



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED KHEIDER DE BISKRA

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

N° d'ordre :.....

Série :.....

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister en
Electronique

Option

Architecture des systemes

Intitulé :

**Commande des systèmes linéaires à paramètres variables (LPV):
Approches robustes, gain programmable et LMI.**

PAR

DJEBBAR MOHAMED

Soutenu le :/...../2006

Devant le jury

Nom et prénoms	Grade	Etablissement	Qualité
Dr S. M. Mimoune	Prof.	Université de Biskra	Président
Dr N. Goléa	Prof.	Centre Univ. Oum El Bouaghi	Rapporteur
Dr A. Maakouf	M.C.	Université de Batna	Examineur
Dr A. Benakcha	M.C.	Université de Biskra	Examineur
M. Boumehrez	C.C.	Université de Biskra	Invité

Introduction Générale

Plusieurs processus physiques peuvent être modélisés par des lois mathématiques, qui correspondent le plus souvent à un ensemble d'équations algébriques et différentielles non linéaires. Comme il est tout à fait clair que les lois de la physique ne fournissent qu'une représentation globale des phénomènes, donc, il y a toujours des incertitudes et des erreurs de modélisation liées à des phénomènes négligés et à la précision des valeurs des paramètres du modèle de sorte qu'on ne peut décrire exactement par un modèle mathématique le comportement d'un processus physique. Le problème de commande consiste à utiliser le modèle obtenu pour concevoir des régulateurs qui garantissent la stabilité et un niveau de performance acceptable malgré les incertitudes sur les paramètres ou les dynamiques négligées dans le modèle du processus.

Dans le cas où le modèle est linéaire à temps invariant (LTI), il existe plusieurs méthodes reposent sur l'étude de certaines fonctions de transfert en boucle fermée [11], qui permettent d'envisager la résolution du problème de synthèse.

Parmi les approches multivariées, il convient de signaler la méthode LQG [30 - 38] dont, on connaît parfaitement l'ordre du modèle ainsi que les valeurs numériques précises de ses coefficients. Mentionnons également la méthode d'optimisation H_∞ qui depuis quelques années fait l'objet de nombreux développements, aussi bien sur le plan théorique qu'applicatif. La synthèse H_∞ est particulièrement intéressante. Elle permet de prendre en compte, a priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges, simplifiant ainsi la synthèse. En effet les spécifications fréquentielles sont naturellement prises en compte par la synthèse H_∞ . Les spécifications temporelles classiques (temps de montée, rejection de perturbations, atténuation de bruit, erreur statique, dépassement) peuvent être facilement interprétées dans le domaine fréquentiel comme nous le verrons (dans le deuxième chapitre) au travers d'un exemple simple. Le second avantage est un avantage méthodologique. En effet le critère H_∞ est construit directement à partir du cahier des charges, ce qui est particulièrement intéressant pour des spécifications nombreuses et complexes. Or les spécifications sont facilement traduisibles en terme de gabarits fréquentiels. Et les gabarits fréquentiels correspondent aux pondérations en entrée et en sortie que l'on retrouve dans la synthèse H_∞ pondérée. Ainsi le choix des gabarits se fait de façon méthodologique. Le troisième avantage est basé sur la représentation fréquentielle. Or cette

représentation fréquentielle est à la base de l'analyse de la robustesse via le théorème du petit gain.

La synthèse H_∞ permet de synthétiser des correcteurs robustes en prenant en compte explicitement des incertitudes dynamiques. De plus, cette approche peut être étendue à la désensibilisation de la boucle fermée aux incertitudes paramétriques et aux non linéarités [15]. En d'autres termes, on utilise un seul critère, le critère H_∞ pour assurer la performance et la robustesse : un critère unique pour ajuster au mieux le compromis performance/robustesse.

Mais qu'advient-il si maintenant le modèle mathématique, conserve un caractère fortement non stationnaire ? Occulter cette propriété en traitant la non stationnarité comme une incertitude variant dans le temps constitue une approche excessivement conservatrice du problème, Une méthode sans doute mieux adaptée et utilisée dans l'industrie depuis de nombreuses années, repose sur la théorie de la commande adaptative, permet, grâce à une estimation en ligne des paramètres, la prise en compte explicite des aspects non stationnaires. De cette manière, on pourra espérer atteindre un niveau de performance relativement élevé. En contrepartie, une telle méthode, utilisée dans sa version actuelle, n'est pas robuste aux perturbations non identifiées de modèle, et se heurte aux difficultés inhérentes aux systèmes à évolutions rapides.

L'approche développée dans ce mémoire repose sur le concept de systèmes linéaires à paramètres variables (LPV). Plus précisément, on supposera que le modèle non stationnaire admet une description temporelle de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \\ \forall t \geq 0, \theta(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \cdots \quad \theta_r(t)]^T \in P \subset \mathbb{R}^r \end{cases}$$

Les éléments de la représentation d'état du modèle dépendent donc explicitement du paramètre variable $\theta(t)$. Ce dernier, évoluant dans le domaine borné P ne traduit aucunement une incertitude mais une variation connue faisant partie intégrante du modèle non stationnaire. Dans la suite on supposera donc ce paramètre accessible à la mesure en temps réel.

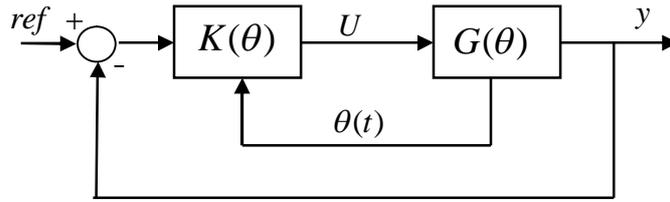


Figure 1.1 : Structure de commande LPV

Comme le met en évidence le schéma de rétroaction ci-dessus, on retiendra pour le correcteur, une structure identique à celle du système. Ainsi, la dépendance paramétrique sera intégralement recopiée. Ce choix est à l'origine des extensions des méthodes déjà citées de synthèse H_∞ dans le cadre des systèmes LPV. En l'absence d'une prise en compte explicite de la structure des incertitudes paramétriques susceptibles d'affecter le modèle non stationnaire, il est intéressant de souligner la convexité des caractérisations obtenues. En effet, celles-ci prendront la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes inégalités matricielles linéaires (LMI) D'un point de vue numérique, il existe depuis peu des outils performants [18] qui permettent d'aborder cette classe de problèmes et donc d'envisager des applications réalistes.

Organisation du mémoire

Le mémoire est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre (Modélisation des systèmes LPV) est consacré à l'analyse en stabilité des systèmes dynamiques, où nous allons développer deux grandes approches. La première s'appuie sur la théorie de Lyapunov et la seconde repose sur un concept plus récent de stabilité entrée/sortie. Nous avons insisté aussi sur les difficultés soulevées par l'étude des systèmes non stationnaires dans le cas général et soulignerons de ce fait, l'importance du choix d'un modèle.

Notre étude est limitée à la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) et la modélisation polytopique permettant la simplification de la mise en oeuvre des méthodes d'analyse et a fortiori de synthèse.

Le deuxième chapitre (L'approche H_∞) : Dans ce chapitre on essaye de présenter (pour les systèmes LTI) l'approche H_∞ qui permet de synthétiser des correcteurs robustes en prenant en compte explicitement des incertitudes dynamiques. Cette approche peut être étendue à la désensibilisation de la boucle fermée aux incertitudes paramétriques et aux non linéarités. En d'autres termes, on utilise un seul critère, le critère H_∞ pour assurer la performance et la robustesse

Le troisième chapitre (LMI) : Dans ce chapitre nous allons voir, comment nous pouvons exprimer le problème standard H_∞ sous forme d'un problème d'optimisation convexe, et de chercher la loi de commande en utilisant les LMIs.

Le quatrième chapitre (synthèse de lois de commande à paramètre variable) : On essaye à travers ce dernier chapitre d'étudier la synthèse des lois de commande à paramètre variable, en utilisant la modélisation polytopique, que nous avons déjà vue dans le premier chapitre. Enfin, nous donnons la simulation de quelques exemples décrits sous forme d'un modèle LPV de type polytopique, dont le but est de trouver une loi de commande robuste vérifiant un certain niveau de performance, en se basant sur l'approche H_∞ et l'outil mathématique LMI

Les exemples de la simulation sont les suivants :

La première application est une commande d'un robot sous-actionné dont l'objectif est de maintenir un bras libre dans une position verticale comme un pendule inversé en utilisant la rotation d'un bras. Ce dernier, est mis en marche par un moteur conduit par un amplificateur de puissance

La deuxième application correspond à un intégrateur suivi d'un transfert de premier ordre, dont la constante du temps varie entre 7.5ms et 150ms.

La troisième application est consacrée au pilotage longitudinal d'un missile air-air sur un domaine de vol très étendu. Les variations paramétriques seront donc particulièrement importantes

Chapitre I

Modélisation des systèmes LPV

Introduction

L'hypothèse sans aucun doute la plus classique, en théorie de la commande, est celle de la linéarité. Certes, il s'agit d'une contrainte assez forte, dans la mesure où les systèmes physiques sont rarement linéaires. Toutefois, ils le deviennent, presque, dans le cadre d'une étude des petits mouvements. On parlera dans ce cas de stabilité locale. Notons par ailleurs que linéarité ne signifie pas stationnarité et que, finalement la classe des systèmes linéaires à paramètres variables que nous introduisons dans ce chapitre est souvent plus générale qu'on ne le pense.

Nous débuterons ce chapitre par une description générale sur l'analyse en stabilité des systèmes dynamiques; nous allons développer deux grandes approches. La première s'appuie sur la théorie de Lyapunov et la seconde repose sur un concept plus récent de stabilité entrée/sortie

Nous insisterons aussi sur les difficultés soulevées par l'étude des systèmes non stationnaires dans le cas général et soulignerons de ce fait, l'importance du choix d'un modèle.

Nous limiterons ici notre étude à la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) et la modélisation polytopique qui permette la simplification de la mise en oeuvre des méthodes d'analyse et a fortiori de synthèse.

Enfin nous allons présenter quelques exemples concernant la classe des systèmes linéaires à paramètres variants et leur modélisation polytopique.

1 Stabilité des systèmes dynamique

1.1 Définition

La stabilité des systèmes en boucle fermée est l'un des problèmes les plus importants de la théorie de commande. La boucle de retour est la structure qui permet d'obtenir les objectifs de la commande en terme de stabilité. Elle permet souvent de stabiliser un système instable en boucle ouverte.

Dans la théorie de la stabilité générale, deux approches peuvent être utilisées :

- L'approche de la stabilité entrée/sortie qui traite des relations entre les sorties du système et ses entrées
- L'approche de Lyapunov qui fait référence aux propriétés de la représentation interne du système en terme de variable d'état, et d'effet des perturbations résultantes du changement des conditions initiales

1.2 Stabilité au sens de Lyapunov :

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire; si l'énergie totale d'un système se dissipe continûment (c'est-à-dire, décroît avec le temps), alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il devient stable).

Donc, la théorie de Lyapunov traite la stabilité du mouvement. Par mouvement, on entend plus précisément un déplacement le long des trajectoires solutions d'un système d'équations différentielles de la forme [09]:

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0 \quad (1.1)$$

soumis aux conditions initiales :

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

$$f(0, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

$x \equiv 0$, est une trajectoire d'équilibre. Cette dernière notion est fondamentale dans la théorie de Lyapunov,

1.2.2 Stabilité des trajectoires d'équilibre

De manière très générale, une trajectoire d'équilibre est dite stable, si le système, initialisé dans un voisinage de la trajectoire, converge finalement vers elle.

1.2.3 Stabilité asymptotique uniforme globale

Théorème (1.1) [26] : Le système (1.1) est globalement, uniformément, asymptotiquement stable s'il existe une fonction continûment différentiable, V définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} , telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout t positif :

$$\begin{cases} \alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \end{cases} \quad (1.3)$$

où α_1, α_2 et α_3 sont des fonctions définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ , continues, strictement croissantes, non bornées et nulles à l'origine.

Corollaire (1.1):

Si les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites avec des fonctions α_i de la forme :

$$\alpha_i(\|x\|) = \lambda_i \|x\|^c, \quad \lambda_i > 0, \quad c > 0$$

Alors le système est globalement exponentiellement stable.

Interprétation

En vertu des propriétés que lui impose le théorème (1.1) la fonction $V(t, x)$ est définie positive tandis que sa dérivée temporelle le long des trajectoires du système reste négative. On peut voir cette fonction comme une mesure de l'énergie du système à un instant donné. La stabilité s'interprète alors physiquement par la décroissance de l'énergie le long des trajectoires. C'est l'idée centrale des travaux de Lyapunov, c'est pourquoi l'on retient ce type de fonction sous le nom de fonction de Lyapunov.

Une telle fonction, qui prouve la stabilité asymptotique uniforme d'un système est une fonction de Lyapunov.

1.2.4 La méthode directe de la stabilité au sens de Lyapunov

La méthode directe de la stabilité au sens de Lyapunov cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative

Théorème (1.2) [32] : (stabilité globale) L'état d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continûment dérivable $V(x)$ telles que :

$$V(x_e) = 0 \quad (1.4)$$

$$V(x) > 0, \forall x \neq x_e. \quad (1.5)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq x_e. \quad (1.6)$$

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov, et ne permet pas de conclure si une telle fonction n'est pas trouvée. Une fonction de Lyapunov candidate est une fonction définie positive dont, on test la décroissance autour de la trajectoire d'équilibre.

L'étude des méthodes qui permettent de construire une fonction de Lyapunov candidate pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies dont la revue dépasse le cadre de ce mémoire.

En pratique, afin de réduire la complexité, la fonction de Lyapunov est choisie parmi une famille de fonctions prédéfinies. Il s'agit de famille de fonctions de Lyapunov quadratique notamment les fonctions définies positives.

1.2.5 Fonction Lyapunov quadratique

Le choix le plus classique consiste à utiliser une fonction quadratique du type :

$$V(x) = x^T P x, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad P = P^T > 0 \quad (1.7)$$

donc trouver une fonction de Lyapunov revient à trouver une matrice définie positive P .

1.3 Stabilité au sens BIBO: (Bounded Input Bounded Output)

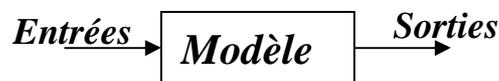


Figure 1.1 : modèle entrée/sortie

1.3.1 Condition fondamentale de stabilité :

Un système est stable au sens BIBO si pour n'importe quelle entrée bornée correspond une sortie bornée.

Soit l'entrée $u(t)$ d'un système mono variable, où

$$|u(t)| \leq M < \infty \quad (1.8)$$

pour des conditions initiales nulles, la variable de sortie $y(t)$ est :

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (1.9)$$

on calcule

$$|y(t)| = \left| \int_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^\infty |h(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau \leq M \int_0^\infty |h(\tau)| d\tau$$

la sortie est bornée, c'est-à-dire $|y(t)| < \infty$

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (1.10)$$

la relation (1.10) est valable lorsque la réponse impulsionnelle tend vers zéro

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

alors, la stabilité BIBO peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour des entrées bornées, les réponses du système sont bornées, de petits changements sur les entrées entraînent de petits changements sur la sortie.

1.3.2 L_q -stabilité [09] :

Définition : L'opérateur H_{x_0} (ou le système associé) est dit L_q -stable si :

$$\begin{cases} \forall u \in L_{q,e}^m, H(u) \in L_{q,e}^m \\ \exists(\gamma, \beta) / \forall u \in L_{q,e}^m, \forall T > 0, \|H(u)_T\|_q \leq \gamma \|u_T\|_q + \beta \end{cases} \quad (1.11)$$

S'il existe une valeur γ vérifiant la condition (1.11), alors il en est de même de toutes les valeurs supérieures. Aussi, nous nous intéresserons à la plus petite de ces valeurs, que nous appellerons gain L_q de l'opérateur H_{x_0} .

β : est un terme résiduel qui devient nul en l'absence de conditions initiales.

On vérifiera simplement que pour les systèmes L_q stables causaux, on a :

$$u \in L_q^m \Rightarrow H(u) \in L_q^p \text{ et } \|H(u)\| \leq \gamma \|u\| + \beta \quad (1.12)$$

En effet, la L_∞ -stabilité est directement reliée à la notion de stabilité entrée bornée/ sortie bornée, tandis que la L_2 -stabilité correspond à la notion de stabilité, énergie d'entrée finie/ énergie de sortie finie.

1.3.3 Théorème du petit gain

Cette approche de la stabilité est complémentaire de la précédente. Plus précisément, son but essentiel est de faciliter l'analyse des interconnexions des systèmes.

Théorème (1.3) [09] : Forme générale

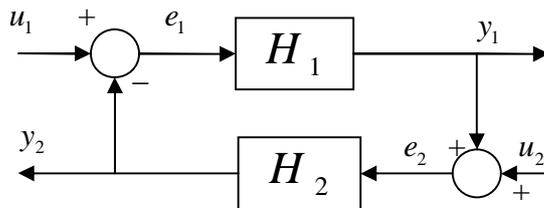


Figure 1.2 : Schéma d'interconnexions simplifié

Etant donnés deux opérateurs H_1 et H_2 de gains respectifs γ_1 et γ_2 . Le système en boucle fermé est stable, si : $\gamma_1\gamma_2 < 1$

Alors, $\forall u_1 \in L_{q,e}^m, \forall u_2 \in L_{q,e}^m, \forall T > 0$,

$$\|(e_1)_T\|_q \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \left(\|(u_1)_T\|_q + \gamma_2 \|(u_2)_T\|_q + \beta_2 + \gamma_2\beta_1 \right) \quad (1.13)$$

$$\|(e_2)_T\|_q \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \left(\|(u_2)_T\|_q + \gamma_1 \|(u_1)_T\|_q + \beta_1 + \gamma_1\beta_2 \right) \quad (1.14)$$

et donc le système en boucle fermée est L_q -stable, des entrées (u_1, u_2) vers les sorties (y_1, y_2) .

Dans le cas fréquent où u_2 est nul, le schéma précédent se simplifie :

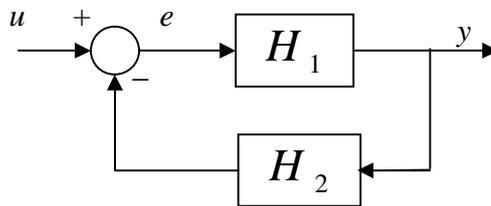


Figure 1.3 : Schéma d'interconnexions simplifié

Et, les mêmes hypothèses sur les opérateurs H_1 et H_2 conduisent alors à l'inégalité :

$$\|y_1\|_q \leq \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2} \|u_1\| \quad (1.15)$$

qui prouve la $L_{q,e}$ -stabilité du système rebouclé, dont le gain est borné par :

$$\gamma = \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2} \quad (1.16)$$

1.3.4 Liens entre la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité entrée/sortie

Une discussion sur les liens existant entre la stabilité au sens de Lyapunov d'une part et la stabilité entrée/sortie d'autre part, présente un réel intérêt, il s'agit d'établir, par exemple la stabilité (BIBO), d'un système à partir d'une fonction de Lyapunov. On s'assure ainsi que le système en question est stable au sens de Lyapunov, et que son gain L_2 est borné par une certaine valeur γ . Cette dernière propriété permet d'évaluer les performances. Plus précisément, le problème posé est celui de la recherche de conditions suffisantes pour que la stabilité asymptotique uniforme entraîne la stabilité entrée/sortie.

1.4 Système linéaire :

L'hypothèse sans aucun doute la plus classique, en théorie de la commande, est celle de la linéarité. Certes, il s'agit d'une contrainte assez forte, dans la mesure où les systèmes physiques sont rarement linéaires. Toutefois, ils le deviennent, presque, dans le cadre d'une étude des petits mouvements. On parlera dans ce cas de stabilité locale. Notons par ailleurs que linéarité ne signifie pas stationnarité et que, finalement la classe des systèmes linéaires à paramètres variables que nous introduisons dans la section suivante est souvent plus générale qu'on ne le pense.

14.1 Classes des systèmes linéaires

Nous présentons dans cette section un certain nombre de résultats sur l'analyse des systèmes linéaires, en insistant toutefois sur les aspects non stationnaires. Dans la mesure où il s'agit de systèmes linéaires, nous nous intéresserons implicitement à la stabilité des trajectoires d'équilibre à l'origine ($x \equiv 0$). Nous nous appuyerons donc essentiellement sur le théorème de stabilité (1.1).

On distingue généralement trois grandes classes de systèmes linéaires. La première classe, concernant les systèmes linéaires à temps invariant, Il s'agit de la classe des systèmes stationnaires. Elle a fait l'objet de multiples publications aussi bien sur le plan théorique qu'au niveau des applications. La littérature montre que l'intérêt qu'elle suscite est toujours actuel. Nous considérons ensuite la classe des systèmes linéaires à temps variant, pour laquelle il existe également quelques résultats. L'étude de cette classe est particulièrement intéressante pour certaines applications. L'exemple type d'un tel système est celui du lanceur dont la masse varie considérablement et de manière prévisible au cours du vol, puisqu'il suit une trajectoire calculée a priori.

La dernière classe, plus large que la précédente est celle des systèmes linéaires à paramètres variables. Elle fera ici l'objet d'une attention particulière car c'est en grande partie sur elle que reposent les méthodes d'analyse et de synthèse étudiées dans ce mémoire.

1.4.2 Trajectoires et caractérisation de la stabilité

Pour tout système linéaire (stationnaire ou non) on peut donner une expression générale des trajectoires suivies par le vecteur d'état x :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad (1.17)$$

où $\Phi(t, \tau)$ est appelée matrice de transition d'état, tandis que le vecteur $f(t)$ matérialise les entrées du système à l'instant t . On aura par exemple, dans le cas des systèmes stationnaires $f(t) = Bu(t)$.

L'expression des trajectoires suggère un critère de stabilité simplifié fondé sur l'utilisation de la matrice Φ .

Théorème (1.4) [09] : La trajectoire d'équilibre $x \equiv 0$ d'un système linéaire est globalement exponentiellement stable si et seulement si :

$$\exists k, \gamma > 0, \forall t \geq t_0 \geq 0, \|\Phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\gamma(t-t_0)} \quad (1.18)$$

Ce critère, s'il permet d'éviter le recours à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov pour prouver la stabilité d'un système linéaire, n'a cependant qu'une portée limitée puisque la détermination explicite de Φ n'est possible que dans le cadre des systèmes invariants.

1.4.3 Systèmes linéaires à temps invariant (LTI) :

Un système linéaire à temps invariant (système LTI) d'ordre n , avec m entrées et p sorties, peut être décrit, dans le domaine temporel, par une représentation d'état de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

où les matrices A, B, C et D appartiennent respectivement aux espaces $\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathbb{R}^{p \times m}$

En dérivant la relation (1.17) on vérifie facilement que :

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A\Phi(t, \tau)$$

d'où il vient :

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \quad (1.20)$$

Pour plus de simplicité, supposons la matrice A diagonalisable, et notons V , la matrice des vecteurs propres de A . Exprimons maintenant la matrice de transition du système en fonction de V et des valeurs propres λ_i de A . Il vient :

$$\Phi(t, \tau) = V \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-\tau)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n(t-\tau)} \end{pmatrix} V^{-1} \quad (1.21)$$

Il est clair, d'après le critère (1.4) que le système LTI (1.19) est exponentiellement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A appartiennent au demi-plan ouvert gauche de \mathbb{C} .

$$\Re(\lambda_i(A)) < 0, i = 1, \dots, n$$

On peut retrouver ce résultat en appliquant le théorème (1.1) Pour cela, il suffit de utiliser la fonction de Lyapunov quadratique (1.7), où la dérivée temporelle de V le long des trajectoires du système s'exprime par :

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x \quad (1.22)$$

d'où l'on déduit finalement une condition suffisante de stabilité :

$$\exists P > 0 / A^T P + PA < 0 \quad (1.23)$$

qui est également nécessaire puisque :

$$\exists P > 0, Q > 0, / A^T P + PA = -Q \Leftrightarrow \Re(\lambda_i(A)) < 0, \forall i = 1, \dots, n$$

et l'on a :

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

1.4.4 Systèmes linéaires à temps variant (LTV)

Par analogie à ce qui précède, nous retiendrons pour ces systèmes la description suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Les éléments $A(t), B(t), C(t)$ et $D(t)$ de la représentation d'état sont ici des fonctions généralement continues et bornées du temps, dont la dépendance est connue a priori.

Il devient maintenant impossible de déterminer une expression générale de la matrice de transition du système. Tout ce que l'on peut en dire, c'est qu'elle vérifie les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} &= A(t)\Phi(t, \tau) \\ \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} &= -\Phi(t, \tau)A(\tau) \end{aligned}$$

Aussi, l'utilisation du critère (1.4) devient-elle particulièrement délicate, dans la mesure où il faut à présent déterminer une borne sur la norme de Φ dont on ne connaît pas de formulation explicite.

De nombreux travaux ont toutefois été entrepris dans ce sens, en s'appuyant sur l'hypothèse fondamentale d'évolution lente du système. Il est en effet naturel de penser que l'on puisse

étendre les résultats relatifs aux systèmes LTI, au cas des systèmes linéaires variant lentement dans le temps.

1.4.5 Systèmes linéaires à paramètres variables (LPV)

Comme le montrent les équations ci-dessous, les systèmes linéaires à paramètres variables, contrairement aux systèmes LTV, ne dépendent pas explicitement du temps [40]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \\ \forall t \geq 0, \theta(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \cdots \quad \theta_r(t)]^T \in P \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (1.25)$$

Les éléments $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ et $D(\cdot)$ de la représentation d'état sont des fonctions matricielles du vecteur de paramètres $\theta(t)$. Elles sont définies de P dans $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathbb{R}^{p \times m}$ respectivement.

Un bref résumé de la situation est illustré par le schéma suivant.

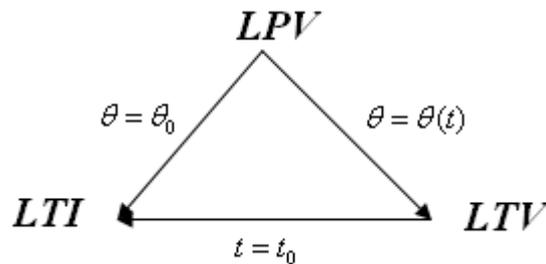


Figure 1.4 : Liens entre systèmes linéaires

où l'on voit qu'un système LTI peut s'interpréter comme un système LPV dont on a figé les paramètres, ou comme un système LTV dont on a figé le temps. Par ailleurs, ce dernier peut être vu comme un système LPV dont on aurait prédéfini une trajectoire.

Remarque : Afin de rendre les formules plus lisibles, il nous arrivera fréquemment d'omettre la dépendance temporelle. Ainsi, le système (1.25) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y(t) = C(\theta)x + D(\theta)u \\ \theta \in P \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (1.26)$$

Les systèmes LPV interviennent fréquemment dans les applications de nombreux systèmes même non linéaires ou incertains, peuvent en effet être approchés par la description (1.25). Nous pourrions par exemple penser à divers processus mécanique où les paramètres clé sont

par exemple la variation de la masse, de la vitesse, ou l'incertitude des coefficients de frottement, de rigidité.

Exemple (1.1) :

On considère à titre d'illustration le modèle en temps continu d'un système mécanique de la figure (1.5) fréquemment utilisé dans la littérature et présenté particulièrement dans [41].

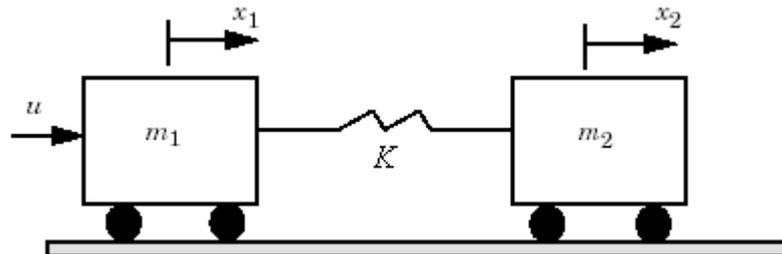


Figure 1.5 : Système mécanique

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{m_1} & \frac{K}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{K}{m_2} & -\frac{K}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = x_2 \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont les positions des deux wagons respectivement, x_3 et x_4 présentent leurs vitesses respectives. m_1 et m_2 sont les masses des deux corps. Le paramètre d'incertitude est le coefficient de la raideur du ressort K ; il est assumé pour être incertain dans la gamme $K_{\min} = 0.5 \leq K \leq K_{\max} = 2$: ce modèle incertain peut être de manière équivalente considéré comme un système LPV, dont l'incertitude dans K est interprété comme un paramètre variable.

Nous pourrions aussi, penser à divers processus chimiques où les paramètres clé sont le plus souvent la température et les concentrations des composants.

Dans chacun de ces cas, bien que l'évolution des paramètres puisse souvent être mesurée en temps réel, elle est rarement connue a priori. En effet, les causes de variations de la pression dynamique, de la vitesse ou encore de la température, sont souvent nombreuses et de surcroît imprévisibles. Ainsi, par opposition à un système LTV dont l'évolution temporelle est entièrement décrite par les équations, un système LPV pourra afficher autant de comportements différents qu'il y a de trajectoires paramétriques admissibles.

Compte tenu de la définition qui a été adoptée, nous entendons par trajectoires admissibles, toutes celles dont les points appartiennent à chaque instant au domaine P de l'espace \mathbb{R}^n . Il aurait été plus juste et certainement plus précis, de définir P comme un domaine de l'espace-temps qui décrirait directement un ensemble de trajectoires ayant toutes un sens physique, La caractérisation que nous avons retenue autorise en effet certaines évolutions paramétriques peu souhaitables présentant par exemple des discontinuités de vitesse voir même de position (système mécanique). Néanmoins, sur le plan mathématique, définir un ensemble de points plutôt qu'un ensemble de trajectoires, facilite grandement l'analyse. De plus, sans remettre en cause notre définition de P , nous verrons qu'il est possible d'ajouter certaines contraintes sur l'évolution des paramètres sans que cela ne devienne un obstacle insurmontable au développement des méthodes numériques d'analyse ou de synthèse.

1.5 Systèmes « quasi-LPV » et systèmes non linéaires

Contrairement à ce qu'indique son nom, la classe des systèmes LPV dépasse assez largement le cadre des systèmes classiques. Cette remarque rend d'ailleurs, son étude plus intéressante. Jusqu'à présent, dans notre description des systèmes LPV, nous avons considéré le vecteur de paramètres indépendamment des états du système. Pourtant, à condition de supposer ses trajectoires a priori bornées, il est parfaitement licite d'envisager un système décrit par [31] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(y(t))x(t) + B(y(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \\ \forall t \geq 0, y(t) \in P_y \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.27)$$

où le vecteur de paramètres coïncide avec celui des sorties mesurées. Ce système appartient à ce que nous appellerons la classe des systèmes « quasi-LPV »

Dans le théorème suivant, nous établissons le lien entre cette classe et les systèmes non linéaires

Théorème (1.5) [09-31] : Soit un système non linéaire de la forme relativement générale suivante (à laquelle on pourra souvent se ramener par dérivation)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(y(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \\ \forall t \geq 0, y(t) \in P_y \end{cases} \quad (1.28)$$

si l'on suppose en outre que (au prix d'un éventuel équilibrage) :

$$f(0) = 0$$

et que la non linéarité de f concerne uniquement les états mesurables :

$$f(x) = Lx + g(y)$$

alors le système non linéaire (1.28) admet la formulation « quasi-LPV » (1.27) avec :

$$A(y) = L + \left(\int_0^1 \nabla g(ty) dt \right) C \quad (1.29)$$

Preuve : Il suffit de remarquer que la relation :

$$f(x) = A(y)x$$

est vérifiée à l'origine et que les dérivées temporelles de chacun des deux membres coïncident à chaque instant.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le modèle quasi-LPV n'a de sens que si ses trajectoires évoluent dans un domaine borné. Cette contrainte sera vérifiée dès lors que le système sera stable. Toutefois, pour vérifier la stabilité d'un système LPV, il est nécessaire de connaître le domaine d'évolution des paramètres.

Cette donnée fondamentale fait normalement partie de la description du système. Il faudra s'assurer, pour toute condition initiale licite, que les trajectoires restent dans P . Dans la pratique, cette démarche est souvent facilitée car on connaît bien a priori les bornes d'évolution des sorties mesurées.

Exemple (1.2) :

On considère le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) \cos(x(t)) \quad (1.30)$$

pour traiter la non linéarité de ce modèle comme un système linéaire à paramètre variable, il faut prendre en compte la fonction $\theta(x) = \cos(x)$ qui est évidemment bornée.

Pour $x \in [-x_0, x_0]$, $x_0 \leq \pi$ on obtient: $\theta(x) \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, $\theta_{\min} = \cos(x_0)$ et $\theta_{\max} = 1$

la trajectoire de variation de $\theta(x)$ dans l'intervalle $x \in [-x_0, x_0]$, $x_0 \leq \pi$ est:

$$\theta(x) = \cos(x) = \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{1 - \cos(x_0)} \cdot 1 + \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(x_0)} \cdot \cos(x_0) \quad (1.31)$$

si on choisit $x_0 > \pi$ on obtient

$$\theta(x) = \cos(x) = \frac{\cos(x) + 1}{2} \cdot 1 + \frac{1 - \cos(x)}{2} \cdot (-1) \quad (1.32)$$

Exemple (1.3) :

On considère le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \sin(x(t)) - x^3(t) + x(t) \cos(x(t)) \quad (1.33)$$

on peut très facilement aboutir à un modèle LPV en considérant directement la fonction :

$$\theta(x) = \frac{\sin(x(t))}{x(t)} - x^2(t) + \cos(x(t)) \quad (1.34)$$

comme un paramètre variable dans l'intervalle : $\theta(x) \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, où $\theta_{\min} = -1 - \pi^2$,
 $\theta_{\max} = 2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$

Exemple (1.4) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2 \end{cases} \quad (1.35)$$

peut encore s'écrire sous la forme « quasi-LPV »

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & x_2 \\ x_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Exemple (1.5) :

Considérons le système non linéaire suivant [27]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_1(t)x_2(t) + e(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_2^2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

ce système se met sous la forme LPV en posant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + v_1(t) + e(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + v_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ w_1 = x_2(t) \\ w_2 = x_2(t) \end{cases} \quad (1.38)$$

où

$$\begin{cases} v_1(t) = (x_1(t)) w_1(t) \\ v_2(t) = (x_2(t)) w_2(t) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + v_1(t) + e(t) \\ \dot{x}_2 = -x_2(t) + v_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ w_1 = x_1(t) \\ w_2 = x_2(t) \end{cases} \quad (1.39)$$

où

$$\begin{cases} v_1(t) = (x_2(t))w_1(t) \\ v_2(t) = (x_2(t))w_2(t) \end{cases}$$

la premier cas correspond à la matrice $\theta(t) = \text{diag} \{x_1(t) \quad x_2(t)\}$ le deuxième à la matrice $\theta(t) = \text{diag} \{x_2(t) \quad x_2(t)\}$. Comme on le voit, même pour un système très simple la solution n'est pas unique et le choix de l'un ou de l'autre n'est pas indifférent : la première représentation conduira à un correcteur séquencé par $x_1(t)$ et $x_2(t)$, tandis que dans la deuxième le seul paramètre de séquencement sera $x_2(t)$.

1.6 Stabilité des systèmes LPV

La stabilité des systèmes LPV a été largement étudiée dans la littérature. Dans le dernier chapitre, lors de la synthèse de régulateur LPV, nous allons nous intéresser à la stabilité quadratique des systèmes LPV. La stabilité quadratique est une notion de stabilité robuste dans le sens où la stabilité est garantie pour des trajectoires paramétriques θ variantes arbitrairement vite. Sa définition utilise une seule fonction de Lyapunov quadratique pour tout $\theta \in P$. Pour définir la notion de stabilité quadratique, considérons un système LPV non commandé donné par la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x \\ x(0) = x_0 \\ \theta \in P \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (1.40)$$

dont on veut prouver la stabilité à l'aide d'une fonction de la forme

$$V(x, \theta(t)) = x^T P(\theta(t))x \quad (1.41)$$

pour cela, il nous suffit de traduire la décroissance de V le long des trajectoires du système. Il vient la condition suivante :

$$\theta \in P, \dot{\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta)A(\theta) < 0 \quad (1.42)$$

qu'il est malheureusement difficile de vérifier dans le cas général. En revanche si l'on suppose la dépendance paramétrique affine :

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \dots + \theta_r A_r$$

Nous verrons qu'il est possible d'obtenir un critère assez peu conservatif et facile à coder. Nous venons ici de souligner un point important dans notre étude des systèmes LPV concernant le choix d'un modèle d'analyse. Nécessaire, ce choix s'avère également capital, car c'est bien en priorité de la qualité du modèle dont dépendra celle de l'analyse et a fortiori celle de la synthèse.

1.7 Modélisation des systèmes LPV

Les systèmes LPV peuvent être modélisés par deux approches différentes [40] : la première approche est basée sur l'hypothèse de la dépendance affine des différentes matrices de la représentation d'état (1.25) par rapport au vecteur des paramètres $\theta(t)$, ce sont les modèles polytopiques. La seconde approche prend en compte une dépendance rationnelle des paramètres et porte la dénomination de modèle LFT (transformations linéaires fractionnelles) d'un système LPV. Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à la première approche. C'est une représentation qui permet d'effectuer la synthèse de lois de commande à chaque sommet puis une interpolation des différentes lois de commande obtenues en utilisant le gain programmable afin d'obtenir une loi de commande globale.

1.7.1 Modèle affine et modèle polytopique

1.71.1 Modèle affine : Dans le cas de la dépendance affine, les éléments de la représentation d'état $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ et $D(\cdot)$ vérifient [09]:

$$\forall \theta \in P, \left\{ \begin{array}{l} A(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \theta_i A_i \\ B(\theta) = B_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \theta_i B_i \\ C(\theta) = C_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \theta_i C_i \\ D(\theta) = D_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \theta_i D_i \end{array} \right. \quad (1.43)$$

On supposera en outre que les composantes θ_i du vecteur de paramètres évoluent indépendamment et que :

$$\forall i = 1, 2, \dots, r, \quad \theta_i \in [\underline{\theta}_i \quad \bar{\theta}_i]$$

Autrement dit, le domaine P est un hypercube de dimension r , dont les sommets correspondent aux valeurs extrémales de θ .

Nous pourrions envisager une définition plus générale du modèle affine, où l'hypercube P serait remplacé par un polyèdre convexe et borné de sommets P_i . Dans ce cas, l'indépendance des paramètres θ_i n'étant plus garantie, il faudra s'attendre à certaines difficultés d'analyse. Par changement de variables, on pourra lever cette difficulté, malheureusement la dépendance par rapport aux nouveaux paramètres devient multi affine.

Pour illustrer ces propos, prenons le cas du plan :

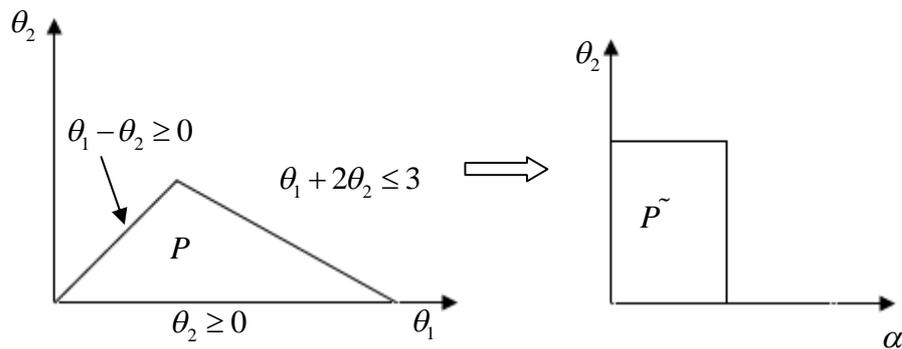


Figure 1.6 : Illustration de changement de variable

et considérons le système dont la matrice d'évolution est décrite par :

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2$$

Les paramètres θ_1 et θ_2 évoluant dans le triangle P sont contraints par les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_2 \leq 1 \\ \theta_2 \leq \theta_1 \leq 3 - 2\theta_2 \end{cases}$$

Autrement dit, θ_1 évolue entre deux bornes qui sont des fonctions de θ_2 . Nous traduirons cela par la relation barycentrique :

$$\theta_1 = (1 - \alpha)\theta_2 + \alpha(3 - 2\theta_2), \alpha \in [0 \ 1]$$

faisant ainsi apparaître la nouvelle variable α , indépendante de θ_2 . L'expression correspondante de la matrice A s'écrit :

$$A(\alpha, \theta_2) = A_0 + 3\alpha A_1 + \theta_2 (A_1 + A_2) - 3\alpha A_1 \theta_2, (\alpha, \theta_2) \in P^{\sim}$$

1.7.1.2 Modèle polytopique :

Le modèle polytopique est assez proche du modèle affine. Disons qu'il est aux coordonnées barycentriques, ce que l'autre est aux coordonnées cartésiennes.

Le système LPV décrit précédemment, pour lequel on adoptera ici la formulation

Compacte :

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in P$$

admet un modèle polytopique si on peut déterminer un ensemble de matrices S_i constituant les sommets d'un polytope, défini par :

$$\text{Co}\{S_1, S_2, \dots, S_N\} \square \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i S_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i = 1 \right\} \quad (1.44)$$

et tel que ce dernier coïncide avec l'image par $S(\cdot)$ du domaine P :

$$\{S(\theta), \theta \in P\} \equiv \text{Co}\{S_1, S_2, \dots, S_N\} \quad (1.45)$$

- Prenons le cas où la fonction $S(\cdot)$ est affine et le domaine P est un polytope à N sommets.

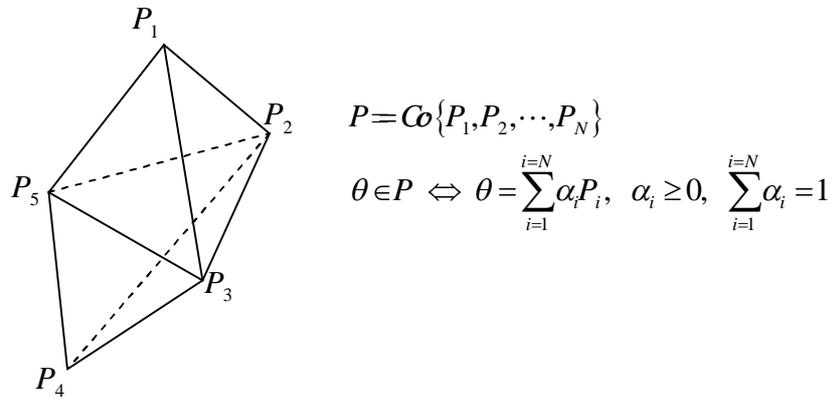


Figure 1.7 : Représentation de P pour $N = 5$

D'après la relation indiquée sur le schéma et en utilisant le fait que $S(\cdot)$ est affine, il vient :

$$S(\theta) = S\left(\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{i=N} S(\alpha_i P_i) = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i (S P_i) \quad (1.47)$$

Autrement dit, on obtient un modèle polytopique, dont les sommets S_i sont les images par $S(\cdot)$ des sommets de P .

Exemple (1.6)

Traitons l'exemple d'un système dépendant de deux paramètres

$$S(\theta) = S_0 + \theta_1 S_1 + \theta_2 S_2$$

Notons ses sommets : S_1^s , S_2^s , S_3^s et S_4^s .

$$\begin{cases} S_1^s = S_0 + \underline{\theta}_1 S_1 + \underline{\theta}_2 S_2 \\ S_2^s = S_0 + \bar{\theta}_1 S_1 + \underline{\theta}_2 S_2 \\ S_3^s = S_0 + \underline{\theta}_1 S_1 + \bar{\theta}_2 S_2 \\ S_4^s = S_0 + \bar{\theta}_1 S_1 + \bar{\theta}_2 S_2 \end{cases}$$

Construisons maintenant le système polytopique

$$\tilde{S} = \alpha_1 S_1^s + \alpha_2 S_2^s + \alpha_3 S_3^s + \alpha_4 S_4^s$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \\ \alpha_2 = \frac{\underline{\theta}_1 - \bar{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \\ \alpha_3 = \frac{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\underline{\theta}_2 - \bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \\ \alpha_4 = \frac{\underline{\theta}_1 - \bar{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\underline{\theta}_2 - \bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \end{cases}$$

Moyennant quelques calculs, on peut vérifier que ce résultat est encore valable pour un nombre de paramètres plus élevé. On retiendra qu'il y a équivalence entre les représentations affine et polytopique. Un système LPV affine dont les paramètres varient sur des intervalles connus peut être considéré comme un système polytopique

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons concentré sur l'analyse en stabilité des systèmes dynamiques, où nous avons développé deux grandes approches. La première s'appuie sur la théorie de Lyapunov et la seconde repose sur un concept plus récent de stabilité entrée/sortie. Nous avons insisté aussi sur les difficultés soulevées par l'étude des systèmes non stationnaires dans le cas général et soulignerons de ce fait, l'importance du choix d'un modèle. Notre étude est limitée à la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) et la modélisation polytopique permettant la simplification de la mise en oeuvre des méthodes d'analyse et a fortiori de synthèse

Dans le chapitre qui suit, nous allons voir l'approche H_∞ qui permet de synthétiser des correcteurs robustes en prenant en compte explicitement des incertitudes dynamiques. Cette approche peut être étendue à la désensibilisation de la boucle fermée aux incertitudes paramétriques et aux non linéarités. En d'autres termes, on utilise un seul critère, le critère H_∞ pour assurer la performance et la robustesse.

Chapitre II

Approche H_∞

Introduction

Dès lors qu'on travaille sur des modèles, dont la validité est limitée, il faut que l'on soit préoccupé de la robustesse de la loi de commande, c'est à dire être capable de garantir non seulement la stabilité des systèmes mais aussi certaine performance vis à vis l'incertitudes de modèles. Ce dernier point demande de compléter le travail de modélisation par une description précise des incertitudes du modèle, de les inclure dans un formalisme générale permettant des les prendre en compte.

La synthèse d'une loi de commande s'articule généralement autour de deux points, qui sont répétées alternativement jusqu'à ce que le concepteur juge les résultats satisfaisants :

- Calcul de régulateur, dans cette étape peuvent être pris en compte certains objectifs de performance et certain objectifs de robustesse seulement
- Analyse des propriétés des systèmes commandés tant des points de vue des performances que de la robustesse de celui-ci

Dans ce chapitre on essaye de présenter (pour les systèmes LTI) l'approche H_∞ qui s'articule autour de ces deux concepts, en commençant par une description générale sur les spécifications fréquentielles en performances et en robustesses

2. Analyse en robustesse et en performance des systèmes bouclés

Pour assimiler bien l'intérêt principal du critère H_∞ , il faut tout d'abord faire une analyse sur les spécifications fréquentielles de performance et de robustesse.

La mise en œuvre de ce critère nécessite la recherche d'une loi de commande stabilisant avec un certain niveau de performance, et de garantir la satisfaction de ce niveau malgré la présence d'erreur de modèle (notion d'incertitude) [15].

2.1 Spécification fréquentielles de performance :

Pour étudier les spécification fréquentielle de performance on a besoin d'utiliser un schéma fonctionnel plus ou moins général (figure 2.1), où on introduire un signal de perturbation et un signal de bruit de mesure afin d'avoir une vision plus complète des problèmes posés par la structure de commande à contre réaction.

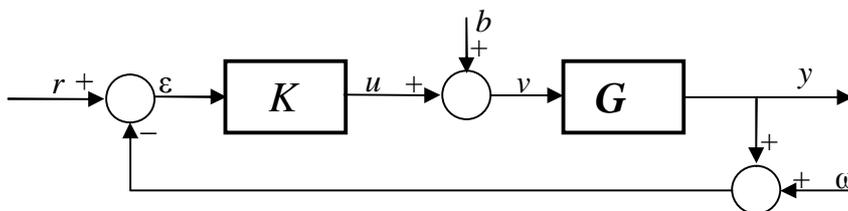


Figure 2.1 : Schéma bloc avec une perturbation et un bruit de mesure

où

- r : est le signal de référence que doit suivre la sortie
- y : est la sortie du système
- u : est la commande issue du correcteur $K(p)$
- v : est le signal de commande entrant réellement dans le système
- b : est le signal des perturbations
- $\varepsilon = r - y$: est le signal d'erreur
- w : est le signal des bruits de mesure

A partir de ce schéma fonctionnel, différents transferts entre les entrées et les signaux de sortie intéressants vont être considérés.

2.1.1 Fonctions de sensibilité

Les relations algébriques élémentaires définies dans le schéma fonctionnel (figure 2.1) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 y(p) &= G(p)v(p) \\
 v(p) &= b(p) + u(p) \\
 u(p) &= K(p)\varepsilon(p) \\
 \varepsilon(p) &= r(p) - w(p) - y(p)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

cela permet de déterminer les relations en boucle fermée entre la sortie et les entrées :

$$y(p) = \underbrace{(1 + G(p)K(p))^{-1}}_{S(p)} G(p)b(p) + \underbrace{(1 + G(p)K(p))^{-1}G(p)K(p)}_{T(p)} (r(p) - w(p))
 \tag{2.2}$$

alors :

$$S(p) = \frac{1}{1 + G(p)K(p)} \quad \text{et} \quad T(p) = \frac{G(p)K(p)}{1 + G(p)K(p)}
 \tag{2.3}$$

On constate que $S(p) + T(p) = 1$ où $S(p)$ est appelé communément fonction de sensibilité et $T(p)$ fonction de sensibilité complémentaire. Cette fonction de sensibilité est importante car elle est significative de la réponse de la boucle fermée.

Un signal permettant d'analyser la précision du système est celui de l'erreur $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) = S(p)(r(p) - w(p)) - S(p)G(p)b(p)
 \tag{2.4}$$

afin de conserver un certain contrôle sur l'amplitude de la commande délivrée et de la commande reçue, il est également nécessaire de connaître les fonctions de transferts entre les commandes et les entrées:

$$u(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) - T(p)b(p)
 \tag{2.5}$$

$$v(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) + S(p)b(p)
 \tag{2.6}$$

Le schéma fonctionnel précédent fait donc apparaître quatre fonctions de transfert importantes appelées **fonctions de sensibilité** :

$$S(p) \quad S(p)G(p) \quad T(p) \quad S(p)K(p)$$

où :

- $S(p)$ représente l'influence de la référence et des bruits de mesure sur l'erreur et l'influence de la perturbation sur la commande délivrée.
- $T(p)$ représente l'influence de la référence et des bruits de mesure sur la sortie et l'influence de la perturbation sur la commande délivrée.
- $S(p)G(p)$ représente l'influence de la perturbation sur la sortie et l'erreur.
- $S(p)K(p)$ représente l'influence de la référence et des bruits de mesure sur les commandes.

2.1.2 Objectifs de commande

Compte tenu des relations établies précédemment et de l'analyse qui les suit, la synthèse du correcteur $K(p)$ doit obéir aux différents objectifs suivants :

- Un bon suivi du signal de référence implique une fonction de sensibilité $S(p)$ faible en amplitude.
- Une bonne rejection des perturbations sera obtenue pour $S(p)G(p)$ faible.
- Les bruits de mesure seront atténués si l'amplitude de $T(p)$ est faible sur la plage de fréquence concernée.
- L'effort de commande est faible si l'amplitude de $S(p)K(p)$ et de $T(p)$ est faible.
- La commande délivrée au système est faible si $S(p)$ et $S(p)K(p)$ sont d'amplitude faible.

Ces objectifs de commande sont contradictoires et devront faire l'objet de compromis lors de la synthèse du système de commande.

2.1.3 Rejet de perturbation b

On souhaite généralement que la boucle d'asservissement soit insensible et rejette la perturbation modélisée par le signal $b(p)$. Ceci est impératif en règle générale aux basses fréquences : $\omega < \omega_b$

- Pour que b ait peu d'influence sur y :

$$|G(j\omega)S(j\omega)| \ll 1 \quad (2.7)$$

- Pour que b ait peu d'influence sur v :

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad (2.8)$$

Comme $G(j\omega)$ représente le système à contrôler qu'il ne peut être modifiée qu'à travers le compensateur $K(j\omega)$, on en déduit la règle générale en basses fréquences pour le rejet de perturbations :

$$|S(j\omega)| \ll 1 \text{ pour } \omega < \omega_b$$

Du fait que $T + S = 1$ et $S = (1 + GK)^{-1}$.

On en déduit que :

$$|S(j\omega)| \ll 1, \omega < \omega_b \Rightarrow |T(j\omega)| \approx 1 \text{ et } |K(j\omega)G(j\omega)| \ll 1 \text{ pour } \omega < \omega_b$$

La spécification de rejet de perturbation peut donc s'exprimer en sensibilité, en boucle fermée ou en boucle ouverte.

Pour : $\omega < \omega_b$

- Spécifications en boucle fermée

$$|S(j\omega)| \ll 1 \text{ ou } |T(j\omega)| \approx 1 \quad (2.9)$$

- Spécifications en boucle ouverte

$$|K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1 \quad (2.10)$$

Si ces spécifications sont vérifiées alors nécessairement :

$$y \approx (r - w)$$

Pour avoir $y \approx r$ il faut choisir la pulsation ω_b inférieure à la pulsation ω_h définissant les bruits en hautes fréquences.

$$\omega_b < \omega_h$$

Pour la commande et la commande délivrée on trouve :

$$u \approx G^{-1}(r - w) - b \text{ et } v \approx G^{-1}(r - w).$$

Cela implique de choisir également la pulsation ω_b inférieure à la pulsation ω_{co} définissant la bande passante de G .

$$\omega_b < \omega_{co}$$

2.1.4 Réduction du bruit de mesure w

Les bruits sont usuellement modélisés comme opérant en hautes fréquences : $\omega > \omega_h$

- Pour que w ait peu d'influence sur y :

$$|T(j\omega)| \ll 1 \quad (2.11)$$

- Pour que w ait peu d'influence sur v :

$$|K(j\omega)S(j\omega)| \ll 1 \quad (2.12)$$

Une analyse identique à la précédente utilisant les relations algébriques sur les fonctions de sensibilité conduit à écrire la spécification en hautes fréquences :

Pour $\omega > \omega_h$

- Spécifications en boucle fermée

$$|S(j\omega)| \approx 1 \text{ ou } |T(j\omega)| \ll 1 \quad (2.13)$$

- Spécifications en boucle ouverte

$$|K(j\omega)G(j\omega)| \ll 1 \quad (2.14)$$

Si ces spécifications sont vérifiées alors nécessairement :

$$y \approx Gb .$$

Cela implique de choisir la pulsation ω_h supérieure à la pulsation ω_{co} .

$$\omega_{co} < \omega_h$$

Pour la commande et la commande délivrée on trouve

$$u \approx K(r - w) \quad \text{et} \quad v \approx b + K(r - w).$$

Cela implique de choisir également la pulsation ω_b inférieure à la pulsation ω_h comme il a été vu précédemment.

2.1.5 Suivi de référence r : précision

Cette spécification est généralement une spécification pour les basses fréquences :

$\omega < \omega_b$ et l'on retrouve exactement les spécifications données pour le rejet de perturbation :

Pour : $\omega < \omega_b$

- Spécifications en boucle fermée

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad \text{ou} \quad |T(j\omega)| \approx 1 \quad (2.15)$$

- Spécifications en boucle ouverte

$$|K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1 \quad (2.16)$$

Le suivi de référence pose le problème plus spécifique de la précision du système en régime permanent. On souhaite en effet que le système bouclé réponde sans erreur ou avec une erreur donnée à des entrées types (échelon, rampe...). Il est donc souhaitable que l'erreur s'annule ou prenne une valeur finie en régime permanent pour des entrées de référence types. L'erreur comme fonction du signal de référence s'écrit

$$\varepsilon = S(p)r(p) = \frac{r(p)}{1 + K(p)G(p)} \quad (2.17)$$

En appliquant le théorème de la valeur finale, on obtient,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p)r(p) \quad (2.18)$$

On peut réunir les quatre fonction de sensibilité au sein d'un même critère [15], en utilisant les deux équations (2.4) et (2.5) qui présentent les transferts entre les signaux d'entrées ($r(p) - w(p)$) et $b(p)$ d'une part, l'erreur d'asservissement $\varepsilon(p)$ et la commande délivrée $u(p)$ d'autre part.

On trouve :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(p) \\ u(p) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} (r(p) - w(p)) \\ b(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r(p) - w(p)) \\ b(p) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Un problème intéressant consiste à chercher un nombre $\gamma > 0$ et un correcteur $K(p)$ stabilisant le système bouclé et assurant

$$\|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.20)$$

Le problème se présente donc comme la recherche d'un compromis entre l'objectif recherché et les moyens nécessaires

Toutefois cette formulation s'avère en pratique trop rigide car elle ne laisse aucun élément de choix à l'utilisateur. Pour contourner cet obstacle une démarche peut être envisagée ultérieurement.

2.2 Spécification fréquentielles de robustesse :

La section précédente a été consacré pour l'analyse en performance des systèmes bouclés en utilisant un schéma fonctionnel plus général afin d'extraire les quatre fonctions de sensibilité qui sont utilisées pour l'étude des spécifications fréquentielles de performance. Mais la synthèse de la loi de commande K a été déterminée à partir d'un modèle nominal G_{mod} du système à commander. Malheureusement, il est expérimentalement plus probable d'obtenir une modélisation où les paramètres et la structure ne sont qu'approximativement connus. Par essence, une modélisation ne peut pas être certaine. De plus, au cours du temps, ses caractéristiques peuvent évoluer. Cette remarque a motivé l'introduction de la notion de *famille de modèles* [35-34]

Il est important d'insister sur le fait qu'un modèle ne peut pas représenter de façon exacte un système réel. En résumé, l'indétermination est dans la nature même des objets physiques. L'utilisation d'une famille de modèles susceptible de contenir le modèle le plus adéquat constitue l'idée de base de la robustesse.

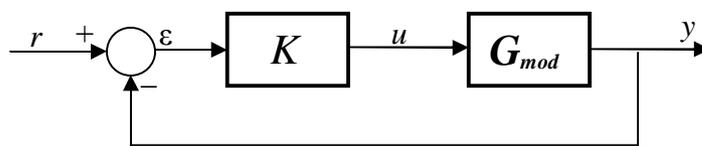


Figure 2.2 : Modèle G_{mod} en boucle fermée avec le correcteur

Alors si on suppose que le système en boucle fermée dans la figure (2.2) soit stable et vérifie un certain nombre de spécifications de performance. La question est de savoir si, lorsque la loi

de commande asservira le système réel $G_{réel}$, le système en boucle fermée de la figure (2.3) sera stable et si les spécifications de performance seront aussi assurées.

L'étude de la robustesse de la loi de commande K consiste à essayer d'obtenir le maximum de garanties pour que cela soit effectivement le cas

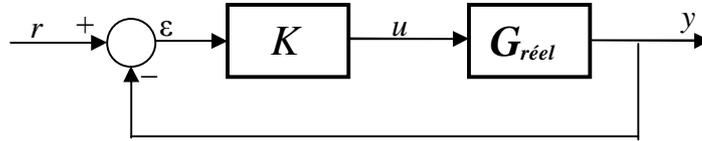


Figure 2.3 : Modèle $G_{réel}$ en boucle fermée avec le correcteur

Dans le cas où la loi de commande assure la propriété de stabilité pour tous les éléments de la famille, on parle de *robustesse en stabilité*.

Dans le cas où la loi de commande assure en plus les spécifications de performance, on parle de *robustesse en performance* [34].

On va se concentrer dans cette section sur le problème de la robustesse en stabilité. Afin de bien comprendre les idées sous-jacentes à l'approche.

2.2.1 Etude de la robustesse en stabilité :

L'étude de la robustesse en stabilité est principalement basée sur l'utilisation du *critère de Nyquist*. Il permet de ramener l'étude de la stabilité d'un système en boucle fermée à l'étude de certaines caractéristiques de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte.

2.2.2 Définition de la famille de modèles :

Soit $G_{réel}$ la fonction de transfert décrivant exactement le système à commander et G_{mod} son modèle, qui sera forcément entaché d'incertitudes. Une façon d'évaluer la différence entre le système réel et son modèle est d'exprimer que $G_{réel}$ appartient à une famille de modèles [35] :

$$G_{réel} \subset \{G \mid \exists \Delta, \|\Delta\|_\infty \leq \beta, G = G_{mod} + \Delta\} \quad (2.21)$$

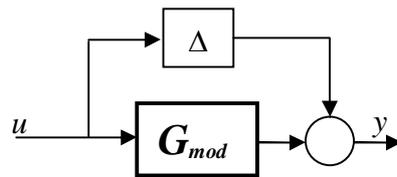
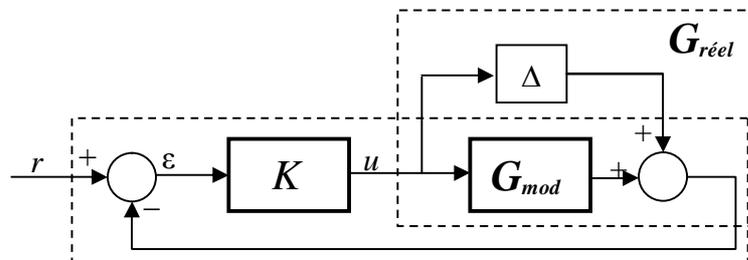


Figure 2.4 : Incertitude additive

La quantité d'incertitude est alors évaluée par un paramètre réel $\beta > 0$. Ce type d'incertitude est appelé *incertitude additive*. La difficulté ici est que seul le paramètre β est connu. Tout ce que l'on sait sur la fonction de transfert $\Delta(j\omega)$, c'est qu'elle est bornée en module par β . Pour garantir que le système réel (que l'on ne connaît pas) en boucle fermée est stable, l'idée est de démontrer que pour tout transfert stable $\Delta(j\omega)$ dont la norme H_∞ est inférieure à β , on a le système bouclé représenté sur la figure (2.5) qui est stable.

Figure 2.5 : Connexion KS avec Δ

2.2.3 Analyse de la stabilité par le critère de Nyquist

Pour évaluer la stabilité de cet ensemble de systèmes en boucle fermée, il faut donc appliquer le critère de Nyquist [35] pour toutes les fonctions de transfert en boucle ouverte $(G_{\text{mod}}(j\omega) + \Delta(j\omega))K(j\omega)$ obtenues par toutes les fonctions de transfert stables $\Delta(j\omega)$ telle que $|\Delta(j\omega)| \leq \beta$. Une condition nécessaire est que pour $\Delta(j\omega) = 0$, la condition du critère de Nyquist soit vérifiée. Pour assurer que, pour toutes les fonctions de transfert $\Delta(j\omega)$, le système bouclé reste stable, il suffit de vérifier que pour toutes les pulsations ω , les points $(G_{\text{mod}}(j\omega) + \Delta(j\omega))K(j\omega)$ ne recouvrent pas le point $(-1, 0)$. Pour une pulsation ω donnée, l'ensemble des points $(G_{\text{mod}}(j\omega) + \Delta(j\omega))K(j\omega)$ correspond à un disque de centre $G_{\text{mod}}(j\omega)K(j\omega)$ et de rayon $\beta|K(j\omega)|$ figure (2.6), quand $\Delta(j\omega)$ décrit l'ensemble des fonctions de transfert stables dont la norme H_∞ est inférieure à β . Il faut donc que ce disque ne recouvre pas le point $(-1, 0)$. Pour cela, il suffit d'assurer que la distance entre le point

$(-1, 0)$ et le point $G_{\text{mod}}(j\omega)K(j\omega)$ est supérieure au rayon du disque, à savoir $\beta|K(j\omega)|$, soit :

$$|1 + G_{\text{mod}}(j\omega)K(j\omega)| > \beta|K(j\omega)| \Leftrightarrow \forall \omega, \left| \frac{K(j\omega)}{1 + G_{\text{mod}}(j\omega)K(j\omega)} \right| < \frac{1}{\beta} \quad (2.22)$$

Soit
$$\|KS\|_\infty < \frac{1}{\beta} \quad (2.23)$$

Il est très intéressant de voir que le système bouclé se réécrit comme la connexion de la fonction de sensibilité KS qu'est déjà vu au paragraphe (2.1.1) avec la fonction de transfert Δ (voir la figure (2.5)). Le système bouclé est stable pour toute fonction de transfert stable Δ telle que $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ si et seulement si $\|KS\|_\infty < \frac{1}{\beta}$. Ceci est un cas particulier du théorème de petit gain que nous allons voir dans le paragraphe qui suit

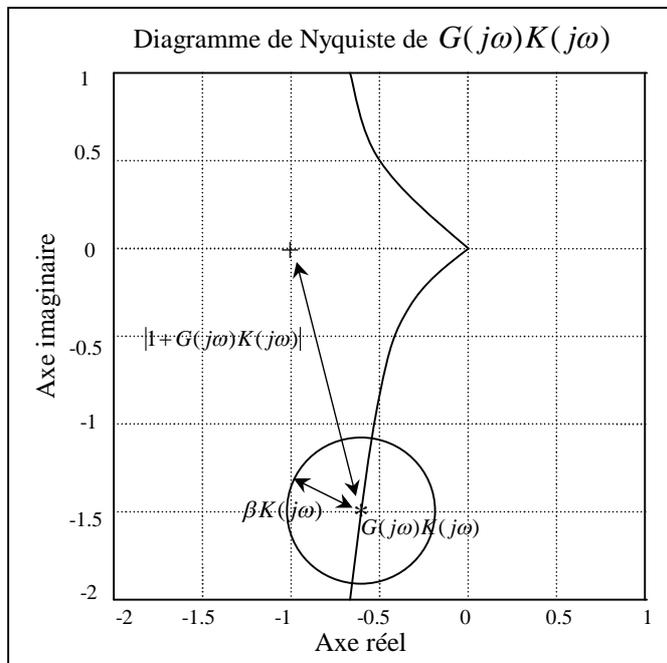


Figure 2.6 : Diagramme de Nyquist $G(j\omega)K(j\omega)$

Théorème du petit gain [34]: comme il est déjà montré dans le premier chapitre, le théorème du petit gain peut s'énoncer de la façon suivante : la famille des systèmes (M, Δ) représentés dans la figure (2.7) est stable pour toutes les (matrices de) fonctions de transfert stables Δ telles que $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ si et seulement si

$$\|M\|_\infty < \frac{1}{\beta}$$

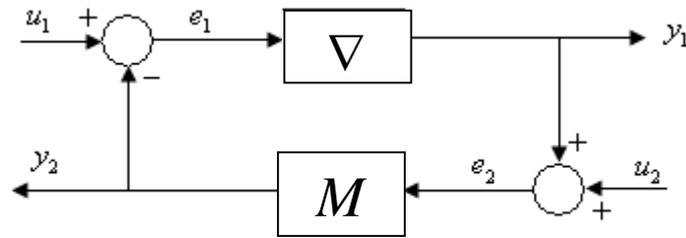


Figure 2.7 : Connexion de M avec Δ

Exemple d'un système mécanique [34] :

On suppose qu'une loi de commande K a été mise au point sur le modèle nominal G_{mod} suivant :

$$G_{\text{mod}}(p) = \frac{100}{p(p^2 + 0.6p + 100)} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta_0 \frac{p}{\omega_0} + 1} \quad (2.24)$$

avec $\omega_0 = 10\text{rad/s}$ et $\zeta_0 = 0.03$.

En réalité, le système est un système mécanique avec un nombre infini de modes souples, par exemple de la forme :

$$G_{\text{réel}}(p) = \frac{1}{p} \prod_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_i}\right)^2 + 2\zeta_i \frac{p}{\omega_i} + 1} = G_{\text{mod}}(p) \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_i}\right)^2 + 2\zeta_i \frac{p}{\omega_i} + 1} \quad (2.25)$$

avec $\omega_0 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_i \leq \dots$. Si on suppose que :

$$\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_i}\right)^2 + 2\zeta_i \frac{p}{\omega_i} + 1} \approx 1 \quad (2.26)$$

C'est que l'on ne connaît pas la valeur des paramètres ω_i et ζ_i allant de 2 à ∞ (par exemple du fait d'une impossibilité pratique).

Pour l'illustration, supposons que le système réel ne contient que deux modes souples et que pour obtenir la fonction de transfert $G_{\text{mod}}(p)$ seul le mode ayant la pulsation propre la plus haute a été négligé, c'est-à-dire que le système réel $G_{\text{réel}}(p)$ s'écrit :

$$G_{\text{réel}}(p) = \frac{1}{p} \times \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta_0 \frac{p}{\omega_0} + 1} \times \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 + 2\zeta_1 \frac{p}{\omega_1} + 1} = G_{\text{mod}}(p) \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 + 2\zeta_1 \frac{p}{\omega_1} + 1}}_{E(p)} \quad (2.27)$$

avec $\omega_1 = 200\text{rad/s}$ et $\zeta_1 = 0.03$.

On peut alors considérer l'erreur entre $G_{réel}$ et G_{mod} dont le module en dB est représenté en fonction de la pulsation ω sur la figure (2.8).

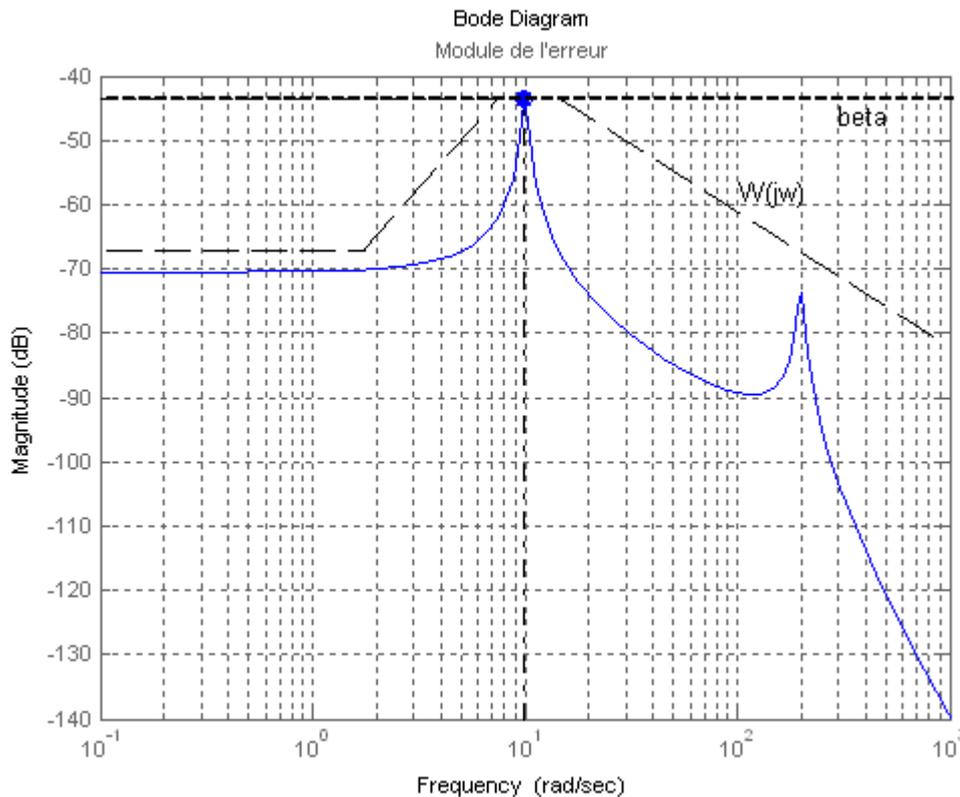


Figure 2.8 : Module de l'erreur $|\Delta(j\omega)| = |G_{réel}(j\omega) - G_{mod}(j\omega)|$

Si le mode correspondant à la pulsation ω_1 a été négligé, c'est parce qu'il n'était pas connu a priori. Il s'agit d'une erreur sur la structure du système (l'ordre du modèle n'est pas l'ordre du système réel). Ce type d'erreur est appelé *incertitude dynamique*.

On suppose qu'une loi de commande K a été mise au point sur G_{mod} . On désire, en appliquant les résultats précédents, s'assurer que la loi de commande stabilise aussi $G_{réel}$.

L'erreur introduite par cette approximation a été modélisée par une erreur absolue $\Delta(j\omega) = G_{réel}(j\omega) - G_{mod}(j\omega)$. Pour déterminer la "taille" β de cette incertitude, la norme H_∞ de $\Delta(p)$ est déterminée, soit graphiquement à partir de la figure (2.8), soit numériquement en utilisant la forme analytique de la norme H_∞ , on obtient $\beta = -43.7dB$.

Examiner la stabilité du système bouclé par rapport à une incertitude additive revient à examiner la fonction de transfert en boucle fermée $M = KS$.

D'après le théorème du petit gain, l'ensemble des systèmes bouclés obtenus quand Δ décrit l'ensemble des transferts stable de norme H_∞ inférieure à β est stable si

$$\|KS\|_\infty < \frac{1}{\beta} = 43.7dB$$

Le tracé du module de $K(j\omega)S(j\omega)$ est représenté sur la figure (2.9). Il est clair que sa valeur maximale n'excède jamais $43.7dB$ (le calcul sous Matlab donne $-7.69 dB$). La condition donnée par le théorème du petit gain est donc vérifiée.

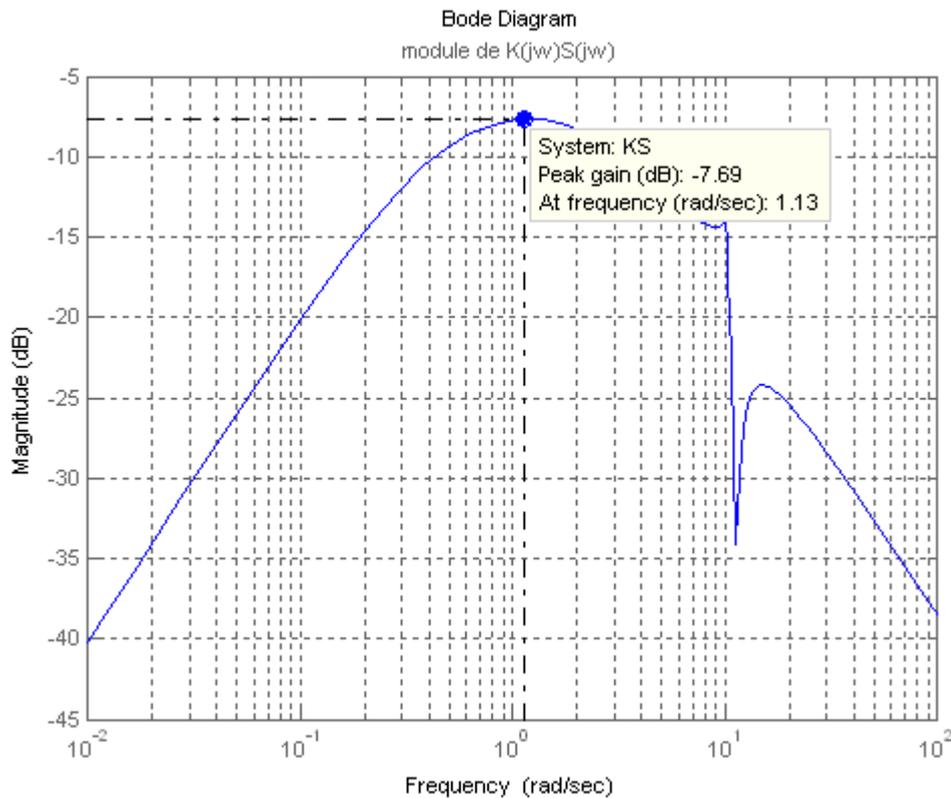


Figure 2.9 : Module de $K(j\omega)S(j\omega)$

2.2.4 Description des incertitudes en utilisant les pondérations fréquentielles

Dans l'exemple précédent nous avons considéré la modélisation de l'incertitude par une incertitude de type additive ($G_{réel}(j\omega) = G_{mod}(j\omega) + \Delta(j\omega)$). On a mesuré la "taille" de l'incertitude par un paramètre $\beta > 0$, indépendant de la pulsation ω ($|\Delta(j\omega)| \leq \beta$). Dans ce cas-là, β est de l'ordre de $-43.7dB$. Comme on peut le voir sur la figure (2.8), c'est une description très grossière. Notamment, en basse pulsation, le module de l'erreur est inférieur à $-70dB$ et donc largement inférieur à $-43.7dB$. Ce mode de représentation de l'incertitude est donc très limité. En effet, il est clair qu'un modèle, qu'il soit obtenu par identification et/ou

modélisation (physique), ne reflète qu'une partie des dynamiques du système modélisé. Dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, cela consiste à dire que la fonction de transfert associée n'est représentative du système physique que dans une certaine gamme de pulsations. Par suite, l'incertitude liée à la modélisation $\Delta(j\omega)$ présente une taille dépendant de la pulsation ω .

Cette "taille" peut être définie par une fonction de transfert $W(j\omega)$ stable, appelée *pondération* et telle que $|G_{réel}(j\omega) - G_{mod}(j\omega)| = |\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|$.

Un choix possible pour le module de $W(j\omega)$ est représenté sur la figure (2.8). Il est clair qu'il permet une description plus fidèle car dépendant de la pulsation ω .

Théorème du petit gain avec pondération [15] :

Le théorème du petit gain avec pondération peut s'énoncer de la façon suivante : la famille des systèmes (M, Δ) représentés figure (2.7) est stable pour toutes les (matrices de) fonctions de transfert stables Δ telles que $\|\Delta\|_\infty \leq W(j\omega)$ si et seulement si

$$\|M\|_\infty < \frac{1}{W(j\omega)}$$

avec

$W(j\omega)$: est la fonction de pondération

M : peut prendre les différentes fonctions de sensibilité $S(p)$ $S(p)G(p)$ $T(p)$ $S(p)K(p)$

2.2.5 Choix de la fonction de pondération

Le choix de la fonction de pondération pour les fonctions de sensibilité est appelé *modélage de la boucle fermée* ou *modélage de la fonction de sensibilité*

Modéliser la fonction de sensibilité permet d'avoir une boucle fermée dont le comportement est proche de celui que l'on attend. Modéliser les transferts en boucle fermée à l'aide de gabarits permet de spécifier a priori des objectifs de performance et de robustesse.

Le choix des pondérations se déduit des spécifications issues du cahier des charges.

Les spécifications de performance sont généralement les suivantes :

- gabarit fréquentiel
- gabarit temporel
- amortissement de modes souples
- critères énergétiques (peut être exprimé par une norme H_2)

Les spécifications de robustesse peuvent provenir des problèmes suivants :

- connaissance du modèle sur une plage limitée de fréquence
- erreur d'identification
- erreur de modélisation
- erreur due à la réduction/simplification d'un modèle
- description d'un modèle non linéaire par un modèle linéaire
- description d'un modèle LPV par un modèle LTI

Les spécifications de performance et de robustesse d'un cahier des charges peuvent être souvent prises en compte par les caractéristiques des pondérations fréquentielles suivantes :

- gain en 0
- gain en 1
- comportement asymptotique en 0
- comportement asymptotique en 1
- fréquence de coupure à 0 dB
- gain maximum sur une plage de fréquences
- gain minimum sur une plage de fréquences

Plusieurs types de pondérations peuvent être choisis pour décrire correctement les spécifications du cahier des charges. Elles peuvent se résumer à un gain, un filtre du premier Ordre, du second ordre etc.

2.2.6 Critère H_∞ avec les fonctions de pondération

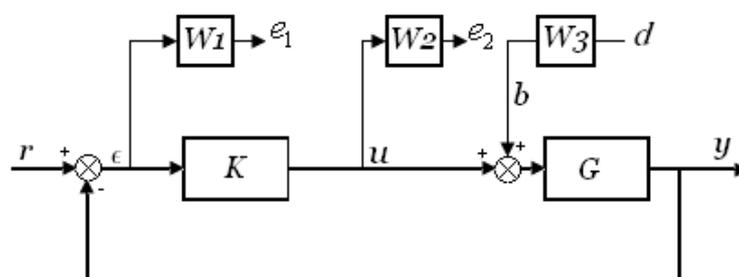


Figure 2.10 : Mise en place de pondération

Pour illustrer la synthèse H_∞ avec l'utilisation des fonction de pondération, le problème trois blocs figure (2.10) sont abondamment décrits dans la littérature. Il est intéressant car il illustre bien un problème de commande classique où on a des contraintes de performance et de robustesse [15-28].

2.2.6.1 Mise en forme standard du critère H_∞ [15]:

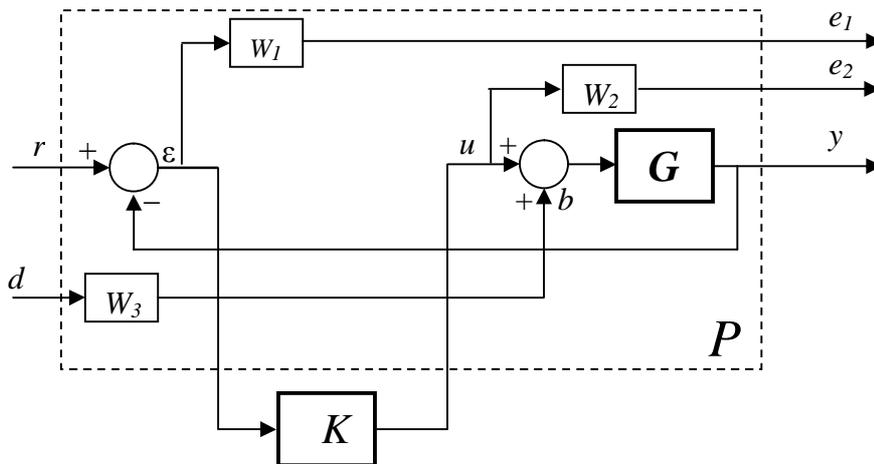


Figure 2.11 : Forme standard du critère H_∞

Une fois choisis les filtres (ou les pondération), il reste à mettre le problème sous forme standard, c'est à dire à identifier les schémas blocs de la figure (2.12). Identifions tout d'abord les différents signaux.

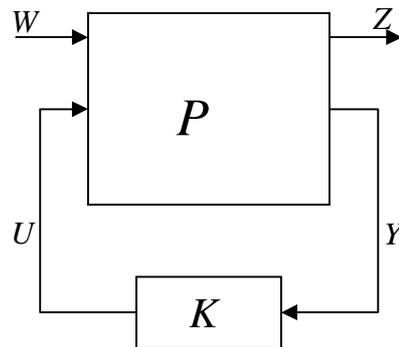


Figure 2.12 : Problème sous forme standard

Soit le système P décrit sur le schéma bloc représenté figure (2.12) où

Le vecteur des sorties commandées $Z = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ est de dimension p_z ;

Le vecteur des entrées de critère $W = \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$ est de dimension m_w ;

Le vecteur des sorties mesuré Y est de dimension p_y ;

Le vecteur des entrées de commande U est de dimension m_u .

Le système P admet pour équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

Cette représentation est utilisée pour résoudre le problème H_∞ ; elle est obtenue en considérant une représentation d'état pour chaque fonction de transfert $G(p)$, $w_1(p)$, $w_2(p)$ et $w_3(p)$

$$G(p): (\text{entrée } (u-b), \text{ sortie } y): \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u-b) \\ y = Cx \end{cases}$$

$$w_1(p): (\text{entrée } (r-y), \text{ sortie } e_1): \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1(r-y) \\ e_1 = C_1 x_1 + D_1(r-y) \end{cases}$$

$$w_2(p): (\text{entrée } u, \text{ sortie } e_2): \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ e_2 = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases}$$

$$w_3(p): (\text{entrée } d, \text{ sortie } b): \begin{cases} \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 d \\ b = C_3 x_3 + D_3 d \end{cases}$$

Soit finalement

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -BC_3 \\ -B_1 C & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -BD_3 \\ B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 C & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \end{bmatrix} u \\ \varepsilon = [-C \ 0 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + [I \ 0] \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + [0] u \end{cases} \quad (2.30)$$

La forme LFT du système $P(p)$

$$P(p) = \begin{bmatrix} P_{zw}(p) & P_{zu}(p) \\ P_{yw}(p) & P_{yu}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} (pI - A)^{-1} [B_w \ B_u] \quad (2.31)$$

$$\begin{bmatrix} z(p) \\ y(p) \end{bmatrix} = P(p) \begin{bmatrix} w(p) \\ u(p) \end{bmatrix} \text{ avec } u(p) = K(p)y(p) \quad (2.32)$$

Soit

$$z(p) = \underbrace{(P_{zw}(p) + P_{zu}(p))K(p)(I - P_{yu}(p)K(p))^{-1}P_{yw}(p)}_{\text{noté } P*K} w(p) \quad (2.33)$$

2.3 Problème H_∞ standard [15-14]

1. Etant donné $\gamma > 0$, existe-il une loi de commande K telle que
 - le système bouclé $P * K$ soit asymptotiquement stable (tous les pôles du système en boucle fermée sont à partie réelle strictement négative)
 - $\|P * K\|_\infty \leq \gamma$
2. Si oui, construire une loi de commande K assurant pour le système en boucle fermée les deux propriétés précédentes.

2.3.1 Synthèse d'un correcteur H_∞ par retour de sortie

La solution est basée sur l'algorithme de Glover-Doyle qui est basée essentiellement sur la résolution des équations de Riccati [14,28,34].

Le problème H_∞ admet une solution si les quatre hypothèses suivantes sont vérifiées.

1. La paire (A, B_u) est stabilisable et la paire (C_y, A) est détectable : cela garantit l'existence d'une loi de commande K qui stabilise le système en boucle fermée.
2. $\text{rang}(D_{zu}) = m_u$ et $\text{rang}(D_{yu}) = p_y$: ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la loi de commande $K(p)$ est propre. De façon implicite, cela veut dire aussi qu'il y a plus de sorties commandées z que d'entrées de commande u ($p_z \geq m_u$) et qu'il y a plus d'entrées de critère w que de mesures y ($m_w \geq p_y$)
3. $\text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix} = n + m_u$ garantit que le transfert P_{zu} n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.
4. $\text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_z & D_{yw} \end{bmatrix} = n + p$ garantit que le transfert p_{yw} n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

Ces 4 hypothèses doivent être impérativement vérifiées.

Pour obtenir des expressions plus simples, on introduit les conditions supplémentaires

$$\text{suivantes : } D_{zw} = 0, \quad D_{zu}^T [C_z \quad D_{zu}] = [0 \quad I_{m_u}], \quad D_{yu} = 0, \quad \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} D_{yw}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_y} \end{bmatrix}$$

Alors il existe une loi de commande $K(p)$ solution du **problème H_∞ standard** si et seulement si

1. La matrice Hamiltonienne $\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_z^T C_z & -A^T \end{bmatrix}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe

imaginaire et il existe une matrice symétrique $X_\infty \geq 0$ telle que :

$$X_\infty A + A^T + X_\infty (\gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T) X_\infty + C_z^T C_z = 0 \quad (2.34)$$

2. La matrice Hamiltonienne $\begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_z^T C_z - C_y^T C_y \\ -B_w B_w^T & -A \end{bmatrix}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe

imaginaire et il existe une matrice symétrique $Y_\infty \geq 0$ telle que :

$$Y_\infty A^T + A Y_\infty + Y_\infty (\gamma^{-2} C_z^T C_z - C_y^T C_y) Y_\infty + B_w B_w^T = 0 \quad (2.35)$$

3. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ où $\rho(\cdot)$ correspond au module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).

De plus, l'ensemble des correcteurs $K(p)$ répondant au problème est donné par $K(p) = F(K_a(p), \Phi(p))$ où $\Phi(p)$ est n'importe quelle fonction de transfert stable, de norme H_∞ inférieure à γ et

$$K_a(p) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_u \\ \hline F_\infty & 0 & I_{m_u} \\ -C_y & I_{p_y} & 0 \end{array} \right] \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} \hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_w B_w^T X_\infty + B_u F_\infty + Z_\infty L_\infty C_y \\ F_\infty = -B_u^T X_\infty \\ L_\infty = -Y_\infty C_y^T \\ Z_\infty = (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1} \end{cases} \quad (2.37)$$

Un correcteur particulier est le correcteur central, obtenu en prenant $\Phi(p) = 0$, ce qui donne :

$$K_0(p) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (2.38)$$

Exemple [28] :

On considère un système de sortie y et de commande u dont le modèle nominal est :

$$Y(p) = G(p)U(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}U(p) \quad (2.39)$$

On souhaite concevoir un asservissement conformément au schéma bloc de la figure (2.2) où le correcteur $K(p)$ doit assurer les objectifs suivants :

1. La sortie y doit être asservie sur une référence r constante, avec une erreur statique inférieure à 0.01
2. La bande passante de l'asservissement doit comprendre toutes les pulsations entre 0 et 1 rd/s au moins
3. La marge de module doit être au moins égale à 0.7
4. Le gain de la fonction de transfert entre r et u doit être inférieur à 10 à toutes les pulsations, et décroître suivant une pente -20 dB/décade au-delà de 10 rd/s
5. Le gain de la fonction de transfert entre r et y doit être inférieur à 0.5 au-delà de 10rd/s

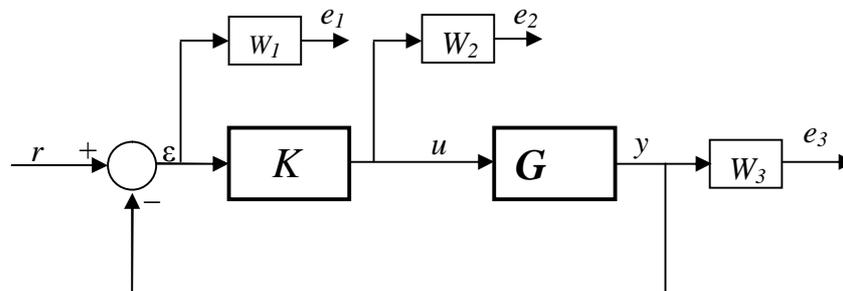


Figure 2.13 : Schéma utilisé pour la synthèse

Les points 1, 2 et 3 peuvent être traduits par des contraintes sur la fonction de sensibilité $S = (1 + GK)^{-1}$ dont le gain doit être :

- inférieur à 0,01 en statique,
- inférieur à 1 en deçà de 1 rd/s
- inférieur à 1/0,7 au-delà

Le quatrième point concerne explicitement le transfert $KS = K(1 + GK)^{-1}$

Enfin le cinquième point concerne le transfert $T = KGS = KG(1 + GK)^{-1}$

Ceci nous amène à construire le schéma bloc de la figure (2.13), où les filtres $W_i(p)$ sont choisis conformément à ces spécifications (nous allons détailler le choix des filtres dans l'exemple (3.5) calcul de l'asservissement en position d'un moteur à courant continu)

$$\begin{cases} W_1(p) = \left(\frac{1}{0.7} \frac{p+0.01}{p+1/0.7} \right)^{-1} = \frac{0.7p+1}{p+0.01} \\ W_2(p) = \left(10 \frac{1}{0.7} \frac{p/1000}{1+p/10} \right)^{-1} = 10 \frac{p+10}{p+1000} \\ W_3(p) = \left(0.5 \frac{p+10}{p} \right)^{-1} = \frac{2p}{p+10} \end{cases} \quad (2.40)$$

Notons que le dénominateur $W_2(p)$ ne résulte pas du cahier des charges, mais introduit pour rendre ce filtre propre.

Le schéma de la figure (2.13) se met sous la forme standard de la figure (2.12) en choisissant $W = r$, $Y = \varepsilon$ et $Z = (e_1 \ e_2 \ e_3)^T$. Nous allons donc rechercher un correcteur K solution de problème suivant :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 W_2 T \end{array} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.41)$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} |W_1 S| < \gamma \Leftrightarrow |S| < \gamma/W_1 \\ |W_2 K S| < \gamma \Leftrightarrow |K S| < \gamma/|W_2| \\ |W_3 W_2 T| < \gamma \Leftrightarrow |T| < \gamma/|W_3 W_2| \end{cases} \quad (2.42)$$

Les objectifs seront atteints si la valeur de γ est inférieure à 1 (ou à la rigueur proche de 1).

En appliquant la méthode de résolution (LMI) qui sera exposée dans le troisième chapitre, on obtient un correcteur correspondant à la valeur $\gamma = 1,0199$ dont les pôles sont les suivants :

$$K = [-26280.5646, -10.3701, -7.8773 + 3.3517i, -7.8773 - 3.3517i, -0.0099]$$

La figure (2.14) montre le diagramme de Bode de chaque une de ces fonctions, comparé à celui de l'inverse des filtres : elle permet de vérifier que les inégalités sont satisfaites, et donc les objectifs de synthèse sont atteints.

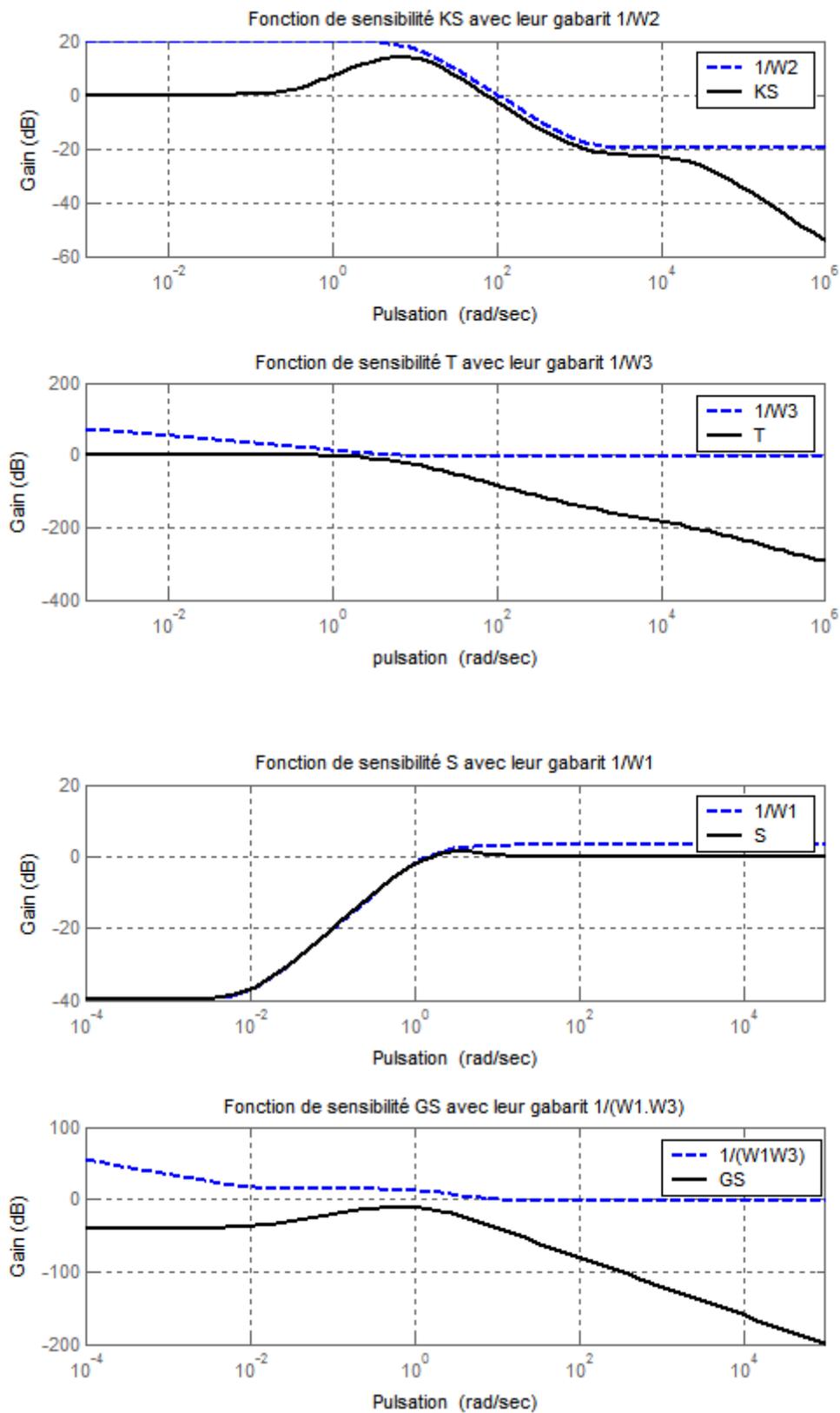


Figure 2.14 : Diagramme de Bode des différents transferts (traits pleins) et leurs gabarits (pointillés)

En terme de robustesse, la dernière des inégalité (2.42) introduit une limite sur la bande passante du transfert entre la référence et la grandeur régulée : celle-ci assure que le système bouclé peut tolérer des dynamique hautes fréquences non prises en compte dans le modèle (2.39) sans risque pour la stabilité. Pour illustrer ce point, supposons par exemple que le modèle **nominal** (2.39) ne tienne pas compte d'un terme supplémentaire du premier ordre au dénominateur, de sorte que le modèle réel figure (2.3) serait :

$$G_{réel}(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)(1+\tau p)} \quad (2.43)$$

En remarquant que :

$$G_{réel}(p) = G(p) \left(1 - \frac{\tau p}{1 + \tau p} \right) \quad (2.44)$$

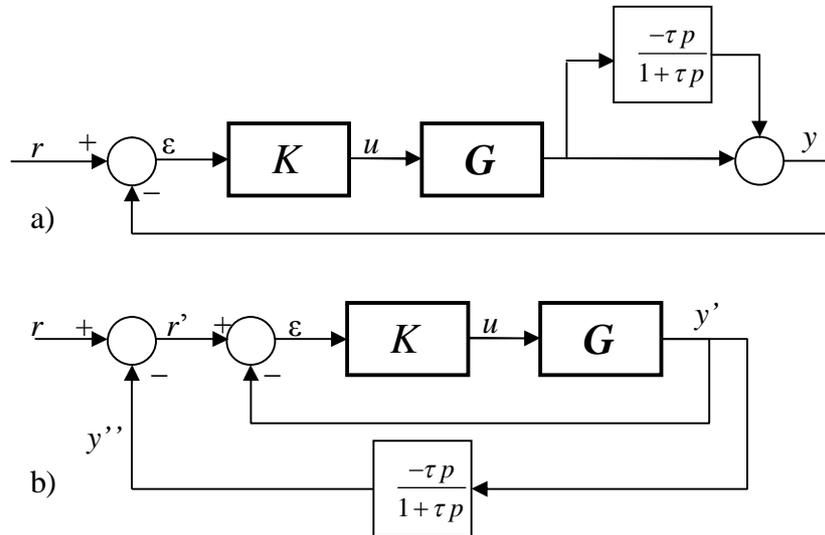


Figure 2.15 : Etude de la robustesse aux dynamiques négligées

Le système bouclé se met sous la forme de la figure (2.15 a) qui est équivalent à celle de la figure (2.15 b). Sur cette dernière figure, le transfert de r' vers y' vérifie la troisième des inégalités (2.42)

$$\left| T_{y',r'} \right| = \left| \frac{KG}{1+KG} \right| < \frac{\gamma}{|W_3|} \quad (2.45)$$

On en déduit que le système bouclé de la figure est stable pour toute valeur de τ telle que

$$\forall \omega \left| T_{y',r'}(j\omega) \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} \right| < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \left| \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} \right| < \frac{|W_3(j\omega)|}{\gamma} \quad (2.46)$$

La figure (2.15 b) correspond à un système dont la boucle ouverte (en y'') est stable, avec un gain toujours inférieur à 1 : d'après le critère de Nyquist, la boucle fermée est donc stable elle aussi.

La figure (2.16) permet de comparer les diagrammes de Bode des deux fonctions qui apparaissent dans la deuxième des inégalités (2.46). On voit que la stabilité est assurée pour toute valeur de τ inférieure à 0.2

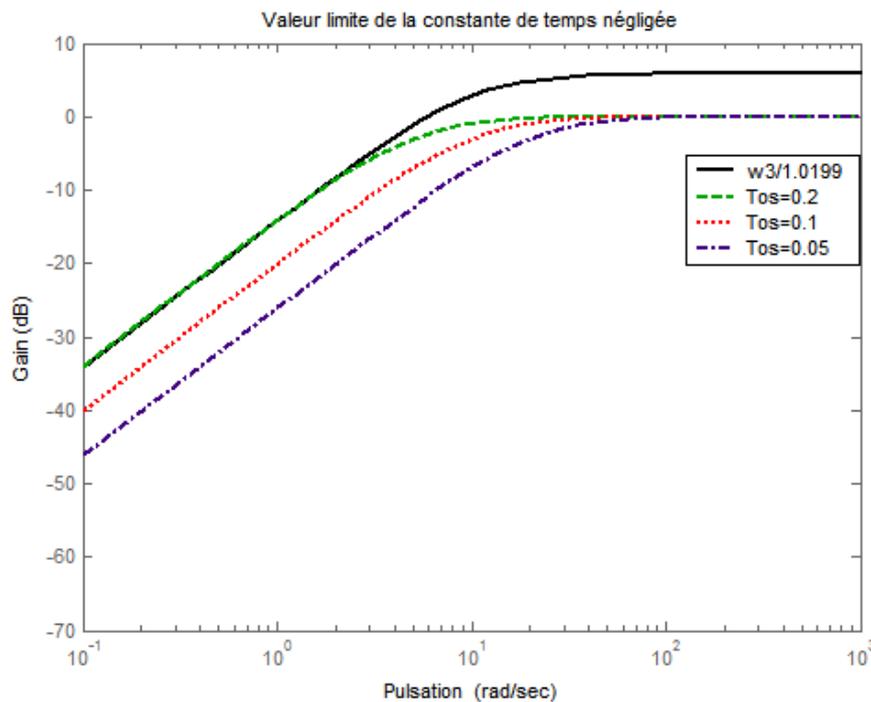


Figure 2.16 : Détermination d'une valeur limite de la constante de temps négligée

Conclusion

ce qui est extrêmement intéressant c'est de constater que l'on utilise exactement le même formalisme pour assurer la performance et la robustesse via le théorème du petit gain : la contrainte sur la norme H_∞ . C'est tout l'intérêt d'utiliser la synthèse H_∞ standard car en pondérant chaque transfert on voit apparaître explicitement la performance et la robustesse réunis au sein d'un même critère. C'est là que le compromis performance/robustesse prend toute sa signification car il est résumé par un seul critère H_∞ .

Dans le troisième chapitre, nous allons développer la formalisation du critère H_∞ sous forme d'un problème d'optimisation convexe (sous contrainte LMI) pour le cas des systèmes LTI puis une extension aux système LPV

Chapitre III

Les inégalités matricielles linéaires (LMI)

Introduction

Un grand nombre de problème concernant les systèmes dynamiques peuvent se mettre sous forme de problème d'optimisation convexe d'un type particulier nommé les programme semi définis SDP (Semi-Definit-Programs). L'intérêt principal des SDPs est la possibilité de calculer le minimum global, ces SDP sont aussi connus sous le nom des LMIs (Linear Matrix Inequalities)

L'histoire des LMIs a plus de 100 ans, elle semble avoir débuté en 1890 quand Lyapunov montra que la stabilité du système autonome

$$\dot{x} = Ax$$

Et équivalent à l'existence d'une matrice symétrique définie positive telle que :

$$A^T P + PA < 0$$

Il a même montré qu'il est possible de résoudre analytiquement ce problème.

Dans les années 1940, l'école russe menée par Lur'e et Postnikov énonce des critères de stabilité, en particulier pour des système non linéaire, sous forme de LMI celles-ci étaient résolues analytiquement pour des systèmes de petite taille

Au début des années 1970, on montre que certaine LMIs peuvent être résolues en terme d'équation algébrique de Riccati, on retiendra à ce propos les travaux de Willems.

La dernière pierre de cette évolution repose sur la formulation des problèmes classique d'automatique en tant que problème d'optimisation convexe. Phatnitskii et Skorodinski réduisent le problème de Lur'e sous la forme d'un problème convexe qu'ils résolvent numériquement en utilisant l'algorithme de l'ellipsoïde en 1982. On assiste alors durant les années 1980-1990 au développement des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation convexe.

Les travaux actuels se concentrent sur les formulations possibles des problèmes d'automatique en tant que problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI et l'amélioration des méthodes numériques de résolution des LMIs. Ces dernière concernant la

minimisation des temps de calcul qui restent encore importants, et les problèmes de convergence lorsque la taille de problème devient grande.

Dans ce chapitre nous allons voir, comment nous pouvons exprimer le problème standard H_∞ sous forme d'un problème d'optimisation convexe, et de chercher la loi de commande en utilisant les LMIs.

Avant de nous approfondir dans l'étude des LMIs quelques définitions sont nécessaires.

3.1 Problème d'optimisation

L'optimisation est la branche des Mathématiques consacrée à l'étude du minimum/maximum d'une fonction à plusieurs variables sur un certain domaine de définition, de l'étude de leur existence à leur détermination, en général par la mise en œuvre d'un algorithme sur un ordinateur.

Définition [12] (*Problème d'optimisation de dimension finie*) Soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^m &\rightarrow \mathfrak{R} \\ \zeta &\mapsto f(\zeta) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Alors un problème d'optimisation s'écrit :

$$\min_{\zeta \in C} f(\zeta) \tag{3.2}$$

où

- $C \subset \mathfrak{R}^m$: est l'ensemble des contraintes.
- ζ : est le vecteur de variables de décision ou variables d'optimisation.
- La valeur de ζ pour laquelle le minimum est atteint est appelée ζ^* Notation :

$$\zeta^* = \arg \min_{\zeta \in C} f(\zeta) \tag{3.3}$$

- La fonction f est l'objectif ou la fonction de coût
- Quand $C = \mathfrak{R}^m$ on parle de problème d'optimisation sans contrainte sinon de problème d'optimisation sous contraintes

Généralement, la résolution par un algorithme d'un problème d'optimisation est un problème compliqué. Si par exemple la fonction f figure (3.1) droite admet plusieurs minima, le résultat va dépendre du point initial ζ_0 .

Par contre si le minimum local = minimum global figure (3.1) gauche, le problème est de faible complexité Indépendamment du point initial, le minimum global sera alors atteint.

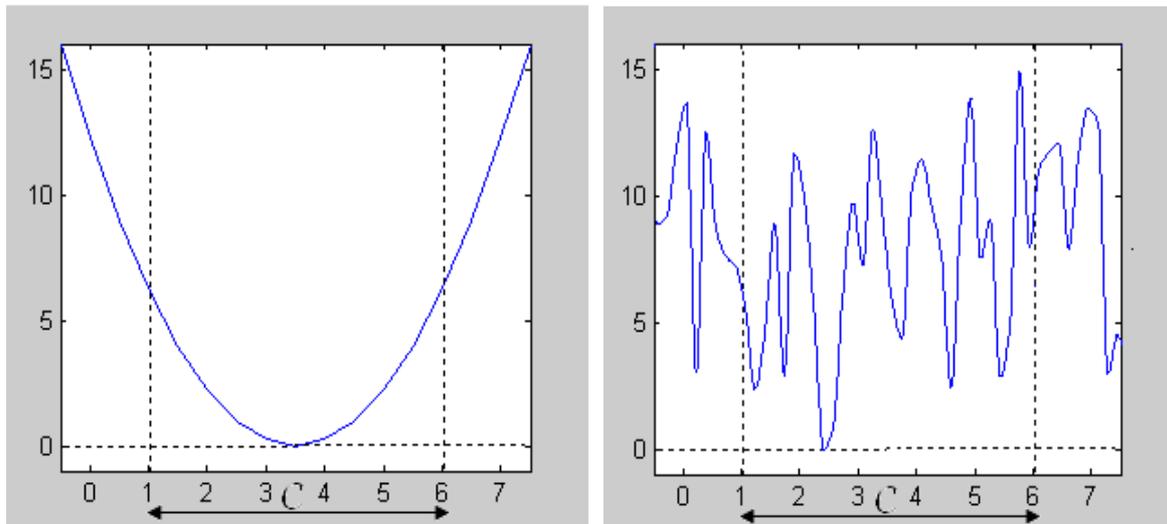


Figure 3.1 : Fonction de plusieurs minima (droite) un seule minimum (gauche)

3.1.1 Ensembles convexes



Figure 3.2 : Ensemble non convexe (gauche), convexe (droite)

Définition [12]: Ensemble C est dit convexe si le segment ligne entre deux points dans C se situent dans C :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad x_1 \in C \text{ et } x_2 \in C \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$$

Ellipsoïde : $\varepsilon = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \leq 1\}$ avec P matrice définie positive

Propriétés : L'intersection de deux ensembles convexes est convexe.

3.1.2 Fonctions convexes

Définition [12]: (Fonction convexe) Soit une fonction f

$$\begin{aligned} C \subset \mathfrak{R}^m &\rightarrow \mathfrak{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

La fonction f est convexe si :

- Le support (ensemble de définition) C de f est convexe (voir le paragraphe précédent)
- $\forall x \in C, \forall y \in C, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Géométriquement cette inégalité signifie que le segment ligne entre $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ se situe au dessus du graphe de f figure (3.3).

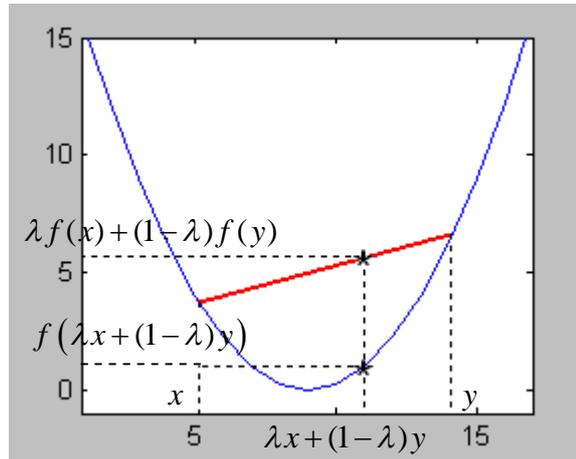


Figure 3.3 : Démonstration géométrique de la convexité

Propriété : Si $f_1(x), f_2(x)$ sont deux fonctions convexes (même domaine de définition) alors :

$$f(x) = \max(f_1(x), f_2(x)) \text{ est convexe.}$$

Propriété : Si $f(x, y)$ est convexe en (x, y) et C un domaine convexe alors $g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y)$ est une fonction convexe.

3.1.3 Fonctions quasi-convexes

Définition [12] (fonction quasi-convexe) Soit une fonction f

$$\begin{aligned} D \subset \mathfrak{R}^m &\rightarrow \mathfrak{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

La fonction f est quasi convexe si :

- Le support D de f est convexe
- $\forall x \in D, \forall y \in D, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max(f(x), f(y))$

La seconde condition peut se réécrire : les ensembles $C(\alpha) = \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}$ sont convexes.

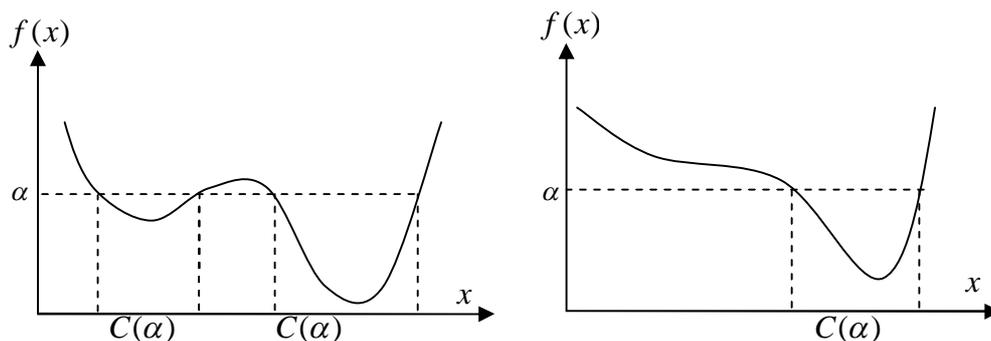


Figure 3.4 : Fonction non quasiconvexe (gauche) quasiconvexe (droite)

3.2 Optimisation LMI

3.2.1 Problèmes d'optimisation sous contraintes LMI :

Le problème de minimisation d'une fonction f en fonction des variables de décision $\zeta \in \mathfrak{R}^m$ soumis aux contraintes d'inégalité matricielle portant sur des fonctions convexes de ζ est un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI c'est-à-dire [36] :

$$\begin{cases} \min f(\zeta) \\ \zeta \in C \\ C = \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^m \mid \forall x \in \mathfrak{R}^n, x^T F(\zeta) x \geq 0, (> 0) \right\} \end{cases} \quad (3.7)$$

avec

$$F(\zeta) = F_0 + \sum_{i=1}^m \zeta_i F_i \geq 0$$

Cette contrainte est appelée *contrainte Inégalité Matricielle affine* ou *contrainte LMI*.

$\zeta \in \mathfrak{R}^m$: le vecteur des variables de décision.

F_i : sont m matrices symétriques données de $\mathfrak{R}^{n \times n}, i = 0, \dots, m$.

C : est un ensemble convexe.

$F(\zeta) \geq 0 (> 0)$ Signifie respectivement (semi définie positive, définie positive).

Propriété : Les LMIs multiple de la forme :

$$C_1 = \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^m \mid F^1(\zeta) > 0 \right\} \text{ et } C_2 = \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^m \mid F^2(\zeta) > 0 \right\} \quad (3.8)$$

Peuvent se ramener à une seule.

$$C_1 \cap C_2 = \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^m \mid \begin{bmatrix} F^1(\zeta) & 0 \\ 0 & F^2(\zeta) \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (3.9)$$

Cette propriété découle du fait que les valeurs propres d'une matrice "diagonale par blocs" sont constituées par les valeurs propres des matrices sur la diagonale.

3.2.2 Problème de Faisabilité

Le problème de faisabilité consiste à tester si l'ensemble $C \neq \emptyset$; et si oui déterminer un $\zeta \in C$ tel que $F(\zeta) > 0$.

On peut évoquer ce problème à travers l'exemple élémentaire suivant :

Exemple (3.1) :

Soit $F(\zeta)$ la matrice symétrique de fonctions affines en le scalaire réel ζ :

$$F(\zeta) = \begin{bmatrix} 4-\zeta & 2\zeta-2 \\ 2\zeta-2 & 4-\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $F(\zeta)$ est donné par $\lambda^2 - 2(4-\zeta)\lambda - (3\zeta^2 - 12)$.

Les racines sont $\lambda_1(F(\zeta)) = (-3\zeta + 6)$ et $\lambda_2(F(\zeta)) = (\zeta + 2)$. Par suite, la contrainte LMI

$\{\zeta | F(\zeta) > 0\}$ correspond à définir le domaine : $\{\zeta | \zeta \in]-2; 2[\}$ voir figure (3.5)

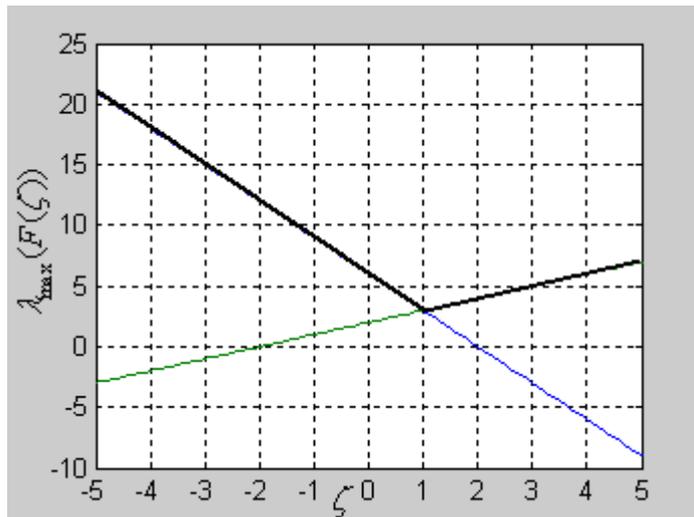


Figure 3.5 : Tracé de $\lambda_{\max}(F(\zeta))$ en fonction de ζ

Donc le problème est faisable car l'intervalle $]-2; 2[$ n'est pas vide.

$$\zeta^* = \arg \min_{\zeta \in]-2; 2[} f(\zeta) = 1 \quad (3.11)$$

3.2.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques en utilisant le problème de faisabilité

Exemple (3.2) : Soit le pendule simple suivant [36] :

$$\ddot{\theta}(t) = -\eta \dot{\theta}(t) - \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (3.12)$$

Pour $\theta(t)$ faible

$$\ddot{\theta}(t) = -\eta \dot{\theta}(t) - \frac{3}{4} \frac{g}{l} \theta \quad (3.13)$$

La représentation d'état d'un système linéaire

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} \frac{g}{l} & -\eta \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \quad (3.14)$$

$x(t)$: est le vecteur d'état.

Ici l'état est donné par la position angulaire θ et par la vitesse $\dot{\theta}$.

Pour une valeur donnée x_0 de l'état $x(t)$ à l'instant $t = 0$, on dit que le système est stable si pour toute condition initial x_0 , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{soit encore} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

Vérifier la stabilité du système pendule revient à assurer que lorsque le pendule est abandonné au temps $t = 0$ avec position angulaire θ_0 et une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$, il tend à s'immobiliser à la position angulaire $\theta_0 = 0$ et ceci, pour toute valeur de θ_0 et pour toute valeur de $\dot{\theta}_0$.

D'après la théorie de Lyapunov, on a stabilité pour toute condition initiale s'il existe une fonction $V(x)$ telle que pour $x \neq 0$ $V(x) > 0$ et $\dot{V}(x) < 0$.

On prend la fonction quadratique de Lyapunov énoncé dans le premier chapitre voir paragraphe (1.2.5)

$$V(x) = x^T P x$$

où P est une matrice symétrique à déterminer.

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0 \\ A^T P + P A < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & -(A^T P + P A) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.15)$$

La dernière équivalence découle du fait que les valeurs propres d'une matrice "diagonale par blocs" sont constituées par les valeurs propres des matrices sur la diagonale.

Avec

$$P = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \zeta_i P_i \quad (3.16)$$

où $P_i, i \in \left\{1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$ une base de l'espace des matrices symétriques de dimension $n \times n$.

En posant $F_0 = 0$

$$F(\zeta) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \zeta_i F_i \quad \text{avec} \quad F_i = \begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & A^T P_i + P_i A \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

on a

$$\text{trouver } V \text{ tel que } \begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{trouver } \zeta \text{ tel que } F(\zeta) > 0$$

3.2.3 Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & c^T \zeta \\ \text{Pour} & \zeta \in \mathfrak{R}^m \\ \text{Contraint par} & F(\zeta) > 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Où c^T est un vecteur ligne donné.

Exemple (3.3) :

Soit le systèmes linéaires stationnaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.19)$$

où $u(t)$ est l'entrée du système et $y(t)$ est la sortie.

L'énergie du signal de sortie sur l'intervalle $[0, T]$ est donnée par :

$$\int_0^T y(t)^T y(t) dt \quad (3.20)$$

L'énergie du signal d'entrée :

$$\int_0^T u(t)^T u(t) dt \quad (3.21)$$

Si le signal d'entrée est borné:

$$\int_0^T u(t)^T u(t) dt < +\infty \quad (3.22)$$

Existe-il un réel positif γ tel que

$$\forall T > 0, \frac{\int_0^T y(t)^T y(t) dt}{\int_0^T u(t)^T u(t) dt < +\infty} \leq \gamma^2 \quad (3.23)$$

On démontre que si le système est stable alors un tel γ existe.

On recherche alors le plus petit γ tel que l'inégalité (3.23) soit vérifiée.

On démontre (lemme réel borné avec la fonction candidate de Lyapunov) que (3.23) est vérifiée si et seulement si il existe une matrice symétrique P telle que [36]:

$$\begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Pour une valeur de γ donnée, l'inégalité matricielle ci-dessus est affine en la variable de décision P : elle définit donc une contrainte LMI. Rechercher P revient donc à résoudre un problème de faisabilité. Si on désire rechercher le plus petit γ tel qu'il existe P vérifiant (3.24) alors γ devient aussi une variable de décision. Cependant, (3.24) dépend de façon affine de γ^2 et non de γ . D'où le changement de variable $\eta = \gamma^2$: minimiser η est équivalent à minimiser γ car γ est positif. Par suite, le problème se réécrit :

$$\begin{aligned} & \min \quad \eta \\ & \eta \in \mathfrak{R}, P = P^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} \\ & \begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \eta I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

où $P_i, i \in \left\{1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$ une base de l'espace des matrices symétriques de dimension $n \times n$ et

$$\zeta_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = \eta \text{ en posant } F(\zeta) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}+1} \zeta_i F_i$$

avec

$$\forall i \in \left\{1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}, F_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & -(A^T P_i + P_i A) & -P_i B \\ 0 & -B^T P_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C^T C & -C^T D \\ 0 & D^T C & dD^T D \end{bmatrix} \text{ et } F_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$c = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \text{ et } m = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

La recherche du plus petit γ tel qu'il existe P vérifiant (3.25) s'écrit comme la minimisation d'un coût linéaire sous contraintes LMI (3.18)

La plus petite valeur de γ est alors donnée par la racine carrée du minimum obtenu.

3.2.4 Lemme de Schur [12]:

Soit une matrice symétrique partitionnée :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

où A et C sont des matrices carrées. Cette matrice est définie positive si et seulement si A et $C - B^T A^{-1} B$ sont définies positives.

La démonstration est basée sur la remarque que :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1}B \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.2.4.1 Intérêt du lemme de Schur :

Soient $A(\zeta), B(\zeta), C(\zeta)$ et $D(\zeta)$ quatre matrices fonctions affines en ζ .

Alors $C(\zeta) - B(\zeta)^T A(\zeta)^{-1} B(\zeta)$ n'est pas une fonction affine en ζ . Néanmoins, d'après le lemme de Schur :

$$\begin{cases} A(\zeta) > 0 \\ C(\zeta) - B(\zeta)^T A(\zeta)^{-1} B(\zeta) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(\zeta) & B(\zeta) \\ B(\zeta)^T & C(\zeta) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C(\zeta) & B(\zeta)^T \\ B(\zeta) & A(\zeta) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.29)$$

Les deux dernières inégalités sont affines en ζ .

Remarque : En dépit de leur nom, les contraintes LMI peuvent être équivalentes à des contraintes non linéaires. Ce qui qualifie la difficulté d'un problème d'optimisation est plus le fait qu'il soit non convexe que le fait qu'il soit non linéaire.

Exemple (3.4) :

Soit le système linéaire stationnaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.30)$$

où $u(t)$ est l'entrée de commande et $x(t)$ est l'état du système, avec $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$.

L'objectif est de chercher une loi de commande par retour d'état : $u(t) = Kx(t)$ (c'est à dire la matrice $K \in \mathfrak{R}^{p \times n}$) tel que le système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (3.31)$$

soit stable.

Il est stable s'il existe une matrice P telle que

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ (A + BK)^T P + P(A + BK) &< 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

La seconde inégalité est équivalent à

$$(A^T P + PA + K^T B^T P + PBK) < 0 \quad (3.33)$$

On remarque que cette inégalité est non linéaire par rapport aux variables d'optimisation P et K . Elle ne définit pas une LMI.

Néanmoins, en opérant le changement de variables :

$$Q = P^{-1} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ et } Y = KP^{-1} \in \mathfrak{R}^{p \times n} \quad (3.34)$$

Le équation devient linéaires en Q et Y . Alors une écriture du problème sous forme LMI est possible et la loi de commande $u(t) = Kx(t)$ stabilisant le système (3.30) peut s'effectuer de la façon suivante [36]:

- Trouver $Q > 0$ et Y tel que :

$$QA^T + AQ + Y^T B^T + BY < 0 \quad (3.35)$$

- $P = Q^{-1}$ et $K = YP$

Application numérique

Soit le système instable suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Avec
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.3 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.177 \end{bmatrix}$$

La résolution de LMI décrit par l'équation (3.35) donne la matrice définie positive P et le gain de contrôleur K :

$$P = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.5269 & 0.2539 \\ 0.2539 & 0.1385 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de $P = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.6523 \\ 0.0130 \end{bmatrix}$

Le gain du contrôleur $K = [-5512.3 \quad -2770.2]$

Les valeurs propres de $(A - BK) = \begin{bmatrix} -1.9624 \\ -488.356 \end{bmatrix}$

La matrice fondamentale de système en boucle fermée $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$ devient stable

3.3 Synthèse d'un correcteur H_∞ par retour d'état

Dans le cas du retour d'état, le système P admet pour équations d'état [36]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (3.36)$$

On recherche une loi de commande par retour d'état (c'est-à-dire une matrice $K \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ telle que $u(t) = Kx(t)$ assure :

1. Le système bouclé est stable ;
2. La norme H_∞ de la fonction de transfert en boucle fermée entre l'entrée w et la sortie z est inférieure à γ .

Synthèse directe

Le système en boucle fermée admet pour équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_u K)x(t) + B_w w(t) \\ z(t) = (C_z + D_{zu} K)x(t) + D_{zw} w(t) \end{cases} \quad (3.37)$$

En appliquant le lemme réel borné, il existe un correcteur par retour d'état s'il existe une matrice K et une matrice symétrique P telles que $P > 0$ et :

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K)^T P + P(A + B_u K) + (C_z + D_{zu} K)^T (C_z + D_{zu} K) & PB_w + (C_z + D_{zu} K)D_{zw} \\ B_w^T P + D_{zw}^T (C_z + D_{zu} K) & D_{zw}^T D_{zw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.38)$$

Les variables d'optimisation sont P et K . Cette inégalité n'étant pas affine en P et en K , elle ne définit pas une LMI. Par une série de transformations, on va montrer que l'on peut obtenir une contrainte LMI équivalente après un changement de variables adéquat.

L'inégalité (3.38) peut se réécrire :

$$\begin{bmatrix} (A^T P + PA + K^T B_u^T P + PB_u K & PB_w \\ B_w^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_z + D_{zu} K)^T \\ D_{zw}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_z + D_{zu} K) & D_{zw} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.39)$$

Lemme (lemme de Schur modifié) Soit une matrice symétrique partitionnée :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

où A et C sont des matrices carrées, avec A définie positive. Cette matrice est définie positive si et seulement si $C - B^T A^{-1} B$ est semi définie positive.

L'inégalité (3.39) peut alors se réécrire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + PA + K^T B_u^T P + PB_u K & PB_w \\ B_w^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix}}_C - \underbrace{\begin{bmatrix} (C_z + D_{zu} K)^T \\ D_{zw}^T \end{bmatrix}}_{B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} (-I) \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zw} \end{bmatrix}}_{\substack{A^{-1} \\ B}} \leq 0 \quad (3.40)$$

Par application du lemme de Schur modifié, on a alors l'inégalité (3.40) qui est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + K^T B_u^T P + PB_u K & PB_w & (C_z + D_{zu} K)^T \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.41)$$

L'intérêt de cette transformation est que, dans l'inégalité obtenue, il ne reste plus que $K^T B_u^T P$ et $PB_u K$ comme terme bilinéaire. On va utiliser une nouvelle transformation puis un changement de variable de façon à se ramener à une inégalité affine. Pour cela, on va se baser sur la propriété suivante :

Propriété : $\forall T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ inversible $A \leq 0 \Leftrightarrow T^T A T \leq 0$

En appliquant cette propriété avec :

$$T = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} A^T P + PA + K^T B_u^T P + PB_u K & PB_w & (C_z + D_{zu} K)^T \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} P^{-1} A^T + A P^{-1} + P^{-1} K^T B_u^T + B_u K P^{-1} & B_w & P^{-1} (C_z^T + D_{zw}^T K^T) \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z P^{-1} + D_{zu} K P^{-1} & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.43)$$

En posant $Q = P^{-1} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $Y = K P^{-1} \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} Q A^T + A Q + P^{-1} K^T B_u^T + B_u K P^{-1} & B_w & Q C_z^T + Y^T D_{zw}^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q + D_{zu} Y & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.44)$$

D'autre part, on a $P > 0 \Leftrightarrow Q > 0$.

Les inégalités (3.44) et $Q > 0$ sont bien affines en les variables Q et Y .

Rechercher Q et Y tels que $Q > 0$ et (3.44) est donc un problème de faisabilité LMI.

En conclusion, la recherche d'une loi de commande $u(t) = Kx(t)$ assurant la stabilité de la boucle fermée et une norme H_∞ entre w et z inférieure à γ s'obtient de la façon suivante :

- Trouver Q et Y tels que les inégalités $Q > 0$ et (3.44) soient satisfaites (problème de faisabilité)

- $P = Q^{-1}$ et $K = YP$

3.4 Existence d'un correcteur H_∞

On peut être intéressé par déterminer s'il existe un correcteur H_∞ pour un γ donné, sans le calculer explicitement. Pour cela, on dispose du résultat suivant [09-12-36].

Lemme (Lemme d'élimination) *Soit $G = G^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $U \in \mathfrak{R}^{r \times n}$ avec $\text{Rang}(U) = r < n$ et $V \in \mathfrak{R}^{s \times n}$ avec $\text{Rang}(V) = s < n$. Alors, il existe une matrice $K \in \mathfrak{R}^{s \times r}$ telle que l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$G + U^T K^T V + V^T K U < 0 \quad (3.45)$$

Si et seulement si :

$$U_\perp^T G U_\perp < 0 \quad \text{et} \quad V_\perp^T G V_\perp < 0 \quad P > 0 \quad (3.46)$$

Avec

U_\perp : Engendre le noyau de l'application linéaire associée à la matrice U .

V_\perp : Engendre le noyau de l'application linéaire associée à la matrice V .

Ce résultat est remarquable puisqu'il donne une condition nécessaire et suffisante permettant de tester l'existence d'une matrice K telle que la matrice $G + U^T K^T V + V^T K U$ est semi définie négative, sans rechercher K explicitement.

L'inégalité (3.44) peut se réécrire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zu} & -I \end{bmatrix}}_G + \underbrace{\begin{bmatrix} B_u \\ 0 \\ D_{zu} \end{bmatrix}}_{U^T} \underbrace{Y}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_V + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Y^T \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.47)$$

En appliquant le lemme d'élimination, l'inégalité (3.47) est équivalente à

$$U_\perp^T G U_\perp < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}_\perp^T \begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}_\perp \leq 0 \quad (3.48)$$

et à

$$V_\perp^T G V_\perp < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}_\perp^T \begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}_\perp \leq 0 \quad (3.49)$$

comme

$$[I \ 0 \ 0]_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

on a :

$$V_{\perp}^T G V_{\perp} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ D_{zw} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \Leftrightarrow D_{zw}^T D_{zw} \leq \gamma^2 I \quad (3.51)$$

en résumé, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur par retour d'état assurant que :

1. Le système bouclé est stable ;
2. La norme H_{∞} de la fonction de transfert en boucle fermée entre l'entrée w et la sortie z est inférieure à γ est donnée par :

$$D_{zw}^T D_{zw} \leq \gamma^2 I \quad (\text{valeur singulière maximale de } D_{zw} \text{ inférieure ou égale à } \gamma)$$

2. l'existence d'une matrice Q telle que $Q > 0$ et (3.48)

on a donc un problème de faisabilité LMI dans lequel le correcteur n'est pas recherché explicitement.

Cette solution a des liens très forts avec la solution par équations de Riccati par retour d'état.

3.4.1 Synthèse H_{∞} par retour de sortie

Le théorème suivant donne la solution dans le cas où l'état n'est pas mesuré par formulation LMI.

Théorème (3.1)[03-10] Soit le système P d'ordre n défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (3.52)$$

Etant donné $\gamma > 0$, il existe un correcteur K d'ordre inférieur ou égal à n , défini par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{cases} \quad (3.53)$$

telle que le système bouclé $P * K$ soit asymptotiquement stable $\|P * K\|_{\infty} \leq \gamma$ si et seulement s'il existe deux matrices S et R telles que :

$$\begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} RA^T + AR & B_w & RC_z^T \\ B_w^T & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z R & D_{zu} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_w & C_z^T \\ B_w^T S & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.55)$$

et

$$\begin{bmatrix} S & I \\ I & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.56)$$

Tester l'existence d'un correcteur qui assure un "niveau de performance" γ donné est un problème de faisabilité LMI. Tester l'existence d'un correcteur qui assure le plus petit "niveau de performance" γ peut s'écrire comme un problème de minimisation d'un coût linéaire sous contraintes LMI

3.5 Calcul de l'asservissement en position d'un moteur

Nous détaillons dans cet exemple [15], la mise en œuvre de l'approche H_∞ avec pondération (exposée dans le chapitre précédent) sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI, pour réaliser l'asservissement en position d'un moteur à courant continu représenté sur la figure suivante :

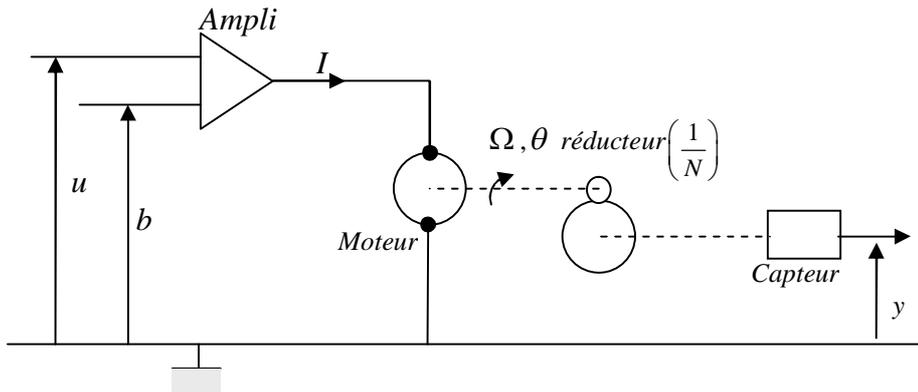


Figure 3.6 : Asservissement en position d'un moteur à courant continu

Le dispositif est un moteur, alimenté par un amplificateur, entraîne un réducteur, l'objectif est d'asservir l'angle en sortie du réducteur ou, de façon équivalente, la tension y proportionnelle à cet angle est fourni par un capteur. La variable de commande est la tension u appliquée à l'amplificateur, tandis que b représente une perturbation constante

(tension d'offset d'un Ampli par exemple).

En notant I, Ω et θ le courant d'induit, la vitesse de rotation, et la position angulaire du moteur, le système à commander est décrit par les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{dI}{dt} = -RI(t) - K_e \Omega(t) + A(u(t) + b) \\ J \frac{d\Omega}{dt} = K_c I(t) - a\Omega(t) \\ \Omega(t) = L \frac{d\theta}{dt} \\ y(t) = \frac{\beta}{N} \theta(t) \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Les valeurs nominales des paramètres sont:

$$\begin{array}{lll} R = 5.8\Omega & L = 5.10^{-3}\text{H} & K_e = 0.024\text{Vs} \\ J = 15.10^{-7}\text{Kgm}^2 & a = 10^{-6}\text{Nms} & K_c = 0.024\text{NmA}^{-1} \\ A = 10 & N = 7 & \beta = 4\text{Vrd}^{-1} \end{array}$$

Les objectifs de l'asservissement sont les suivants :

1. une bande passante de l'ordre de 100 rad/s
2. des marges de stabilité suffisantes, soit : $\Delta G \approx 15\text{dB}$ $\Delta\varphi \approx 50^\circ$
3. une amplitude de la commande "raisonnable"
4. une erreur statique due à b inférieure à 1%

Pour effectuer la synthèse de l'asservissement, nous utiliserons un modèle simplifié, obtenu en considérant $L \approx 0$ dans les équations (3.57). Le processus a alors pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{240}{p(1 + 0.015p)} \quad (3.58)$$

La mise en œuvre de l'approche H_∞ avec pondération consiste à utiliser la forme standard du critère H_∞ (voir figure (2.11)) où, nous avons trois pondérations à choisir W_1, W_2 et W_3 . On s'aperçoit d'après les équations (2.4 et 2.3) que l'on a 3 pondérations pour 4 transferts en boucle fermée. Nous allons donc procéder de la façon suivante :

On va choisir dans un premier temps W_1 pour pondérer S .

Dans un deuxième temps on choisira W_2 pour pondérer KS , et dans un troisième temps,

On choisira W_3 en fonction de W_1 pour pondérer GS .

Finalement il ne reste que T qui est fixé puisqu'il vérifie $S + T = 1$.

Une fois choisis les filtres (ou les pondérations), il reste à identifier l'équation d'état du système augmenté P (3.52) et d'utiliser le théorème (3.1) pour faire la synthèse d'une loi de commande vérifiant les objectifs de l'asservissement.

Dans ce qui suit, nous détaillons le choix des filtres et le réglage des performances. Par souci de simplicité, nous nous limitons à des filtres d'ordre inférieur ou égal à 1.

Choix de W_1 :

Compte tenu des performances demandées, on choisit $W_1(p)$ de façon que $1/|W_1(j\omega)|$:

- Coupe l'axe $0dB$ à $100rd/s$ (soit la bande passante demandée)
- Présente un gain en haute fréquence de 1,7 de façon à limiter la norme H_∞ de $S(p)$ à cette valeur, et à garantir ainsi une marge de module de l'ordre de 0.6
- Présente un gain faible, par exemple 10^{-3} , en basse fréquence, ce qui conduit à :

$$W_1(p) = \frac{P + 128}{1.7(p + 0.075)} \quad (3.59)$$

Réglage de W_2 :

Dans un premier temps, nous gardons nul le filtre W_3 et nous choisissons un filtre $W_2(p) = W_2$ constant, dont nous allons ajuster la valeur en surveillant différents résultats, et en gardant la valeur de γ en dessous de 1. Pour chaque valeur successive de W_2 , les conditions du théorème (3.1) sont testées de façon que la valeur finalement choisie pour γ n'excède pas la valeur optimale de plus de 0,1.

Les figures (3.7, 3.8 et 3.9) montre respectivement les fonctions de pondération, les réponses fréquentielles et temporelles obtenues pour 3 valeurs successives de W_2 :

$$\begin{array}{ll} W_2 = 0.01 & \gamma = 0.6199 \\ W_2 = 0.1 & \gamma = 0.7266 \\ W_2 = 0.5 & \gamma = 0.9532 \end{array}$$

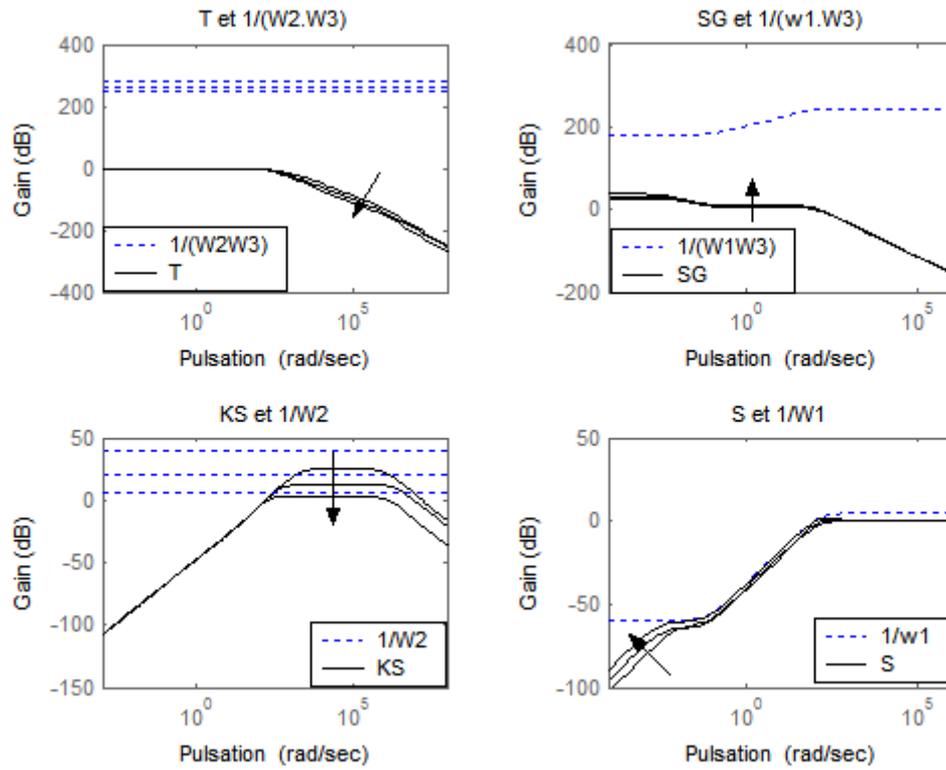


Figure 3.7 : Réglage de W_2 (Fonctions de sensibilité)

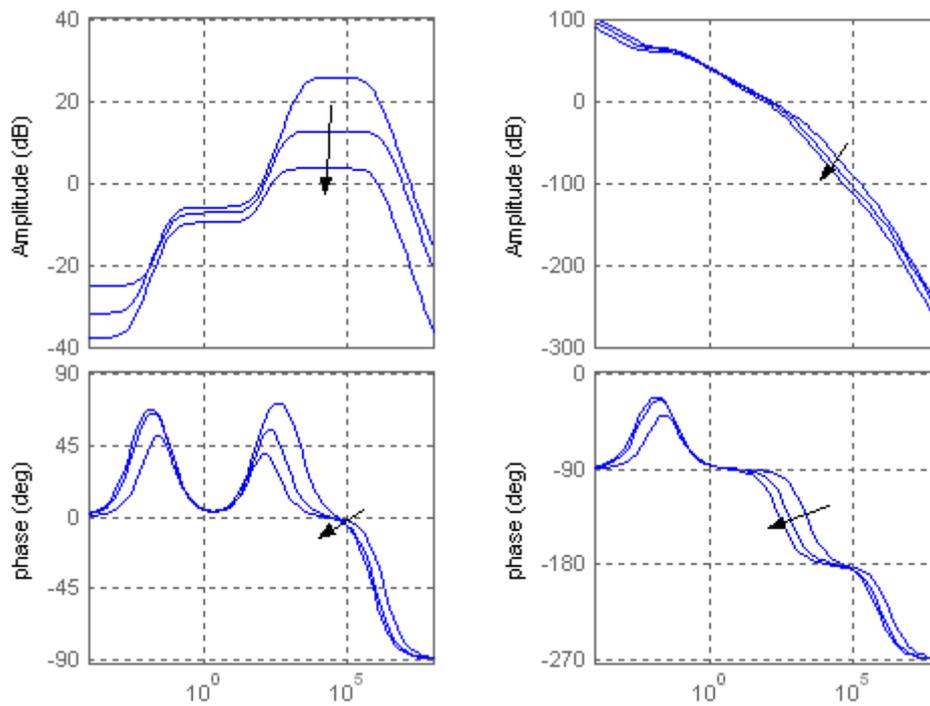
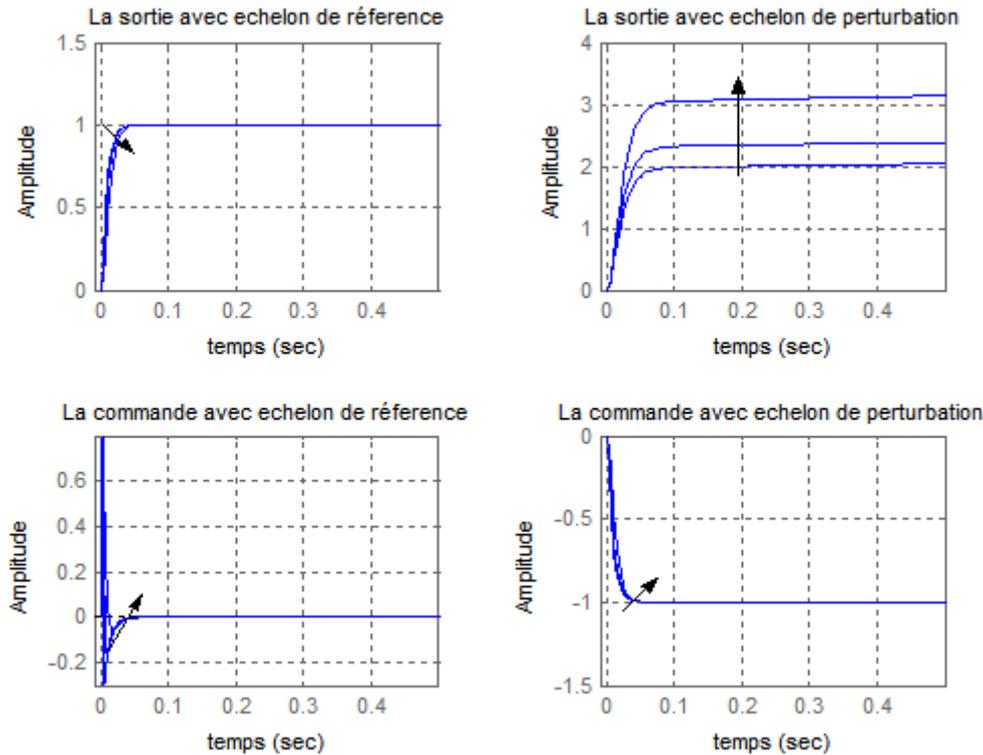


Figure 3.8 : Réglage de W_2 (Réponse fréquentielle)

Figure 3.9 : Réglage de W_2 (Réponse temporelle)

Les flèches sur les graphiques indiquent le sens croissant de W_2 . On constate que l'augmentation de W_2 :

- Augmente la valeur de γ ce qui est logique : en pondérant plus fortement l'un des signaux à contrôler, la norme H_∞ du système corrigé a tendance à croître.
- Modifie peu les réponses fréquentielles de $S(p)$ et $S(p)G(p)$, réduit légèrement la bande passante de $T = K(p)S(p)G(p)$, et joue principalement sur la réponse fréquentielle de $K(p)S(p)$
- Réduit le gain du correcteur dans les hautes fréquences, mais garde la pulsation au gain unité de la boucle ouverte aux alentours de 100 rad/s, ce qui conduit pour la réponse à la référence à un temps du 1er maximum de l'ordre de 30 ms
- Donne dans tous les cas une réponse à la consigne très satisfaisante, mais que par contre la réponse à la perturbation fait apparaître une erreur statique considérable.
- On retient donc pour la suite la valeur $W_2 = 0.5$. Le point principal à améliorer étant la réponse à la perturbation, nous allons régler à présent W_3 .

Réglage de W_3

Nous choisissons un filtre $W_3(p) = W_3$ constant, dont nous allons là aussi ajuster la valeur par essais successifs.

Les figures (3.10, 3.11 et 3.12) montre respectivement les fonctions de pondération, les réponses fréquentielles et temporelles obtenues pour 3 valeurs successives de W_3 :

$W_3 = 0.01$	$\gamma = 0.9656$
$W_3 = 0.1$	$\gamma = 1.0576$
$W_3 = 0.5$	$\gamma = 1.1037$

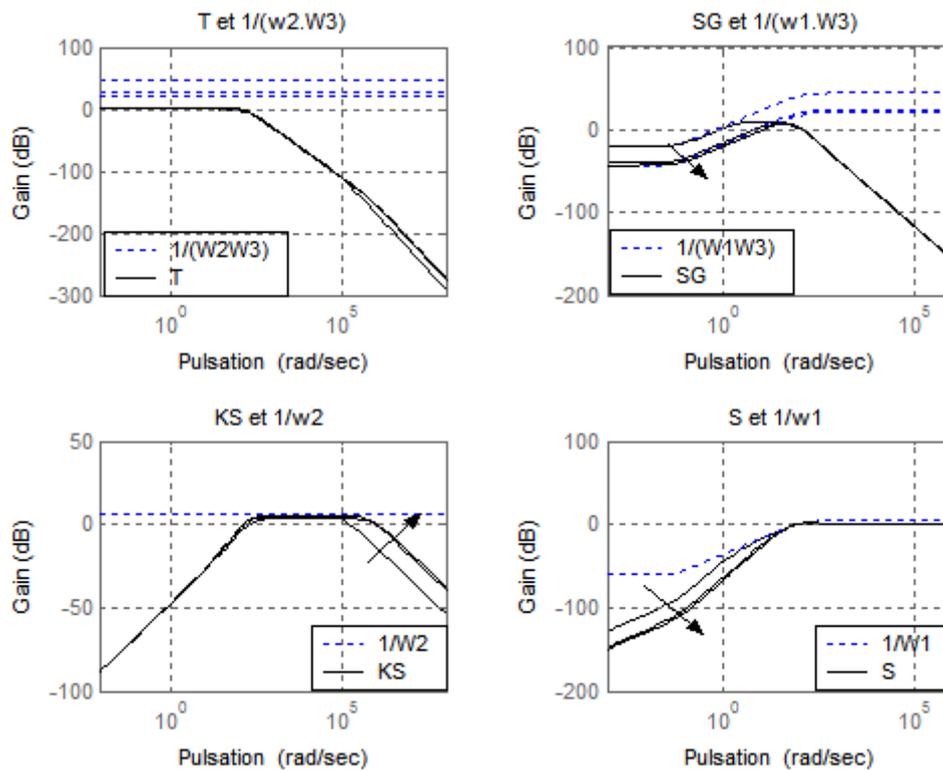


Figure 3.10 : Réglage de W_3 (Fonctions de sensibilité)

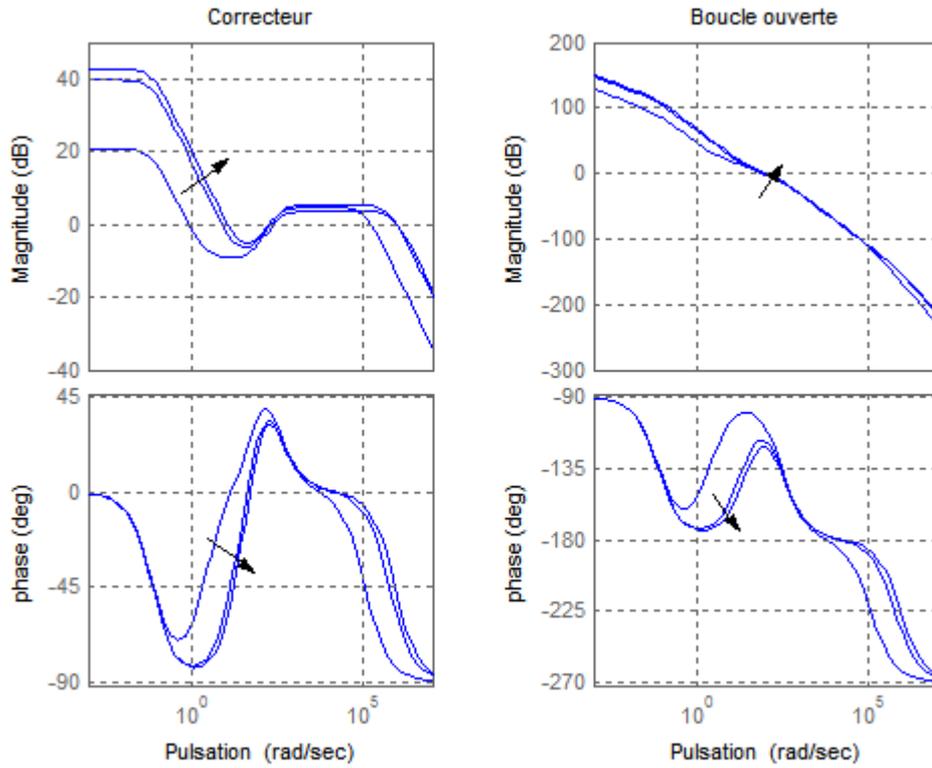


Figure 3.11 : Réglage de W_3 (Réponse fréquentielle)

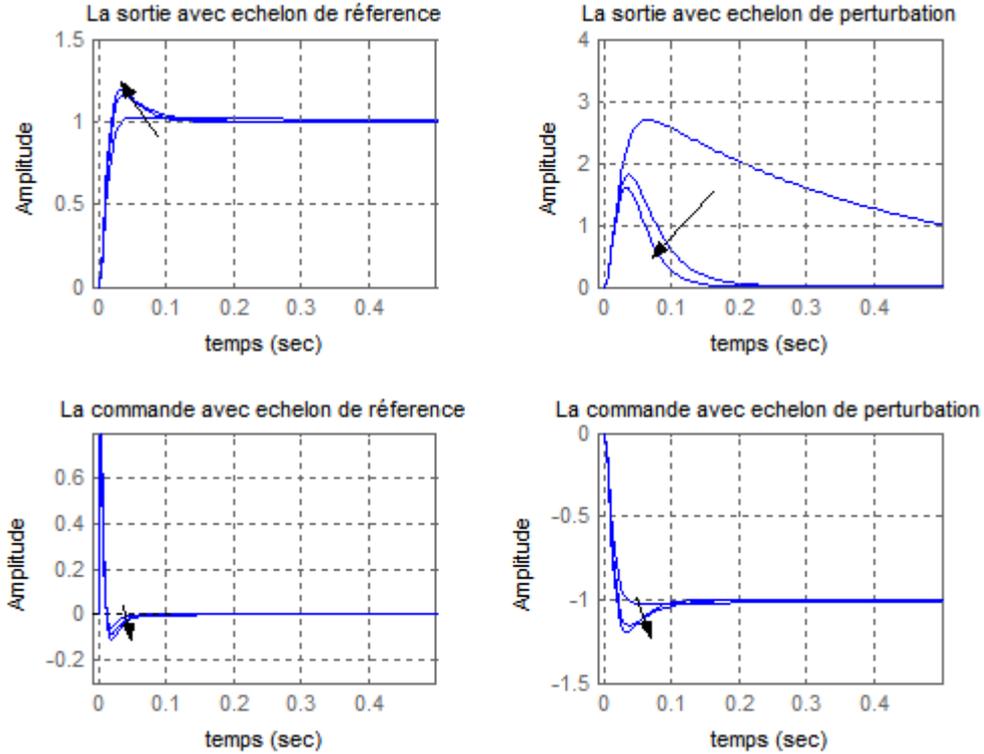


Figure 3.12 : Réglage de W_3 (Réponse temporelle)

On constate que l'augmentation de W_3 :

- Augmente le gain du correcteur dans les basses fréquences, ce qui a pour effet de faire chuter le gain de $S(p)G(p)$, tandis que le gain de $S(p)$ chute plus fortement
- Modifie peu les réponses fréquentielles de $K(p)S(p)$ et $T(p) = K(p)S(p)G(p)$, ne change pas la pulsation au gain unité de la boucle ouverte
- Introduit progressivement un dépassement de plus en plus important sur la réponse à la référence
- Améliore à la fois le temps de réponse à la perturbation et l'erreur statique correspondante, et ce dans des proportions significatives.

La valeur finalement retenue est :

$$W_3 = 0.15 \quad (3.60)$$

Elle permet d'obtenir un gain statique inférieur à 0,01 pour $S(p)G(p)$, donc une erreur statique due à b inférieure à 1% comme demandé. La valeur correspondante de γ est légèrement supérieure à 1.

Atténuation supplémentaire des hautes fréquences par $W_2(p)$

Pour terminer la synthèse, nous allons chercher à atténuer le gain du correcteur dans les hautes fréquences. Il n'est pas souhaitable en effet, même si les différents points du cahier des charges sont remplis, que le gain du correcteur soit encore important jusqu'à des pulsations de l'ordre de 100 fois la bande passante : on peut craindre par exemple une sensibilité excessive aux bruits de mesure (non pris en compte dans les simulations temporelles).

Nous prenons donc à présent un filtre $W_2(p)$ du premier ordre, correspondant au même gain statique, mais avec un gain en hautes fréquences nettement supérieur à 1, et nous abaissons progressivement ses pulsations de coupure, tout en limitant l'augmentation de γ .

Les figures (3.13, 3.14 et 3.15) permettent de comparer le réglage précédent avec celui obtenu pour

$$W_2(p) = 25 \frac{p + 1000}{p + 50000} \quad (3.61)$$

- Les réponses fréquentielles de $S(p)$ et $S(p)G(p)$ sont identiques, celle de $T(p)$ est peu modifiée
- Par contre celles de $K(p)S(p)$, du correcteur et de la boucle ouverte sont fortement atténuées dans les hautes fréquences, sans modification de la pulsation de la boucle ouverte au gain unité.

- Les réponses temporelles sont peu affectées.

Les pondérations retenues sont donc celles définies par (3.61) à (4.59). Elles correspondent à $\gamma = 1.1669$, ce qui relève un peu les gabarits initialement définis, sans que l'allure générale des différents transferts ne soit affectée.

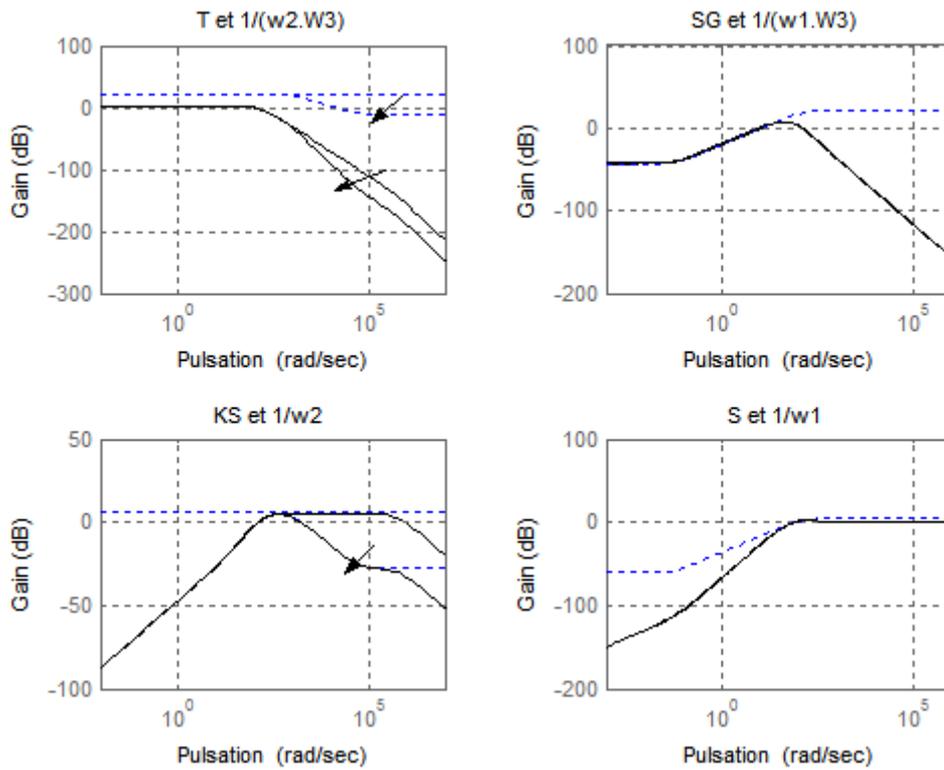


Figure 3.13 : Réglage final de W_2 (Fonctions de sensibilité)

Les marges de stabilité obtenues sont :

$$\Delta G=13.167\text{dB} \quad \Delta\varphi=55.7169^\circ$$

L'équation d'état de correcteur est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = 10^5 \begin{pmatrix} -0.0019 & 0.0014 & -0.0069 & 0.0683 \\ 0.0090 & -0.0008 & 0.0028 & -0.6171 \\ -0.0450 & 0.0028 & -0.0096 & 3.1487 \\ 0.0973 & -0.0040 & -0.0046 & -6.3707 \end{pmatrix} x_K(t) + \begin{pmatrix} 0.5820 \\ 7.6944 \\ 1.4319 \\ -81.6282 \end{pmatrix} y(t) \\ u_k(t) = \begin{pmatrix} 2.3068 & 9.1847 & -46.8240 & -313.5922 \end{pmatrix} x_K(t) \end{cases} \quad (3.62)$$

valeurs propres de correcteur = (-636987.0296 -934.7924 -371.5965 -0.0749)

Les trois inégalités du théorème (3.1) sont vérifiées et les deux matrices R et S sont positives

$$S = \begin{pmatrix} 0.36809012 & -27.98224212 & -0.05002188 & -0.08319336 \\ -27.98224212 & 178.23287165 & -0.16561139 & 0.16533524 \\ -0.05002188 & -0.16561139 & 7021914.84 & -0.00069908 \\ -0.08319336 & 0.16533524 & -0.00069908 & 3387256.63 \end{pmatrix}$$

valeurs propres de $S = (26.2172 \quad 183.3836 \quad 3387256.6317 \quad 7021914.8488)$

$$R=10^4 \begin{pmatrix} 0.9889 & -0.0301 & -0.0834 & -1.1089 \\ -0.0301 & 0.0013 & 0.0046 & 0.0304 \\ -0.0834 & 0.0046 & 0.0167 & 0.0780 \\ -1.1089 & 0.0304 & 0.0780 & 1.2708 \end{pmatrix}$$

valeurs propres de $R = (0.0072 \quad 4.8706 \quad 230.1216 \quad 22542.4205)$

Poles de $S =$

$$\left[-636987.0305, -985.6971, -145.5586+40.3534i, -145.5586-40.3534i, \right. \\ \left. -48.1576+9.4137i, -48.1576-9.4137i \right]$$

Poles de $T =$

$$\left[-636987.0301+0.0142i, -636987.0301-0.0142i, -985.6971, -934.7924, \right. \\ \left. -371.5965, -145.5586+40.3534i, -145.5586-40.3534i, -66.6666, \right. \\ \left. -48.1576+9.4137i, -48.1576-9.4137i, -0.0749 \right]$$

Poles de $KS =$

$$\left[-636987.0496, -636987.0106, -985.6971, -934.7924, -371.5965, \right. \\ \left. -145.5586+40.3534i, -145.5586-40.3534i, -48.1576+9.4137i, \right. \\ \left. -48.1576-9.4137i, -0.0749 \right]$$

Poles de $SG =$

$$\left[0, -636987.0305, -985.6971, -145.5586+40.3534i, -145.5586-40.3534i, \right. \\ \left. -66.6666, -48.1576+9.4137i, -48.1576-9.4137i \right]$$

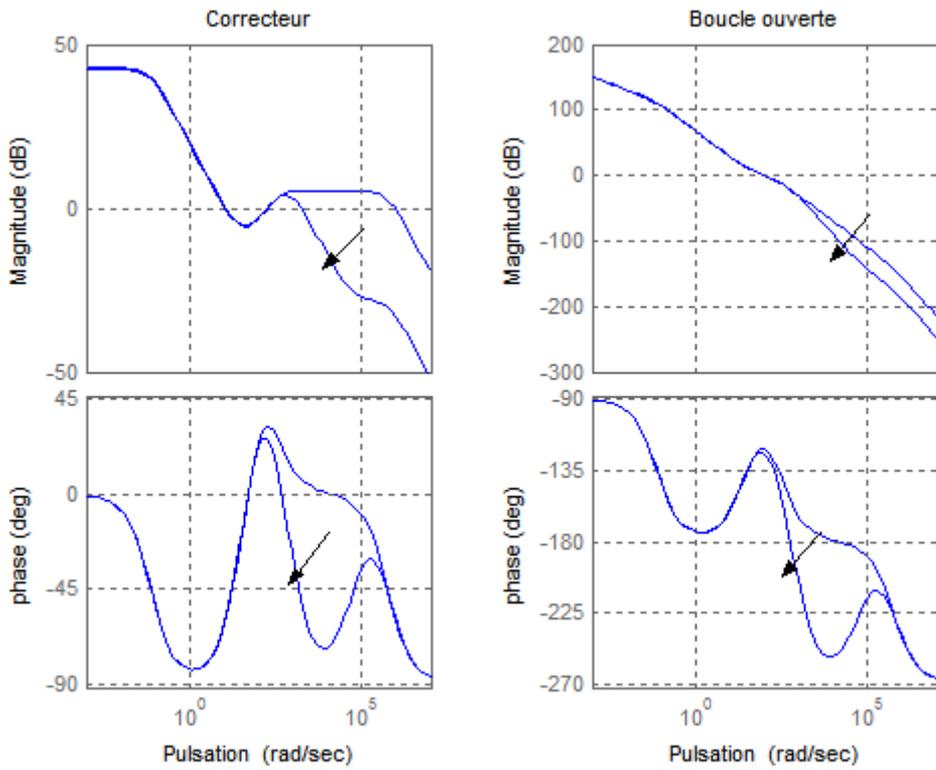


Figure 3.14 : Réglage final de W_2 (Réponse fréquentielle)

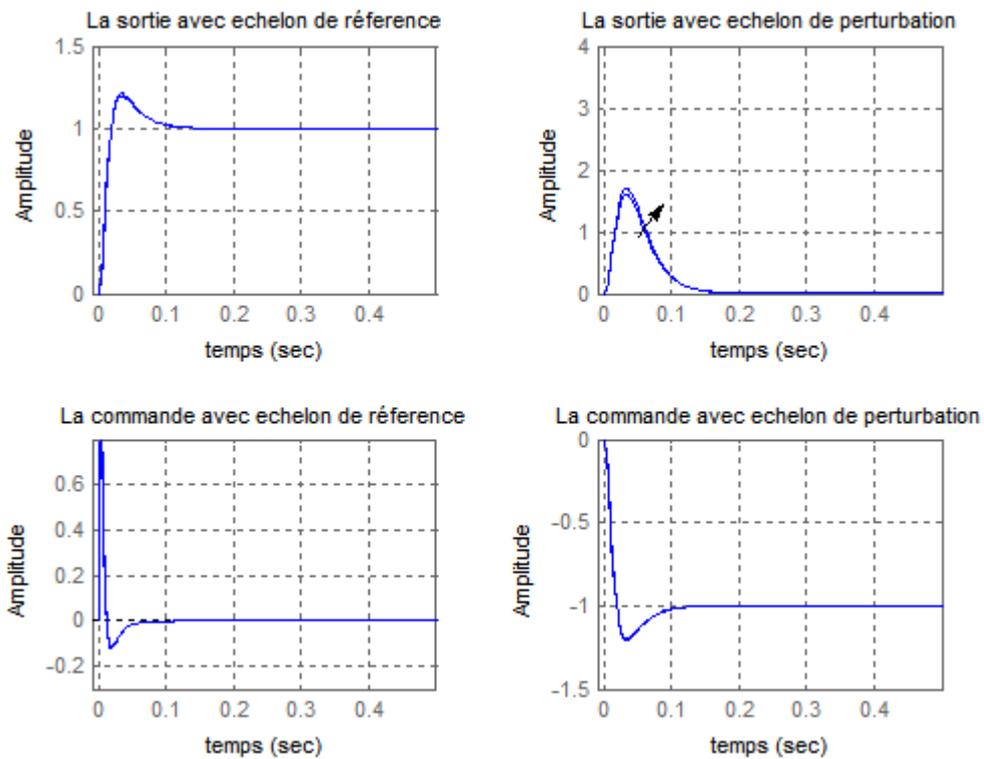


Figure 3.15 : Réglage final de W_2 (Réponse temporelle)

3.6 Extension aux systèmes LPV

Dans le cadre des systèmes linéaires invariants, on relie couramment la notion de performances à l'existence d'une borne sur la norme H_∞ d'une fonction de transfert. En revanche. Dès lors que l'on s'intéresse à la classe des systèmes LTV ou LPV, on ne peut plus parler de fonction de transfert, ni par conséquent de norme H_∞ [09]

3.6.1 Extension de la norme H_∞

On parlera plus précisément de norme L_2 -induite (voir Annexe) et on dira que la norme L_2 -induite d'un système LPV :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y(t) = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad (3.63)$$

est bornée par γ si, pour toute trajectoire paramétrique du domaine P :

$$\forall u \in L_2, \forall T \geq 0, \int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T u(t)^T u(t) dt \quad (3.64)$$

Cette définition coïncide parfaitement avec la norme H_∞ classique dans le cas des systèmes linéaires. Remarquons ici simplement l'absence d'interprétation dans le domaine fréquentiel. Si S est un système LPV, on notera $\gamma_{H_\infty}(S)$ la plus petite valeur de γ telle que la relation (3.64) soit encore vérifiée

$$\gamma_{H_\infty}(S) = \sup_{u \in L_2, \theta(t) \in P} \frac{\int_0^T y(t)^T y(t) dt}{\int_0^T u(t)^T u(t) dt} \quad (3.65)$$

3.6.2 Performance quadratique de type H_∞ pour les systèmes LPV

Théorème (3.2)[09] :

Le système LPV (1.26) noté S est quadratiquement stable sur P et vérifié, pour un réel positif γ la contrainte de performance :

$$\gamma_{H_\infty}(S) < \gamma \quad (3.66)$$

s'il existe une matrice strictement positive P telle que :

$$\forall \theta \in P, \begin{pmatrix} A(\theta)^T P + PA(\theta) & PB(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T P & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.67)$$

Le système LPV (1.26) satisfait aux conditions du théorème (3.2) de performance quadratique H_∞ si et seulement si :

$$\exists P > 0 / \forall i = 1, \dots, N, \begin{pmatrix} A_i^T P + P A_i & P B_i & C_i^T \\ B_i^T P & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.68)$$

Conclusion

Les principaux résultats présentés dans ce mémoire sont exprimés à l'aide d'inégalités matricielles linéaires, que nous notons LMI. Ce formalisme est particulièrement attrayant puisqu'il conduit à des problèmes d'optimisation convexe pour lesquels, bien qu'il s'agisse de problèmes non différentiables, il existe aujourd'hui des outils de résolution efficaces [18].

Nous avons concentré dans ce chapitre sur la formulation possible de critère H_∞ en tant que problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI. Tester l'existence d'un correcteur qui assure un "niveau de performance" γ donné est un problème de faisabilité LMI. Tester l'existence d'un correcteur qui assure le plus petit "niveau de performance" γ peut s'écrire comme un problème de minimisation d'un coût linéaire sous contraintes LMI

D'après l'exemple du calcul de l'asservissement en position d'un moteur à courant continu en utilisant le formalisme LMI, on peut conclure que les LMIs donnent des résultats efficace en ce qui concerne les systèmes LTI. Alors que, ce dernier ne présente qu'un cas particulier du système LPV. Pour cette raison, nous allons consacrer le dernier chapitre à l'extension aux systèmes LPV, dont le but est de faire la synthèse d'une loi de commande à paramètre variable en utilisant la modélisation polytopique.

Chapitre IV

Synthèse de lois de commande LPV

Introduction

La détermination de lois de commande pour les systèmes à paramètres variables constitue un problème auquel les ingénieurs automaticiens se trouvent confrontés depuis de nombreuses années. Une approche classique de résolution, fréquemment adoptée dans l'industrie repose sur la théorie de la commande adaptative, qui grâce à une estimation en ligne des paramètres du système, permet la prise en compte des non stationnarités. Cette approche peut s'avérer performante, mais hélas, peu robuste aux erreurs non identifiées de modèle (dynamiques négligées par exemple)

Signalons à ce propos, que d'importants efforts de recherche sont consacrés depuis peu, au développement de nouvelles méthodes fondées sur la complémentarité des théories de la commande adaptative d'une part et de la commande robuste d'autre part [09-29]

L'approche que nous proposons d'adopter dans ce dernier chapitre s'appuie sur une modélisation LPV du système à commander :

$$G(\theta) \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

En ce sens, on peut donc la rapprocher des méthodes classiques. Elle s'en démarque néanmoins par le fait essentiel que la loi de commande est directement recherchée sous la forme d'un correcteur global, bâti sur le même modèle que le système. Autrement dit, les équations du correcteur LPV s'écrivent sous la forme :

$$K(\theta) \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K(\theta)x_K(t) + B_K(\theta)y(t) \\ u(t) = C_K(\theta)x_K(t) + D_K(\theta)y(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

et la structure de commande en boucle fermée pour être retenue sous la forme suivante

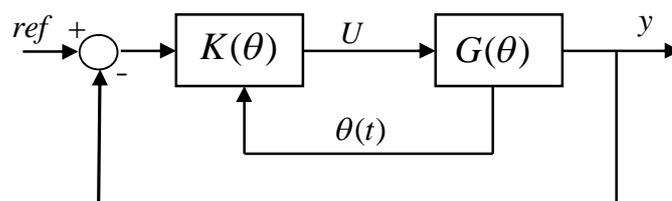


Figure 4.1 : Structure de commande LPV

Autrement dit, les variations paramétriques du système sont directement intégrées au niveau de la loi de commande dont la structure recopie celle du système. Un tel choix, justifié par la mesurabilité des paramètres, permet de garantir la stabilité et les performances sur un domaine d'évolution paramétrique relativement large. On pourra notamment envisager la résolution de certains problèmes pour lesquels les diverses techniques de commande robuste, trop conservatives, n'apportent pas de réponse.

Contrairement aux techniques adaptatives, cette approche, de par la structure adoptée, permet d'éviter le recours, souvent délicat, au processus d'identification en ligne

On essaye à travers ce dernier chapitre d'étudier la synthèse des lois de commande à paramètre variable, en utilisant la modélisation polytopique, que nous avons déjà vue dans le premier chapitre. Enfin, on présente la simulation de quelques exemples décrits sous forme d'un modèle LPV de type polytopique, dont le but est de trouver une loi de commande robuste vérifiant un certain niveau de performance, en se basant sur l'approche H_∞ et l'outil mathématique LMI.

Pour simplifier les expressions, nous remplaçons la notation (2.29) par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases}$$

4.1 Correcteurs polytopiques

On s'intéresse dans ce chapitre, à la synthèse de lois de commande pour les systèmes LPV décrits par un polytope (voir chapitre 01). Profitant, comme annoncé de la mesurabilité des paramètres, nous choisirons, pour les correcteurs une structure polytopique, analogue à celle du système.

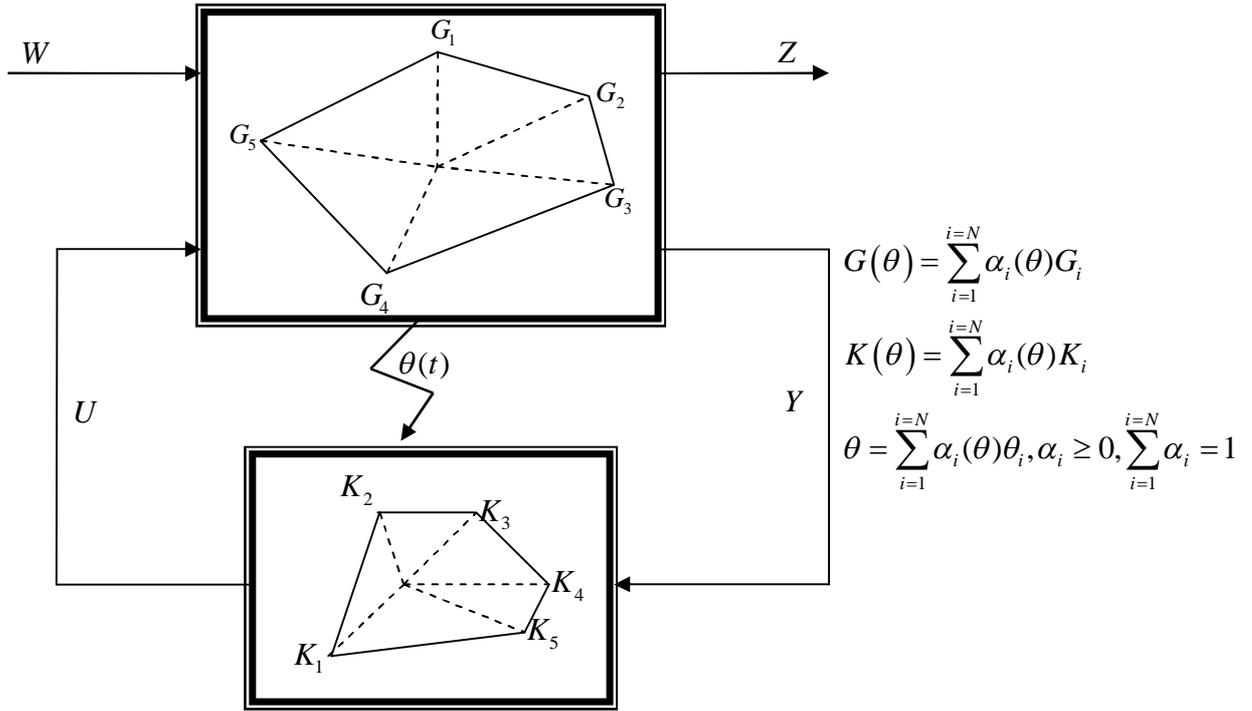


Figure 4.2 : Systèmes polytopiques en boucle fermée

Les sommets G_i et K_i du système $G(\theta)$ et du correcteur K_i , sont respectivement décrits par les matrices suivantes qui correspondent aux éléments de leurs représentations

$$G_i = \begin{pmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$K_i = \begin{pmatrix} A_{Ki} & B_{Ki} \\ C_{Ki} & D_{Ki} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Les matrices B_2, C_2, D_{12} et D_{21} sont volontairement choisies constantes (indépendantes du paramètre $\theta(t)$) afin que le système LPV en boucle fermée, comme nous allons le voir, admette également un modèle polytopique. Par ailleurs, pour simplifier les expressions, nous supposons qu'il n'y a pas de transmission directe ($D_{22} = 0$). Déterminons à présent, la représentation d'état du système G_i rebouclé par le correcteur K_i . On obtient facilement, compte tenu des hypothèses (les matrices correspondent aux représentations d'état)[09] :

$$S_{cli} = \begin{pmatrix} A_{cli} & B_{cli} \\ C_{cli} & D_{cli} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Avec

$$\begin{cases} A_{cli} = \begin{pmatrix} A_i + B_2 D_{Ki} C_2 & B_2 C_{Ki} \\ B_{Ki} C_2 & A_{Ki} \end{pmatrix} \\ B_{cli} = \begin{pmatrix} B_{1i} + B_2 D_{Ki} D_{21} \\ B_{Ki} D_{21} \end{pmatrix} \\ C_{cli} = (C_{1i} + D_{12} D_{Ki} D_{21} \quad C_K D_{12i}) \\ D_{cli} = D_{11i} + D_{12} D_{Ki} D_{21} \end{cases} \quad (4.4)$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme suivante

$$S_{cli} = \begin{pmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_{1i} \\ \bar{C}_{1i} & \bar{D}_{11i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_{1i} \\ \bar{D}_{12} \end{pmatrix} K_i \begin{pmatrix} \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\text{où } \begin{cases} \bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \bar{B}_{1i} = \begin{pmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{pmatrix} & \bar{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ I_{nk} & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{C}_{1i} = (C_{1i} \quad 0) & \bar{D}_{12} = (0 \quad D_{12}) \\ \bar{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{nk} \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} & \bar{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_{21} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.6)$$

Notons qu'en posant :

$$\bar{G}_i = \begin{pmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_{1i} & \bar{B}_{2i} \\ \bar{C}_{1i} & \bar{D}_{11i} & \bar{D}_{12i} \\ \bar{C}_{2i} & \bar{D}_{21i} & \bar{D}_{22i} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

on obtient finalement S_{cli} sous la forme suivant

$$S_{cli} = F_l(\bar{G}_i, K_i) \quad (4.8)$$

L'expression (4.5) est intéressante car elle met clairement en évidence la linéarité de la boucle fermée par rapport aux données du correcteur. Plus précisément, si on s'intéresse à une expression de la boucle fermée en un point quelconque du domaine d'évolution paramétrique, il vient :

$$S_{cli}(\theta) = F_l \left(\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta) \bar{G}_i, \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta) K_i \right) = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta) F_l(\bar{G}_i, K_i) \quad (4.9)$$

On en conclut, que le système en boucle fermée (voir figure (4.3)) est bien décrit par un modèle polytopique de N sommets S_{cli} .

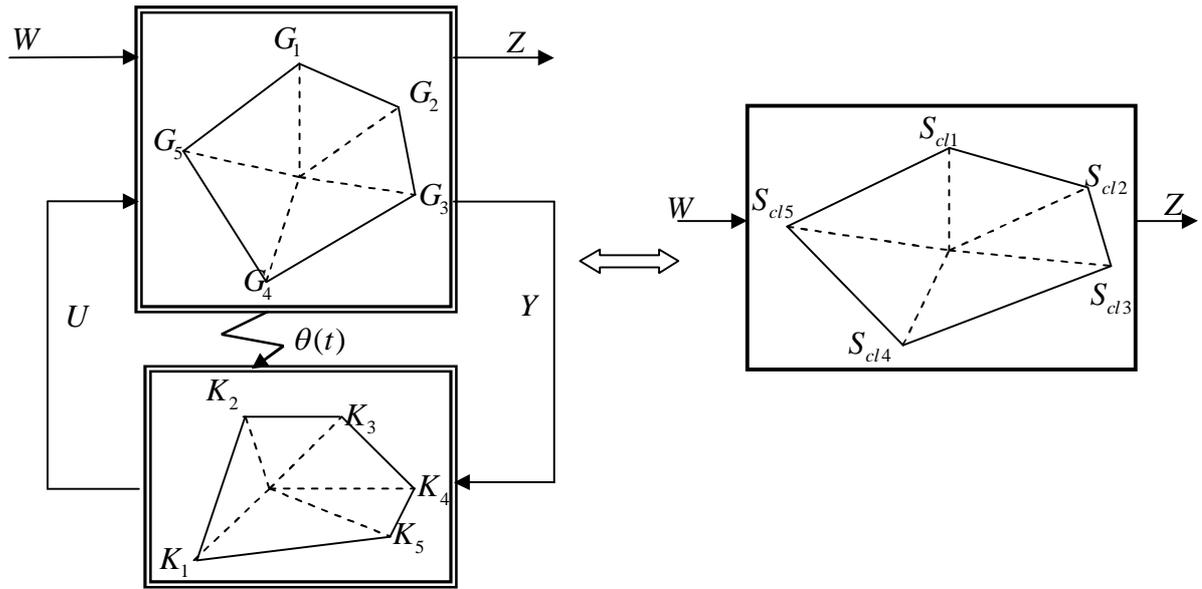


Figure 4.3 : La boucle fermée est encore un polytope

4.2 Critère de type H_∞

Nous considérons en premier lieu, la caractérisation d'un correcteur polytopique tel que le système en boucle fermée S_{cli} que nous venons de décrire, vérifie les contraintes de performance quadratique H_∞ décrites au chapitre 3 par le théorème (3.2).

D'après l'inégalité (3.62), un tel correcteur existe si et seulement si on peut déterminer une matrice P définie positive, et un ensemble de matrices quelconques $K_i \in \mathbb{R}^{(n_k+m_2) \times (n_k+p_2)}$ telles que :

$$\Psi_i(P, K_i) = \begin{pmatrix} A_{cli}^T P + P A_{cli} & P B_{cli} & C_{cli}^T \\ B_{cli}^T P & -\gamma I & D_{cli}^T \\ C_{cli} & D_{cli} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.10)$$

On remarquera que ces N inégalités sont bilinéaires par rapport aux variables P et K_i . Sous cette forme, le problème d'optimisation associé n'est donc pas convexe. Alors, pour restaurer la convexité, il faut utiliser le lemme d'élimination, (paragraphe 3.4)

En posant

$$V_\perp = \begin{bmatrix} \bar{B}_2^T & 0 & \bar{D}_{12}^T \end{bmatrix} \text{ et } U_\perp = \begin{bmatrix} \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

les inégalités (4.10) deviennent d'après (4.5)

$$\Psi_i(P, 0) + U^T K_i^T V + V^T K_i U < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.12)$$

Introduisons maintenant les noyaux respectifs des matrices V et U respectivement notés V_{\perp} et U_{\perp} . D'après le lemme d'élimination, les inégalités (4.12) sont équivalentes à :

$$V_{\perp}^T \Psi_i(P, 0) V_{\perp} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.13)$$

$$U_{\perp}^T \Psi_i(P, 0) U_{\perp} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

On obtient, après un calcul rapide :

$$V_{\perp}^T \begin{pmatrix} P^{-1} \bar{A}_i^T + \bar{A}_i P^{-1} & \bar{B}_{li} & P^{-1} \bar{C}_{li}^T \\ \bar{B}_{li}^T & -\gamma I & D_{1li}^T \\ \bar{C}_{li} P^{-1} & D_{1li} & -\gamma I \end{pmatrix} V_{\perp} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.15)$$

$$U_{\perp}^T \begin{pmatrix} \bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i & P \bar{B}_{li} & \bar{C}_{li}^T \\ \bar{B}_{li}^T P & -\gamma I & D_{1li}^T \\ \bar{C}_{li} & D_{1li} & -\gamma I \end{pmatrix} U_{\perp} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.16)$$

où les noyaux V_{\perp} et U_{\perp} sont de la forme :

$$V_{\perp} = \begin{pmatrix} N_{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ N_{R_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{\perp} = \begin{pmatrix} N_{S_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ N_{S_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

avec

$$N_R = \begin{pmatrix} N_{R_1} \\ N_{R_2} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{pmatrix}$$

$$N_S = \begin{pmatrix} N_{S_1} \\ N_{S_2} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$$

De par la position des blocs de zéros sur chacun des noyaux, on pourra obtenir une simplification particulièrement intéressante des inégalités (4.15) et (4.16). En effet, si l'on introduit pour P et P^{-1} les partitions suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & F \end{pmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & E \end{pmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

on obtient, après calculs et suppression des lignes et colonnes en regard des zéros de V_{\perp} et U_{\perp} deux nouvelles séries d'inégalités où seules subsistent les matrices R et S

$$N_R^T \begin{pmatrix} R A_i^T + A_i R & B_{li} & R C_{li}^T \\ B_{li}^T & -\gamma I & D_{1li}^T \\ C_{li} R & D_{1li} & -\gamma I \end{pmatrix} N_R < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.18)$$

$$N_S^T \begin{pmatrix} A_i^T S + SA_i & SB_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T S & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{pmatrix} N_S < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.19)$$

Remarquons pour conclure que le choix des matrices R et S pour être en accord avec les relations (4.17) devra simplement être effectué de manière à satisfaire les contraintes convexes suivantes [16]

$$R > 0, S > 0 \quad \lambda(RS) \geq 1 \quad (4.20)$$

Par ailleurs, les inégalités matricielles (4.18) et (4.19) étant linéaires par rapport aux nouvelles variables R et S , il en résulte une caractérisation entièrement convexe des correcteurs recherchés. Nous résumons cela par un théorème [03-10]

Théorème (4.1) : Correcteurs polytopiques de type H_∞

Etant donné un système de la forme (4.1) il existe un correcteur polytopique (4.2) tel que la performance quadratique H_∞ du système LPV en boucle fermée, reste bornée par γ si et seulement s'il existe un couple R et S de matrices symétriques vérifiant (4.18), (4.19) et (4.20).

La mise en oeuvre sur le logiciel Matlab est immédiate. A la condition portant sur le rayon spectral de la matrice RS on substituera l'inégalité matricielle équivalente.

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.21)$$

Qui, par l'algorithme d'optimisation sera considérée comme une inégalité stricte. Cette même LMI garantira ainsi la positivité stricte des matrices R et S qui constituent sa diagonale.

4.2 1. Utilisation du changement de variables

On commencera par transformer l'inégalité (4.22) du lemme borné réel, que l'on exprime ici par rapport à $P^{-1} = Y$

$$\tilde{\Psi}_i(Y, K_i) = \begin{pmatrix} YA_{cli}^T + A_{cli}Y & B_{cli} & YC_{cli}^T \\ B_{cli}^T & -\gamma I & D_{cli}^T \\ C_{cli}Y & D_{cli} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.22)$$

Une telle expression est obtenue de manière tout à fait classique en multipliant à gauche les premières lignes de $\Psi_i(P, K_i)$ par $Y^T (= Y)$ et à droite les premières colonnes par Y .

Nous partitionnerons les matrices Y et Y^{-1} , en quatre blocs :

$$Y = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & E \end{pmatrix} \text{ et } Y^{-1} = \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & F \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Nous supposons en outre les matrices M et L carrées appartenant donc à $\square^{n \times n}$ et inversibles [17-18].

Il s'en suit que le correcteur obtenu sera du même ordre que le système, ce qui facilitera après optimisation, le retour aux variables initiales.

On obtient donc, compte tenu de la remarque qui a été faite sur l'inversibilité de la matrice L

$$Y = \begin{pmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & L^T \end{pmatrix}^{-1} = Y_1 Y_2^{-1}$$

avec

$$I - RS = ML^T$$

et on remarquera facilement d'après la section 4.2, que :

$$Y > 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0 \quad (2.24)$$

Finalement, en posant :

$$\begin{cases} \bar{A}_{K_i} = S(A_i + B_2 D_{K_i} C_2)R + LB_{K_i} C_2 R + SB_2 C_{K_i} M^T + LA_{K_i} M^T \\ \bar{B}_{K_i} = SB_2 D_{K_i} + LB_{K_i} \\ \bar{C}_{K_i} = D_{K_i} C_2 R + C_{K_i} M^T \end{cases} \quad (4.25)$$

et

$$T = \text{diag}(Y_2, I, I)$$

il vient

$$T^T \tilde{\Psi}_i(Y, K_i) T = \begin{pmatrix} A_i R + RA_i^T + B_2 \bar{C}_{K_i} + \bar{C}_{K_i}^T B_2^T & H & H & H \\ \bar{A}_{K_i} + (B_2 D_{K_i} C_2)^T & SA + \bar{B}_{K_i} + A^T S + \bar{B}_{K_i}^T & H & H \\ B_{1i}^T + (B_2 D_{K_i} D_{21})^T & B_{1i}^T S + D_{21}^T \bar{B}_{K_i}^T & -\gamma I & H \\ C_{1i} R + D_{12} \bar{C}_{K_i} & C_{1i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} & D_{11i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

Cette dernière expression est linéaire par rapport aux variables $R, S, \bar{A}_{K_i}, \bar{B}_{K_i}, \bar{C}_{K_i}$ et D_{K_i} . D'après (4.24) il en va de même de la contrainte de positivité sur Y . On obtient donc là encore, une caractérisation convexe du correcteur, entièrement formulée par inégalités matricielles linéaires. Après optimisation, les variables A_{K_i}, B_{K_i} et C_{K_i} seront obtenues par résolution du système (4.25).

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, nous avons essayé d'étudier le problème de la commande robuste d'une classe particulière des systèmes non linéaires. L'approche considérée tout au long de ce travail repose principalement sur la notion des systèmes LPV. Cette approche a pour ambition de proposer un outil d'analyse de et synthèse de lois de commande robuste des systèmes non linéaires et parfois non stationnaire en utilisant le concept H_∞ et la modélisation LPV. Le premier pas dans cette direction est fourni par deux propositions permettant de caractériser un système non linéaire par un système LPV sous forme polytopique. Le deuxième pas concerne, l'utilisation des outils de la commande robuste, à base des LMI et H_∞ , qui vont permettre d'obtenir une loi de commande LPV assurant la stabilité et les performances du système LPV obtenu.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons rappelé les notions stabilité des systèmes dynamiques, où nous avons développé deux grandes approches. La première s'appuie sur la théorie de Lyapunov et la seconde repose sur un concept plus récent de stabilité entrée/sortie. Nous avons insisté aussi sur les difficultés soulevées par l'étude des systèmes non stationnaires dans le cas général et soulignerons de ce fait, l'importance du choix d'un modèle. Notre étude est limitée à la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) et la modélisation polytopique permettant la simplification de la mise en oeuvre des méthodes d'analyse et a fortiori de synthèse.

Dans un deuxième temps, nous avons détaillé l'approche H_∞ qui permet d'intégrer a priori des spécifications de performance et de robustesse. Plus précisément $F(P,K)$ contient l'ensemble des transferts en boucle fermée construits à partir des entrées/sorties, augmenté des pondérations servant de gabarits à ces transferts. Il est important de remarquer qu'un grand nombre de spécifications d'un cahier des charges peuvent être traduites sous la forme de contraintes fréquentielles. c'est bien évidemment le cas des spécifications fréquentielles mais aussi des spécifications temporelles relativement courantes comme le temps de montée, le temps de réjection, la limitation de l'amplitude d'un signal. La construction du critère H_∞ se fait directement à partir du cahier des charges. En effet contrairement à d'autres approches comme la commande LQG, le critère n'est pas unique, on le choisit en fonction des spécifications de performance et de robustesse. C'est ce qui peut apparaître plus complexe mais néanmoins beaucoup plus adapté à un problème d'automatique qu'un critère unique ne

décrivant que très partiellement et imparfaitement ce que l'on recherche. Il apparaît deux étapes qui sont intimement liées. La première consiste à déterminer les vecteurs d'entrées/sorties w et z . Ce choix se fait très naturellement à partir des spécifications du cahier des charges puisque les entrées w correspondent aux entrées de la boucle fermée et les sorties z aux sorties à contrôler. Le choix des pondérations est moins direct. Néanmoins ce choix se fait lui aussi à partir des spécifications car l'inverse des pondérations correspond à des gabarits que doivent satisfaire les transferts en boucle fermée. Or la forme de ces transferts en boucle fermée est dictée par le cahier des charges. Il apparaît donc un lien direct entre le choix des pondérations et les spécifications du cahier des charges. A priori on peut penser que l'on a un grand nombre de degrés de liberté pour la synthèse H_∞ . Néanmoins ces degrés de liberté sont directement associés à des spécifications du cahier des charges. Ils ont donc une interprétation physique qui est liée au comportement désiré de la boucle fermée.

Une fois les filtres de pondération sont désignés, il ne reste plus qu'à exprimer le problème standard H_∞ sous forme d'un problème d'optimisation convexe (LMI), et de construire le modèle polytopique de la forme standard pondérée.

Les algorithmes de synthèse d'une loi de commande à paramètre variable, nécessitent en effet une modélisation particulière de la dépendance paramétrique, telle que la forme polytopique. Or, cette dernière correspond rarement à la forme initiale des modèles rencontrés dans les applications, qui dans la plupart des cas, présentent des non linéarités. Naturellement, par le biais des techniques LPV, nous ne prétendons pas résoudre tous les problèmes que pose la commande des systèmes non linéaires. Cependant, dans le cas de la commande d'un robot sous-actionné, nous avons pu mettre en évidence une approche générique de construction de modèles LPV à partir des équations non linéaires de la mécanique.

Dans ce travail, nous avons concentré une part importante de nos efforts aux développements d'applications réalistes et variées. Les méthodes théoriques proposées ont donc fait l'objet d'un codage numérique sur Matlab, utilisant les outils de résolution de LMI control toolbox

Les techniques LPV ont également permis la conception d'une loi de commande pour le pilotage en incidence d'un missile sur un grand domaine de vol.

Bibliographie

- [1] Apkarian, P., Gahinet, P. Becker, G. "Self-scheduled H_∞ control of linear parameter varying systems," to appear in *Automatica*, 1995
- [2] Apkarian, P., Gahinet, P. "A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers," to appear in *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1995.
- [3] Apkarian, P., P. Gahinet, and Biannic. J. M. "Self-scheduled H_∞ control of a missile via LMIs" Decision and Control. Lake Buena Vista. 1994
- [4] Alazard. D., Apkarian. P., Cumer. C., Gauvrit. M., Ferreres. G. "Robustesse et commande optimale" CEPAD.1999.
- [5] Aström. K. J., Wittenmark. B. "Adaptive control" Wesley Publishing Company.1989
- [6] Becker, G., Packard, P. "Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically dependent linear feedback," *Systems and Control Letters*, 23 (1994), pp. 205–215.
- [7] Becker, G. Packard, A. Philbrick, D., Balas. G. "Control of parametrically dependent linear systems . a single quadratic lyapunov approach". In proceedings of ACC. San Francisco. CA.1993
- [8] Biannic J.M., Apkarian. P. "A convex characterization of self.scheduled H_∞ controllers". In proceedings of IFAC Conference on System Structure and Control. Nantes. Fr. July 1995.
- [9] Biannic. J.M. "Commande robuste des systèmes à paramètres variable : application en aéronautique" thèse. 1996.
- [10] Biannic, J.M., Apkarian, P., Leletty. L. "A quadratic H_∞ performance approach to gain scheduling of a missile autopilot". In proceedings of the Workshop on Var Struct and Lyap Tech. Benevento. IT.Sept 1994
- [11] Boukas. El-Kébir. "Systèmes asservis" Ecole Polytechnique De Montréal. 1995
- [12] Carsten. S., Siep .W. "Linear matrix inequalities in control" Lecture Notes DISC Course.1999
- [13] Desoer. C.A., Vidyasagar. M. "Feedback systems input.ouput properties". Electrical sciences. Academic Press 1975
- [14] Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P., and Francis, B. "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-34 (1989), pp. 831–847.

- [15] Duc.G., Font. S. "Commande H_∞ et μ – Analyse : des outils pour la robustesse." Automatique. Hermès. paris 1999
- [16] Gahinet, P., and P. Apkarian. "A linear matrix inequality approach to H_∞ control," *In J. Robust and Nonlinear Contr.*, 4 (1994), pp. 421–448.
- [17] Gahinet, P. "Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis," submitted to *Automatica*. Also in *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 1994, pp. 2396–2400.
- [18] Gahinet. P., Nemirovski. A., Alan J. Laub., Chilali M. "LMI control toolbox" Mathwork .1995.
- [19] Hired. A. "Pilotage robuste d'un missile sure un large domaine de vol synthèse et analyse dans le cadre H_∞ et LPV" thèse. Orsay 1999.
- [20] Hong, K.S., Wu, J.W., Lee. K.I. "New conditions for the exponential stability of evolution equations". *IEEE Trans Automat Contr.*, 39(7) : 1432-1436, July. 1994
- [21] Ilchmann, A., Owens, D.H., Pratzel-Wolters. D. "Sufficient conditions for stability of linear time.varying systems". *Syst Contr Letter* 9 : 157-163, 1987
- [22] Jacques. B., Alain. O. "Conception de commande robustes" Automatique. Hermès. Paris 2002.
- [23] Jeremy. G., Van Antwerp., richard. D., Braatz. " A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities" Elsevier *Process Control* 10 (2000) 363- 385.
- [24] Kajiwara. H., Apkarian. P., Gahinet, P. "LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum" 0272-1708/99. IEEE 1999.
- [25] Khalil. H.K. "Nonlinear systems". Macmillan publishing company.1992
- [26] Krasovskii. N.N. "Stability of motion". Stanford university press. Stanford. CA 1963
- [27] Lamnabhi. L.L., Rouchon pierre. " Systèmes non linéaires" Automatique. Hermès. Paris 2002.
- [28] Larminat. P., Duc G. " Commande des systèmes linéaires " Automatique. Hermès. Paris 2002.
- [29] Lee W.S., Anderson. B.D.O. "A new approach to adaptive robust control". *IntJ. Adapt Contr Signal Processing*, 7 : 183-211,1993
- [30] Lehtomaki. N.A.. "Robustness results in Linear Quadratic Gaussian based multivariable control designs". *IEEE Trans Automat Contr.*, 26 :75-92, 1981.

- [31] Lu. W.M., Doyle. J.C., "Robustness analysis and synthesis for uncertain nonlinear systems". In proceedings of IEEE Conf. on Decision Contr., 787-792, Lake Buena Vista. FL Dec 1994
- [32] Lyapunov. A.M. "The general problem of stability of motion". Int J Contr. 55(3) ; 531-773, March 1992 Lyapunov Centenary Issue.
- [33] Scorlotti. G., Laurant. El G. "Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems" Int. J. robust nonlinear control 8, 845-877 (1998)
- [34] Scorlotti. G. " Introduction à la commande multivariable des systèmes méthode de synthèse fréquentielle H_∞ " ENSI de Caen. France 2005
- [35] Scorlotti. G., Font. S., Fromion. V. " Automatique fréquentielle : des critères graphiques à l'optimisation LMI " LAP-ISMRA. LASB, INRA.
- [36] Scorlotti. G. " Intoduction à l'optimisation LMI pour l'automatique " ENSI de Caen. France 2005
- [37] Shamma. J.F., Athans. M. "Guaranteed properties of gain.scheduled control for linear parameter.varying plants". In proceedings of ACC. 516-521 1991
- [38] Stein. G ; Athans. M. "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback Control". IEEE Trans Automat. Contr. , 32 :105-114t, 1987
- [39] Trangbæk. K. "Linear Parameter Varying Control of Induction Motors" thèse Phd.2001 Vidyasagar. M., "Nonlinear systems analysis". Electrical Engineering. Prentice.Hall. Englewood Cliffs. NJ.1978.
- [40] Zerar. M. M. "Contribution à la caractérisation LPV d'une classe de système non linéaire pour la synthèse de lois de poursuite robuste application à un système spatial" Thèse 07 Avril 2006 Université de bordeaux
- [41] Yong.Y.Cao, lin. Z., shamash .Y. " Set invariance analysis and gain-scheduling control for LPV systems subject to actuator saturation" Elsevier System & Control Letters 46 (2002) 137-151

Sommaire

Résumé	i
Sommaire	ii
Notations et acronymes	v
Introduction générale	1
Organisation du mémoire	3
Chapitre I Modélisation des systèmes LPV	
Introduction	05
1 Stabilité des systèmes dynamiques	06
1.1 Définition	06
1.2 Stabilité au sens de Lyapunov :	06
1.2.2 Stabilité des trajectoires d'équilibre	06
1.2.3 Stabilité asymptotique uniforme globale	07
1.2.4 La méthode directe de la stabilité au sens de Lyapunov	07
1.2.5 Fonction de Lyapunov quadratique	08
1.3 Stabilité au sens BIBO: (bounded input bounded output)	08
1.3.1 Condition fondamentale de stabilité :	08
1.3.2 L_q -stabilité	09
1.3.3 Théorème du petit gain	09
1.3.4 Liens entre la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité entrée/sortie	10
1.4 Système linéaire :	11
1.4.1 Classes des systèmes linéaires	11
1.4.2 Trajectoires et caractérisation de la stabilité	11
1.4.3 Systèmes linéaires à temps invariant (LTI) :	12
1.4.4 Systèmes linéaires à temps variant (LTV)	13
1.4.5 Systèmes linéaires à paramètres variables (LPV)	14
1.5 Systèmes « quasi-LPV » et systèmes non linéaires	16
1.6 Stabilité des systèmes LPV	19
1.7 Modélisation des systèmes LPV	20
1.7.1 Modèle affine et modèle polytopique	20
1.7.1.1 Le modèle affine	20
1.7.1.2 Modèle polytopique	21
Conclusion	23

Chapitre II Approche H_∞

Introduction	24
2. Analyse en robustesse et en performance des systèmes bouclés	25
2.1 Spécification fréquentielles de performance :	25
2.1.1 Fonctions de sensibilité	25
2.1.2 Objectifs de commande	27
2.1.3 Rejet de perturbation b	27
2.1.4 Réduction du bruit de mesure w	28
2.1.5 Suivi de référence r : précision	29
2.2 Spécification fréquentielles de robustesse	30
2.2.1 Etude de la robustesse en stabilité	31
2.2.2 Définition de la famille de modèles	31
2.2.3 Analyse de la stabilité par le critère de Nyquist	32
2.2.4 Description des incertitudes en utilisant les pondérations fréquentielles	36
2.2.5 Choix de la fonction de pondération	37
2.2.6 Critère H_∞ avec les fonctions de pondération	38
2.2.6.1 Mise en forme standard du critère H_∞	39
2.3 Problème H_∞ standard	41
2.3.1 Synthèse d'un correcteur H_∞ par retour de sortie	41
Conclusion	47

Chapitre III Inégalité Matricielle Linéaire (LMI)

Introduction	48
3.1 Problème d'optimisation	49
3.1.1 Ensembles convexes	52
3.1.2 Fonctions convexes	50
3.1.3 Fonctions quasi-convexes	51
3.2 Optimisation LMI	52
3.2.1 Problèmes d'optimisation sous contraintes LMI :	52
3.2.2 Problème de Faisabilité	53
3.2.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques en utilisant le problème de faisabilité	53
3.2.3 Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire	55
3.2.4 Lemme de Schur :	57
3.2.4.1 Intérêt du lemme de Schur :	57
3.3 Synthèse d'un correcteur H_∞ par retour d'état	59
3.4 Existence d'un correcteur H_∞	61
3.4.1 Synthèse H_∞ par retour de sortie	62

3.5 Calcul de l'asservissement en position d'un moteur	63
3.6 Extension aux systèmes LPV	74
3.5.1 Extension de la norme H_∞	74
3.5.2 Performance quadratique de type H_∞ pour les systèmes LPV	74
Conclusion	75
Chapitre IV Synthèse de lois de commande à paramètre variable	
Introduction	76
4.1 Correcteurs polytopiques	77
4.2 Critère de type H_∞	80
4.2.1 Utilisation du changement de variables	82
Simulation	
4.3 Commande d'un robot sous-actionné	84
4.3.1 Le modèle LPV avec structure polytopique	87
4.3.2 Structure de la loi de commande	87
4.3.3 Synthèse d'un correcteur LPV polytopique	89
4.4 Commande d'un système d'ordre 1 avec constante du temps variable	92
4.4.1 Spécifications et choix des filtres	92
4.4.1.1 Filtre de performances	93
4.4.1.2 Filtre de robustesse	93
4.5 Pilotage d'un missile	98
4.5.1 Description et analyse du problème	98
4.5.2 Mise en forme du problème de synthèse	99
4.5.3 Modèle polytopique du missile	99
4.5.4 Description du modèle de synthèse	100
4.5.5 Choix des filtres et résolution	101
4.5.5.1 Filtre de performances	101
4.5.5.2 Filtre de robustesse	102
4.5.6 Résolution et implémentation du correcteur :	102
4.5.7 Simulations et interprétation	103
Tests <i>LTI</i>	104
Tests <i>LPV</i>	106
Conclusion	109
CONCLUSION GENERALE	110
BIBLIOGRAPHIE	112

Notations

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels,
\mathbb{R}^n	Espace réel euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble de matrices de dimension $(n \times m)$ à coefficients dans \mathbb{R}
$A > 0 (A \geq 0)$	Matrice A symétrique définie (respectivement semi-définie) positive,
$A < 0 (A \leq 0)$	Matrice A symétrique définie (respectivement semi-définie) négative,
I	Matrice identité
A^{-1}	Inverse de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\det(A) \neq 0$
A^T	Transposée de la matrice A
A^{-T}	Transposée de l'inverse de la matrice A ,
$\ker(A)$	Noyau de la matrice A
$\det(A)$	Déterminant de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{rang}(A)$	Rang de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\ A\ _2$	Norme Euclidienne de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\ G\ _\infty$	Norme infinie d'une matrice de transfert $G(p)$
W_i	$i^{\text{ème}}$ fonction de pondération

Acronymes

LTI	Modèle Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	Modèle Linéaire Variant dans le Temps
LPV	Modèle Linéaire à Paramètres Variants
LFT	Linear Fractional Transformation (Transformation Linéaire Fractionnaire)
LMI	Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Linéaire)
LQG	Linéaire Quadratique Gaussienne