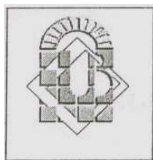
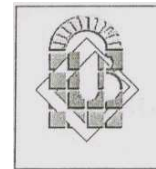


République Algérienne Démocratique et Populaire



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
la Recherche Scientifique



**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER - BISKRA**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR**

**DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE**

N° d'ordre:.....

Série:.....

## MÉMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister en électronique

Option : **COMMUNICATION**

Par

**ADEL SAOUD**

-Thème-

---

**COMPRESSION D'IMAGES FIXES PAR ONDELETTES GÉOMÉTRIQUES**

*( Bases de bandelettes )*

---

**Président** : Pr : N. DOGHMANE

**Rapporteur** : Dr. Z.E BAARIR

**Examineur** : Dr : S. SBAA

**Examineur** : Pr : M. KHAMADJA

**Pr.** Univ Annaba

**M C.** Univ. Biskra

**M C.** Univ. Biskra

**Pr.** Univ Constantine

**Année universitaire : 2010-2011**

## **Remerciements**

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce travail.*

*A mon encadreur Dr. Z.E BAARIR. maître de conférences et responsable au laboratoire de recherche LESIA à l'université de Biskra pour m'avoir dirigé tout au long de ce travail.*

*A Mr N. DOGHMANE professeur à l'université d'Annaba, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Je remercie également Mr M. KHAMADJA professeur à l'université de Constantine, Mr S.SBAA maître de conférences et chef du département d'Électronique à l'université de Biskra, d'avoir bien voulu juger ce travail.*

*J'adresse mes remerciements à Mr. Ouafi Abd ELKarim pour ses conseils et ses aides.*

*Un grand merci à mes collègues de promotion en particulier Ameid Sofiane pour ses aides, J'adresse aussi mes remerciements à mes camarades Salah Belmehdi et Khaled Salhi, Ala Salhi S. Belmehdi, chouki Djamel salmi, et tous les autres que j'ai omis de citer ici ...*

*Enfin, je souhaite remercier ma famille pour leur soutien au cours de ces trois dernières années et particulièrement mes parents qui m'ont aidé à me hisser jusque là.*

## Résumé

Ce travail consiste à l'étude d'une nouvelle technique de représentation des images fixes permettant de capturer la régularité géométrique le long des contours et la régularité de zones, appelée bases de *bandelettes*.

Les bases de bandelettes sont construites à partir d'ondelettes bidimensionnelles déformées le long du flot géométrique dans chaque région de l'image. Le flot géométrique indique la direction où l'image est régulière dans une région. L'optimisation de la géométrie est effectuée par un algorithme rapide de meilleure base qui permet d'obtenir des résultats de compression plus satisfaisants.

Finalement, une étude comparative a été menée dans le but de voir le rôle d'extraire les techniques ont plus performance conduisant aux meilleurs résultats possibles (signal/bruit "PSNR" et taux de compression "RC") pour la compression des images.

**Mots clés :** Compression, Images fixes, Ondelettes géométriques, Bandelettes, Ridgelets, Curvelets, Quantification, Codages entropique.

## Abstract

This work consists of the study of a new technique of fixed images, making it possible to capture both the geometrical regularity along the contours and the regularity the proposed zone.

The bandelets bases are built through wavelets two-dimensional deformations along the geometrical flow in each area of the image. This geometric flow indicates directions in which the image has regular variations. The geometric flow is optimized with a fast best basis algorithm, which leads better image compression results.

Finally, a comparative study is performed in order to extract the techniques which have more performance leading to the best possible results (signale/noise " PSNR " and compression ratio " RC").

**Key words:** Compression, fixed images, geometrical regularity, wavelets, bandelets, PSNR, RC.

## تلخيص

هذا العمل هو دراسة لتقنية جديدة في ضغط الصور الثابتة حيث تعمل على تتبع النظامية الهندسية على طول حواف الصور ونظامية المناطق، تدعى الشريطات.

أساس الشريطات تعتمد في بنائها على المموجات المعدلة ثنائية البعد على طول التدفق الهندسي في كل منطقة من الصورة. تدفق الهندسية يشير إلى الإتجاه أين الصورة تكون منتظمة في منطقة ما.

يتم تحسين الهندسية عن طريق خوارزمية سريعة للحصول على نتائج ضغط مرضية.

أخيرا تتم مقارنة هذه التقنية مع نظيراتها لاستخلاص التقنيات الأكبر كفاءة التي تقودنا إلى أحسن النتائج الممكنة (إشارة/ضجيج و نسبة الضغط).

**كلمات مفتاح:** ضغط, صور ثابتة, نظامية هندسية, مموجات, شريطات, تشفير

# Table des matières

INTRODUCTION GENERALE.....	1
<b>CHAPITRE 1 : THEORIE DES BASES DE BANDELETTES</b>	
1.1 INTRODUCTION.....	3
1.2 SUCCES ET ECHECS DES BASES D'ONDELETTES.....	3
1.2.1 Meilleure approximation orthogonale .....	3
1.2.2 Bases d'ondelettes 1d .....	3
1.2.3 Bases d'ondelettes 2d .....	5
1.2.4 Succès des bases d'ondelettes .....	7
1.3 REPRESENTATIONS GEOMETRIQUES DES IMAGES .....	7
1.3.1 Géométrie .....	7
1.3.2 Transformées non- adaptatives .....	8
1.3.2.1 Transformée de Radon .....	8
1.3.2.2 Ridgelets .....	8
1.3.2.3 Curvelets .....	11
1.3.3 Transformées adaptatives .....	12
1.3.3.1 Bandelettes .....	12
A. Base de bandelettes de première génération .....	12
B. Base de bandelettes de seconde génération .....	16
1.4 BASES DE BANDELETTES ORTHOGONALES .....	17
1.4.1 Segmentation en quadtree .....	19
1.4.2 Meilleure approximation en bandelettes .....	21
1.4.3 Construction du dictionnaire de bandelettes .....	22
1.4.4 Compression dans une meilleure base de bandelettes .....	22
1.5 CONCLUSION .....	23
<b>CHAPITRE 2 : TRANSFORMEE EN BANDELETTES PAR GROUPEMENTS</b>	
2.1 INTRODUCTION.....	24
2.2 GEOMETRIE DE 16 COEFFICIENTS D'ONDELETTES .....	24
2.3 TRANSFORMEE EN BANDELETTES PAR BLOCS OU GROUPEMENTS .....	25
2.3.1 Construction du dictionnaire de bases .....	25

A. Bases de bandelettes par groupements directionnels .....	25
B. Bases complémentaires .....	27
2.3.2 Transformée en bandelettes d'un bloc de coefficients d'ondelettes .....	28
2.3.3 Sélection de la meilleure base de bandelettes .....	29
2.3.4 Calcul théorique et empirique du multiplicateur de Lagrange optimal.....	33
2.4 CONCLUSION .....	35
<b>CHAPITRE 3 : SIMULATIONS, RESULTATS ET DISCUSSIONS</b>	
3.1 INTRODUCTION.....	36
3.2 COMPRESSION D'IMAGES FIXES .....	36
3.2.1 Etapes de compression .....	36
3.2.2 Mesurer les performances en compression .....	37
3.3 ALGORITHME DE LA TRANSFORMEE EN BANDELETTES .....	38
3.4 CODEUR EN BANDELETTES ORTHOGONALES .....	44
3.4.1 Transformée en bandelettes <i>d'ordre Zéro</i> .....	44
3.4.2 Transformée en bandelettes par groupements ou blocs.....	47
3.4.2.1 Algorithme de compression en bandelettes par groupements (blocs).....	47
3.5 RESULTATS ET DISCUSSION .....	50
3.6 CONCLUSION .....	61
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....	62

## Liste des figures

### Chapitre 1 :

### Théorie des bases de Bandelettes

<b>1.1</b> : Fonction 1D, transformée en ondelettes, et approximation obtenue en gardant 10% des coefficients.....	4
<b>1.2</b> : Exemple d'un triplet de fonctions ondelettes en 2D.....	5
<b>1.3</b> : Approximation d'une image dans une base d'ondelettes.....	6
<b>1.4</b> : Image avec de la régularité géométrique et ses coefficients en ondelettes.....	7
<b>1.5</b> : Transformée de Radon.....	8
<b>1.6</b> : Transformée en Ridgelet.....	9
<b>1.7</b> : Relations entre les différentes transformées.....	10
<b>1.8</b> : Transformée de curvelets discrètes.....	11
<b>1.9:</b> -(a) Exemple de flot dans une région -(b) Exemple d'une segmentation en quadtree adaptée d'une image et son flot géométrique.....	13
<b>1.10:</b> (a) Image originale $f$ . (b) Coefficients d'ondelettes de $f$ . (c) déformation du flot géométrique.....	13
<b>1.11:</b> Exemple de regroupements dyadiques suivant une courbe géométrique.....	16
<b>1.12:</b> (a) Coefficients en ondelettes d'une image. (b) Exemple de segmentation dyadique d'une image géométriquement régulière. (c) Un flot adapté est calculé sur chaque carré.....	16
<b>1.13:</b> Les coefficients en ondelettes à une échelle $2^j$ sont un échantillonnage uniforme d'une fonction régularisée $f * \psi^k(x)$ illustrée sur la droite.....	17
<b>1.14</b> : Déformation de l'échantillonnage des coefficients d'ondelettes afin d'obtenir un flot géométrique constant (ici horizontal).....	17
<b>1.15</b> : Construction d'un quadtree par subdivisions successives.....	19
<b>1.16</b> : Un exemple de quadtree adapté.....	20
<b>Chapitre 2 :</b>	
<b>Transformée en bandelettes par groupements</b>	
<b>2.1</b> : Configurations complexes de coefficients d'ondelettes.....	24
<b>2.2</b> : 12 Configurations de groupes directionnels.....	26
<b>2.3</b> : Bases de polynômes discrets de Legendre .....	26
<b>2.4</b> : Base de bandelettes directionnelles sur $\mathbb{R}^{16}$ .....	27
<b>2.5</b> : Bases complémentaires sur $\mathbb{R}^{16}$ .....	28
<b>2.6</b> : Exemple de transformée en bandelettes dans la base #3.....	29



<b>2.7</b> : Etapes de la transformée en bandelettes d'un bloc $f$ de coefficients d'ondelettes.....	29
<b>2.8</b> : (a) Quantification scalaire quasi-uniforme à zone morte. (b) Erreur de quantification.....	30
<b>2.9</b> : Histogrammes de la transformée en ondelettes et en bandelettes .....	32

## Chapitre 3

## Simulations et Résultats

<b>3.1</b> : Schéma général d'un système de compression.....	37
<b>3.2</b> : Organigramme décrit les étapes principales de l'algorithme de la transformée en bandelettes.....	40
<b>3.3</b> : schéma de compression / décompression utilisant la transformée en bandelettes.....	41
<b>3.4</b> : Etapes de l'algorithme de transformée de bandelettes.....	44
<b>3.5</b> : Réordonnancement discret des points d'échantillonnage.....	45
<b>3.6</b> : Influence de la taille de $S$ et de la direction $d$ .....	46
<b>3.7</b> : Schéma de compression par transformée en bandelettes par groupements.....	47
<b>3.8</b> : Organigramme décrit les étapes principales de la transformée en bandelettes par groupements.....	48
<b>3.9</b> : Image lena reconstruite au taux de compression de 98.37% (RC =0.13 bits/pixel).....	50
<b>3.10</b> : Illustration d'images fixes biomédicales avec le codeur en bandelettes et le codeur en ondelettes.....	53
<b>3.11</b> : Images reconstruites par le codeur en ondelettes et le codeur en bandelettes orthogonales à 0.2 bit/pixel.....	54
<b>3.12</b> : Comparaison entre un codeur arithmétique en bandelettes par groupement et bandelettes d'ordre zéro.....	54
<b>3.13</b> : Comparaison entre la transformée en bandelettes et JPEG 2000.....	57
<b>3.14</b> : Comparaison entre la transformée en bandelettes et JPEG 2000 pour différents types d'images.....	59
<b>3.15</b> : Comparaison de la transformée en bandelettes utilisant un multiplicateur théorique et un multiplicateur empirique.....	60

## Liste des tableaux

<b>2.1</b> : Angles correspondant aux différentes directions des groupes.....	25
<b>3.1</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Lena.....	50
<b>3.2</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour différentes images biomédicales.....	51
<b>3.3</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Lena.....	55
<b>3.4</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Barb.....	55
<b>3.5</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Guesswho.....	56
<b>3.6</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image IRM.....	56
<b>3.7</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour différentes images.....	57
<b>3.8</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Barb.....	60
<b>3.9</b> : Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Lena.....	60

# Lexique d'abréviation

$L^2$  : L'espace de la fonction d'énergie finie.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  : Produit scalaire de deux variables  $x$  et  $y$ .

$\mathbf{P}$ : Nombre des moments nuls.

$\mathbf{T}$ : Seuil.

$\alpha$  : Ordre de régularité.

$2^j$  : Echelle.

$K^{H,V,D}$ : Orientation Horizontale, Verticale et Diagonale.

$f_j^k$  : Coefficients d'ondelettes de chaque échelle et chaque orientation.

$CWT$ : Transformée en Ondelettes Continues.

$DWT$ : Transformée en Ondelettes Discrètes.

$DCT$  : Transformée en Cosinus Discrètes.

$CRT$ : Transformée en Ridgelets Continues.

$1D, 2D$ : une seule dimension, deux dimensions.

$\mathbf{c}(\mathbf{x})$  : Courbe intégrale du flot géométrique.

$\vec{\mathbf{t}}$  : Vecteur de flot géométrique.

$wf(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  : Déformation de l'image  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

$\mathcal{B}(\Gamma)$  : Base de bandelettes.

$\Gamma$  : Géométrie.

$Q_j^k$ : Segmentation en quadtree de chaque échelle et chaque orientation.

$\tilde{\gamma}_S$ : Géométries approchées à l'intérieur des carrés de la segmentation.

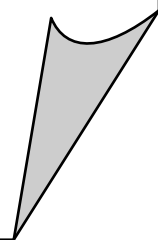
$\mathcal{D}_j^k$ : Dictionnaire de bases de bandelettes discrètes

$\Delta_j([0, 1]^2)$ : Base de Dirac.

$\Xi$  : Géométrie d'unité.

$EQM$  : Erreur Quadratique Moyenne.

# Introduction générale



## Introduction générale

La recherche d'une bonne représentation est un problème central du traitement d'images. On cherche dans la plupart des cas, des bases permettant une représentation creuse des images c'est-à-dire permettant de bien les approcher avec peu de coefficients. Typiquement, ces représentations sont réalisées par l'intermédiaire d'une transformation orthogonale non-redundante. Actuellement, les choix les plus populaires à cette fin sont la transformée en ondelettes discrètes (DWT) ou la transformation en cosinus discrète (DCT).

La transformée en ondelettes est un outil très efficace dans l'analyse et débruitage de signaux 1D non stationnaires présentant des discontinuités ponctuelles. En 2D, la base d'ondelettes est obtenue par le produit tensoriel de deux ondelettes monodimensionnelles. Les bases obtenues ainsi sont appelées bases d'ondelettes séparables. Elles ne sont cependant pas optimales pour les images. Bien que très efficaces pour les zones régulières, les textures homogènes et les singularités ponctuelles, elles ne peuvent exploiter la régularité de nature géométrique des contours.

De nombreuses approches récentes tentent de résoudre ce problème en filtrant l'image le long des contours ; on peut citer : les Ridgelets, les Curvelets et les Bandelettes. L'idée des ridgelets est de tracer une singularité de type ligne à partir d'une singularité de type point utilisant la transformée de Radon. Puis, la transformée en ondelettes est utilisée pour représenter effectivement la singularité de type point dans le domaine de Radon.

Dans le cas des images naturelles, les contours ne sont pas généralement des droites et les Ridgelets dans ce cas ne peuvent pas apporter des représentations efficaces. L'idée de la transformation en Curvelets est de décomposer l'image en sous-bandes, c'est-à-dire décomposer les objets de l'image dans une série d'échelles disjointes. Chaque échelle est alors analysée au moyen d'une transformation Ridgelet locale.

Pour décrire des images naturelles, il faut un modèle où les contours de l'image ne sont pas nécessairement des singularités, car ils peuvent être lissés. Les bases des Bandelettes proposées par Le Pennec et Mallat, ont un ordre d'approximation optimal pour cette classe plus complexe d'images géométriques. Les bases de bandelettes sont construites à partir d'ondelettes bidimensionnelles déformées le long du flot géométrique dans chaque région de l'image. Le flot géométrique indique la direction de régularité de l'image dans une région. Dans ce cas, il n'est

plus nécessaire de représenter l'image par des singularités ; cependant, une partition de l'image en régions où le flot est régulier et utile.

Le premier chapitre décrit rapidement des bases d'ondelettes, leurs caractéristiques, leurs succès et leurs limitations. Quelques transformées redondantes telles que Ridgelets et Cuvelets sont décrites. Enfin, une étude détaillée sur la construction des bases de Bandelettes (première génération et seconde génération) est menée.

Le second chapitre décrit la transformée en bandelettes par groupement utilisée dans la compression d'images. Nous démontrons la construction du dictionnaire de ces bases. La meilleure transformée en bandelettes sur chaque bloc est sélectionnée parmi un dictionnaire de transformées possibles par minimisation d'un critère débit-distorsion (Lagrangien).

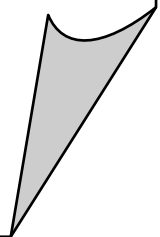
Le troisième chapitre présente les simulations réalisées et les résultats obtenus. Une présentation détaillée sur les étapes de l'algorithme de la transformée en bandelettes est effectuée. Deux versions de la transformée en bandelettes sont réalisées, la première version est la transformée en bandelettes d'ordre zéro et la seconde version est la transformée en bandelettes par groupements.

Une application du codeur en bandelettes sur plusieurs types d'images et les résultats obtenus ainsi que des commentaires sont présentés dans ce chapitre.

Finalement, on termine ce travail par une conclusion générale et des perspectives.

## Chapitre 1

# **Théorie des bases de bandelettes**



## 1.1 Introduction

Les représentations actuellement utilisées en traitement des images sont basées sur des transformées séparables. Celles-ci ne capturent pas la régularité géométrique des images le long des contours, bien que ceci soit un aspect essentiel des images. Nous proposons ici la construction d'une nouvelle représentation permettant de capturer à la fois cette régularité le long des contours et la régularité de zones. Elle est basée sur une nouvelle famille de bases, les bandelettes, vivant le long de contours et permettant de capturer les singularités le long de ceux-ci. Un rappel des bases d'ondelettes et leurs propriétés montrent les limitations de ces bases pour l'approximation de structures géométriques.

## 1.2 Succès et échecs des bases d'ondelettes :

### 1.2.1 Meilleure approximation orthogonale :

L'approximation d'une fonction  $f \in L^2$  ou d'un vecteur  $f \in \ell^2$  se calcule de façon simple dès lors que l'on dispose d'une base orthonormée  $B = \{g_\mu\}_\mu$  de  $L^2$  ou  $\ell^2$ . Il suffit en effet d'imposer un seuil  $T > 0$  et de rejeter les coefficients de la décomposition de  $f$  dans  $B$  d'amplitude inférieure à  $T$  [22].

$$f_M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\langle f, g_\mu \rangle| > T} \langle f, g_\mu \rangle g_\mu \quad \text{avec} \quad M \stackrel{\text{def}}{=} \text{Card}\{\mu \mid |\langle f, g_\mu \rangle| > T\} \quad (1.1)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire canonique sur  $L^2$  ou  $\ell^2$ .

La fonction  $f_M$  ainsi obtenue est la meilleure approximation de  $f$  avec  $M$  coefficients dans la base  $B$ . Cette approximation est non linéaire puisque les coefficients  $\langle f, g_\mu \rangle$  pris en compte pour approcher  $f$  sont choisis en fonction de  $f$ . Pour obtenir une approximation efficace en norme  $L^2$ , il s'agit donc de trouver une base exploitant au mieux les propriétés de la classe de fonctions considérée.

Pour les fonctions uniformément régulières, la base de Fourier est optimale pour effectuer de telles approximations. Pour les fonctions de  $L^2([0,1]^2)$  ayant des discontinuités, les bases d'ondelettes, décrites au prochain paragraphe, permettent de pallier au problème de l'analyse de Fourier en exploitant pleinement l'adaptivité qu'autorise le choix des coefficients à garder.

### 1.2.2 Bases d'ondelettes 1D

Une base d'ondelettes  $B$  de  $L^2([0,1]^2)$  est obtenue en dilatant et translatant une fonction  $\psi$  [1].



$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi_{jn} \mid j \leq 0, n = 0 \dots 2^{-j} - 1\} \quad \text{Avec} \quad \psi_{jn}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - n)$$

avec une légère modification pour les fonctions dont le support intersecte le bord de  $[0, 1]$  pour obtenir une base orthonormée.

La fonction  $\psi$  possède principalement deux propriétés :

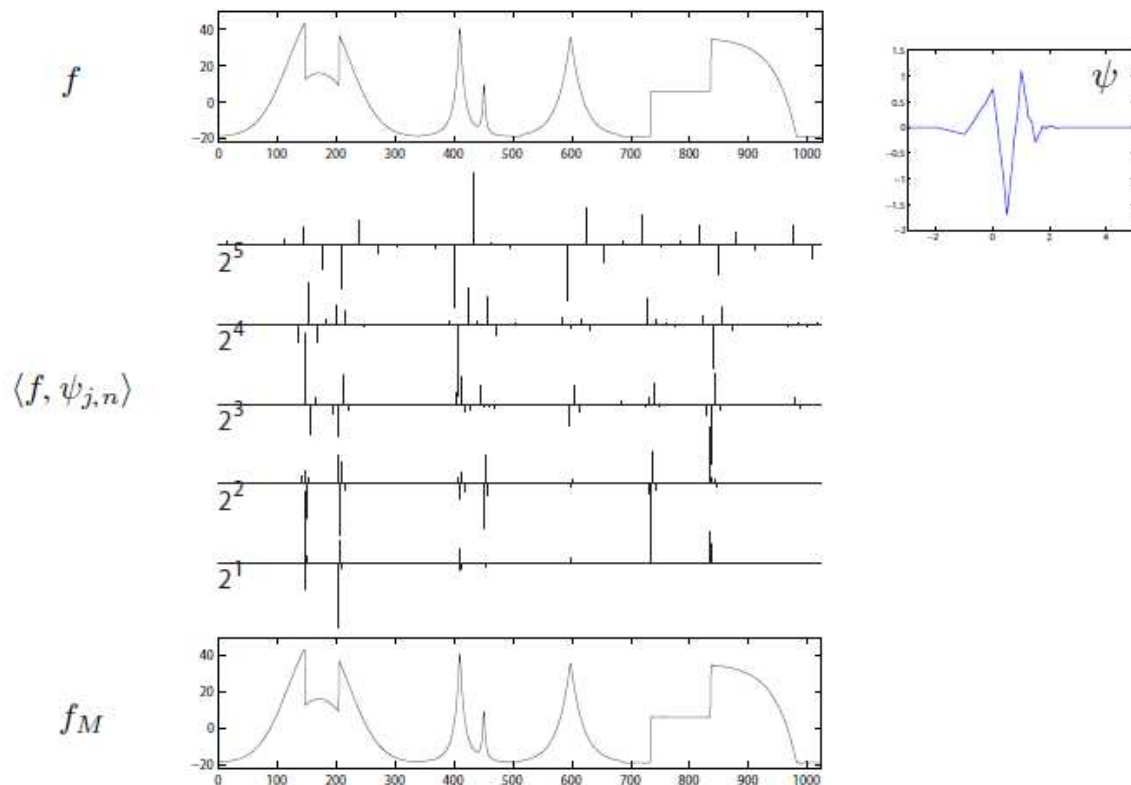
- Elle est *oscillante*. La fonction  $\psi$  a ainsi un nombre  $p$  suffisamment élevé de moments nuls.

$$\forall k \leq p - 1, \quad \int_0^1 \psi(x) x^k dx = 0 \quad (1.2)$$

Si une fonction  $f$  est régulière, par exemple de classe  $C^\alpha$  sur un intervalle contenant le support d'une fonction, alors le produit scalaire  $\langle f, \psi_{jn} \rangle$  va être quasiment nul.

- Elle a un support compact, de taille  $m$ . Ainsi une fonction  $\psi_{j,n}$  a un support de taille  $K2^j$  et est localisée autour du point  $2^j n \in [0,1]$ .

Ces deux propriétés font de la base d'ondelettes un outil efficace pour analyser les fonctions 1D ayant des singularités ponctuelles.



**Figure 1.1 :** Fonction 1D, transformée en ondelettes, et approximation obtenue en gardant 10% des coefficients.

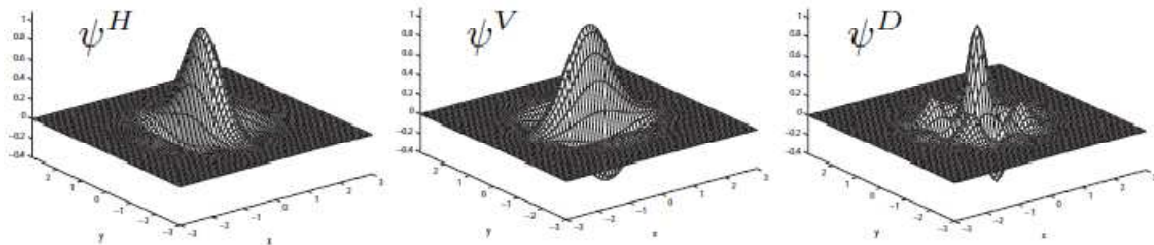
La figure (1.1) montre une telle fonction, ainsi que les coefficients de la décomposition en ondelettes  $\langle f, \psi_{jn} \rangle$  associés. On peut constater que les grands coefficients sont peu nombreux et localisés au voisinage des singularités. On peut alors prouver que si la fonction est  $C^\alpha$  par morceaux et que l'ondelette  $\psi$  a  $p \geq \alpha$  moments nuls, alors la meilleure approximation  $f_M$  dans la base d'ondelettes  $M$  vérifié:

$$\|f - f_M\|_{L^2}^2 \leq CM^{-2\alpha} \quad (1.3)$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $f$ . Cette décroissance asymptotique est optimale pour les fonctions régulières par morceaux.

### 1.2.3 Bases d'ondelettes 2D

Les bases d'ondelettes de  $L^2([0, 1]^2)$  sont obtenues par translations et dilatations de 3 ondelettes élémentaires  $\{\psi^H, \psi^V, \psi^D\}$  qui oscillent dans les directions horizontale, verticale, et diagonale. Ces ondelettes bidimensionnelles s'obtiennent par un produit séparable d'ondelettes monodimensionnelles. La figure 1.2 montre un exemple d'ondelettes 2D.



**Figure 1.2 :** Exemple d'un triplet de fonctions ondelettes en 2D.

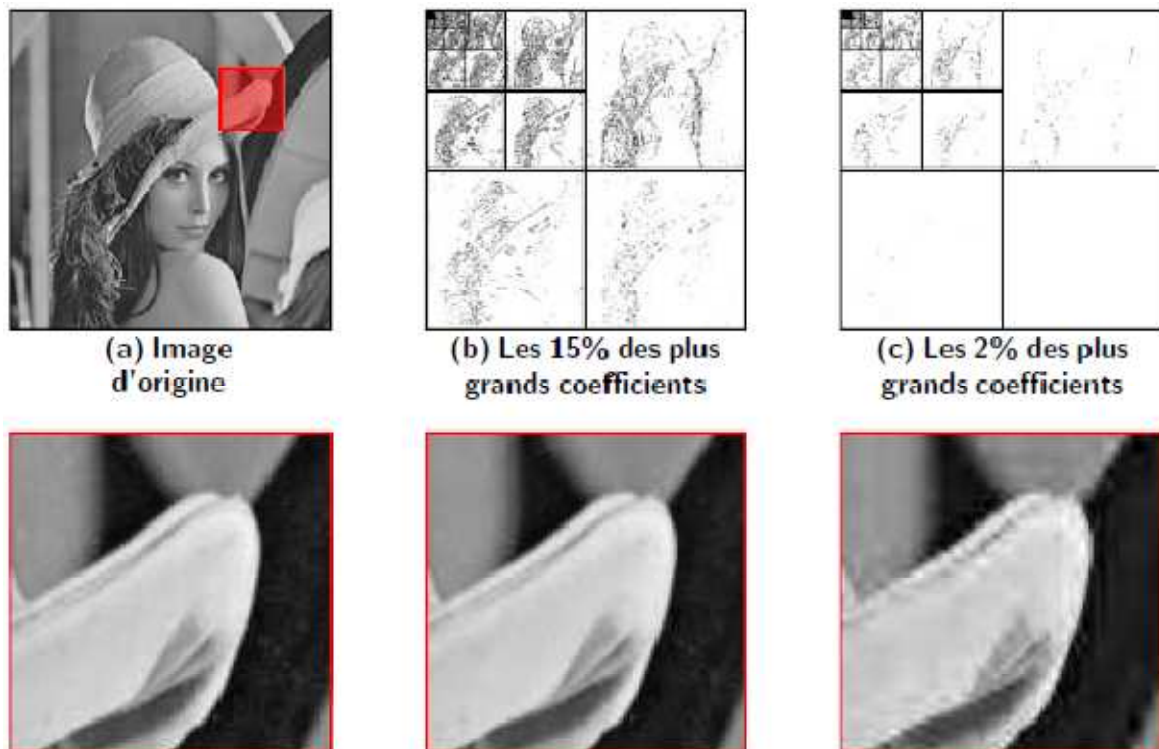
La transformée en ondelettes analyse une fonction  $f \in L^2([0,1]^2)$  en calculant la décomposition de  $f$  dans une base d'ondelettes. Pour chaque échelle  $2^j$  et orientation  $K \in \{V, H, D\}$ ,

$$f_j^k[n_1, n_2] \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \psi_{jn}^k \rangle \quad \text{Avec} \quad \psi_{jn}^k(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-j} \psi^k(2^{-j}x_1 - n_1, 2^{-j}x_2 - n_2)$$

On peut interpréter cet ensemble de coefficient comme une image  $f_j^k$  contenant les coefficients d'ondelettes de  $f$  pour chaque échelle  $2^j$  et orientation  $k$ . la fonction  $\psi_{jn}^k$  est localisée au voisinage du point  $2^j n$  sur un carré de taille  $2^j k$ .

La figure (1.3) montre les coefficients en ondelettes d'une image selon les 3 orientations.

Ces coefficients ont été seuillés afin de ne garder que 15% et 2% des plus grands coefficients en (b) et (c). Le zoom effectué sur la reconstruction  $f_M$  montre qu'avec seulement 15% des coefficients, on obtient une reconstruction précise de l'image, mais qui se dégrade lorsque ce pourcentage diminue. Le standard de compression d'images JPEG2000 décompose l'image dans une base d'ondelettes et effectue une quantification et un codage entropique des coefficients afin d'optimiser le code binaire.



**Figure.1.3 :** Approximation d'une image dans une base d'ondelettes.

Pour une fonction  $f$  ayant une régularité géométrique  $C^\alpha$ , la meilleure approximation  $f_M$  avec  $M$  coefficients dans une base d'ondelettes satisfait:

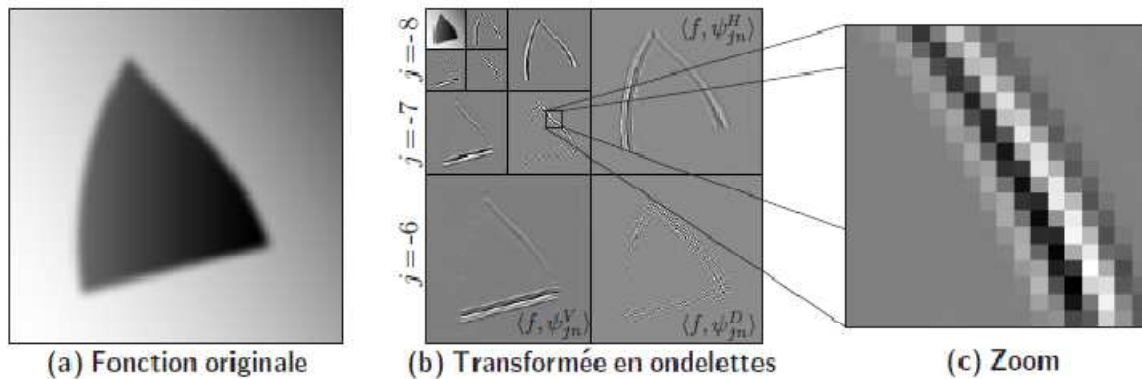
$$\|f - f_M\|_{L^2([0,1]^2)}^2 \leq CM^{-1} \quad (1.4)$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $f$ , ce taux d'approximation n'est pas optimal et la qualité de l'approximation est complètement dirigée par la présence de discontinuités.

Les bases d'ondelettes orthogonales sont capables de résoudre un problème essentiellement 1D, celui de l'analyse des singularités ponctuelles. En 2D, le problème devient beaucoup plus complexe, à cause de la présence de singularités curvilignes. Les ondelettes classiques ne sont

pas capables de représenter de telles singularités de façon efficace à cause de leur support carré.

La figure (1.4) montre les coefficients d'ondelettes d'une image régulière par morceaux. On voit que les grands coefficients en ondelettes sont le long des contours (coefficients blancs et noirs) et le nombre de ces coefficients est donc proportionnel à la longueur des contours. Ce sont ces coefficients qui déterminent la précision de l'approximation[17].



**Figure1.4 :** Image avec de la régularité géométrique et ses coefficients en ondelettes.

L'enjeu des représentations géométriques est d'utiliser la régularité géométrique des « singularités » de l'image afin d'améliorer le résultat d'approximation obtenu avec des ondelettes. En particulier, on voudrait obtenir des approximations qui satisfont  $\|f - f_M\| = CM^{-\alpha}$ , (Où C est une constante qui ne dépend que de f) comme s'il n'y avait pas de singularité dans l'image. C'est en effet le résultat obtenu en 1D.

#### 1.2.4 Succès des bases d'ondelettes

Bien que non optimale pour l'approximation d'images géométriques, les bases d'ondelettes sont en pratique un outil très efficace.

Les ondelettes sont également employées en compression d'images avec succès. Elles sont en effet à la base du nouveau standard de compression d'image JPEG2000.

### 1.3 Représentations géométriques des images :

#### 1.3.1 Géométrie :

La géométrie est une des caractéristiques essentielles des images naturelles : elle constitue un élément de régularité qui n'est pas pris en compte par les bases classiques.

L'exploitation de cette régularité géométrique est ainsi une direction prometteuse pour la compression d'image et plus généralement pour le traitement des images.

### 1.3.2 Approches non-adaptatives :

Ces approches dans la décomposition ne dépendent pas du signal à analyser et la plupart de ces transformées ont l'inconvénient d'être redondantes, ce qui est désavantageux pour leur application en compression d'images [6].

#### 1.3.2.1 Transformée de Radon :

La transformée de Radon [4] consiste à projeter l'image sur un certain nombre d'orientations en intégrant l'image le long de la direction orthogonale à la projection (Figure 1.5), puis à réaliser la transformée de Fourier de ces projections. La reconstruction s'obtient en plaçant, pour chaque orientation de projection choisie, les coefficients de Fourier obtenus le long de cette même orientation, dans le domaine fréquentiel. On obtient l'image reconstruite en effectuant ensuite une transformée de Fourier 2D inverse.

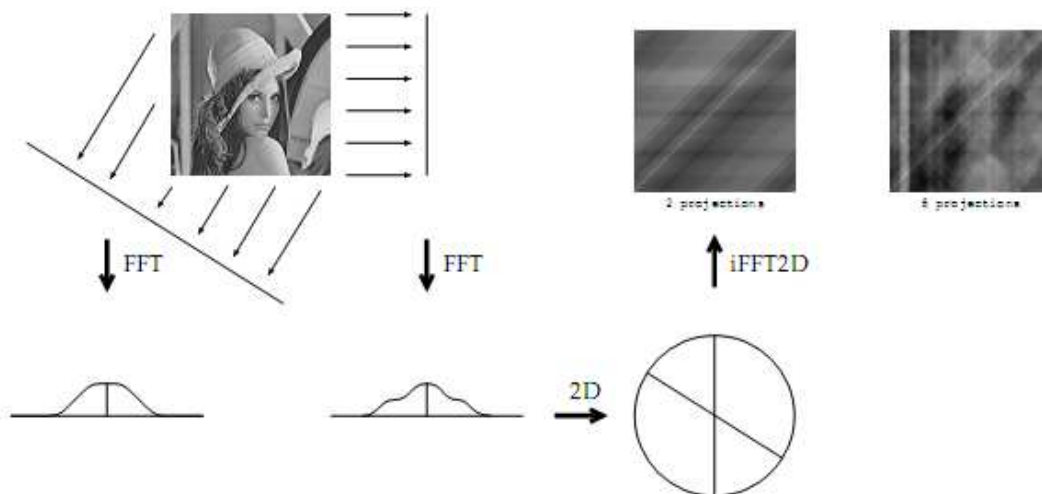
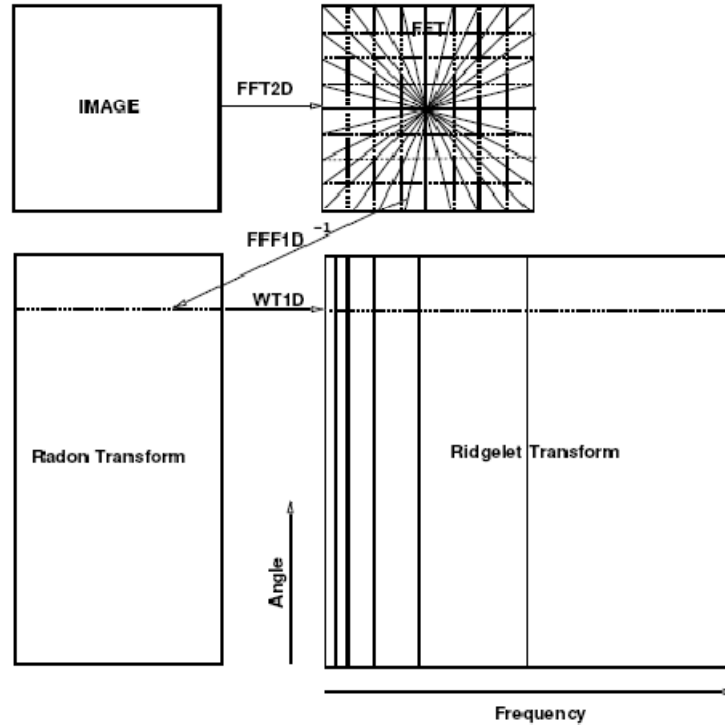


Figure 1.5 : Transformée de Radon.

#### 1.3.2.2 Ridgelets :

Les ridgelets [2] forment une extension naturelle de la transformée de Radon pour un nombre limité de directions, en se basant sur des fonctions d'ondelettes pour contrôler la précision en orientation et garantir la reconstruction parfaite.

L'idée des ridgelets est de tracer une singularité de type ligne à partir d'une singularité de type point utilisant la transformée de Radon. Puis, la transformée en ondelettes est utilisée pour représenter effectivement la singularité de type point dans le domaine de Radon (figure 1.6).



**Figure1.6** : Transformée en Ridgelet.

$f(x)$  est une fonction, sa transformée en ridgelet continue (CRT) dans  $\mathbb{R}^2$  est définie par :

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{a,b,\theta}(x) f(x) dx \quad (1.5)$$

où les ridgelets  $\psi_{a,b,\theta}(x)$  dans 2D sont définies par des ondelettes 1D  $\psi(x)$  via la relation suivante :

$$\psi_{a,b,\theta}(x) = a^{-1/2} \psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b)/a) \quad (1.6).$$

la fonction de ridgelets qui est orientée par un angle  $\theta$  est constante le long des lignes  $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = \text{const}$ .

Pour la comparaison, la transformée d'ondelettes continues (séparables) (CWT) dans  $\mathbb{R}^2$  de  $f(x)$  est définie par:

$$CWT_f(a_1, a_2, b_1, b_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{a_1, a_2, b_1, b_2}(x) f(x) dx \quad (1.7)$$

où les ondelettes dans 2D sont de produits tensoriel:

$$\psi_{a_1, a_2, b_1, b_2}(x) = \psi_{a_1, b_1}(x) \psi_{a_2, b_2}(x) \quad (1.8)$$

de 1D ondelettes  $\psi_{a,b}(t) = a^{-1/2}\psi((t - b)/a)$ .

On peut observer que CRT est similaire de 2D CWT sauf que les paramètres points  $(b_1, b_2)$  ont remplacés par les paramètres lignes  $(b, \theta)$ . Ces 2D transformées multiéchelles sont reliées par :

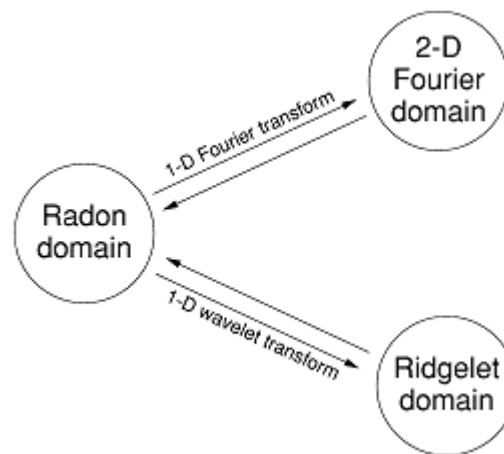
Ondelettes  $\rightarrow$   $\psi$ échelle, point – position.

Ridgelets  $\rightarrow$   $\psi$ échelle, ligne – position.

En conséquence, les ondelettes sont très efficaces pour représenter les objets avec des singularités de type point, tandis que les ridgelets sont très efficaces pour représenter les objets avec des singularités de type ligne.

En 2D, les Ondelettes et les Ridgelets sont reliées par la transformée de Radon[4], figure(1.7). Plus précisément, on dénote la transformée de Radon par :

$$R_f(\theta, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \delta(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta - t) dx \quad (1.9)$$



**Figure 1.7 :** Relations entre les différentes transformées.

Donc, la transformée en ridgelets est une application de la transformé en ondelettes 1D vers la transformée de Radon.

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_{\mathbb{R}} \psi_{a,b}(t) R_f(\theta, t) dt. \quad (1.10)$$

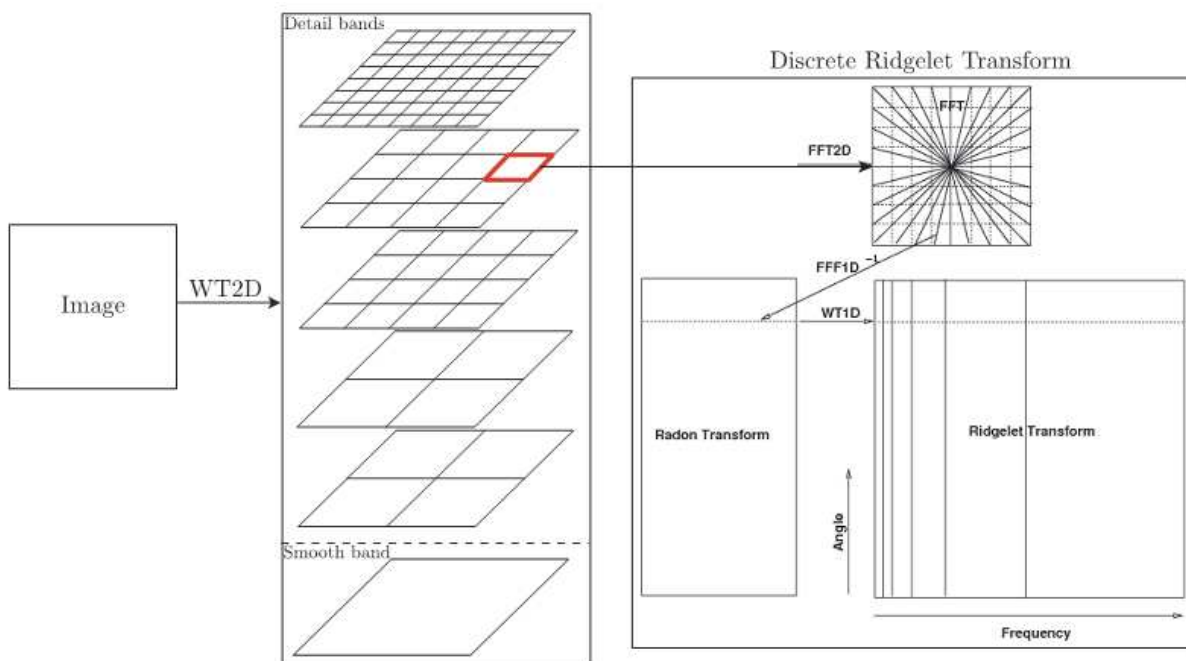
L'application de la transformée de Fourier 1D le long de  $t$  sera d'une résultat de la transformée de fourier 2D. plus précisément  $F_f(\omega)$  est la transformée de fourier 2D de  $f(x)$ , alors

$$F_f(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-j\xi t} R_f(\theta, t) dt. \quad (1.11)$$

### 1.3.2.3 Curvelets :

Les curvelets [3,5] sont construites à partir d'une décomposition en sous-bandes de l'image, une segmentation dyadique par blocs de ces sous-bandes est effectuée avec une taille de bloc dépendant de la sous-bande, une transformée en ridgelets [2] est appliquée sur ces blocs. La transformée en ridgelets consiste en une transformée de Radon suivie d'une transformée en ondelettes 1D. La décomposition en sous-bandes et la segmentation par blocs permettent la localisation fréquentielle et spatiale ainsi que la multirésolution et la transformée de Radon permet la multi-directionnalité. Les contours mis en évidence dans les sous-bandes hautes fréquences sont détectés dans toutes les directions par la transformée de Radon et représentés par la transformée en ondelettes 1D.

Cette transformée améliore donc la prise en compte des singularités d'une image, par contre, elle est conçue de sorte que la transformée est très redondante.



**Figure 1.8 :** Transformée de curvelets discrètes.



### 1.3.3 Approches adaptatives

Ces approches sont dépendantes du signal à analyser, ce qui offre en général une plus grande flexibilité que les approches non adaptatives.

#### 1.3.3.1 Bandelettes

##### A. Base de bandelettes première génération:

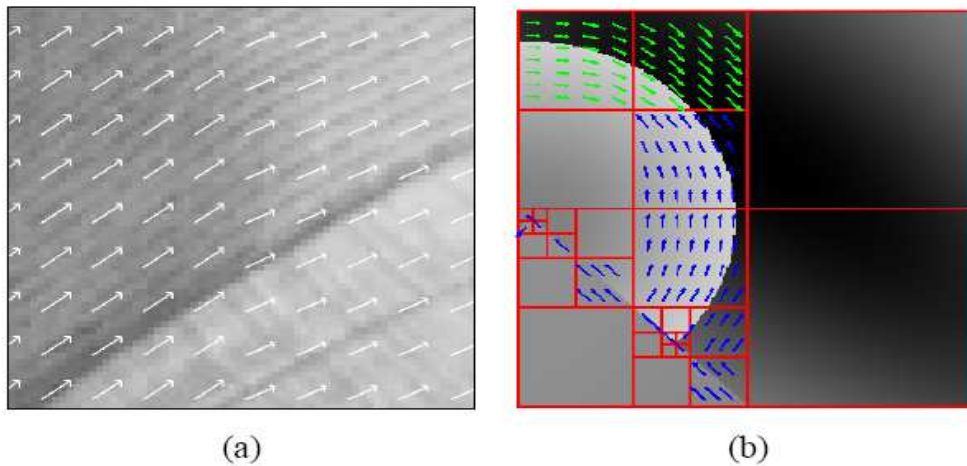
Les premières bases de bandelettes construites par E. Le Pennec et S. Mallat [12] ont permis d'obtenir des résultats d'approximation asymptotiquement optimaux pour des fonctions géométriquement régulières [10, 11].

Les bandelettes sont construites à partir d'ondelettes bidimensionnelles déformées le long du flot géométrique.

Dans une région  $\Omega$ , le flot géométrique est un champ de vecteur  $\vec{\tau}(x_1, x_2)$  qui donne une direction dans laquelle la fonction  $f$  est régulière dans un voisinage. Pour construire des bases orthonormées, une condition de parallélisme doit être imposée sur le flot. Celui-ci est choisi soit parallèle verticalement,  $\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_1)$ , soit parallèle horizontalement,

$\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2)$ . Pour permettre plus de flexibilité, cette condition de parallélisme n'est imposée que dans des sous-régions  $\Omega_i$  de  $\Omega$ . La région  $\Omega$  est donc partitionnée en des régions  $\Omega_i$  munies d'un flot parallèle soit verticalement soit horizontalement (figure (1.9)).

On définit alors une base pour chaque région  $\Omega$ . Si aucun flot n'est défini, on utilise une base d'ondelettes bidimensionnelles de  $L^2(\Omega)$ . Sinon, cette base est remplacée par une base de bandelettes. La construction de cette base est maintenant présentée dans le cas où le flot est parallèle verticalement, le cas horizontal étant similaire.



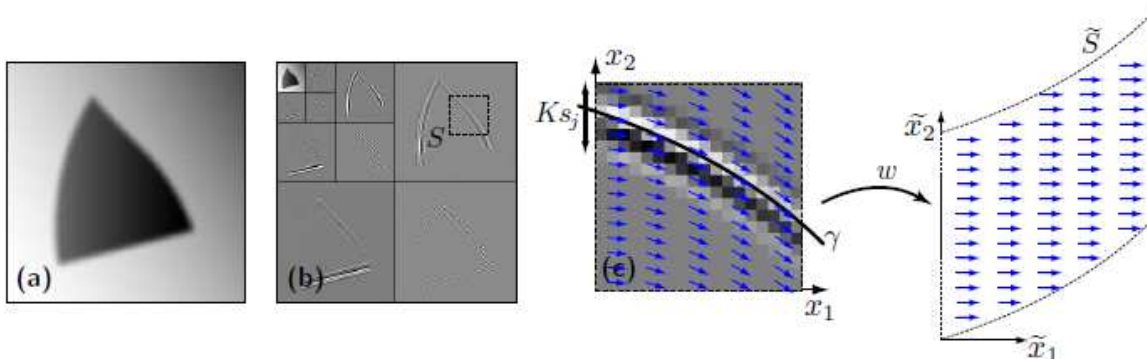
**Figure 1.9 :** -(a) Exemple de flot dans une région    -(b) Exemple d’une segmentation en quadtree adaptée d’une image et son flot géométrique.

Le flot s’écrit donc  $\vec{r}(x_1, x_2) = \vec{r}(x_1)$ , on peut l’écrire sous la forme  $\vec{r}(x_1) = (1, C'(x_1))$ . On pose alors  $x_{min} = \inf_{x_1} \{x_1, x_2 \in \Omega\}$  et on définit la ligne de flot comme une courbe intégrale du flot. Celle-ci satisfait l’équation  $x_2 = c(x_1) + c_0$

$$\text{où} \quad c(x) = \int_{x_{min}}^x c'(u) du \quad (1.13)$$

et  $c_0$  est un paramètre de translation. Par construction, l’image a une variation régulière le long de ces lignes. Afin d’exploiter cette régularité, les ondelettes bidimensionnelles sont déformées pour suivre le flot (figure (1.10)). L’image déformée  $Wf(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + c(x_1))$  est régulière le long des lignes horizontales ( $x_2$  fixé). On utilise alors pour la région déformée

$$\Omega' = W\Omega = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2 + c(x_1)) \in \Omega\} \quad (1.14)$$



**Figure 1.10 :** (a) Image originale  $f$ . (b) Coefficients d’ondelettes de  $f$ . (c) déformation du flot géométrique.

la base d'ondelettes bidimensionnelles de  $L^2(\Omega')$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j, m_1, m_2) \in I_{\Omega'}} \quad (1.15)$$

L'opérateur de déformation  $W$  étant orthogonal, l'application de son inverse à ces ondelettes donne une base orthonormée de  $L^2(\Omega)$  que l'on appelle base d'ondelettes déformées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_{(j, m_1, m_2) \in I_{\Omega'}} \quad (1.16)$$

Afin d'exploiter la régularité de la fonction  $f$  selon le flot, on remplace les ondelettes déformées de la forme (la fonction d'échelle  $\phi_{j,m_1}(x_1)$  n'a pas des moments nuls):

$$\left\{ \phi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \right\}_{m_1, m_2} \quad (1.17)$$

par la famille de fonctions engendrant le même espace qui ont des moments nuls le long de  $x_1$

$$\left\{ \psi_{l,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \right\}_{l > j, m_1, m_2} \quad (1.18)$$

Cette opération est appelée **bandelétisation** et on vérifie qu'elle s'implémente par une simple transformée en ondelettes monodimensionnelles discrètes. Les fonctions:

$$\psi_{l,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \quad (1.19)$$

sont appelées bandelettes du fait de leur support allongé selon les lignes de flots. La base orthonormée de bandelettes du domaine  $\Omega$  est donc définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{l,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_{j, l > j, m_1, m_2} \quad (1.20)$$

Pour une partition donnée  $\Omega = \cup_i \Omega_i$  et les flots géométriques correspondants, on définit ainsi une base orthonormée de bandelettes ou d'ondelettes (si il n'y a pas de flots) pour chaque  $\Omega_i$ . L'union de ces bases forment une base par blocs de  $L^2(\Omega)$ . L'orthogonalité des

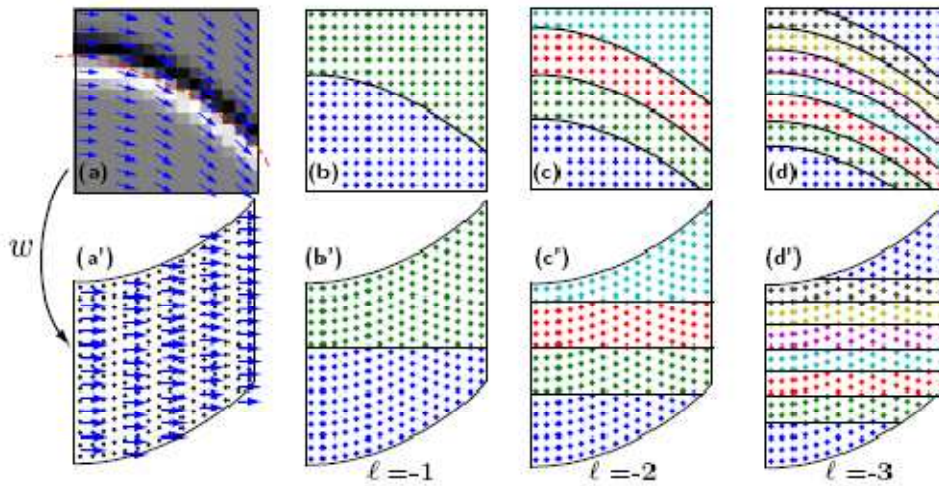
bandelettes et des ondelettes peut-être relâchée : en utilisant une ondelette biorthogonale monodimensionnelle  $\psi$  et sa fonction d'échelle  $\phi$ , la même construction donne une base biorthogonale pour chaque  $L^2(\Omega_i)$  et donc une base biorthogonale par blocs de  $L^2(\Omega)$ .

## **B. Base de bandelettes de seconde génération**

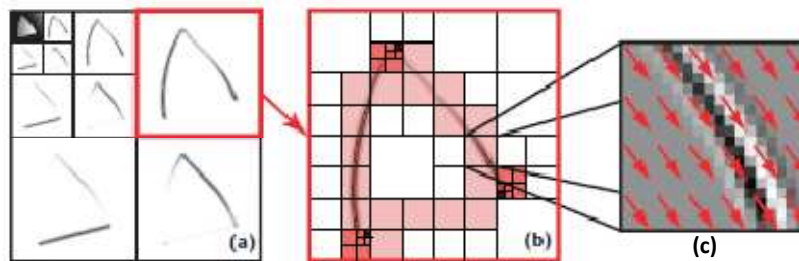
La seconde génération de bandelettes est développée par Gabriel Peyré dans sa thèse [14] pour obtenir des bases orthonormées adaptées aux fonctions géométriques régulières. Contrairement à la transformée en bandelettes de première génération, il a adapté les directions de filtrage à l'image. Une approximation polynomiale est effectuée sur des bandes qui suivent la géométrie. Pour capturer la régularité géométrique, Peyré a employé la théorie des multi-ondelettes de Alpert [8,9]: il a utilisé des polynômes déformés 2D à la place des polynômes 1D.

Là où Alpert effectue une subdivision dyadique des intervalles, Peyré effectue une subdivision dyadique de bandes déformées (figure1.11). Il construit ainsi les bandelettes de seconde génération qui permettent l'approximation multirésolution de fonctions dans des bandes à partir de fonctions polynomiales par morceaux (figure1.12).

Deux versions de la transformée en bandelettes de seconde génération sont réalisées dans notre travail. La première version de cette transformée en bandelettes est la transformée en bandelettes d'ordre zéro [14,15]. Ici, les géométries considérées sont linéaires c'est-à-dire des morceaux de droites. La seconde version est la transformée en bandelettes par groupements [14]. Une autre stratégie est effectuée sur cette transformée. Plus de détail sur cette version présent au chapitre suivant.



**Figure 1.11 :** Exemple de regroupements dyadiques suivant une courbe géométrique.



**Figure 1.12 :** (a) Coefficients en ondelettes d'une image. (b) Exemple de segmentation dyadique d'une image géométriquement régulière. (c) Un flot adapté est calculé sur chaque carré.

#### 1.4 Bases de bandelettes orthonormales :

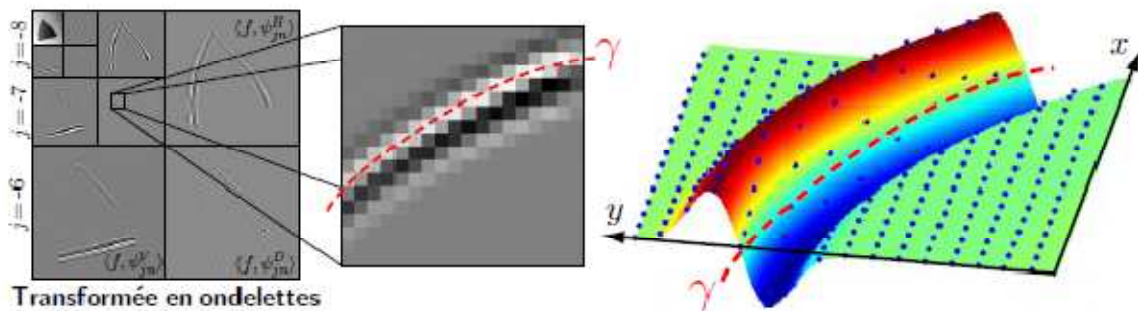
La transformée en ondelettes est factorisable en un produit d'opérateurs orthogonaux élémentaires, obtenus par dilatation de filtres « miroirs en quadratures » [23]. Les bases orthonormées de bandelettes s'obtiennent à partir des bases d'ondelettes, en introduisant une nouvelle cascade d'opérateurs orthogonaux, paramétrés par la géométrie locale de l'image.

Pour une image géométriquement régulière, la figure (1.13) montre qu'à chaque échelle, les grands coefficients sont localisés au voisinage des courbes le long desquelles l'image est singulière. Si  $K$  est la taille du support des ondelettes  $\psi^k$ , les grands coefficients sont localisés dans des tubes de largeur  $K$ , comme l'illustre le zoom de la figure (1.13(c)). Ces coefficients sont comprimés par un opérateur de « bandelétisation » orthogonal qui exploite la régularité géométrique sous-jacente.

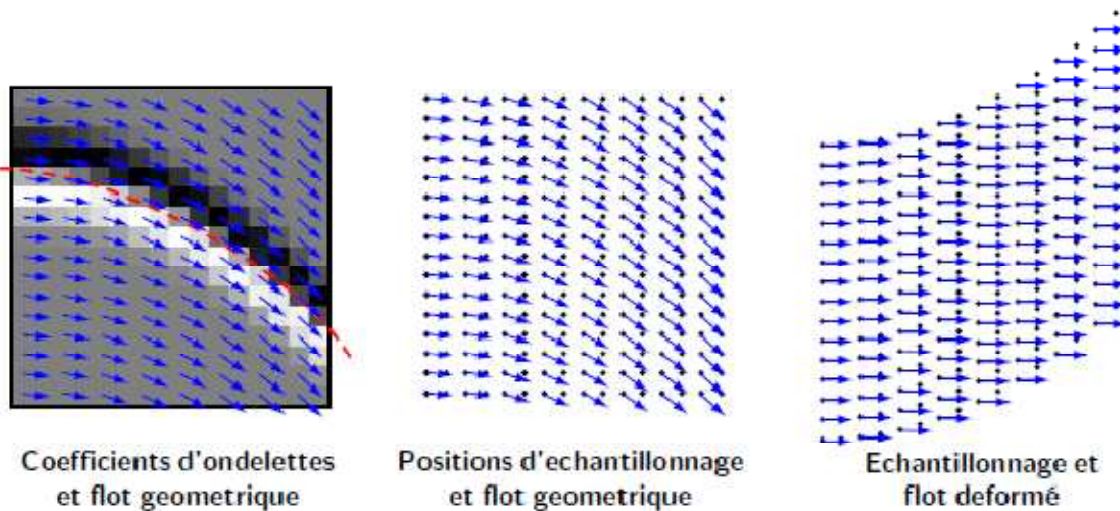
Les coefficients en ondelettes de  $f$  peuvent s'écrire comme un échantillonnage uniforme de  $f$  régularisée par une ondelette  $\psi_j^k$  dilatée par un facteur  $2^j$  :

$$\langle f, \psi_{jn}^k \rangle = f * \psi_j^k(2^j n) \text{ où } \psi_j^k(x) = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{-x}{2^j}\right)$$

Supposons que l'on définisse un champ de vecteurs approximativement parallèle au contour comme l'illustre la figure (1.14). La fonction  $f * \psi_j^k(x)$  hérite de la régularité de  $\psi_j^k(x)$  et de la régularité géométrique de  $f(x)$  parallèlement au flot, comme le montre la surface sur la droite de la figure (1.13).



**Figure 1.13 :** Les coefficients en ondelettes à une échelle  $2^j$  sont un échantillonnage uniforme d'une fonction régularisée  $f * \psi^k(x)$  illustrée sur la droite.



**Figure 1.14 :** Déformation de l'échantillonnage des coefficients d'ondelettes afin d'obtenir un flot géométrique constant (ici horizontal).

On rectifie le flot pour qu'il devienne horizontal grâce à une déformation régulière du plan. Cette déformation modifie la grille carrée de l'échantillonnage des coefficients d'ondelettes orthogonaux, comme le montre la figure (1.14). Dans le domaine déformé, le fait que le flot

soit horizontal indique que la fonction  $\psi_j^k$  a des variations régulières le long de droites horizontales. Cette régularité est capturée par une transformée d'Alpert orthogonale [9], construite avec des polynômes séparables horizontalement et verticalement, et définie sur l'échantillonnage obtenu après déformation de la fonction [17].

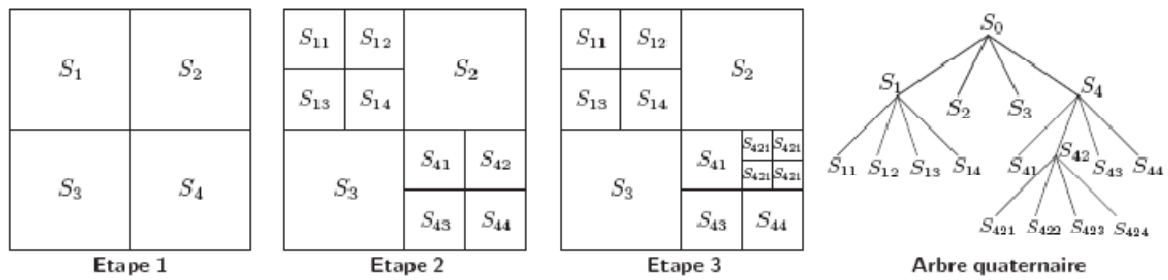
La transformée d'Alpert [9] peut s'interpréter comme une transformée en ondelettes polynomiales adaptée à des échantillonnages irréguliers. Elle s'obtient par orthogonalisation d'espaces multirésolutions de polynômes définis sur l'échantillonnage irrégulier. Les vecteurs résultants ne sont pas réguliers mais ont des moments nuls sur la grille d'échantillonnage. Un signal provenant d'un échantillonnage d'une fonction anisotrope régulière se représente ainsi par un petit nombre de ces vecteur de Alpert. Cette « *bandelétisation* » par transformée d'Alpert sur les coefficients d'ondelettes définit des fonctions appelées bandelettes, qui peuvent s'écrire

$$b_{j,\ell,n}^k(x) = \sum_P a_{\ell,n}[P] \psi_{j,P}^k(x) \quad (1.21)$$

Les  $a_{\ell,n}[P]$  sont les coefficients de la transformée d'Alpert, qui dépendent du flot géométrique local, pour chaque échelle  $2^j$  et orientation  $k = H, V, D$  de la transformée en ondelettes. Cette transformée d'Alpert introduit un facteur d'échelle  $2^\ell$  qui définit l'élongation de la bandelette parallèlement au flot et un paramètre de position  $n$ . Ainsi la fonction bandelette  $b_{j,\ell,k}(x)$  hérite de la régularité de l'ondelette  $\psi_{j,P}^k(x)$ .

#### 1.4.1 Segmentation en quadtree :

Une segmentation en quadtree de  $[0,1]^2$  est obtenue par subdivisions successives du carré initial en quatre carrés de tailles égales. La figure (1.15) montre les étapes de subdivision menant à la construction d'un quadtree, ainsi que l'arbre quaternaire permettant de représenter cette subdivision.



**Figure 1.15 :** Construction d'un quadtree par subdivisions successives.

Ceci mène à une segmentation de  $[0,1]^2$  en des carrés de tailles dyadiques. On cherche une segmentation qui encapsule les courbes de singularité par un ensemble de carrés de taille  $b$  et qui remplissent les zones restantes par des grands carrés. Pour une segmentation  $Q_j^k$  de  $[0,1]^2$  en carrés de largeurs dyadiques plus grandes que  $2^j$ , nous répartissons ces carrés en plusieurs groupes :

- L'ensemble des carrés de largeur  $b$  contenant un contour. Par définition, un carré contenant un contour est un carré distant de moins de  $K_{S_j}$  d'une et une seule courbe de contour.
- L'ensemble des carrés contenant un contour de largeur inférieure à  $b$ .
- L'ensemble des carrés contenant un coin. Par définition, un tel carré contient une jonction de deux courbes.
- L'ensemble des carrés réguliers, qui sont les carrés restants.

Idéalement, nous souhaiterions n'avoir que des carrés réguliers ainsi que des carrés de taille  $b$  contenant une jonction. Mais des contraintes topologiques (comme des croisements de contours et des jonctions) et les variations de courbures (par exemple un contour horizontal qui devient vertical) nous obligent à subdiviser certains carrés de taille  $b$  en des carrés plus petits. Cependant, comme montré par Le Pennec et Mallat [21], on peut construire un quadtree possédant un faible nombre de carrés de petite taille. La figure (1.16) montre un quadtree adapté à une fonction géométrique.



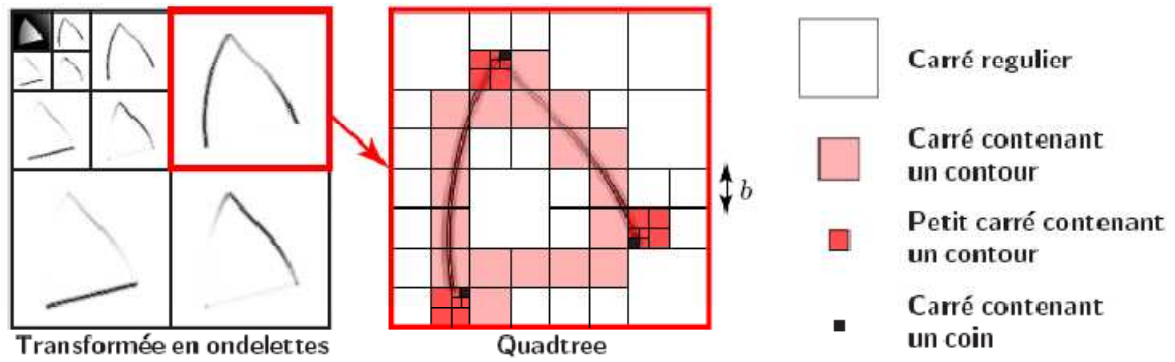


Figure 1.16 : Un exemple de quadtree adapté.

### 1.4.2 Meilleure approximation en bandelettes :

La base de bandelettes dépend de la géométrie du flot définie par une segmentation des coefficients d'ondelettes et un choix de flot polynomial dans chaque segment (ou pas de flot). Le but étant d'optimiser l'approximation de chaque image  $f$ , la meilleure géométrie du flot est celle qui produit la meilleure approximation  $f_M$  de  $f$  avec  $M$  paramètres.

Soit  $M_G$  le nombre de paramètres qui spécifient la géométrie  $\Gamma$  du flot définit une base de bandelettes  $\{b_{\ell,j,n}^k\}_{k,\ell,j,n}$  de  $L^2([0,1]^2)$ ,  $M_S$  est le nombre de paramètres de segmentation nécessaire pour la description des quadtrees  $\{Q_j^k\}_{j,k}$  et  $M_B$  le nombre de coefficients de bandelettes vérifiant  $|\langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle| > T$  pour un seuil  $T$ . L'approximation:

$$f_M = \sum_{|\langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle| > T} \langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle b_{\ell,j,n}^k \quad (1.22)$$

est déterminée par  $M = M_B + M_G + M_S$  paramètres. Pour un seuil  $T$  fixé, parmi toutes les géométries et donc toutes les bases de bandelettes possibles, il faut trouver une base qui induise une erreur  $\|f - f_M\|^2$  petite pour un petit nombre  $M = M_B + M_G + M_S$  de paramètres. Ceci est un problème de recherche de « meilleure base orthogonale », qui se résout en minimisant le lagrangien :

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma), T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle| > T} |\langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle|^2 + MT^2 \quad (1.23)$$

Un théorème d'approximation [14,17] montre que si  $f$  est uniformément  $C^\alpha$  en dehors d'un ensemble de courbes qui sont  $C^\alpha$  alors la meilleure base de bandelettes qui minimise le lagrangien (1.4) définit une approximation  $f_M$  qui satisfait

$$\|f - f_M\|_{L^2}^2 \leq CM^{-\alpha} \quad (1.24)$$

Ce résultat reste valable si  $f$  est régularisée par un noyau de lissage correspondant aux effets de diffraction lors de l'acquisition de l'image. Il est à noter que l'approximation par bandelettes ne nécessite pas de connaître la valeur de  $\alpha$  tant que  $\alpha < p$ , où  $p$  est le nombre de moments nuls de la base d'ondelettes orthogonales et de la transformée d'Alpert. Cette adaptivité est la clef de l'efficacité des bandelettes pour des images naturelles.

Un algorithme de recherche de meilleure base permet de calculer la meilleure base bandelettes associée à une image  $f$  en  $O(NT^{(p-1)^2})$  opérations où  $N$  est le nombre total de pixels de l'image [15,17].

### 1.4.3 Construction du dictionnaire de bandelettes :

Soit  $2^j$  une orientation et  $k$  une orientation fixée. Le dictionnaire  $\mathcal{D}_j^k$  de bandelettes discrètes est composé des bases  $\mathcal{B}(\Gamma_k^j)$  obtenues à l'aide de toutes les segmentations possibles en quadtree  $Q_j^k$  et de toutes les géométries approchées  $\{\tilde{\gamma}_S\}$  à l'intérieur des carrés de la segmentation.

En forçant les géométries  $\tilde{\gamma}_S$  à appartenir à  $\mathcal{G}_{T^2}(S)$ , on définit un dictionnaire fini  $\mathcal{D}_{j,T^2}^k$  de bases de bandelettes discrètes

$$\mathcal{D}_{j,T^2}^k \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{B}(\Gamma_k^j) \in \mathcal{D}_j^k \setminus \Gamma_k^j = (Q_j^k, \{\tilde{\gamma}_S\}) \text{ et } \forall S \in Q_j^k, \tilde{\gamma}_S \in \mathcal{G}_{T^2}(S)\}.$$

On peut transformer un ensemble  $\{\mathcal{B}(\Gamma_k^j)\}_{k,j \leq 0}$  de bases de bandelettes discrètes en une unique base de bandelettes de  $L^2([0,1]^2)$ . L'union de toutes ces bases forme un dictionnaire de base de  $L^2([0,1]^2)$ . Pour obtenir un dictionnaire de taille finie, on impose de plus que, pour toutes les échelles  $2^j < T^2$ , on ait  $\mathcal{B}(\Gamma_k^j, T) = \Delta_j([0,1]^2)$ , où  $\Delta_j([0,1]^2)$  est la base de Dirac définie à l'équation (1.20). Le dictionnaire résultant  $\mathcal{D}_{T^2}$  est ainsi défini par:

$$\mathcal{D}_{T^2} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \forall 2^j < T^2, & \mathcal{B}(\Gamma_k^j) = \Delta_j([0,1]^2) \\ \mathcal{B}(T) \setminus & \forall 2^j \geq T^2, \quad \mathcal{B}(\Gamma_k^j) \in \mathcal{D}_{j,T^2}^k \end{cases}$$

On note que l'on a ajouté un symbole  $\Xi$  à l'ensemble de géométries dans le but de prendre en compte d'une manière transparente le cas où le carré  $S$  ne contient pas de géométrie. Dans ce cas, on fixe  $\mathcal{B}(S, \Xi) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_j(S)$  comme étant la base de Dirac définie par

$$\Delta_j(S) = \{\delta_n\}_{(2^j n) \in S} \quad \text{où} \quad \delta_n[m] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \quad (1.25)$$

#### 1.4.4 Compression dans une meilleure base de bandelettes :

Soit  $T$  un pas de quantification fourni par l'utilisateur. Plus  $T$  est élevé, plus le nombre de coefficients de bandelettes mis à zéro lors de l'approximation va être grand et plus la compression sera agressive.

Pour compresser une fonction  $f$  dans une base de bandelettes  $\mathcal{B}(\Gamma) = \{\tilde{\Psi}_\mu\}_\mu \in \mathcal{D}_{T^2}$ , on quantifie et code ses coefficients transformés et on code également les paramètres géométriques  $\Gamma = \{\Gamma_j^k\}$  qui décrivent la base, où  $\Gamma_j^k = (Q_j^k, \{\tilde{\gamma}_S\})$ . Ceci donne lieu à une fonction reconstruite [17, 21]

$$f_R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu} Q_T(\langle f, \tilde{\Psi}_\mu \rangle) \tilde{\Psi}_\mu \quad (1.26)$$

où  $Q_T$  le quantificateur uniforme est défini par

$$Q_T(x) = qT, \quad \text{si} \quad (q - 1/2)T \leq x \leq (q + 1/2)T \quad (1.27)$$

et

$$R \stackrel{\text{def}}{=} R_B + R_S + R_G = \sum_{j,k} (R_{jB}^k + R_{jS}^k + R_{jG}^k) \quad (1.28)$$

est le nombre de bits nécessaire pour le codage de  $f_R$ ,

- $R_{jB}^k$  est le nombre de bits nécessaire pour coder les coefficients de bandelettes

$$\langle f, \tilde{\Psi}_\mu \rangle = \langle f_j^k, \Psi_\mu \rangle$$

pour une seule échelle  $2^j$  et orientation  $k$ ,

- $R_{jS}^k$  est le nombre de bits nécessaire pour coder la segmentation en quadtree  $Q_j^k$
- $R_{jG}^k$  est le nombre de bits nécessaire pour coder la géométrie approchée quantifiée  $\tilde{\gamma}_S$  à l'intérieur de chaque carré  $S$  d'un quadtree  $Q_j^k$ .

On obtient le résultat de compression suivant

$$\|f - f_R\|_{L^2}^2 \leq C \log_2(R)^\alpha R^{-\alpha} \quad (1.29)$$

où  $R = R_B + R_S + R_G$  est le nombre de bits nécessaire au codage de  $f_R$  et  $C$  est une constante, qui ne dépend que de  $f$ .

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a décrit la construction des bases de bandelettes première et seconde génération.

La géométrie utilisée dans la construction des bandelettes est basée non pas sur la notion de contours mais sur celle d'un champ de vecteur indiquant une direction de régularité locale des images. Ce flot géométrique est simplifié par une segmentation adaptative en carré et des conditions de parallélisme. L'optimisation de cette géométrie pour une application donnée s'obtient par un algorithme rapide de recherche de meilleure base et conduit à une amélioration dans le cadre du codage par rapport aux ondelettes.

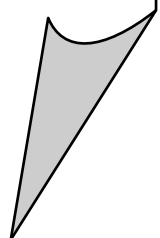
La construction de bandelettes de seconde génération améliore la construction originale des bases de bandelettes de Le Pennec et Mallat [11] car elle est construite directement sur le domaine des coefficients d'ondelettes.

Enfin, l'étape de bandelétisation est implémentée par une cascade d'opérateurs orthogonaux. Ceci permet d'obtenir des bases à la fois orthogonales et formées de fonctions régulières. L'orthogonalité permet de contrôler de façon exacte l'erreur d'approximation et la régularité des fonctions assure une reconstruction plus agréable pour l'œil.

Toutes ces propriétés sont importantes dans de nombreuses applications, comme par exemple la compression d'images.

## Chapitre 2

# **Transformée en bandelettes par groupements**



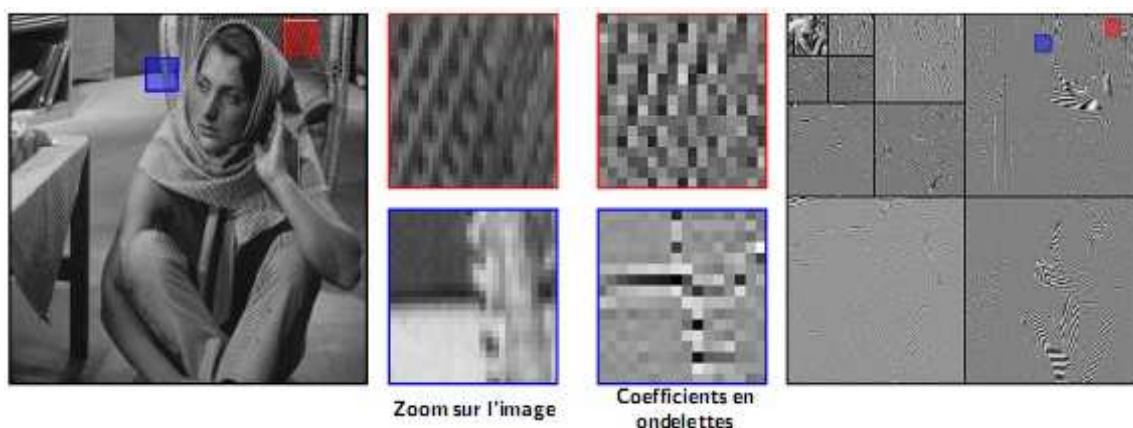
## 2. Transformée en bandelettes par groupements (blocs)

### 2.1 Introduction

Plutôt que d'utiliser une transformée en bandelettes orthogonales classique, qui transforme tous les coefficients instantanément, Gabriel Payré [14] a développé une stratégie qui consiste à transformer chaque groupe de coefficients de manière indépendante. Ainsi, l'information n'est pas diffusée à travers les groupes, ce qui garantit une meilleure compression, la transformée en bandelettes par groupements ou blocs. Dans ce chapitre, nous décrivons en détail toutes les étapes de cette transformée.

### 2.2 Géométrie de 16 coefficients d'ondelettes

La géométrie des images naturelles est complexe. il y a beaucoup d'effets chaotiques dûs aux interactions entre la grille d'échantillonnage et une géométrie courbe et variable comme on peut le voir sur l'image de la figure (2.1).



**Figure 2.1** : Configurations complexes de coefficients d'ondelettes.

La difficulté rencontrée dans cette nouvelle transformée est le choix de la taille de blocs qui permet d'obtenir les meilleurs résultats en compression. Les corrélations entre les coefficients d'ondelettes voisins sont différentes selon les sous bandes, il est rare de pouvoir exploiter, dans une image typique, une régularité géométrique sur une longueur de plus d'une dizaine de pixels. Pour résoudre ce problème, plusieurs tailles de blocs ont été proposées dans [24] : des blocs de taille  $(4 \times 8)$ ,  $(4 \times 16)$ ,  $(8 \times 8)$ ,  $(8 \times 16)$ ,  $(16 \times 16)$  et  $(4 \times 4)$ .

Selon les résultats obtenus dans [24], on constate que la meilleure taille des blocs transformés est  $(4 \times 4)$ .

Le traitement des coefficients d'ondelettes en groupes de  $(4 \times 4)$  comporte plusieurs avantages :

- Ils contiennent les corrélations typiques que l'on trouve dans les images naturelles.
- Le fait de ne pas avoir de quadtree simplifie la procédure de codage.
- La concentration sur 16 coefficients, permet de mieux comprendre la nature des redondances des coefficients d'ondelettes.

## 2.3 La transformée en bandelettes par blocs ou groupements

Le principe de la transformée en bandelettes par groupements est de décomposer les sous bandes de coefficients d'ondelettes en blocs de (4×4) coefficients. Un choix de groupements est défini (un dictionnaire). Chaque bloc de coefficients d'ondelettes est transformé par ce choix de groupements. La meilleure représentation de ce bloc en termes de débit-distorsion est retenue pour la compression.

### 2.3.1 Construction du dictionnaire de bases

#### A. Bases de bandelettes par groupements directionnels

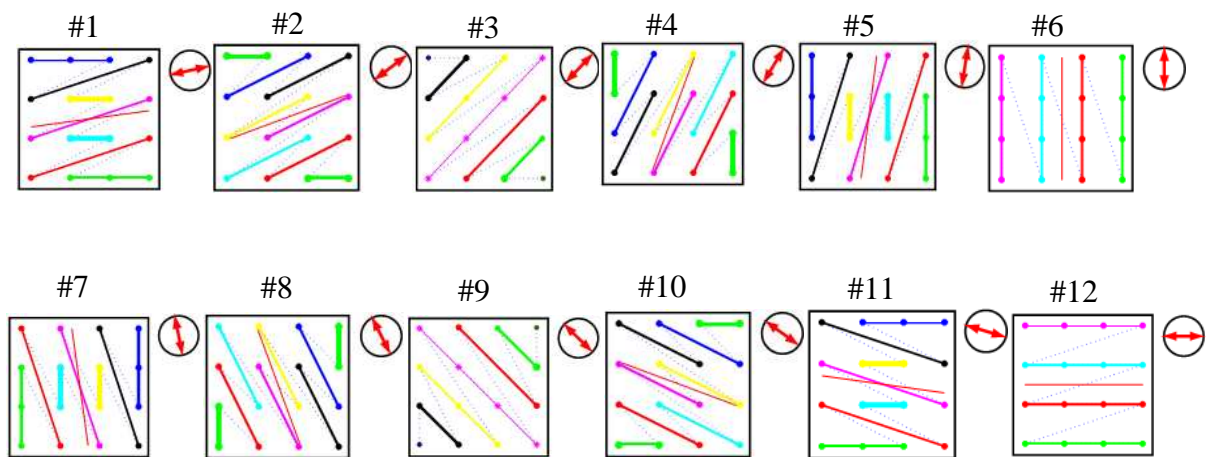
La construction d'un ensemble de groupement optimale est un problème ouvert. Ainsi, Gariel Peyré a utilisé empiriquement un groupement présenté sur la figure (2.2).

Douze directions discrètes sont définies sur une grille de (4 × 4) pixels dans le tableau (2.1). La projection des coefficients d'ondelettes de chaque bloc est effectuée sur une de ces directions. La meilleure direction désirable est celle qui donne un terme débit-distorsion minimal. Certains pixels de la grille (4 × 4) se retrouvent isolés. Ils sont regroupés suivant la direction horizontale ou verticale la plus proche de la direction des autres groupes.

Configuration	#1	#2	#3	#4	#5	#6
Angle (rad)	$\text{atan}(1/3)$	$\text{atan}(1/2)$	$\pi/4$	$\text{atan}(2)$	$\text{atan}(3)$	$\pi/2$
Angle (°)	18,4	26,6	45	63,4	71,6	90

Configuration	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Angle (rad)	$-\text{atan}(3)$	$-\text{atan}(2)$	$-\pi/4$	$-\text{atan}(1/2)$	$-\text{atan}(1/3)$	0
Angle (°)	-71,6	-63,4	-45	-26,6	-18,4	0

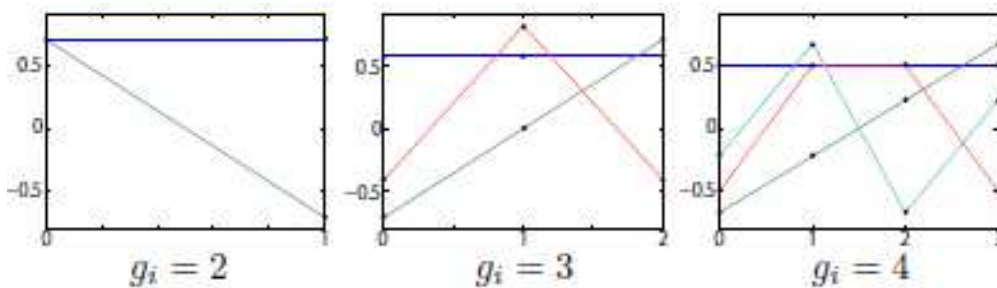
**Tableau 2.1 :** Angles correspondant aux différentes directions des groupes.



**Figure 2.2 :** 12 Configurations de groupes directionnels.

Plus précisément, la géométrie est décrite par un ensemble de groupes  $G$ , constitué de  $N_G$  groupes  $G = \{G_i\}_{i=1}^{N_G}$ . chaque groupe  $G_i$  contient  $g_i$  pixels.

Les nouvelles bases de bandelettes directionnelles sont définies avec de polynômes de Legendre discrets de degré 0 à  $g_i - 1$ . On .La figure(2.3) représente les bases de polynômes discrets de Legendre .



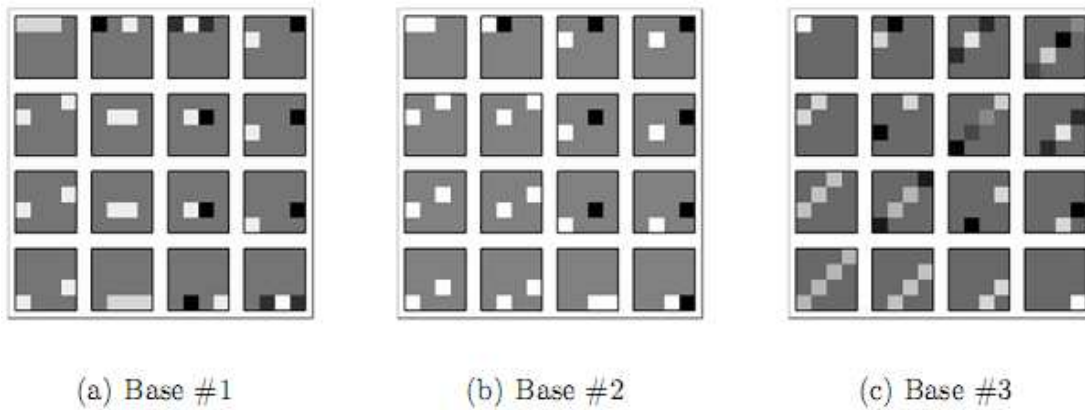
**Figure 2.3 :** Bases de polynômes discrets de Legendre.

Les groupes peuvent contenir de un à quatre pixels, alors quatre bases orthonormales de polynômes discrets sont définies.

Par exemple, dans le cas où  $g_i = 1$ , le groupe n'est constitué que d'un pixel. Il n'existe évidemment qu'une seule base dans  $\mathbb{R}^1$ . Dans le cas où  $g_i = 2$ , on obtient la base de Haar. Elle correspond à la moyenne et à la différence des pixels (les deux vecteurs normalisés de cette base sont  $([1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$  et  $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ ). Les cas où  $g_i > 2$  sont plus



difficiles à interpréter bien qu'il y ait toujours une composante continue correspondant à la moyenne des pixels.



**Figure 2.4 :** Base de bandelettes directionnelles sur  $\mathbb{R}^{16}$ .

La figure(2.4) représente les bases de bandelettes directionnelles  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  sur l'espace  $\mathbb{R}^{16}$  correspondantes aux directions #1, #2 et #3 présentées sur la figure(2.2).

Donc, Comme 12 directions discrètes sont définies pour des blocs de taille  $(4 \times 4)$  sur la figure(2.2), on obtient 12 bases directionnelles, chaque base est constituée de 16 vecteurs représentés sous forme de blocs  $(4 \times 4)$ .

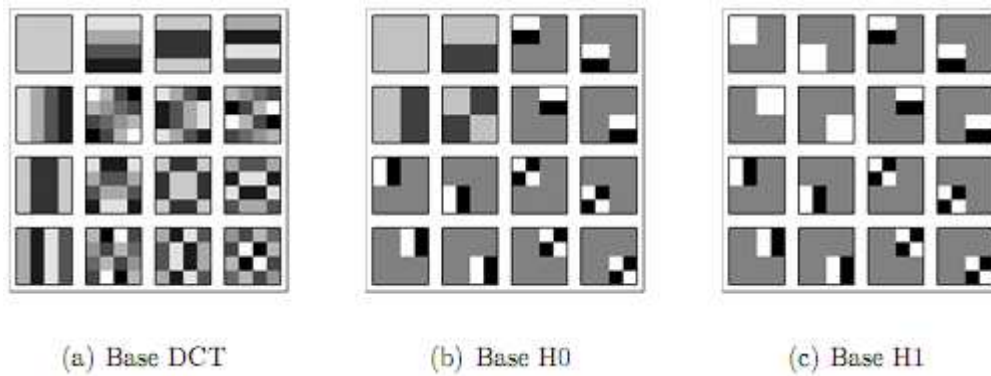
### B. Bases complémentaires :

L'utilisation d'un dictionnaire composé seulement de 12 bases directionnelles n'est plus suffisante vu que des configurations ne sont pas prises en compte. On doit ajouter donc des bases supplémentaires. La base de DCT et deux bases de Haar notées H0 et H1 sont utilisées comme le montre la figure(2.5).

Le dictionnaire de bandelettes est donc composé de 15 bases : 12 bases directionnelles et 3 bases complémentaires. A ce dictionnaire s'ajoute la base canonique de  $\mathbb{R}^{16}$ . La transformée dans cette base est l'identité. Elle correspond en fait à une absence de transformée.

Alors, le dictionnaire de bases de bandelettes  $\mathcal{D}$  contient  $N_B = 15$  bases notées  $B_b$  avec

$b \in [1, N_B]$ . La base canonique sera identifiée par l'indice  $b = 0$  dans la suite.



**Figure 2.5** : Bases complémentaires sur  $\mathbb{R}^{16}$ .

### 2.3.2 Transformée en bandelettes d'un bloc de coefficients d'ondelettes :

Pour obtenir les coefficients de bandelettes, on fait la projection de chaque bloc de coefficients d'ondelettes sur les vecteurs de la base de bandelettes.

Soit un dictionnaire  $\mathcal{D}$  contient  $N_B + 1$  bases  $B_b$ ,  $M$  est la dimension de l'espace. On note  $\phi_m^b$  les  $M$  vecteurs de la base  $B_b$  avec  $m \in [1, M]$ .

Alors, on cherche dans le dictionnaire  $\mathcal{D}$  la base  $B_b$  qui permet d'obtenir la meilleure représentation du vecteur  $f$  des coefficients d'ondelettes pour la compression. La transformée en bandelettes du bloc de coefficients d'ondelettes  $f$  est effectuée par la relation suivante :

$$f^b = \sum_{m=1}^M \langle f, \phi_m^b \rangle \phi_m^b \quad (2.1)$$

avec  $f^b$  sont les différentes représentations du vecteurs  $f$  dans les  $N_B + 1$  bases  $B_b$  du dictionnaire  $\mathcal{D}$ . On note  $a_b[m]$  les coefficients de bandelettes obtenus par le produit scalaire entre le vecteur  $f$  et les vecteurs de la base  $B_b$ .

$$a_b[m] = \langle f, \phi_m^b \rangle \quad (2.2)$$

La figure(2.6) représente un exemple de la transformée d'un bloc de  $(4 \times 4)$  coefficients d'ondelettes dans la base directionnelle #3.

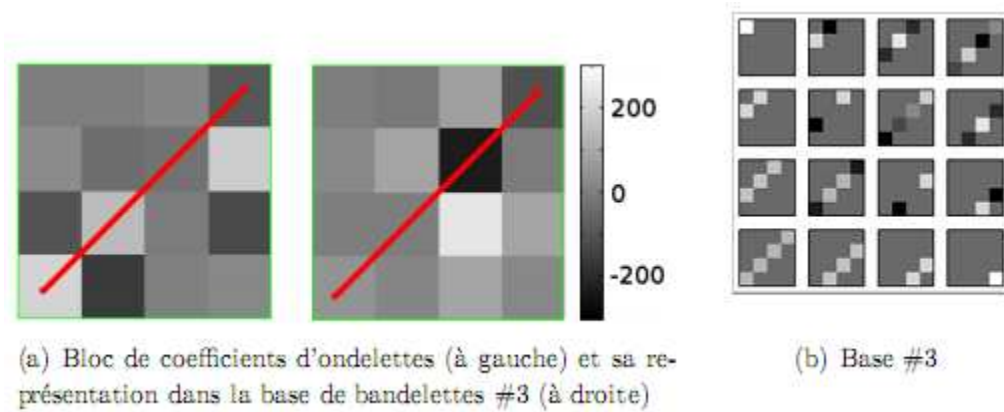


Figure 2.6 : Exemple de transformée en bandelettes dans la base #3.

### 2.3.3 Sélection de la meilleure base de bandelettes :

La figure (2.7) illustre les étapes principales de la transformée d'un bloc de coefficients d'ondelettes  $f$ . Ce bloc est d'abord représenté dans toutes les bases  $B_b$  du dictionnaire  $\mathcal{D}$ . Ensuite, l'opération de la quantification scalaire du blocs transformés  $f^b$  est effectuée. Enfin, la meilleure transformée du blocs de coefficients quantifiés  $f_q^{b*}$  en terme de débit et de distorsion est sélectionnée parmi toutes les transformées du blocs quantifiés  $f_q^b$ .

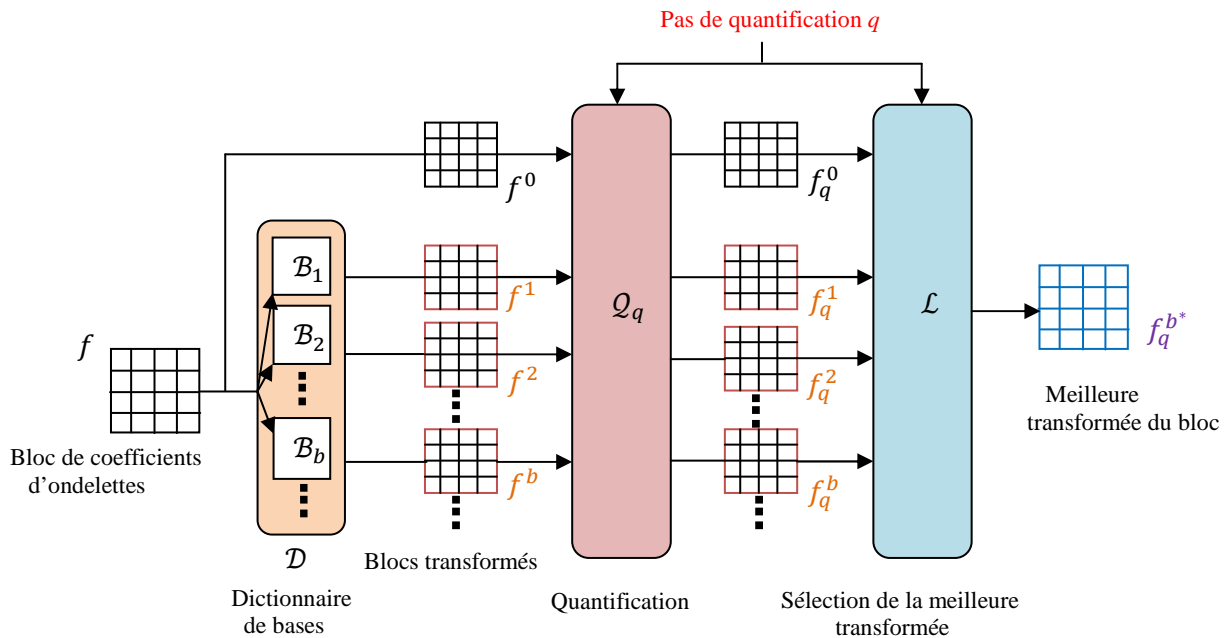


Figure 2.7 : Etapes de la transformée en bandelettes d'un bloc  $f$  de coefficients d'ondellettes.

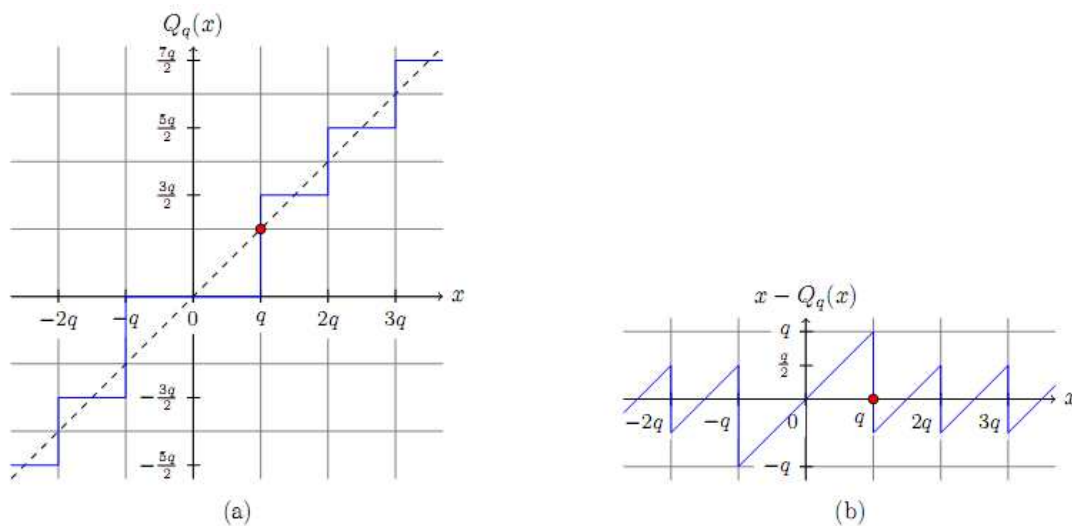
L'indice  $b^*$  est transmis afin que le codeur puisse correctement inverser la transformée en bandelettes. Le bloc de coefficients d'ondelettes qui ne nécessite pas la transformée en bandelettes  $f^0$  est présenté dans la base d'identité ( $b = 0$ ).

▪ **Quantification scalaire :**

A cette étape, les coefficients de bandelettes  $a_b[m]$  sont quantifiés par un quantificateur scalaire uniforme de pas  $q$ :

$$Q_q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < q \\ \text{signe}(x)(k + 1/2)q & \text{si } kq \leq |x| \leq (k + 1)q. \end{cases} \quad (2.3)$$

Cette quantification est ordinairement employée pour la compression en ondelettes. Comme la distribution des coefficients de bandelettes est proche de la distribution des coefficients d'ondelettes, cette quantification est aussi presque optimale pour les coefficients de bandelettes (la figure (2.8)). On note  $f_q^b = Q_q(f^b)$  la représentation quantifiée du bloc  $f$  dans la base  $b$ .



**Figure 2.8 :** (a) Quantification scalaire quasi-uniforme. (b) Erreur de quantification.

▪ **Compromis débit-distorsion :**

Pour effectuer une transformée en bandelettes efficace du point de vue de la compression, chaque bloc de coefficients d'ondelettes doit être transformé dans la base  $B_b$  du dictionnaire  $\mathcal{D}$  de bandelettes qui permet la minimisation d'un critère de débit-distorsion, un Lagrangien est employé.

$$\mathcal{L}(f_q^b) = D(f_q^b) + \lambda R(f_q^b) \quad (2.4)$$

où  $D(f_q^b)$  est l'erreur quadratique due à la quantification de la transformée en bandelettes  $f^b$ , elle est donnée par :

$$D(f_q^b) = \sum_{m=1}^M |a_b[m] - Q_q(a_b[m])|^2 \quad (2.5),$$

$\lambda$  est le multiplicateur du Lagrangien optimisé pour la compression. Dans [11], Le Pennec et Mallat donnent une expression théorique du multiplicateur de Lagrangien  $\lambda$  qui ne dépend que du pas de quantification utilisé :

$$\lambda = \frac{3}{4\gamma_0} q^2 \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = 7. \quad (2.6)$$

$R(f_q^b)$  est une estimation du débit nécessaire au codage des coefficients quantifiés de  $f_q^b$ , Le débit  $R(f_q^b)$  s'exprime par :

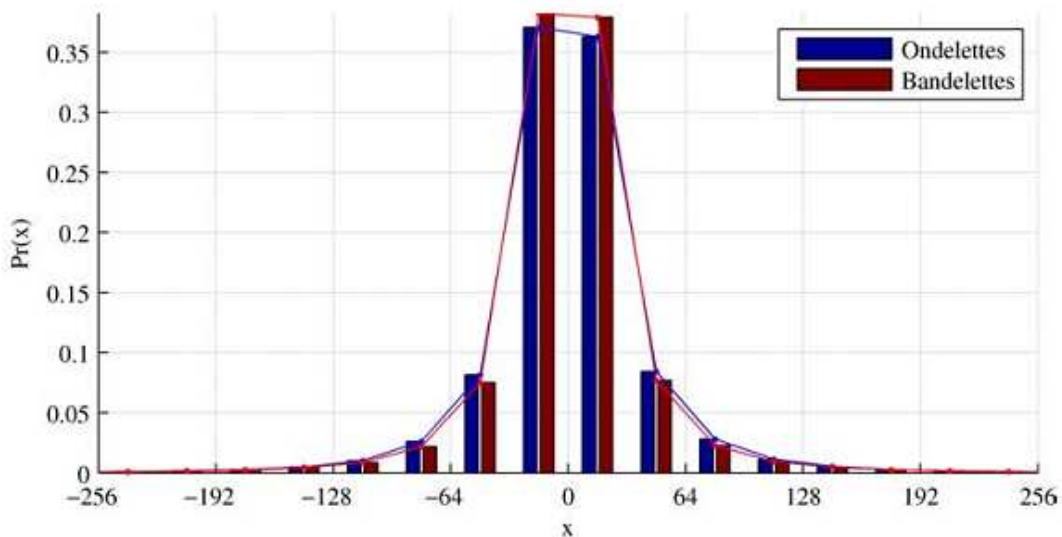
$$R(f_q^b) = R_c(f_q^b) + R_b \quad (2.7)$$

où  $R_c(f_q^b)$  est le débit nécessaire au codage des coefficients quantifiés de la représentation  $f_q^b$  et  $R_b$  est le débit nécessaire à la signalisation de la base de bandelettes sélectionnée parmi les  $(N_B + 1)$  bases du dictionnaire.

Le terme  $R_c(f_q^b)$  est estimé par le débit des coefficients de bandelettes quantifiés :

$$R_c(f_q^b) = - \sum_{m=1}^M \log_2 \Pr(Q_q(a_b[m])) \quad (2.8)$$

Les probabilités  $\Pr(Q_q(a_b[m]))$  sont estimées à partir de l'histogramme des coefficients d'ondelettes dans chaque sous-bande de la transformée en ondelettes mais les probabilités des coefficients de bandelettes ne peuvent se faire qu'après l'estimation du débit  $R(f_q^b)$  puisque les coefficients de bandelettes dépendent de la sélection de la meilleure représentation de chaque bloc. La figure (2.9) représente les histogrammes de la transformée en ondelettes et en bandelettes.



**Figure 2.9** : Histogrammes de la transformée en ondelettes et en bandelettes.

Le second terme  $R_b$  est estimé par :

$$R_b = -\log_2 \Pr(b) \text{ avec } \Pr(b) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } b = 0 \\ 0,5/N_B & \text{si } b \in [1, N_B] \end{cases} \quad (2.9)$$

La base identifiée par l'indice  $b = 0$  est la base canonique. Cet indice permet d'identifier les blocs de coefficients d'ondelettes qui non pas transformés en bandelettes. Les autres indices  $b \in [1, N_B]$  identifient les bases de bandelettes utilisées pour transformer les autres blocs de coefficients d'ondelettes.

### 2.3.4 Calcul théorique et empirique du multiplicateur de Lagrangien optimal

Le recherche d'un multiplicateur optimal d'un Lagrangien est un problème central de la compression des images. Le Pennec et Mallat [11] ont fourni une approximation théorique du multiplicateur de lagrangien  $\lambda$  en fonction du pas de quantification  $q$  permettant de minimiser  $D(R) + \lambda R$  pour tout pas de quantification. Pour un Lagrangien minimal l'expression suivante s'annule.

$$\frac{\partial D}{\partial q} + \lambda \frac{\partial R}{\partial q} = 0 \quad 2.10$$

Une expression de la variation de la distorsion en fonction de la variation du pas de quantification est montrée dans [11] dépend essentiellement de la variation du nombre  $M$  des coefficients non nuls.

$$\frac{\partial D}{\partial q} \approx -\frac{3q^2}{4} \frac{\partial M}{\partial q} \quad 2.11$$

Le Pennec et Mallat ont utilisé une estimation du débit [13] valable pour la plupart des images transformées dans une base de cosinus discrets ou ondelettes. Cette estimation montre que pour la plupart des images, le nombre total de bit  $R$  nécessaire pour coder les coefficients quantifiés est quasiment proportionnel au nombre de coefficients quantifiés non nuls  $M$ .

$$R \approx \gamma_0 M \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = 7 \quad (2.12)$$

où  $M$  est le nombre de coefficients quantifiés non nuls. Cette expression est aussi valable pour les images transformées dans la base de bandelettes [11].

Finalement, l'expression du multiplicateur de Lagrangien est obtenue par la combinaison des expressions (2.10), (2.11) et (2.12)

$$\lambda = \frac{3}{4\gamma_0} q^2 \quad 2.13$$

$$\frac{3}{4\gamma_0} = 0,10714 \quad \text{pour} \quad \gamma_0 = 7.$$

Cette expression théorique du multiplicateur de Lagrangien est optimale pour la compression des images [11,14,15].

DELAUNAY dans ses travaux [24] a cherché empiriquement une valeur optimale pour le multiplicateur de Lagrangien. Il déduit une formule empirique à partir des résultats donnés par la recherche exhaustive des multiplicateurs de Lagrangien optimales sur plusieurs images et pour différents pas de quantification.

DELAUNAY trouve que  $\lambda$  est proportionnel à  $q^2$  mais avec un coefficient multiplicatif différent de celui donné dans l'équation (2.13). La nouvelle formule empirique du multiplicateur de Lagrangien est :

$$\lambda \approx 0,15q^2 \quad (2.14)$$

Dans le chapitre suivant nous mènerons une comparaison entre le Lagrangien obtenu par une formule théorique et celui obtenu par une formule empirique dans le but d'améliorer les résultats de compression d'images.



## 2.4 Conclusion

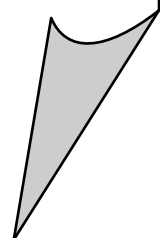
La transformée en bandelettes par groupements permet d'améliorer les résultats en compression par rapport à la transformée en ondelettes.

Dans ce chapitre, on a décrit les principales étapes de la transformée en bandelettes par groupements, un dictionnaire de 15 bases est défini, chaque bloc de coefficients d'ondelettes est présenté dans ces bases du dictionnaire, le choix de la base de bandelettes utilisée pour transformer chaque bloc est issu d'un critère débit-distorsion obtenu par la minimisation d'un Lagrangien.

Deux expressions (2.13) et (2.14) du multiplicateur du Lagrangien sont présentées, une formule est théorique et l'autre est empirique. Ces deux expressions sont différentes mais elles sont optimales pour la compression d'images.

## Chapitre 3

# **SIMULATION, RESULTATS ET DISCUSSIONS**



### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous expliquons l'algorithme de la transformée en bandelettes et pour rendre l'explication plus claire, on expose une description générale de l'algorithme, puis on explique en détails chaque étape individuellement.

L'algorithme inverse en découle immédiatement, puisqu'il ne nécessite pas la recherche de la meilleure base et qu'il consiste à inverser les transformées en bandelettes ainsi que les transformées en ondelettes sur les carrés des quadrees.

Enfin, pour tester l'efficacité de cet algorithme dans la compression, cet algorithme est appliqué sur quelques types d'images, et pour justifier ses performances, les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par algorithmes d'ondelettes classiques et le standard JPEG 2000.

Avant détaillé l'algorithme, on présente les étapes nécessaires de la compression de chaque système de compression d'images fixes.

### 3.2 Compression d'images fixes

#### 3.2. Etapes de compression :

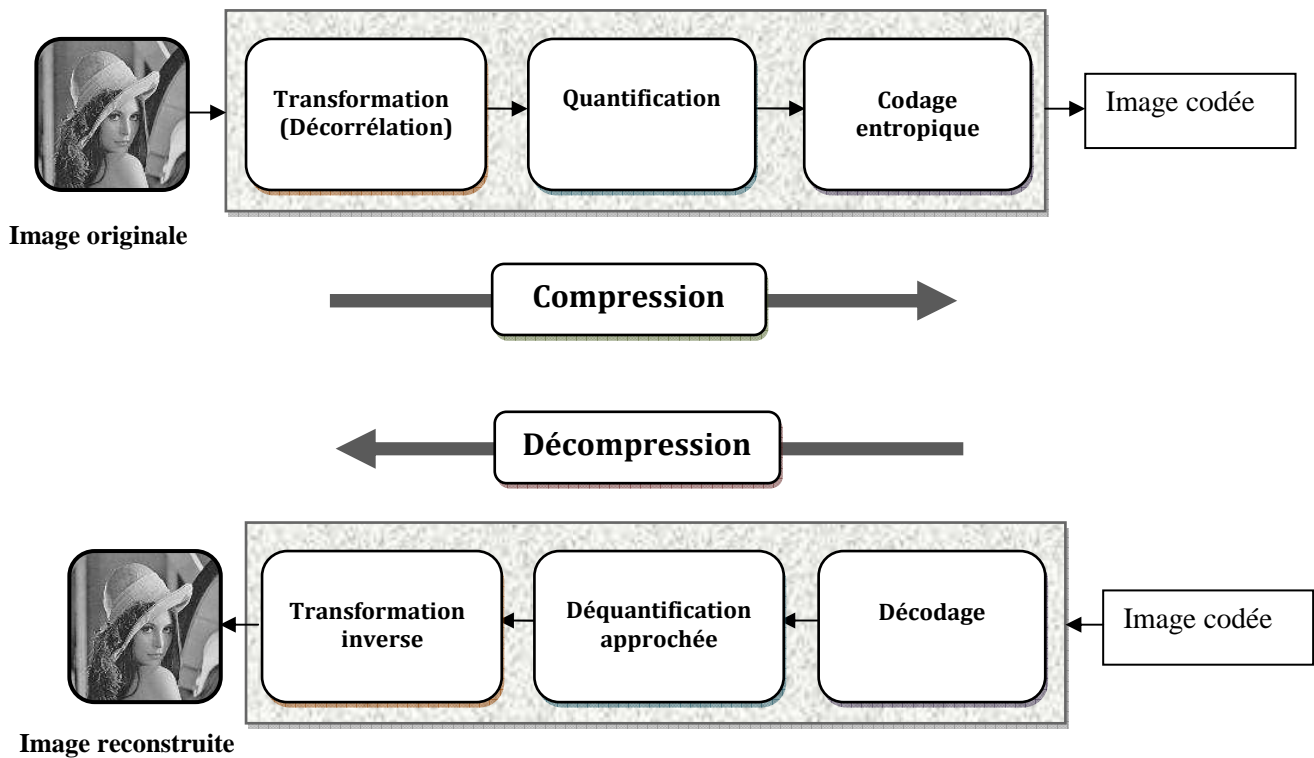
Le schéma d'un système de compression classique est représenté sur la figure (3.1). La première étape est la Transformation (Décorrélation). Elle permet d'exploiter les redondances statistiques de l'image. Ensuite vient l'étape de quantification. C'est dans cette étape que la perte d'information a lieu. Enfin, le codage entropique des données quantifiées constitue la dernière étape. Elle permet d'organiser le train binaire en compressant les données sans altérer l'information.

#### **Transformation (Décorrélation) :**

La décorrélation a pour objectif de réduire le volume d'information, elle consiste à transformer les pixels initiaux en un ensemble de coefficients moins corrélés, c'est une opération réversible.

#### **Quantification :**

La quantification des coefficients a pour but de réduire le nombre de bits nécessaires pour leurs représentations. Elle représente une étape clé de la compression. Elle approxime chaque valeur d'un signal par un multiple entier d'une quantité  $q$ , appelée quantum élémentaire ou pas de quantification. Elle peut être vectorielle ou scalaire.



**Figure 3.1 :** Schéma général d'un système de compression.

### Le codage entropique :

Le codage entropique permet la compression des coefficients quantifiés en générant un train binaire de longueur proche de la limite basse théorique de Shannon[27]. Plusieurs types de codage entropique existent. Le codage par Run-Length. Le codage par dictionnaire comme LZW (Lempel-Ziv-Welch) est utilisé dans le format d'image GIF. Le codage par statistique comme le codage de Huffman est utilisé dans le format JPEG. Enfin, un codage arithmétique est effectué dans le standard JPEG2000 et les Bandelettes.

### 3.2.2 Mesurer les performances en compression

- ❖ **Taux de compression :** Le taux de compression est le rapport entre la taille de l'image originale et la taille de l'image compressée en bits.
- ❖ **Compromis débit-distorsion et critères de qualité :** Le taux de compression n'est pas le seul critère de performance d'un système de compression. Dans le cas d'une compression avec pertes, la qualité de l'image reconstruite doit aussi être prise en compte. Il y a donc un compromis à trouver entre le taux de compression et la qualité. On parle de compromis débit-distorsion. La distorsion est une mesure de l'erreur commise entre l'image originale

et l'image reconstruite. Pour les mesures de distorsion, on utilise l'erreur quadratique moyenne  $EQM$  entre l'image originale  $I_O$  et l'image compressée  $I_C$  de taille  $M \times N$  :

$$EQM(I_O, I_C) = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (I_O(i, j) - I_C(i, j))^2. \quad (3.1)$$

Pour les mesures de qualité, on utilise le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) en décibels

défini à partir de l'  $EQM$  par :

$$PSNR(I_O, I_C) = 20 \log_{10} \left( \frac{2^r - 1}{\sqrt{EQM(I_O, I_C)}} \right) \quad (3.2)$$

où  $r$  est la résolution numérique de l'image.

❖ **Complexité** : Un troisième critère de performance d'un système de compression est la complexité. La complexité calculatoire peut être mesurée par le temps d'exécution du processus de compression ou en nombre d'opérations par pixel : c'est le nombre moyen d'opérations qui sont nécessaires à la compression de l'image.

### 3.3 Algorithme de transformée en bandelettes :

Le but principal de la transformation en bandelettes est la compression d'images. On commence par effectuer une transformée en ondelettes de l'image et on analyse à chaque niveau les trois matrices de composantes obtenues :  $\{\psi_j^H, \psi_j^V, \psi_j^D\}$  au niveau  $j$ .

La première étape consiste à subdiviser la matrice à analyser en carrés dyadiques, afin d'étudier les différentes zones. On divise donc l'image en quatre carrés, qu'on redivise en quatre et ainsi de suite, jusqu'à la taille minimale désirée (4 éléments au minimum).

On commence par analyser les carrés de taille minimale, puis on remonte jusqu'à la taille maximale définie par l'utilisateur. Pour chaque carré, on effectue la projection suivant différentes directions (1<sup>ère</sup> étape de bandelétisation). Pour évaluer la meilleure direction, on utilise un facteur de type Lagrangien, permettant de diminuer l'erreur résiduelle.

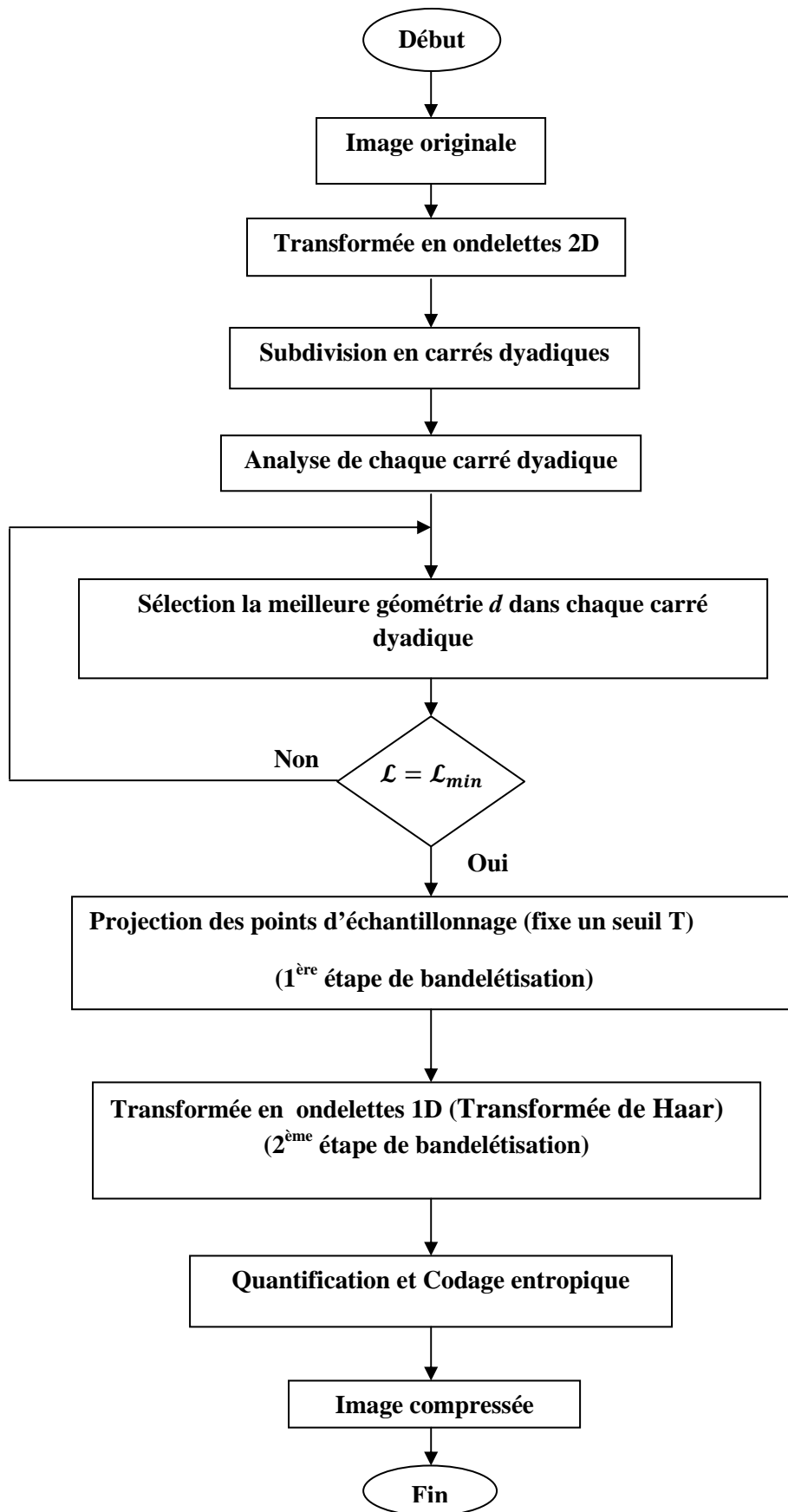
Le but étant de conserver le moins de coefficients possibles, on se fixe un seuil  $T$ , valeur minimale pour les coefficients. Une fois la projection effectuée, on effectue la

transformation en ondelettes 1D (2<sup>ème</sup> étape de bandelétisation), et récupère les coefficients dans la matrice  $Mt$ . On cherche ensuite les  $m$  coefficients de  $Mt$  dont la valeur est supérieure à  $T$  (quantification), ce qui nous donne la matrice  $Mt_m$ . La formule suivante nous permet de calculer le lagrangien :

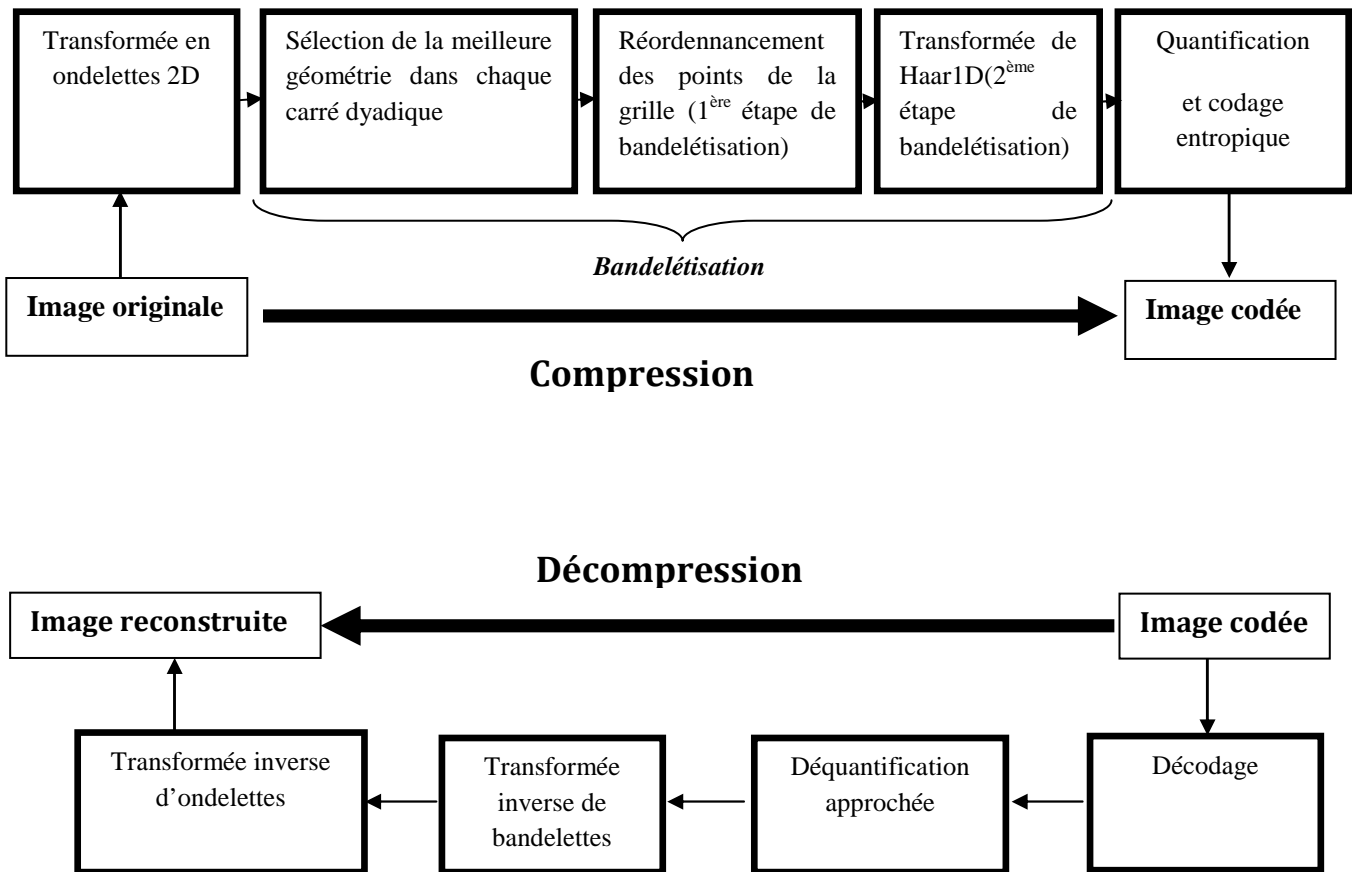
$$\mathcal{L} = \|Mt - Mt_m\|^2 + m \times T^2 \dots \dots \dots (3.3)$$

La meilleure direction est celle qui nous donnera le lagrangien minimal. On vérifiera à chaque fois si le lagrangien du carré étudié est inférieur à la somme des lagrangien des carrés qui le composent, à un facteur de compression près. (Le coefficient de compression à utiliser pour le calcul du meilleur lagrangien entre les différents carrés est  $\lambda = 3/28$  donné par E. Pennec).

Si c'est le cas, on conserve le grand carré, sinon on garde les quatre petits. (On voit ici l'intérêt pour la compression : on ne garde qu'une zone et une direction au lieu de quatre). Après la 2<sup>ème</sup> bandelétisation on code les coefficients quantifiés par un codage entropique, la figure (3.2) présente l'organigramme qui décrit les étapes principales de l'algorithme de la transformée de bandelettes et la figure (3.3) montre les étapes principales de la chaîne de compression/décompression de transformée en bandelettes.



**Figure 3.2 :** Organigramme décrit les étapes principales de l'algorithme de la transformée en bandelettes



**Figure 3.3 :** schéma de compression / décompression utilisant la transformée en bandelettes

Nous expliquons maintenant en détails les différentes étapes de l'algorithme de transformée en bandelettes (figure (3.4)).

**(1) Paramètres de l'algorithme :** On fournit une image discrétisée  $\bar{f}$  de taille  $N \times N$  pixels, et un seuil  $T$  qui contrôle le taux de compression de l'algorithme.

**(2) Transformée en ondelettes 2D :** On calcule la transformée en ondelettes discrète 2D de l'image d'origine  $\bar{f}$ . Ceci produit un ensemble de vecteurs de coefficients  $\{\bar{f}_j^k\}_{k,j>J}$ . Les vecteurs  $\bar{f}_j^k$ , pour chaque échelle  $2^j$  et orientation  $k \in \{V, H, D\}$  peuvent être stockés dans une unique image ayant la même taille que l'image d'origine  $\bar{f}$ . Les étapes suivantes (3)-(7) implémentent la *bandeletisation*, qui est répétée pour chaque échelle et orientation.

**(3) Sélection de chaque carré dyadique :** Un carré dyadique est obtenu en subdivisant de façon récursive le carré  $[0; 1]^2$  en quatre carrés de même taille. Pour chaque carré  $S$ , on



regroupe les coefficients en ondelettes  $\{\overline{f}_j^k[n]\}_{(2^j n \in S)}$  dans un vecteur noté  $f_S$ . Les étapes suivantes (4)-(7) sont répétées pour chaque carré dyadique  $S$  à chaque échelle  $2^j$  et orientation  $k$  d'une transformée en ondelettes.

**(4) Sélection de chaque géométrie :** Nous devons maintenant trouver la meilleure géométrie approchée quantifiée  $\tilde{\gamma}_S$  à l'intérieur d'un carré  $S$ . Nous devons donc considérer toutes les directions  $d$  joignant un couple de points  $(2^j n, 2^j n') \in S^2$ . potentielles est moins de  $2L^2$  ( $L$  est largeur de carré dyadique  $S$ ). Les étapes suivantes (5)-(7) sont répétées pour chaque direction potentielle.

**(5) Projection des points d'échantillonnage :** Pour construire le réordonnement, on sélectionne chaque point  $x_n \stackrel{\text{def}}{=} 2^j n \in S$  sur la grille d'échantillonnage des coefficients  $f_S$  et on le projette orthogonalement sur la droite  $d^\perp$  perpendiculaire à  $d$ . Ceci donne un nouveau point  $\tilde{x}_n$  repéré par son abscisse sur la droite  $d^\perp$ .

**(6) Signal 1D résultant :** La projection orthogonale des points d'échantillonnage sur la droite  $d^\perp$  donne un signal discret  $f_d$ .

**(7) transformation en ondelette 1D :** on calcule la transformée en ondelette discrète 1D du signal discret  $f_d$  résultant.

**(8) Sélection de la meilleure géométrie :** Pour sélectionner la meilleur géométrie, il faut choisir la direction  $d$  qui minimise le Lagrangien

$$\mathcal{L}(f_d, R) = \|f_d - f_{dR}\|^2 + \lambda T^2(R_G + R_B + R_S)$$

où  $f_{dR}$  est le signal reconstruit de coefficients quantifiés,  $R_G$  est le nombre de bits nécessaires pour coder le paramètre géométrique  $d$  par un codage entropique,  $R_B$  est le nombre de bits nécessaires pour coder les coefficients d'ondelettes quantifiés  $\{Q_T(b_k)\}$  et  $R_S$  le nombre de bits nécessaires pour coder la segmentation dyadique. Pour coder le quadtree, on utilise 1 bit pour chaque segmentation. En prenant  $\lambda = 3/28$ , voir[11].

**(9) Récupération des coefficients :** les coefficients  $\{b_k\}$  d'ondelettes 1D résultants correspondant de la meilleur géométrie  $d$  peuvent être stockés dans une image 2D ayant la même taille que le carré  $S$ . on utilise un balayage en ZigZag pour faciliter le codage entropique, alors les coefficients d'ondelettes  $b_k$  correspondants au échelles basses sont

stockés dans le coin en haut à gauche du carré et les grands coefficients correspondants de ces échelles sont exploités par un codage arithmétique pour coder les coefficients de bandelettes.

**(10) Construction du quadtree :** Une fois que l'on a calculé l'approximation dans chaque carré dyadique, on doit choisir la meilleure segmentation en carré. Ceci revient à conserver uniquement un sous-ensemble de carrés dyadiques de façon à obtenir une segmentation en quadtree. Une telle segmentation peut s'obtenir à partir de la segmentation complète en petits carrés, suivi d'une phase de regroupement par quatre des carrés. Grâce à l'additivité du Lagrangien et à la structure hiérarchique du quadtree, la minimisation de  $\mathcal{L}$  s'effectue à l'aide d'un algorithme rapide parcourant l'arbre de bas en haut.

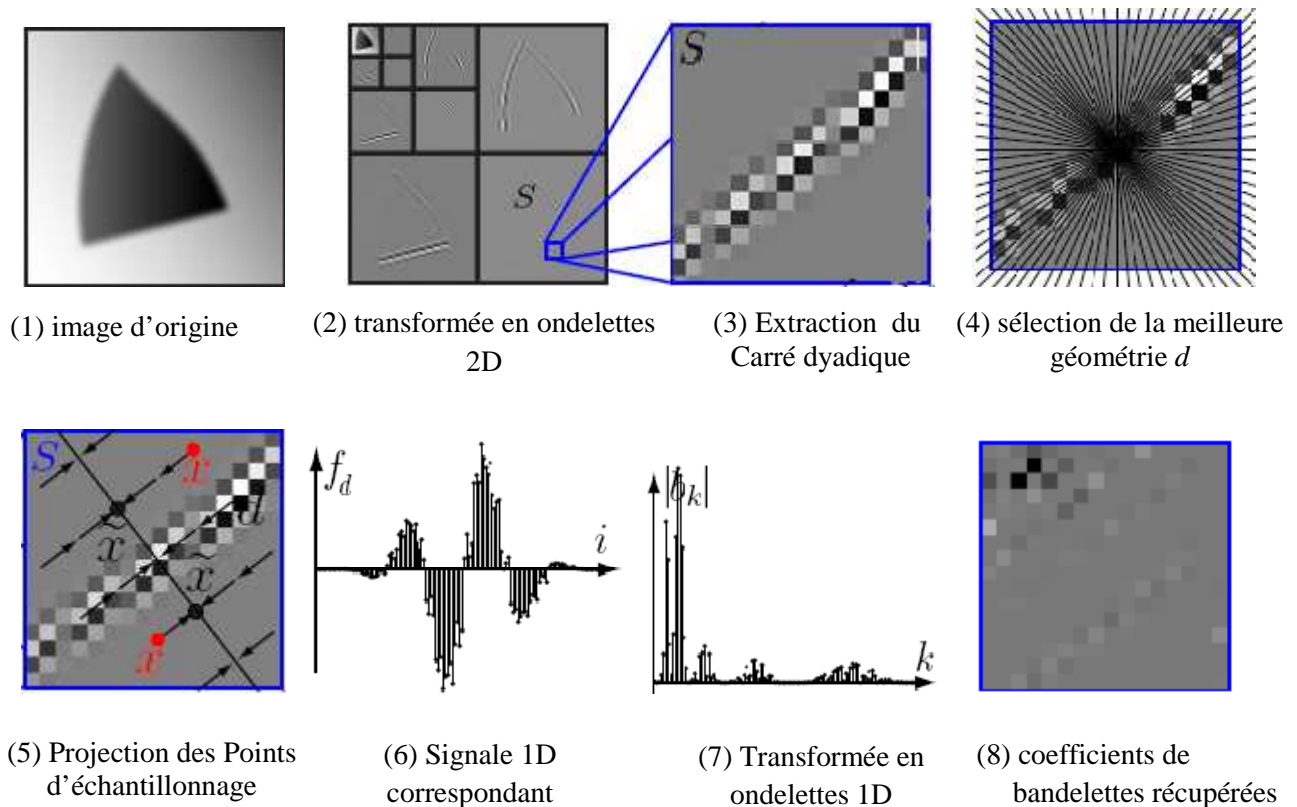
A l'étape (8), on a enregistré, pour chaque carré dyadique  $S$  la valeur  $\mathcal{L}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(f_S, \mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}), T)$  et la meilleure géométrie quantifiée  $\tilde{\gamma}_S$ . Alors, pour chaque échelle  $2^j$  et orientation  $k$ , on calcule la structure de quadtree à l'aide de l'algorithme suivant :

- ❖ Initialisation du quadtree : chaque carré  $S$  de taille  $b = 2^j$  est une feuille. Enregistrer les géométries optimales  $\tilde{\gamma}_S$  et initialiser  $\mathcal{L}_0$ , le Lagrangien cumulatif du sous-arbre à  $\mathcal{L}_0(S) = \mathcal{L}(S)$ .
- ❖ Commencer avec des carrés  $S$  de taille  $b = 2 \times 2^j$ .
- ❖ Pour chaque carré  $S$ , on note  $(S_1; S_2; S_3; S_4)$  ses quatre sous-carrés et

$$\mathcal{L}'(S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_0(S_1) + \mathcal{L}_0(S_2) + \mathcal{L}_0(S_3) + \mathcal{L}_0(S_4) + \lambda T^2$$

Le Lagrangien du sous-arbre (le terme additionnel  $\lambda T^2$  est dû au coût de un coefficient pour la subdivision  $R_S = 1$ ). Les sous-carrés doivent être rassemblés si  $\mathcal{L}(S) < \mathcal{L}'(S)$ . Si c'est le cas, déclarer  $S$  comme une feuille, enregistrer la géométrie optimale  $\tilde{\gamma}_S$ . Mettre à jour  $\mathcal{L}_0(S) = \min(\mathcal{L}(S), \mathcal{L}'(S))$ .

- ❖ Tant que  $b < 1$ , faire  $b \leftarrow 2 \times b$  et répéter l'étape précédente.



**Figure 3.4 :** Etapes de l'algorithme de transformée de bandelettes

### 3.4 Codeur en bandelettes orthogonales

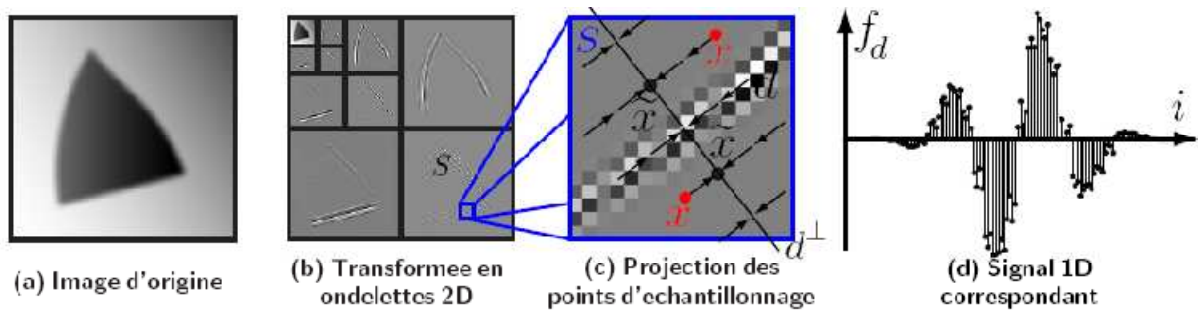
#### 3.4.1 Transformée en bandelettes *d'ordre Zéro* :

Dans cette sous-section, nous détaillons la première version de la transformée en bandelettes pour la compression est la transformée en bandelettes *d'ordre zéro*. L'algorithme précédent consiste à utiliser une géométrie approchée linéaire, c'est-à-dire des morceaux de droites. Ainsi, dans chaque carré  $S$  de la segmentation, l'algorithme *d'ordre 0* va déterminer la meilleure direction pour approcher l'ensemble de coefficients en ondelettes dans  $S$ . La transformée de Haar monodimensionnelle est effectuée sur les coefficients d'ondelettes de chaque bloc réordonnés selon la direction de la géométrie. Cette transformée est équivalente à la transformée de Alpert d'ordre 0.

➤ **Réordonnement des points de la grille (étape 1 de la bandelétisation) :**

On considère un carré  $S$  de taille  $b$  dans le domaine des coefficients d'ondelettes à une échelle  $2^j$  et orientation  $k$ , comme on peut le voir sur la figure (3.5(b)).

Nous considérons toutes les directions  $d$  joignant un couple de points  $(2^j n, 2^j n') \in S^2$ , le nombre de telles directions  $d$  quantifiées est de l'ordre de  $O(N_S^2)$  où  $N_S \stackrel{\text{def}}{=} \left(2^j/b\right)^2$  est le nombre de coefficients dans  $S$ .



**Figure 3.5 :** Réordonnement discret des points d'échantillonnage.

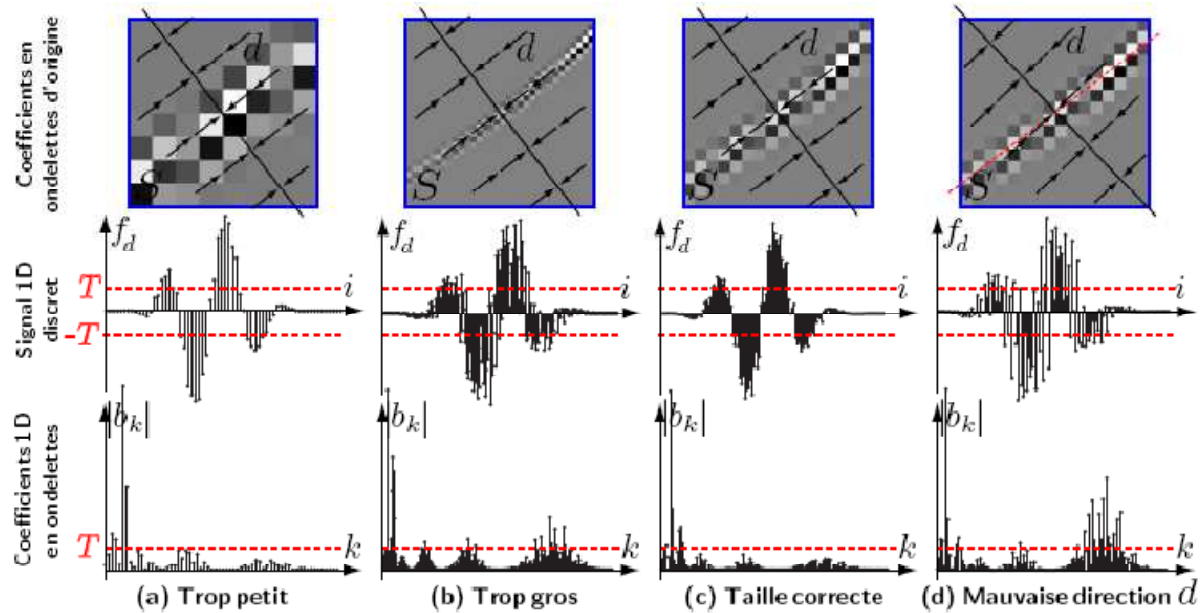
Pour construire le réordonnement, comme montré sur la figure (3.5 (c)), on sélectionne chaque point  $x_n \stackrel{\text{def}}{=} 2^j n \in S$  sur la grille d'échantillonnage des coefficients  $f_S$  et on le projette orthogonalement sur la droite  $d^\perp$  perpendiculaire à  $d$ . Ceci donne un nouveau point  $\tilde{x}_n$  repéré par son abscisse sur la droite  $d^\perp$ . On peut ensuite classer les abscisses de tous les points et la valeur de  $\varphi_d[n]$  est l'ordinal de  $\tilde{x}_n$  dans ce classement.

➤ **Transformée de Haar 1D (étape 2 de la bandelétisation)**

Si la direction  $d$  suit bien une courbe de discontinuité passant à travers  $S$  (figure 3.5(c)), alors ce réordonnement sera capable de transférer la régularité directionnelle 2D de  $f_S$  dans une régularité isotrope 1D de  $\tilde{f}_S$ . C'est pour cela qu'une transformée de Haar 1D est efficace pour capturer cette régularité.

L'étape (8) de l'algorithme de transformée en bandelettes compare toutes les directions  $d$  possibles pour trouver celle qui minimise le Lagrangien. La figure (3.6) montre comment cette minimisation permet de choisir à la fois une direction admissible et une taille des carrés correcte. Sur la première ligne ; on peut voir différents carrés  $S$  extraits autour d'une

singularité dans le domaine en ondelettes. Sur la ligne du milieu, on peut voir le signal discret réordonné 1D  $\tilde{f}_S$ . Sur la ligne du bas, on peut voir l'amplitude des coefficients de Haar  $\mathcal{H}(\tilde{f}_S)$ .



**Figure 3.6 :** Influence de la taille de  $S$  et de la direction  $d$ .

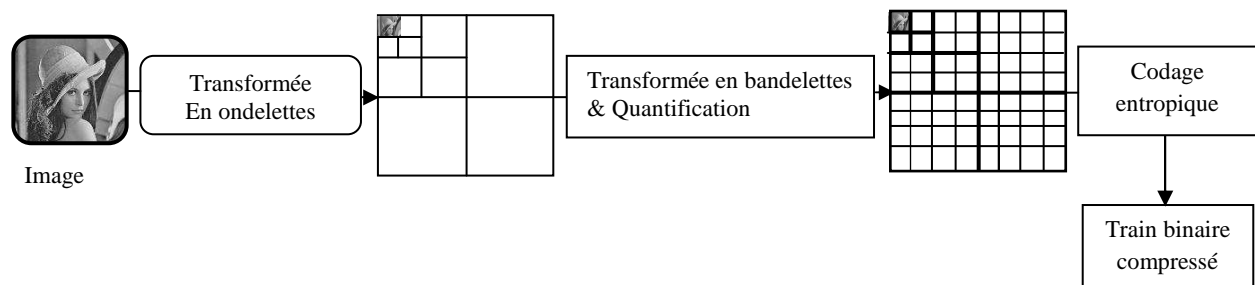
- Le carré est trop petit, puisque on peut étendre un peu  $S$  sans produire de coefficients Haar au-dessus du seuil  $T$ .
- Le carré est trop grand et il y a trop de coefficients de Haar au-dessus du seuil  $T$ . Ceci provient du fait que la vraie géométrie a un peu de courbure et que la direction  $d$  dévie trop de cette géométrie.
- Le carré a la bonne taille et le signal 1D est régulier. On remarque qu'il y a beaucoup plus de coefficients de Haar vérifiant  $|\mathcal{H}(\tilde{f}_S)[k]| < T$  que de coefficients d'ondelettes vérifiant  $|f_S[n]| < T$ .
- La direction  $d$  dévie trop de la vraie géométrie.

Mathématiquement, ce choix de la meilleure direction correspond à minimiser le Lagrangien  $\mathcal{L}(f_S, d, T)$  (étape (8) de l'algorithme). Il convient de noter que ce choix de taille  $b$  et de direction  $d$  dépend de la précision fixée par l'utilisateur par l'intermédiaire de  $T$ .

### 3.4.2 Transformée en bandelettes par groupements ou blocs

#### 3.4.2.1. Algorithme de compression en bandelettes par groupements (blocs) :

La figure (3.7) représente le schéma de compression en bandelettes par groupements. D'abord, l'image est transformée en ondelettes. Ensuite, la subdivision de la sous bande en blocs de  $(4 \times 4)$  coefficients d'ondelettes. Ces blocs de  $(4 \times 4)$  coefficients d'ondelettes sont transformés en bandelettes et quantifiés. Enfin, les coefficients de bandelettes quantifiés sont codés entropiquement pour former le train binaire compressé.



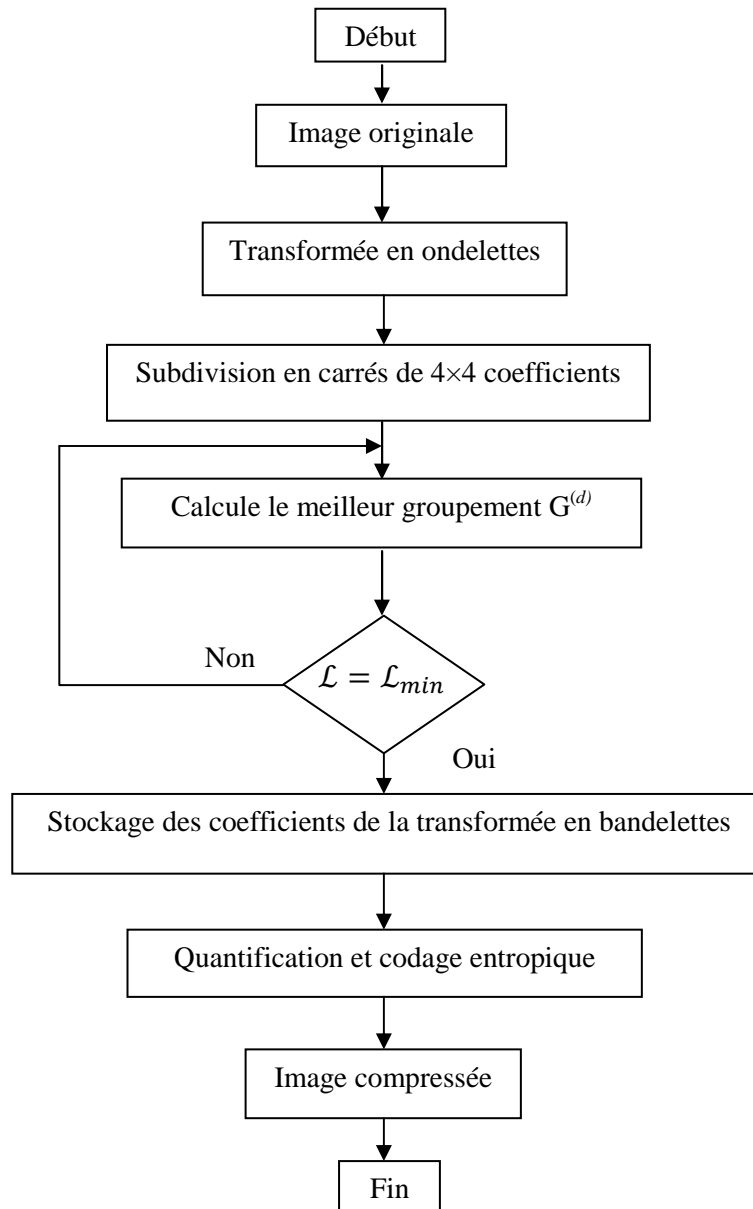
**Figure 3.7 :** Schéma de compression par transformée en bandelettes par groupements.

L'algorithme suivant permet le calcul de la transformée en bandelettes par groupements. Son principe est décrit de la manière suivante :

- Pour chaque échelle  $2^j$  et chaque orientation  $k$ , on subdivise en carrés  $S_m$  de  $(4 \times 4)$  coefficients  $\overline{f}_j^k$  de la transformée en ondelettes.
- L'algorithme calcule le meilleur groupement  $G^{(d)}$  tel que la transformée des coefficients  $f_S$  dans la base  $\mathcal{B}(G^{(d)}, S)$  minimise le Lagrangien et stocke  $\mathcal{G}_j^k[m] = d$  l'indice de ce regroupement (en posant  $\mathcal{G}_j^k[m] = \Xi$  si il n'y a pas de géométrie convenable).
- L'algorithme stocke en même temps les coefficients de la transformée en bandelettes.
- Ces coefficients sont quantifiés à l'aide du quantificateur uniforme décrit à l'équation (2.3).
- Ces coefficients quantifiés sont codés à l'aide d'un codeur arithmétique, ce qui produit un flot de bits de coefficients de bandelettes.

- Les paramètres de géométrie  $\mathcal{G}_j^k[m]$  sont également codées à l'aide d'un codeur arithmétique, ce qui crée un flot de bits de coefficients de géométrie.

L'organigramme de la figure (3.8) suit les étapes principales de l'algorithme de la transformée en bandelettes par groupements.



**Figure 3.8 :** Organigramme décrit les étapes principales de la transformée en bandelettes par groupements.

**Algorithme** : Compression d'image par la transformée en bandelettes par groupements.

**Entrées** : Une image et un seuil  $T$  qui contrôle le taux de compression de l'algorithme

**Sorties** : Le train binaire compressé

Transformée en ondelettes de l'image ;

Quantification et codage entropique de la sous-bande **LL** ;

**pour chaque** sous-bande de la transformée en ondelettes exceptée la sous-bande **LL** **faire**

Calcul de l'histogramme de la sous-bande pour évaluer

les probabilités  $\Pr(Q_q(a_b[m]))$  utilisées dans l'équation (2.8) ;

Partition de la sous-bande en blocs de  $(4 \times 4)$  coefficients ;

**pour chaque** bloc  $f$  **faire**

**pour chaque** base  $B_b$  du dictionnaire  $\mathcal{D}$  **faire**

Transformée du bloc  $f$  en utilisant la base de bandelettes  $B_b$  comme décrit dans l'équation (2.1) ;

Quantification des coefficients de bandelettes  $\{a_b[m]\}_{m=1}^M$  de la représentation  $f_b$  avec le quantificateur scalaire de l'équation (2.3) ;

Évaluation du coût débit-distorsion  $\mathcal{L}(f_q^b)$  défini dans l'équation (2.4) ;

**fin**

Mémorisation de la représentation  $f_q^{b*}$  qui minimise (Lagrangien) le critère débit-distorsion  $\mathcal{L}(f_q^b)$  ;

Mémorisation de la géométrie  $\mathcal{G}_j^k[m] = d$  correspondante de la base utilisée pour obtenir cette représentation ;

**fin**

Codage entropique des paramètres de la géométrie  $\mathcal{G}_j^k[m]$  des bases utilisées sur chaque bloc de la transformée en bandelettes ;

Codage entropique des coefficients de bandelettes ;

**Fin.**



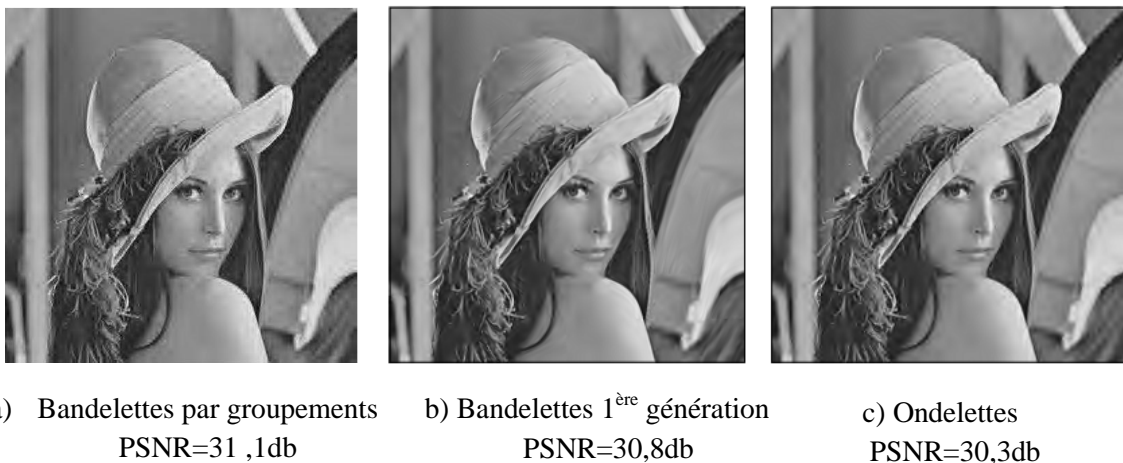
### 3.5 Résultats et Discussions

#### 3.5.1 Comparaison avec un codeur arithmétique en ondelettes :

Dans nos tests de compression, on compare le codeur en bandelettes par groupements décrit à la section précédente à un codeur en ondelettes biorthogonales 7/9 CDF (Cohen, Daubechies et Feauveau) et à un codeur en bandelettes 1<sup>ère</sup> génération réalisés dans [11] utilisant uniquement un codage arithmétique des coefficients quantifiés.

Taux de compression (RC%)	98,37
Taux de compression (RC « bpp »)	0,13
Ondelettes (PSNR en décibel)	30,3
Bandelettes 1G (PSNR en décibel)	30,8
Bandelettes (2G) par groupements (PSNR en décibel)	31,1

**Tableau 3.1** : Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Lena.



**Figure 3.9** : Image lena reconstruite au taux de compression de 98.37% (RC =0.13 bits/ pixel).

La figure (3.9.a) illustre l'image reconstruite de Lena avec la méthode de bandelettes par groupements comparée avec celle d'image reconstruite par deux méthodes, bandelettes 1<sup>ère</sup> génération et ondelettes réalisées dans [11].

Le taux de compression est exprimé par la relation suivante :

$$RC(\%) = 100 \times \left( 1 - \frac{\text{taille de l'image après codage entropique}}{\text{taille de l'image originale}} \right) \quad (3.3)$$

$$RC(\text{bpp}) = 8 \times \left[ 1 - \frac{RC(\%)}{100} \right] \quad (3.4)$$

On peut observer un gain typique de bandelettes (2<sup>ième</sup> génération) par groupements de l'ordre 0.8db par rapport aux ondelettes et un gain de bandelettes 1<sup>ère</sup> génération de l'ordre 0.5db par rapport aux ondelettes. L'interprétation de cette observation est que la transformée en bandelettes 1<sup>ère</sup> génération ou 2<sup>ième</sup> génération détecte la géométrie des images par rapport aux ondelettes grâce à leur support déformé et allongé qui permet de suivre la régularité géométrique le long des contours et les zones régulières des images.

Les tests effectués utilisent des images naturelles. On peut appliquer le codeur en bandelettes sur d'autres types d'images fixes, telles que les images biomédicales [28] (figure (3.10)). C'est un travail de magister réalisé en 2002 dans le laboratoire de recherche LESIA, Biskra.

Image	Bandelettes		Ondelettes	
	PSNR(db)	RC(%)	PSNR(db)	RC(%)
radiologique	36,88	93,79	34,15	93,79
échographie	34,96	93,66	33,49	93,66
cellulaire	25,56	93,27	25,20	93,27
Scanner IRM	33,17	93,36	31,21	93,36

**Tableau 3.2 :** Résultats de PSNR et RC obtenus pour différentes images biomédicales.

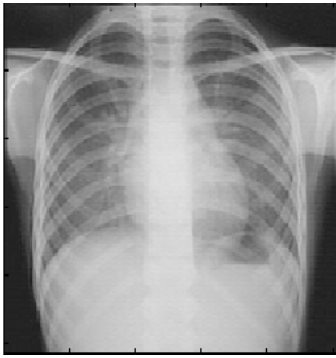


Image radiologique originale  
256×256 pixels



Image reconstruite par bandelettes



Image reconstruite par ondelettes



Image échographie originale  
256×256 pixels



Image reconstruite par bandelettes



Image reconstruite par ondelettes

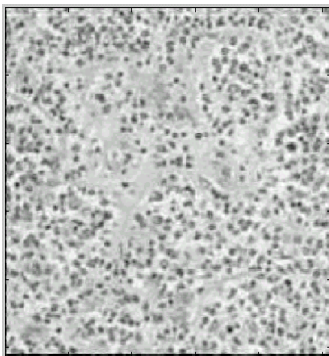


Image cellulaire originale  
256×256 pixels

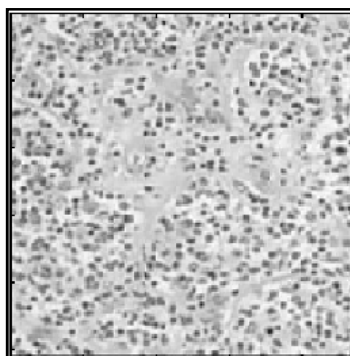


Image reconstruite par bandelettes

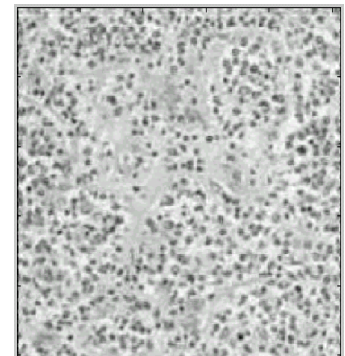


Image reconstruite par ondelettes



Image IRM originale  
256×256 pixels



Image reconstruite par bandelettes



Image reconstruite par ondelettes

**Figure 3.10** : Illustration d'images fixes biomédicales avec le codeur en bandelettes et le codeur en ondelettes.

Les images de la figure (3.10) du codeur montrent que les performances du codeur en bandelettes sont meilleures que celles en ondelettes alors, un gain en PSNR de l'ordre 2,73 db pour l'image radiologique, 1,47 db pour l'image échographique, 0,36 db pour l'image cellulaire et 1,96 db pour l'image scanner IRM.

L'efficacité du codeur en bandelettes est due au fait qu'on utilise un support d'ondelettes déformées le long du flot géométrique qui indique des directions de régularité de l'image.

La figure (3.11) représente un gain perceptuel important par rapport aux ondelettes, les images obtenues avec les bandelettes restent régulières le long de la géométrie utilisée tandis que celles obtenues avec les ondelettes présentent des effets oscillants associés à la grille carrée des ondelettes.

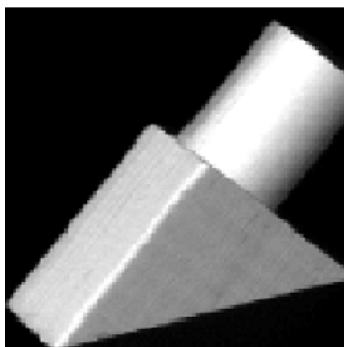
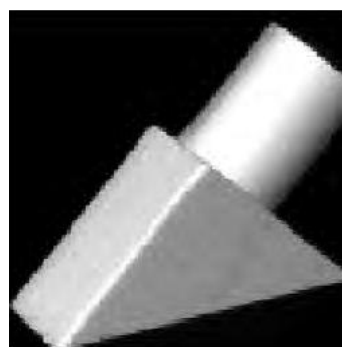


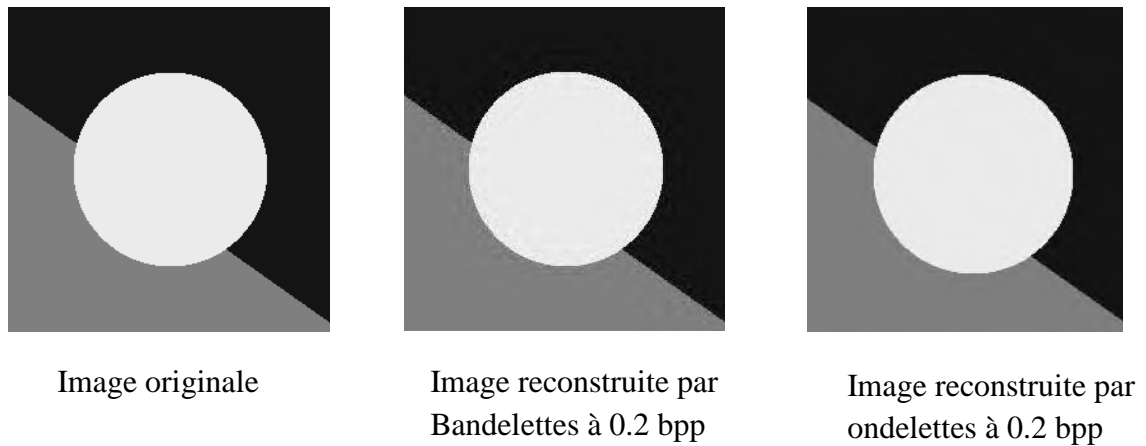
Image originale



Images reconstruite par  
bandelettes à 0.2 bpp



Images reconstruite par  
ondelettes à 0.2 bpp

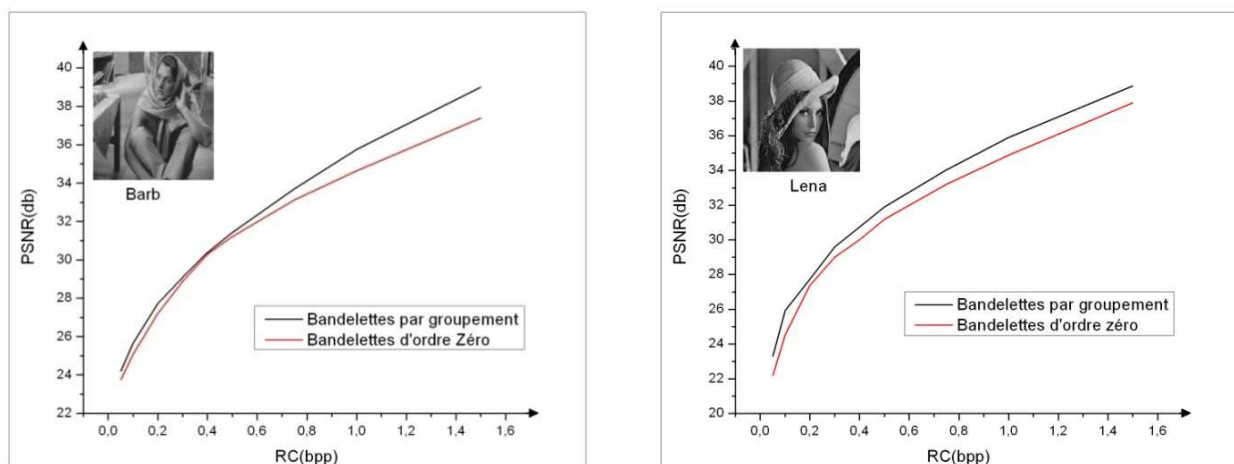


**Figure 3.11 :** Images reconstruites par le codeur en ondelettes et le codeur en bandelettes orthogonales à 0.2 bit/pixel.

L'impression visuelle est nettement meilleure avec les bandelettes. De plus, les effets de blocs sont très faibles par rapport aux ondelettes.

### 3.5.2 Comparaison entre un codeur arithmétique en bandelettes d'ordre Zéro et bandelettes par groupements:

On a effectué des tests de compression sur les images Lena et Barb en utilisant un codeur en bandelettes par groupement et un codeur en bandelettes d'ordre zéro (figure (3.12)).



**Figure 3.12 :** Comparaison entre un codeur arithmétique en bandelettes par groupement et bandelettes d'ordre zéro.

RC (%)	99,37 5	98,75	97,5	96,25	95	93,75	90,625	87,5	81,25
RC (bpp)	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1	1,5
PSNR "db" (Bandelettes par groupement)	23,28	25,93	27,73	29,60	30,74	31,88	34,03	35,91	38,86
PSNR "db" (Bandelettes d'ordre zéro)	22,18	24,53	27,36	29	30	31,17	33,19	34,87	37,88

**Tableau 3.3 :** Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Lena.

RC (%)	99,37 5	98,75	97,5	96,25	95	93,75	90,625	87,5	81,25
RC (bpp)	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1	1,5
PSNR "db" (Bandelettes par groupement)	24,20	25,66	27,73	29,09	30,37	31,43	33,71	35,76	39,0
PSNR "db" (Bandelettes d'ordre zéro)	23,74	25,09	27,21	28,88	30,29	31,22	33,13	34,65	37,40

**Tableau 3.4 :** Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Barb.

D'après le figure (3.12), on peut observer un gain de l'ordre 0,86db par les bandelettes par groupement par rapport aux bandelettes d'ordre zéro pour l'image Lena et 0,6db pour l'image Barb.

Le codeur en bandelettes par groupement est mieux performant que le codeur en bandelettes d'ordre zéro parce que l'utilisation des groupes de (4×4) coefficients permet de mieux comprendre la nature géométrique des coefficients d'ondelettes. Aussi, l'absence du quadtree simplifie la procédure du codage et minimiser l'erreur de distorsion.

### 3.5.3 Comparaison avec JPEG 2000:

La figure (4.13) montre la comparaison entre un codeur arithmétique en bandelettes et un codeur arithmétique en JPEG 2000. Les résultats de test sont résumés dans les tableaux suivants :

RC (%)	99,375	98,75	97,5	96,25	95	93,75	90,625	87,5	81,25
RC (bpp)	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1	1,5
PSNR "db" Bandelettes	29,75	31,57	33,66	34,45	35,51	36,24	38,64	40,22	42,8
PSNR "db" JPEG2000	28,1	30,1	32,4	34,1	35,3	36,5	38,7	40,3	43

**Tableau 3.5 :** Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image Guesswho.

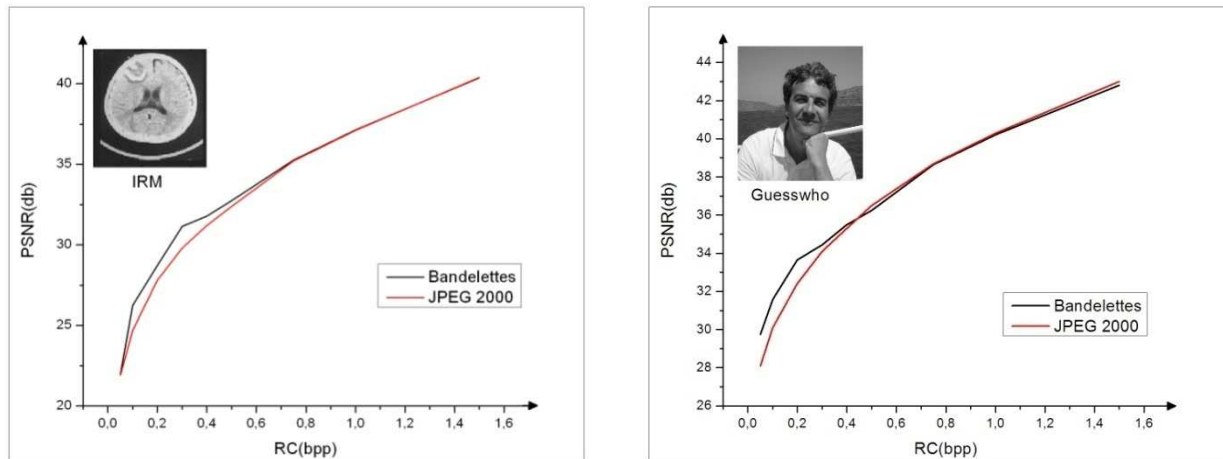
RC (%)	99,375	98,75	97,5	96,25	95	93,75	90,625	87,5	81,25
RC (bpp)	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1	1,5
PSNR "db" Bandelettes	21,97	26,24	28,70	31,13	31,78	32,73	35,26	37,13	40,38
PSNR "db" JPEG2000	21,9	24,7	27,8	29,8	31,2	32,4	35,2	37,1	40,4

**Tableau 3.6 :** Résultats de PSNR et RC obtenus pour l'image IRM.

On constate que ces deux codeurs font quasiment un jeu égal sur les faibles taux de compression (inférieurs à 95%).

L'interprétation de ce fait est que ces deux codeurs exploitent la géométrie des images, et ils fonctionnent sur des petits groupes des coefficients dans le domaine des ondelettes, mais emploient des stratégies différentes pour capturer les corrélations typiques qui existent dans des coefficients d'une transformée en ondelettes.

Pour les taux plus agressifs ou large (supérieurs à 95%), les bandelettes apportent un léger gain par rapport au codeur JPEG 2000.



**Figure 3.13 :** Comparaison entre la transformée en bandelettes et JPEG 2000.

L'interprétation de ce fait est que les bandelettes utilisent des ondelettes déformées le long des contours qui suivent bien la variation de l'orientation des textures locales dans l'image, cette propriété permet de capturer la régularité géométrique de l'image et garder un nombre très important des textures c'est pour ça la transformée en bandelettes est adaptable dans ces cas , tandis que les textures sont perdues lorsqu'on utilise JPEG 2000 avec large taux de compression[7].

Nous avons effectué d'autres tests sur plusieurs images (figure (3.14)) pour des taux de compression plus élevés (supérieurs à 95% ou inférieurs 0.4 bits/pixel) pour justifier les résultats obtenus précédemment. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant.

Image	Bandelettes		JPEG2000	
	PSNR(db)	RC(%)	PSNR(db)	RC(%)
Barb	25,5	98,75	24,5	98,75
Lena	29,80	98,75	29,50	98,75
Boat	29,95	97,5	29,5	97,5
peppers-bw	29,63	98,75	29,3	98,75
FRUIT_LUMI	31,21	97,5	31	97,5

**Tableau 3.7 :** Résultats de PSNR et RC obtenus pour différentes images.





Bandelettes



JPEG 2000

Image Barb reconstruite par bandelettes et JPEG 2000 avec 0.1 bits/pixel (98,75%).



Bandelettes



JPEG 2000

Image Lena reconstruite par bandelettes et JPEG 2000 avec 0.1 bits/pixel (98,75%).



Bandelettes



JPEG 2000

Image Boat reconstruite par bandelettes et JPEG 2000 avec 0.2 bits/pixel (97,5%).



Bandelettes



JPEG 2000

Image peppers-bw reconstruite par bandelettes et JPEG 2000 avec 0.1 bits/pixel (98,75%).



Bandelettes



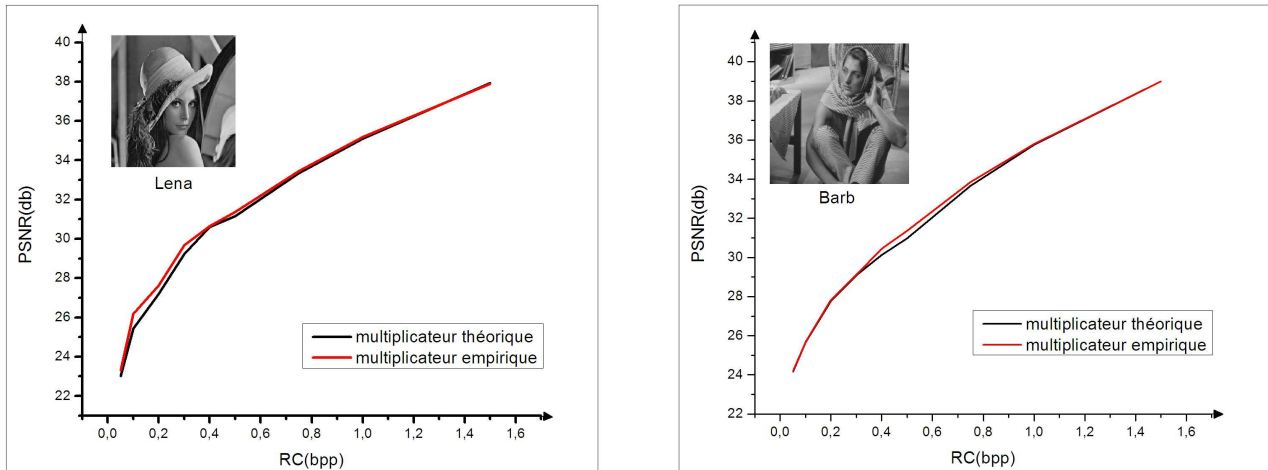
JPEG 2000

Image FRUIT\_LUMI reconstruite par bandelettes et JPEG 2000 avec 0.2 bits/pixel (97,5%)

**Figure 3.14 :** Comparaison entre la transformée en bandelettes et JPEG 2000 pour différents types d'images.

### 3.5.4 Comparaison entre le multiplicateur de lagrangien théorique et le multiplicateur de lagrangien empirique :

On a utilisé deux types de multiplicateurs de lagrangiens, théorique [11] ( $\lambda = 3/28 \approx 0,107$ ) et empirique [24] ( $\lambda = 0,15$ ).



**Figure 3.15 :** Comparaison de la transformée en bandelettes utilisant un multiplicateur théorique et un multiplicateur empirique.

Les résultats sont résumés dans les tableaux suivants :

RC(bpp)	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1,0	1,5
PSNR "db" mult-théorique	24,17	25,65	27,77	29,09	30,13	30,98	33,65	35,77	39
PSNR "db" mult-empirique	24,20	25,67	27,82	29,12	30,44	31,37	33,86	35,81	39,0

**Tableau 3.8 :** Résultats de PSNR et RC obtenus pour l’image Barb.

RC(bpp)	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1,0	1,5
PSNR db" mult-théorique	23	25,44	27,18	29,24	30,61	31,17	33,34	35,11	37,94
PSNR "db" mult-empirique	23,30	26,18	27,63	29,68	30,64	31,37	33,46	35,20	37,90

**Tableau 3.9 :** Résultats de PSNR et RC obtenus pour l’image Lena.

On constate que la transformée en bandelettes utilisent un multiplicateur empirique a un léger gain en PSNR (de l’ordre 0,12db pour l’image Barb et 0,26db pour l’image Lena par exemple) par rapport à la transformée en bandelettes utilisent un multiplicateur théorique.

## Conclusion

En général, on peut dire que l'approche étudiée permet d'atteindre de très bons résultats des points de vue qualité des images d'une part et taux de compression d'autre part. Elle peut atteindre même des taux de compression très élevés pour une bonne qualité de l'image reconstruite.

Généralement, la forte concentration d'énergie de coefficients était située le long des contours, les bases de bandelettes sont l'une des meilleures approches qui peuvent résoudre ce problème. Elles se basent sur le flot géométrique déformé qui indique des directions de régularité de l'image.

L'application de bandelettes dans la compression d'images fixes améliore les résultats par rapport aux ondelettes classiques, cette amélioration ouvre d'autres applications pour les bandelettes telles que la compression des surfaces, images couleurs, vidéo ...

Enfin, la base de bandelettes est une approche moderne, on s'attend à de grandes améliorations dans le domaine de la compression.

## Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons effectué une étude sur la technique de compression d'images fixes utilisant les ondelettes géométriques : les bandelettes.

Nous avons vu que la théorie de la transformée en bandelettes est relativement assez complexe mais, permet d'améliorer les résultats de compression par rapport aux ondelettes.

Deux versions de transformées en bandelettes sont décrites dans ce mémoire, la transformée en bandelettes d'ordre zéro et la transformée en bandelettes par groupements ou blocs. La première version est un cas particulier qui consiste à utiliser une géométrie approchée linéaire, c'est-à-dire des morceaux de droites. Elle dépend sur la transformée de Haar monodimensionnel.

La seconde version utilise des groupements de  $(4 \times 4)$  coefficients, elle se base sur deux étapes fondamentales : la constitution du dictionnaire de bases de bandelettes et l'optimisation du critère de choix de la base de bandelettes utilisées pour transformer chaque bloc.

Le choix de la meilleure base de bandelettes est un problème qui peut être résolu par minimisation du Lagrangien et se résume à la recherche d'un multiplicateur du lagrangien optimal. Deux multiplicateurs sont utilisés dans notre application, un multiplicateur théorique introduit dans [11] et l'autre empirique introduit dans [24].

Le calcul du multiplicateur de lagrangien par une formule empirique [24] permet d'améliorer très légèrement les résultats en compression par rapport à la formule théorique [11].

Dans la construction du dictionnaire des bandelettes on a utilisé 15 bases de bandelettes, 12 bases directionnelles et 3 bases complémentaires utilisées dans [14].

Les bases de bandelettes directionnelles proposées par Péryré dans ses travaux ne permettent pas d'exploiter toutes les redondances entre les coefficients d'ondelettes dans les blocs  $(4 \times 4)$ . Ceci peut s'expliquer par le fait que les corrélations entre les coefficients non adjacentes dans les directions autres que l'horizontale et la verticale sont faibles. A partir de ces observations, nous proposons de poursuivre ce travail en essayant de chercher une nouvelle classe de regroupements c'est-à-dire nouvelles bases de bandelettes afin de mieux décorrélérer les coefficients d'ondelettes.

La transformée en bandelettes est une méthode basée sur les ondelettes déformées le long des contours, donc elle est compatible avec JPEG2000[7] qui base sur la transformée en ondelettes. Par conséquent les résultats obtenus avec les bandelettes, on peut dire que les bandelettes peuvent donner une certaine amélioration du JPEG2000 ce point pourrait être un sujet de recherche ultérieur, éventuellement.

# Bibliographie

- [1]. Mallat, S. « A Wavelet Tour of Signal Processing ». Academic Press, San Diego (1998).
- [2]. Minh N. Do and Martin Vetterli, « The Finite Ridgelet transform for Image Representaion », IEEE Transaction on Image Processing, Vol.12, N. 1January 2003.
- [3]. E. J. Candès et D. L. Donoho, « Curvelets - a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges », Dans L. S. et al., rédacteur, Curves and Surfaces, p. 105–120. Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 2000.
- [4]. Frantisek Matus and Jan Flusser «Image Representations via a Finite Radon Transform »IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE VOL. 15, NO. 10, OCTOBER 1993.
- [5]. M.J. Fadili, J.-L. Starck, « Curvelets and Ridgelets », France,October 24, 2007
- [6]. Guillaume Lebrun, « Ondelettes géométriques adaptatives : vers une utilisation de la distance géodésique », Université de Poitiers, Novembre 2009.
- [7]. Shigao Li Ran Yang Qianqing Qin « Improvement of JPEG2000 in Retaining Texture via Bandelet ». International Conference on Computer Science and Software Engineering. 2008.
- [8]. B.K. Alpert. « A class of bases in  $L^2$  for the sparse representation of integral », operators. SIAM J. Math. Anal., 24, 1993.
- [9]. B.K. Alpert. « Wavelets and Other Bases for Fast Numerical Linear Algebra », pages 181–216. C. K. Chui, editor, Academic Press, San Diego, CA, USA, 1992.
- [10]. Erwan Le Pennec, Stéphane Mallat . « Bandelettes et représentation géométrique des images », CMAP Polytechnique. 91128 PALAISEAU – France.
- [11]. E. Le Pennec and S.Mallat, « Sparse Geometrical Image Approximation with Bandelets », IEEE Transaction on Image Processing, 14(4), p. 423–438, avril 2005.
- [12]. Erwan Le Pennec. «Bandelettes et représentation géométrique des images », thèse de doctorat, Ecole polytechniques, Paris, 19 Déc 2002.
- [13]. S. Mallat and F. Falzon, « Analysis of low bit rate image tranform coding », IEEE Trans. Signal Proc, 46(4), p. 1027–1042, avril 1998.

- [14]. Gabriel PEYRÉ. « Géométrie multi-échelles pour les images et les textures », thèse de doctorat, Ecole polytechniques, Paris, 13 Déc 2005.
- [15]. G. Peyré and S. Mallat. « Surface compression with geometric bandelets ». ACM Transactions on Graphics, Vol. 24(3), (Proc. of SIGGRAPH'05), 24(3), Aug. 2005.
- [16]. Gabriel Peyré, Stéphane Mallat « DISCRETE BANDELETS WITH GEOMETRIC ORTHOGONAL FILTERS », rapport technique, CMAP/ Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France. Septembre 2005.
- [17]. S. MALLAT and G. PEYRE. « Orthogonal Bandlet Bases for Geometric Images Approximation », rapport technique, CMAP/ Ecole Polytechnique, CEREMADE, Université Paris Dauphine, 2006.
- [18]. Gabriel Peyré, Stéphane Mallat « A Matlab Tour of Second Generation Bandelets », CMAP, Ecole Polytechnique.
- [19]. G. Peyré and S. Mallat. Bandelets toolbox, available on Matlab Central.  
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/>, 2005.
- [20]. Erwan Le Pennec, Stéphane Mallat, « Représentation d'Image par Bandelettes et Application à la Compression », Dans GRETSI, Toulouse, Septembre 2001.
- [21]. E. Le Pennec and S. Mallat. « Bandelet Image Approximation and Compression », SIAM Multiscale Modeling and Simulation, 2005.
- [22]. Stéphane Mallat · Gabriel Peyré, « A review of Bandlet methods for geometrical image représentation », Numer Algor, DOI 10.1007/s11075-007-9092-4, April 2007.
- [23]. Stéphane Mallat & Gabriel Peyré. « Traitements géométriques des images par bandelettes », Journée annuelle 2006, p. 1.
- [24]. Xavier DELAUNAY, « Compression d'images satellite par post-transformées dans le domaine ondelettes », thèse de doctorat, Ecole polytechniques, Toulouse, 12 novembre 2008.
- [25]. Erwan Le Pennec, Charles Dossal, Gabriel Peyré, Stéphane Mallat, « Débruitage géométrique d'images dans des bases orthonormées de bandelettes », Colloque GRETSI, 11-14 septembre 2007, Troyes
- [26]. G. Jeannic, V. Ricordel et D. Barba. « Extraction de contours multirésolution pour un codage d'images par bandelettes », École Polytechnique de l'Université de Nantes, 2006.
- [27]. Éric Incerti, « COMPRESSION D'IMAGE ; Algorithmes et standards », Vuibert, Paris, 2003.



- [28] OUAFI Abdelkarim « compression d'images fixes biomédicales par les transformées en ondelettes associées aux algorithmes de quantification vectorielle et de codage entropique » ; thèse de magister en électronique ; université de Biskra ; Mai 2001.