranaire pour l'analyse linéaire et non linéaire des structures. Le champ de déplacement de cet élément a été développé en utilisant l'approche en déformation. Cet élément est basé sur des fonctions assumées pour les différentes composantes de déformation, tout en satisfaisant l'équation de compatibilité. Cet élément fini rectangulaire nommé SBREDR (Strain Based Rectangular Element with Drilling Rotation) possède trois degrés de liberté dans chacun des quatre nœuds de coin (deux translations et une rotation dans le plan), et les fonctions de déplacement de cet élément développé satisfaisaient la représentation exacte des mouvements du corps rigide. Pour l'analyse elasto-plastique les trois critères de VonMises, Tresca et Mohr-Coulomb sont adoptés, et les deux méthodes contraintes initiale et déformation initiale sont employés [Rebi.13].

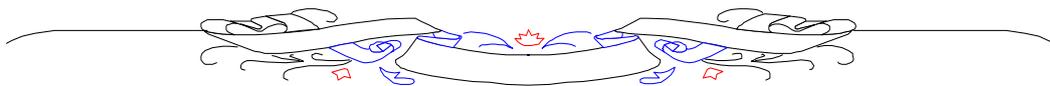
### 1.2.2 Les éléments isoparamétriques

La formulation isoparamétrique demeure une place très importante dans le domaine des éléments finis. Pour cette raison, un nombre considérable de chercheurs ont choisi de donner plus d'efforts et de travailler dans ce domaine qui permet de produire plusieurs types d'éléments de formes irrégulières très utiles dans la modélisation. L'élément isoparamétrique quadrilatère est le plus simple élément de la famille des éléments isoparamétriques. Ergatoudis et al ont développé des fonctions de forme pour formuler la matrice de rigidité de l'élément quadrilatère isoparamétrique. L'élément isoparamétrique quadrilatère plane est utilisé pour développer l'élément de coque quadrilatère plat [Erga.68]. En outre, l'élément finis isoparamétrique quadratique a été appliqué dans la mécanique linéaire de la rupture des plaques en flexion et les coques générales [Bars.75]. En ce document l'approche numérique est appliquée à un élément isoparamétrique de membrane de huit-nœud mais devrait être valide pour n'importe quel genre d'élément fini [Bjor. 84]. En 1985, des dérivés analytiques pour des matrices des éléments finis, en respectant la conception de variables, sont décrits. Ces dérivés sont faits en détail pour un élément membranaire

isoparamétrique à 8 nœuds [Bjor. 85]. Durant l'année 1985, Jones et al ont développé une approche (nommée, *la méthode hybride contour*) en utilisant des éléments isoparamétriques dans l'analyse des contraintes élastiques et mécanique de la rupture élastique-plastique [Jone.85]. L'analyse géométriquement non linéaire élasto-plastique des problèmes en 2D de mécanique structurale, basée sur l'application des éléments finis isoparamétriques dégénérés, est effectuée [Krej. 91]. Cheung et Wanji ont développé une méthode hybride raffinée basée sur une formulation variationnelle et une approche orthogonale pour les éléments plans isoparamétriques [Cheu. 92]. Dans le présent article un élément fini isoparamétrique quadrilatère est développé qui est capable de prédire les contraintes interlaminaires et les effets locaux. Plusieurs exemples linéaires et non linéaires sont présentés pour illustrer la performance du modèle numérique développé [Grut. 94]. L'élément fini quadrilatère est formulé pour représenter une surface courbée élastique (ou non élastique) géométriquement non linéaire. L'élément isoparamétrique proposé est d'épaisseur constante, et suppose un critère contrainte-plane [Gosli.96]. Kikuchi et al. ont présenté une modification d'un élément quadrilatère à 8 nœuds qui est largement utilisé dans l'analyse des éléments finis. Ils ont proposé cet élément qui peut représenter des polynômes quadratiques isoparamétriques cartésiennes et quand il est de forme isotrope bilinéaire. Ils ont constaté que les résultats étaient en bon accord avec la formulation de base d'un élément à 8 nœuds. En outre, cet élément a donné de bons résultats pour les éléments d'ordre supérieur et pour les éléments en trois dimensions (3-D) [Kiku.99]. L'année 2001 Bolzon, a développé une formulation d'un élément fini triangulaire avec une interface intégrée via la cartographie isoparamétrique [Bolz.01]. Barlets et al. (2004) misent en place un programme court Matlab pour intégrer une méthode souple des éléments finis isoparamétriques. Dans les domaines 2-D avec des frontières courbes, de problèmes élastiques ayant ordre quadratique ont été prises en compte. Ils ont incorporé des éléments triangulaires et quadrilatères qui ont permis de raffiner le maillage. Ils ont fourni des exemples numériques pour l'équation de Laplace avec conditions aux limites mixtes pour indiquer la flexibilité des éléments finis isoparamétriques [Barl.04]. Un nouveau cadre pour l'évaluation de la sensibilité de la forme de Von Mises fonction de contrainte en utilisant une formulation des éléments finis isoparamétriques [Jame.12].



*NOTION DE BASE DE LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS*



## Chapitre 02: NOTION DE BASE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### 2.1. Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) a mis au point dans une clé, la technologie indispensable dans la modélisation et la simulation de systèmes d'ingénierie de pointe dans divers domaines comme le logement, le transport, les communications, et ainsi de suite. Dans la construction de tels ingénierie aux systèmes avancés, les ingénieurs et les concepteurs passent par un processus sophistiqué de modélisation, de simulation, visualisation, analyse, conception, prototypage, tests, et enfin, la fabrication. Noter que beaucoup de travail est impliqué avant la fabrication du produit final ou du système. C'est pour assurer la maniabilité du produit fini, ainsi que pour la rentabilité. Ce processus est souvent de nature itérative, ce qui signifie que certaines des procédures sont répétées sur la base des résultats obtenus au courant stade, de façon à obtenir une performance optimale au moindre coût pour le système à construire.

Par conséquent, les techniques liées à la modélisation et la simulation de manière rapide et efficace joue un rôle de plus en plus important, résultant de l'application de la MEF étant multiplié à de nombreuses reprises pour cette raison. La MEF a été d'abord utilisé pour résoudre les problèmes de l'analyse des contraintes, et a depuis été appliquée à de nombreux autres problèmes comme l'analyse thermique, analyse des flux de fluide, analyse piézo-électrique, et bien d'autres. Fondamentalement, l'analyste cherche à déterminer la répartition d'un domaine variable comme le déplacement dans l'analyse des contraintes, la température ou le flux de chaleur dans une analyse thermique, la charge électrique dans l'analyse électrique, et ainsi de suite. La MEF est une méthode numérique recherchant une solution approximative de la distribution de champ variable dans le domaine du problème qui est difficile à obtenir analytiquement. Il est obtenu en divisant le domaine du problème en plusieurs éléments, lois physiques sont ensuite appliquées à chaque petit élément, dont chacun a en général une très simple géométrie [Lui.03].

Pratiquement la MEF C'est une méthode mathématique d'intégration numérique des équations aux dérivées partielles mises sous forme variationnelle.

Tous les problèmes de calcul de structures élastiques se ramènent à un système d'équations aux dérivées partielles qu'il est souvent impossible de résoudre analytiquement.

## 2.2. Définition d'un élément fini

### 2.2.1. Les nœuds géométriques

Nous choisissons un ensemble de  $n$  points, sur le domaine  $V$ , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés *nœuds géométriques*, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine  $V$  par un ensemble d'éléments  $V^e$  de formes relativement simples. Chaque élément  $V^e$  doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des *nœuds géométriques* qui appartiennent à cet élément, c'est -à-dire qui sont situés sur  $V^e$  et sur sa frontière [Mloi.81].

### 2.2.2. Attributs d'un élément fini

Un découpage artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu en éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- ✚ **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangulaire ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.
- ✚ **Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (Loi de Hooke isotrope ...etc.).
- ✚ **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres ; ils occupent les sommets, les milieux des arêtes et faces .....etc.
- ✚ **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (en général le champ de déplacements ou champ de potentiels) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.
- ✚ **Forces nodales** : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température ....etc.).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur de force.

### 2.2.3. Représentation des éléments finis

Nous distinguons trois familles correspondantes à des différents types d'éléments finis à une, deux, trois dimensions, chaque élément est identifier par sa forme géométrique, le type de courbe ou de surface qui forme sa frontière, ainsi que le nombre des nœuds géométriques.

- a) **Les éléments unidimensionnels** : barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile.
- b) **Les éléments bidimensionnels** : élasticité plane, plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- c) **Les éléments tridimensionnels** : éléments de volume ou coques épaisses.
- d) **Les éléments axisymétriques** : qui constituent une classe bien particulière :  
toutes à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique ou méridienne courbe.

## 2.3. Procédure de la méthode des éléments finis

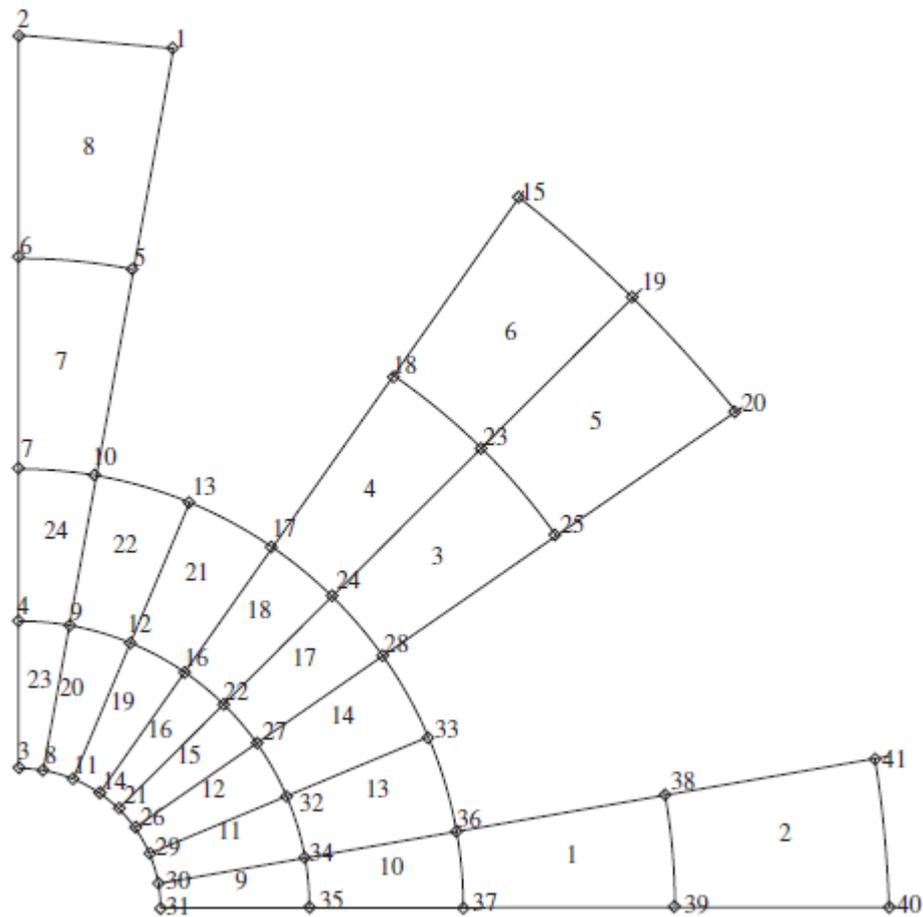
Les procédures standard de la MEF peuvent être résumées comme suit :

### 2.3.1. Discrétisation de domaine

Le corps solide est divisé en  $N_e$  éléments. La procédure est souvent appelée maillage, ce qui est généralement réalisée en utilisant ce qu'on appelle des pré-processeurs. Cela est particulièrement vrai pour les complexes géométries. La figure 2.1 montre un exemple de maillage pour un solide à deux dimensions.

Le pré-processeur génère un numéro unique pour l'ensemble des éléments et des nœuds du solide ou de la structure d'une manière appropriée. Un élément de liaison est formé par les nœuds d'une manière prédéfinie conforme afin de créer la connexion de l'élément. Tous les éléments forment ensemble la totalité du domaine du problème, sans aucun espace ou chevauchement. Il est possible que le domaine se composent de différents types d'éléments avec différents nombres de nœuds, aussi longtemps qu'ils sont compatibles (pas de trous et chevauchement; la condition admissible (a) exigé par le principe de Hamilton) sur les frontières entre les différents éléments.

La densité du maillage dépend de l'exigence d'exactitude de l'analyse et les ressources de calcul disponibles. En règle générale, un maillage plus fine donnera des résultats qui sont plus précis, mais augmentera le coût de calcul. En tant que tel, le maillage n'est généralement pas uniforme, avec un maillage plus fin utilisé dans les zones où le gradient de déplacement est plus grande ou lorsque la précision est essentielle à l'analyse. Le but de la discrétisation du domaine est de rendre plus facile à assumer le schéma du champ de déplacement. [Lui.03].



**Figure 2.1** : Exemple d'un maillage avec des éléments et des nœuds correctement numérotés.

## 2.3.2. Interpolation déplacement

### 2.3.2.1. Introduction

La mécanique linéaire des solides obéit à une forme forte dont l'ordre des dérivées vaut 2 ( $2m = 2$ ), ordre qui est réduit à 1 dans la forme faible (principe des déplacements virtuels). Dans un tel cas, la convergence demande une interpolation  $C^1$  dans l'élément, une continuité  $C^0$  aux frontières et un polynôme complet au degré 1 au moins (donc linéaire). Construire des fonctions d'interpolation remplissant ces conditions est généralement aisé. En fait, outre l'élasticité, beaucoup de problèmes physiques ont une forme différentielle d'ordre deux : conduction thermique, écoulement souterrain, torsion de Saint-Venant, potentiel électrique, fluide parfait, certaines théories de structures, etc.

Il en résulte que les éléments finis à continuité  $C^0$  aux frontières ont été (et sont encore) les plus étudiés et les plus employés. D'où l'appellation simplifiée d'élément  $C^0$ , d'interpolation  $C^0$ , de continuité  $C^0$ , etc [Fran.91].

### 2.3.2.2. Interpolation 1-D

L'élément fini est un segment de droite de longueur  $2a$  au centre duquel on choisit l'origine des abscisses  $x$  (fig. 2.2a). Il est souvent avantageux d'utiliser la coordonnée naturelle (fig. 2.2b)

$$\xi = \frac{x}{a} \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (2.1)$$

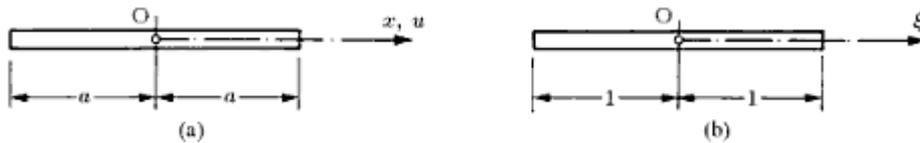
Dans l'interpolation paramétrique, l'approximation polynomiale est

$$u(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots + b_{p+1}x^p = \sum_{i=1}^{p+1} b_i x^{i-1} = P(x)$$

Pour un élément fini à  $n_n^e$  ( $\equiv n_d^e$ ) nœuds, on retient les  $n_n^e$  premiers termes

$$(n_n^e \geq 2 ; n_n^e = n_p = p + 1).$$

Les nœuds sont choisis équidistants.



**Fig. 2.2 :** Élément 1-D: (a) coordonnée cartésienne  $x$  ( $-a \leq x \leq a$ ) ; (b) coordonnée naturelle

$$\xi \quad (-1 \leq \xi \leq 1).$$

(La position des nœuds dépend de l'interpolation choisie ; fig. 2.3.)

Les fonctions d'interpolation sont très simples à construire: ce sont les polynômes de degré

$p = n_n^e - 1$ , successivement unités en un nœud et nuls aux  $n_n^e - 1$  autres nœuds. La figure 2.3 montre ces fonctions pour des éléments à 2, 3 et 4 nœuds, conduisant à des interpolations linéaire, quadratique et cubique.

On recourt rarement à une interpolation supérieure au degré  $p = 3$ , car la matrice de rigidité croît en complexité ; de plus, clic est pleine et augmente la largeur de bande lors de l'assemblage.

**Remarque**

1. Les fonctions de la figure 1.3 sont des polynômes d'interpolation de Lagrange, dont l'expression générale est

$$L_i^p(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_p)(x - x_{p+1})}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_p)(x_i - x_{p+1})} \quad (2.2)$$

$L_i^p(x)$  est un polynôme de degré  $p$ , qui passe par  $p$  points  $x_j (j \neq i)$  et vaut 1 au point restant  $x_i$ , soit,

$$L_i^p(x_j) = \delta_{ij} \quad (2.3)$$

Avec (1)  $\xi = x/a$ , il est clair que  $L_i^p(x) = L_i^p(\xi)$ . Enfin, la somme des fonctions d'interpolation doit être égale à l'unit

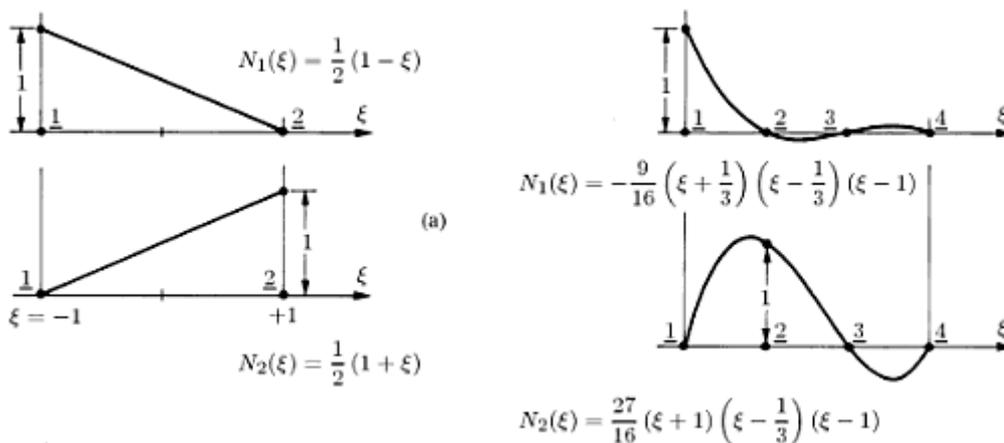
$$\sum_{i=1}^{p+1} L_i^p = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i = 1 \quad (2.4)$$

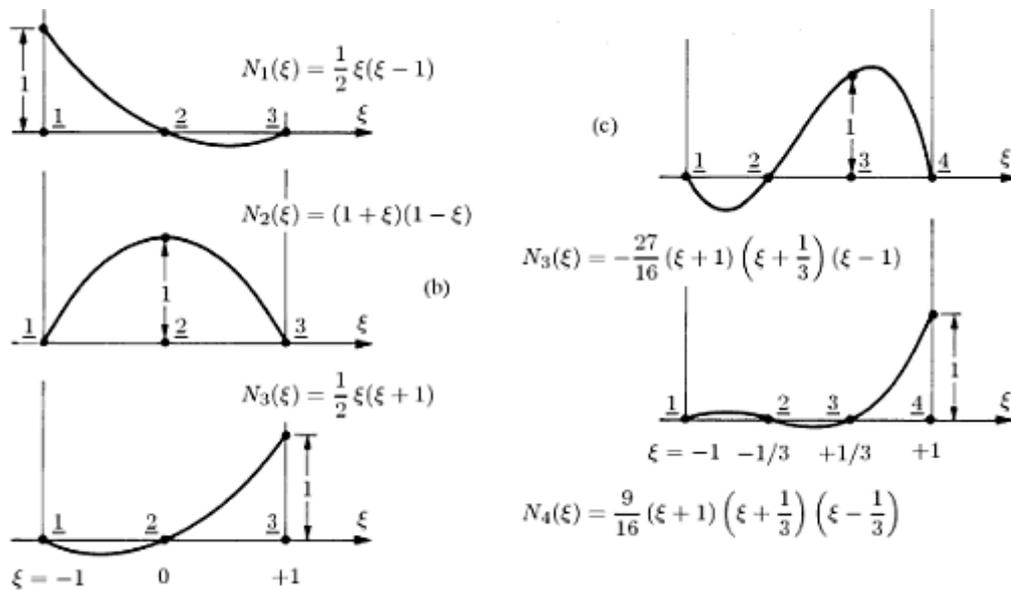
afin de représenter le mode rigide ( $u = cste$ ).

**2.3.2.3. Interpolation 2-D**

**2.3.2.3.1. Continuité aux frontières**

On doit, rappelons-le, assurer la continuité tout le long d'une frontière séparant deux éléments, à l'aide des seules valeurs nodales communes.



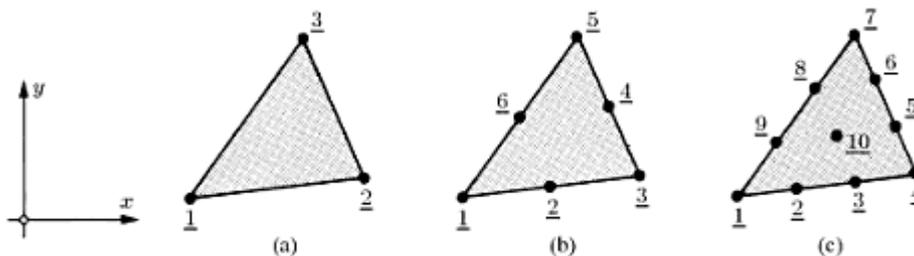


**Fig. 2.3 :** Fonctions d'interpolation lagrangiennes : (a) linéaires ; (b) paraboliques ; (c) cubiques.

Pour une interpolation polynomiale, le champ inconnu est aussi un polynôme le long d'une frontière. Par conséquent, avec des polynômes complets, on assure la continuité  $C^0$  si, pour un polynôme de degré  $p$  sur une frontière, on place  $p + 1$  nœuds le long de cette frontière [Fran.91].

**2.3.2.3.2. Éléments finis triangulaires**

On construit quasi spontanément des éléments triangulaires à  $n_n^e = (p+1)(p+2)/2$  nœuds (fig. 2.4), correspondant à un polynôme complet de degré  $p$  en les variables indépendantes  $x$  et  $y$ , avec continuité  $C^0$  du même degré sur chacune des trois frontières.



**Fig. 2.4 :** Éléments finis triangulaires avec continuité  $C^0$ :(a) linéaire ; (b) quadratique ; (c) cubique.

Le polynôme d'interpolation s'écrit (composante  $u$  par exemple)

$$u(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + \dots + b_{(p+1)(p+2)/2} = P(x, y) \tag{2.5}$$

et ses termes apparaissent naturellement grâce au triangle de Pascal (fig. 2.5).

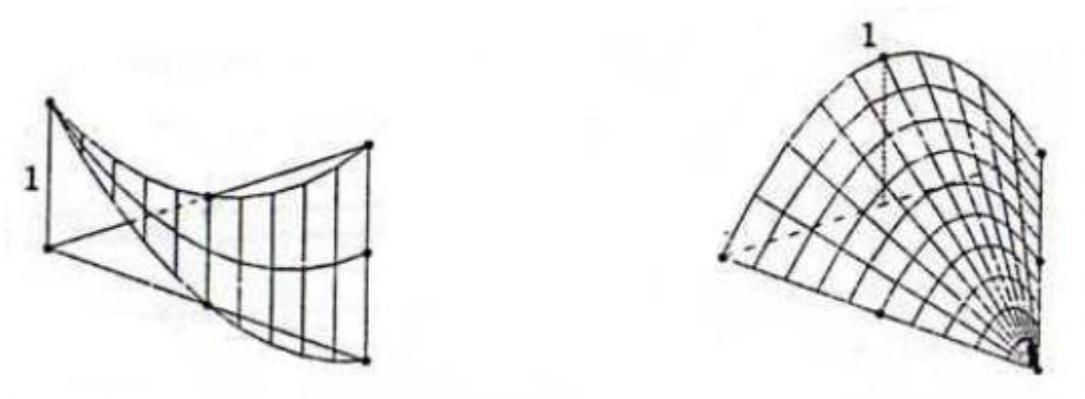
Triangle	Degré	$p$	Nombre de termes
1	constant	0	1
$x \quad y$	linéaire	1	3
$x^2 \quad xy \quad y^2$	quadratique	2	6
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	cubique	3	10
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	quartique	4	15
$x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5$	quintique	5	21
...	...	...	...

**Fig. 2.5 :** Triangle de Pascal.

Dans les éléments finis destinés aux calculs basés sur la convergence  $h$  on ne dépasse pratiquement jamais le degré 3. La matrice C peut toujours être inversée sans difficulté.

On peut aussi dessiner aisément les fonctions d'interpolation (fig. 2.6) et par suite en chercher les équations. On vérifie que leur somme vaut 1

$$\sum_{i=1}^{n_n^e} N_i = 1$$



**Fig.2.6 :** Fonctions d'interpolation du triangle quadratique.

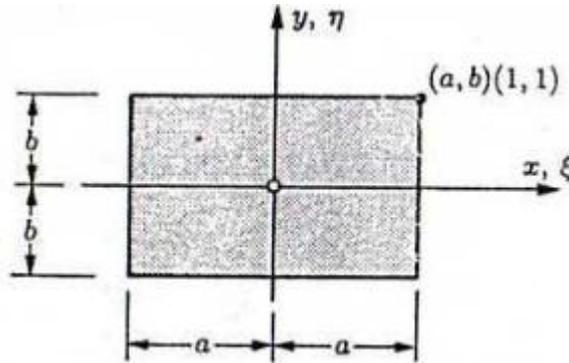
**2.3.2.3.3. Eléments finis rectangulaires**

Plaçant l'origine des coordonnées au centre de l'élément rectangulaire, de dimension  $2a \times 2b$ , on définit avantageusement les coordonnées naturelles

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \tag{2.6}$$

qui valent  $\pm 1$  sur les frontières du rectangle (fig. 1.7).

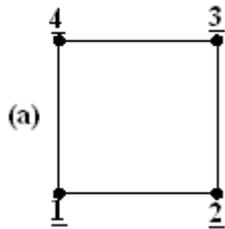
En partant de l'interpolation de Lagrange à une variable indépendante, on peut, pour les domaines rectangulaires, construire deux familles de fonctions d'interpolation.



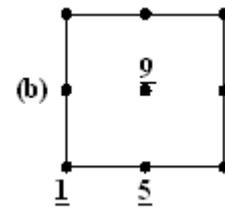
**Fig. 2.7:** Élément rectangulaire et ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  et naturelles  $(\xi, \eta)$ .

➤ **Famille de Lagrange**

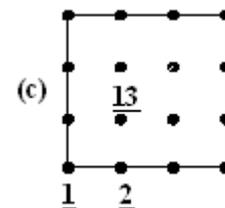
Les nœuds sont placés aux intersections des lignes d'un quadrillage régulier (fig. 2.8) et les fonctions d'interpolation peuvent s'obtenir par le produit des polynômes de Lagrange de chacune des coordonnées  $x$  et  $y$ , ou  $\xi$  et  $\eta$ . L'élément cubique est, déjà, rarement utilisé [Fran.91].



$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= L_1^1(\xi)L_1^1(\eta) = (1-\xi)(1-\eta) / 4 \\
 N_2(\xi, \eta) &= L_2^1(\xi)L_1^1(\eta) = (1+\xi)(1-\eta) / 4 \\
 N_3(\xi, \eta) &= L_2^1(\xi)L_2^1(\eta) = (1+\xi)(1+\eta) / 4 \\
 N_4(\xi, \eta) &= L_1^1(\xi)L_2^1(\eta) = (1-\xi)(1+\eta) / 4
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$



$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= L_1^2(\xi)L_1^2(\eta) = \xi\eta(1-\xi)(1-\eta) / 4 \\
 N_5(\xi, \eta) &= L_2^2(\xi)L_1^2(\eta) = -\eta(1+\xi^2)(1-\eta) / 2 \\
 N_9(\xi, \eta) &= L_2^2(\xi)L_2^2(\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

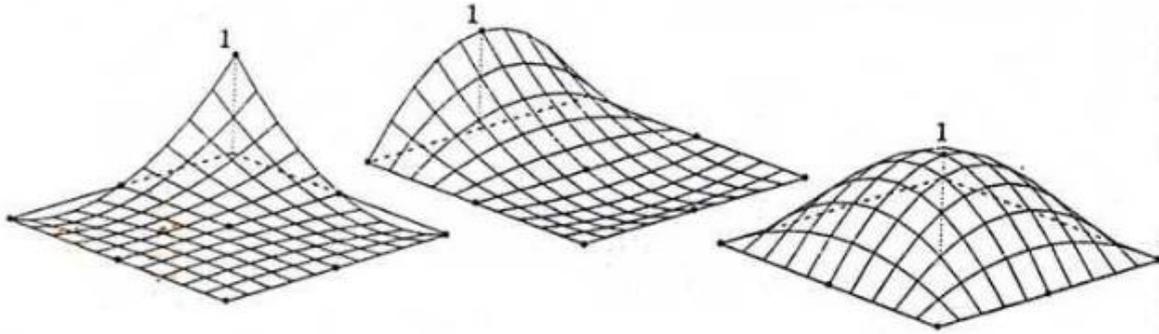


$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= L_1^3(\xi)L_1^3(\eta) \\
 N_2(\xi, \eta) &= L_2^3(\xi)L_1^3(\eta) \\
 N_{13}(\xi, \eta) &= L_2^3(\xi)L_2^3(\eta)
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

**Fig.2.8 :** Famille des rectangles de Lagrange et quelques fonctions d'interpolation :  
 (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bicubique.

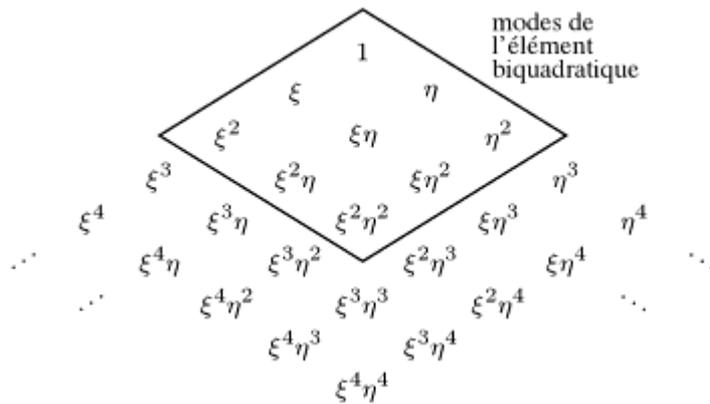
La figure 2.9 montre les fonctions d'interpolation typiques de l'élément quadratique.

La fonction du nœud central s'appelle une **fonction bulle**, pour des raisons évidentes ; elle s'associe à des degrés de liberté internes qui peuvent être condensés. En tout point, la somme des fonctions vaut 1.



**Fig. 2.9 :** Fonctions d'interpolation typiques de l'élément biquadratique

L'interpolation paramétrique  $u = Pp$  comprend les termes contenus dans un losange issu du triangle de Pascal, comme l'indique la figure 2.10. Le polynôme est complet jusqu'au degré  $p$ , puis incomplet jusqu'au degré  $2p$ . Sur des lignes  $x$  (ou  $\zeta$ ) = cste, ou  $y$  (ou  $\eta$ ) = cste, l'interpolation est complète au degré  $p$ .

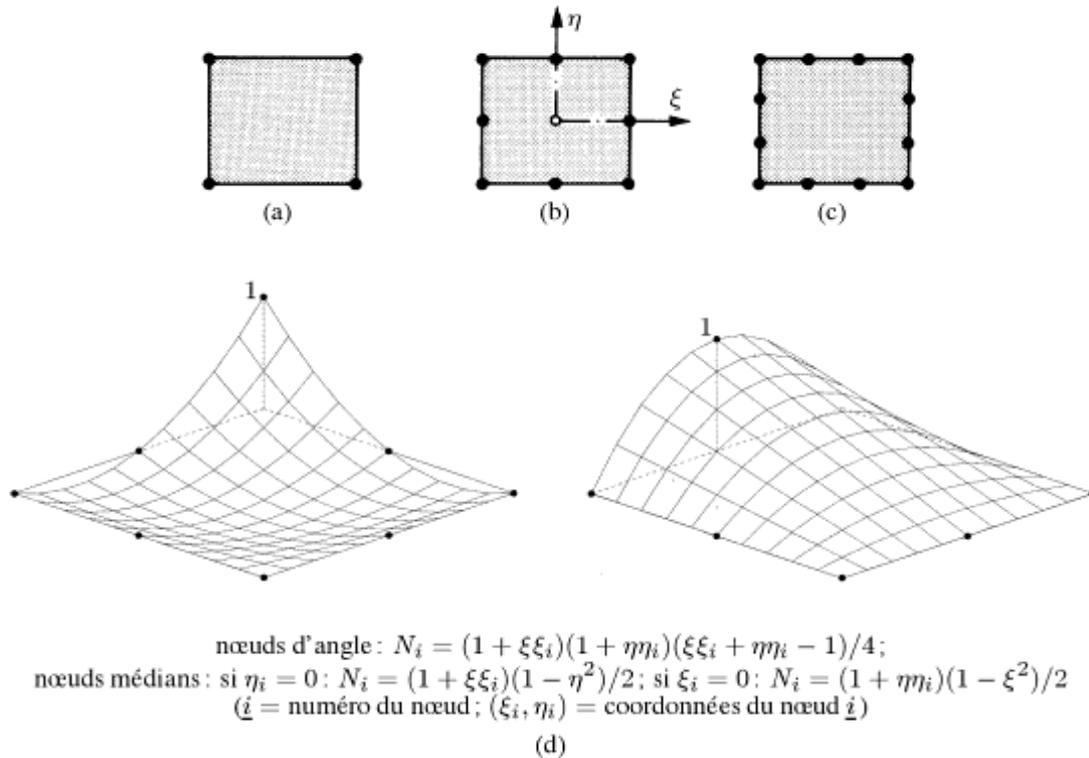


**Fig. 2.10 :** Termes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Lagrange.

➤ **Famille de Serendip**

Ces éléments sont construits sans nœuds internes (fig. 2.11). Ils sont donc plus simples que les précédents et, souvent, préférés. Les fonctions d'interpolation sont faciles à visualiser. En tout

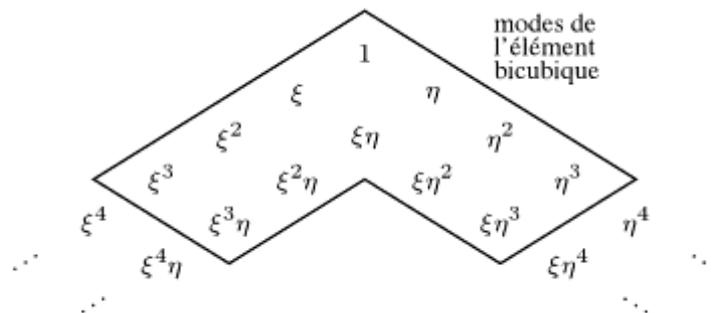
point d'un élément, leur somme est encore unité. L'élément bilinéaire est identique à celui de la famille de Lagrange [Fran.91].



**Fig. 2.11 :** Famille des rectangles de Serendip : (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bicubique ; (d) fonctions d'interpolation de l'élément biquadratique.

L'interpolation paramétrique est encore issue d'un triangle de Pascal (fig. 2.12).

Tant que  $p \leq 3$ , le polynôme, de degré  $p + 1$ , est complet au degré  $p$ . Quel que soit  $p$ , il demeure complet au degré  $p$  sur les lignes  $x$ (ou  $\zeta$ ) = cste, ou  $y$ (ou  $\eta$ ) = cste. En pratique, on ne dépasse guère  $p = 3$ .



**Fig. 2.12 :** Modes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Serendip.

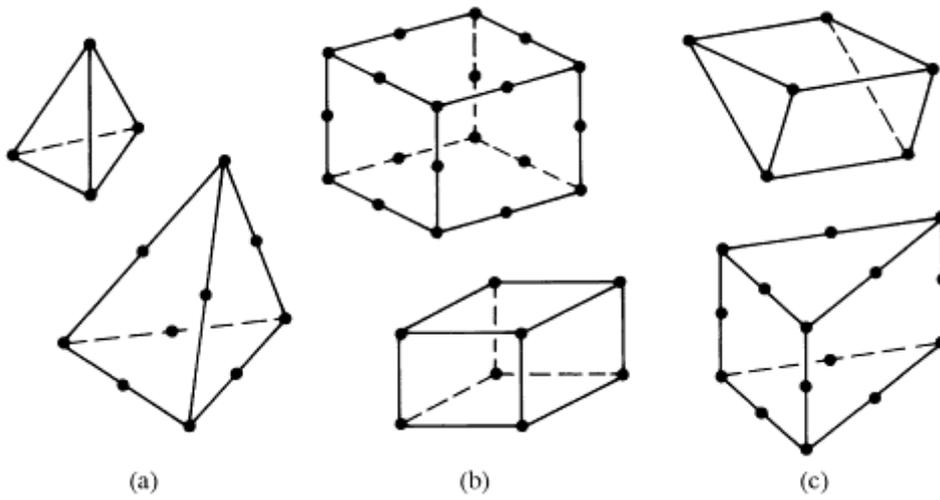
### Remarques

1. Les coordonnées  $(x, y)$  ou  $(\zeta, \eta)$  d'un domaine rectangulaire ont un caractère local.
2. Les polynômes devant être au moins complets au degré  $p = m$ , il est permis d'omettre des termes dans les degrés supérieurs.
3. D'ordinaire, il faut éviter les dissymétries vis-à-vis des coordonnées  $(x, \dots)$  ou  $(\zeta, \dots)$ , sinon on favorise l'une d'entre elles au détriment d'une autre et l'élément a un comportement déséquilibré. Plus généralement, la structure des polynômes doit être conservée lors d'une transformation des coordonnées (translation et rotation) ; cette propriété, appelée *isotropie géométrique*, est garantie pour les polynômes complets, ou incomplets mais de structure symétrique.
4. Lorsque le champ est vectoriel, les polynômes doivent être tels que les composantes de la déformation soient du même degré quand elles sont de même nature, sinon on favorise une composante par rapport à l'autre et, comme précédemment, on déséquilibre la réponse de l'élément. Par exemple, en élasticité plane, les composantes  $\xi_x$  et  $\xi_y$  doivent être de même degré (donc  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  aussi) .
5. Poussant plus avant la même idée, si, dans une composante du tenseur déformation, interviennent plusieurs composantes du déplacement (couplage), alors chaque terme devrait être du même degré. En élasticité plane,  $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$  couple  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  qui, dérivés une fois, doivent donc être interpolés au même degré (même exigence que ci-dessus). Par contre, dans une poutre de Timoshenko, où  $\beta = dv / dx - \alpha$ , le champ  $v(x)$  devrait être d'un degré supérieur au champ  $\alpha(x)$  [Fran.91].

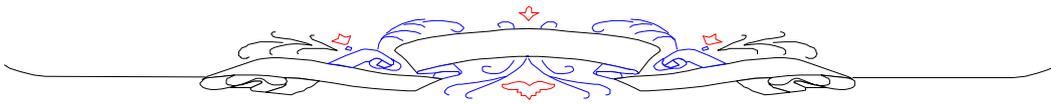
#### 2.3.2.4. Interpolation 3-D

On élabore, de la même manière, des éléments tridimensionnels, en forme de tétraèdre, parallélépipède rectangle (hexaèdre), prisme à base triangulaire, etc. (fig. 2.13).

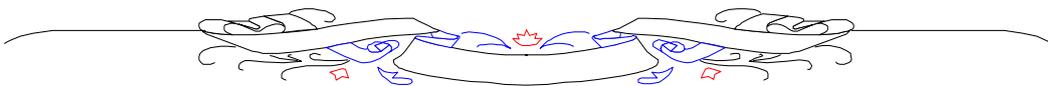
La continuité aux frontières a maintenant lieu sur les faces : les déplacements nodaux doivent définir le champ inconnu univoquement en tous les points d'une face [Fran.91]



**Fig. 2.13** : Eléments tridimensionnels : (a) tétraèdres à 4 et 10 nœuds ;  
(b) briques à 8 et 20 nœuds ; (c) prismes à 6 et 15 nœuds.



*ELASTICITE PLANES*



## Chapitre 03: ELASTICITE PLANES

### 3.1. Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode générale d'analyse structurale dans laquelle une structure continue est remplacée par un nombre fini de points « nœuds ».

Tous les matériaux possèdent à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est-à-dire que si les forces extérieures, provoquant la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que les forces qui lui donnent naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite « théorie d'élasticité » qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces.

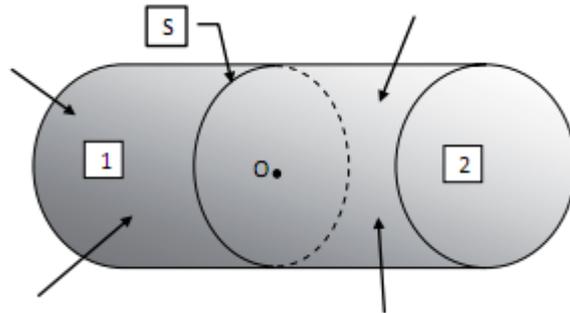
Nous présentons dans ce chapitre, une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans le cas bidimensionnel. Dans ce cas dérive les cas particuliers de l'élasticité plane (état plan de déformation, état plan de contrainte).

### 3.2. Les équations générales d'élasticité

#### 3.2.1. Les contraintes

##### 3.2.1.1. Notion de contrainte

Soit un solide en équilibre comportant 2 parties 1 et 2 limitées par une section S,



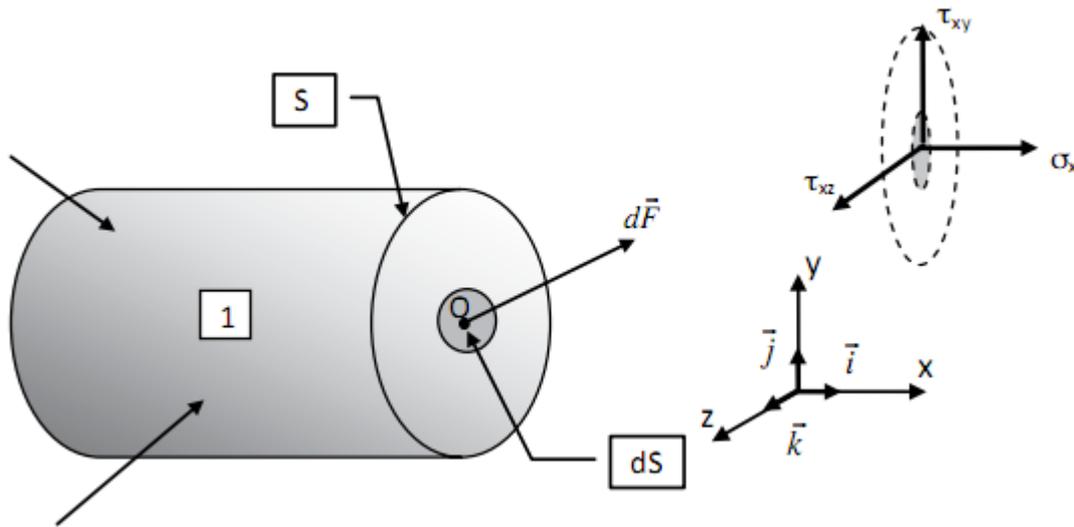
**Figure 3.1:** Équilibre d'un solide.

Son état d'équilibre permet d'établir que la somme vectorielle des forces issues de 1 et agissant sur 2 d'une part, et de 2 agissant sur 1 d'autre part, est nulle :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} .$$

L'équilibre de chacune des parties, 1 par exemple, est donc caractérisé par l'action des forces extérieures de volume et de surface qui lui sont appliquées mais également par les forces intérieures exercées par la partie 2 sur la section S.

On définit donc le vecteur contrainte  $\vec{f}_1$  comme étant la limite de  $\frac{d\vec{F}}{dS}$  lorsque la surface  $dS$  tend vers zéro. Quand  $dS$  est considérée dans le plan  $yz$ , ce vecteur  $\vec{f}_1$  peut-être décomposé en trois composantes : une normale à cette surface et deux dans son plan. La première, égale à  $\sigma_{xx} = \sigma_x = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_x}{dS}$ , est appelée contrainte normale alors que les deux autres, notées respectivement  $\tau_{xy} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_y}{dS}$  et  $\tau_{xz} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_z}{dS}$  sont dites de cisaillement.



**Figure 3.2:** notion de contraint

En répétant l'opération pour les plans  $xz$  ( $\vec{f}_2$ ) et  $xy$  ( $\vec{f}_3$ ), deux contraintes normales et quatre de cisaillement viennent s'ajouter aux trois précédentes, soit  $\sigma_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$  pour le premier et  $\sigma_{zz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  pour le second. Finalement, les vecteurs contraintes ont pour expressions :

$$\vec{f}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}; \vec{f}_2 = \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}; \vec{f}_3 = \begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

La convention de signes la plus souvent retenue dans les logiciels éléments finis est d'associer une contrainte normale positive à une traction [Caze.10].

### 3.2.1.2. Équations internes

L'étude de l'équilibre d'un élément fini infiniment petit de côtés  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , soumis à des forces internes de volume  $f_x^v, f_y^v, f_z^v$  permet d'établir dans un premier temps la réciprocité des contraintes de cisaillement. En effet et en se basant sur l'équilibre des moments, on peut déduire pour :

L'axe z

$$\sum M_{/Oz} = 0 \Leftrightarrow \left[ \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \right] \frac{dx}{2} + (\tau_{xy} dydz) \frac{dx}{2} - \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \right] \frac{dy}{2} - (\tau_{yx} dx dz) \frac{dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} - \tau_{yx} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2}}_{\approx 0} - \underbrace{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}}_{\approx 0} = 0$$

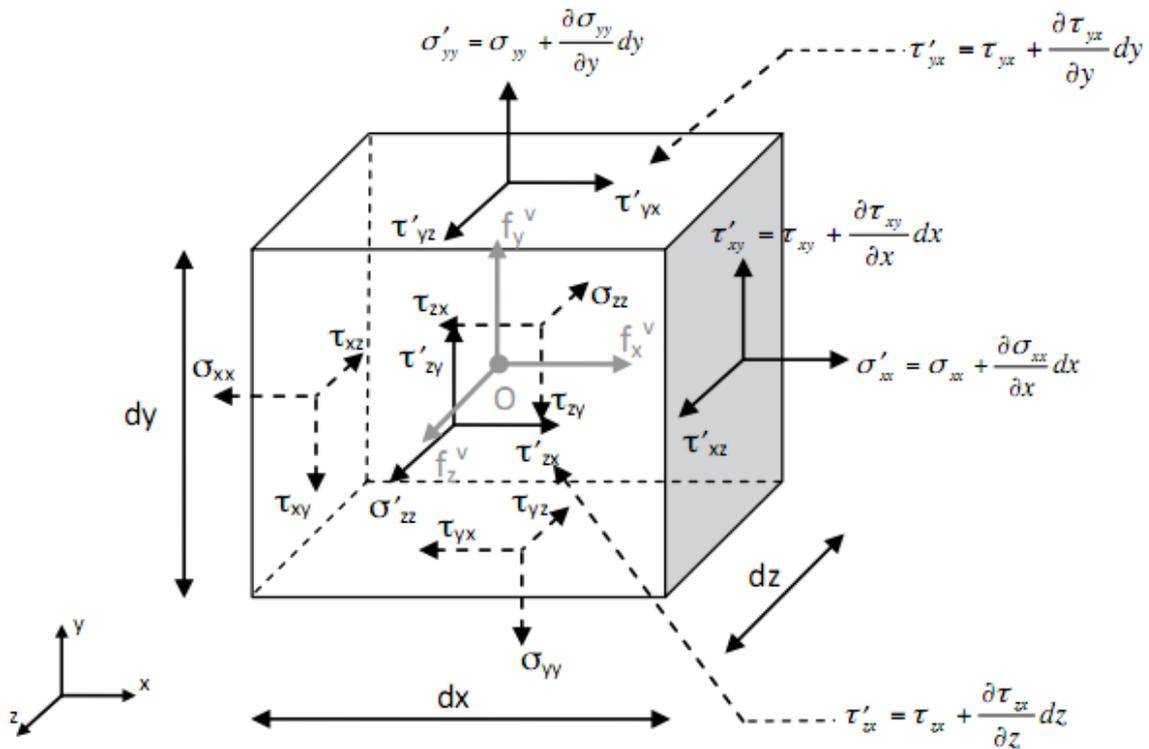


Figure 2.3: Équilibre de volume.

D'où

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.2)$$

Et les deux autres axes  $x$  et  $y$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ et } \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (3.3)$$

Le nombre de contraintes de cisaillement se réduit donc à trois. Les six valeurs caractérisant l'état de contrainte peuvent alors être regroupées au sein d'un vecteur de composantes :

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\} \quad (3.4)$$

Maintenant et en effectuant la somme des efforts suivant  $x$ , l'équation d'équilibre correspondante permet également de montrer que:

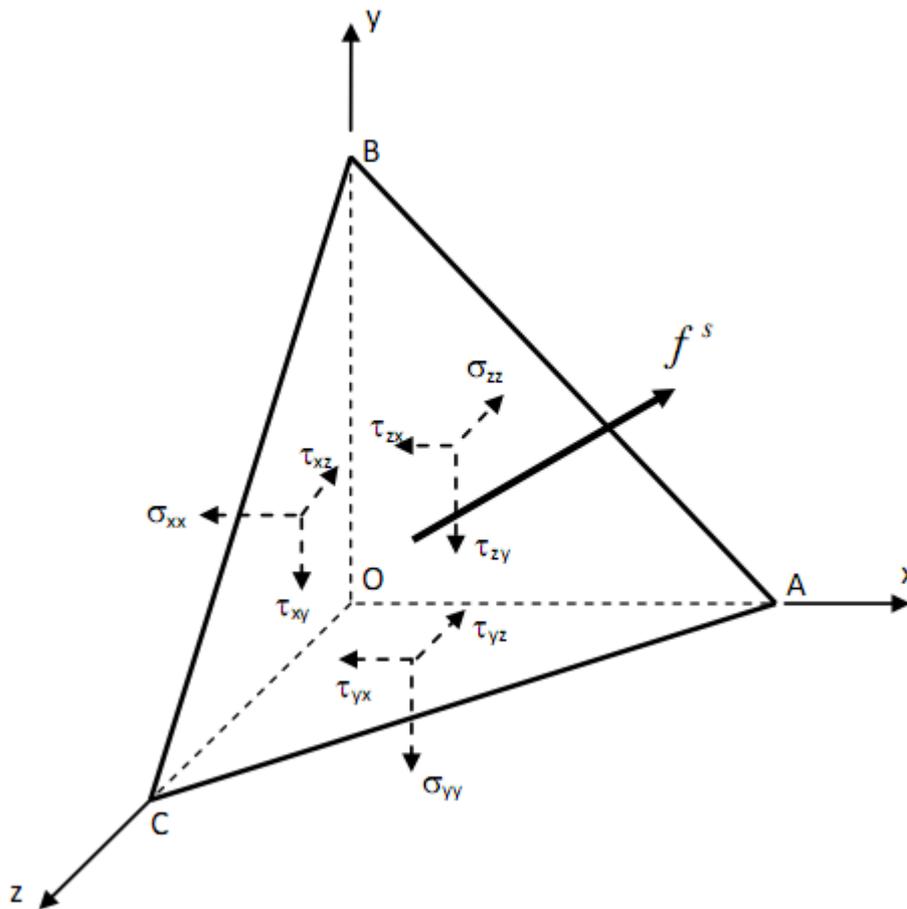
$$\begin{aligned} \sum F_{/x} = 0 &\Leftrightarrow \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ &+ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{xx} dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy + f_x^v dx dy dz = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x^v = 0 \end{aligned}$$

Soit après extension de l'opération aux deux autres axes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x^v &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y^v &= 0 \Leftrightarrow \text{div}(\sigma) + f = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^v &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ces trois équations sont généralement appelées équations d'équilibre de volume.

### 3.2.1.3.Équations externes



**Figure 3.4 :** Équilibre de surface.

Soit un tétraèdre OABC infiniment petit dont l'aire ABC, notée  $ds$ , constitue la surface du milieu solide.

Sachant qu'une charge répartie  $f^s$  de composantes  $\begin{Bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{Bmatrix}$  est appliquée sur cette surface et que les

cosinus directeurs de la normale au plan ABC sont notés  $l$ ,  $m$  et  $n$ , l'équilibre du tétraèdre se résume à un système de trois équations :

$$\begin{aligned} f_x^s ds &= l ds \cdot \sigma_{xx} + m ds \cdot \tau_{yx} + n ds \cdot \tau_{zx} \\ f_y^s ds &= l ds \cdot \tau_{xy} + m ds \cdot \sigma_{yy} + n ds \cdot \tau_{zy} \\ f_z^s ds &= l ds \cdot \tau_{xz} + m ds \cdot \tau_{yz} + n ds \cdot \sigma_{zz} \end{aligned}$$

Soit après simplification :

$$f_x^s = l.\sigma_{xx} + m.\tau_{yx} + n.\tau_{zx}$$

$$f_y^s = l.\tau_{xy} + m.\sigma_{yy} + n.\tau_{zy} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = [\sigma] \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$f_z^s = l.\tau_{xz} + m.\tau_{yz} + n.\sigma_{zz}$$

Ces équations d'équilibre de surface correspondent en fait aux conditions aux limites du système d'équations aux dérivées partielles (3.5).  $[\sigma]$  est appelé tenseur des contraintes.

### 3.2.1.4. Les équations de compatibilité

Quand on connaît les déplacements, il est simple de déterminer les déformations. Mais le problème inverse n'est pas aussi simple : 3 composantes pour le déplacement et 6 composantes pour le tenseur des déformations. On a donc 6 inconnues et trois équations : le problème n'a pas de solution unique. Cela est dû au mouvement du corps solide : Rotation d'ensemble, translation (Mécanique des milieux indéformables). Il existe des relations de compatibilité pour soulever ces indéterminations qui sont :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3.7)$$

Cette équation générale permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

## 3.2.2 Les déformations

### 3.2.2.1 Notion de déformation

L'action des forces extérieures sur un solide déformable entraîne pour chacun des points de sa géométrie un mouvement pouvant être décomposé en trois phases distinctes : une translation d'ensemble (mouvement de corps rigide en translation), une rotation d'ensemble (mouvement de corps rigide en rotation) et enfin une déformation pure.

La déformation qui correspond à un mouvement relatif par rapport à un référentiel donné, peut suivre plusieurs hypothèses comme celles des petites ou grandes déformations mais également être associée à des petits ou grands déplacements [Caze.10].

### 3.2. 2.2 Déplacements

Le mouvement d'un point de  $O$  vers  $O'$  caractérisé par le vecteur  $\vec{q}$  peut-être décomposé dans un système  $xyz$  en 3 composantes  $u, v, w$ , qui représentent les déplacements de ce point sur les axes de référence soit :

$$\vec{q} = u.\vec{i} + v.\vec{j} + w.\vec{k} \quad (3.8)$$

On définit par ailleurs la norme du déplacement comme étant :

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (3.9)$$

Ces déplacements  $u, v$  ou  $w$  sont généralement des fonctions de  $x$  pour les poutres, de  $x$  et  $y$  pour les plaques et coques, de  $x, y$  et  $z$  pour les solides.

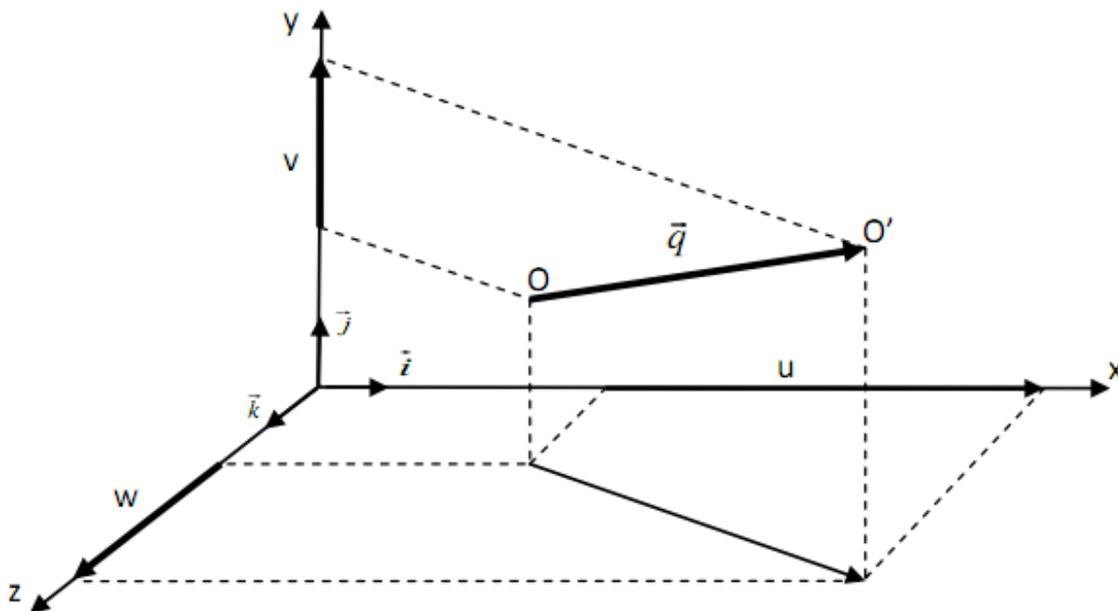


Figure 3.5: déplacement d'un point

### 3.2. 2.3. Relations entre déplacements et déformations

En considérant dans un premier temps un état plan de déformation dans le plan  $xOy$ .

Les déformations normales et distorsion angulaire peuvent être obtenues en posant que :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A'D' - AD}{AD} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dx + v + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A'D' - AD}{AD} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{dy + v + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - B'A'D' \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.11)$$

La généralisation de cette approche bidimensionnelle aux deux autres plans permettra d'obtenir :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.12)$$

d'où l'expression générale des composantes du vecteur des déformations :

$$\{\varepsilon\}^T = \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\} \quad (3.13)$$

L'expression (3.12) pourra également être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

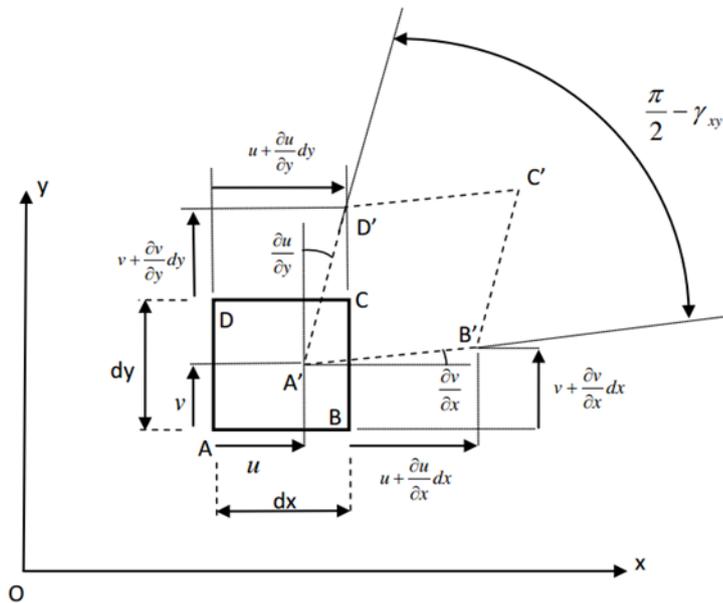


Figure 3.6: Déformations planes.

### 3.2. 3. Relations entre déformations et contraintes

Restant dans le domaine élastique linéaire, l'application de la démarche précédente aux deux autres axes  $y$  et  $z$ , amènerait inmanquablement à des résultats similaires (permutations croisées des indices  $x$ ,  $y$  et  $z$ ). De ce fait et toujours en raison de la linéarité, la relation tridimensionnelle entre déformations et contraintes normales peut être obtenue par superposition des trois états d'équilibre suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$  soit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right] \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

De plus, il est également possible via un essai de cisaillement pur de montrer qu'il existe des relations linéaires entre contraintes et déformations de cisaillement telles que :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \text{ avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.16}$$

D'où la relation finale entre déformations et contraintes :

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\} \text{ avec } [D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

### 3.2.4. Relations entre contraintes et déformations

L'inversion des expressions (3.15) et (3.16) permet de déduire les contraintes à partir des déformations, soit :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{xx} (1-\nu) + \nu (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{yy} (1-\nu) + \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] \\
\sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_{zz} (1-\nu) + \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\
\tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\} \tag{3.19}$$

Avec

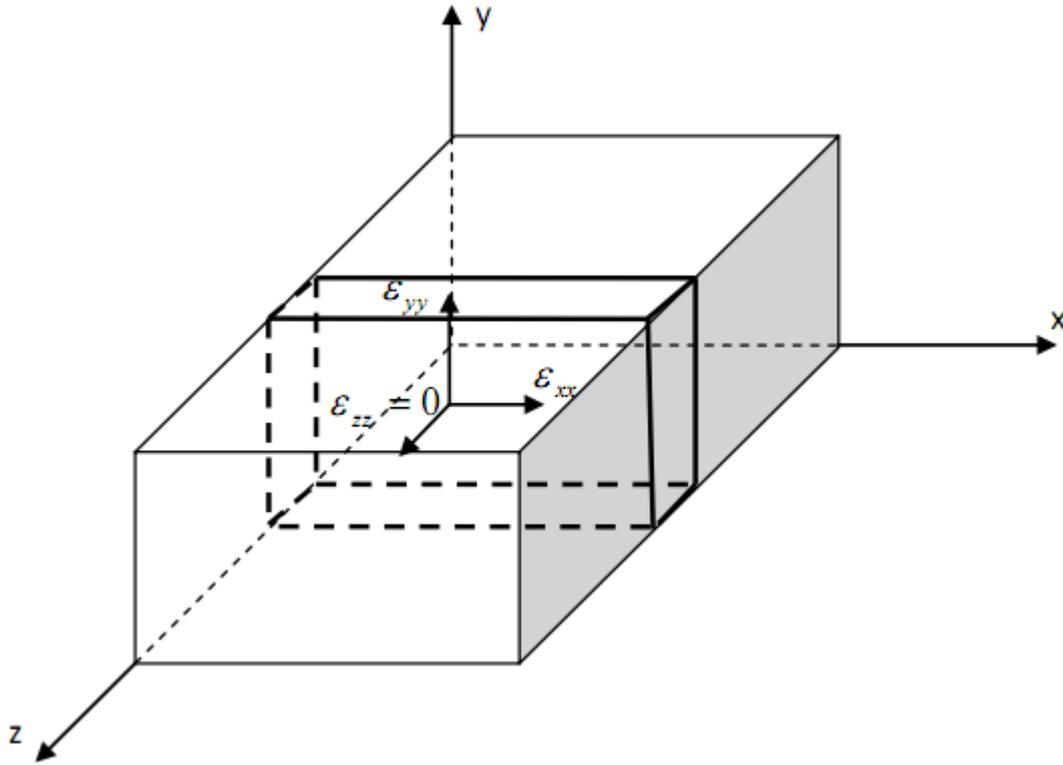
$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = [D]^{-1}$$

Ce qui permet de démontrer que  $[H]$  n'est pas définie pour  $\nu = 0.5$ .

### 3.2.5. État plan de contrainte et de déformation

#### ✚ Déformation plane

Considérant un solide de section transversale constante, l'hypothèse de déformation plane consiste à considérer un comportement plan identique quelle que soit la profondeur. En d'autres termes, le solide peut être décomposé en « tranches » d'épaisseur unitaire, le calcul se limitant à l'étude d'une seule de ces tranches.



**Figure 3.7 :**État plan de déformation.

En conséquence, toutes les déformations associées à l'axe transversal,  $z$  en l'occurrence, seront prises égales à zéro.

On a donc :

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \text{ et } \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.20)$$

En remplaçant (3.20) dans (3.19), la relation contrainte-déformation devient pour les déformations planes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

De (2.15), on déduit également que :

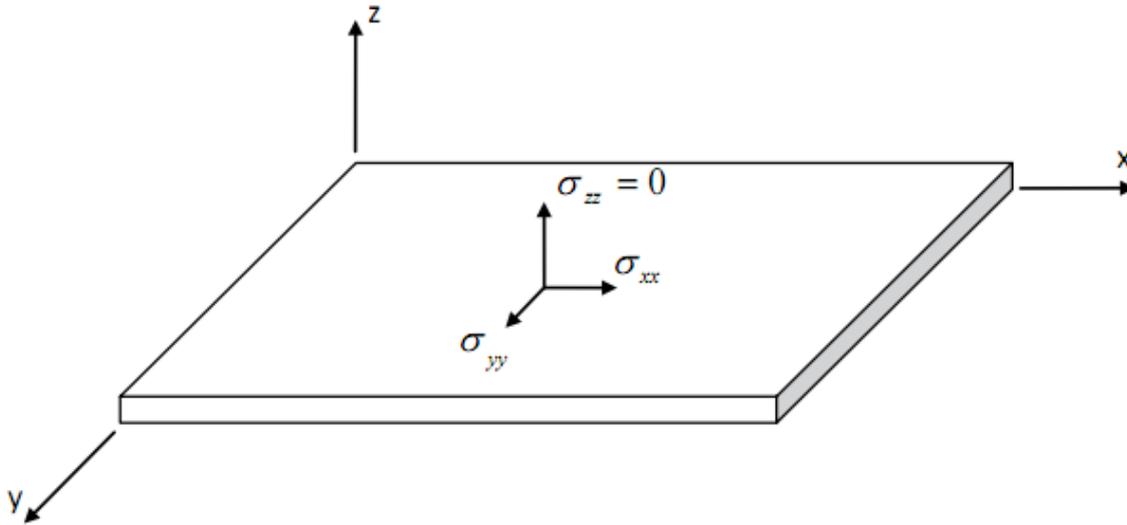
$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.22)$$

### ✚ Contrainte plane

À l'inverse de l'état de déformation plane, l'hypothèse de contrainte plane suppose que toutes les contraintes associées à l'axe transversal,  $z$  en l'occurrence, sont nulles.

On a donc :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ et } \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.23)$$



**Figure 3.8:**État plan de contrainte.

(3.15) permet d'établir que :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.24)$$

Mais également que :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Cette approche étant directement applicable aux éléments de faibles épaisseurs, les éléments membranes, plaques et coques suivront cette hypothèse de contrainte plane.

### 3.3. Les équations fondamentales de l'élasticité plane

#### 3.3.1. Les équations d'équilibre

##### 3.3.1.1. Les équations différentielles d'équilibre

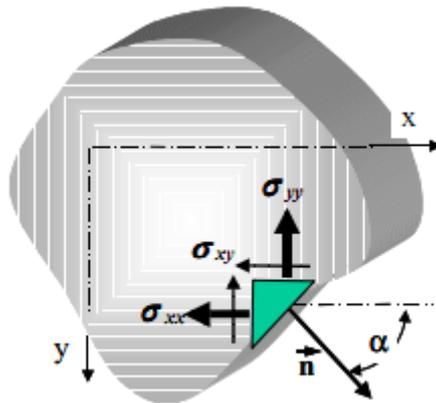
En annulant  $\sigma_{ZZ}, \sigma_{ZX}, \sigma_{ZY}$  et en adoptant  $f_x^v$  et  $f_y^v$  pour les composantes des forces volumiques dans la direction  $x$  et dans la direction  $y$  respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y^v = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

##### 3.3.1.2. Les conditions de contour

Soient  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$  les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour du disque en chargement plan. Soient  $f_x^s$  et  $f_y^s$  les tractions superficielles imposées sur le contour. La définition du tenseur contrainte permet d'écrire:

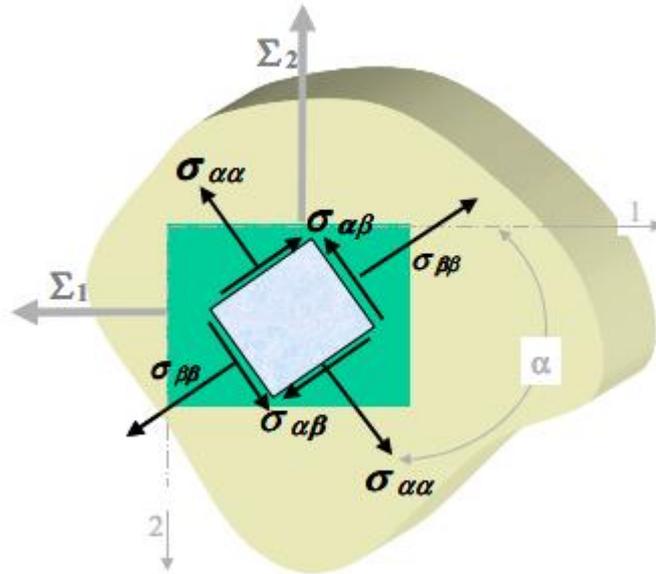
$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = f_x^s \\ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = f_y^s \end{cases} \quad (3.27)$$



**Figure 3.9:** Conditions de contour en contraintes planes.

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux axes coordonnée du prisme élémentaire sur la figure 3.9.

### 3.3.1.3. Changement d'axe



**Figure 3.10:** Contraintes sur deux facettes orthogonales.

Soient 1 et 2 les directions principales des contraintes ( $\sigma_{12}=0$ ) et  $\Sigma_1, \Sigma_2$  (figure 3.10) les contraintes principales. Dans ce cas on montre que 1 et 2 sont aussi les directions principales des déformations. Les formules de changement d'axes établies pour le tenseur des contraintes en 3 dimensions prennent des expressions particulièrement simples en contraintes planes ou en déformations planes :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\alpha} = \Sigma_1 \cos^2 \alpha + \Sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} = \left( \frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (3.28)$$

### 3.3.2. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes

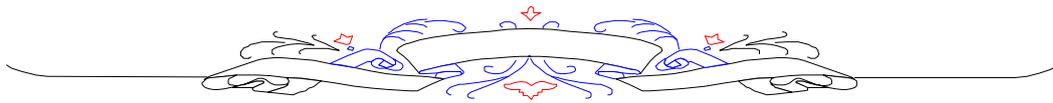
Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent précédant.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0$$

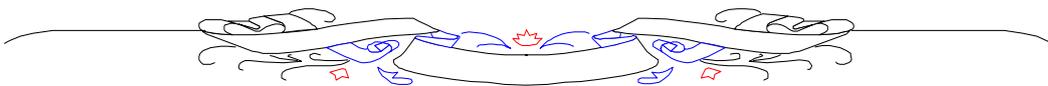
Si les déformations  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  sont nulles et que toutes les autres déformations sont indépendantes de  $z$ , les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.29)$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes ou déformations planes, on part ce pendant plus souvent de la fonction d'Airy.



*FORMULATION ISOPARAMETRIQUE DE  
QUELQUES ELEMENTS FINIS*



## Chapitre 04: FORMULATION ISOPARAMETRIQUE DE QUELQUES ELEMENTS FINIS

### 4.1. Introduction

La famille des éléments isoparamétriques a été introduite pour la première fois par Taig [Taig.61], d'où provient le premier élément isoparamétrique rectangulaire à 4 nœuds, par la suite Irons [Irons.68] a prolongé ces idées pour formuler des éléments isoparamétriques à polynômes élevés. Cette famille est appelée isoparamétrique car les mêmes fonctions d'interpolations sont utilisées pour définir aussi bien la variation des déplacements de l'élément que sa géométrie. La procédure de base consiste à exprimer les coordonnées de l'élément et ses déplacements par des fonctions exprimées en termes de coordonnées naturelles de l'élément. Un système de coordonnées naturelles est un système local défini par la géométrie de l'élément et non pas par son orientation dans le système global, de plus ces systèmes sont habituellement arrangés de telle façon à ce que les coordonnées naturelles aient la valeur unité à la première limite externe.

D'habitude dans la MEF on choisit un maillage carré ou triangulaire mais rien n'interdit de choisir des maillages plus complexes. Il n'est pas non plus nécessaire que le maillage soit régulier et l'on a tendance à resserrer le maillage près des endroits d'intérêt (par exemple aux endroits où l'on pense que la solution va beaucoup varier) ; cependant, il faut veiller à avoir des éléments faiblement distordus (se rapprocher d'un polygone régulier). Plus ce maillage est resserré, plus la solution que l'on obtient par la méthode des éléments finis sera précise et proche de la « vraie » solution de l'équation aux dérivées partielles.

Différentes familles d'éléments finis isoparamétriques basées sur différentes formulations, notamment la formulation en déplacement et en contraintes, ont été proposées dans la littérature, cependant, l'utilisation de l'intégration analytique pour la construction de la matrice de rigidité pour les éléments à modèles en déformation jusqu'à un temps récent reste évidente, ce qui est dans la plus part des cas un inconvénient majeur [Rebi.13b].

Dans cette optique l'objectif de ce chapitre est de faire en premier lieu une reformulation des éléments rectangulaires Q4 et l'élément SBRIE [Sabir 95a] et introduire sur ces éléments la notion d'isoparamétrie. Cet élément basé sur le champ de déformation a une forme rectangulaire,

cependant on peut imaginer qu'il peut avoir une forme irrégulière ou distordue où les interpolations quadratiques sinon cubiques définissent le domaine géométrique.

La bonne représentation des bords courbes est exigée souvent pour une modélisation correcte au contraire des éléments à bords droits qui exigent des maillages fins et grossiers.

L'isoparamétrie donc a pour but de systématiser l'utilisation des variables réduites et de générer des éléments à bords courbes ce qui est efficace pour certaines discrétisations [Rebi.13b].

## 4.2. Formulation isoparamétrique de l'élément membranaire Q4

Pour une utilisation le plus possible pratique de l'isoparamétrie, il est nécessaire de passer par les étapes suivantes:

1. La construction des fonctions de forme de l'élément formulé.
2. Calculs des dérivées des fonctions de forme pour former la matrice de contrainte-déplacement.
3. L'intégration numérique sur l'élément (avec quadrature de Gauss).

Comme base de calcul de la matrice de rigidité de l'élément quadrilatère on met l'origine au centre de gravité du rectangle et l'élément déformé dans la Fig.4.1, mais avec la numérotation nodale obtenue, on positionne les nœuds 1, 2, 3, 4 en premier, troisième, quatrième et deuxième quadrants respectivement.

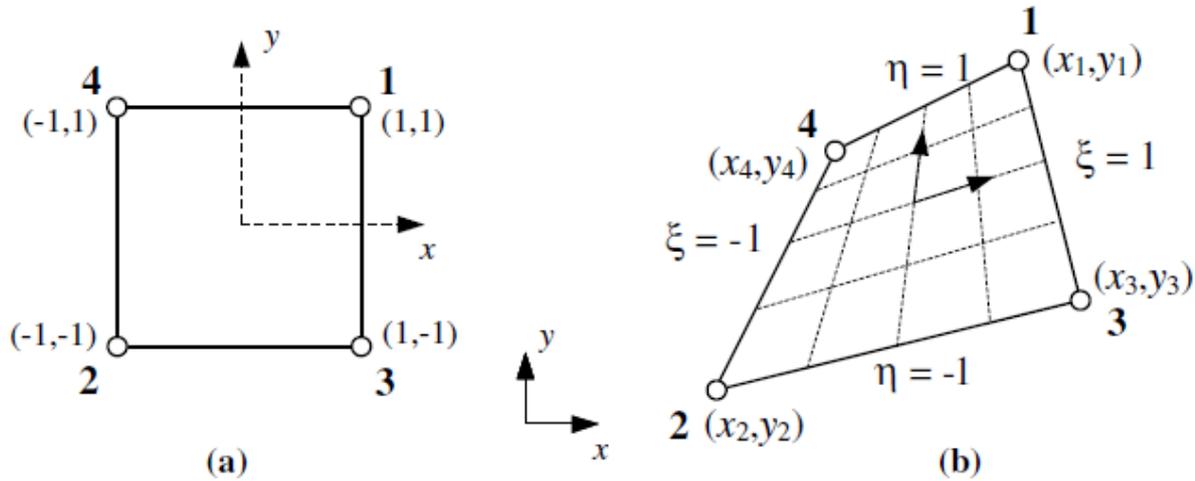
Les fonctions de déplacement pour le 8-d.d.l. de l'élément Q4 dans la Fig.4.1 (a) sont

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Les coordonnées  $x$  et  $y$  qui valent  $(\pm 1)$  sur les frontières du rectangle, tandis que les quatre constantes dans  $u(x, y)$  coïncident avec des constantes de  $v(x, y)$ . Les constantes  $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$  se trouvent en substituant des valeurs nodales  $u_i$  et les coordonnées appropriées, de sorte que :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T, \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) v_i = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]^T, \end{aligned} \quad (4.2)$$

où



**Fig.4. 1.** Élément isoparamétrique bidimensionnel quadrilatère mappé à partir d'un élément rectangulaire: (a) l'élément réel, (b) l'élément déformé.

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{4}(1+x)(1+y), \\
 N_2(x, y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y), \\
 N_3(x, y) &= \frac{1}{4}(1+x)(1-y), \\
 N_4(x, y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1+y)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Avec la fonction de forme adimensionnelle  $N_i$  égal à l'unité au point  $i$  et zéro ailleurs, ce qui complète la définition de l'élément sans dimension rectangulaire.

L'élément de quadrilatère isoparamétrique représenté dans la Fig.4.1(b) possède les quatre coins définis par les coordonnées cartésiennes globales  $(x, y)$ , tandis que l'élément est défini au moyen de coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$  [Zlok.04].

En conséquence, pour l'élément déformé les fonctions de déplacement sont

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i, \tag{4.4}$$

Tandis que les fonctions géométriques sont

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i, \quad (4.5)$$

Où

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned} \quad (4.6)$$

La fonction  $N_i(\xi, \eta)$  a la valeur de l'unité au point  $i$  et zéro ailleurs, comme dans le cas de la fonction de forme adimensionnelle  $N_i(x, y)$  précédemment décrite [Zlok.04].

En appliquant la méthode de l'énergie, la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire peut être obtenue par:

$$K = t \iint_{surf} B^T D B dx dy \quad (4.7)$$

avec

$t$ : épaisseur et  $[B]$ : La matrice qui relie les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux nœuds.

Pour le cas de contraintes plane :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \sigma = D \varepsilon \quad (4.8)$$

Les fonctions de déformation sont exprimées par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Ou

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [B] \{q_e\} \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{est } B \text{ une matrice } 3 \times 8) \quad (4.10)$$

Puisque les fonctions de forme  $N_i$  de l'élément déformé sont exprimées par  $\xi$  et  $\eta$  les dérivées seront modifiées de  $\partial/\partial x, \partial/\partial y$  à  $\partial/\partial \xi, \partial/\partial \eta$  par

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Avec [J] la matrice jacobienne de la transformation donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+\eta & -(1-\eta) & 1-\eta & -(1+\eta) \\ 1+\xi & -(1-\xi) & -(1+\xi) & 1-\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

### 4.3. Formulation isoparamétrique de l'élément (SBRIE)

L'élément SBRIE à deux degrés de liberté dans chacun des quatre nœuds de coins et il est représenté schématiquement sur la figure (4.2). Les longueurs a et b sont les dimensions de l'élément dans les directions x et y dans cet ordre.

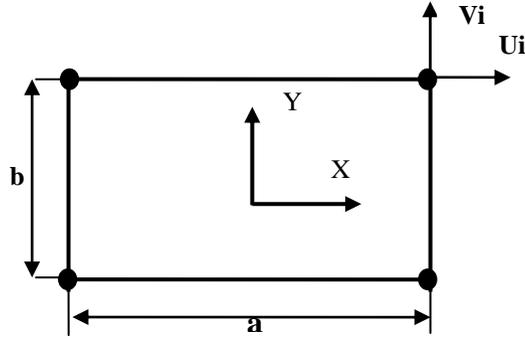


Figure 4.2 Coordonnées des nœuds de l'élément SBRIE

Les fonctions de déformation et le champ de déplacement qui correspondent à cet élément en coordonnées cartésiennes sont donnés respectivement par:

$$\varepsilon_x = a_4 + a_5 y \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_y = a_6 + a_7 x$$

$$\gamma_{xy} = a_8$$

$$u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 y^2 / 2 + a_8 y / 2 \quad (4.15)$$

$$v = a_2 + a_3 x - a_5 x^2 / 2 + a_6 y + a_7 xy + a_8 x / 2$$

On donne le champ de déplacement en termes de déplacements nodaux de la manière suivante:

$$\{U\} = [N]\{q\} \quad (4.16)$$

Ou

$$\{q\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T \quad (4.17)$$

Et la matrice des fonctions de forme peut être exprimée par:

$$[N] = [\varphi(x, y)][\phi_e]^{-1} \quad (4.18)$$

Là où la matrice  $[\varphi(x, y)]$  et la matrice des coordonnées  $[\phi_e]$  sont données dans l'ordre comme suit :

$$[\varphi(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -y^2/2 & y/2 \\ 0 & 1 & x & 0 & -x^2/2 & y & xy & x/2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$[\phi_e] = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, y_1) \\ \varphi(x_2, y_2) \\ \varphi(x_3, y_3) \\ \varphi(x_4, y_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & x_1 y_1 & 0 & -0.5 y_1^2 & 0.5 y_1 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & -0.5 x_1^2 & y_1 & x_1 y_1 & 0.5 x_1 \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & x_2 y_2 & 0 & -0.5 y_2^2 & 0.5 y_2 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & -0.5 x_2^2 & y_2 & x_2 y_2 & 0.5 x_2 \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & x_3 y_3 & 0 & -0.5 y_3^2 & 0.5 y_3 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & -0.5 x_3^2 & y_3 & x_3 y_3 & 0.5 x_3 \\ 1 & 0 & -y_4 & x_4 & x_4 y_4 & 0 & -0.5 y_4^2 & 0.5 y_4 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & -0.5 x_4^2 & y_4 & x_4 y_4 & 0.5 x_4 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

De ce fait la déformation assumée

$$\{\varepsilon\} = [Q(x, y)]\{A\} \quad (4.21)$$

Avec la matrice de déformation Q

$$[Q(x, y)] = [L][\varphi(x, y)] \quad (4.22)$$

Où  $[L]$  est l'opérateur différentiel défini comme suit

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Aussi l'équation (4.22) devient

$$[Q(x, y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Et le champ de déplacement sera exprimé de la manière suivante:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\varphi(x, y)]\{a\} \quad (4.25)$$

L'interpolation du champ de déplacement peut être écrite dans la formulation isoparamétrique comme suit:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^U(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^U(\xi, \eta) v_i \\
 v &= \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^V(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^V(\xi, \eta) v_i
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Et les fonctions de forme vues dans l'équation (4.18) peuvent être écrites sous la forme

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u & N_7^u & N_8^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v & N_7^v & N_8^v \end{bmatrix}
 \tag{4.27}$$

Les fonctions de forme obtenues de l'élément SBRIE en coordonnées naturelles sont données dans le tableau (4.1), ainsi que les composantes de la matrice de déformation [B] sont données dans le tableau (4.2).

$N_1^u = 1/4(1-\xi)(1-\eta)$	$N_1^v = 1/8(1-\xi^2)(a/b)$
$N_2^u = 1/8(1-\eta^2)(b/a)$	$N_2^v = 1/4(1-\xi)(1-\eta)$
$N_3^u = 1/4(1-\xi)(1+\eta)$	$N_3^v = 1/8(\xi^2 - 1)(a/b)$
$N_4^u = 1/8(\eta^2 - 1)(b/a)$	$N_4^v = 1/4(1-\xi)(1+\eta)$
$N_5^u = 1/4(1+\xi)(1+\eta)$	$N_5^v = 1/8(1-\xi^2)(a/b)$
$N_6^u = 1/8(1-\eta^2)(b/a)$	$N_6^v = 1/4(1+\xi)(1+\eta)$
$N_7^u = 1/4(1+\xi)(1-\eta)$	$N_7^v = 1/8(\xi^2 - 1)(a/b)$
$N_8^u = 1/8(\eta^2 - 1)(b/a)$	$N_8^v = 1/4(1+\xi)(1-\eta)$

**Tableau 4.1 : Fonctions de forme de l'élément SBRIE**

$B_{11} = N_{1,x}^u$	$B_{21} = N_{1,y}^v$	$B_{31} = N_{1,y}^u + N_{1,x}^v$
$B_{12} = N_{2,x}^u$	$B_{22} = N_{2,y}^v$	$B_{32} = N_{2,y}^u + N_{2,x}^v$
$B_{13} = N_{3,x}^u$	$B_{23} = N_{3,y}^v$	$B_{33} = N_{3,y}^u + N_{3,x}^v$
$B_{14} = N_{4,x}^u$	$B_{24} = N_{4,y}^v$	$B_{34} = N_{4,y}^u + N_{4,x}^v$
$B_{15} = N_{5,x}^u$	$B_{25} = N_{5,y}^v$	$B_{35} = N_{5,y}^u + N_{5,x}^v$
$B_{16} = N_{6,x}^u$	$B_{26} = N_{6,y}^v$	$B_{36} = N_{6,y}^u + N_{6,x}^v$
$B_{17} = N_{7,x}^u$	$B_{27} = N_{7,y}^v$	$B_{37} = N_{7,y}^u + N_{7,x}^v$
$B_{18} = N_{8,x}^u$	$B_{28} = N_{8,y}^v$	$B_{38} = N_{8,y}^u + N_{8,x}^v$

**Tableau 4.2 : Composantes de la matrice  $[B]$  de l'élément SBRIE**

La transformation suivante garantit la transformation de l'élément réel à l'élément de référence:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

La transformation inverse est assurée par la matrice Jacobéenne inverse  $J^{-1}$  telle que :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

En passant en variables local on obtient :

$$\iint dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det |J| d\xi d\eta \quad (4.30)$$

On utilise la quadrature de Gauss afin d'évaluer, d'une manière numérique, l'équation (4.30).

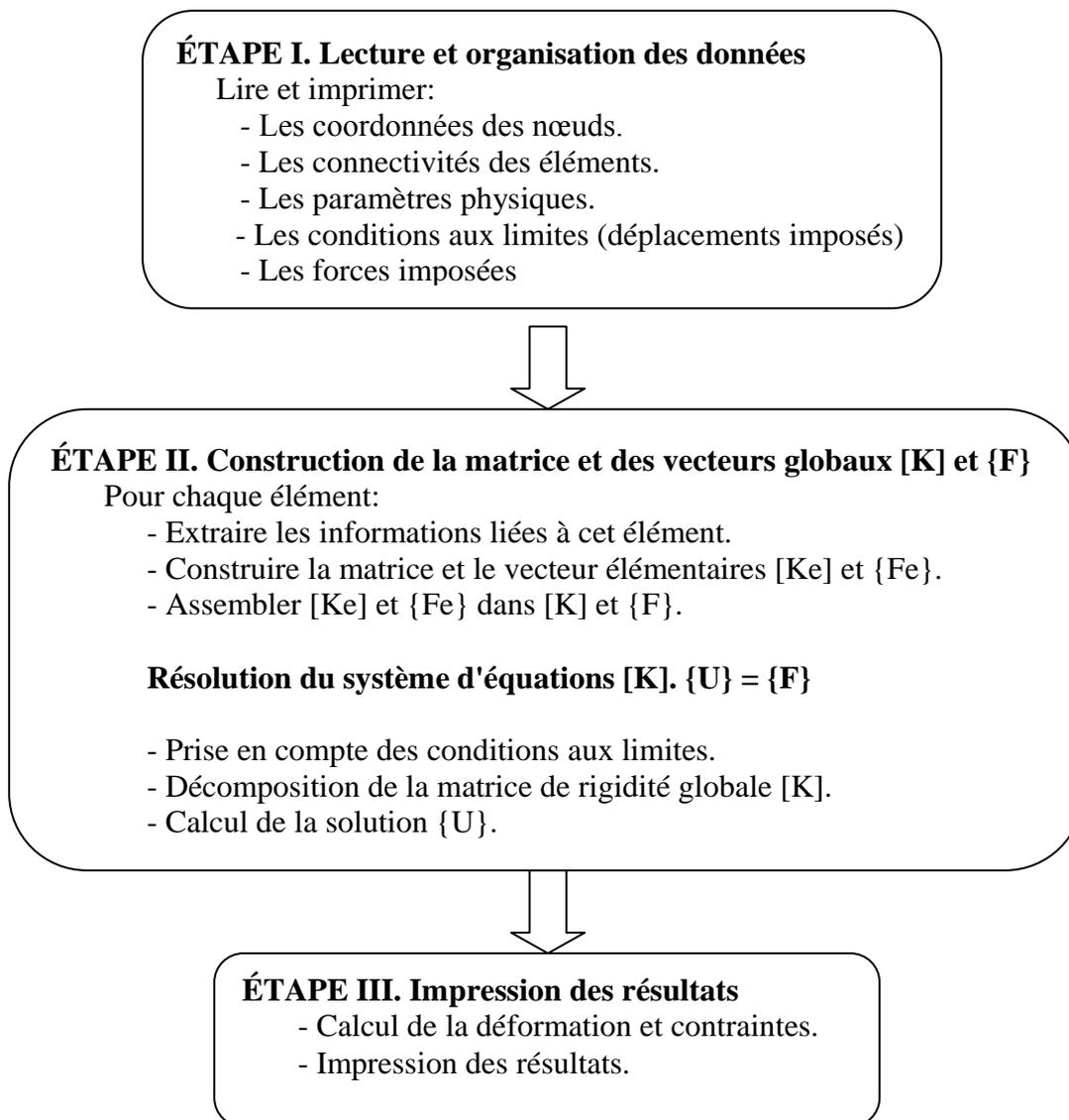
Comme on peut ainsi obtenir la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  de l'élément SBRIE par

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det|J| d\xi d\eta \quad (4.31)$$

#### 4.4. Présentation du programme

Le programme a été élaboré d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous programme, ce qui facilite la programmation et la rend très souple car on ne sera pas contraint à chercher les paramètres qui doivent passer d'une routine à l'autre.

Comme tout programme d'éléments finis, ce programme est constitué par les étapes illustrées sur la figure (4.3)



**Figure 4.3.** Les étapes nécessaires de programme

### 4.4.1. Présentation des différentes étapes du programme

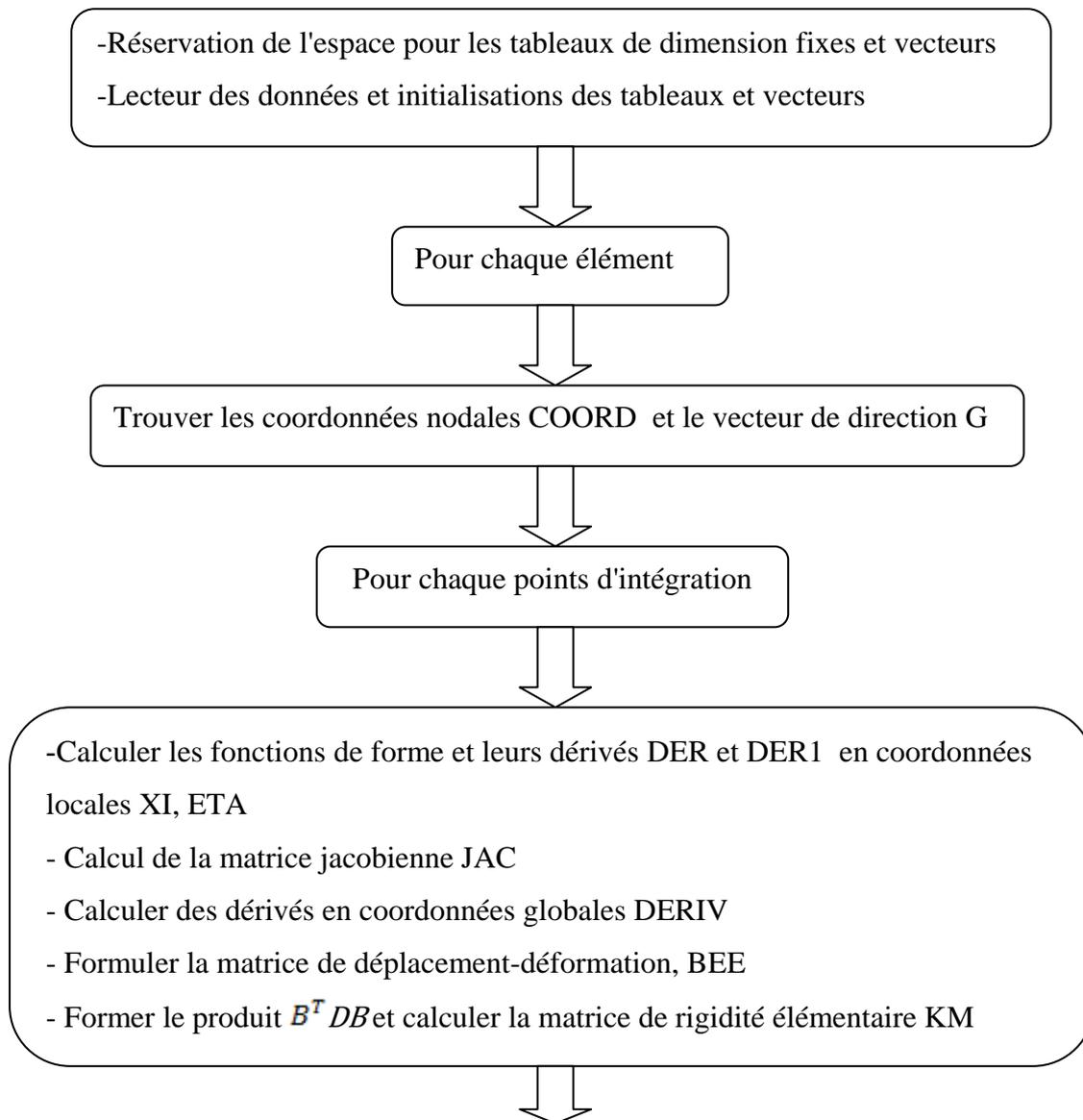
a) **Etape 1:** Lecture et organisation des données

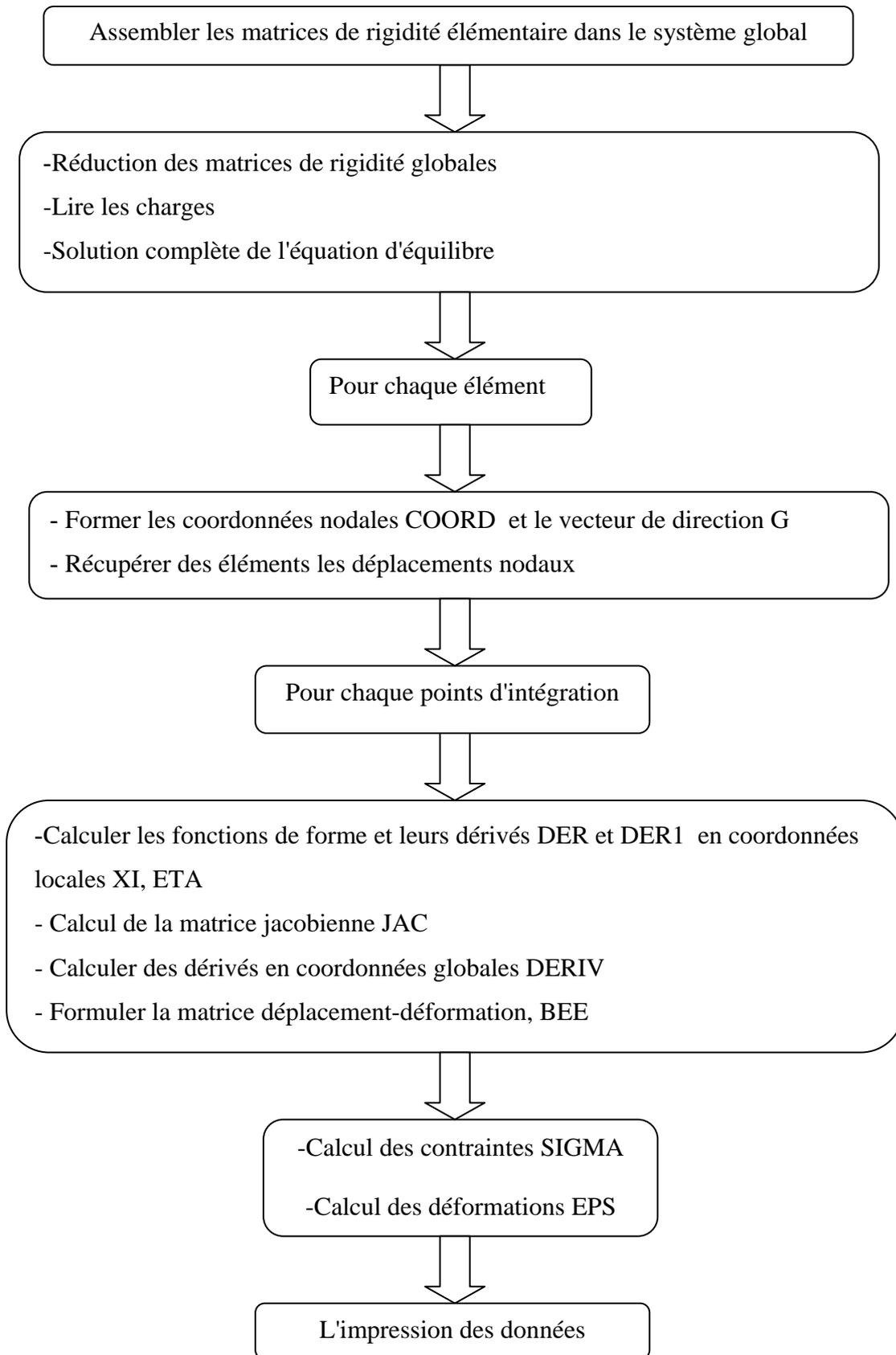
b) **Etape 2:** Construction de la matrice et du vecteur globaux  $[k]$  et  $\{f\}$  et résolution du système des équations  $[K] \{U\} = \{F\}$

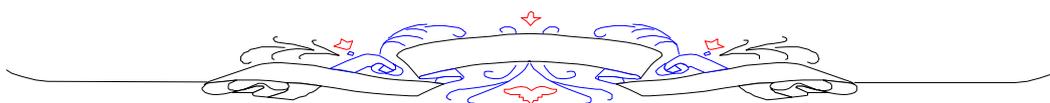
Cette étape est la plus importante du programme, car on y effectue toutes les opérations nécessaires pour aboutir à la solution finale du problème.

- + Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire
- + Calcul des vecteurs élémentaires des forces
- + Calcul des déplacements aux nœuds:  $[K] \{U\} = \{F\}$
- + Calcul des contraintes et déformations (SIGMA, EPS)

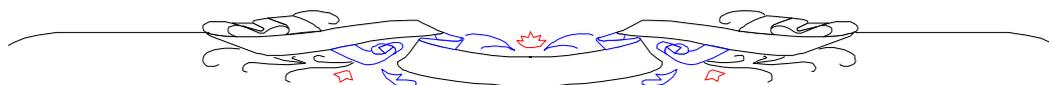
#### ORGANIGRAMME DETAILLEE DU PROGRAMME







*VALIDATION NUMERIQUE*



## Chapitre 05: VALIDATION NUMERIQUE

### 5.1. Introduction :

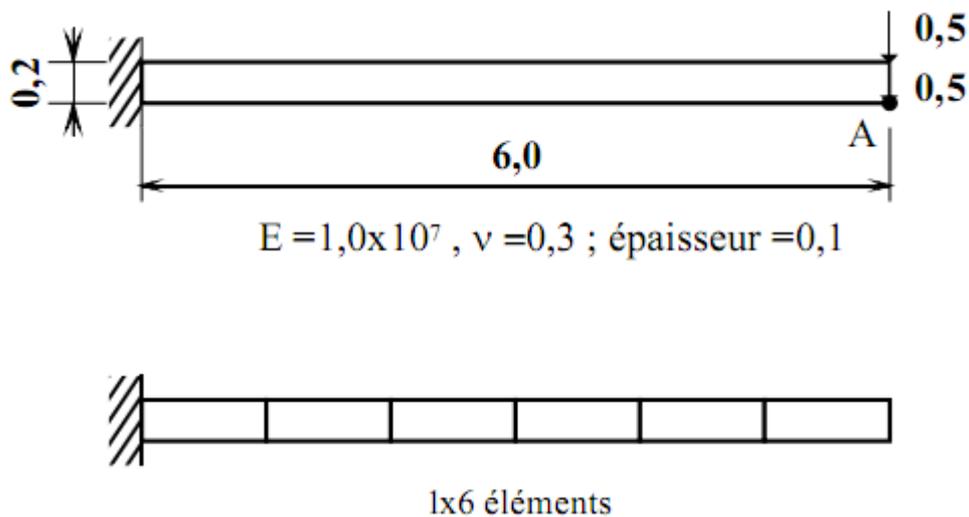
La méthode des éléments finis est une technique approximative, alors elle peut produire des erreurs [Maal.07]. C'est pour cela, les chercheurs ont développé des tests pathologiques pour valider n'importe quel élément. Ces tests sont conçus pour trouver les paramètres qui peuvent affecter la précision de l'élément. Les résultats numériques de plusieurs éléments sont utilisés et comparés avec l'élément rectangulaire **SBRIE** [Sabi.95] formulé en isoparamétrie. Ces éléments sont dénommés comme :

- ✚ **Q4** : élément quadrangle standard avec 4 nœuds à formulation isoparamétrique.
- ✚ les éléments d'Ansys d'usage universels de solide (**SOLID 82-2D**, **PLANE 42**)
  - ❖ L'élément **SOLID 82-2D** est défini par huit nœuds ayant deux degrés de liberté à chaque nœud. L'élément peut être utilisé comme un élément plan ou comme un élément de révolution.
  - ❖ L'élément '**PLANE 42**' est utilisé pour la modélisation 2-D des structures solides. L'élément peut être utilisé soit comme un élément de plan (contrainte plane ou déformation plane) ou comme un élément de révolution. L'élément est défini par quatre nœuds ayant deux degrés de liberté à chaque nœud.

La plupart des exemples traités se trouvent dans la littérature pour valider les performances des éléments.

### 5.2.1 Poutre console mince élancée soumise à une force à l'extrémité :

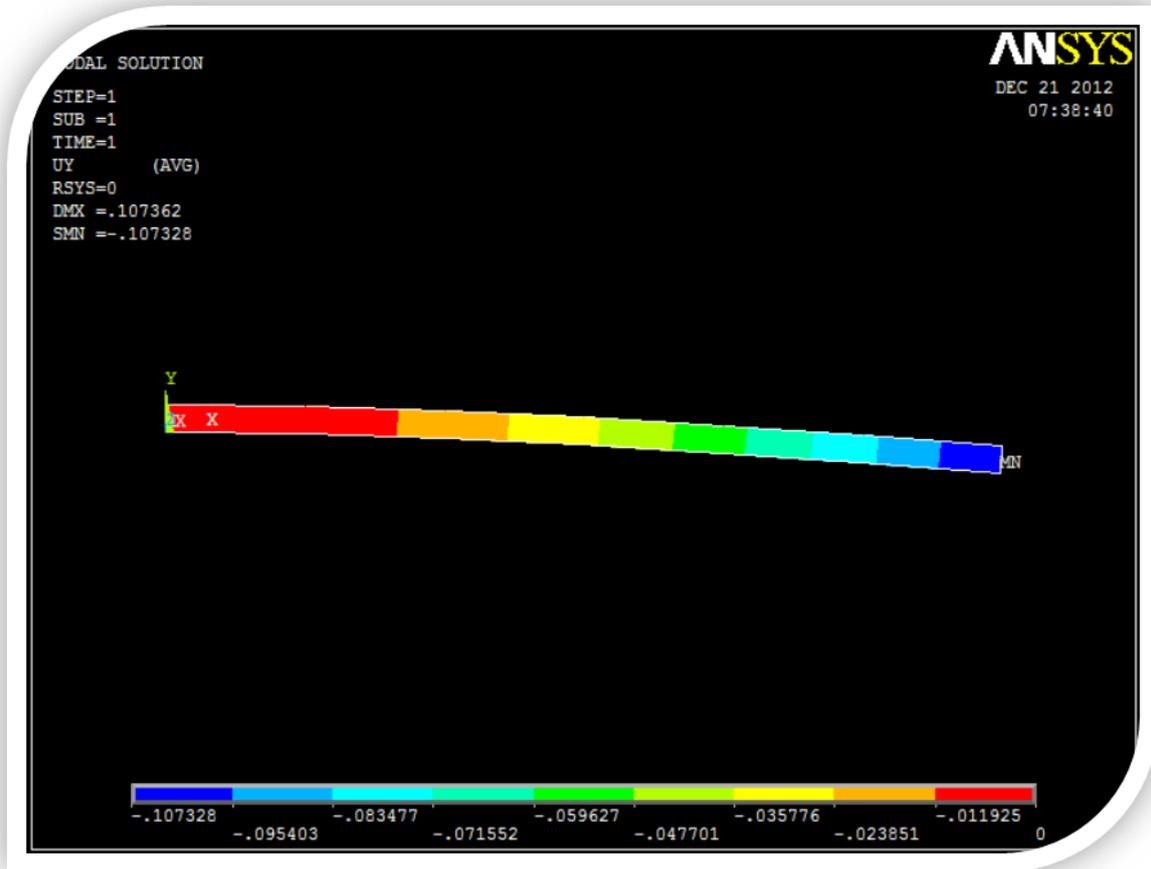
La poutre console mince élancée soumise à une force à l'extrémité est un problème standard pour tester la fiabilité des éléments finis [Nati.00].  $E$  et  $\nu$  désignent le module de Young et le coefficient de Poisson. Ces paramètres ainsi que le maillage sont montrés sur la Figure.5.1, quand aux résultats, ils sont représentés dans le Tableau.5.1



**Figure 5.1a.** Poutre console mince élancée soumise à une force au bout

	Elément SBRIE isoparamétrie	Elément SBRIE analytique	Elément Q4	ANSYS Elément [SOLID 82-2D 8 NODE]	ANSYS Elément [PLANE 42]
Maillage	$W_A$	$W_A$	$W_A$	$W_A$	$W_A$
1x6	0,9035	0,9035	0,093	0,987	0,993
Analyt	1,000 (0,1081)				

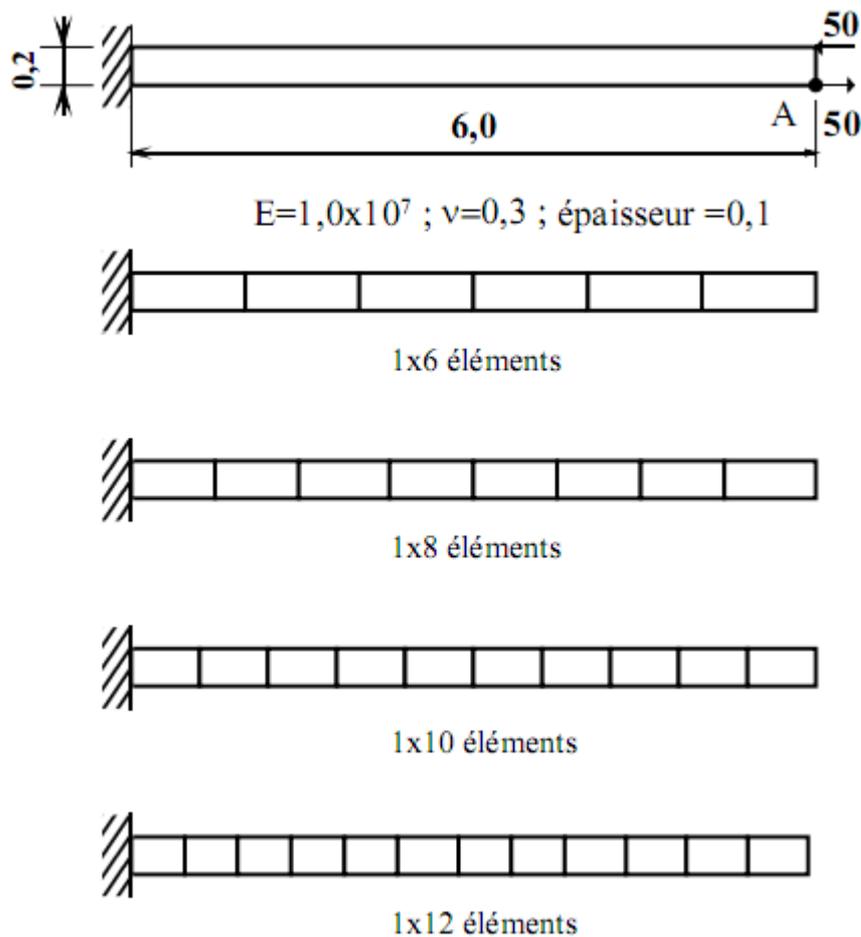
**Tableau 5.1.** Flèche normée au point A d'une poutre console mince élancée soumise à une force de cisaillement à l'extrémité



**Figure 5.1b.** Flèche normée au point A d'une poutre console mince élancée soumise à une force de cisaillement à l'extrémité maillage 1x6 élément [*PLANE 42*] du code calcul ANSYS

### 5.2.2 Poutre console mince élancée soumise à une flexion pure à l'extrémité :

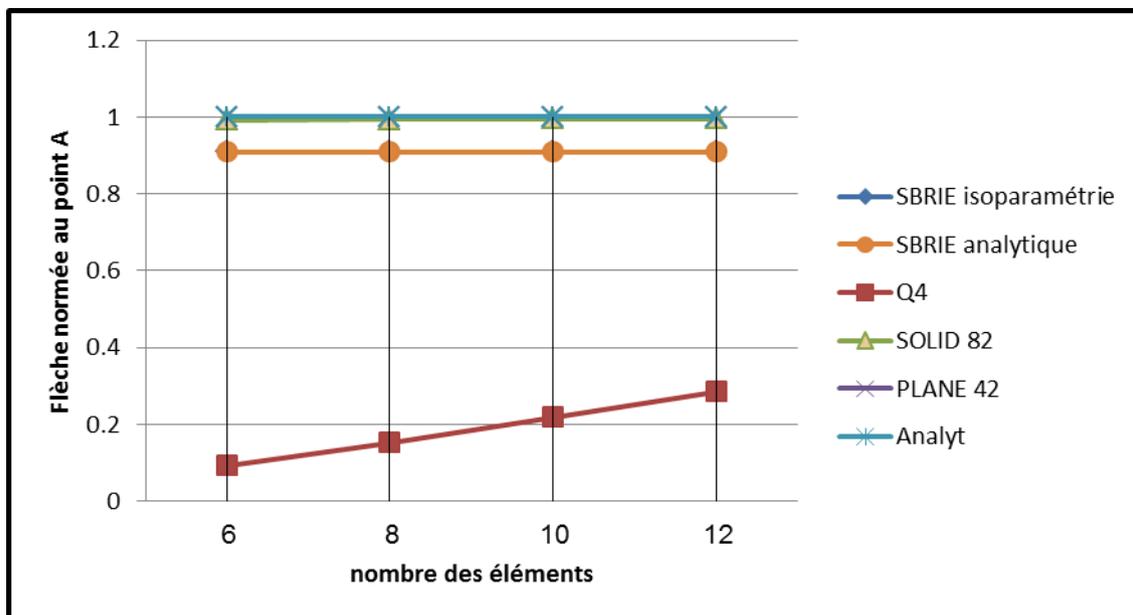
Les valeurs de la flèche au bout d'une poutre console mince élancée soumise à une flexion pure et encastree sur un coté sont comparées avec le présent élément *SBRIE* et à celles d'autres éléments et aux solutions analytiques. La géométrie, les paramètres et la distribution du maillage sont montrés sur la Figure.5.2. En utilisant quatre types de maillage, les valeurs des flèches normées de l'élément *SBRIE* sont calculées et comparées avec celles données par d'autres éléments (Tableau.5.2).



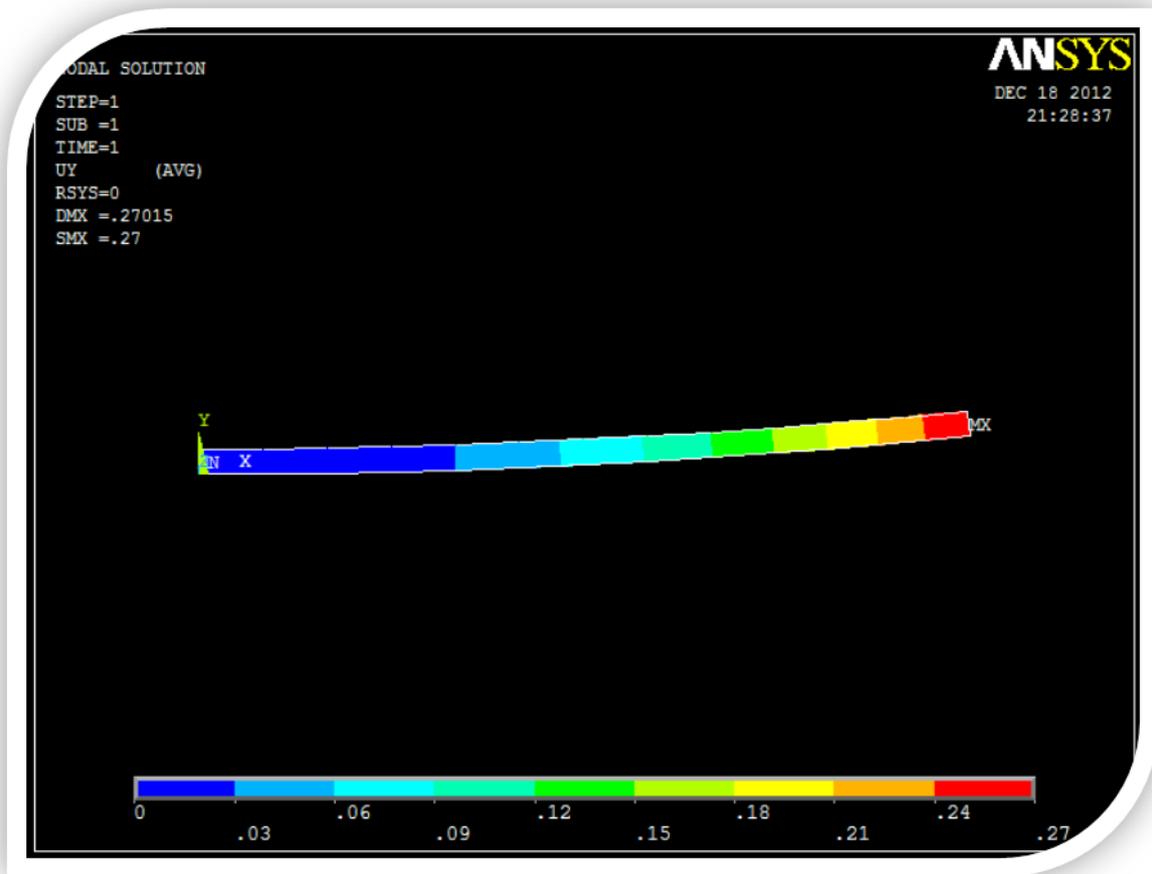
**Figure 5.2.** Poutre console élancée soumise à la flexion pure

	Elément SBRIE isoparamétrie	Elément SBRIE analytique	Elément Q4	ANSYS Elément [SOLID 82-2D 8 NODE]	ANSYS Elément [PLANE 42]
Maillage	$W_A$	$W_A$	$W_A$	$W_A$	$W_A$
1x6	0,91	0,91	0,093	0,9919	1,000
1x8	0,91	0,91	0,153	0,994	1,000
1x10	0,91	0,91	0,219	0,995	1,000
1x12	0,91	0,91	0,285	0,996	1,000
Analyt	1,000 (0,270)				

**Tableau 5.2.** Flèche normée au point A, d'une poutre console soumise à la flexion pure



**Figure 5.3a.** Flèche normée au point A, d'une poutre console soumise à la flexion pure



**Figure 5.3b.** Flèche normée au point A, d'une poutre console soumise à la flexion pure maillage 1x12 élément [*PLANE 42*] du code de calcul *ANSYS*

D'après les résultats de la flèche au point A illustrés dans le tableau (5.2) relatif à la figure (5.3), on a constaté que l'élément (*PLANE 42*) converge à la solution analytique pour tous les cas considérés, par contre les éléments (*SBRIE et SOLID 82*) donnent des résultats peu proches de la valeur exacte. Par contre celles de l'élément *Q4* sont toujours loin de la solution exacte.

### 5.2.3 Les tests du rapport de forme pour une poutre console :

Sabir propose des tests [Sabi.95a] qui sont montrés sur la Figure.5.4. Des poutres consoles larges, modérément larges et minces respectivement. Les consoles considérées ont une épaisseur de  $b=0,0625$  m et une longueur  $l=10$  m, les propriétés du matériau sont les suivantes:  $E= 10^5$  N/mm<sup>2</sup> et  $\nu = 0,2$ . On détermine la flèche à l'extrémité de la poutre (Tableau5.3a). L'élément **SBR1E** présente des résultats qui sont proches des valeurs données par la théorie pour tous les cas considérés.

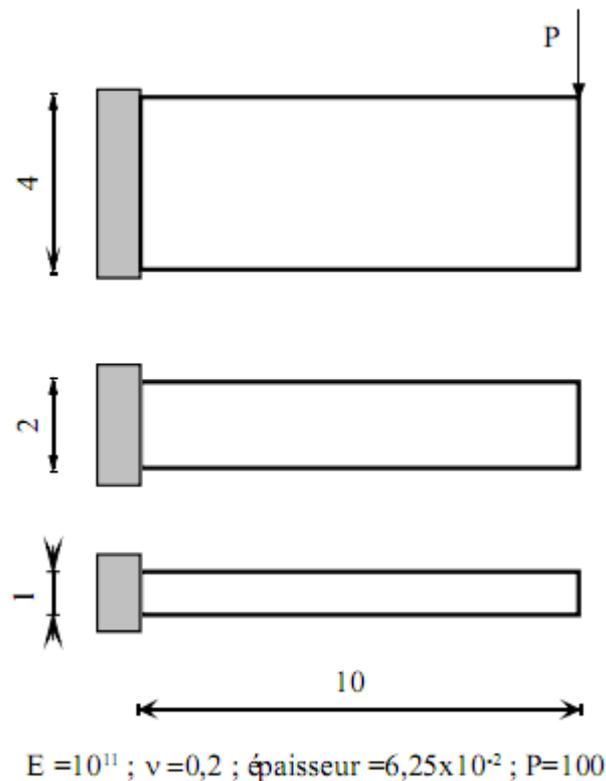


Figure 5.4. Poutres consoles, large, moyennement large et mince

**- Poutre console large**

	Élément SBRIE isoparamétrie	Élément SBRIE analytique	Élément Q4	ANSYS Élément [SOLID 82-2D 8 NODE]	ANSYS Élément [PLANE 42]
Maillage	w	w	w	w	w
2x2	0,914	0,914	0,591	1,081	0,976
2x4	0,958	0,958	0,597	1,102	1,034
6x6	0,988	0,988	0,926	1,135	1,071
8x8	0,993	0,993	0,956	1,145	1,085
12x12	0,995	0,995	0,979	1,160	1,102
10x16	0,997	0,997	0,971	1,161	1,111
Analyt	1,000 (1,105)				

**Tableau 5.3a.** Flèche normée pour une console large

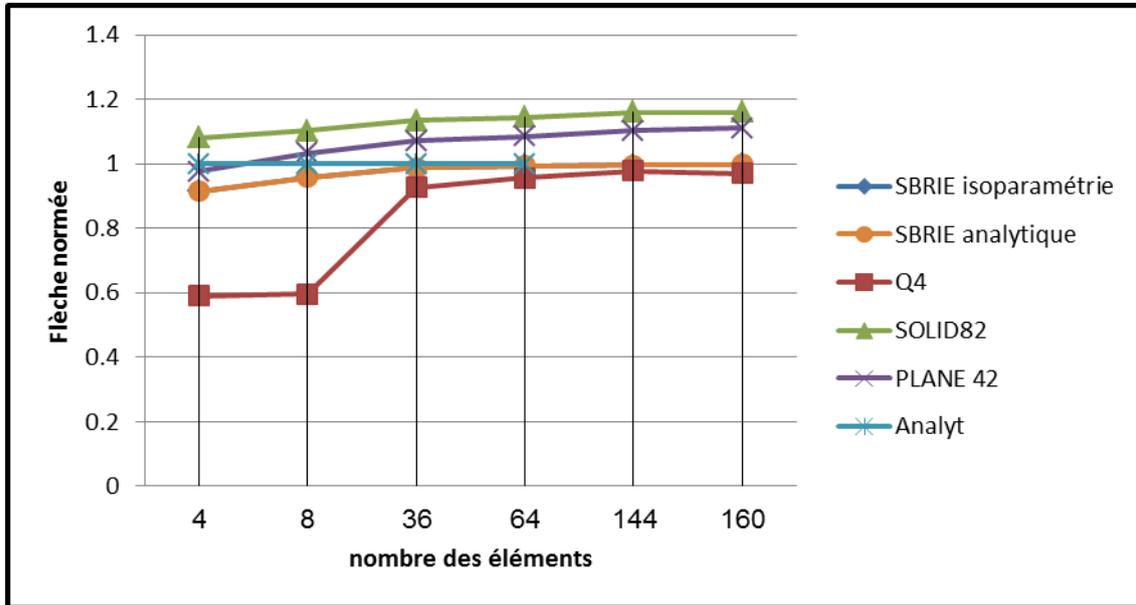


Figure 5.5a. Flèche normée pour une console large

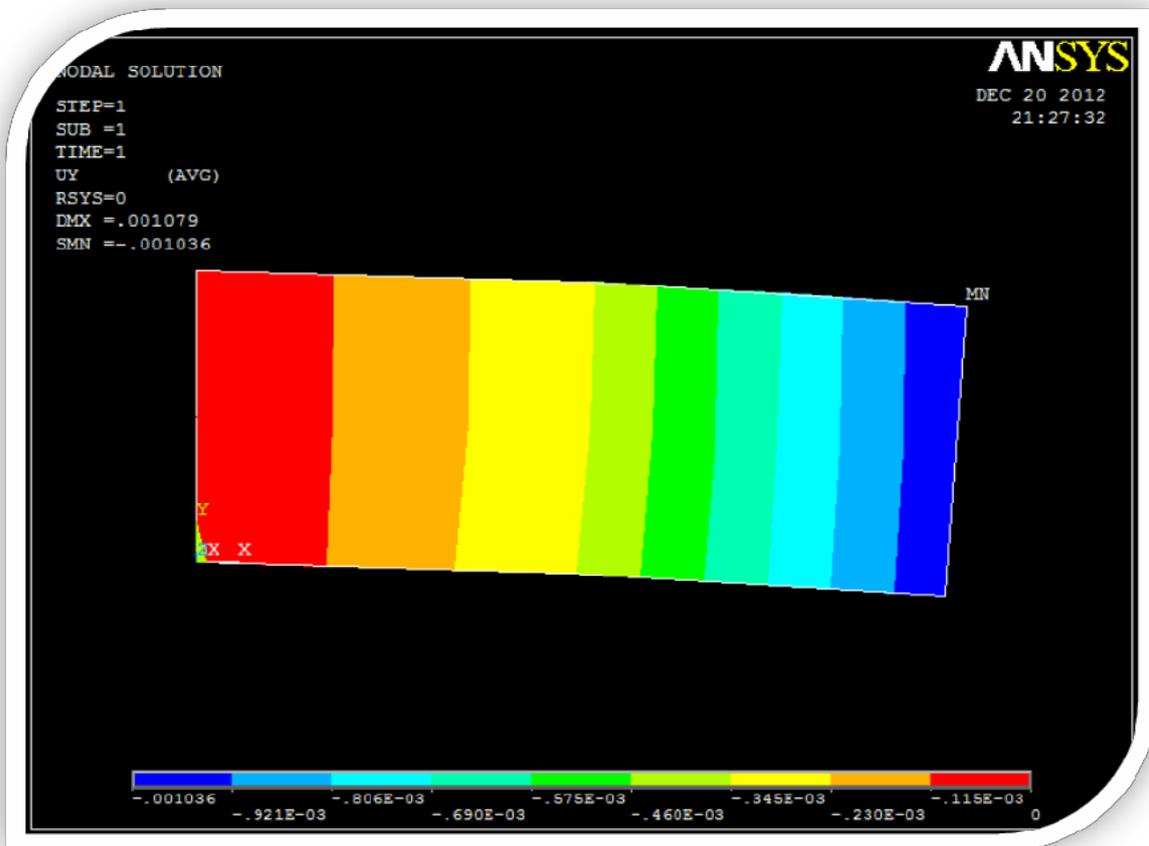


Figure 5.5b. Flèche normée pour une console large maillage 2x2 élément [PLANE 42] du code calcul ANSYS

**- Poutre console moyennement large**

	Élément SBRIE isoparamétrie	Élément SBRIE analytique	Élément Q4	ANSYS Élément [SOLID 82-2D 8 NODE]	ANSYS Élément [PLANE 42]
Maillage	$w$	$w$	$w$	$w$	$w$
2x2	0,916	0,916	0,275	1,008	0,938
2x4	0,966	0,966	0,275	1,015	0,989
6x6	0,988	0,988	0,771	1,022	1,003
8x8	0,992	0,992	0,856	1,023	1,008
12x12	0,996	0,996	0,930	1,025	1,013
10x16	0,997	0,997	0,930	1,025	1,015
Analyt	1,000 (8,21)				

**Tableau 5.3b.** Flèche normée pour une console moyennement large

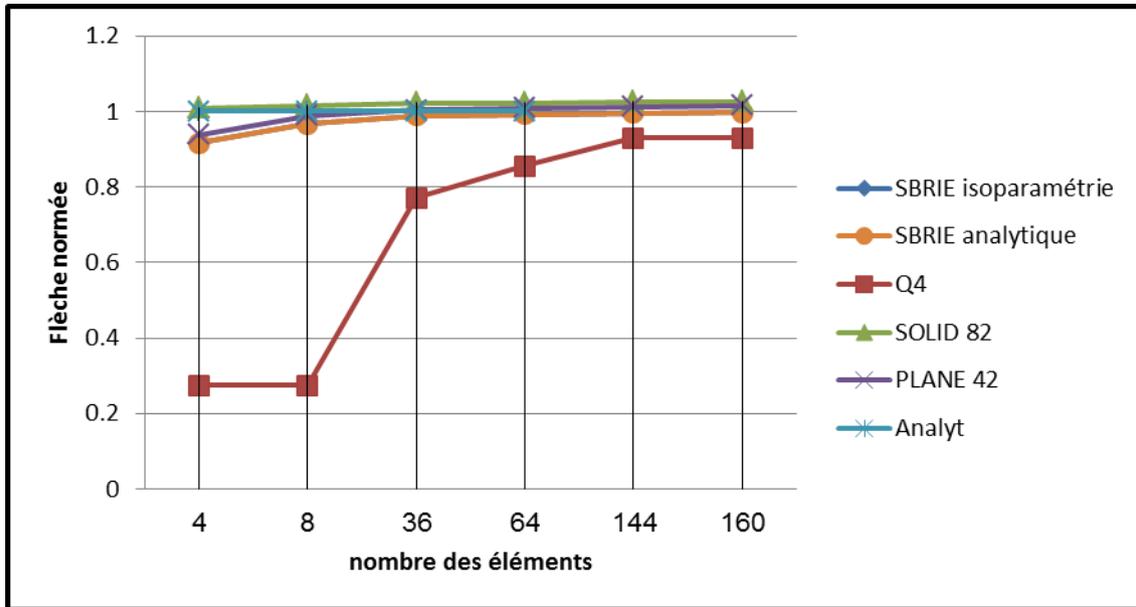


Figure 5.5c. Flèche normée pour une console moyennement large

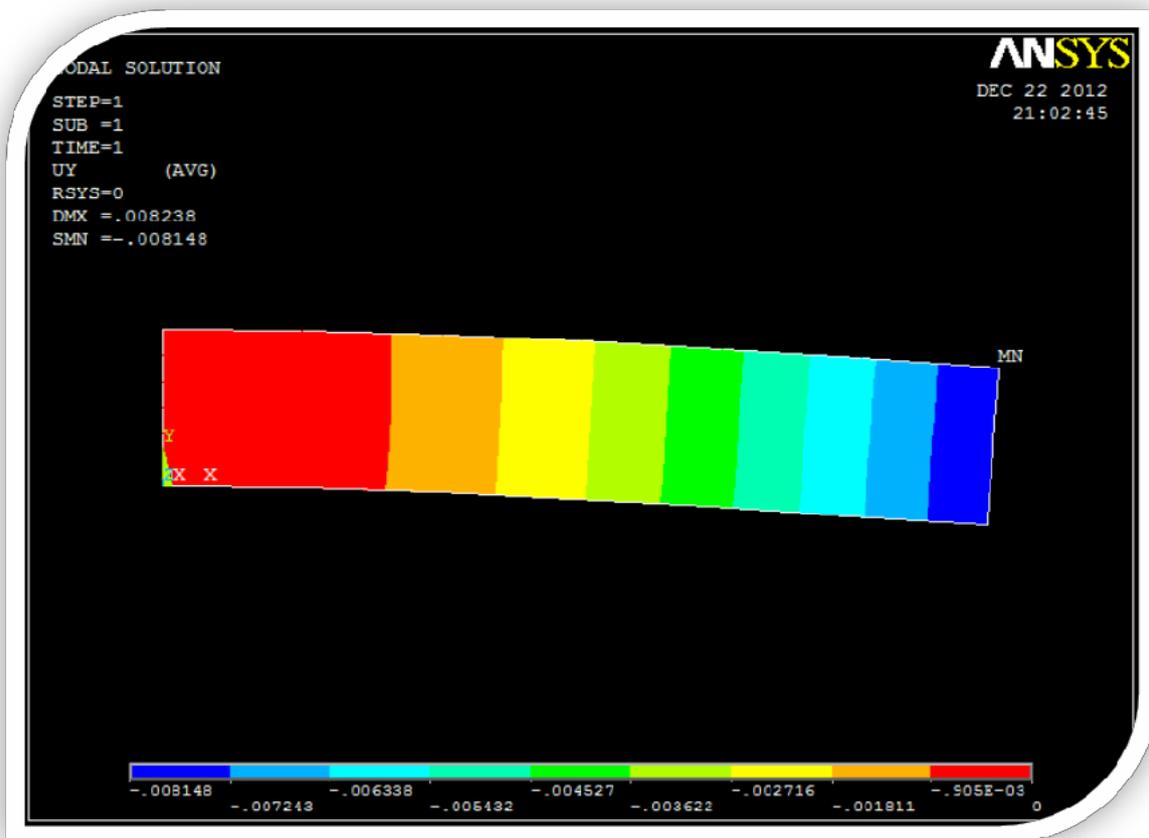


Figure 5.5d. Flèche normée pour une console moyennement large  
 maillage 2x2 élément [PLANE 42] du code calcul ANSYS

**- Poutre console mince**

	Elément SBRIE isoparamétrie	Elément SBRIE analytique	Elément Q4	ANSYS Elément [SOLID 82-2D 8 NODE]	ANSYS Elément [PLANE 42]
Maillage	$w$	$w$	$w$	$w$	$w$
2x2	0,915	0,915	0,087	0,998	0,927
2x4	0,966	0,966	0,087	0,999	0,979
6x6	0,985	0,985	0,461	1,001	0,997
8x8	0,990	0,990	0,602	1,002	0,997
12x12	0,994	0,994	0,772	1,002	0,997
10x16	0,995	0,995	0,703	1,002	0,999
Analyt	1,000 (64,52)				

**Tableau 5.3c.** Flèche normée pour une console mince

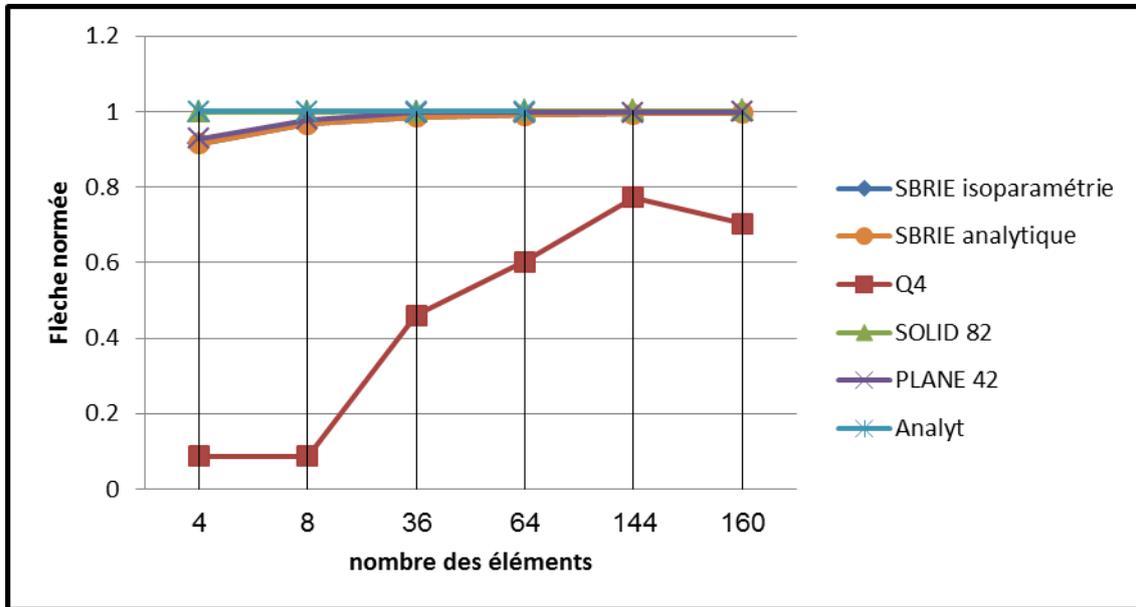


Figure 5.5e. Flèche normée pour une console mince

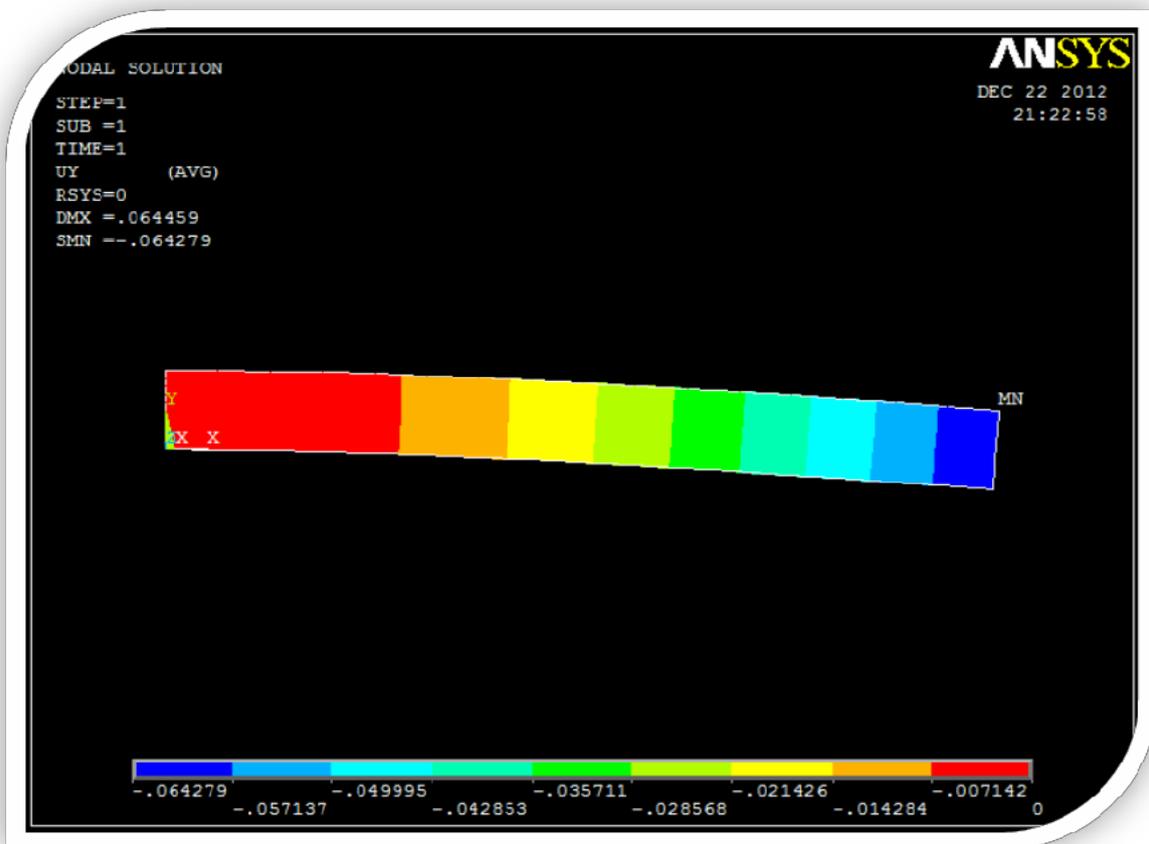
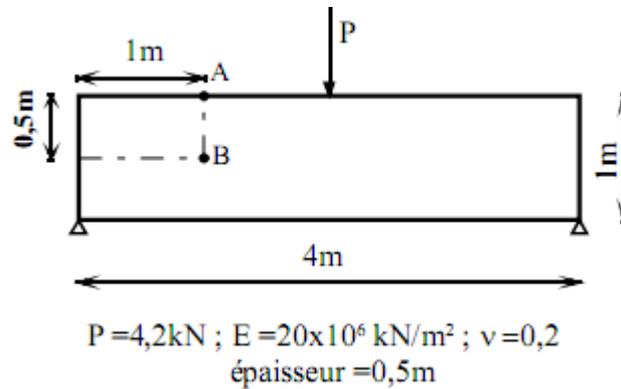


Figure 5.5f. Flèche normée pour une console mince  
 maillage 10x16 élément [PLANE 42] du code calcul ANSYS

### 5.2.4 Poutre simplement appuyée, chargée au milieu :

La poutre large, simplement appuyée dont les détails sont donnés sur la Figure.5.6, est utilisée dans la littérature des éléments finis [Sabi.85a]. Elle est aussi utilisée ici pour tester les performances de l'élément *SBRIE*, et une comparaison est faite avec les résultats disponibles des éléments cités ci-dessus.



**Figure 5.6.** Poutre simplement appuyée chargée au milieu

Les Tableaux 5.4 et 5.5 montrent les résultats obtenus pour les contraintes de flexion normées au point A et les contraintes de cisaillement normées au point B respectivement.

	Elément SBRIE isoparamétrie	Elément SBRIE analytique	Elément Q4	ANSYS Elément [SOLID 82-2D 8 NODE]	ANSYS Elément [PLANE 42]
Maillage	$\sigma_A$	$\sigma_A$	$\sigma_A$	$\sigma_A$	$\sigma_A$
4x12	1,2568	1,2568	1,2164	0,9840	0,9726
6x12	1,0051	1,0051	0,9456	0,9831	0,9870
8x16	0,9886	0,9886	0,9667	0,9826	0,9720
10x20	0,9949	0,9949	0,9756	0,9819	0,9806
Analyt	1,000 (25,2)				

**Tableau 5.4.** Contraintes de flexion normées au point A

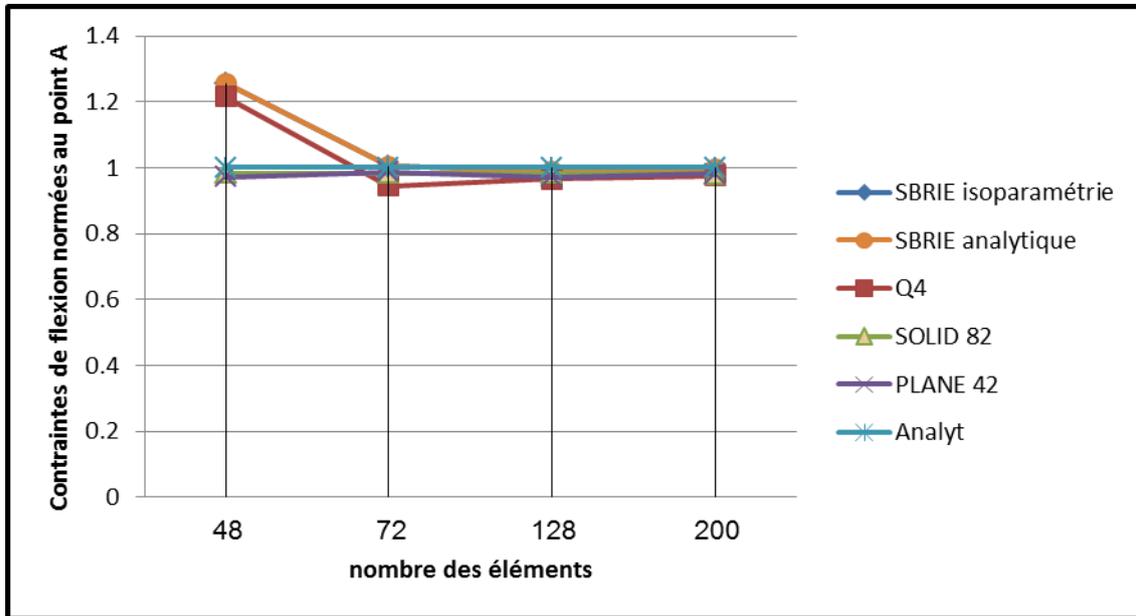


Figure 5.7. Contraintes de flexion normées au point A

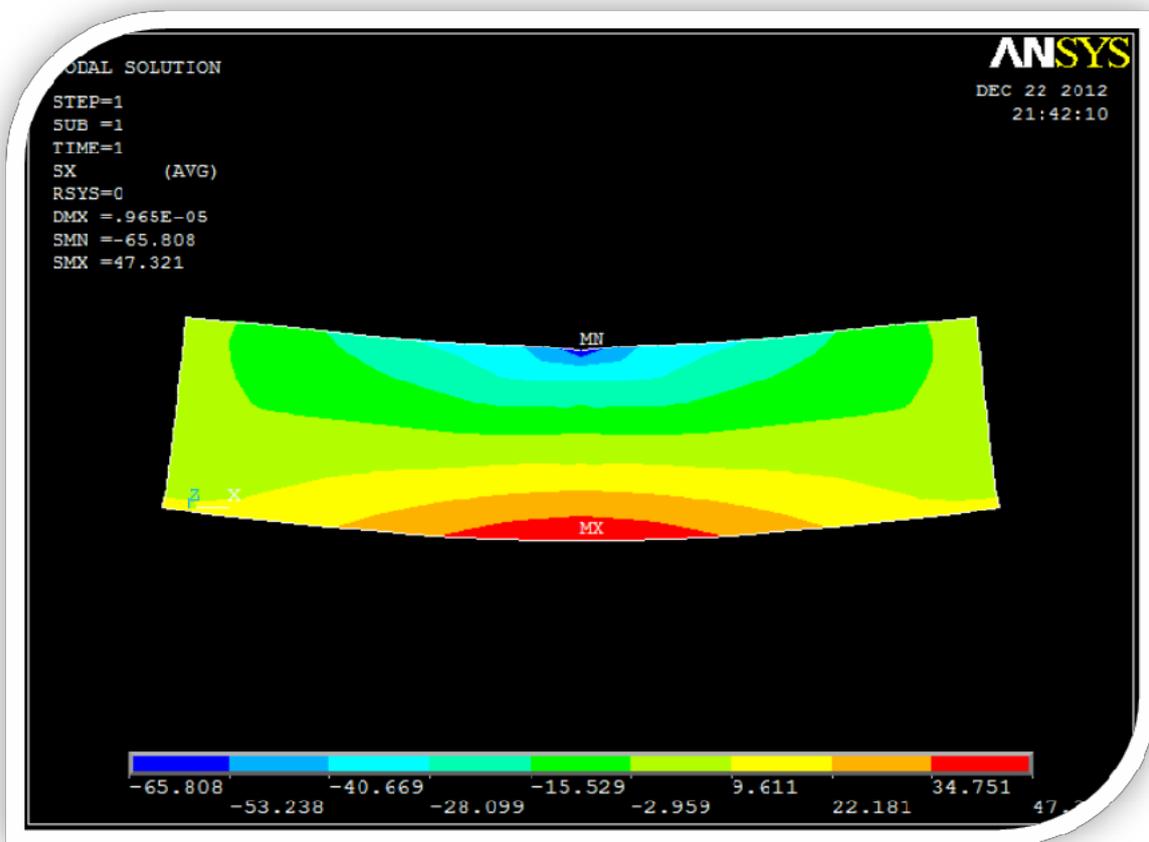


Figure 5.8. Contraintes de flexion normées au point A  
 maillage 10x20 élément [PLANE 42] du code calcul ANSYS

En guise de commentaire, nous constatons que les résultats obtenus avec les éléments **SBRIE** et **Q4** sont beaucoup plus proche à la solution exacte lorsque le nombre des éléments est grand. En ce qui concerne l'élément **SOLID 82**, plus le maillage est raffiné plus les résultats commencent à s'éloigner, petit à petit, de la solution exacte. Enfin, les résultats de l'élément **PLANE42** ne sont pas stables durant les différentes étapes de notre test.

	Elément SBRIE isoparamétrie	Elément SBRIE analytique	Elément Q4	ANSYS Elément [SOLID 82-2D 8 NODE]	ANSYS Elément [PLANE 42]
Maillage	$\tau_B$	$\tau_B$	$\tau_B$	$\tau_B$	$\tau_B$
4x12	0,9560	0,9560	0,8346	1,0222	0,9022
6x12	0,9650	0,9650	0,8657	1,0389	0,9571
8x16	0,9784	0,9784	0,9233	1,0072	0,9733
10x20	0,9868	0,9868	0,9511	1,0132	0,9850
Analyt	1,000 (6,3)				

**Tableau 5.5.** Contraintes de cisaillement normées au point B

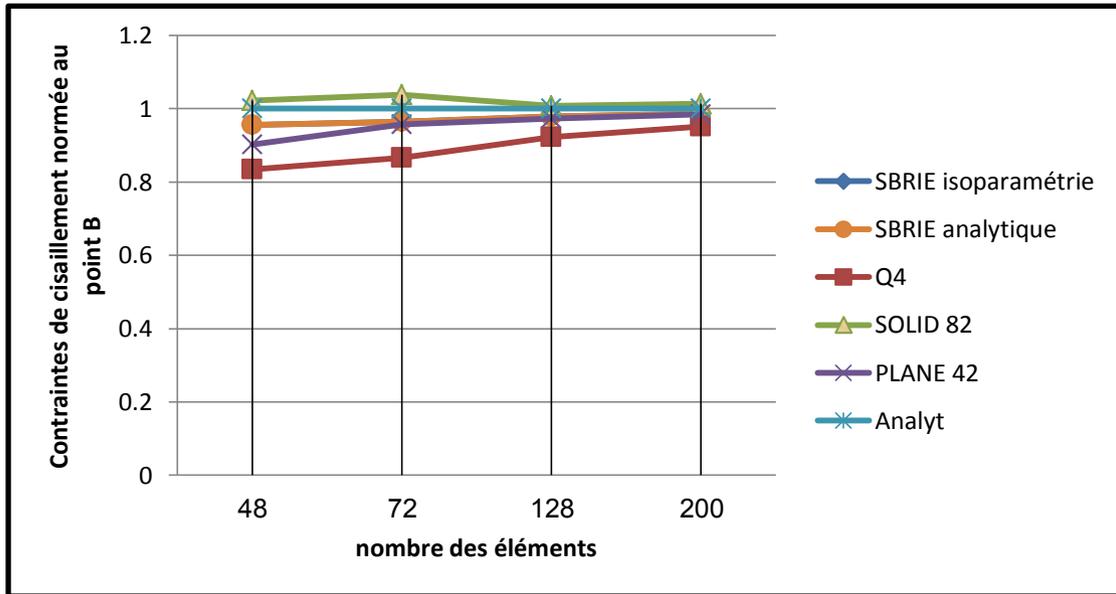


Figure 5.9. Contraintes de cisaillement normées au point B

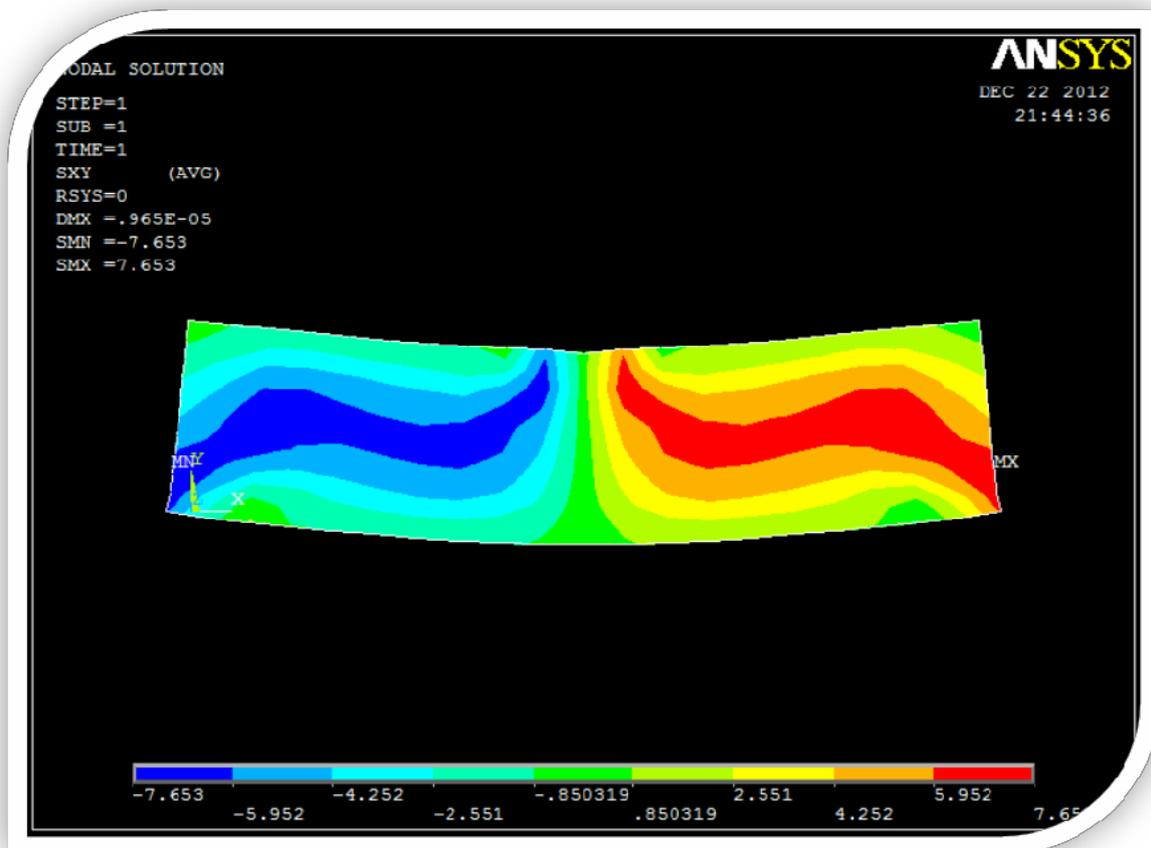
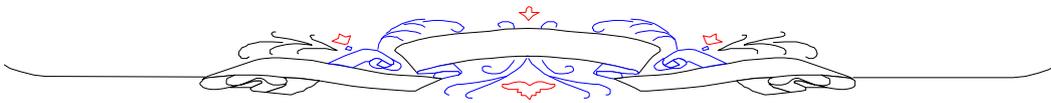
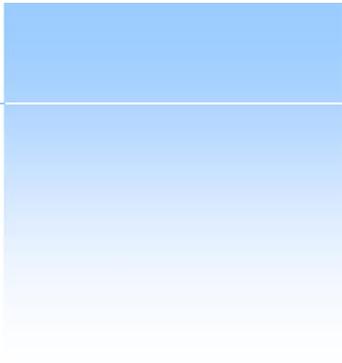


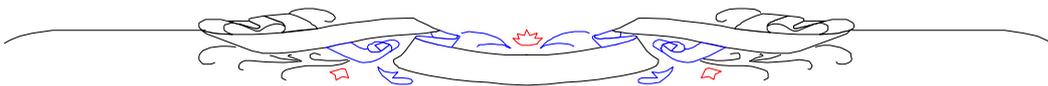
Figure 5.10. Contraintes de cisaillement normées au point B maillage 10x20 élément [PLANE 42] du code calcul ANSYS

Commentant le tableau 5.5 représenté par la figure 5.8, nous remarquons que les résultats des éléments *SBRIE*, *PLANE 42* et *Q4* se rapprochent de la solution exacte chaque fois le maillage est raffiné mais l'élément *SBRIE* et *PLANE 42* donnent des résultats meilleurs par rapport à l'élément *Q4*.

Les résultats de l'élément *SOLID 82* ne sont pas stables durant toutes les étapes de ce test.



## *CONCLUSIONS*



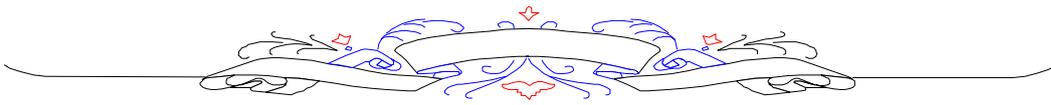
## Conclusion

Dans notre travail nous avons fait l'adaptation de la formulation isoparamétrique dans l'approche en déformation afin de modéliser les structures planes, avec l'application des éléments membranaires.

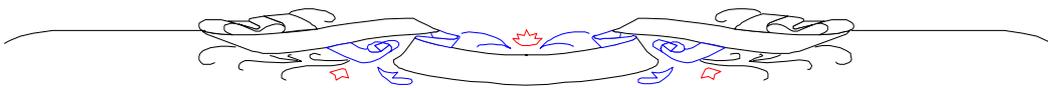
Nous avons introduit la notion d'isoparamétrie pour la famille des éléments finis basés sur l'approche en déformation et présenté les éléments finis membranaires à champ de déformation Sabir [Sab.95a] et l'élément Q4.

Les éléments étudiés Sabir [Sab.95a] et Q4 avec deux degré de liberté formulés en isoparamétrie ont été mis sous quelques tests et applications pour la validation de la crédibilité des éléments isoparamétrique. La comparaison des résultats des éléments intégrés dans le code *Ansys* et la solution analytique existante avec celles des éléments (Sabir et Q4) a permis de tirer les conclusions suivantes :

1. La convergence vers la solution exacte pour les éléments isoparamétriques à champs de déformation est toujours liée à la densité de maillage.
2. Les éléments '*PLANE 42 et SOLID 82-2D*' sont des éléments sensibles à la flexion et ont un comportement stable comparé à l'élément *Q4*. Par ailleurs le déplacement des premiers éléments reste proche à la solution exacte.
3. Pour le cas des tests du rapport de forme pour une poutre-console, l'élément *SBRIE* présente des résultats qui sont proches des valeurs données par la théorie pour tous les cas considérés.



# *BIBLIOGRAPHIE*



**BIBLIOGRAPHIE**

- [Ahma.70] Ahmad S., Irons B.M. and Zienkiewick O.C., Analysis of thin and thick shell structure by curved elements, *IJNME*, Vol.2, pp. 419-451, 1970.
- [Ashw.71a] Ashwell D.G., Sabir A.B., Limitation of certain curved finite elements applied to arches, *IJMS* Vol. 13, pp. 133-139, 1971.
- [Ashw.71b] Ashwell D.G., Sabir A.B. and Roberts T.M., Further studies in the application of curved finite elements to circular arches, *IJMS* Vol.13, pp. 507-517, 1971.
- [Ashw.72] Ashwell D.G and Sabir A.B., A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, *IJMS* Vol. 14, pp. 171-183, 1972.
- [Assa.99] Assan A.E., Analysis of multiple cylindrical stiffened barrel shell structures by strain based finite element. *Thin Walled Structures* (35): 233-253. 1999.
- [Caze.10] Cazenave .M., Méthode des éléments finis. Approche pratique en mécanique des structures. Dunod, Paris, 2010
- [Cheu. 92] Cheung .Y. K. and Chen Wanji , Refined Hybrid Method for plane Isoparametric element using an orthogonal approach, Vol. 42, No. 5, pp. 683 - 694. 1992.
- [Cook.74] Cook R . D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 1974.
- [Barl.04] Bartels, S., Carstensen, C. and Hecht, A. (2004), “P2Q2Iso2D = 2D Isoparametric FEM in Matlab”, *Journal of Computation and Applied Mathematics* , Vol. 192, No. 2, pp. 219 - 250.
- [Bars.75] Roshdy S. Barsoum , Further Application Of Quadratic Isoparametric Finite Elements To Linear Fracture Mechanics Of Plate Bending and General Shelle , *Int Journ of Fracture* 11 (1975)

- [Bela.98a] Belarbi M.T. et Charif A., Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol.7, N 4, pp. 439-458, Juin 1998.
- [Bela.98b] Belarbi M.T. et Charif A., Nouveau Quadrilatère « SBQ4 » avec Drilling rotation *Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur CIMASI'98 27-29 octobre, Casablanca*, Vol. 2, pp. 136-141, 1998.
- [Bela.98c] Belarbi M.T. et Charif A., Nouvel hexaèdre simple « SBH8 » pour l'étude des plaques minces et épaisses, *Les annales Maghrébines de l'Ingénieur*, Vol.12, N Hors série, extrait de l'acte du 6<sup>ème</sup> Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur CMMNI6, Tunis 24-26 Nov., Vol. 2, pp. 632-627, 1998.
- [Bela.99] Belarbi M.T. et Charif A., Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol.8, N 2, pp. 135-157, 1999.
- [Bela. 00] Belarbi M.T., Développement de nouveaux éléments finis à modèle en déformation, application linéaire et non linéaire. *Thèse de Doctorat, Université de Constantine*, 235 pages, Février 2000
- [Bela.05] Belarbi M.T., and Bourezane M., On improved Sabir triangular element with drilling rotation, *Revue Européenne de Génie Civil*, Vol.9, N9-10, pp. 1151-1175, 2005.
- [Belo.05] Belounar L. and Guenfoud M., A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin Wall Structures*, Vol.43, pp. 47-63, 2005.
- [Bjor.84] Bjorn .J. D. Esping, Minimum weight design of membrane structures using eight node Isoparametric elements and numerical derivatives, Vol. 19, N 4, 1984, pp. 591- 604.

- [Bjor.85] Bjorn .J. D. Esping, Analytical derivatives of structural matrices for an eight node isoparametric membrane element with respect to a set of design variables, Vol. 21, N 3, 1985, pp. 387- 394.
- [Bolz.01] Bolzon G., Formulation of a triangular finite element with an embedded interface via isoparametric mapping, *Computational Mechanics*, Vol. 27, Issue.6, 2001, pp. 463- 473.
- [Bour.06] Bourezane M., Utilisation of the strain model in the analysis of structures. *Thèse de Doctorat*, Université de Biskra, Juillet 2006.
- [Bouz.86] Bouzrira C., Strain based sector with drilling rotation *Master degree*, University college of Cardiff (U.K). 1986.
- [Dawe.84] Dawe D. J., Matrix and finite element displacement analysis of structures. Clarendon press. Oxford. (1984).
- [Djou.90] Djoudi M.S., Strain based finite elements for linear and geometrical nonlinear analysis of structure, *PhD thesis* University of Wales College of Cardiff (U.K). 1990.
- [Djou.95] Djoudi M.S. and Sabir A.B., Finite element analysis of singly and doubly curved dams of constant or variable thickness, *Thin walled structures* (21), 279-289, 1995.
- [Djou.03] Djoudi M.S. and Bahai H., A shallow shell finite element for the linear and non linear analysis of cylindrical shells. *Engineering structures*. Vol. 25, 769-778, 2003.
- [Djou.04a] Djoudi M.S. and Bahai H., A cylindrical strain based shell element for vibration analysis of shell structures, *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 40, 1947-1961, 2004.

- [Djou.04b] Djoudi M.S. and Bahai H., Strain based finite element for vibration of cylindrical panels with openings. *Thin Walled Structures* Vol. 42, 575-588, 2004.
- [Erga.68] Ergatoudis I., Iron B.M., and Zeinkiewicz O.C., Curved Isoparametric 'Quadrilateral' elements for Finite Element Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No.1, 1968, pp. 31- 42.
- [Flug.66] Flugge W.and Fosberge K., Point load on shallow elliptic paraboloid, *J. Appl. Mech.* Vol. 33, pp. 575-585, 1966.
- [Fran.91] Frey Francois et Jaroslav Jirousek, Analyse des structures et milieux continus , Méthode des éléments finis , *Volume 6 , Presses polytechniques et Universitaires Romandes , Lausanne 2001.*
- [Gosli.96] Gosling. P. D and Lewis .W. J, Optimal Structural Membranes-I. Formulation of A Curved Quadrilateral Element For Surface Definition , *Computers & Structures* , Vol. 61. No. 5, pp. 871-883. 1996.
- [Grut. 94] F. Gruttmann and W. Wagner, On the numerical analysis of local effects in composite structures , *Composite Structures 29 (1994) 1-12*
- [Hama.10] HAMADI .D. and Maalem T., Presentation of an Efficient Parallelepiped Finite Element Based on the Strain Approach "SBP8C". *Proceedings of the World Congress on Engineering 2010 Vol III . WCE 2010, June 30 - July 2, 2010, London, U.K.*
- [Hime.11] Himeur .M. and Guenfoud M., Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach. *DOI:10.3166/EJCM.20.455-485 © 2011 Lavoisier Paris*

- [Jame.12] James. Kai A, Edmund Lee and Joaquim R.R.A. Martins, Stress-based topology optimization using an isoparametric level set method, *Finite Elements in Analysis and Design* 58 (2012) 20–30 .
- [Jone.85] Jones R. , Watters K. C. and Callinan J., A Hybrid Contour Method, *Journal of Structural Mechanics*, Vol.13, Issue.1, 1985.
- [Kiku.99] Kikuchi, F., Okabe, M. and Fujio, H. (1999), “Modification of the 8-Node Serendipity Element, *Journal of Finite Element Analysis Design*, Vol. 37, No. 04, pp. 325 - 339.
- [Krej. 91] I. Kreja and Z. Cywinski, Degenerated Isoparametric Finite Elements in nonlinear analysis of 2d-problems, Vol. 41, No. 05, pp. 1029 - 1040.1991
- [Lui.03] Liu .G. R. and Quek .S. S., *The Finite Element Method: A Practical Course* .First published 2003
- [Maal.02] Maalem T., Investigation numérique des problèmes de flexion de plaque par un élément fini parallélépipédique basé sur le modèle en déformation, *mémoire de Magistère*, Université de Constantine. 2002.
- [Maal.07] Maalem T., contribution du modele en deformation dans l’analyse des structures, *Thèse de Doctorat, Université de Biskra, juin 2007.*
- [Mcne. 81] N.J. Mcneill and J.S. Hansen, an accuracy study for a class of rectangular isoparametric finite elements, *computer methods in applied mechanics and engineering* 25 (1981) 335-341.
- [Mloi.81] Maloine S.A., Editeur Paris et Les Presses de l'Université Laval Québec 1981

- [Mous.02] Moussa A., Tayeh S., A rectangular finite element for plane elasticity with in-plane rotation. *Proceedings of the sixth Conference on Computational Structures Technology*. Civil-Comp press Edinburgh, UK, 2002
- [Nati.00] National Agency for Finite Element Methods and Standards (NAFEMS), UK, “The Standards NAFEMS Benchmarks”, TNSB, Rev. 3, October 1990
- [Rebi.13] Rebiai .C. and Belounar .L., A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis. *archives of civil and mechanical engineering 13 (2013) 72 –81*
- [Sabi.71] Sabir A.B. and Ashwell D.G., A comparaison of curved beam finite elements when used in vibration problems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.18, N°11, pp. 555-563, 1971.
- [Sabi.72] Sabir A.B. and Lock A.C., A curved cylindrical shell finite element, *IJMS*. Vol.14, pp. 125-135, 1972.
- [Sabi.73] Sabir A.B. and Rao A.K., Flexure of thick rectangular plates *J.Appl Mech ASME*, pp. 298-299, 1973.
- [Sabi.75] Sabir A.B. Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions, *The Mathematics of Finite Elements and Application II*. Editor J.R. Whiteman, Chapter 34, 411-421, Academic Press, 1975.
- [Sabi.78] Sabir A.B. and Ashwell D.G., Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells, *The Mathematics of Finite Elements and Application III*. Editor J.R. Whiteman, Academic Press, 1978.

- [Sabi.82] Sabir A.B. and Charchafchi T.A., Curved rectangular and quadrilateral shell elements for cylindrical shells. *The Mathematics of Finite Elements and Application IV*. Editor J.R. Whiteman, 231-239, Academic Press, 1982.
- [Sabi.83a] Sabir A.B. A new class of Finite Elements for plane elasticity problems, *CAFEM 7<sup>th</sup>*, *Int. Conf. Struct. Mech. In Reactor Technology, Chicago, 1983*.
- [Sabi.83b] Sabir A.B. and Chow F.Y., Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes., *Int. Conf. on instability and plastic collapse of steel structures*, Manchester University.1983.
- [Sabi.84] Sabir A.B., Strain based elements for the analysis of shear walls., *Proc. Int. Conf. on tall buildings, 447-453*, Hong Kong University.1984.
- [Sabi.85a] Sabir A.B., A Rectangular and Triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, *Chapter 9 in proceeding of the second international conference on variational methods in engineering*, Southampton University, Springer-verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.
- [Sabi.85b] Sabir A.B. and Ramdhani F., A shallow shell finite element for general shell analysis, *Variational Methods in Engineering, proceeding of the 2<sup>nd</sup> international conference*, Southampton University, England, 1985.
- [Sabi.86] Sabir A.B. and Salhi H.Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *Res. Mechanica* 19, pp. 1-16, 1986.
- [Sabi.95a] Sabir A.B. and Sfindji A., Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. *Thin-walled Structures* 21.pp 225-232.1995.

- [Sabi.95b] Sabir A.B. and Djoudi M.S., Shallow shell finite element for the large deflection geometrically nonlinear analysis of shells and plates. *Thin-walled Structures* 18, pp 67-82 .1995
- [Sabi.96] Sabir A.B. and Moussa A.I., Finite element analysis of cylindrical conical storage tanks using strain based elements. *Structural Engineering Review. Vol.8, pp 367-374.1996*
- [Sabi.97a] Sabir A.B. and Moussa A.I., Analysis of fluted conical shell roofs using the finite element method. *Computers and Structures* 64, 1-4: pp 239-251. 1997.
- [Sabi.97b] Sabir A.B. and Davies G.T., Natural frequencies of plates with square holes when subjected to in -plane uniaxial, biaxial or shear loading. *Thin-walled Structures* (28): pp 321-335. 1997.
- [Sabi.97c] Sabir A.B. and Davies G.T., Natural frequencies of square plates with reinforced central holes subjected to in-plane loads. *Thin-walled Structures* (28): pp 337-353. 1997.
- [Spil.83] Spilker R.L., Hybrid-Stress Reduced Mindlin Isoparametric Elements for the Analysis of Thin Plates, *Journal of Structural Mechanics*, Vol.11, Issue.1, 1983.
- [Zlok.04] Zloković .G., Maneski .T. and Nestorović. M., Group theoretical formulation of quadrilateral and hexahedral isoparametric finite elements *Computers and Structures* 82(2004) 883–899.