

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie civil et hydraulique  
Réf : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية و الري  
المرجع:.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
Du diplôme de magister en : **Génie Civil**

**Option : Modélisation des Matériaux et Structures**

## **L'impact de l'analyse non linéaire sur les structures**

Présenté par :  
**Boubakeur FETTAR**

Soutenu publiquement le 12 avril 2012

**Devant le jury composé de :**

<b>Pr. Mekki MELLAS</b>	<b>Professeur</b>	<b>Président</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr. Djamal HAMADI</b>	<b>Maitre de Conférences</b>	<b>Rapporteur</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Pr. Rachid CHEBILI</b>	<b>Professeur</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr. Abdelhafid OUNIS</b>	<b>Maitre de Conférences</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr. Abdelouahab TATI</b>	<b>Maitre de Conférences</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Biskra</b>



## **REMERCIEMENTS**

Je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la force et la volonté de réaliser et achever ce travail.

Je remercie tout d'abord le Docteur Djamel HAMADI de m'avoir proposé ce sujet de thèse, de l'attention qu'il a portée à mon travail. Je le remercie pour ses conseils qui ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude à Monsieur M. MELLAS, Professeur au département de génie civil à l'université de Biskra pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Tous mes remerciements et ma reconnaissance envers Monsieur R. CHEBILI, Professeur au département de génie civil à l'université de Biskra, qui a consacré et sacrifié une partie de son temps pour ses conseils et directives précieuses.

Je tiens également à remercier vivement, Messieurs A. OUNIS et A. TATI, Maîtres de Conférences au Département de Génie Civil à l'université de Biskra, pour leurs encouragements, et d'avoir accepté d'examiner cette présente thèse.

Mes sincères remerciements sont aussi adressés envers mes collègues pour un temps agréable et une ambiance exemplaire passée ensemble.

Enfin, toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes très vifs remerciements à ma mère et mon père ainsi que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin et en particulier l'ensemble des enseignants du département de génie civil de Biskra.



## **Résumé**

Les hypothèses de l'élasticité linéaire sont généralement admises pour le dimensionnement de la plupart des structures courantes. Cependant, l'utilisation dans la construction des éléments de forme de plus en plus élancée d'une part et la réalisation des structures plus économiques d'autre part conduit à abandonner les hypothèses très étroites de l'élasticité linéaire. Il convient également de mieux évaluer les coefficients de sécurité vis-à-vis de la ruine. Il est alors nécessaire d'introduire des comportements plus proches de la réalité. Ainsi, la prise en compte de ces points conduit alors à l'élaboration d'une analyse non linéaire afin de traduire correctement le comportement géométrique ou matériel des structures citées.

Dans cette recherche, nous nous intéressons d'abord à la présentation de l'importance de l'analyse non linéaire des structures de point de vue de stabilité (sécurité) et économie d'une part, une synthèse sur la non linéarité géométrique et matérielle des structures, ces méthodes et algorithmes de résolution d'autre part, dans la deuxième partie, nous présentons un exemple numérique d'applications de génie civil avec une comparaison dans le domaine linéaire et non linéaire.

**Mots - clés :** Analyse linéaire, analyse non linéaire, comportement des structures, modélisation numérique.

## **Abstract**

The assumptions of linear elasticity are generally accepted for the design of most common structures. However, using the construction with elongated span elements in one hand and achieving the low cost structures on the other hand led to abandon the linear elasticity assumptions. It is also assess better the safety factors against the collapse. It is then necessary to introduce behavior closer to reality. Thus, consideration of these points then leads to the development of nonlinear analysis in order to reflect properly the geometric or material behavior of the structures specified above.

In this research, we focus first to present the importance of the non linear analysis of structures viewpoints of stability (security) and economically at first, a synthesis of nonlinear geometric and material structures, his methods and algorithms of resolution at second .In the second part some numerical examples of civil engineering applications are presented for linear and nonlinear analysis.

**Key words:** linear analysis, non linear analysis, behavior of structures, numerical modeling.

### **الملخص:**

إن الفرضيات الخطية للمرونة مقبولة عموماً لاختيار الأبعاد الأولية في تصميم غالبية الهياكل. غير أن استعمال العناصر الإنشائية في المنشآت ذات الأبعاد الكبيرة من ناحية، وتحقيق هياكل أكثر اقتصادية من ناحية أخرى يؤدي إلى التخلي عن فرضيات المرونة الخطية. كما أنه من الأفضل أيضاً الأخذ في الحسبان سلوك قريب من الحقيقة. ولأخذ بعين الاعتبار لهذه النقاط، يتطلب ذلك إعداد تحليل لا خطي لأجل التمثيل الصحيح للسلوك الهندسي أو المادي للهياكل الإنشائية في هذا البحث، في الجزء الأول نعرض أهمية التحليل اللاخطي للهياكل من ناحية الإستقرار (السلامة) و من الناحية الإقتصادية ثانياً، كما نقدم ملخص اللاخطية الهندسية و المادية مع طرق و خوارزميات الحل. في الجزء الثاني نحاول تقديم بعض الأمثلة العددية لأمثلة تطبيقية في الهندسة المدنية و هذا لأجل المقارنة بين التحليل الخطي و اللاخطي.

**كلمات مفتاحية:** التحليل الخطي، التحليل اللاخطي، سلوك المنشآت، النمذجة العددية.





# **TABLE DES MATIERES**

Introduction générale	01
-----------------------	----

## **CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

I.1. Introduction	04
I.2. Sources de non linéarité	05
I.3. Introduction à l'analyse non linéaire des contraintes	06
I.3.1. Analyse non linéaire des contraintes	06
I.3.1.a. Avantages de l'analyse linéaire	06
I.3.1.b. Raisons d'analyse non linéaire	06
I.3.1.c. Conséquences de l'analyse non linéaire	07
I.3.2. Classification des sources non-linéaire	08
I.3.2.a. Formulation pour un élément linéaire à deux nœuds	08
I.3.2.b. Problème élastoplastique à un seul degré de liberté	09
I.3.2.c. Console rigide lie à un ressort torsionnel	11

## **CHAPITRE II : NON LINEARITE GEOMETRIQUE**

II.1. Introduction a l'analyse non linéaire	12
II.2. Théorie non linéaire (aspect cinématique, différentes discrétisations)	15
II.2.1. Aspect cinématique	15
II.2.2. La description lagrangienne	16
II.2.3. Différentes configurations d'un corps en mouvement	17
II.2.4. Description Lagrangienne corotationnelle	18
II.3. Catégories d'analyse non linéaire géométrique	20
II.3.1. Analyse en grand déplacement/grande rotation/petite déformation	20
II.3.2. Grand déplacement/petite rotation/petite déformation	22
II.3.3. Grand déplacement / grande rotation / grande déformation	28
II.3.4. Analyse de stabilité linéaire et formulation de la matrice géométrique	30
II.3.4.a. Discrétisation par éléments finis	32
II.3.4.b. Instabilité élastique ; Analyse de bifurcation	34

## **CHAPITRE III : NON LINEARITE MATERIELLE**

III.1. Généralité	36
III.1.1. Béton armé	36
III.1.2. Le béton	36
III.1.2.a. Comportement uni axial	36
III.1.2.b. Comportement en compression	36
III.1.3. Acier d'armature	40
III.1.3.a. Comportement sous chargement monotone	40
III.1.3.b. Comportement sous un chargement répété du même signe (dans une seule direction)	43
III.1.3.c. Comportement sous chargement renversé	44
III.2. Comportement non linéaire	47

III.2.1. Modèles non linéaires	47
III.2.1.a. Les modèles globaux	47
III.2.1.b. Les modèles locaux	48
III.3. Lois de comportement	49
III.3.1. Les rotules plastiques	49
III.3.2. Critère de ruine en rotation	54
III.3.3. Caractéristiques des rotules plastiques	55
III.3.4. Rotation de la corde	56
III.3.5. Rotation élastique de la corde	56
III.3.6. Rotation ultime de la corde	57
III.3.7. Lois moment-courbure	59
III.3.8. Détermination des moments élastiques et ultimes et leurs courbures correspondantes	60
III.3.8.a. Moment et courbure élastique	60
III.3.8.b. Moment et courbure ultime	61
III.3.9. Relations force-déplacement non linéaires	61
<b>CHAPITRE IV :</b>	
<b>METHODES DE RESOLUTION</b>	
IV.1. Introduction	62
IV.2. Méthode De Substitution	64
IV.3. Méthode De Newton-Raphson	66
IV.4. Méthode Incrémentale (OU PAS A PAS)	69
<b>CHAPITRE V :</b>	
<b>EXEMPLE D'APPLICATION</b>	
V.1. Introduction	71
V.2. Description de l'ouvrage	71
V.2.1. Description des bâtiments 01, 02 et 03	71
V.2.2. Charges Permanentes et Surcharges d'exploitations	76
V.2.3. Caractéristiques mécaniques des matériaux	76
V.2.4. Paramètres de l'analyse statique linéaire	78
V.3. Méthodologie de comparaison entre l'analyse linéaire et non linéaire	81
V.4. Résultats de l'analyse statique linéaire et non-linéaire	85
V.5. Interprétation des résultats statiques linéaires et non linéaires géométrique et matérielle	91
V.6. Importance de l'analyse non linéaire du point de vue économique et stabilité	93
V.6.1. Importance du point de vue économique	93
V.6.2. Importance du point de vue stabilité et sécurité	99
<b>CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS</b>	102
<b>ANNEXE</b>	103
<b>REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	113

## **LISTE DES FIGURES**

### **CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

Figure I.1: problème de trois-barre : (a) structure de 3-barres, et (b) équilibre des forces externes et internes	09
Figure I.2: Courbe charge-déplacement pour le problème des 3 barres d'elastoplastique	10
Figure I.3: Console rigide lie a un ressort torsionel et diagramme du corps libre	11
Figure I.4 : Courbe charge-rotation - comparaison de la solution linéaire et non linéaire	11

### **CHAPITRE II : NON LINEARITE GEOMETRIQUE**

Figure II.1 : Comportement GNL d'une poutre « simplement » appuyée	13
Figure II.2 (a) : Comportement GNL d'une colonne : profile de déflexion	13
Figure II.2 (b) : Comportement GNL d'une colonne : courbes charge-déflexion	14
Figure II.3 : Analyse d'un treillis et d'un câble	14
Figure II.4 : Configurations d'un corps en mouvement	17
Figure II.5 : Description corotationnelle pour un élément triangulaire	19
Figure II.6 : Comportement en grand déplacement, grande rotation et petite déformation	20
Figure II.7 : Courbe d'équilibre par bifurcation et flambement d'une colonne	21
Figure II.8 : Treillis d'une seule barre	22
Figure II.9 : Comportement GNL d'un treillis d'une seule barre	23
Figure II.10 : comportement de raidissement d'un câble	25
Figure II.11 : Méthode de Newton-Raphson pour la résolution des équations non linéaires	26
Figure II.12 : Mouvement d'une « fibre » dans la direction $X_1$	28
Figure II.13 : Comportement en grand déformation d'une barre incompressible	29
Figure II.14 : Comportement en grande déformation d'une barre incompressible utilisant les différentes lois constitutives	29
Figure II.15 : Poutre-colonne simplement appuyée ; Segment différentiel ; Effet de la force	30

### **CHAPITRE III : NON LINEARITE MATERIELLE**

Figure III.1 : Courbe contrainte-déformation pour un cylindre en béton avec une charge de compression uni axial	37
Figure III.2 : la relation entre le ratio contrainte sur résistance et la déformation du béton pour de différentes résistances	38
Figure III.3 : idéalisation de la courbe contrainte-déformation du béton pour la compression uni axiale	38
Figure III.4 : courbe contrainte-déformation pour un cylindre en béton avec une charge axiale de compression répétée de haute intensité (chargement cyclique)	39
Figure III.5 : courbe contrainte-déformation du béton avec des différentes vitesses d'application de la charge.	39
Figure III.6 : Schéma d'un acier à verrous	40
Figure III.7 : Schéma d'un acier à empreintes	40
Figure III.8 : Courbe typique contrainte déformation pour les aciers d'armature	41
Figure III.9 : Courbe contrainte déformation illustrant le point limite élastique supérieure et inférieure	41

Figure III.10 : Le point d'écoulement de l'acier bien défini sans le plateau plastique	42
Figure III.11 : Idéalisations de la courbe contrainte déformation de l'acier en traction ou en compression	44
Figure III.12 : Courbe contrainte déformation de l'acier sous chargement répété	44
Figure III.13 : (a) effet « Bauschinger » sous chargement renversé.	
(b) Idéalisations élastique parfaitement plastique parfaite de l'acier sous chargement renversé	45
Figure III.14 : Courbe contrainte déformation de l'acier sous chargement renversé	46
Figure III.15 : Courbe contrainte déformation de l'acier sous chargement renversé	46
Figure III.16 : Modèles globaux de murs porteurs en béton armé et de murs de remplissage en maçonnerie	47
Figure III.17 : Exemples de relations moment-courbure	48
Figure III.18 : Influence de l'effort axial sur la résistance et la ductilité d'un poteau	49
Figure III.19 : Exemple de dommages d'un bâtiment suite au séisme de Zemmouri 2003	49
Figure III.20 : Endommagement d'un portique à 2 étages par flexion dans les zones critiques des poteaux dans une installation portuaire lors du séisme de Buhj (Inde) en 2001	50
Figure III.21 : effondrement par flexion hors plan d'une structure portiques en béton armé (Parking) lors du séisme de Northridge (Etats-Unis) en 1994	50
Figure III.22 : Ruine par flexion-compression d'un poteau en béton armé de 1m de diamètre dans le bâtiment (Motoyama Royal Condominium) lors du séisme de Kobe (Japon) en 1995	51
Figure III.23 : Rupture par cisaillement d'un poteau en béton armé lors du séisme de Kalamata (Grèce) en 1986	51
Figure III.24 : Rupture par cisaillement d'un poteau court en béton armé dans une école d'enseignement technique des chemins de fer lors du seisme de Miyagi-Ken en 1978	52
Figure III.25 : Endommagement d'un nœud poteau-poutre par cisaillement lors du Kobe (Japon) en 1995	52
Figure III.26 : Endommagement des nœuds d'un portique dans une cimenterie lors du séisme Buhj (Inde) en 2001	53
Figure III.27 : Ruine d'un nœud a la jonction poteau-poutre d'angle lors du séisme de Buhj (Inde) en 2001	53
Figure III.28 : Loi Moment-Rotation simplifiée de l'ATC 40	55
Figure III.29 : Illustration de la rotation de la corde $\theta$ sur divers éléments de construction	56
Figure III.30: Rotation de plastification de la corde $\theta_y$ d'un élément de construction	57
Figure III.31 : Répartition de la courbure $\phi$ le long d'un élément de construction plastifié (d'après Paulay & Priestley, 1992)	57
Figure III.32 : Rotation de la corde à la rupture $\theta_u$ d'un élément de construction	58
Figure III.33 : Relation moment – courbure	59
Figure III.34 : Distribution des déformations et des contraintes	60
Figure III.35 : Relation force-déplacement non linéaire d'un porte-à-faux élancé	61

## **CHAPITRE IV : METHODES DE RESOLUTION**

Figure IV.1 : Problème à un seul degré de liberté (barre + ressort)	64
---	----

## **CHAPITRE V : EXEMPLE D'APPLICATION**

Figure V.1 : Vue en plan des bâtiments	72
Figure V.2 : Coffrage du portique de la coupe A-A (sens XX) du bâtiment 01.	73
Figure V.3 : Coffrage du portique de la coupe B-B (sens YY) du bâtiment 01.	73
Figure V.4 : Coffrage du portique de la coupe A-A (sens XX) du bâtiment 02.	74
Figure V.5 : Coffrage du portique de la coupe B-B (sens YY) du bâtiment 02.	74
Figure V.6 : Coffrage du portique de la coupe A-A (sens XX) du bâtiment 03.	75
Figure V.7 : Coffrage du portique de la coupe B-B (sens YY) du bâtiment 03.	75
Figure V.8 : Loi de comportement du béton en compression sous chargement statique	76
Figure V.9 : Loi de comportement de l'acier en traction sous chargement statique	77
Figure V.10 : Distribution triangulaire des forces statiques.	81
Figure V.11 : Ferrailage (cm <sup>2</sup> ) du portique de la coupe AA (sens XX) bâtiment 01	82
Figure V.12 : Ferrailage (cm <sup>2</sup> ) du portique de la coupe BB (sens YY) bâtiment 01	82
Figure V.13 : Ferrailage (cm <sup>2</sup> ) du portique de la coupe AA (sens XX) bâtiment 02	83
Figure V.14 : Ferrailage (cm <sup>2</sup> ) du portique de la coupe BB (sens YY) bâtiment 02	83
Figure V.15 : Ferrailage (cm <sup>2</sup> ) du portique de la coupe AA (sens XX) bâtiment 03	84
Figure V.16 : Ferrailage (cm <sup>2</sup> ) du portique de la coupe BB (sens YY) bâtiment 03	84
Figure V.17 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens XX	85
Figure V.18 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens YY	86
Figure V.19 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens XX	87
Figure V.20 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens YY	88
Figure V.21 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens XX	89
Figure V.22 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens YY	90
Figure V.23 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet avant et après dimensionnement et ferrailage avec une analyse non linéaire dans le sens XX.	95
Figure V.24 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet avant et après dimensionnement et ferrailage avec une analyse non linéaire dans le sens YY.	96
Figure V.25 : Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens XX.	99
Figure V.26 : Représentation de l'idéalisation de la courbe capacité V-d en une courbe bilinéaire.	100
Figure V.27 : Représentation des niveaux de performance sur une courbe capacitaire bilinéaire.	100

## **INTRODUCTION GENERALE**

## **Introduction**

### **Présentation du problème**

De nos jours, la majorité des ingénieurs structureaux utilisent le processus linéaire de la théorie de l'élasticité établi au XIXème siècle. Or, il n'existe aucune structure, ni aucun matériau dont le comportement est parfaitement élastique linéaire. Généralement, on fait appel à l'analyse non linéaire des structures quand l'une des deux hypothèses suivantes n'est plus satisfaite :

- les déplacements sont suffisamment petites pour pouvoir confondre les configurations non déformées (Pour définir des grandeurs telles que les contraintes, les éléments de volume...etc.) ; c'est la linéarité géométrique ;
- les matériaux se comportent de manière élastique linéaire dans le domaine des déformations résultant de ces déplacements ; c'est la linéarité matérielle.

Ces deux hypothèses sont dites des hypothèses de l'élasticité linéaire, elles sont généralement admises pour le dimensionnement de la plupart des structures courantes. Cependant, la volonté de concevoir des structures plus économiques, souples, flexibles, de forme de plus en plus élancées (comme le Pont de Normandie ou le Pont de Millau) et on cherche à diminuer au maximum le poids de l'ouvrage d'une part et des matériaux dont la loi de comportement est non linéaire d'autre part. Cela conduit à l'abandon des hypothèses très étroites de l'élasticité linéaire et il apparaît que les résultats d'une analyse linéaire ne sont plus approximatifs, mais sont complètement erronés. Il convient également de mieux évaluer les coefficients de sécurité vis-à-vis de la ruine. Il est alors nécessaire d'introduire des comportements plus proches de la réalité. Ainsi, la prise en compte de ces points conduit alors à l'élaboration d'une analyse non linéaire afin de traduire correctement le comportement géométrique ou matériel des structures citées.

Les non-linéarités que l'on trouve sont classées en deux grandes catégories :

1. Les non-linéarités matérielles : Ces non-linéarités peuvent provenir de la loi de comportement intrinsèque du matériau (loi de comportement élasto-plastique par exemple), de la fissuration du matériau, du comportement du béton tendu entre deux fissures, du mode d'assemblage entre les composants élémentaires d'une structure.

2. La non-linéarité géométrique : Elle est due aux déplacements mêmes de la structure. En effet, lorsque ces déplacements deviennent importants, l'équilibre du système ne peut plus être décrit dans la configuration initiale non déformée (théorie au premier ordre des déplacements) mais doit être étudiée dans la configuration déformée (théorie au second ordre des déplacements). Dans cette catégorie, on peut distinguer les grands déplacements et les rotations modérées d'une part, et les grands déplacements et les grandes rotations d'autre part. La prise en compte de cette non-linéarité est essentielle pour l'étude de stabilité de forme des

pièces élancées, ou des structures élancées à nœuds déplaçables. Elle permet de prédire le niveau de charge critique pour le calcul au flambement.

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'impact de ces deux non-linéarités. Plus précisément, la combinaison de la non-linéarité matérielle et de la non-linéarité géométrique qui diminue la charge critique des éléments structurels tel que les poteaux, les murs, les piles de ponts ...etc.

Les règlements Algériens et internationaux exigent en général deux étapes de vérification : D'une part un calcul à l'état limite de service, dont le principe est de calculer la contrainte pour tous les éléments de la structure, et à comparer cette contrainte à la résistance du matériau pénalisée par un coefficient de sécurité. Cette approximation est logique dans le cas d'un matériau élastique fragile « verre ». Or, ce n'est pas le cas, le comportement des matériaux utilisés dans la construction est généralement ductile, que l'on pourrait exploiter. En fait, l'hypothèse utilisée est la limitation des sollicitations de services pour que la structure reste dans le domaine élastique.

D'autre part, le second type de calcul réglementaire correspond à une charge ultime, ou charge de ruine. L'analyse menée est alors une analyse capacitaire de la structure. Cependant, une telle analyse détermine la charge limite pour laquelle les déplacements correspondants sont inconnus. Or, de telles quantités « flèches, déformations » s'avèrent très importantes vis-à-vis du dimensionnement et de la sécurité.

Les règlements acceptent un calcul de structure linéaire couplé à un calcul local non linéaire (par exemple : dans une poutre, on détermine par un calcul linéaire la section la plus sollicitée, que l'on vérifie à l'aide d'un calcul non linéaire). En toute logique, le calcul de structure doit être lui-même non linéaire. En outre, les calculs linéaires aux états limites ultimes de la structure ne reflètent pas la réalité des phénomènes non-linéarités (rotules plastiques par exemple) et ne mènent pas à une bonne interprétation des résultats. C'est pourquoi, il est devenu difficile de faire l'impasse sur des modèles proprement posés, souvent non linéaires, nécessitant l'utilisation de méthodes de résolution appropriées, qui permettent de prendre en compte les deux types de non-linéarités, ce qui ne pose plus aucun problème pratique de nos jours, avec l'évolution des outils de calculs informatique, le moindre micro-ordinateur disposant d'une puissance de calcul nettement supérieure aux mainframes des dernières décennies.



## **Contenu de l'étude**

Ce présent travail s'inscrit dans le cadre d'une étude bibliographique ayant deux objectifs principaux : d'une part l'introduction et l'amélioration de nos connaissances de l'analyse statique et dynamique non linéaire matérielle et géométrique des structures et d'autre part la comparaison entre les deux analyses linéaire et non linéaire et de déterminer l'impact de cette analyse (non linéaire) sur les structures d'un point de vue stabilité (sécurité) et économie.

Une synthèse bibliographique a été réalisée sur : les raisons, les avantages et les inconvénients d'une analyse non linéaire en première partie et la classification des sources non linéaires en deuxième partie.

Le deuxième chapitre a été porté sur deux axes : la théorie non linéaire (aspect cinématique), ces différentes discrétisations et configurations et les catégories d'une analyse non linéaire géométrique.

Le troisième chapitre a été consacré à l'analyse non linéarité matérielle, qui nous a permis ensuite de sélectionner parmi plusieurs natures de modélisations possibles, le modèle global sur lequel il nous a paru simple et prioritaire de porter notre effort et pour traiter les problèmes non-linéaires des matériaux constitutifs des structures en béton armé, nous avons présenté les lois de comportements pour le béton et l'acier.

En complément à cette étude, il nous a semblé très utile d'exposer quelques méthodes de résolutions des systèmes non linéaires, qui ont été présentées dans le chapitre IV.

L'outil numérique employé dans les différentes simulations du cinquième chapitre est simple, facile d'utilisation mais un peu coûteux en temps de calcul.

Suite aux résultats obtenus de ce chapitre, il a été possible de proposer une nouvelle méthodologie (Chapitre V) de dimensionnement et de ferrailage des structures, en s'appuyant sur les deux analyses linéaire et non linéaire, afin d'améliorer le comportement et la capacité (stabilité et sécurité) et de diminuer le coût (économie) de nos structures.

## **CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

I.1. Un bref historique

I.2. Sources de non linéarité

I.3. Introduction à l'analyse non linéaire des contraintes

I.3.1. Analyse non linéaire des contraintes

I.3.1.a. Avantages de l'analyse linéaire

I.3.1.b. Raisons d'analyse non linéaire

I.3.1.c. Conséquences de l'analyse non linéaire

I.3.2. Classification des sources non-linéaire

I.3.2.a. Formulation pour un élément linéaire à deux nœuds

I.3.2.b. Problème élastoplastique à un seul degré de liberté

I.3.2.c. Console rigide lie a un ressort torsionel

## **I. Étude bibliographique**

### **I.1. Introduction**

Dans sa démarche de conception et de validation des structures, l'ingénieur en mécanique a de plus en plus recours aux outils numériques de simulation. La méthode numérique la plus répandue et certainement la plus utilisée de nos jours est la méthode des éléments finis (MEF). Cependant, la méthode des éléments finis classique, basée sur la formulation tridimensionnelle du principe des travaux virtuels et utilisant des approximations de bas degrés, devient inefficace lorsqu'elle est appliquée à des structures minces. Or, ces dernières constituent la majorité des structures industrielles et de génie civil. Pour résoudre ce problème, plusieurs travaux de recherche ont été menés dans lesquels les auteurs ont développés plusieurs techniques et plusieurs modélisations différentes.

L'analyse non linéaire par la méthode éléments finis a beaucoup de racines. Peu de temps après que l'analyse linéaire par éléments finis est apparue par le travail du groupe Boeing, les ingénieurs dans plusieurs compagnies ont commencé des extensions de cette méthode aux problèmes de la statique non linéaire avec petit déplacement, Par ailleurs, il a été difficile d'accepter cette méthode par la communauté des éléments finis et le dédain des chercheurs classiques. Par exemple, pour plusieurs années le journal de la mécanique appliquée a interdit des publications dans ce sujet, juste par tacitement, parce qu'ils l'on considérés sans aucune base (fondement) scientifique. L'acceptation de la méthode a été alimentée par la distribution libérale des premiers programmes d'Ed Wilson. Dans beaucoup de laboratoires dans le monde entier, les ingénieurs ont développé de nouvelles applications en modifiant et en prolongeant ces codes [06].

Beaucoup d'ouvrages traite ce problème (non linéarité), l'intérêt est non pas sur les travaux publiés, mais sur l'algorithme à intégrer dans le logiciel, comme beaucoup d'efforts dans cet âge d'information-ordinateur, le logiciel représente une indication plus significative de la situation actuelle que la littérature puisqu'il représente ce qui peut être appliqué dans la pratique.

## **I.2. Sources de non linéarité**

On classe les sources de non linéarité en deux catégories :

- La source géométrique, ou cinétique, due aux grands déplacements, accompagnés ou non de grandes déformations ; les phénomènes d'instabilité trouvent leur origine dans cette catégorie ;
- La source matérielle, ou rhéologique, due aux lois de comportement non linéaires des matériaux ; la plasticité, la viscoélasticité, le fluage, par exemple, caractérisent cette seconde catégorie.

Ces deux effets non linéaires agissent généralement simultanément. Pour en tenir compte, il faut recourir à la théorie non linéaire de la mécanique des milieux continus. Celle-ci nécessite, en cas de grands déplacements, l'emploi d'une description du mouvement du corps ; cette description est dite :

- Lagrangienne si elle étudie le mouvement du corps considéré comme une certaine quantité de matière se déplaçant dans l'espace, à partir d'une certaine référence connue
- Eulérienne si elle étudie le passage d'une certaine quantité de matière à travers une région donnée de l'espace, prise comme référence.

Les équations obtenues sont hautement non linéaires dans les deux cas, et leur résolution n'est concevable que d'une manière approchée, par exemple numérique. Les méthodes des différences finies et des éléments finis peuvent convenir [02].

### **I.3. Introduction à l'analyse non linéaire des contraintes**

#### **I.3.1. Analyse non linéaire des contraintes**

##### **I.3.1.a. Avantages de l'analyse linéaire**

Commençons en posant la question : « Pourquoi effectuer une analyse non linéaire ? » Après tous, la plupart des analyses des contraintes par la méthode éléments finies (MEF) s'effectuent pour des hypothèses d'un comportement élastique et des petits déplacements. Les avantages de l'analyse linéaire sont assez évidents : des solutions directes simples peuvent être obtenues sans le besoin d'une coûteuse augmentation de la charge ni des schémas itératifs. En outre, des solutions pour différents cas de charge peuvent être superposées et le nombre de constantes matérielles exigées pour décrire la loi de comportement est minimal dans une analyse linéaire.

La bonne analyse d'engineering exige une approximation fiable et dans beaucoup de cas l'hypothèse d'un comportement linéaire mène à une approche raisonnable du comportement de la structure. Cependant, il y a des situations où des effets non linéaires qui doivent être incorporés pour une évaluation réaliste de la structure.

##### **I.3.1.b. Raisons de l'analyse non linéaire**

Nous pouvons identifier plusieurs secteurs où l'analyse non linéaire peut être nécessaire :

- Utilisation directe dans la conception pour L'ELU et l'ELS. La variation significative dans des conditions de conception ces dernières années pour la haute performance et l'efficacité des composants modernes, les industries de haute technologie (telles que les industries aérospatiales et nucléaires) a fait de l'analyse sophistiquée une nécessité. En plus de la haute performance désirée, l'intégrité structurale des composants de machine est devenue un souci principal aux concepteurs aussi bien qu'au grand public.
- Utilisation dans l'évaluation des structures existantes dont l'intégrité peut être dans le doute dû (a) aux dommages évidents (fissuration, etc.), (b) chargements spéciaux non envisagés à l'étape de conception, et (c) au souci causé par la corrosion ou du vieillissement général. Ce qui précède se rapportera en grande partie aux états limites ultimes parce que, dans beaucoup de cas, l'état limite de service aura été déjà dépassé mais les questions clé demeurent toujours comme : La structure est sûre ? Est-ce qu'elle est réparable ? Et si c'est le cas, comment proposer un renforcement fonctionnel ? Peut-elle être maintenue fonctionnelle pour un peu plus longtemps ?
- Utilisation pour aider à établir les causes d'une défaillance structurelle.

- Utilisation dans la recherche : (a) pour aider à établir de simple « code de base » méthodes d'analyse et de conception, (b) pour aider à comprendre la base d'un comportement structural, et (c) pour examiner la validité « des modèles matériels » proposés.
- Utilisation pour la simulation : traitement, fabrication, et formulation des matériaux par exemple : processus de formation et de moulage en verre.

Avec la nouvelle génération puissante et peu coûteuse des ordinateurs, le coût de solution n'est plus l'obstacle principal qu'il a été. Cependant, la complexité de l'analyse non linéaire demeure toujours à la demande d'un « expert » aussi bien qu'un débutant.

Toutes les utilisations ci-dessus d'analyse non linéaire ont lieu actuellement mais nous pouvons spéculer une croissance significative dans l'utilisation de l'analyse non linéaire dans l'évaluation des structures existantes et par la suite dans la conception directe des structures les plus courantes. Ceci se produira quand le matériel « hardware » devient de plus en plus meilleur moins cher, plus rapide et les logiciels deviennent plus robustes et faciles à utiliser. Il deviendra simple et plus facile pour les ingénieurs d'utiliser cette analyse plutôt que les codes de base. Cependant, les problèmes surgiront parce que cette dernière inclut souvent de « divers facteurs » en relation avec l'expérience, l'incertitude, etc. l'arrivée de plus d'ordinateurs et des procédures d'analyse plus sûres mènera au besoin des « boucles 'surrounding' », probablement sur ordinateur, « code » pour incorporer les « facteurs partiels » comprenant ces facteurs en relation avec le degré d'incertitude de l'analyse. [Peut-être par la suite, l'analyse sera directement incluse dans un cadre statistique de fiabilité].

La tendance ci-dessus semble inévitable mais les dangers de la confiance croissante dans « les paquets experts » sont évidents.

### **I.3.1.c. Conséquences de l'analyse non linéaire**

Pour l'analyste utilisateur de l'analyse linéaire par élément fini dans la pratique industrielle, il y a un certain nombre de conséquences d'un comportement non linéaire qui doivent être identifiées avant l'embarquement dans une analyse non linéaire. Celles-ci incluent :

- Le principe de la superposition ne peut pas être appliqué. Par exemple, les résultats de plusieurs « cas de chargement » ne peuvent pas être mesurés, factorisés et combinés comme on fait dans une analyse linéaire.
- Seulement un cas de charge peut être traité à la fois.
- L'historique de chargement (c.-à-d. l'ordre d'application des charges) peut être très important. Par exemple, le comportement non linéaire d'un récipient qui est d'abord chauffé et ensuite pressurisé est très différent si l'ordre de chargement est inversé.

- La réponse de la structure peut être nettement non proportionnelle au chargement appliqué - même pour les états simples de chargement. Par exemple, dans un réservoir sous une augmentation constante de la pression, la contrainte des cerces peut être décroissante tandis que la contrainte radiale augmente. En conséquence, une pensée attentionnée doit être donnée à ce qui est une mesure appropriée du comportement.
- L'état initial des contraintes (par exemple contraintes résiduelles de la soudure, précontrainte etc.) peut être important.

### **I.3.2. Classification des sources non-linéaires**

Dans cette section des problèmes simples ayant un ou deux degrés de liberté sont décrits et employés pour classer les diverses sources de non-linéarité. Dans deux des trois exemples non linéaires, des éléments axiaux à deux nœuds sont adoptés [04].

#### **I.3.2.a. Formulation pour un élément linéaire à deux nœuds**

Sous l'hypothèse linéaire, un élément typique de longueur  $l$  a une déformation axiale.

$$\xi = \frac{u_2 - u_1}{l} \quad (1)$$

Où  $u_1$  et  $u_2$  sont les déplacements axiaux aux nœuds **1** et **2** de l'élément.

Pour le comportement élastique linéaire où  $E$  est le module d'élasticité, la contrainte axiale est :

$$\sigma = E \xi = E \frac{u_2 - u_1}{l} \quad (2)$$

Et la force axiale pour la barre de section  $A$  est :

$$P = E A \xi = E A \frac{u_2 - u_1}{l} \quad (3)$$

Considérer le problème des trois barres représenté sur la figure I.1. Les trois barres, qui sont rigidement encastrées à une extrémité et liées ensemble à une barre infiniment rigide à l'autre extrémité. Elles sont chargées par une force axiale  $f$  à l'extrémité liée à la barre rigide. Chaque barre est représentée par un élément simple de deux nœuds. Pour l'équilibre, la charge appliquée  $f$  doit être équilibrée par les forces de résistance internes dans chaque élément.

Pour le déplacement  $u$  à l'extrémité libre de chaque élément la déformation axiale est  $u/l$  et par conséquent la contrainte axiale est  $Eu/l$ . La force interne résistante à l'extrémité libre de chaque élément est ainsi  $E Au/l$  de sorte que pour l'équilibre :

$$p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} - f = 0 \quad (4)$$

Ou :

$$\frac{3EAu}{l} - f = 0 \quad (5)$$

Ou :

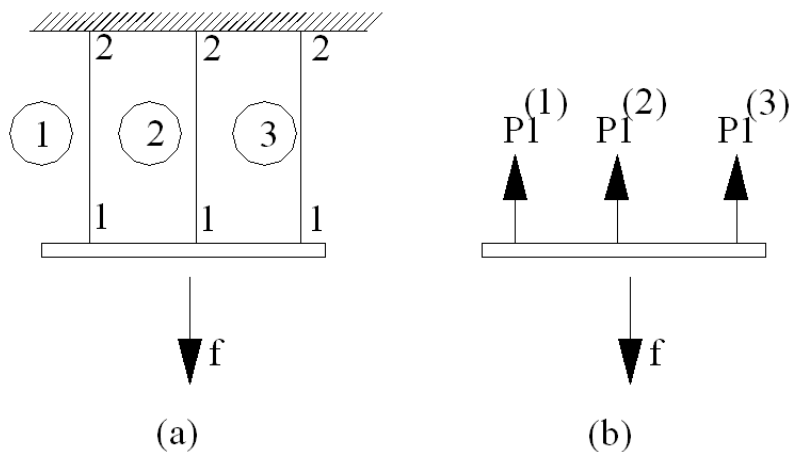
$$A(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}) - f = 0 \quad (6)$$

Nous pouvons remplacer la structure de trois barres par un ressort :

$$K = \frac{3EA}{l} \quad (7)$$

De sorte que :

$$Ku - f = 0 \quad (8)$$



**Figure I.1:** problème de trois-barre : (a) structure de 3-barres, et (b) équilibre des forces externes et internes.

### I.3.2.b. Problème élastoplastique à un seul degré de liberté

Pour illustrer la source de non-linéarité dans le problème élastoplastique on considère le problème élastoplastique à un seul degré de liberté représenté sur la figure I.1.

Les relations uni-axiales contrainte-déformation soient du type représenté ci-dessus sur la figure I.1. En d'autres termes une courbe bilinéaire élastique parfaitement plastique peut être adoptée. Chaque barre est de section  $A$  et un module élastique  $E$ . Les valeurs des contraintes d'écoulement pour le matériau dans les barres sont  $\sigma_0^{(1)}$ ,  $\sigma_0^{(2)}$  et  $\sigma_0^{(3)}$  où  $\sigma_0^{(1)} < \sigma_0^{(2)} < \sigma_0^{(3)}$ . Quand la force  $f$  est appliquée tous les comportements sont d'abord élastiques. Comme la charge est augmentée la contrainte dans l'élément **1**, atteint la contrainte d'écoulement, l'élément se plastifie et ultérieurement ne peut porter aucun accroissement de contrainte. Par conséquent, la force interne résistante provenant de l'élément **1** de cette étape est la suivante :

$$p^{(1)} = \sigma_0^{(1)} A \quad (9)$$

Et l'élément **1** perd sa rigidité pour une charge croissante.

Comme la charge est augmentée la charge supplémentaire doit être équilibrée par les forces internes résistantes additionnelles dans les éléments **2** et **3**. Par la suite, la contrainte dans



l'élément **2** atteint la contrainte d'écoulement et de même cet élément se plastifie, perd sa rigidité et ultérieurement ne peut porter aucun accroissement de charge. Ainsi, toute la charge supplémentaire doit être prise par l'élément **3**.

Finalement, l'élément **3** se plastifie et perd sa rigidité et la structure ne peut prendre aucune autre charge. La charge à laquelle cet élément se plastifie est :

$$f^{ult} = A(\sigma_0^{(1)} + \sigma_0^{(2)} + \sigma_0^{(3)}) \quad (10)$$

Ainsi, la source de non-linéarité dans le problème élastoplastique se produit par l'évaluation de la contrainte dans les éléments et par conséquent dans la force de résistante interne. Effectivement la contrainte est une fonction non linéaire des déplacements.

La courbe charge-déplacement pour ce problème est montrée sur la figure I.2 et se compose d'une courbe par partie linéaire avec la fin de chaque segment signalant le début d'écoulement d'un nouvel élément jusqu'à la rupture de la structure entière.

La pente de la courbe charge-déplacement à n'importe quelle étape de l'analyse s'appelle « la rigidité tangentielle »  $K_T$ . Quand la structure est élastique :

$$K_T = \frac{3EA}{l} \quad (11)$$

À la plastification de la première barre :

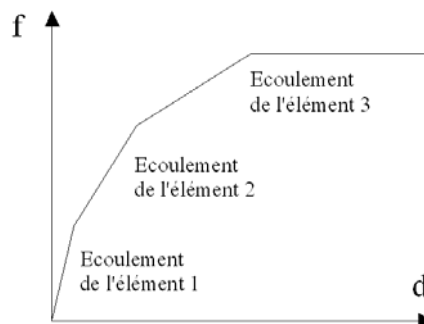
$$K_T = \frac{2EA}{l} \quad (12)$$

Quand la deuxième barre se plastifie :

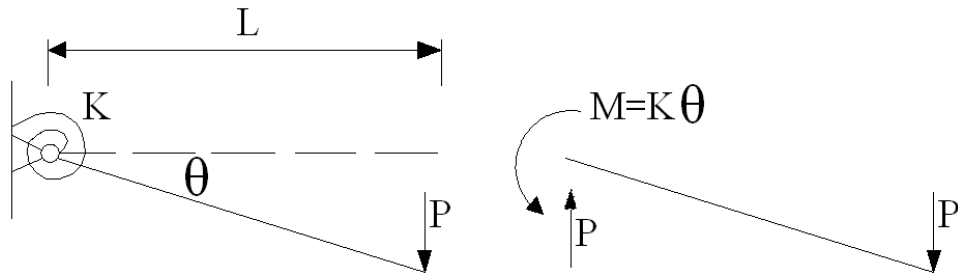
$$K_T = \frac{EA}{l} \quad (13)$$

Et au finale, après la plastification de la dernière barre

$$K_T = 0$$



**Figure I.2:** Courbe charge-déplacement pour le problème des 3 barres d'elastoplastique.



**Figure I.3:** Console rigide lie à un ressort torsionnel et diagramme du corps libre.

### **I.3.2.c. Console rigide lie à un ressort torsionnel :**

Pour fournir un exemple de la source de non-linéarité dans un problème géométriquement non linéaire, nous considérons le lien rigide encorbellement élastique linéaire de ressort de torsion représenté sur la figure I.3. Ce problème est également considéré au chapitre II.

L'équilibre des moments au tour de la rotule :

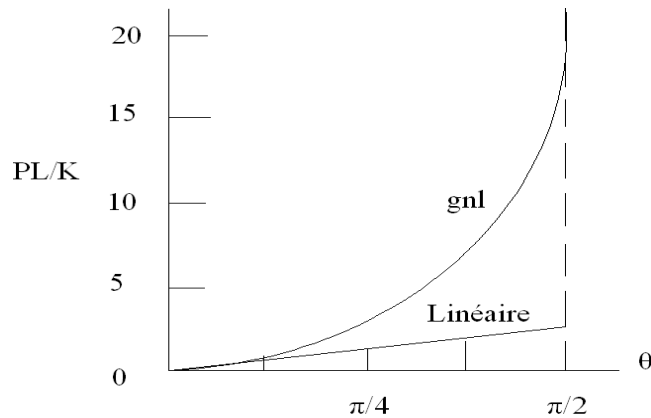
$$PL\cos\theta = M \quad \text{ou} \quad P = \frac{K\theta}{L\cos\theta} \quad (14)$$

Là où  $K$  est la rigidité rotationnelle du ressort et  $M$  est le moment fourni par le ressort. Si l'angle  $\theta$  est petit alors  $\cos\theta \rightarrow 1$  et l'équation linéaire d'équilibre recherché est comme :

$$P = \frac{K\theta}{L} \quad (15)$$

Pour le cas géométriquement non linéaire la courbe d'équilibre est montrée sur la figure I.4. La solution linéaire, bien applicable pour de petits angles, admette la rotation  $\theta > \pi/2$  - c'est clairement impossible et n'est pas permis par la représentation géométrique non linéaire.

Dans ce cas-ci la source de non-linéarité est clairement la conséquence du changement de la géométrie des équations d'équilibre. En structures flexibles, car nous verrons plus tard, les changements de la géométrie peuvent également affecter les relations déformation-déplacement.



**Figure I.4 :** Courbe charge-rotation - comparaison de la solution linéaire et non linéaire.

## **CHAPITRE II : NON LINEARITE GEOMETRIQUE**

II.1. Introduction a l'analyse non linéaire

II.2. Théorie non linéaire (aspect cinématique, différentes discrétisations)

II.2.1. Aspect cinématique

II.2.2. La description est lagrangienne

II.2.3. Différentes configurations d'un corps en mouvement

II.2.4. Description Lagrangienne corotationnelle

II.3. Catégories d'analyse GNL

II.3.1. Analyse en grand déplacement/grande rotation/petite déformation

II.3.2. Grand déplacement/petite rotation/petite déformation

II.3.3. Grand déplacement / grande rotation / grande déformation

II.3.4. Analyse de stabilité linéaire et formulation de la matrice géométrique

II.3.4.a. Discrétisation par éléments finis

II.3.4.b. Instabilité élastique ; Analyse de bifurcation

## **II. Non linéarité géométrique**

### **II.1. Introduction a l'analyse non linéaire**

La réponse simple à la question : est-ce que l'analyse linéaire est erronée, le monde exhibe essentiellement un comportement non linéaire et il est entièrement fortuit que l'hypothèse d'un comportement linéaire permet à la réponse précise d'être prévue. Mais clairement l'analyse linéaire ne peut pas être que fausse ou bien, nous aurons noté un nombre exceptionnel de grandes défaillances de structure. En conséquence, il est important de comprendre ou apprécier au moins sous quelle circonstance la non-linéarité peut être ignorée et des linéarités peuvent être présumées pour un model naturel. Alternativement, si nous devons chercher une plus grande exploitation des matériaux (utilisation plus économique), un minimum de poids, une plus grande sûreté et même de beauté, alors prendre en compte le plus possible le vrai comportement non linéaire peut devenir nécessaire.

Dans ce chapitre nous limiterons notre discussion au comportement géométrique non linéaire (GNL) dans lequel la géométrie change, toutefois grand ou petit, que ce soit une structure chargée, un corps d'automobile déformé (délibérément ou accidentellement) ou un métal expulsé.

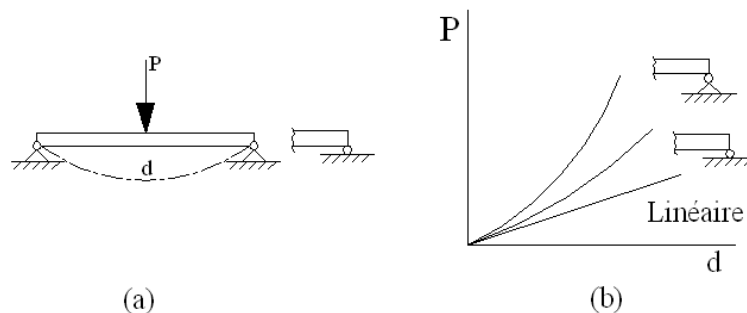
Jusqu'ici nous avons supposé que le comportement matériel demeure linéaire - les contraintes sont directement proportionnel aux déformations, mais même cette notion simple devient un peu confondante quand, par exemple, de grandes déformations sont produites. Pourquoi? Les ingénieurs structuraux définissent habituellement la déformation en tant que :  $\xi = (L - L_0)/L_0$  mais les métallurgistes préfèrent :  $\xi = \ln(L/L_0)$  et si la contrainte :  $\sigma = E \xi$ , où :  $E$  est le module de Young, alors le comportement linéaire pour l'ingénieur structural sera non linéaire pour le métallurgiste. La raison pour laquelle ceci n'a pas causé beaucoup de problèmes dans la communauté des ingénieurs est la suivante : quand les déformations sont petites les deux définitions de déformation se coïncident pratiquement. Cet exemple simple révèle que la définition de la déformation n'est pas immuable et en effet un certain nombre d'autres déformations sont actuellement « sur le marché » par exemple. Déformation de Green et d'Almansi (également appelée déformation Lagrangienne et eulérienne). Si vous considérez maintenant que l'énergie de déformation est en fonction de la contrainte, du temps et de la déformation et on n'attendrait pas à ce que cela change simplement parce que nous avons choisi une mesure différente de déformation, alors il n'est pas illogique de spéculer que les différentes mesures de contrainte peuvent exister ! Ce n'est pas aussi un concept illogique - dans un essai de traction, par exemple, nous pourrions mesurer la contrainte comme une force divisée soit par la section déformée, soit par la section non déformée. La première s'appelle la contrainte de Cauchy tandis que cette dernière s'appelle la 1<sup>er</sup> contrainte de Piola-Kirchhoff.

Si les déformations demeurent petites (moins de 4%) alors nous pouvons ignorer largement des différences entre les mesures de déformation et concentrer notre attention sur le comportement non linéaire provoqué par des effets géométriques. Ceci tend à être plus

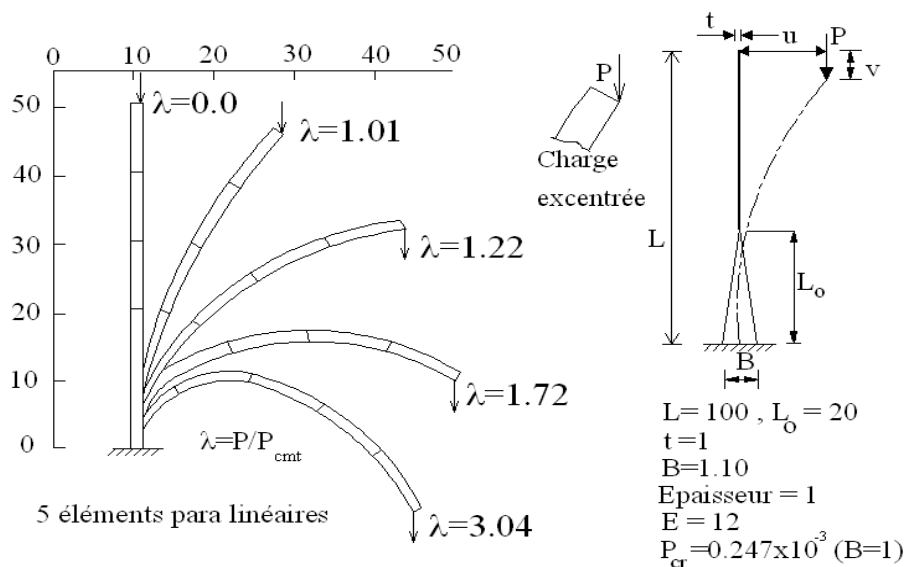
rassurant parce que l'intuition nous indique souvent que le comportement géométrique non linéaire (GNL) est plus raisonnable que le comportement linéaire. Par exemple, considérer la poutre « simplement » appuyée représentée sur la figure II.1 (a).

La figure II.1 (b) nous indique que la traction se développera et que des petites augmentations proportionnelles de la charge, produiront des augmentations correspondantes au déplacement vertical  $d$  de plus en plus petites. L'analyse linéaire ne révélera pas clairement ce phénomène. En outre, si l'appui de droite était un appui simple, voir la figure II.1 (b), une réponse non linéaire différente surgirait, mettant en question la signification de « simplement » appuyée. Ici il convient de noter que, pour une charge donnée, le déplacement non linéaire est moins que le déplacement linéaire - un exemple d'un comportement GNL plus complexe (d'une colonne excentriquement chargée), voir la figure II.2 (a).

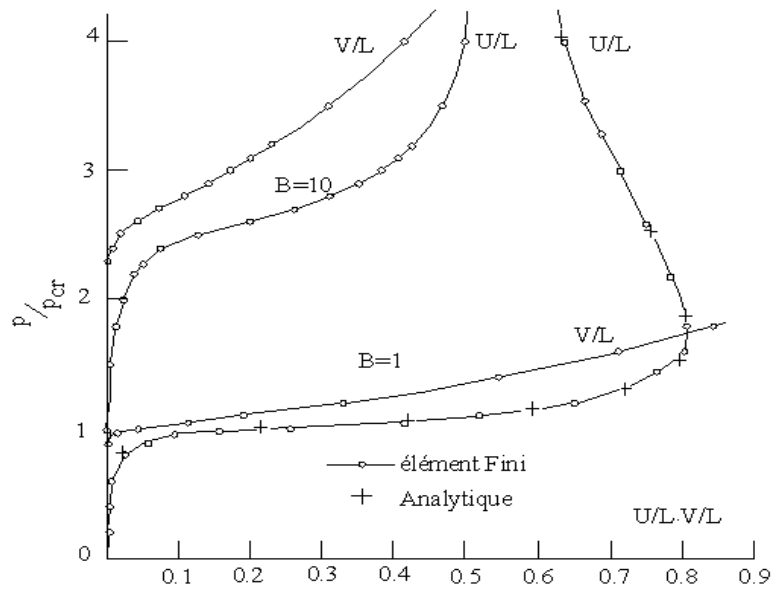
Comme la charge approche de la « charge critique élastique » la colonne montre un ramollissement du comportement manifesté par une grande augmentation soudaine de déplacement pour une petite augmentation de charge, voir la figure II.2 (b). Après que le déplacement horizontal maximum soit atteint la structure commence à raidir indéfiniment. Tous les points sur la courbe charge-déplacement représentent des configurations d'équilibre et toute la courbe s'appelle la courbe d'équilibre. Nous verrons plus tard, des analyses de flambement (ou d'instabilité) originaire des considérations GNL.



**La figure II.1 :** Comportement GNL d'une poutre « simplement » appuyée.

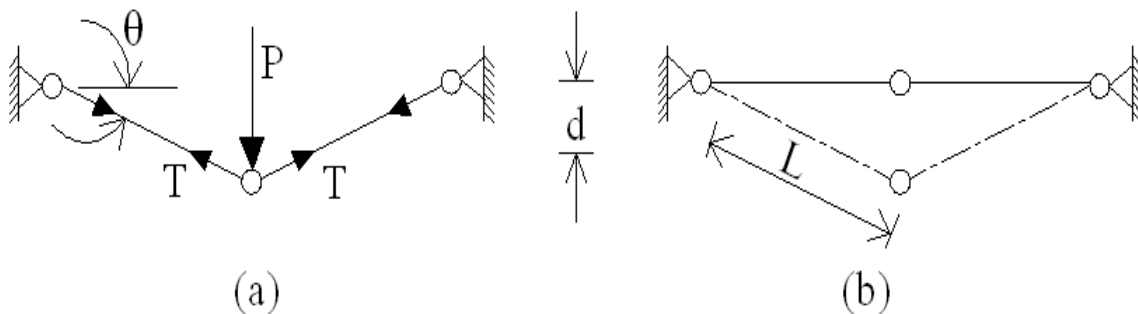


**Figure II.2 (a) :** Comportement GNL d'une colonne : profile de déflexion.



**Figure II.2 (b) :** Comportement GNL d'une colonne : courbes charge-déflexion.

Un autre exemple simple illustrera le besoin d'une analyse GNL. Supposant que les déplacements sont très petits, les efforts dans les barres du treillis, représentés sur la figure II.3 (a), sont :  $T = P/2\sin\theta$  ou :  $\theta$  est l'angle non déformé mais si cet angle est nul, voir la figure II.3 (b), alors :  $T = Pl/2d$ , où :  $d$  est le déplacement vertical qui doit être considéré afin de trouver une solution au problème.



**Figure II.3 :** Analyse d'un treillis et d'un câble.

Les exemples cités se rapportent surtout à des situations de petites déformations mais le comportement GNL, comme il a été mentionné précédemment, entoure également le comportement en grande déformation, qui se produit pendant beaucoup de processus de formation industriels, tels que les pièces forgées, le roulement, l'extrusion et la formation des tôles minces. La plupart de ces opérations concernent des chargements et des états limites qui sont dépendants aux déformations. Par ailleurs, si le comportement plastique domine les caractéristiques matérielles il peut être possible d'abandonner la description du matériau comme un solide et de le considérer comme étant un fluide.

En traitant les structures dont les déplacements peuvent être assez grands pour changer de manière significative leur forme nous devons écrire les équations d'équilibre en termes de configuration déformée, qui jusqu'à ce que l'analyse soit faite nous ne savons pas la forme déformée !, voir, par exemple la structure sur la figure II.3 (b).

Rappelez vous que dans l'analyse géométrique linéaire (est l'analyse que 95 % de personnes utilisent le plus souvent) l'équilibre est formulé en respectant la forme non déformée et (les petits) déplacements sont ignorés. Supposant que nous savons (ou au moins nous devinons intelligemment) où la structure EST après le chargement alors on peut établir une équation d'équilibre en respectant cette position. Une formulation qui exprime l'équilibre en termes d'où la structure EST s'appelle eulérienne ou une description spatiale du comportement. Toutefois il est possible, que l'équilibre puisse être exprimé en termes de configuration initiale déchargée de la structure ; ou où la structure ÉTAIT avant qu'elle soit chargée. Une formulation en laquelle l'équilibre est exprimé en termes d'où la structure ÉTAIT s'appelle lagrangienne ou une description matérielle du comportement. La distinction entre la description matérielle et spatiale du mouvement est d'importance cruciale dans la théorie de déformation finie qui fournit la base mathématique pour beaucoup d'analyse GNL.

Clairement, l'analyse GNL s'applique dans plusieurs domaines civils, dans des problèmes de construction structurale, mécanique et ceci est reflété dans la complexité des formulations des éléments finis (MEF) et des programmes nécessaires pour modéliser une variété de problème.

## **II.2. Théorie non linéaire (aspect cinématique, différentes discrétisations)**

### **II.2.1. Aspect cinématique**

L'analyse non linéaire des structures du fait des grands déplacements, nécessite d'étudier le mouvement du corps. De manière générale, deux principes de formulations sont utilisés pour la description du mouvement du corps elles peuvent être Lagrangienne ou Eulérienne.

- La description est lagrangienne, si les variables indépendantes régissant le mouvement du corps sont les positions  $x$  d'une particule  $X$  dans une configuration de référence arbitraire. Et le temps  $t = 0$ . cette description peut être appelée relative si les variables indépendantes sont les positions  $x$  d'une particule  $X$  dans une configuration de référence qui varie avec le temps  $t$ . cette description est un cas particulier de la description lagrangienne et elle est appelée « description actualisée » [07].
- La description eulérienne, si les variables indépendantes régissant le mouvement du corps sont la position courante  $x$  d'une particule  $X$  et le temps  $t$ . ainsi, la référence dans ce cas est la région de l'espace ou passe le corps. Cette description est généralement utilise pour l'étude des fluides. Des deux descriptions présentées, la description lagrangienne est celle qui semble la mieux adaptée aux problèmes non linéaires des structures. En effet, elle étudie le passage du corps dans une région de l'espace qui est prise comme référence [07].

### **II.2.2. La description lagrangienne**

La description lagrangienne a été utilisée initialement par TURNER et ARGYRIS qui l'ont appliquée aux barres, poutres, plaques et coques, et ceci de manière intuitive. Il s'agissait de calculer une matrice de rigidité incrémentale sur la position déformée en tenant compte des termes quadratiques du tenseur de déformation. Par augmentation progressive de la sollicitation, on obtenait donc et de manière incrémentale la réponse non linéaire de la structure. Cette manière de procéder permet de ramener le problème non linéaire à une séquence de problèmes linéaires. Si cette technique a le mérite d'être la première tentative d'approcher le problème non linéaire, elle reste cependant très intuitive car elle ne s'appuie pas sur une base théorique solide [07]. Plus tard d'autres auteurs ont permis d'établir correctement cette formulation :

ODEN, MARCAL définissent la matrice de rigidité en description lagrangienne en prenant comme référence l'état initial non déformé : c'est la description lagrangienne appelée totale.

HIBBIT MARCAL et RICE utilisent le théorème des travaux virtuels et obtient la forme incrémentale par différentiation. Ce qui donne déjà à l'analyse non linéaire sa base pratiquement définitive.

De son côté ODEN écrit les équations à partir du principe de la conservation de l'énergie après avoir discrétisé le champ des déplacements linéairement en fonction des inconnues, il résout le système d'équation non linéaires ainsi obtenu.

YAGHAMI en préférant prendre comme état de référence l'état actuel, pose les bases à la description appelée « description lagrangienne actualisée ».

Il obtient la forme incrémentale en écrivant le théorème des déplacements virtuels sur deux états voisins et en faisant ensuite la soustraction entre les expressions de l'équilibre écrite sur ces deux états voisins. Cette approche est reprise plus tard par FREY ou elle est très largement développée. Elle a l'avantage de montrer explicitement les termes à négliger lors de la linéarisation pour obtenir l'expression incrémentale. Tous ces travaux et d'autres non cités ont permis d'établir des bases correctes de la description lagrangienne et de prouver l'efficacité de l'approche incrémentale.

Comme il a été montré précédemment, la description Lagrangienne utilise comme état de référence, une configuration prise de manière arbitraire. Ceci donne lieu à deux approches principales. La première consiste à utiliser l'état initial comme référence. Elle semble la plus simple du fait de calculer par rapport un état connu. Sa mise au point par contre, n'est pas aisée car la construction de sa matrice de rigidité est laborieuse.

La seconde approche, consiste à utiliser l'état actuel comme référence. Elle fut d'abord utilisée de manière intuitive avant d'être décrite correctement par YAGHMAI et ensuite par ATLURI, ARGYRIS, BATHE, qui lui ont donné sa base théorique correcte. Le calcul par rapport à la



référence actuelle permet la construction de la matrice de rigidité de manière beaucoup plus simple que par l'approche précédente. Cependant, l'évaluation de la configuration déformée actuelle servant de configuration de référence, n'est pas simple. Choisir donc, l'une de ces deux approches n'est pas évident. En fait, il apparaît, vue la très large littérature Sur ce sujet que l'utilisation de l'une ou de l'autre dépend du type de non linéarité à traiter, ce qui montre que la disposition dans un code de calcul des deux approches est souhaitable. Pour avoir une idée plus claire sur ces descriptions, nous nous proposons maintenant de les développer afin de mieux cerner les avantages et les inconvénients que présente chacune d'elles par rapport au but recherché dans ce travail [07].

### **II.2.3. Différentes configurations d'un corps en mouvement**

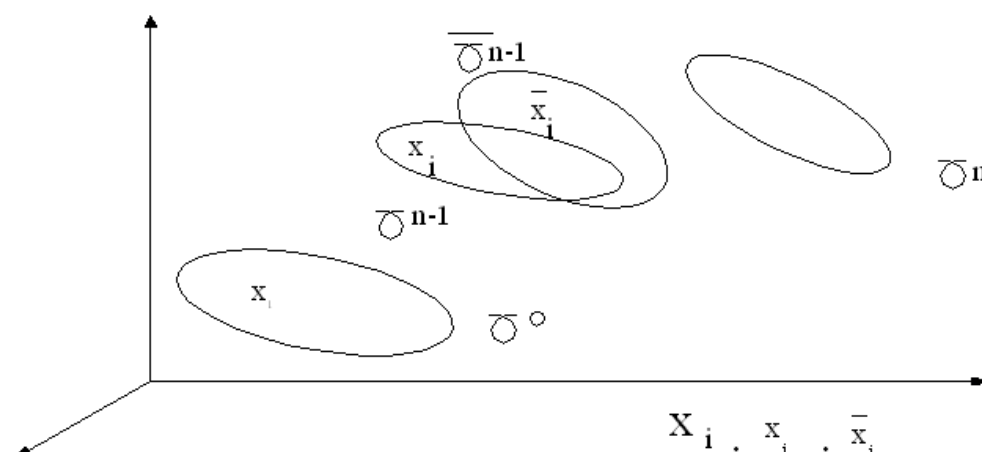
Considérons le mouvement d'un corps dans un système de coordonnées cartésiennes, et définissons les positions d'équilibres qu'occupe ce corps au cours du temps (Figure II.4).

Nous pouvons définir quatre configurations d'équilibre du corps :

- $\gamma^0$  : Configuration initiale non déformée au temps  $t = 0$
- $\gamma^n$  : Configuration courante à calculer
- $\gamma^{n-1}$  : configuration voisine de  $\gamma^n$  au temps  $t$
- $\bar{\gamma}^{n-1}$  : Configuration très voisine de  $\gamma^{n-1}$

La description Lagrangienne est appelée

- Totale (notée D.L.T) : si on effectue le calcul par rapport à la référence  $\gamma^0$
- Actualisée (notée D.L.A) : si on effectue le calcul par rapport à la référence  $\gamma^{n-1}$



**Figure II.4 :** Configurations d'un corps en mouvement.

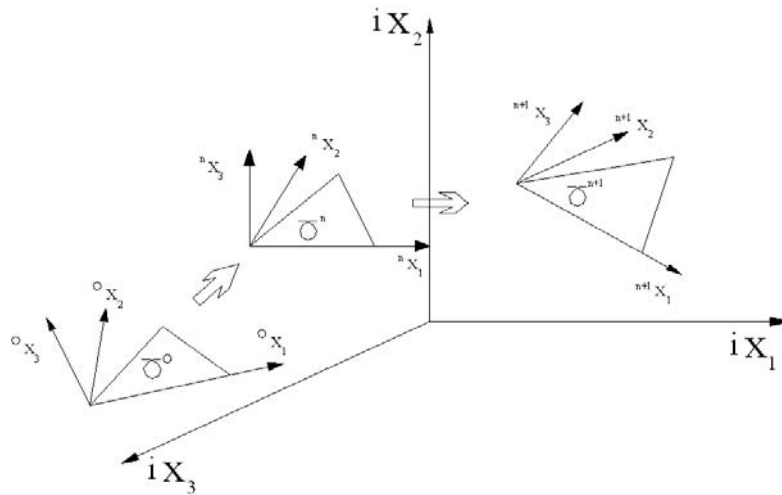
Une troisième description notée D.L.A.A, proche de la D.L.A. peut être définie si on prend comme référence une configuration très proche de  $\gamma^{n-1}$  et obtenue après un mouvement de corps rigide de la configuration de référence  $\gamma^0$ .

Dans ce cas la configuration actuelle inconnue  $\gamma^{n-1}$ , est remplacée par la configuration  $\bar{\gamma}^{n-1}$ , qui est beaucoup plus simple à manipuler car elle est connue et non déformée. Cette description est appelée description Lagrangienne actualisée approchée et est notée : D.L.A.A. Il faut préciser enfin que pour ces trois descriptions Lagrangiennes. Le système d'axes de référence utilisé est fixe et commun aux trois [03]. Ainsi, les coordonnées d'une même particule sont notées dans le même système d'axes par  $X_i$  sur  $\gamma^0$ , par  $X_i$  sur  $\gamma^{n-1}$  et par  $\bar{X}_i$  sur  $\bar{\gamma}^{n-1}$  (Figure II.4).

#### **II.2.4. Description Lagrangienne corotationnelle**

Pour les descriptions Lagrangiennes classiques définies précédemment, le système d'axes de référence est gardé fixe. Une autre description Lagrangienne peut être définie, si on fait bouger le système d'axes de référence avec le mouvement du corps de manière à éliminer le mouvement de corps rigide induit par le grand déplacement (Figure II.5). Il s'agira ensuite de définir exactement la position de ce système d'axes. Ceci peut être résolu en le prenant comme le système d'axes obtenu après avoir fait subir au système d'axes initial un mouvement de corps rigide (incluant translation et rotation rigides) afin de le positionner le plus proche possible de la configuration actuelle déformée. Cette description appelée description Lagrangienne corotationnelle a été utilisée par plusieurs auteurs "RANKIN C.C et BROGAN F.A", car elle s'avère dans certains cas être très intéressante parce que d'une manipulation relativement simple [03].

De plus, le fait de constater que dans la majorité des cas la non linéarité géométrique peut être décomposée en un large mouvement de corps rigide accompagné d'une déformation locale, peut donner à la description corotationnelle un avantage certain. En effet elle permettrait d'absorber les grandes rotations ou translations de corps rigide par l'actualisation des coordonnées sur le nouveau système d'axes, et les rotations restantes peuvent être considérées petites ou modérées ce qui est généralement acceptable. Ainsi on surmonte un des problèmes des descriptions Lagrangiennes classiques, qui est précisément le traitement des grandes rotations.



**Figure II.5 :** Description corotationnelle pour un élément triangulaire.

Nous citons enfin, le travail de DE VILLE DE GOYET où un excellent développement de la description corotationnelle est fait pour une application en analyse non linéaire de poutres spatiales.

Comme pour la description Lagrangienne classique, on définit pour la description Lagrangienne corotationnelle, deux descriptions particulières se différenciant par le choix de la configuration de référence adoptée.

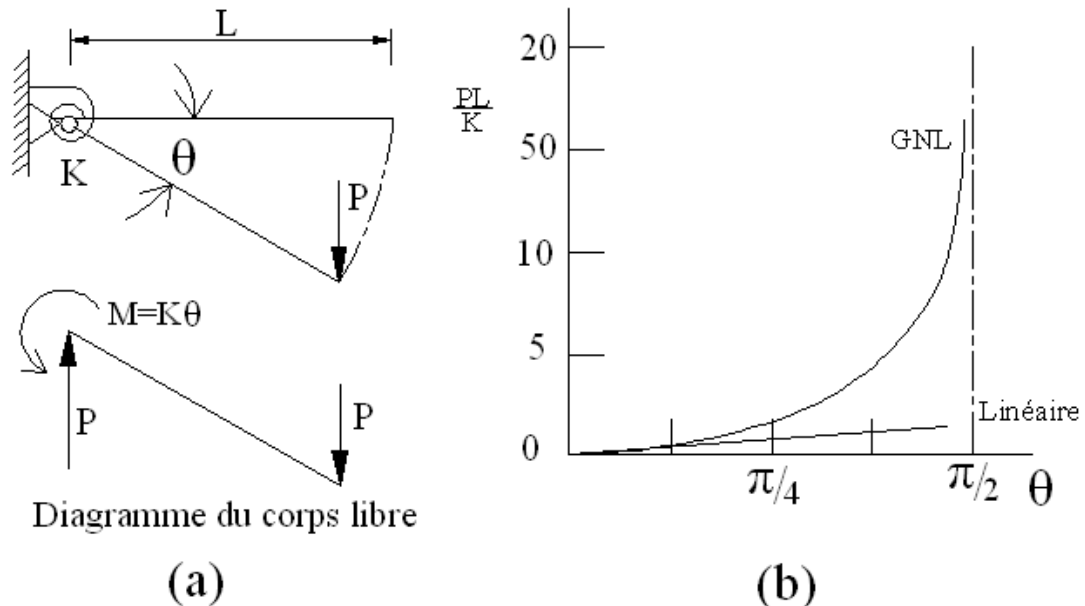
Ainsi la description Lagrangienne corotationnelle sera appelée, par souci d'allègement de l'écriture, description corotationnelle et on dira qu'elle est d'après DE VILLE DE GOYET :

- Totale (notée D.C.T) : si le calcul est effectué par rapport à la référence initiale  $\gamma^0$  mais sur un système d'axes corotationnels. Ainsi, cette référence initiale est en fait  $\gamma^{n-1}$  définie précédemment.
- Actualisée (notée D.C.A) : si le calcul est effectué par rapport à la référence actuelle  $\gamma^{n-1}$ , et Sur un système d'axes corotationnels.

## II.3. Catégories d'analyse non linéaire géométrique

### II.3.1. Analyse en grand déplacement / grande rotation / petite déformation

Ce type de comportement GNL est typique a celle exhibé par une canne à pêche sous une déformation de débarquement d'un grand poisson ; ou par un ressort d'une montre mécanique ; par une hélice d'hélicoptère sous un chargement statique. Deux exemples simples illustreront ce type de comportement [12]. Considérer une barre rigide lie a un ressort de torsion élastique linéaire sur la figure II.6 (a).



**Figure II.6 :** Comportement en grand déplacement, grande rotation et petite déformation.

Pour l'équilibre des moments au tour de la rotule :

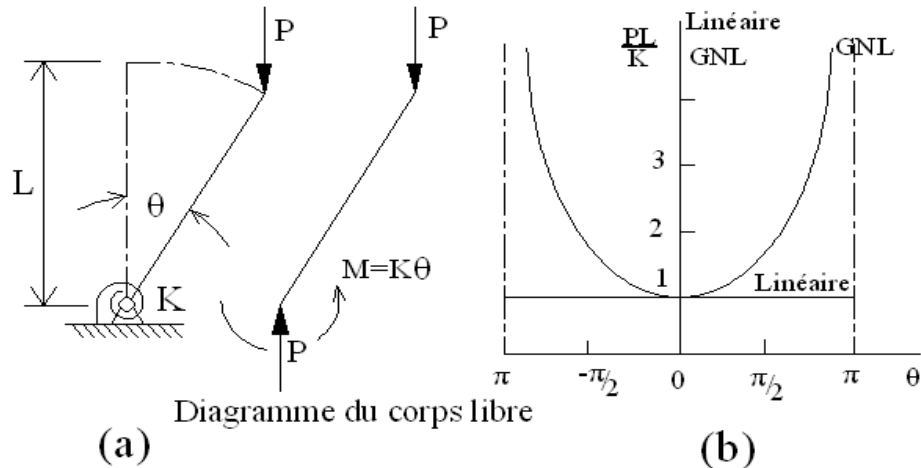
$$PL\cos\theta = M = K\theta \quad \text{ou} \quad P = \frac{K\theta}{L\cos\theta} \quad (1)$$

Là où  $K$  est la rigidité de torsion du ressort et  $M$  le moment fourni par le ressort. Si l'angle  $\theta$  est petit,  $\cos\theta \rightarrow 1$  et l'équation linéaire d'équilibre recherchée est :

$$P = \frac{K}{L}\theta \quad (2)$$

Pour le cas GNL la courbe d'équilibre est montrée sur la figure II.6 (b) ; il semble clairement que la courbe linéaire diverge quand :  $\theta > \frac{\pi}{2}$

Un deuxième exemple démontre des dispositifs plus intéressants du comportement GNL. Le même système barre rigide-ressort est maintenant chargé verticalement comme une colonne, voir la figure II.7 (a).



**Figure II.7 :** Courbe d'équilibre par bifurcation et flambement d'une colonne.

Pour l'équilibre des moments au tour de la rotule :

$$PL\sin\theta = M = K\theta \quad \text{ou} \quad P = \frac{K\theta}{L\sin\theta} \quad (3)$$

Cette équation d'équilibre est légèrement peu commune parce qu'elle a deux solutions, à savoir :

$$\theta = 0 \quad \text{pour n'importe quel } P \quad \text{et} \quad \frac{PL}{K} = \frac{\theta}{\sin\theta} \quad (4)$$

Ceux-ci sont montrés sur la figure II.7 (b), Quand  $PL/K > 1$  l'équation d'équilibre peut avoir trois solutions pour la rotation  $\theta$  ; encore un autre fait du comportement GNL par lequel les solutions n'aient pas besoin d'être uniques. L'intersection de la courbe d'équilibre, à  $PL/K = 1$ , s'appelle le point de bifurcation (ou de branche). Notre analyse sera insensé si  $\theta \rightarrow 0$  ;  $\sin\theta \rightarrow 0$  et l'équation d'équilibre devient :

$$(K - PL)\theta = 0 \quad (5)$$

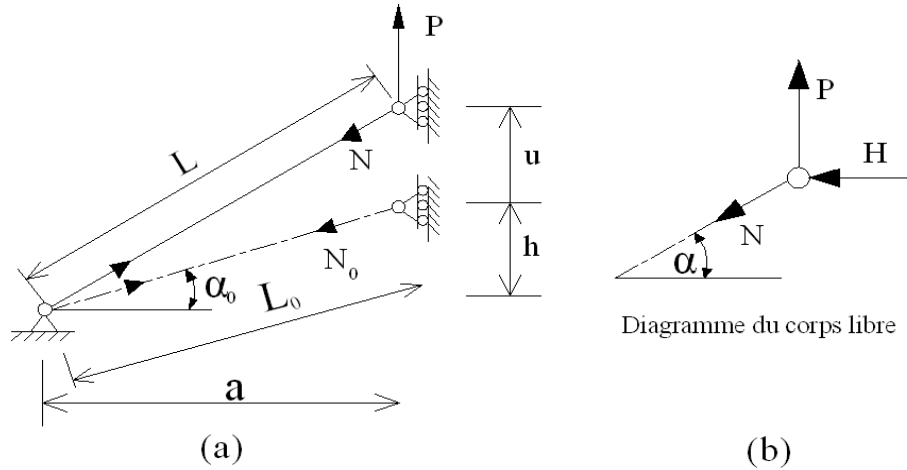
L'équilibre règne encore si :  $\theta = 0$  pour n'importe quelle valeur de  $P$  mais si :  $PL/K = 1$  la colonne est en état d'équilibre pour n'importe quelle valeur de  $\theta$ , comme représenté par le trait horizontal de la figure II.7 (b). Clairement, c'est une solution qui défie l'imagination mais elle apparaît souvent en manuels.

Sans entrer dans la matière trop profonde (détaillée) il suffit de dire que l'équation (5) représente, dans ce cas très simple, une analyse de stabilité linéaire pour laquelle nous trouvons la valeur de  $P$  pour laquelle la rigidité structurale devient singulière, ici quand  $(K - PL) = 0$ . Cette valeur,  $P_c = k/L$ , s'appelle la charge critique élastique (ou la charge de flambement). Elle transpire cela quand  $\theta = 0$ , la courbe d'équilibre est stable pour :  $PL/K \leq 1$  et instable pour :  $PL/K < 1$ . La courbe d'équilibre « fer à cheval », représenté sur la figure II.7 (b), est toujours stable et connu comme la courbe de flambement d'une colonne. Bien que, cet exemple illustre les mêmes caractéristiques démontrées par des plaques en compression. En conclusion nous devrions nous rappeler que le comportement GNL et

l'analyse de stabilité linéaire ont résulte seulement du fait de tenir compte du « déplacement » ( $\theta$ ) provoqué par la charge ( $P$ ) en formulant les équations d'équilibre.

### II.3.2. Grand déplacement / petite rotation / petite déformation

Le type de comportement GNL que nous examinerons maintenant est caractéristique de celui expérimenté par les coques minces soumises au chargement latéral. La structure est une seule barre représentée sur la figure II.8 (a) ce qui a été employé dans le rapport de NAFEMS sur « les essais de Benchmark pour la non-linéarité géométrique » par M.A. Crisfield, G.W. Hunt et P.G. Duxbury (Le rapport NAFEMS SPGNL, octobre 1987). L'utilisation des maths simples nous permettra de fouiller un peu plus profondément dans des concepts de GNL [05]. En particulier nous verrons l'utilité d'une mesure différente de déformation, discuterons de contrainte, d'équilibre et introduirons la notion de la « rigidité tangente ». Comme un sous-produit, le problème du câble réapparaîtra ainsi qu'un exemple linéaire simple de stabilité .



**Figure II.8 :** Treillis d'une seule barre.

La force (Avant la déformation) de tension initiale dans la barre est  $N_0$  et la supposition des petites déformations signifie que la section de la barre  $A$ , demeure (presque) constante.

Utilisant la représentation de la somme des forces internes et externes sur le schéma II.8 (b) l'équation d'équilibre écrite en termes d'où la structure EST après chargement, c.-à-d. une description spatiale, est :

$$N \sin \alpha - P = 0 \quad \text{ou} \quad N \left( \frac{u + h}{L} \right) - P = 0 \quad (6)$$

Où  $N$  est la force de tension dans la barre, à savoir, l'introduction de l'équation constitutive, en Supposons que le matériau est élastique linéaire avec un module de Young  $E$ , puis :

$$N - N_0 = EA \xi \quad (7)$$

Là où  $\xi$  est la déformation, la déformation pour les ingénieurs structuraux donnée par :

$$\xi = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (8)$$

$$\text{Ou :} \quad L_0 = a \left[ 1 + \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad L = a \left[ 1 + \left( \frac{h+u}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

Clairement, l'expression pour l'obtention de la déformation est plutôt compliquée, qui est le problème de George Green qu'on doit faire face. Il a surmonté la difficulté en introduisant la déformation de Green :

$$E_G = \frac{1}{2} \left( \frac{L^2 - L_0^2}{L_0^2} \right) \quad (10)$$

Pour laquelle notre problème particulier devient :

$$E_G = \frac{h}{L_0} \left( \frac{u}{L_0} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{L_0} \right)^2 \quad (11)$$

Ceci signifie que l'équation constitutive devienne :

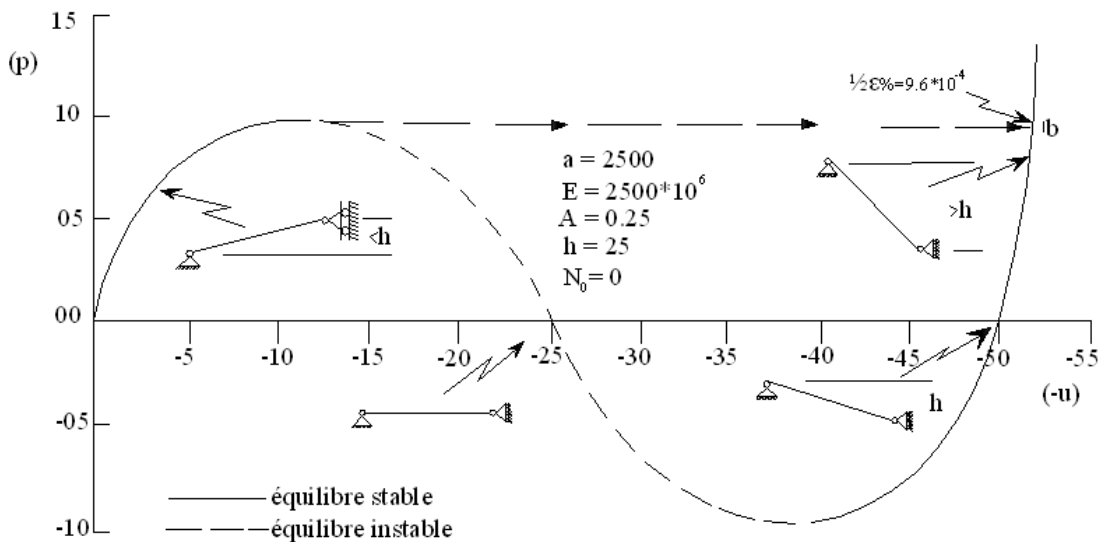
$$N - N_0 = EAE_G \quad (12)$$

Pour de petites déformations d'engineering la déformation de Green est pratiquement la même depuis :

$$\frac{E_G - \xi}{\xi} = \frac{1}{2} \xi \quad (13)$$

Et considérant que la limite d'écoulement de l'acier est à peu près :  $\xi = 0.003$ , « l'erreur » encourue en employant la déformation de Green est seulement **0.15%**. Proprement dit « l'erreur » ne devrait pas être employée ici puisque  $E_G$  est également valide comme mesure de déformation.

Après avoir surmonté le « problème » déformation la loi de « conservation des efforts internes » s'applique maintenant et nous avons un nouveau problème avec les contraintes.



**Figure II.9 :** Comportement GNL d'un treillis d'une seule barre.

Supposons que :  $N_0 = 0$  pour simplifier le problème et que l'équation constitutive a été mesurée :

$$\sigma = \frac{N}{A} = E\xi \quad (14)$$

Notant que :  $\mathbf{E}_G/\xi = (\mathbf{1} + (\mathbf{1}/\mathbf{2}) \xi)$  la même équation constitutive utilisant la déformation de Green devrait être :

$$\boldsymbol{\sigma} = E \left[ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \left( \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{L}_0} + \mathbf{1} \right) \right]^{-1} \mathbf{E}_G \quad (15)$$

Heureusement, pour des petites déformations nous pouvons ignorer cette complication puisque :  $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0 \approx \mathbf{1}$ . Néanmoins, la transformation de l'équation constitutive est un problème central dans l'analyse GNL avec grande déformation. Utilisant (6, 11 et 12) et supposant  $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0 \approx \mathbf{1}$  ce qui donne l'équation d'équilibre :

$$\frac{EA}{2L_0^3} [\mathbf{u}^3 + 3\mathbf{h}\mathbf{u}^2 + 2\mathbf{h}^2\mathbf{u}] + N_0 \frac{\mathbf{u} + \mathbf{h}}{L_0} - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (16)$$

Évidemment c'est non linéaire en déplacement  $\mathbf{u}$  et c'est également en fonction de la force initiale  $N_0$ . Observer cette équation d'équilibre, qui doit par la suite se rapporter à la configuration déformée, est maintenant exprimée en termes d'où la structure ETAIT avant le chargement, c.-à-d. une description matérielle en termes de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{L}_0$ . Utilisant les données :  $\mathbf{a} = 2500$ ,  $\mathbf{h} = 25$ ,  $E = 200 \times 10^6$  et  $A = (\mathbf{0.25})^2$  permet à l'équation d'équilibre (16) d'être résolue ce qui donne la courbe d'équilibre représentée sur la figure II.9.

Le comment de cette équation sera résolu avec précision, quand  $\mathbf{P}$  est connu et  $\mathbf{u}$  doit être trouvé sera discuté brièvement plus tard dans cette section et en détail au chapitre IV. Pour l'instant nous pourrions simplement choisir  $\mathbf{u}$  et trouver  $\mathbf{P}$ .

La courbe d'équilibre montre quelques dispositifs intéressants. La charge augmente la première fois à la première charge maximum, appelée la charge limite, est atteint le point limite (a), sur la figure II.9. Dans la pratique ce serait la charge maximum que la structure pourrait porter (dans la théorie) avant que la population générale soit alarmée. Une petite augmentation de charge au-dessus de la charge de limite cause (dans la pratique) un mouvement dynamique violent dans le treillis suivie de la restauration de l'équilibre statique au point (b) sur la figure II.9 dont le déplacement est beaucoup plus grand qu'au point (a).

Le mouvement de (a) à (b) s'appelle le « comportement traversant la rupture » et il est bien connu à n'importe qui « qui a doucement fléchi le couvercle d'un bidon de gâteau ». Quand la barre est à la position (b) la rotation est environ  $1^\circ$  mais le déplacement  $\mathbf{u}$  est **100** fois l'épaisseur de barre (**0.25**) et  $N = \mathbf{864}$ . En conséquence, nous pouvons classer le comportement GNL en tant que comportement en grand déplacement / petite rotation / petite déformation.

Un exemple simple d'analyse GNL d'un câble en tension peut être obtenu à partir de l'exemple du treillis avec :  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{L} \approx \mathbf{L}_0$  et  $N_0 > 0$  l'équation d'équilibre est donnée comme suit :

$$\frac{EA}{2L_0^3} \mathbf{u}^3 + N_0 \frac{\mathbf{u}}{L_0} - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (17)$$

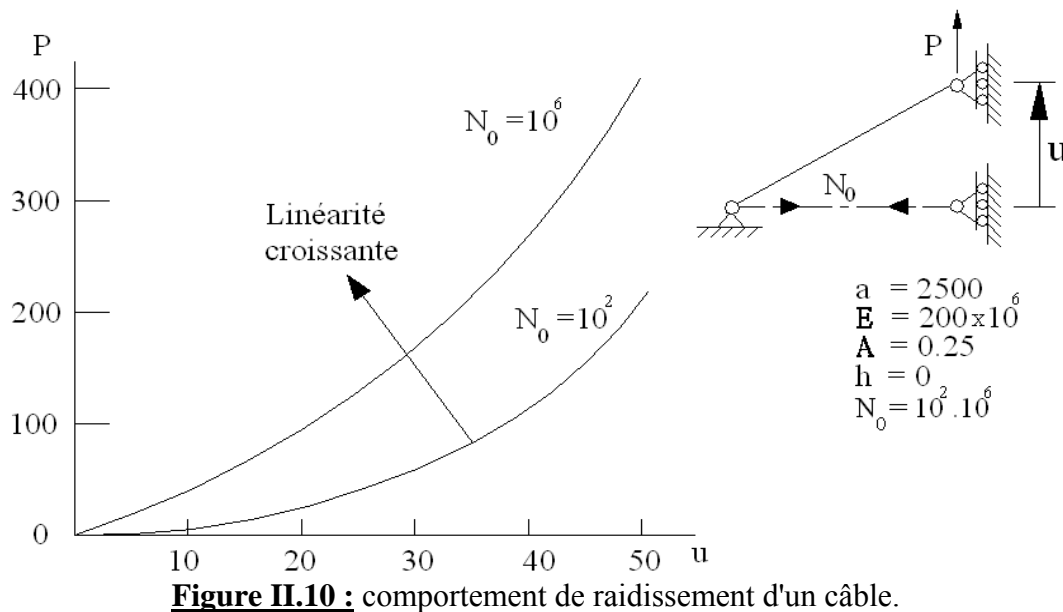


L'utilisation de (11, 12) donne l'équation d'équilibre :

$$N \frac{\mathbf{u}}{L_0} = P \quad \text{ou} \quad N_0 \frac{\mathbf{u}}{L_0} = P \quad (\text{si} \quad N_0 \gg EAE_G) \quad (18 - 19)$$

L'équation (18) est non linéaire en  $\mathbf{u}$  puisque  $N$  est une fonction de  $\mathbf{u}$  tandis que (19) est linéaire en  $\mathbf{u}$ . Avec :  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  et  $N_0 = 100$  et  $10000$  les courbes d'équilibre sont montrées sur la figure II.10. Plus  $N_0$  est grand plus la réponse est rigide.

Tandis que nos esprits sont concentrés sur cet exemple du treillis pouvons-nous aussi nous pencher sur le sujet de la solution de l'équation non linéaire d'équilibre (16) c.-à-d. sachant  $\mathbf{P}$ , comment va-t-on trouver le déplacement  $\mathbf{u}$ ? C'est un problème suffisamment important, établir des répétitions pour permettre de trouver de bons résultats. Les plus notables étaient Issac Newton et son collaborateur Joseph Raphson qui ont développé une technique maintenant connue sous le nom : méthode de Newton-Raphson (N-R).

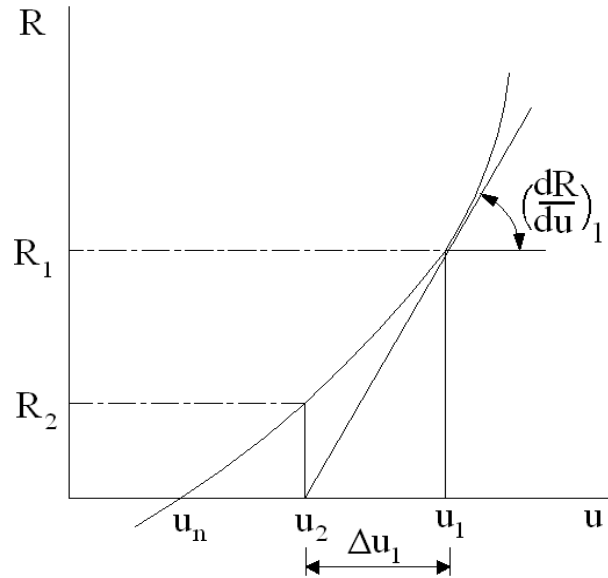


**Figure II.10 :** comportement de raidissement d'un câble.

Bien que nous pourrions discuter la solution de (16) directement, elle s'avérera par la suite plus instructif, retourner à (6) et supposant de petites déformations tels que  $L \approx L_0$ , ce qui donne :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = N \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{h}}{L_0} \right) - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (20)$$

Où  $\mathbf{R}$  s'appelle la force résiduelle qui apparaît si  $\mathbf{u}$  ne satisfait pas l'équilibre.  $\mathbf{R}$  est une fonction de  $\mathbf{u}$  et nous cherchons une valeur de  $\mathbf{u}$  pour laquelle  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , voir la figure II.11.



**Figure II.11 :** Méthode de Newton-Raphson pour la résolution des équations non linéaires.

Si  $u_1$  est une supposition pour laquelle  $R_1 \neq 0$  alors la fonction  $R(u)$ , en  $u_1$ , peut être approchée par la fonction linéaire :

$$R(u) \approx R_1 + \left(\frac{dR}{du}\right)_1 (u - u_1) = 0 \quad (21)$$

La solution de l'équation approximative d'équilibre donne une nouvelle valeur de  $u (= u_2)$  comme :

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 \quad \text{ou} \quad \Delta u_1 = -\left(\frac{dR}{du}\right)_1^{-1} R_1 \quad (22)$$

Si  $R_2 \neq 0$  le processus est répété jusqu'à ce que (avec la chance)  $u$  converge à une valeur pour laquelle  $R(u_n) = 0$ . L'équation (21) s'appelle habituellement l'équation incrémentale d'équilibre.

Le gradient de l'équation d'équilibre  $R(u) = 0$  en respectant le déplacement  $u$  s'appelle la rigidité tangente  $K_t$ , par conséquent :

$$K_t = \left(\frac{dR}{du}\right) \quad (23)$$

Pour le cas particulier du treillis ceci est facilement trouvé comme :

$$K_t = \frac{d}{du} \left(\frac{u+h}{L_0}\right) N + \left(\frac{u+h}{L_0}\right) \frac{dN}{du} \quad (24)$$

L'utilisation de l'équation constitutive (12) et l'équation (11) donne :

$$\frac{dN}{du} = \frac{EA}{L_0} \left(\frac{u+h}{L_0}\right) \quad (25)$$

De quel, 
$$K_t = K_0 + K_L + K_\sigma \quad (26)$$

Avec :

La rigidité linéaire :

$$K_0 = \frac{EA}{L_0} \left( \frac{h}{L_0} \right)^2$$

La rigidité des déplacements initiaux :

$$K_L = \frac{EA}{L_0} \left[ 2 \left( \frac{u}{h} \right) + \left( \frac{u}{h} \right)^2 \right] \left( \frac{h}{L_0} \right)^2$$

Et la rigidité des contraintes initiales:

$$K_\sigma = \frac{N}{L_0}$$

La rigidité linéaire  $K_0$  est familière à celle de l'analyse structurale avec de petit déplacement, Le  $K_L$  reflète l'effet de changement de déplacement sur la rigidité et  $K_\sigma$  est l'effet des forces existantes dans les barres du treillis sur la rigidité. Initiale signifie l'existence avant un autre déplacement.

$K_0$  et  $K_\sigma$  sont essentiels à n'importe quelle analyse de stabilité linéaire la où on trouve la charge de flambement qui donne une force interne (par exemple  $N$ ) telle que la rigidité  $K_0 + K_\sigma$  est singulière {par exemple  $P_c$  dans (5)}.  $K_\sigma$  s'appelle souvent la rigidité géométrique parce qu'elle représente le changement des forces maintenant la structure (par exemple la barre) en équilibre, qui résulte de la rotation, avec des forces internes (par exemple  $N$ ) restant constant. Inconsciemment, nous avons déjà considéré ce fait dans le problème du câble où le déplacement  $u$  résulte d'un changement de force d'équilibre  $N_0/L_0$ .

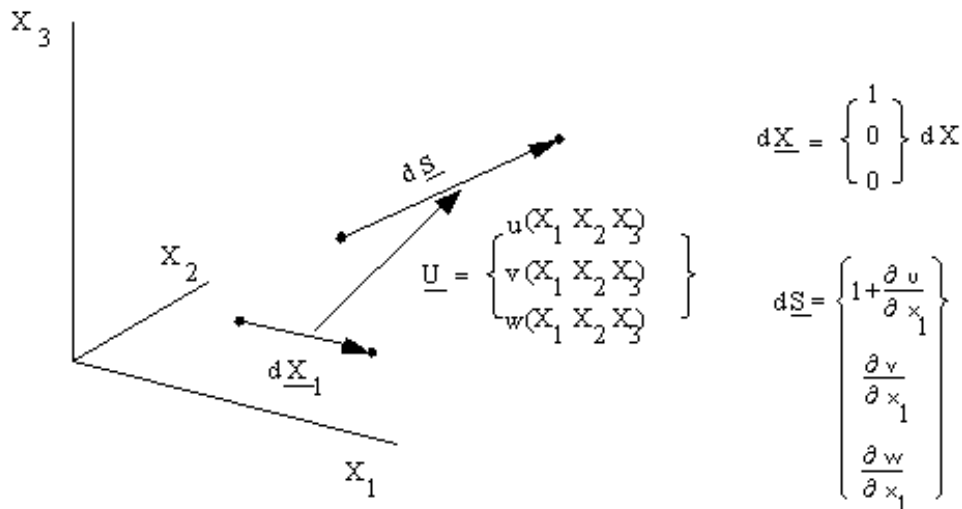
### II.3.3. Grand déplacement / grande rotation / grande déformation

Essayer une analyse numérique du chewing-gum étant mâché et vous avez le cauchemar des mécaniciens continu - toute grande déformation dépend des conditions aux limites et probablement de transfert de chaleur. Même si nous ne mâchons pas le chewing-gum nous ne pouvons pas éviter de considérer le problème parce qu'un grand nombre d'objets fabriqués que nous employons sont formés pour l'utilisation des processus des grandes déformations, par exemple pièce forgée, extrusion, roulement et étirage pour des produits en métal, formation du verre et même production alimentaire. Bien que nous ne sommes pas particulièrement concernés par des problèmes des grandes déformations nous devons faire une incursion dans le sujet ici et ailleurs pour comprendre les approximations faites dans le travail de petite déformation [04].

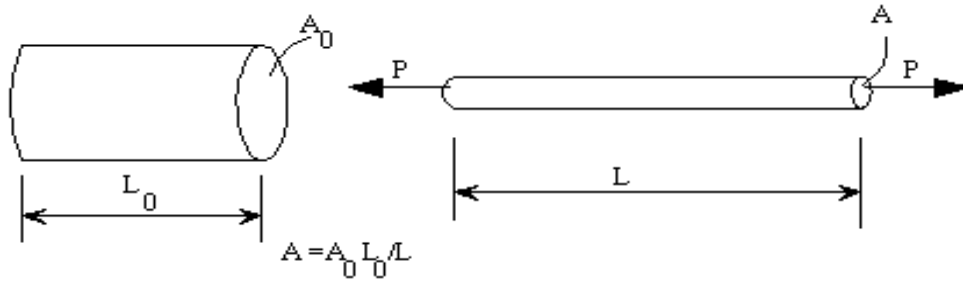
La déformation de Green dans la direction cartésienne  $\mathbf{X}_1$  fournira une perspicacité dans l'expression de grande déformation. La figure II.12 montre un élément matériel de longueur  $d\mathbf{X}_1$  dans la direction  $\mathbf{X}_1$  et finalement à une certaine position arbitraire. Le déplacement de n'importe quel point de l'élément  $\mathbf{X}_1$  est  $\mathbf{u}$ . La longueur déformée de l'élément  $\mathbf{X}_1$  est  $d\mathbf{s}$ , voir la figure 2.12. La déformation de Green,  $\mathbf{E}_{x_1}$ . Dans la direction  $\mathbf{X}_1$  est maintenant facile à trouver :

$$E_{x_1} = \frac{1}{2} \frac{(ds^2 - dX_1^2)}{dX_1^2} = \frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial X_1} \right)^2 \right] \quad (27)$$

Le premier terme  $\partial u / \partial X_1$  est familier avec l'analyse de petite déformation tandis que  $\partial v / \partial X_1$  et  $\partial w / \partial X_1$  expliquent la rotation de l'élément  $\mathbf{X}_1$ . Une expression identique peut être dérivée utilisant la déformation des ingénieurs structuraux à condition que des petites déformations soient supposées [04]. Dans l'un ou l'autre cas la déformation est maintenant une fonction non linéaire du déplacement  $\mathbf{u}$ . Pour prouver que les différentes définitions de déformations utilisées avec des constantes matérielles incorrectes peuvent poser des méchants problèmes.



**Figure II.12 :** Mouvement d'une « fibre » dans la direction  $\mathbf{X}_1$ .



**Figure II.13 :** Comportement en grande déformation d'une barre incompressible.

Dans les situations des grandes déformations nous examinons l'extension de la barre incompressible [04] (volume constant) représentée sur la figure II.13.

Laisser la loi constitutive correcte être  $\sigma = E\xi$ , qui en termes de force  $P$  et section  $A$  est :

$$\frac{P}{A} = E \frac{e}{L_0} \quad \text{ou la tension} \quad e = L - L_0 \quad (28)$$

Par conséquent, utilisant :  $AL = A_0L_0$

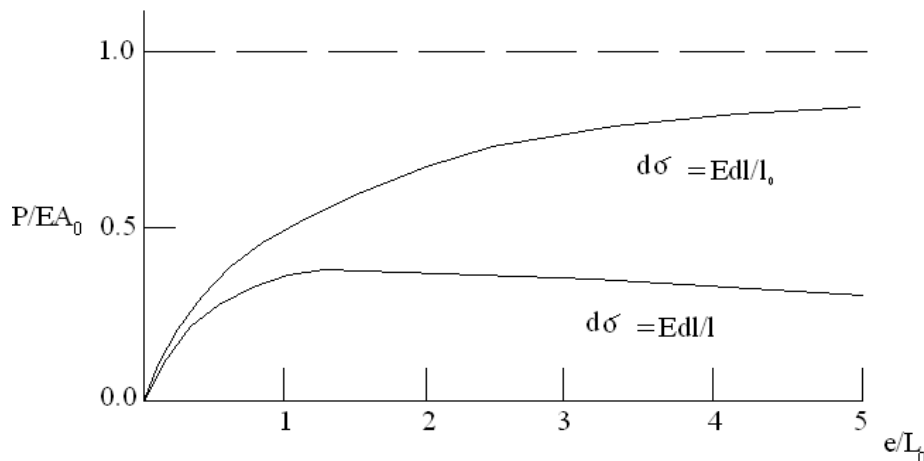
$$P = EA \frac{e}{L_0} = \frac{EA_0}{\left(\frac{e}{L_0} + 1\right)} \frac{e}{L_0} \quad (29)$$

En termes de différentiel la loi constitutive est  $d\sigma = E \cdot dL/L_0$  mais regarder que nous avons employé  $d\sigma = E \cdot dL/L$  à la place, où  $dL/L$  est un changement dans la déformation logarithmique.

$$d\xi = \frac{dL}{L}; \quad \xi = \ln \frac{L}{L_0} \quad \text{si} \quad d\xi = \frac{dL}{L_0}; \quad \xi = \frac{L - L_0}{L_0}$$

La contrainte serait maintenant exprimée comme :

$$\sigma = \frac{P}{A} = E \ln \frac{L}{L_0} \quad \text{ou} \quad P = \frac{EA_0}{\left(\frac{e}{L_0} + 1\right)} \ln \left(\frac{e}{L_0} + 1\right) \quad (30)$$



**Figure II.14 :** Comportement en grande déformation d'une barre incompressible utilisant les différentes lois constitutives.

Les deux différentes solutions sont tracées sur la figure II.14.

Ceci démontre clairement que là où nous avons des grandes déformations les équations constitutives doivent être présent avec soin.

### II.3.4. Analyse de stabilité linéaire et formulation de la matrice géométrique

Considérant un élément prismatique de section uniforme, figure II.15, soumis à la déformation axiale et de flexion (aucun cisaillement), la relation lagrangienne de déformation est donnée par [11] ??

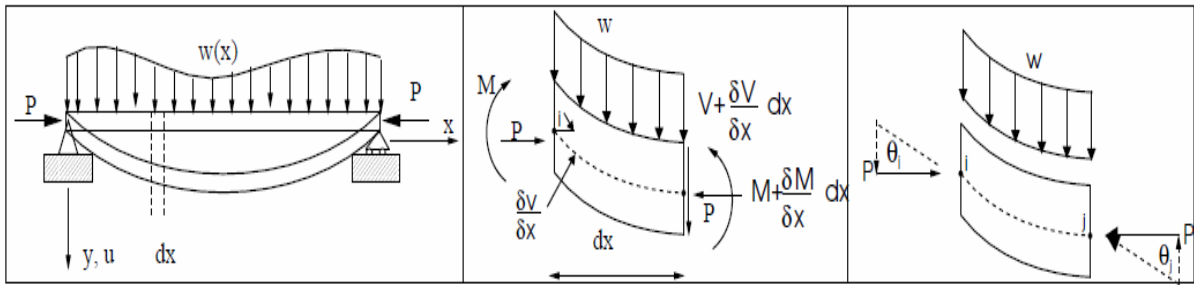
$$\xi_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \quad (31)$$

Rappelant de la résistance des matériaux ;

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\ \sigma &= \frac{My}{I} \end{aligned} \right\} \xi = y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (32)$$

Ainsi, la déformation totale serait :

$$\xi_{xx} = \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{Axial}} - \underbrace{y \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)}_{\text{Flexion}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2}_{\text{Large déformation}} \quad (33)$$



**Figure II.15 :** Poutre-colonne simplement appuyée ; Segment différentiel ; Effet de la force.

Nous notons que le premier et le deuxième terme sont respectivement les composants familiers de déformation axiale et de flexion, et le troisième (qui est non linéaire) est obtenu à partir de la relation déformation-déplacement en grand-déplacement.

L'énergie de déformation de l'élément est donnée par :

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \xi_{xx}^2 d\Omega \quad (34)$$

Substitution l'équation 33 dans  $U^e$  nous obtenons :

$$U^e = \frac{1}{2} \int \int_L \int_A \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + y^2 \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 - 2y \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) - y \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] E dA dx \quad (35)$$

Notant que :

$$\int_A dA = A; \quad \int_A y dA = 0; \quad \int_A y^2 dA = I \quad (36)$$

Pour  $y$  mesuré à partir du centre de la surface,  $U^e$  est réduit à :

$$U^e = \frac{1}{2} \int_L E \left[ A \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + I \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + \frac{A}{4} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 + A \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (37)$$

Nous écartons le terme de haut ordre  $\frac{A}{4} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4$  afin de transformer l'équation ci-dessus en formulation linéaire d'instabilité.

Sous la supposition d'une analyse de pré-flambement indépendante pour l'effort axial, la charge axiale  $P_x$  est :

$$P_x = EA \frac{du}{dx} \Rightarrow A \frac{du}{dx} = \frac{P_x}{E} \quad (38)$$

Ainsi l'équation 37 est réduite à :

$$U^e = \frac{1}{2} \int_L \left[ EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + P_x \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (39)$$

Nous pouvons découpler ainsi l'énergie de déformation en deux composants, l'une lié à la déformation axiale et l'autre la déformation flexionnelle.

$$U^e = U_a^e + U_f^e \quad (40 - a)$$

$$U_a^e = \frac{1}{2} \int_L \left[ EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (40 - b)$$

$$U_f^e = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + P_x \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (40 - c)$$

### II.3.4.a. Discrétisation par éléments finis

Supposant une représentation fonctionnelle des déplacements transversaux en termes de quatre déplacements nodaux [11]

$$v = N\bar{u} \quad (41 - a)$$

$$\frac{dv}{dx} = N_{,x}\bar{u} \quad (41 - b)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = N_{,xx}\bar{u} \quad (41 - c)$$

Substitution de cette dernière équation dans Eq. 40-C, l'énergie potentielle de l'élément est donnée par :

$$\Pi^e = U_f^e + W^e \quad (42 - a)$$

$$= \frac{1}{2} [\bar{u}_e] [k_e] \{\bar{u}_e\} + \frac{1}{2} [\bar{u}_e] [k_g] \{\bar{u}_e\} - [\bar{u}] \{P\} \quad (42 - b)$$

Ou

$$[k_e] = \left[ \int_L EI \{N_{,xx}\} [N_{,xx}] dx \right] \quad (43)$$

Et

$$[k_g] = \left[ \int_L P \{N_{,x}\} [N_{,x}] dx \right] \quad (44)$$

$[k_e]$  : La convention de la matrice de rigidité de l'élément flexionnel.

$[k_g]$  : Introduit les considérations liées à l'instabilité élastique. Nous notons que ses termes dépendent seulement des paramètres géométriques (longueur), donc cette matrice désignée souvent sous le nom de la matrice géométrique de rigidité.

Utilisant la fonction de forme pour l'élément flexionnel ci-dessous, et substitution dans Eq. 43 et Eq. 44 nous obtenons :

$$N_1 = (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2)$$

$$N_2 = x(1 + \xi)^2$$

$$N_3 = (3\xi^2 - 2\xi^3)$$

$$N_4 = x(\xi^2 - \xi)$$



$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Ce qui est la même matrice de rigidité de l'élément colonne.

La matrice de rigidité géométrique est donnée par :

$$[k_g] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \times \frac{P}{L} \quad (46)$$

La relation d'équilibre est ainsi :

$$k\bar{u} = \bar{P} \quad (47)$$

Là où la matrice de rigidité d'élément est exprimée en termes de composants élastiques et géométriques

$$k = k_e + k_g \quad (48)$$

Dans une formulation globale, nous aurions :

$$K = K_e + K_g \quad (49)$$

Nous notons que la structure devient plus raide pour la charge de traction  $P$  appliquée par  $K_g$ , et plus faible dans la compression.

Nous supposons que le chargement conservateur est appliqué, cela est la direction de la charge « ne suit pas » la direction fléchie du membre sur lequel elle agit.

### **II.3.4.b. Instabilité élastique ; Analyse de bifurcation**

Dans l'instabilité élastique, l'intensité du système de charge axial pour causer le flambement est pourtant l'inconnu, la matrice de rigidité incrémental doit d'abord être numériquement évaluée utilisant une intensité choisie de charge arbitraire (puisque  $\mathbf{K}_g$  est lui-même une fonction de  $\mathbf{P}$ ) [11].

Pour que le flambement se produise, l'intensité du système axial de charge doit être  $\lambda$  temps de l'intensité initialement arbitrairement choisie de la force. Noter que pour une structure, la distribution initiale de  $\overline{\mathbf{P}}^*$  doit être obtenue d'une analyse élastique linéaire. Par conséquent, la charge de flambement,  $\overline{\mathbf{P}}$  est donnée par :

$$\overline{\mathbf{P}} = \lambda \overline{\mathbf{P}}^* \quad (50)$$

Puisque la matrice de rigidité géométrique est proportionnelle aux forces internes au début, elle suit cela :

$$\mathbf{K}_g = \lambda \mathbf{K}_g^* \quad (51)$$

Là où :  $\mathbf{K}_g^*$  correspond à la matrice de rigidité géométrique pour des valeurs unitaires du chargement appliqué ( $\overline{\mathbf{P}}^* = \mathbf{1}$ )

La matrice de rigidité élastique  $\mathbf{K}_e$  reste constante, par conséquent nous pouvons écrire :

$$\underbrace{(\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)}_{\overline{\mathbf{P}}} \overline{\mathbf{u}} - \lambda \overline{\mathbf{P}}^* = \mathbf{0}$$

Les déplacements sont donnés par :

$$\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)^{-1} \lambda \overline{\mathbf{P}}^*$$

Et pour que les déplacements tendent vers l'infini (c.-à-d. flambement / bifurcation / instabilité), alors :

$$|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0 \quad (52)$$

Ce qui peut également être exprimé comme :

$$|\mathbf{K}_g^{-1} \mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (53)$$

C'est un problème de valeur propre.

Alternativement, il peut simplement discuter qu'il n'y a aucune solution unique (état de bifurcation) à  $\overline{\mathbf{U}}$ .

La valeur la plus basse du  $\lambda$ ,  $\lambda_{crit}$  donnera la charge de flambement pour la structure et les charges de flambement seront données par :

$$\overline{\mathbf{P}}_{crit} = \lambda_{crit} \overline{\mathbf{P}}^* \quad (54)$$

En conclusion, la forme déformée correspondante est directement obtenue à partir du vecteur propre correspondant.

## **CHAPITRE III : NON LINEARITE MATERIELLE**

### III.1. Généralité

#### III.1.1. Béton armé

#### III.1.2. Le béton

##### III.1.2.a. Comportement uni axial

##### III.1.2.b. Comportement en compression

#### III.1.3. Acier d'armature

##### III.1.3.a. Comportement sous chargement monotone

##### III.1.3.b. Comportement sous un chargement répété du même signe (dans une seule direction)

##### III.1.3.c. Comportement sous chargement renversé

### III.2. Comportement non linéaire

#### III.2.1. Modèles non linéaires

##### III.2.1.a. Les modèles globaux

##### III.2.1.b. Les modèles locaux

##### III.2.1.c. Les modèles semi-globaux

### III.3. Lois de comportement

#### III.3.1. Les rotules plastiques

#### III.3.2. Critère de ruine en rotation

#### III.3.3. Caractéristiques des rotules plastiques

#### III.3.4. Rotation de la corde

#### III.3.5. Rotation élastique de la corde

#### III.3.6. Rotation ultime de la corde

#### III.3.7. Lois moment-courbure

#### III.3.8. Détermination des moments élastiques et ultimes et leurs courbures correspondantes

##### III.3.8.a. Moment et courbure élastique

##### III.3.8.b. Moment et courbure ultime

#### III.3.9. Relations force-déplacement non linéaires

### **III. Non linéarité matérielle**

#### **III.1. Généralité**

##### **III.1.1. Béton armé**

Le béton armé est un matériau composé d'acier et de béton, deux matériaux aux réponses mécaniques très différentes lorsque déformés, surtout en traction. Il est donc essentiel, dans l'objectif de bâtir un modèle de prédiction du comportement d'éléments en béton armé, de bien comprendre les hypothèses émises et les lois considérées dans la définition du comportement de chacun de ces matériaux.

##### **III.1.2. Le béton**

Le béton est un mélange de ciment, de granulats, d'eau et éventuellement d'adjuvants défini par des normes, le béton est un matériau composite dont la résistance à la compression et à la traction sont très différentes ; il importe donc de les considérer séparément.

###### **III.1.2.a. Comportement uni axial**

Dans des conditions pratiques le béton est rarement soumis à une contrainte dans une seule direction (contrainte uni axial), puisque dans la plupart des situations structurales, le béton est soumis simultanément à des contraintes dans plusieurs directions. Néanmoins, un état de contrainte supposé uni axial peut être justifié dans beaucoup de cas.

###### **III.1.2.b. Comportement en compression**

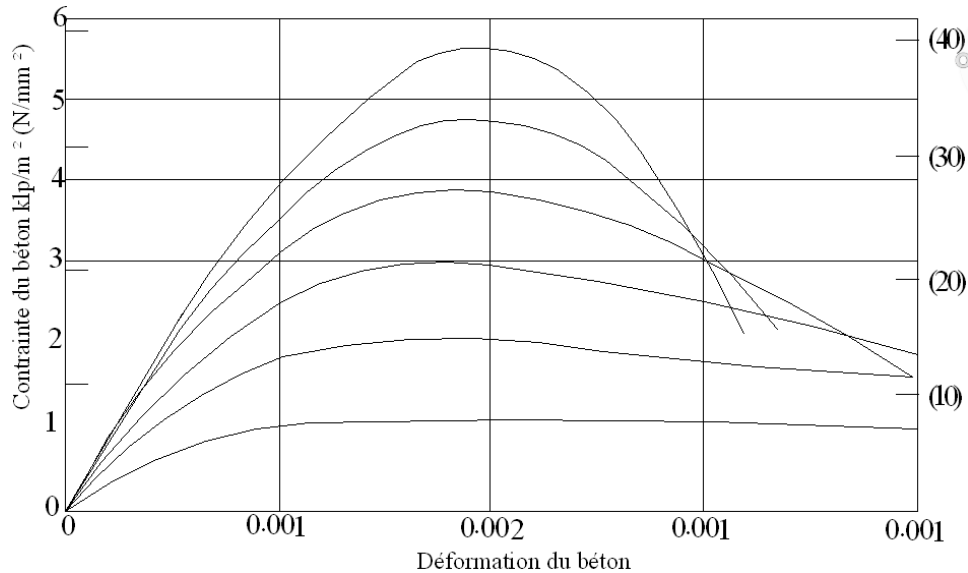
La résistance à la compression du béton est habituellement obtenue à partir des cylindres avec un rapport de longueur sur diamètre égale à **2**. Le cylindre est chargé longitudinalement à une lente vitesse de déformation pour atteindre une contrainte maximum en **2** ou **3** minutes. Un cylindre standard normal est de **320 mm** de hauteur avec un diamètre de **160 mm** et la résistance à la compression atteinte à **28 jours** s'étend habituellement entre **13.8** à **55.2 N/mm<sup>2</sup>**. De plus petits cylindres, ou des cubes, sont également employés, en particulier pour le control de la production et la résistance à la compression de ces unités est plus haute. Les facteurs de conversion appropriés étant obtenus à partir des essais, les résultats de tels spécimens peuvent être convertis en valeurs de force de cylindre standard équivalent [13].

La figure III.1 présente les courbes typiques contrainte-déformation obtenues à partir des cylindres en béton chargés en compression uni axiale dans un essai effectué en plusieurs minutes. Les courbes sont presque linéaires vers le haut jusqu'à environ un demi de la force de compression. Le pic de la courbe béton pour une haute résistance est relativement aigu, mais pour la résistance basse du béton la courbe a un dessus plat. La déformation à la contrainte maximal est approximativement **0.002**. À des déformations plus élevées, après que la contrainte maximale soit atteinte, la contrainte peut encore être portée quoique les fissures parallèles à la direction du chargement deviennent évidentes dans le béton. Le béton examiné

dans des machines d'essai de flexion parfois échoue par explosion parce que le béton ne peut pas absorber le dégagement d'énergie de déformation de la machine d'essai quand la charge diminue après la contrainte maximale. La machine d'essai rigide est nécessaire pour tracer l'étendue de la branche descendante de la courbe de contrainte-déformation.

Le module d'élasticité pour le béton  $E_c$  peut être pris comme :

$$E_c = w^{1.5} 33 \sqrt{f_c'} \quad (40)$$

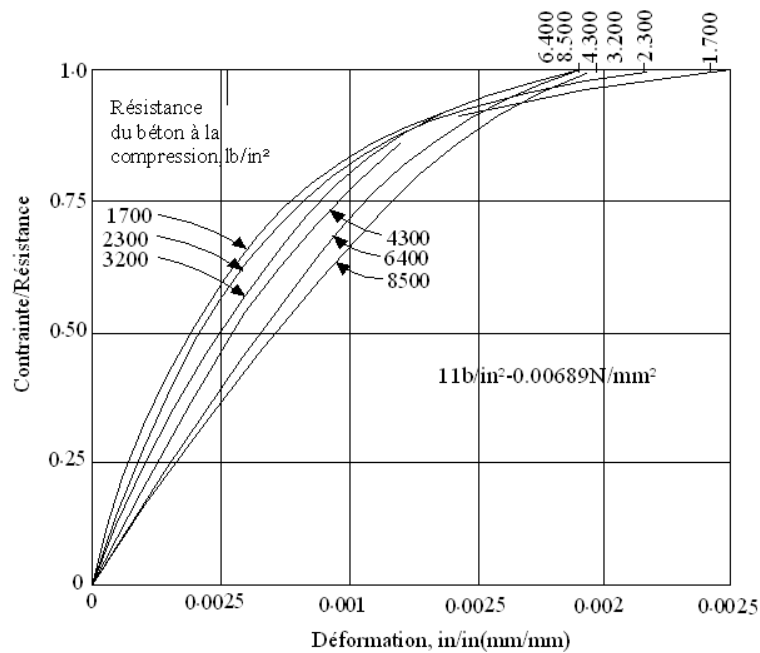


**Figure III.1 :** Courbe contrainte-déformation pour un cylindre en béton avec une charge de compression uni axial.

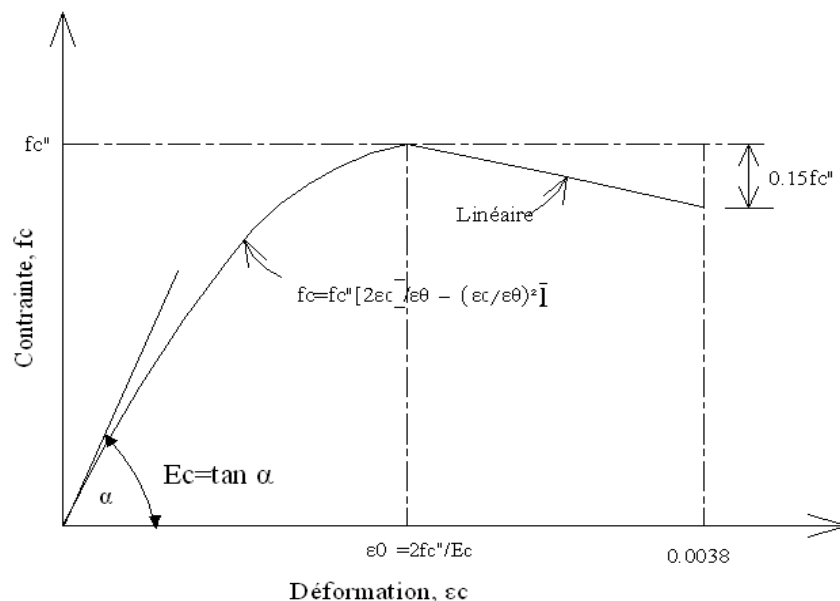
( $1 \text{ psi} = 0.00689 \text{ N/mm}^2$ ), où  $w$  est la densité du béton en livres par pied cube ( $1 \text{ lb/ft}^3 = 16.02 \text{ Kg/m}^3$ ) et le  $f_c'$  est la force de compression du cylindre en  $\text{psi}$ . L'équation précédente, qui s'applique pour des valeurs de  $w$  entre  $90$  et  $155 \text{ lb/ft}^3$ , a été déterminée par **Pauw** à partir des essais de chargement à court terme ; elle donne le module de cisaillement à une contrainte approximative à  $0.5 f_c$  pour le béton de poids normal, le  $E_c$  peut être considéré  $57000 \sqrt{f_c'} \text{ psi}$  ou  $4730 \sqrt{f_c'} \text{ N/mm}^2$ .

Les essais par **Rusch** ont indiqué que la forme de la courbe contrainte-déformation avant la contrainte maximale dépende de la résistance du béton (voir la figue III.2). Cependant, une approximation employée pour la forme de la courbe contrainte-déformation avant la contrainte maximale est une parabole du second degré. Par exemple, la courbe contrainte-déformation souvent citée par **Hognestad** est montrée dans figure III.3, où le  $f_c''$  est la contrainte maximale atteinte dans le béton. L'extension du comportement en baisse adopté dépend de la déformation limite utile du béton supposée [13].

La contrainte maximale de compression atteinte dans le béton pour le membre de flexion  $f_c''$  peut différer de la résistance d'un cylindre  $f_c'$  en raison de la différence dans la taille et la forme du béton comprimé.



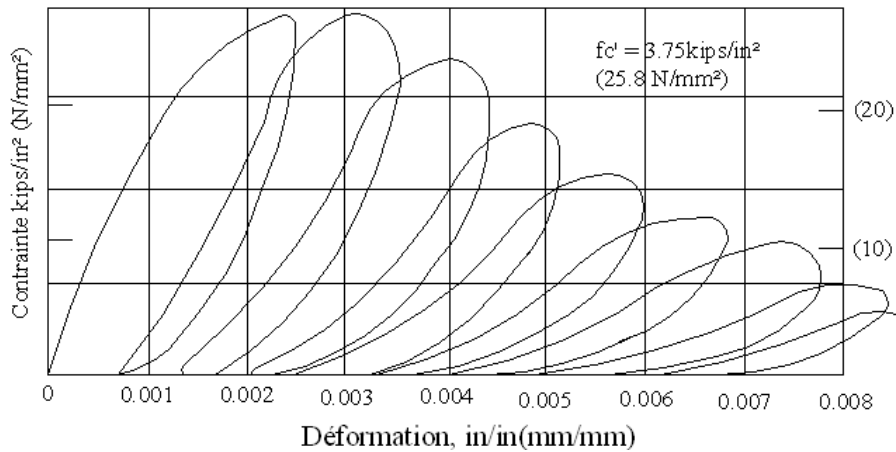
**Figure III.2 :** la relation entre le ratio contrainte sur résistance et la déformation du béton pour de différentes résistances.



**Figure III.3 :** idéalisation de la courbe contrainte-déformation du béton pour la compression uni axiale.

Quand la charge est appliquée à une vitesse de déformation rapide, le module d'élasticité et la force dans le béton augmente. Par exemple, pour une vitesse de déformation de **0.01/sec** la force dans le béton peut être augmentée pas moins de **17%**.

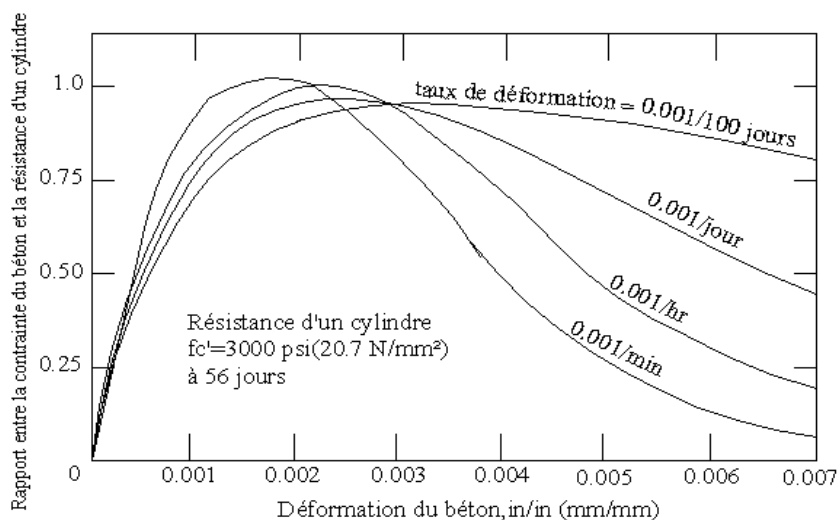
Le chargement compressif répété à haute intensité produit un effet prononcé d'hystérésis dans la courbe contrainte-déformation. La figure III.4 donne des essais obtenus par **Sinha, Gerstle**, et **Tulin** pour des lentes vitesses de déformation. Leurs essais, et ceux de **karsan** et **jirsa**, ont indiqués que la courbe enveloppe était presque identique à la courbe obtenu à partir d'une application continue d'une seule charge.



**Figure III.4 :** courbe contrainte-déformation pour un cylindre en béton avec une charge axiale de compression répétée de haute intensité (chargement cyclique).

**Rusch**, qui a effectué les essais à long terme de chargement sur le béton non confiné, a constaté que la résistance à la charge de compression soutenue est approximativement **80%** de la résistance à court terme. Dans la pratique, la résistance du béton considérée dans la conception d'une structure est habituellement basée sur une force à court terme prévue à **28 jours**.

La diminution de la résistance due au chargement à long terme sera au moins la partie compensée par la propriété du béton pour atteindre une plus haute résistance à de plus grands âges. En outre,  $\phi$  facteur de réduction de la capacité est bas quand la résistance à la compression du béton est critique. Des déformations de fluage dues au chargement à long terme causent la modification dans la forme de la courbe contrainte-déformation. Quelques courbes obtenues par **Rusch** pour différents vitesses de chargement (figure III.5) indiquent qu'avec une vitesse décroissante de déformation, la valeur de la contrainte maximale a atteint graduellement des diminutions mais la branche descendante de la courbe tombe moins rapidement et la déformation pour laquelle la contrainte maximale est atteinte a été augmentée.



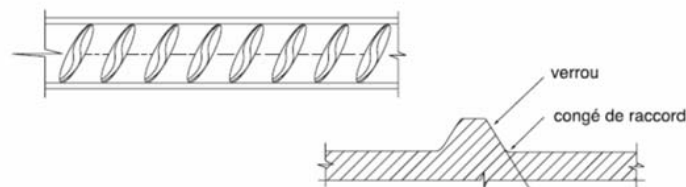
**Figure III.5 :** courbe contrainte-déformation du béton avec des différentes vitesses d'application de la charge.



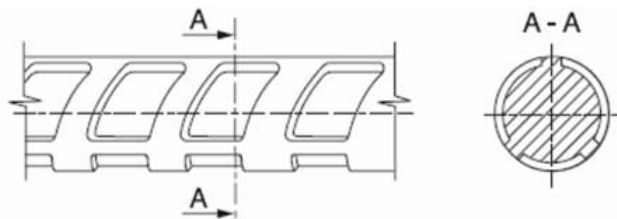
### III.1.3. Acier d'armature

Au cours des premières décennies de l'histoire du béton armé, les armatures étaient constituées de barres d'acier doux, lisses, de section circulaire dont la limite d'élasticité était habituellement comprise entre **215** et **235MPa**. Ce type d'acier n'est pratiquement plus utilisé. On utilise désormais des aciers de limite d'élasticité plus élevée afin de réduire les sections d'armatures. Pour améliorer l'adhérence des armatures au béton on crée à la fabrication des aspérités en saillie ou en creux. Les aspérités en saillie inclinées par rapport à l'axe de la barre sont appelées « verrous ». Les aspérités en creux sont appelées « empreintes ». Ces aciers sont dits à Haute Adhérence (HA) et ont couramment une limite élastique de **500MPa**.

L'acier d'armature est utilisé dans le béton armé afin de compenser la faiblesse du béton à reprendre les efforts de traction. Il est habituellement considéré que les armatures ne sont sollicitées qu'après la fissuration du béton. Elles présentent une importante ductilité après l'atteinte de la limite élastique, ce qui, lorsque bien conçu, permet aux éléments de béton armé fléchis et fissurés d'atteindre l'ultime sans rupture catastrophique.



**Figure III.6 :** Schéma d'un acier à verrous.



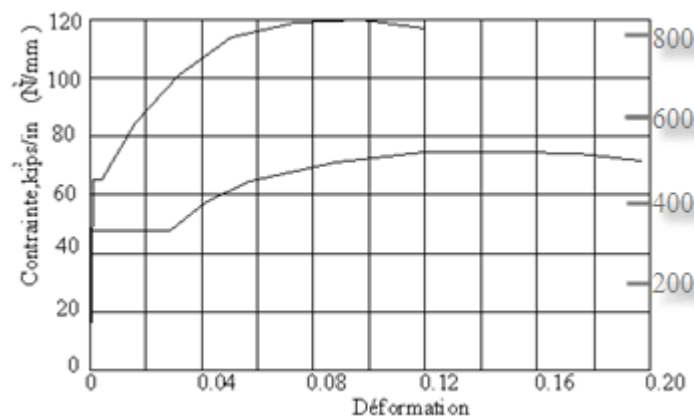
**Figure III.7 :** Schéma d'un acier à empreintes.

#### III.1.3.a. Comportement sous chargement monotone

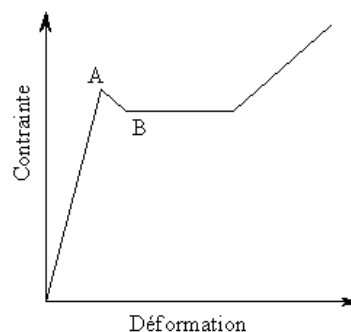
Des courbes contrainte-déformation type pour les barres en acier utilisées dans la construction en béton armé (figure III.8), ont été obtenues à partir des barres en acier chargées monotoniquement en traction. Les courbes montrent une première partie élastique linéaire, un plateau plastique (c.-à-d., une limite élastique au delà duquel la déformation augmente avec ou sans augmentation de contrainte), l'écrouissage est la troisième partie, parabolique ascendante caractérisée par des augmentations en déformation et en contrainte, et finalement une quatrième partie descendante où la contrainte chute jusqu'à ce que la rupture se produise. Le module d'élasticité  $E_s$  est donné par la tangente de la partie élastique linéaire de la courbe contrainte-déformation, le module d'élasticité des aciers d'armature est généralement pris égal à :  **$29 \times 10^6 \text{ psi}$  ( $0.2 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$ )**.

La contrainte à la limite élastique, désignée sous le nom de la résistance limite élastique, est une propriété très importante des aciers d'armature. Parfois l'écoulement est accompagné d'une diminution brusque de la contrainte et le diagramme contrainte-déformation à la forme, illustré dans la figure III.9. En ce cas les contraintes en **A** et **B** sont désignés sous le nom des résistances limites élastiques supérieures et inférieures. La position du point limite élastique supérieure dépend de la vitesse d'essai, la section et la forme du spécimen. Habituellement la résistance limite élastique inférieure est considérée comme une caractéristique vraie du matériau et désigné sous le nom de la résistance limite élastique [13]. Pour les aciers manquant d'un plateau plastique bien défini, la résistance limite élastique est généralement prise comme la contrainte correspondante à une déformation particulière, comme illustré dans la figure III.10.

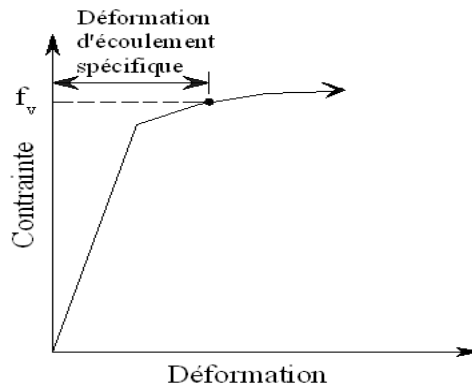
La longueur du plateau plastique est généralement une fonction de la résistance de l'acier. Les aciers à haute teneur en carbone et de haute résistance ont généralement un plateau plastique beaucoup plus court que les aciers à faible teneur en carbone et de faible résistance. De même, le travail de l'acier à froid peut causer le rapetissement du plateau plastique dans la mesure où l'écroutissage débute juste après le début de la plastification. Les aciers de haute résistance ont également une plus petite elongation avant la rupture que les aciers à faible résistance.



**Figure III.8 :** Courbe typique contrainte déformation pour les aciers d'armature.



**Figure III.9 :** Courbe contrainte déformation illustrant le point limite élastique supérieur et inférieur.



**Figure III.10 :** Le point d'écoulement de l'acier bien défini sans le plateau plastique.

Les barres déformées d'acier produites aux spécifications **ASTM** ont une résistance limite élastique (minimum) spécifique de **40, 50, 66, ou 75 Ksi (276, 345, 414, ou 517 N/mm<sup>2</sup>)**; elles sont désignées sous le nom des catégories **40, 50, 60, et 75**. Pour les aciers manquant d'un point limite élastique bien définie, la résistance limite élastique est prise comme la contrainte correspondante à une déformation de **0.005** pour les catégories **40, 50, et 60** et **0.0035** pour la catégorie **75**. Les résistances ultimes (résistances à la traction) correspondantes à l'acier de catégories **40, 50, 60, et 75** sont au moins **70, 80, 90, et 100 Ksi (483, 552, 621, et 690 N/mm<sup>2</sup>)**. La déformation à la rupture dans l'acier est également définie dans les spécifications en acier, puisqu'il est essentiel pour la sûreté de la structure que l'acier soit assez ductile pour subir des grandes déformations avant rupture. Les spécifications **ASTM** pour les barres déformées exigent une élongation, définie par l'extension permanente d'une longueur de mesure de **8 in (203 mm)** à la rupture du spécimen, exprimée comme un pourcentage de la longueur de mesure, qui varie avec la source, la catégorie, et le diamètre de la barre d'acier et s'étend au moins de **4.5 à 12%**. La résistance limite élastique spécifique se rapporte normalement à un minimum garanti [13].

Habituellement la résistance limite élastique des barres est légèrement plus haute que cette valeur spécifique. Dans certains cas (par exemple, dans l'évaluation de la force séismique des membres) il est indésirable d'avoir une résistance limite élastique beaucoup plus haute que celle considéré dans la conception. C'est parce que l'augmentation de la résistance à la flexion d'un membre, par exemple, produira l'augmentation de l'action d'effort tranchant sur le membre à la charge ultime, qui pourrait avoir comme conséquence une rupture fragile par cisaillement du membre plutôt qu'une rupture par flexion ductile. Par conséquent, les spécifications pour l'acier utilisé en constructions dans des zones séismiques devraient également présenter une certaine résistance à l'état limite élastique.

Généralement on assume que les courbes contrainte-déformation d'acier dans la traction et la compression sont identiques. Les essais ont prouvé que c'est une prétention raisonnable.

L'effet d'un chargement à une vitesse rapide cause l'augmentation de la résistance limite élastique de l'acier.

Par exemple, c'a été reporté que pour une vitesse de déformation de **0.01 sec** la résistance limite élastique inférieure peut être augmentée jusqu'à **14%**.

Dans la conception il est nécessaire d'idéaliser la forme de la courbe contrainte-déformation.

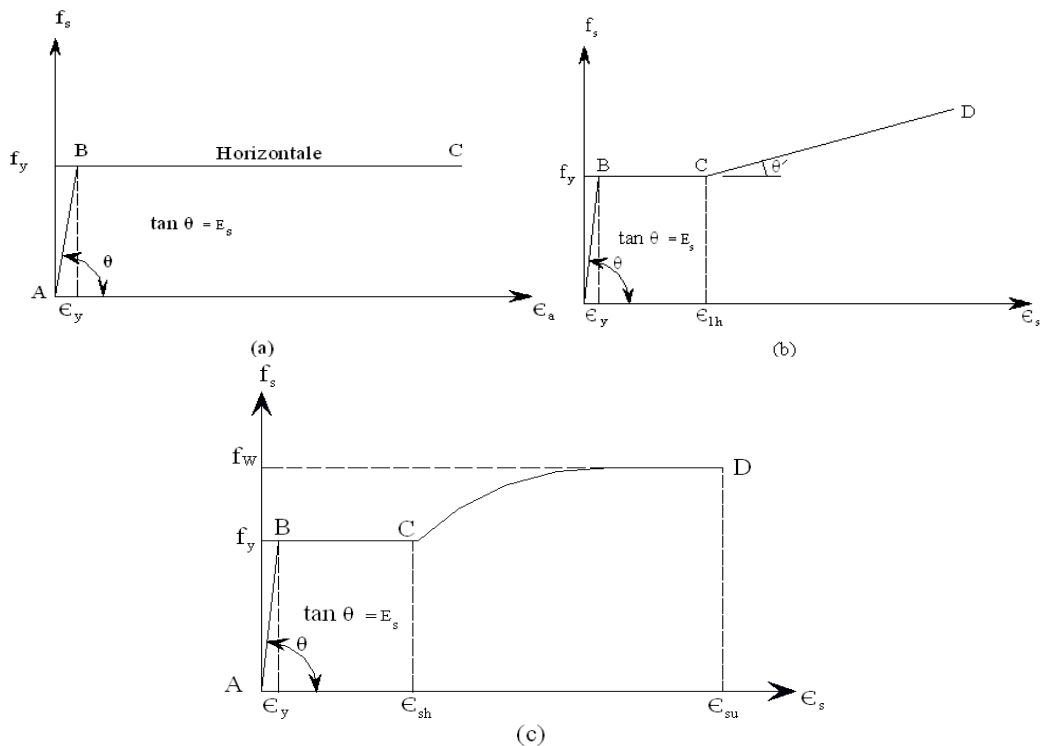
Généralement la courbe est simplifiée en l'idéalisant en deux lignes droites, comme dans figure III.11 (a), ignorant la résistance limite élastique supérieure et l'augmentation de la contrainte due à l'écroutissage. Cette courbe contrainte-déformation est acceptée par le code **ACI**. Si la déformation plastique, qui se produit à la contrainte proche-constante après l'écoulement, est beaucoup plus grande que l'extension élastique à l'écoulement, cette courbe donne une exactitude très bonne. Cette simplification est particulièrement précise pour l'acier ayant une basse résistance limite élastique. Si l'écroutissage de l'acier débute peu après le début d'écoulement, cette courbe assumée sous-estimera la contrainte d'acier aux déformations élevées. Dans certains cas il peut être nécessaire d'évaluer la contrainte d'acier aux déformations plus haute que l'écoulement, à évaluer plus exactement la résistance des membres aux grandes déformations. C'est particulièrement vrai dans la conception sismique, où les conditions de ductilité peuvent signifier la considération de la possibilité d'atteindre des déformations plusieurs fois la déformation élastique. Des idéalizations plus précises utilisables pour la courbe contrainte-déformation sont données dans les figures III.11 (b) et III.11 (c). Les valeurs pour les contraintes et les déformations au début d'écoulement, de l'écroutissage, et la résistance à la traction sont nécessaires pour l'usage de telles idéalizations. Ces points peuvent être localisés dans des courbes contrainte-déformation obtenues à partir des essais.

### **III.1.3.b. Comportement sous un chargement répété du même signe (dans une seule direction)**

La figure III.8 est la courbe contrainte-déformation pour un spécimen d'acier en traction ou en compression axiale jusqu'à la rupture pour un chargement du même signe (dans une seule direction). Si la charge est relâchée avant la rupture, le spécimen récupérera le long d'un chemin contrainte-déformation qui est parallèle à la partie élastique originale de la courbe. Si on charge encore, le spécimen suivra le même chemin jusqu'à la courbe originale, voir figure III.12, avec peut-être une petite hystérésis et/ou effet d'écroutissage. La courbe vierge est alors suivie de près, comme si le déchargement ne s'était pas produit. Par conséquent la courbe monotone contrainte-déformation donne une bonne idéalisation pour la courbe enveloppe pour le chargement répété du même signe (une seule direction) [13].

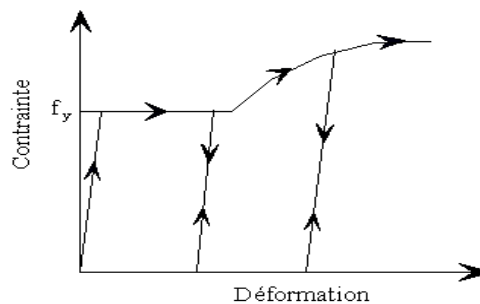
### III.1.3.c. Comportement sous chargement renversé

Si la charge axiale est renversé (traction-compression) est appliqué à un spécimen en acier, une courbe contrainte-déformation du type présenté dans figure III.13 (a) est obtenue. La figure montre l'effet de « Bauschinger », dans lequel « sous un chargement renversé » la courbe contrainte-déformation devient non linéaire à une contrainte beaucoup inférieure que la résistance limite élastique initiale. Ce comportement est fortement influencé par l'histoire précédente de déformation ; temps et température ont également un effet. Le chemin de déchargement suit la pente élastique initiale. L'idéalisation de la courbe par un plateau élastique-parfait et un plateau plastique pour le chargement renversé (figure III.13 (b)) est seulement une approximation. Les courbes de chargement renversées sont importantes pour la considération des effets du chargement séismique à haute intensité sur des membres.



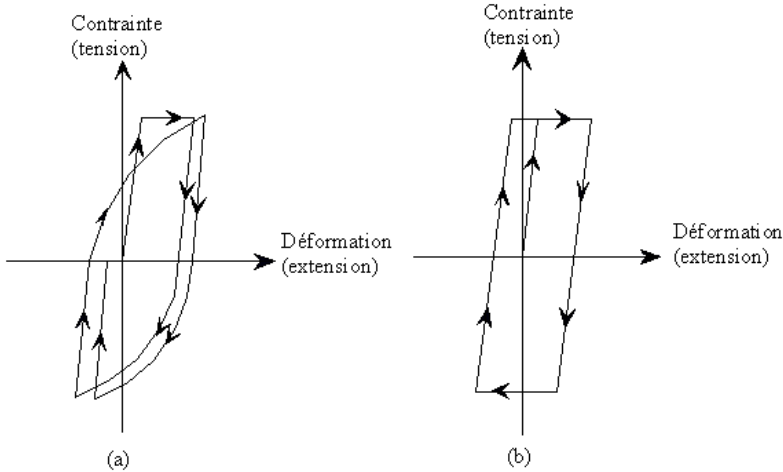
**Figure III.11 :** Idéalisation de la courbe contrainte déformation de l'acier en traction ou en compression.

- (a) Approximation élastique parfaitement plastique.
- (b) Approximation tri-linéaire.
- (c) Courbe complète.



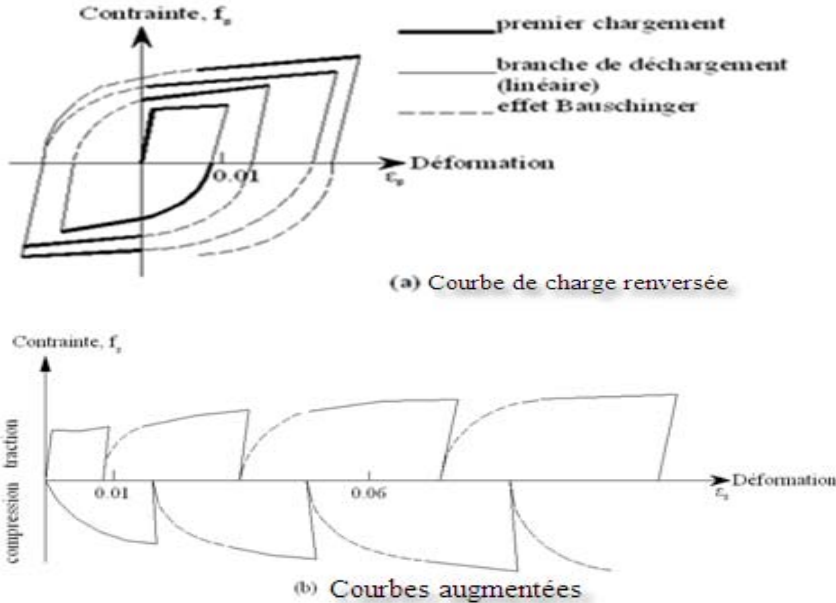
**Figure III.12 :** Courbe contrainte déformation de l'acier sous chargement répété.

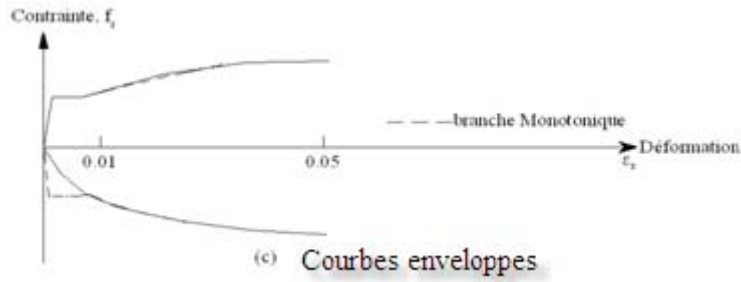
Une idéalisation par Kato et al., basée sur l'observation des données expérimentales contrainte-déformation, obtient la courbe contrainte-déformation pour le chargement renversé des courbes monotones pour la traction et la compression de la façon illustrée dans figure III.14. Le diagramme de charge renversé (figure III.14 (a)) est divisé aux courbes correspondantes aux chargements atteints pour la première fois, déchargeant des branches (lignes droites), et des chargements atteints aux cycles précédents (courbes ramollies dues à l'effet de « Bauschinger »). Les parties du diagramme du même signe peuvent être tracées dans l'ordre, comme dans la figure III.14 (b). La connexion des segments des premières branches de chargement (figure III.14 (c)) mène à un diagramme semblable aux courbes monotones. Une différence existe à la partie initiale de la courbe de compression, qui est considérablement courbée, comparée à la courbe monotone. Kato et al ont représenté les courbes ramollies, dues à l'effet de « Bauschinger », par des hyperboles débutant de la contrainte zéro. Utilisant cette idéalisation, les courbes contrainte-déformation de charge renversée peuvent être obtenues approximativement à partir des courbes monotones [13].



**Figure III.13 :** (a) effet « Bauschinger » sous chargement renversé.

(b) Idéalisation élastique parfaitement plastique parfaite de l'acier sous chargement renversé.





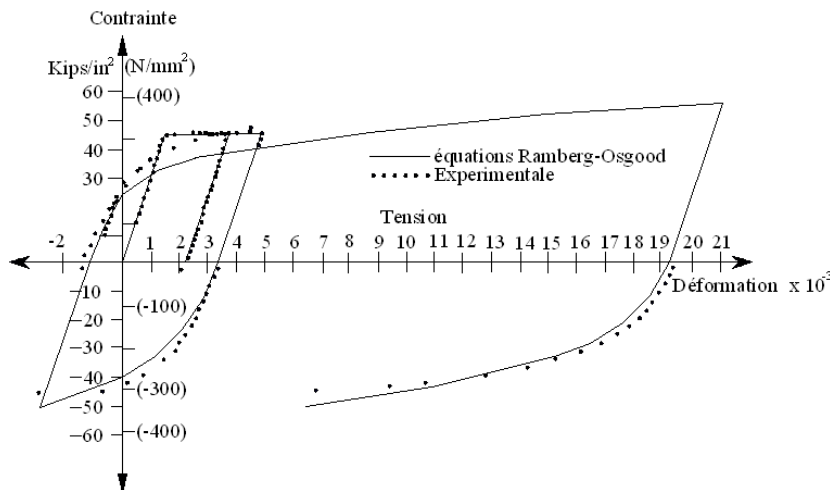
**Figure III.14 :** Courbe contrainte déformation de l'acier sous chargement renversé.

Aktan et al et Kent et Park ont employé les rapports de « Ramberg-Osgood » pour idéaliser la forme des branches ramollies de la courbe contrainte-déformation. Dans la méthode de Kent et Park, les branches de déchargement sont supposé suivre la pente élastique initiale ; après que la première atteinte d'écoulement, les parties du chargement de la courbe contrainte-déformation sont représentées par la forme suivante du rapport de « Ramberg-Osgood » :

$$\xi_s - \xi_{si} = \frac{f_s}{E_s} \left( 1 + \left| \frac{f_s}{f_{ch}} \right|^{r-1} \right) \quad (1)$$

Ou  $\xi_s$  = déformation de l'acier,  $\xi_{si}$  = déformation de l'acier à la contrainte zéro au début d'essai de chargement,  $E_s$  = module d'élasticité de l'acier,  $f_{ch}$  = contrainte dépendant de la résistance d'écoulement et de la déformation plastique dans l'acier produit dans le cycle de chargement précédent, et  $r$  = paramètre dépendant du nombre de cycle de chargement. La figure III.15 compare les données expérimentales contrainte-déformation à la courbe donnée par Eq. 1, utilisant des valeurs empiriques pour  $f_{ch}$  = et le  $r$ . Aktan et al ont employé « Ramberg-Osgood » pour définir le chargement et les branches de déchargement des courbes et ont obtenus de bonne concordance avec des résultats d'essai. Ils ont également conçu une idéalisation alternative se composant d'un ensemble de lignes droites parallèles et inclinés à la pente élastique.

Il est évident que le degré de complexité de l'idéalisation utilisée dépend des besoins de l'application particulière.



**Figure III.15 :** Courbe contrainte déformation de l'acier sous chargement renversé.

## III.2. Comportement non linéaire

### III.2.1. Modèles non linéaires

Généralement, On peut distinguer trois grandes familles des modèles non linéaires: les modèles globaux, locaux et enfin semi-globaux. Le choix de l'un de ces modèles est fonction du type de modélisation adoptée.

#### III.2.1.a. Les modèles globaux

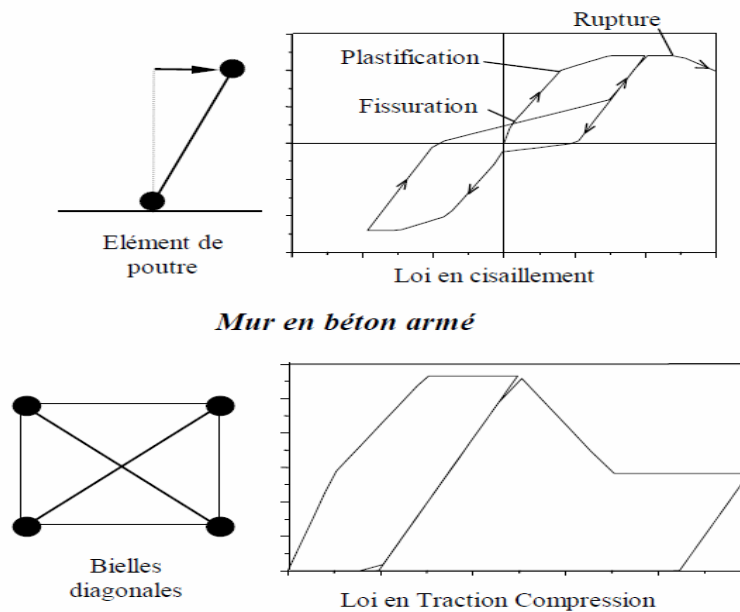
Ces modèles reproduisent le comportement inélastique d'une section d'un élément de structure, généralisé sur toute longueur (du type poutre, poteau, mur en béton armé ou maçonnerie), puis étendu à un étage complet voire le bâtiment complet. Les lois de comportement sont généralement uniaxiales (lois uniaxiales découplées « acier béton »).

Celles-ci sont formulées directement en fonction des contraintes généralisées (moment, effort tranchant, effort normal) agissant sur une section associée à des déformations (courbure, cisaillement, allongement, déplacement relatif).

Des lois bi, tri ou multilinéaires sont souvent utilisées pour représenter le comportement des éléments en béton armé [19].

La figure III.16 montre une loi en cisaillement pour l'étude de murs en béton armé peu élancés ainsi que la modélisation d'un mur de remplissage en maçonnerie par deux bielles diagonales. Ces lois globales sont généralement l'issue de deux éléments poutre ou barre.

Ces modèles nécessitent des règles d'identification empiriques et donc présentation de domaine de validité limité. Toutefois, ils permettent de réaliser des calculs dynamiques de structures de bâtiments complets et conduisent en général à des temps de calculs très réduits.



**Figure III.16 :** Modèles globaux de murs porteurs en béton armé et de murs de remplissage en maçonnerie.



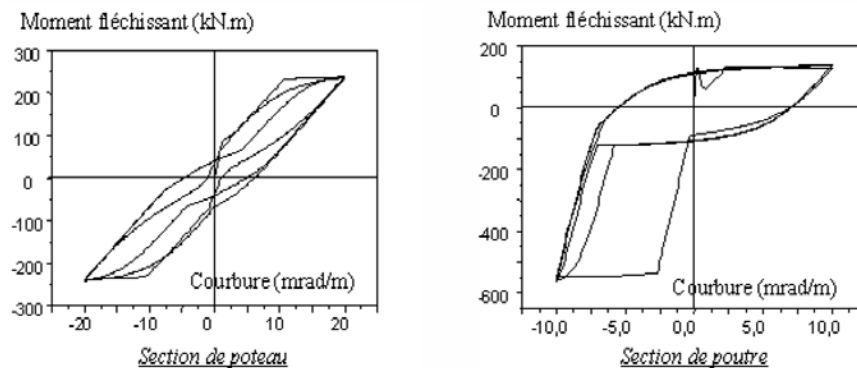
### III.2.1.b. Les modèles locaux

Ce niveau de modélisation se fait par des éléments de milieu continu bidimensionnels ou tridimensionnels, chaque matériau (maçonnerie, béton, armature, joint de mortier ou joint sec, etc.) peut être représenté. L'association de ces lois permet donc de prédire le comportement d'un élément de structure mais l'analyse est souvent lourde car l'état du matériau est pris en compte en chaque point d'intégration de l'élément fini considéré, la nécessité des stockages et des temps de calculs importants ce qui limite leur utilisation à des structures ou des chargements simples. Toutefois l'utilisation de ce niveau de modélisation permet d'obtenir des informations sur les paramètres des modèles globaux qui peuvent être très utile pour l'étude de structures complètes sous chargement sismique [19].

### III.2.1.c. Les modèles semi-globaux

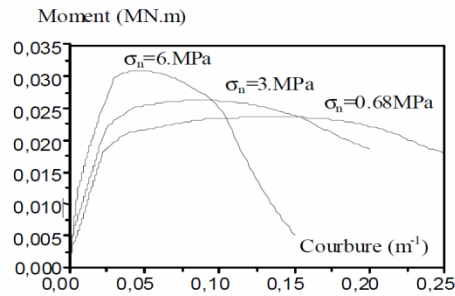
Ces modèles sont une approche intermédiaire par rapport aux deux autres modèles, Les modèles multifibres (Guedes et al., 1994; Combescure, 2007) et les modèles multicouches (Laborderie, 1991) sont des exemples de modèles semi-globaux : ils sont décrits par les déplacements et les rotations d'élément poutre, élément plaque ou coque supposant a priori un mode de fonctionnement –hypothèse des sections planes qui restent planes- mais les efforts internes sont traités au niveau local, calculés à partir de lois uniaxiales reproduisant le comportement de chaque matériau – béton, acier.....

Alors les paramètres à prendre en compte pour ce type de model, sont donc les caractéristiques des matériaux et la géométrie de la section. La figure III.17 montre est l'issue d'une analyse non linéaire d'un poteau et d'une poutre.



**Figure III.17 :** Exemples de relations moment-courbure.

Un des avantages de ce type de modèle, Outre que la simplicité d'utilisation, est la prise en compte implicite de l'effet de l'effort normal sur le moment fléchissant, par exemple, dans le cas des voiles relativement élancés, l'approche semi-globale apporte des intéressants résultats, vue que la perturbation apportée par l'effort tranchant n'est pas très importante. Les relations moment-courbure (figure III.18) montrent l'augmentation de moment résistant et la diminution de ductilité causée par l'augmentation de l'effort normal d'une section de poteau soumise à différentes forces axiales montrent [19].



**Figure III.18 :** Influence de l'effort axial sur la résistance et la ductilité d'un poteau.

### **III.3. Lois de comportement**

La loi de comportement est la relation entre les contraintes et les déformations subies par les matériaux

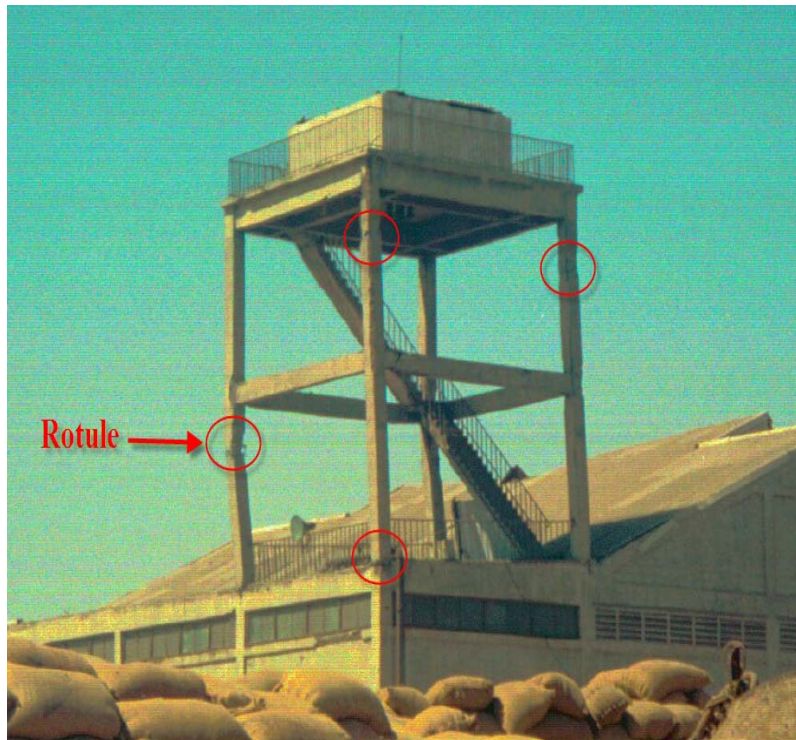
#### **III.3.1. Les rotules plastiques**

Le poids propre et la surcharge d'exploitation représentent les charges verticales auxquelles une structure réelle est toujours soumise et qui se combinent aux actions horizontales représentant généralement les charges sismiques.

Pour une direction précise de l'effort horizontal, des moments ultimes s'ajoutent aux droits des zones critiques dites - pour le moment - zones de plastification et qui s'accumulent jusqu'à obtenir un mécanisme (la ruine) (Figure III.19).



**Figure III.19 :** Exemple de dommages d'un bâtiment suite au séisme de Zemmouri 2003.



**Figure III.20 :** Endommagement d'un portique à 2 étages par flexion dans les zones critiques des poteaux dans une installation portuaire lors du séisme de Buhj (Inde) en 2001.



**Figure III.21 :** effondrement par flexion hors plan d'une structure portiques en béton armé (Parking) lors du séisme de Northridge (Etats-Unis) en 1994.



**Figure III.22 :** Ruine par flexion-compression d'un poteau en béton armé de 1m de diamètre dans le bâtiment (Motoyama Royal Condominium) lors du séisme de Kobe (Japon) en 1995.



**Figure III.23 :** Rupture par cisaillement d'un poteau en béton armé lors du séisme de Kalamata (Grèce) en 1986.



**Figure III.24 :** Rupture par cisaillement d'un poteau court en béton armé dans une école d'enseignement technique des chemins de fer lors du séisme de Miyagi-Ken en 1978.



**Figure III.25 :** Endommagement d'un nœud poteau-poutre par cisaillement lors du séisme de Kobe (Japon) en 1995.



**Figure III.26 :** Endommagement des nœuds d'un portique dans une cimenterie lors du séisme Buhj (Inde) en 2001.



**Figure III.27 :** Ruine d'un nœud a la jonction poteau-poutre d'angle lors du séisme de Buhj (Inde) en 2001.

### III.3.2. Critère de ruine en rotation

Il existe trois phases principales au niveau local d'une section endommagée d'après les phénomènes observés lors de la ruine par flexion, la fissuration de la section, la plastification des aciers et enfin la ruine de la section par l'écrasement du béton en compression, la rupture en traction ou le flambement des aciers sous charges cycliques [15].

Une loi de comportement réaliste pour le béton et l'acier, la prise en compte de l'influence du taux de confinement est toujours bénéfique pour exhiber ces phénomènes par une relation moment-courbure. L'amélioration de cette relation se fait en tenant compte du glissement acier-béton et de l'effort tranchant qui incline les fissures et qui augmente donc la longueur des rotules.

Trois méthodes sont proposées, pour estimer la rotation de ruine d'un de ces éléments poutre ou poteau.

Il existe plusieurs méthodes pour définir une rotation de ruine, parmi ces méthodes on peut citer à titre d'exemple :

#### - Méthode De Priestley

Selon Priestley une rotation de ruine est définie en utilisant la notion de longueur de rotule plastique, cette longueur  $L_p$  la longueur où se retrouve la rotation de ruine plastique expérimentale si elle est multipliée par une courbure plastique ultime, soit :

$\theta_{p,u} = (\phi_u - \phi_y)L_p$  avec :  $L_p = 0.08 H + 0.022 f_y d_{bl}$  où :  $H$  : est la hauteur du poteau,  $f_y$  : la contrainte de plastification des aciers et  $d_{bl}$  : est le diamètre des barres de flexion.  $\phi_u$  et  $\phi_y$  : courbures ultime et de début de plastification.

Remarquons que la longueur  $L_p$  permet le calcul de la ductilité en déplacement  $\mu_d$  en fonction de la ductilité en courbure  $\mu_{1/R}$ . En effet, les déplacements de plastification et de ruine valent respectivement :

$$\Delta_y = \phi_y \frac{H^2}{3} \text{ et } \Delta_{p,u} = \theta_{p,u} (H - 0.5 L_p)$$

D'où :

$$\mu_d = 1 + 3(\mu_{1/R} - 1) \frac{L_p}{H} \left(1 - 0.5 \frac{L_p}{H}\right)$$

### - Méthode Empirique

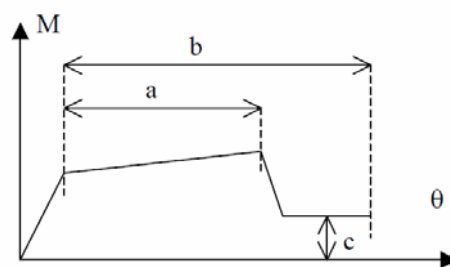
Validée sur de nombreux tests de poutres et poteaux, utilisée par plusieurs auteurs comme Fardis (1994) ou Arede (1997) et basée sur une formule empirique. La rotation ultime totale vaut :

$$\theta_u = 0.0634 \left(\frac{H}{D}\right)^{0.93} \left(\frac{\max(\rho_t, 0.004)}{\max(v_d, 0.05)}\right)^{0.48} w_t^{-0.27} f_c^{-0.15}$$

Avec :  $H$  : hauteur du poteau,  $D$  : largeur du poteau,  $v_d = \sigma_n/f_c$  : effort normal réduit,  $\rho_t$  : ratio volumique de cadres,  $w_t$  : ratio mécanique d'acier longitudinal ( $A_s f_y / f_c$ ),  $f_c$  : résistance en compression du béton.

### - Méthode Simplifiée de l'ATC40 / FEMA 273-356

Une rotule plastique est une zone d'un élément de structure (poutres, poteaux, voiles,...) subissant des déformations irréversibles et capables de dissiper l'énergie sous sollicitations alternées, au delà d'un seuil de sollicitation elle se comporte comme une articulation autorisant la rotation des autres parties de l'élément (Figure III.28). Pour l'évaluation des rotations le lecteur se rapportera directement à l'ATC40.



**Figure III.28 :** Loi Moment-Rotation simplifiée de l'ATC 40.

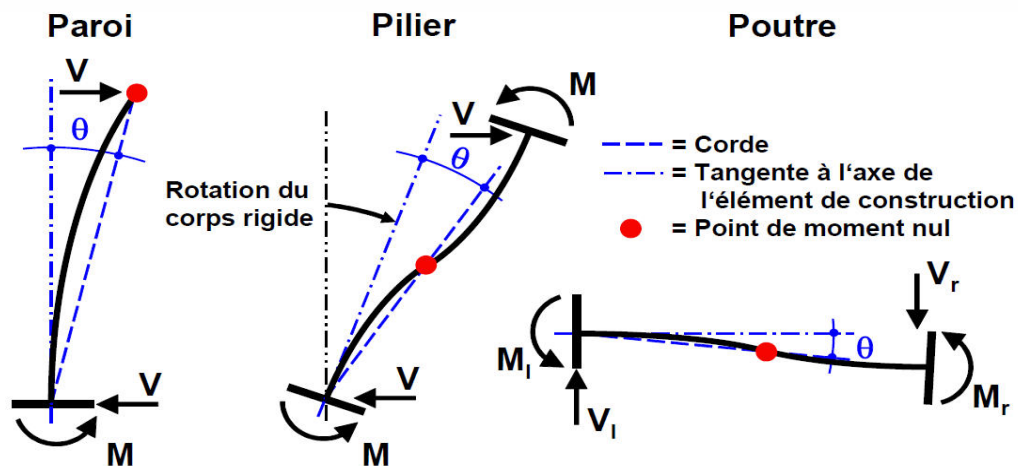
### III.3.3. Caractéristiques des rotules plastiques

Les rotules sont caractérisées par des Moments ou des efforts tranchants associées respectivement à des rotations, des courbures ou des déplacements de fissuration, plastification et ruine, Après la formation des rotules plastiques, les non linéarités sont concentrées au niveau des rotules plastiques et La dégradation de rigidité dans chaque rotule plastique représente un état endommagé de la structure. Pourtant, il s'avère que la rigidité chute, certes de manière globale entre le début (rigidité élastiques) et la fin du séisme (rigidités dégradées encore plus faibles que les rigidités fissurées) mais elle ne diminue pas (forcément) à chaque pas de temps : les fissures éventuelles peuvent se refermer et la rigidité augmente au cours des cycles.



### III.3.4. Rotation de la corde

Les rotations de la corde sont comparées au niveau élémentaire (tous les déplacements rigides du corps de l'ouvrage soient soustraits. Par exemple, lors du calcul de la rotation de la corde d'un poteau à partir du déplacement relatif de deux étages, le déplacement rigide du poteau dû à la déformation des étages inférieurs doit être soustrait). La rotation de la corde est l'angle formé par la tangente à l'axe de l'élément de construction au niveau de la rotule plastique (endroit du moment maximal) et la corde reliant celle-ci à l'extrémité de la portée de cisaillement (point de moment nul), comme montre la figure III.29.



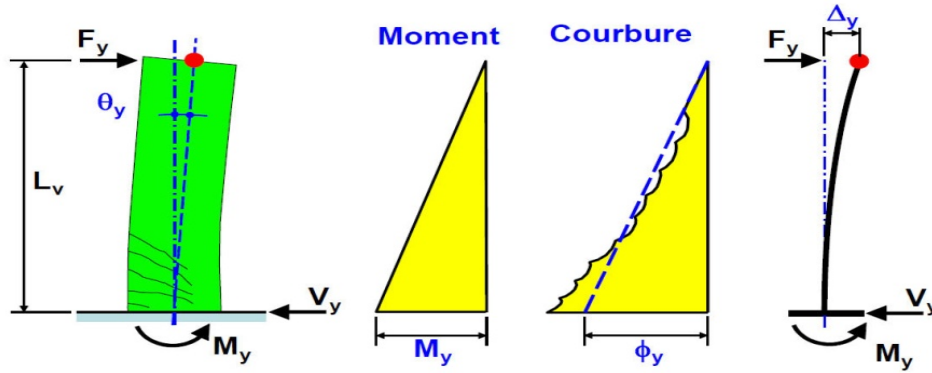
**Figure III.29 :** Illustration de la rotation de la corde  $\theta$  sur divers éléments de construction.

### III.3.5. Rotation élastique de la corde

Il est admis que le comportement d'un élément est linéaire-élastique jusqu'à la rotation de plastification  $\theta_y$ , malgré les non-linéarités dues au développement progressif de la fissuration. La valeur  $\phi_y$  (courbure de plastification) est atteinte en premier lieu en zone encastree dite : début de la portée de cisaillement ( $L_v$ : la portée de cisaillement), la répartition de la courbure est linéaire le long de cette portée (voir figure III.30).

On se basant sur la figure III.30, la rotation de plastification de la corde  $\theta_y$  est le rapport entre le déplacement de plastification  $\Delta_y$  et la portée de cisaillement  $L_v$ . Elle vaut :

$$\theta_y = \frac{\Delta_y}{L_v} = \frac{F_y L_v^3}{3EI} = \frac{M_y L_v}{EI} \frac{1}{3} = \phi_y \frac{L_v}{3} \quad (2)$$



**Figure III.30:** Rotation de plastification de la corde  $\theta_y$  d'un élément de construction.

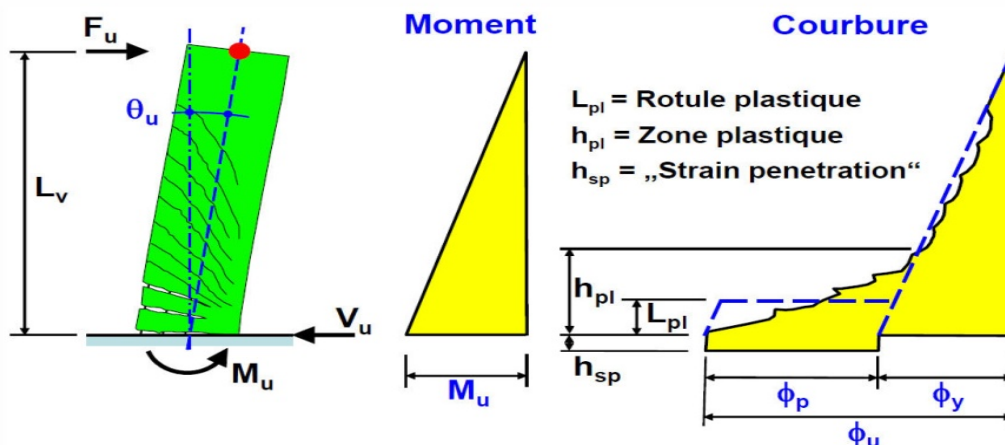
Où  $\phi_y$  représente la courbure de plastification. Le déplacement de plastification  $\Delta_y$  d'un élément de construction peut être obtenu au moyen de l'équation suivante :

$$\Delta_y = \theta_y \cdot L_v \quad (3)$$

### III.3.6. Rotation ultime de la corde

La figure III.31 illustre la répartition de la courbure d'un porte-à-faux après plastification, cette répartition présente une zone au pied du porte-à-faux le long de laquelle a lieu la plastification de l'armature ou des déformations plastiques,  $h_{pl}$  représente la longueur de la « zone plastique ». La plastification des armatures longitudinales s'étendent et pénètrent sur une longueur  $h_{sp}$  jusque dans les fondations (« Strain penetration ») et produisent une rotation du porte-à-faux dans la section d'encastrement.

La complexité de la répartition effective de la courbure le long d'un élément de construction peut être simplifiée en incluant le concept de la rotule plastique. La rotule plastique est une dimension fictive qui permet le calcul simplifié des déformations d'un élément de construction en cours de plastification.



**Figure III.31 :** Répartition de la courbure  $\phi$  le long d'un élément de construction plastifié (d'après Paulay & Priestley, 1992).

La littérature donne plusieurs définitions de la longueur des rotules plastiques, c'est l'hypothèse de Priestley (Paulay & Priestley (1992)) qui a été retenue (voir équation (4)) avec :  $a_{st}$ : facteur de correction tient compte de la capacité d'écroutissage réduite des aciers européens. Avec :  $0.08L_v$ , la première partie de l'équation (4) pour la prise en compte de l'écroutissage à l'encastrement et l'extension de l'allongement plastique dû aux fissures inclinées de flexion accompagnée d'effort tranchant (« shear spread of plasticity »).  $0.022f_s d_{bl}$  : La deuxième partie de l'équation pour la prise en compte de la pénétration des allongements plastiques des armatures longitudinales dans les fondations. L'équation est proportionnelle à  $f_s$  la limite d'écoulement et  $d_{bl}$  diamètre de l'armature longitudinale. la longueur d'ancrage dans les fondations augmente et avec elle, la rotation à la section d'encastrement si les deux paramètres ( $f_s, d_{bl}$ ) augmentes.

$$L_{pl} = a_{st}(0.08L_v + 0.022f_s d_{bl}) \text{ [mm]} \quad (4)$$

Avec:

$a_{st}$ : Coefficient de nuance d'acier.  $a_{st} = 0.8$  pour les aciers d'armature avec :  $(f_t/f_s) < 1.15$  et  $a_{st} = 1$  pour les aciers d'armature avec :  $(f_t/f_s) \geq 1.15$  ;

$L_v$  : Portée de cisaillement en [mm] ;

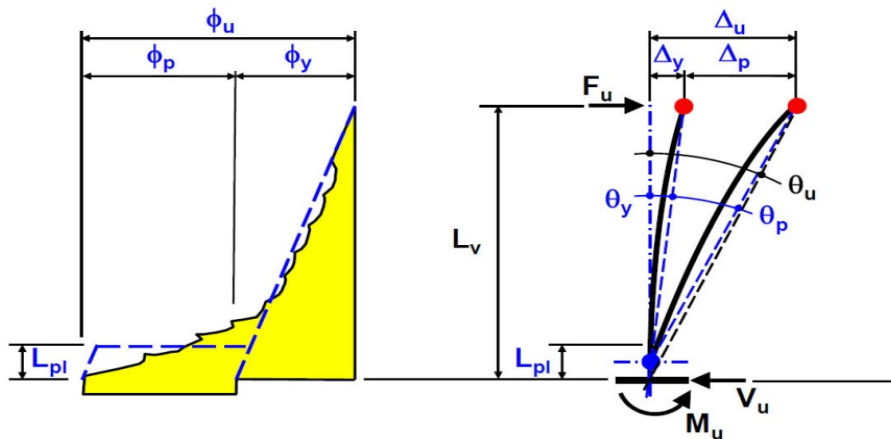
$f_s$  : Limite d'écoulement de l'armature longitudinal, en [MPa] ;

$f_t$  : Résistance à la traction de l'armature longitudinale, en [MPa] ;

$d_{bl}$  : Diamètre de l'armature longitudinale, en [mm].

Des relations ressortant de la figure III.32 et de la rotule plastique, Le déplacement ultime  $\Delta_u$  peut être calculé. La littérature admet que la rotation plastique  $\theta_p$  se situe à mi-hauteur de la rotule plastique. Ainsi, le déplacement ultime  $\Delta_u$  peut être déterminé à l'aide de l'équation (5) comme la somme des déplacements élastiques  $\Delta_y$  et plastiques  $\Delta_p$ .

$$\Delta_u = \theta_u L_v = \Delta_y + \Delta_p = \theta_y L_v + \theta_p \left( L_v - \frac{L_{pl}}{2} \right) \quad (5)$$



**Figure III.32 :** Rotation de la corde à la rupture  $\theta_u$  d'un élément de construction.

La rotation plastique peut être calculée comme étant l'intégration de la courbure plastique dans la rotule plastique. L'équation (5) devient alors :

$$\theta_u L_v = \theta_y L_v + (\phi_u - \phi_y) L_{pl} \left( L_v - \frac{L_{pl}}{2} \right) \quad (6)$$

En divisant par  $L_v$ , on obtient l'équation permettant de calculer la rotation de la corde à la rupture :

$$\theta_u = \theta_y + (\phi_u - \phi_y)L_{pl} \left( 1 - \frac{0.5L_{pl}}{L_v} \right) \quad (7)$$

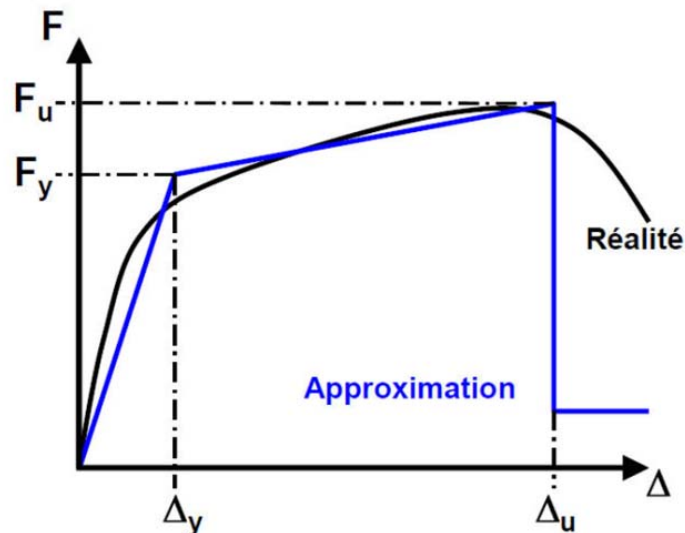
$\phi_u$ : La courbure ultime de l'élément de construction.

L'équation (7) est aussi utilisée pour déterminer la rotation de la corde des colonnes et des poutres.

### III.3.7. Lois moment-courbure

La loi moment-courbure d'une section dépend de ses caractéristiques géométriques, des caractéristiques mécaniques des matériaux qui la composent mais aussi du ferrailage longitudinal, transversal et de l'effort normal de la section.

Le diagramme suivant illustre la courbe arrondie de la relation moment courbure d'une section en béton armé et l'approximation bilinéaire appropriée.



**Figure III.33 :** Relation moment - courbure.

### III.3.8. Détermination des moments élastiques et ultimes et leurs courbures correspondantes

#### III.3.8.a. Moment et courbure élastique

Le déplacement limite élastique est défini, pour une section droite d'un élément de contreventement, comme l'état où les armatures d'acier tendues atteignent leur déformation élastique maximale  $\xi_s = f_y/E_s$ .

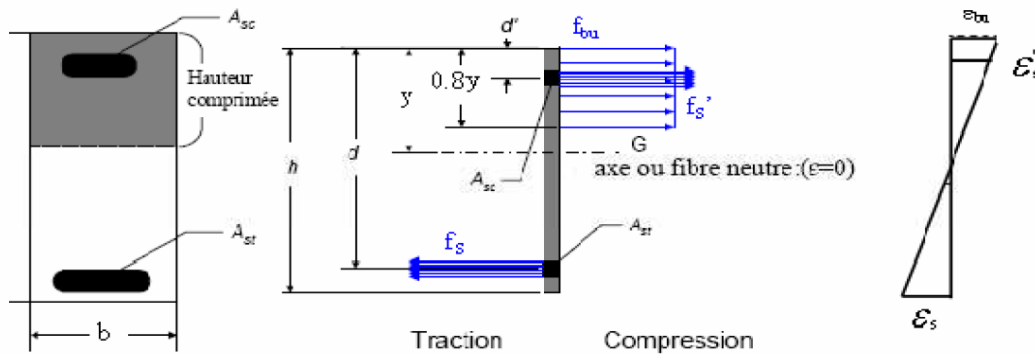
L'équilibre de la section, montrée en figure III.34, permet d'écrire les équations données, en supposant un diagramme rectangle équivalent des contraintes dans le béton.

La contrainte de traction dans l'acier est donnée pour :

$$\xi_s = 2\text{‰}$$

$$\xi'_s = \xi_s \frac{(y - d')}{(d - y)} \text{ et } \xi_{bu} = \frac{\xi_s \cdot y}{(d - y)}$$

Le moment élastique est obtenu par l'état de contrainte suivant :



**Figure III.34 :** Distribution des déformations et des contraintes.

L'équilibre de la section montrée dans la figure s'écrit comme suit :

$$N_u = C_c + C_s - T_s$$

Avec :

$$C_c = 0.8 \times b \times y \times f_{bu} ; C_s = A'_s \times f'_s \text{ et } T_s = A_s \times f_s$$

Le moment élastique est comme suit:

$$M_y = A'_s \times f'_s \times (d - d') + 0.8 \times b \times y \times f_{bu} \times (d - 0.4 \times y) - N_u \times \left(d - \frac{h}{2}\right)$$

La courbure élastique est :

$$\phi_y = \frac{\xi_s}{(d - y)} = \frac{\xi_{bu}}{y}$$

### III.3.8.b. Moment et courbure ultime

La limite de résistance est définie comme la limite pour laquelle la fibre comprimée la plus éloignée de la section droite de l'élément et les armatures d'acier tendues atteignent leurs déformations maximales ( $\xi_{bu} = 3.5\%$ ), ( $\xi_s = 10\%$ ) respectivement.

La courbure ainsi que le moment fléchissant sont obtenus des équations d'équilibre tirées de la figure III.34 de la section droite. Après développement des équations d'équilibre, on aboutit aux expressions suivantes pour la courbure ultime et le moment ultime respectivement :

Le moment ultime est comme suit:

$$M_u = A'_s \times f'_s \times (d - d') + 0.8 \times b \times y \times f_{bu} \times (d - 0.4 \times y) - N_u \times \left(d - \frac{h}{2}\right)$$

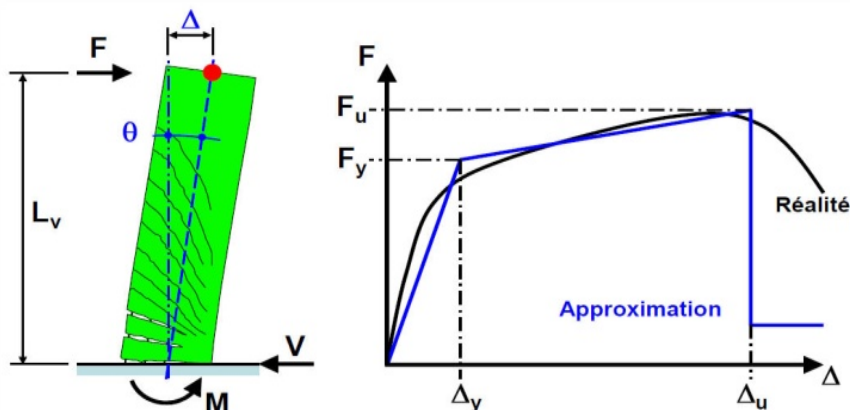
La courbure ultime est :

$$\phi_u = \frac{\xi_s}{(d - y)} = \frac{\xi_{bu}}{y}$$

### III.3.9. Relations force-déplacement non linéaires

La figure III.35 illustre le comportement réel et l'approximation bilinéaire d'un porte-à-faux élancé. L'approximation bilinéaire est caractérisée par deux points: (1) la plastification nominale ( $F_y, \Delta_y$ ) et (2) la rupture ( $F_u, \Delta_u$ ). Les efforts  $F_y$  et  $F_u$  peuvent être déterminés à l'aide de l'équation (8) à partir de la résistance de l'élément de construction à l'encastrement. Il faut remarquer ici que la résistance  $F_y$  peut être déterminée à partir du moment de résistance  $M_y$ .

$$F = \frac{M}{L_v} \quad (8)$$



**Figure III.35 :** Relation force-déplacement non linéaire d'un porte-à-faux élancé.

Les déplacements  $\Delta_y$  et  $\Delta_u$  peuvent être déterminés au moyen des équations (3) à (5) à partir de la courbure à la section d'encastrement.

On peut remarquer ici que la relation moment-courbure à l'encastrement joue un rôle important dans le calcul du comportement non linéaire d'éléments de construction élancés en béton armé.

## **CHAPITRE IV : METHODES DE RESOLUTION**

IV.1. Introduction

IV.2. Méthode De Substitution

IV.3. Méthode De Newton-Raphson

IV.4. Méthode Incrémentale (OU PAS A PAS)

## IV. Méthode de résolution des systèmes non linéaires

### IV.1. Introduction

Des non-linéarités apparaissent dans la formulation de problèmes physiques pour deux raisons :

Les paramètres physiques supposés indépendants de  $\mathbf{U}_n$  dans un modèle linéaire, tels que le module d'Young, les coefficients de conductivité et viscosité, etc..., deviennent des fonctions de  $\mathbf{U}_n$ . C'est par exemple le cas dans la plasticité, dans les écoulements non newtoniens, dans les écoulements en milieux poreux non saturés.

Des termes non linéaires par rapport aux inconnues du problème apparaissent dans les équations aux dérivées partielles, même Lorsque les propriétés physiques sont indépendantes de  $\mathbf{U}_n$ . Par exemple dans les équations de Navier Stokes apparaissent les termes [25]:

$$\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \dots$$

Et en élasticité avec grands déplacements :

$$\xi_x = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right)^2$$

La méthode des éléments finis conduit à une formulation discrétisée des problèmes non linéaires qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{W} = \langle \delta \mathbf{U}_n \rangle ([\mathbf{K}(\mathbf{U}_n)] \{ \mathbf{U}_n \} - \{ \mathbf{P} \}) = \mathbf{0} \quad \text{pour tout } \langle \delta \mathbf{U}_n \rangle$$

Ou en remplaçant  $\mathbf{U}_n$  par  $\mathbf{U}$  pour simplifier les notations :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})] \{ \mathbf{U} \} = \{ \mathbf{P} \} \quad \text{ou} \quad \{ \mathbf{R}(\mathbf{U}) \} = \{ \mathbf{P} \} - [\mathbf{K}(\mathbf{U})] \{ \mathbf{U} \} = \mathbf{0} \quad (1)$$

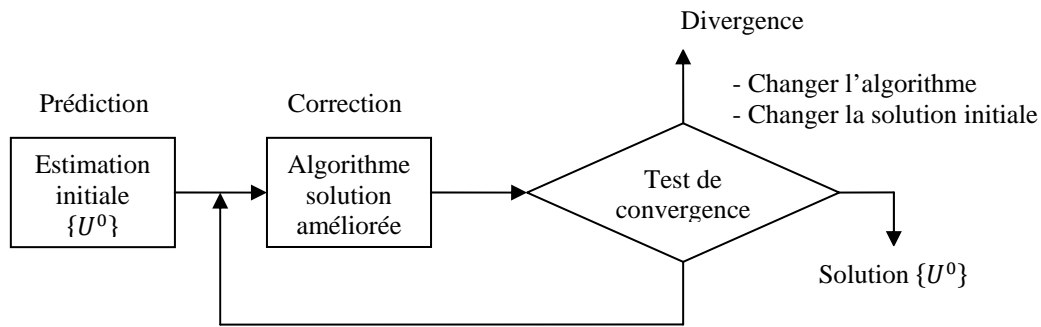
Dans certains cas (plasticité), seule existe une forme incrémentale de (1) :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})] \{ \Delta \mathbf{U} \} = \{ \Delta \mathbf{P} \} \quad (2)$$

Résoudre le système non linéaire (1), c'est chercher un vecteur  $\{ \mathbf{U} \}$  qui rende le résidu  $\{ \mathbf{R}(\mathbf{U}) \}$  aussi proche que possible de zéro. La solution exacte rend  $\{ \mathbf{R}(\mathbf{U}) \}$  nul.

La recherche de la solution  $\{ \mathbf{U} \}$  se fait de manière itérative :





La majorité des algorithmes conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Le choix d'un algorithme de résolution, doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- le type de non-linéarité : localisée ou non, prépondérante ou non
- l'existence d'une ou plusieurs solutions ;
- la disponibilité d'une méthode de construction d'une solution approchée
- la précision et la rapidité de convergence désirées ;
- le risque de divergence.

En pratique il n'existe pas de méthode générale, valable pour tous les cas; la stratégie de résolution doit s'adapter, par expérience, à une classe de problèmes donnée, en faisant appel à une combinaison des trois méthodes; de base suivantes :

- Méthode de substitution
- Méthode de Newton-Raphson
- Méthode incrémentale.

## IV.2. Méthode De Substitution

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions  $\{U^0\}, \{U^1\} \dots \{U^i\}$  ;  $\{U^i\}$  étant calculée à partir de  $\{U^{i-1}\}$  en résolvant le système linéaire :

$$[K(U^{i-1})]\{U^i\} = \{P\}; i = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

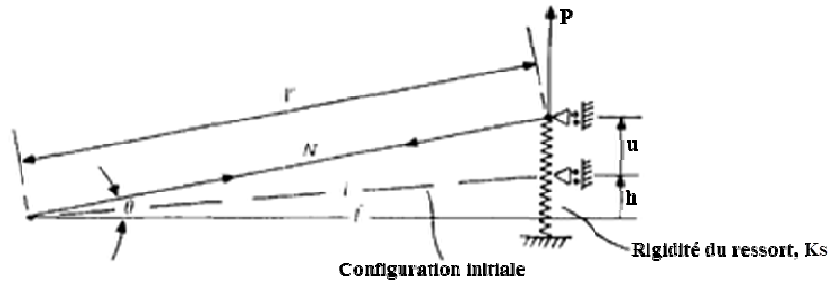
Ce qui peut s'écrire sous forme incrémental introduisant le résidu  $\{R^i\}$  :

$$\begin{aligned} \{R^i\} &= \{R(U^{i-1})\} = \{P\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \\ [K(U^{i-1})]\{\Delta U^i\} &= \{R^i\} \quad (4) \\ \{U^i\} &= \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\} \end{aligned}$$

Le vecteur  $\{U^{i-1}\}$  étant connu, nous pouvons construire les matrices élémentaires  $[k(U^{i-1})]$ , puis les assembler pour obtenir  $[K(U^{i-1})]$  et enfin résoudre le système linéaire (4) en  $\{\Delta U^i\}$  par l'une des méthodes du paragraphe précédent [25].

### Exemple 1 : Méthode de substitution

Considérons le treillis représenté sur la figure IV.1, dont la rigidité  $K$  dépend du déplacement  $w$  (non-linéarité géométrique) [05] :



(b) **Figure IV.1** : Problème à un seul degré de liberté (barre + ressort).

Données :  $EA = 5 \times 10^7 \text{ N}$ ,  $h = 25 \text{ mm}$ ,  $l = 2500 \text{ mm}$ ,  $K_s = 1.35 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ ,  $P = -7 \text{ N}$

Soit l'équation d'équilibre :

$$P = \frac{EA}{l^3} \left[ h^2 u + \frac{3}{2} h u^2 + \frac{1}{2} u^3 \right] + K_s u$$

La matrice de rigidité  $K$  :

$$K = \frac{EA}{l^3} \left[ h^2 + \frac{3}{2} h u + \frac{1}{2} u^2 \right] + K_s$$

Vecteur de forces résiduelles  $R^i$  :

$$R^i = P - K(u^{i-1}) \cdot u^{i-1}$$

Itération	$u^{i-1}$	$K(u^{i-1})$	$R^i = P - K(u^{i-1}) \cdot u^{i-1}$	$\Delta u = [K(u^{i-1})]^{-1} \cdot R^i$	$u^i = u^{i-1} + \Delta u$	$\ n\  = \max_j \left  \frac{\Delta u_j}{u_j} \right ^i$
1	0	3.35	-7	-2.0896	-2.0896	1.00000
2	-2.0896	3.1062	-0.50928	-0.16396	-2.2536	0.07275
3	-2.2536	3.0877	-0.04156	-0.01346	-2.2671	0.00594
4	-2.2671	3.0862	-0.00106	-0.001062	-2.2682	0.00468

L'algorithme correspondant à (4) est le suivant :

### Algorithme de substitution

Calculer une solution approchée  $\{U^0\}$ , éventuellement nulle [25].

Construire  $\{P\}$  par assemblage des vecteurs élémentaires  $\{p\}$ .

$i = 1, 2, \dots$  (Pour chaque itération)

Pour chaque élément

Extraire les valeurs  $\{u^{i-1}\}$  de  $\{U^{i-1}\}$

Calculer  $[k(u^{i-1})]$

Calculer le résidu élémentaire  $\{r\} = \{p\} - [k]\{u^{i-1}\}$

Assembler comme dans un problème linéaire:

$$\begin{array}{l} [k] \text{ dans } [K] \\ \{r\} \text{ dans } \{R^i\} \end{array} \quad (5)$$

Résoudre comme dans un problème linéaire :  $[K]\{\Delta U^i\} = \{R^i\}$

Construire la nouvelle estimation de la solution :

$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$$

Calculer la norme  $\|n\|$  de  $\{\Delta U^i\}$  ou  $\|m\|$  de  $\{R^i\}$ .

Test de convergence utilisant  $\|n\|$  ou  $\|m\|$ .

### IV.3. Méthode De Newton-Raphson

Supposons qu'à l'itération  $i - 1$  nous avons obtenu une approximation  $\mathbf{U}_{i-1}$  de la solution telle que le résidu ne soit pas nul [25].

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{i-1})\} = \{\mathbf{P}\} - [\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i-1})]\{\mathbf{U}^{i-1}\} \neq \mathbf{0} \quad (6)$$

A l'itération  $i$  nous cherchons une approximation  $\mathbf{U}^i$  de la solution telle, que :

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^i)\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{i-1} + \Delta\mathbf{U}^i)\} \approx \mathbf{0} \quad (7)$$

L'algorithme est obtenu en développant ce résidu en série de Taylor au voisinage de  $\mathbf{U}^{i-1}$  :

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{i-1} + \Delta\mathbf{U}^i)\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{i-1})\} + \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^{i-1}} \{\Delta\mathbf{U}^i\} + \dots = \mathbf{0} \quad (8)$$

D'où, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$- \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right] \{\Delta\mathbf{U}^i\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{i-1})\}$$

Ou :

$$[\mathbf{K}_t(\mathbf{U}^{i-1})]\{\Delta\mathbf{U}^i\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{i-1})\} \quad (9)$$

$$\{\mathbf{U}^i\} = \{\mathbf{U}^{i-1}\} + \{\Delta\mathbf{U}^i\}$$

L'expression de la matrice tangente  $[\mathbf{K}_t(\mathbf{U}^{i-1})]$  s'obtient en dérivant l'expression (1) du résidu:

$$[\mathbf{K}_t(\mathbf{U})] = - \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right] = - \left[ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{U}} \right] + [\mathbf{K}(\mathbf{U})] + \left[ \frac{\partial [\mathbf{K}(\mathbf{U})]}{\partial \mathbf{U}} \right] \{\mathbf{U}\} \quad (10)$$

Dans le cas où  $\mathbf{F}$  est indépendant de  $\mathbf{U}$  :

$$[\mathbf{K}_t(\mathbf{U})] = [\mathbf{K}(\mathbf{U})] + \left[ \frac{\partial [\mathbf{K}(\mathbf{U})]}{\partial \mathbf{U}} \right] \{\mathbf{U}\} \quad (11)$$

Ou encore, si  $(\mathbf{K}_t)_{ij}$  et  $\mathbf{K}_{ij}$  sont les composantes des  $[\mathbf{K}_t]$  et  $[\mathbf{K}]$  :

$$(\mathbf{K}_t)_{ij} = \mathbf{K}_{ij} + \sum_l \frac{\partial \mathbf{K}_{il}}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{U}_l$$

L'algorithme correspondant à (9) est semblable à l'algorithme(5), cependant  $[\mathbf{K}]$  est remplacée par  $[\mathbf{K}_t]$ .

**EXEMPLE 2 : Méthode de Newton-Raphson.**

Dans l'exemple précédent [05]:

$$K_t = K + \frac{\partial K}{\partial u} \cdot u, \quad K = \left[ \frac{EA}{l^3} \left[ h^2 + \frac{3}{2}hu + \frac{1}{2}u^2 \right] + K_s \right]$$

$$K_t = \left[ \frac{EA}{l^3} \left[ h^2 + \frac{3}{2}hu + \frac{1}{2}u^2 \right] + K_s \right] + \left[ \frac{EA}{l^3} \left[ \frac{3}{2}h + u \right] \right] u$$

Itération	$u^{i-1}$	$k_t(u^{i-1})$	$k(u^{i-1})$	$R^i = P - k(u^{i-1}), (u^{i-1})$	$\Delta u^i = k_t^{-1} \cdot R^i$	$u^i = u^{i-1} + \Delta u^i$	$\ r\  = \max_j \left  \frac{\Delta u_j}{u_j} \right ^i$
1	0	3.35	3.35	-7	-2.0896	-2.0896	1.00000
2	-2.0896	2.8695	3.1062	-0.5093	-0.1775	-2.2671	0.07829
3	-2.2671	2.8306	3.0862	-0.0033	-0.0016	-2.2683	0.00071

### EXEMPLE 3 : Méthode de Newton-Raphson modifiée.

Dans l'exemple précédent [05]:

$$K = \frac{EA}{l^3} \left[ h^2 + \frac{3}{2}hu + \frac{1}{2}u^2 \right] + K_s = K_l + K_{nl}(u)$$

Ou :

$$K_l = \frac{EA}{l} \left( \frac{h^2}{l^2} \right) + K_s$$
$$K_{nl} = \frac{EA}{l^3} \left[ \frac{3}{2}hu + \frac{1}{2}u^2 \right]$$

### Algorithme De Newton-Raphson Modifiée

Calculer une solution approchée  $\{U^0\}$ , éventuellement nulle [25].

Construire  $\{P\}$  par assemblage des vecteurs élémentaires  $\{p\}$ .

Construire  $[K_l]$  par assemblage des matrices élémentaires « linéaires »  $[k_l]$

Décomposée  $[k_l]$

$i = 1, 2 \dots$  (Pour chaque itération)

    Pour chaque élément

        Extraire  $\{u^{i-1}\}$  de  $\{U^{i-1}\}$

        Calculer le résidu  $\{R^i\}$  par assemblage des résidus élémentaires :

$$\{r\} = \{p\} - [k]\{u^{i-1}\} \quad (12)$$

    Résoudre  $[K_l] \cdot \{\Delta U^i\} = \{R^i\}$  à partir de  $[K_l]$  décomposée

    Calculer  $\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$

    Calculer  $\|n\|$

    Test de convergence utilisant  $\|n\|$ .

Utilisons l'algorithme (12) :

Itération	$u^{i-1}$	$K_t$	$K(u^{i-1})$	$R^i = P - K(u^{i-1}) \cdot u^{i-1}$	$\Delta u^i = (k_t)^{-1} \cdot R^i$	$u^i = u^{i-1} + \Delta u^i$	$\ r\  = \max_j \left  \frac{\Delta u_j^i}{u_j} \right $
1	0	3.35	3.35	-7.0000	-2.0896	-2.0896	1.00000
2	-2.0896	3.35	3.1062	-0.50928	-0.15202	-2.2416	0.06782
3	-2.2416	3.35	3.0890	-0.07570	-0.02260	-2.2642	0.00998
4	-2.2642	3.35	3.0865	-0.01155	-0.00345	-2.2676	0.00152

Dans l'algorithme (12) la matrice  $[K_t]$  est assemblée et décomposée une seule fois, alors que dans l'algorithme (5), il faut assembler et décomposer  $[K]$  à chaque itération. L'algorithme (12) est souvent employé dans le cas de non-linéarités faibles. Par contre pour les problèmes fortement non linéaires, la méthode de Newton-Raphson, présentée au paragraphe suivant, est plus souvent utilisée que (5) car elle converge en général plus rapidement.

#### IV.4. Méthode Incrémentale (OU PAS A PAS)

La solution initiale joue un rôle important dans les méthodes itératives précédentes. Selon le choix de cette solution. Les méthodes peuvent diverger ou converger vers une solution non acceptable [25].

La méthode incrémentale consiste à remplacer la résolution de :

$$[K(U)]\{U\} = \lambda\{P_0\} = \{P\} \quad (13)$$

Par la résolution successive de :

$$[K(U_j)]\{U_j\} = \lambda_j\{P_0\} \quad (14)$$

Ou :

$$\lambda_j = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda$$

La solution initiale utilisée pour calculer  $U_j$  est la solution  $U_{j-1}$  obtenue à l'étape précédente. Chaque étape constitue un problème non linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations de la méthode de Newton-Raphson modifiée.

La méthode incrémentale, utilisant une itération de newton-Raphson à chaque étape, s'écrit pour un niveau donné de sollicitation  $\lambda_j$  :

$$\{R(U_{j-1})\} = \lambda_{j-1}\{P_0\} - [K(U_{j-1})]\{U_{j-1}\}$$

$$[K_t(U_{j-1})]\{\Delta U_j\} = \{R(U_{j-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1})\{P_0\} \quad (15)$$

$$\{U_j\} = \{U_{j-1}\} + \{\Delta U_j\}$$

La méthode incrémentale utilisant plusieurs itérations de newton-Raphson s'écrit pour un niveau donné de sollicitations  $\lambda_j$  :

$$[K_t(U_j^{i-1})]\{\Delta U_j^i\} = \{R(U_j^{i-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1})\{P_0\}$$

$$\{U_j^i\} = \{U_j^{i-1}\} + \{\Delta U_j^i\} \quad i = 2, 3, \dots \quad (16)$$

Pour :  $i = 1$ , on utilise directement (15).

**Exemple 4 : Méthode incrémentale (ou pas à pas).**

Appliquons le chargement  $P = -7$  de l'exemple précédent sous la forme de deux accroissements [05]:

$$\lambda_1 = 0.5 \quad \lambda_2 = 0.8 \quad \lambda_3 = 1 \quad P_0 = -7$$

$$K_t = K + \frac{\partial K}{\partial u} \cdot u = K + \left[ \frac{EA}{l^3} \left[ h^2 + \frac{3}{2} hu + \frac{1}{2} u^2 \right] + K_s \right] u$$

$$= \left[ \frac{EA}{l^3} \left[ h^2 + \frac{3}{2} hu + \frac{1}{2} u^2 \right] + K_s \right] + \left[ \frac{EA}{l^3} \left[ \frac{3}{2} h + u \right] \right] u$$

Utilisons l'algorithme (16) :

Pas $j$	$\lambda_j P_0$	Itération $i$	$u_{j-1}$ ou $(u_j^{i-1})$	$K(u_{j-1})$	$R$	$K_t(u_{j-1})$	$\Delta u$	$u_j^i$
1	-3.5	1	0	3.35	-3.5	3.35	-1.0448	-1.0448
2	-5.6	1	-1.0448	3.2264	-2.2291	3.1045	-0.7180	-1.7628
3	-7	1	-1.7628	3.1434	-1.4588	2.9418	-0.4959	-2.2587
3	-7	2	-2.2587	3.0871	-0.0283	2.8324	-0.0096	-2.2683



## **CHAPITRE V : EXEMPLE D'APPLICATION**

V.1. Introduction

V.2. Description de l'ouvrage

V.2.1. Description des bâtiments 01, 02 et 03

V.2.2. Charges Permanentes et Surcharges d'exploitations

V.2.3. Caractéristiques mécaniques des matériaux

V.2.4. Paramètres de l'analyse statique linéaire

V.3. Méthodologie de comparaison entre l'analyse linéaire et non linéaire

V.4. Résultats de l'analyse statique linéaire et non-linéaire

V.5. Interprétation des résultats statiques linéaires et non linéaires géométrique et matérielle

V.6. Importance de l'analyse non linéaire du point de vue économique et stabilité

V.6.1. Importance du point de vue économique

V.6.2. Importance du point de vue stabilité et sécurité



## **V. Exemple D'application**

### **V.1. Introduction**

Dans cette partie nous allons essayer de déterminer l'importance de l'analyse non linéaire matérielle et géométrique du point de vue sécurité et économie. Pour cela nous avons choisis six portiques représentatifs de trois bâtiments (R+5, R+11 et R+19). Les bâtiments 1 et 2 (R+5 et R+11) représentent des bâtiments de petites et de moyennes hauteurs (Effet de la non linéarité géométrique est négligeable) et le bâtiment 3 (R+19) pour des bâtiment de grandes hauteurs (Effet de la non linéarité géométrique n'est pas négligeable).

Une analyse statique linéaire et non linéaire (la méthode Push-Over pour l'analyse non linéaire) des trois bâtiments en question a été faite en utilisant le logiciel de calcul ETABS version 9.6.0, dans le but de déterminer les courbes capacitaires (linéaire et non linéaire) et la comparaison entre ces dernières.

### **V.2. Description de l'ouvrage**

#### **V.2.1. Description des bâtiments 01, 02 et 03**

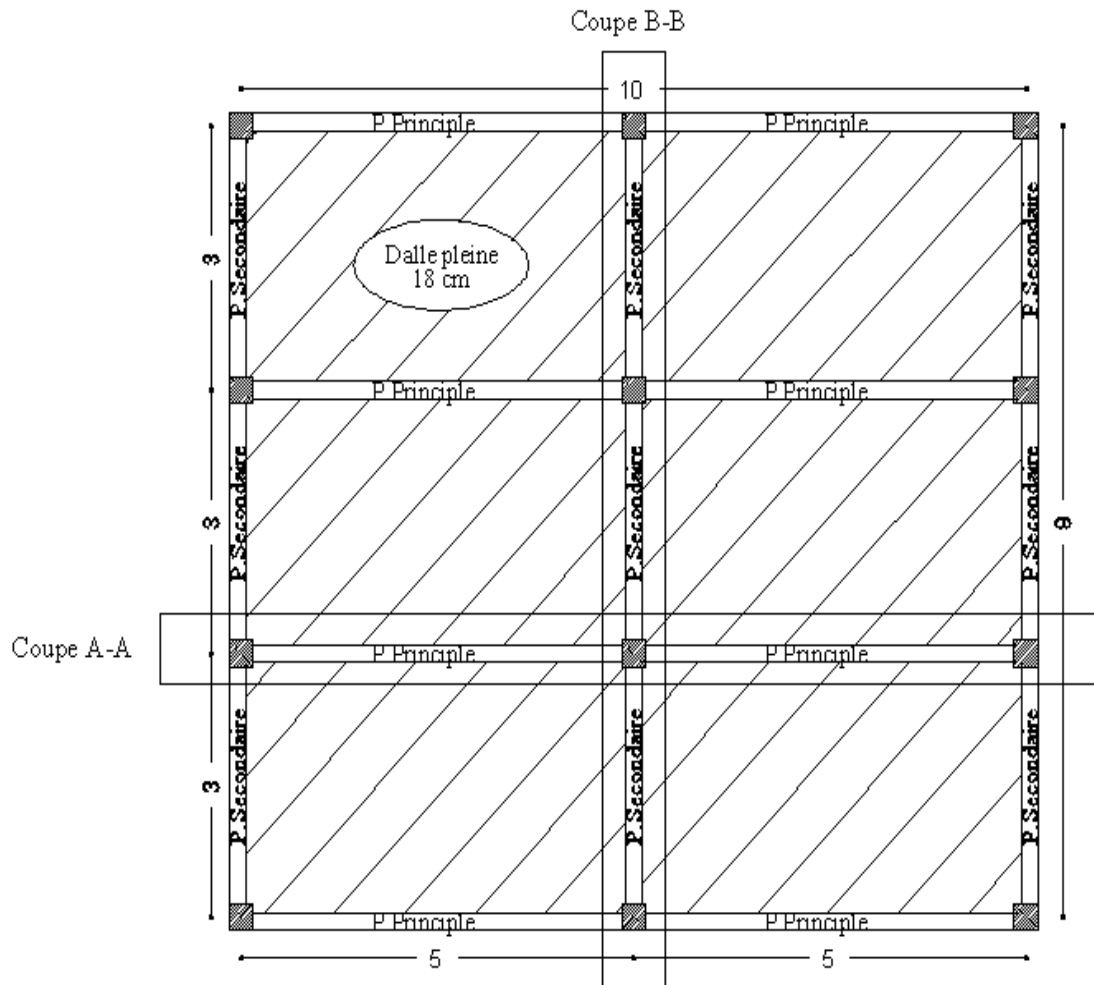
Les bâtiments 01, 02 et 03 sont de forme rectangulaire, constitués d'une ossature auto-stable en béton armé dans les deux sens, sans un remplissage en maçonnerie. Deux travées de 5.00m dans le sens longitudinal et trois travées de 3.00m dans le sens transversal.

Les poteaux du bâtiment 01 ont tous la même dimension (30x30) cm<sup>2</sup> est ce pour tout les niveaux, pour le bâtiment 02 : (40x40) cm<sup>2</sup> du 1<sup>er</sup> niveau au 6<sup>eme</sup> niveau et (30x30) cm<sup>2</sup> du 6<sup>eme</sup> niveau au 12<sup>eme</sup> niveau et pour le bâtiment 03 : (50x50) cm<sup>2</sup> du 1<sup>er</sup> niveau au 6<sup>eme</sup> niveau, (40x40) cm<sup>2</sup> du 7<sup>eme</sup> niveau au 12<sup>eme</sup> niveau et (30x30) cm<sup>2</sup> du 8<sup>eme</sup> niveau au 20<sup>eme</sup> niveau.

Les planchers des deux bâtiments (01 et 02) sont en dalle pleine de 18 cm d'épaisseur supportés par des poutres de (20x25) cm<sup>2</sup> dans le sens transversal et de (20x35) cm<sup>2</sup> dans le sens longitudinal.

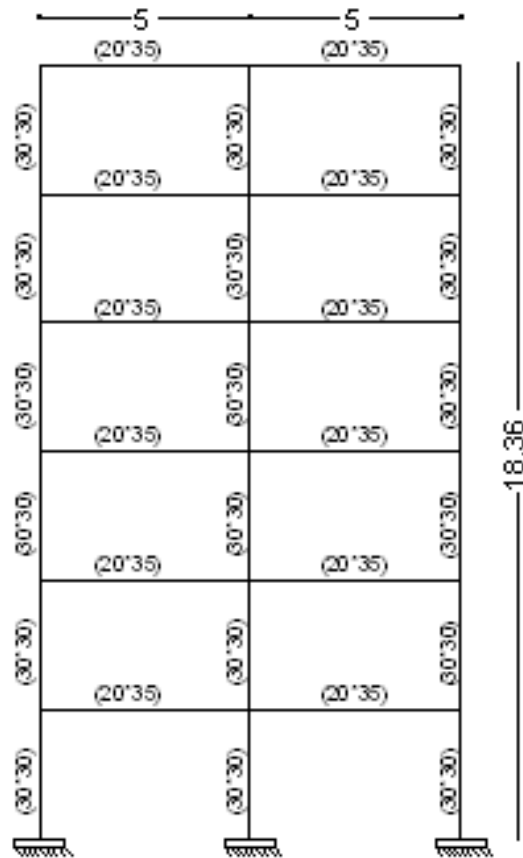
Les planchers du bâtiment 03 sont en dalle pleine de 18 cm d'épaisseur supportés par des poutres de (20x30) cm<sup>2</sup> dans le sens transversal et de (20x40) cm<sup>2</sup> dans le sens longitudinal.

Les trois bâtiments ont 10.30 m de longueur totale et 9.30 m de largeur totale, leurs surfaces en plan est de 95.7900 m<sup>2</sup>.

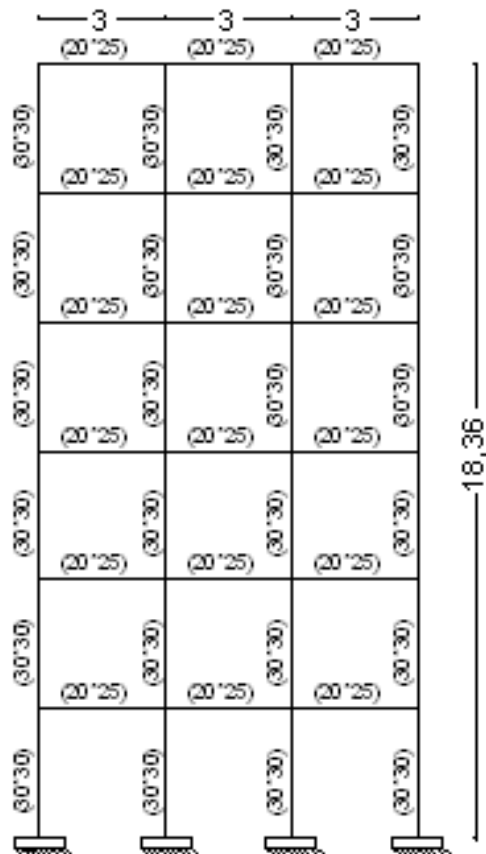


**Figure V.1** : Vue en plan des bâtiments.

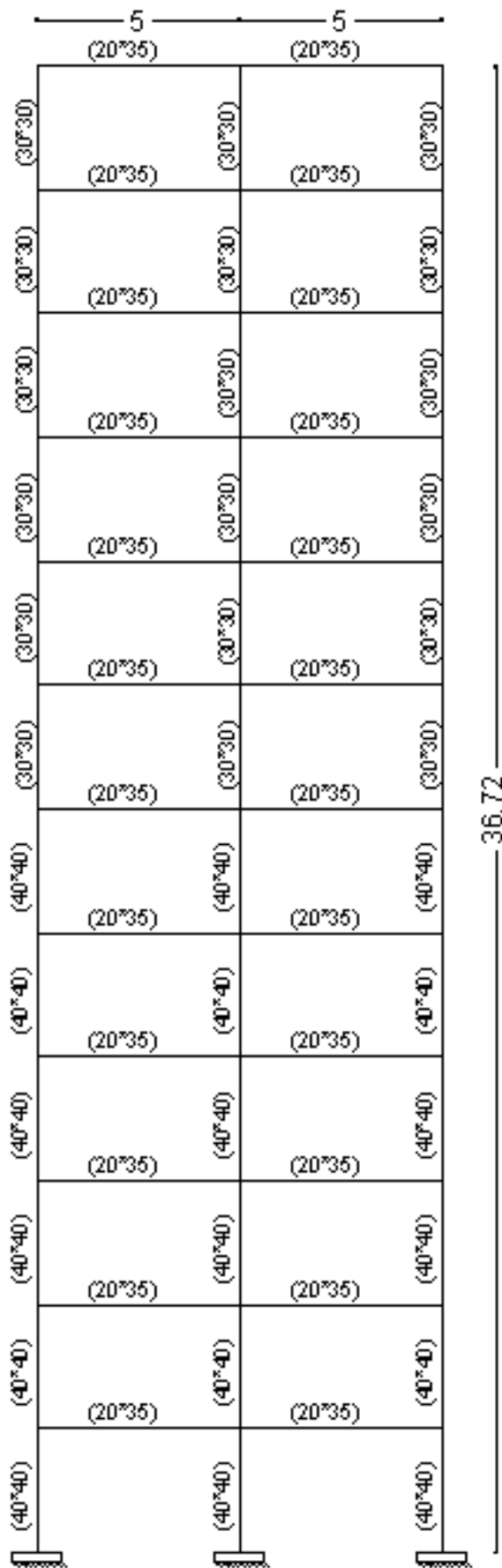
La hauteur des étages est de : 3.06 m. La hauteur totale du bâtiment 01 est de 18.36 m (Voir figure V.2 et V.3), de 36.72 m pour le bâtiment 02 (Voir figure V.4 et V.5) et de 61.20 m pour le bâtiment 03 (Voir figure V.6 et V.7) à partir du niveau ( $\pm 0.00$ ), avec une terrasse inaccessible.



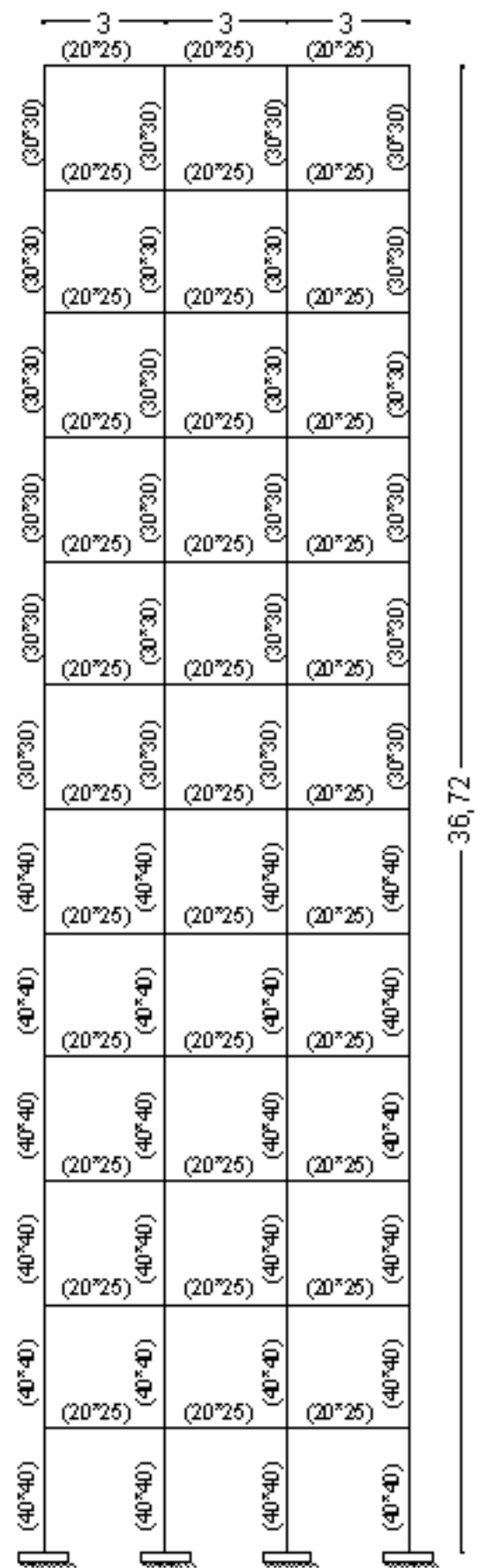
**Figure V 2 :** Coffrage du portique de la coupe AA (sens XX) bâtiment 01.



**Figure V 3 :** Coffrage du portique de la coupe B-B (sens YY) bâtiment 01.



**Figure V.4 :** Coffrage du portique de la coupe A-A (sens XX) bâtiment 02.



**Figure V.5 :** Coffrage du portique de la coupe B-B (sens YY) bâtiment 02.

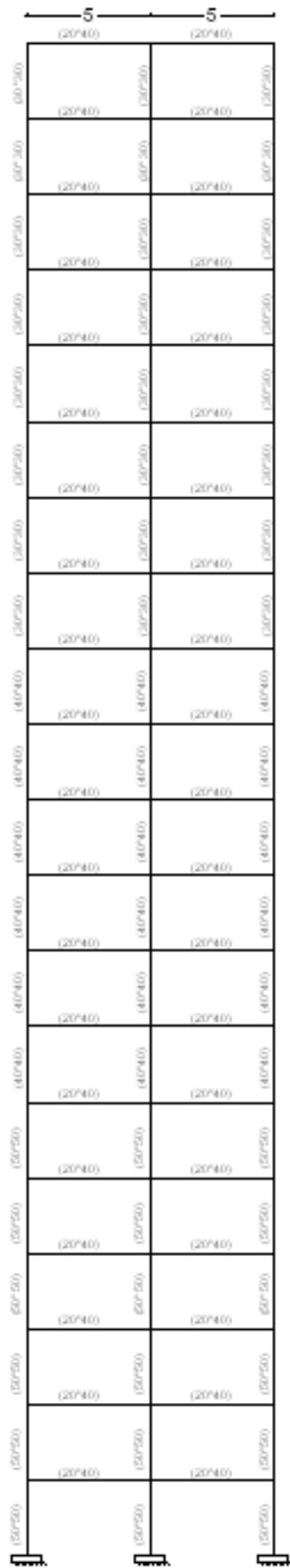


Figure V.6 : coffrage du portique de la coupe A-A (servis XX) bâtiment 03.



Figure V.7 : coffrage du portique de la coupe B-B (servis YY) bâtiment 03.

### V.2.2. Charges Permanentes et Surcharges d'exploitation

Pour l'estimation des charges permanentes et surcharges d'exploitation, les valeurs considérées sont montrées dans le tableau 01.

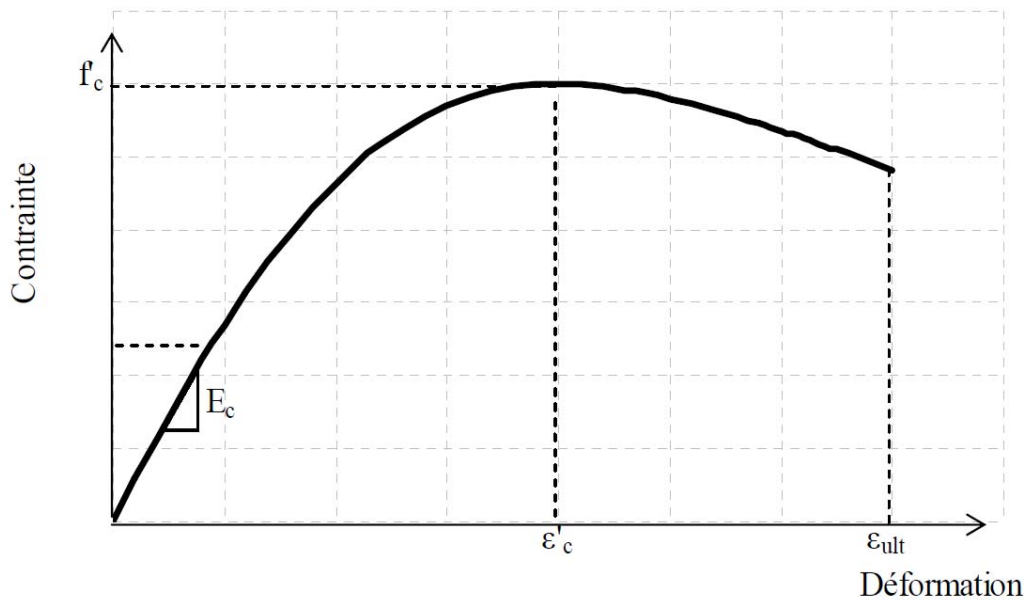
**Tableau 01 :** Charges et Surcharges d'exploitation

Planchers en dalles pleines (e=18cm)	Charges Permanentes G (KN/m <sup>2</sup> )	Surcharges d'Exploitation Q (KN/m <sup>2</sup> )
Etage courant	6.9	2.5
Terrasse inaccessible	7.5	1

### V.2.3. Caractéristiques mécaniques des matériaux

#### Béton :

Résistance à la compression :	$f_{c28} = 25 \text{ MPa}$
Contrainte de traction :	$f_{t28} = 2.1 \text{ MPa}$
Déformation élastique :	$\epsilon_c = 2 \text{ ‰}$
Déformation ultime :	$\epsilon_u = 3.5 \text{ ‰}$
Résistance de calcul du béton :	$\sigma_{bc} = 15 \text{ MPa}$
Module d'élasticité :	$E = 32164.195 \text{ MPa}$



**Figure V.8 :** Loi de comportement du béton en compression sous chargement statique.



**Aciers :**

Aciers longitudinaux FeE40 :

$$f_e = 400 \text{ MPa}$$

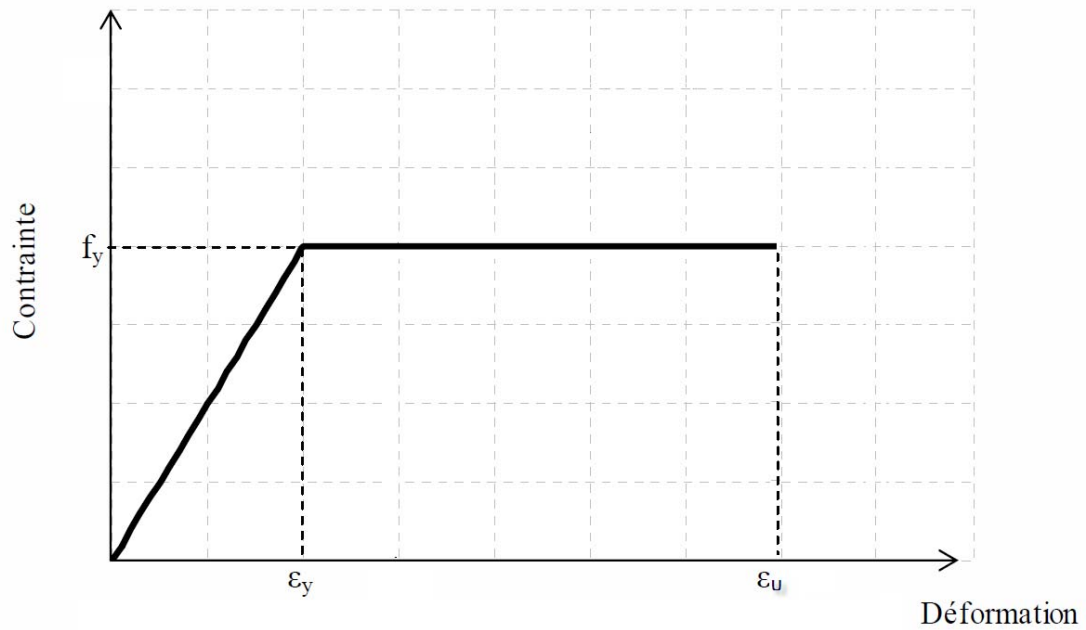
Déformation élastique :

$$\varepsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = 2 \text{ ‰}$$

Déformation ultime :

$$\varepsilon_u = 10 \text{ ‰}$$

Les aciers utilisés sont des aciers à haute adhérence FeE40 pour les armatures longitudinales et transversales.



**Figure V.9** : Loi de comportement de l'acier en traction sous chargement statique.

#### **V.2.4. Paramètres de l'analyse statique linéaire**

**R** = 5 (Coefficient de comportement global de la structure selon le Règlement Parasismique Algérien RPA99 version 2003);

**ξ** = 6 % (pourcentage d'amortissement critique selon le Règlement Parasismique Algérien RPA99 version 2003).

#### **Bâtiment 01 :**

#### **Période de calcul (Voir Annexe):**

**Coupe AA (sens xx) :**

$$T_x = 0.8404 \text{ sec.}$$

**Coupe BB (sens yy) :**

$$T_y = 0.7174 \text{ sec.}$$

#### **Effort tranchant (Voir Annexe):**

**Coupe AA (sens xx) :**

$$V_x = 105.00 \text{ Kn.}$$

**Coupe BB (sens yy) :**

$$V_y = 105.00 \text{ Kn.}$$

#### **Tableau 02 :** Charges horizontales sur les portiques dans les deux sens

<b>Niveaux</b>	<b>Forces XX (Kn)</b>	<b>Forces YY (Kn)</b>
<b>D6</b>	<b>30</b>	<b>30</b>
<b>D5</b>	<b>25</b>	<b>25</b>
<b>D4</b>	<b>20</b>	<b>20</b>
<b>D3</b>	<b>15</b>	<b>15</b>
<b>D2</b>	<b>10</b>	<b>10</b>
<b>D1</b>	<b>5</b>	<b>5</b>

**Bâtiment 02 :**

**Période de calcul (Voir Annexe):**

**Coupe AA (sens xx) :**

$$T_x = 1.5435 \text{ sec.}$$

**Coupe BB (sens yy) :**

$$T_y = 1.3671 \text{ sec.}$$

**Effort tranchant (Voir Annexe):**

**Coupe AA (sens xx) :**

$$V_x = 234.00 \text{ Kn.}$$

**Coupe BB (sens yy) :**

$$V_y = 234.00 \text{ Kn.}$$

**Tableau 03 :** Charges horizontales sur les portiques dans les deux sens

Niveaux	Forces XX (Kn)	Forces YY (Kn)
D12	36	36
D11	33	33
D10	30	30
D9	27	27
D8	24	24
D7	21	21
D6	18	18
D5	15	15
D4	12	12
D3	9	9
D2	6	6
D1	3	3

**Bâtiment 03 :**

**Période de calcul (Voir Annexe):**

**Coupe AA (sens xx) :**

$$T_x = 2.5076 \text{ sec.}$$

**Coupe BB (sens yy) :**

$$T_y = 2.2851 \text{ sec.}$$

**Effort tranchant (Voir Annexe):**

**Coupe AA (sens xx) :**

$$V_x = 420.00 \text{ Kn.}$$

**Coupe BB (sens yy) :**

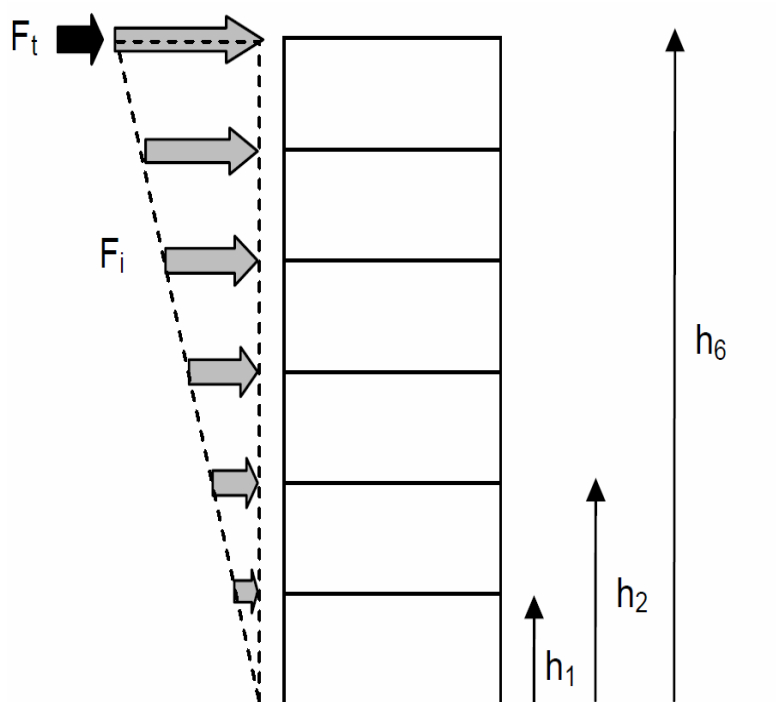
$$V_y = 420.00 \text{ Kn.}$$

**Tableau 03 :** Charges horizontales sur les portiques dans les deux sens

Niveaux	Forces XX (Kn)	Forces YY (Kn)
D20	40	40
D19	38	38
D18	36	36
D17	34	34
D16	32	32
D15	30	30
D14	28	28
D13	26	26
D12	24	24
D11	22	22
D10	20	20
D9	18	18
D8	16	16
D7	14	14
D6	12	12
D5	10	10
D4	8	8
D3	6	6
D2	4	4
D1	2	2

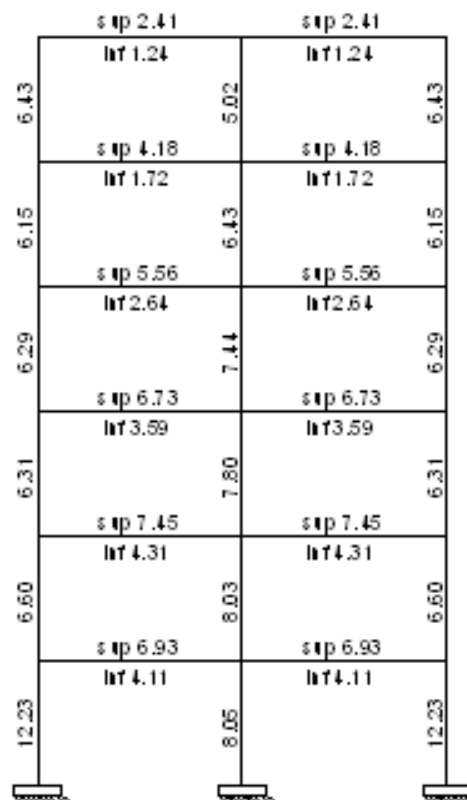
### **V.3. Méthodologie de comparaison entre l'analyse linéaire et non linéaire:**

1. Analyse linéaire statique des portiques représentatifs des trois bâtiments en question a été faite en utilisant le logiciel de calcul ETABS version 9.6.0, dans le but de déterminer les efforts normaux "N", les efforts tranchants a la base "V", les moments fléchissant "M" et les déplacements "d" ainsi que le ferrailage exacte des poteaux et des poutres sous l'effet des combinaisons statiques en utilisant un modèle de chargement triangulaire (voir figure V.10) pour l'analyse statique ou un accélérogramme pour l'analyse dynamique.
2. La détermination des lois de comportement des poteaux et des poutres a été faite en exploitant les résultats de l'analyse linéaire statique et dynamique.
3. L'analyse statique non linéaire a été effectuée en utilisant le même modèle de chargement (c'est-à-dire une répartition triangulaire des forces) et le même logiciel ETABS version 9.6.0, dans le but de déterminer la courbe V-d « Effort tranchant a la base "V" en fonction du déplacement au sommet "d" ».

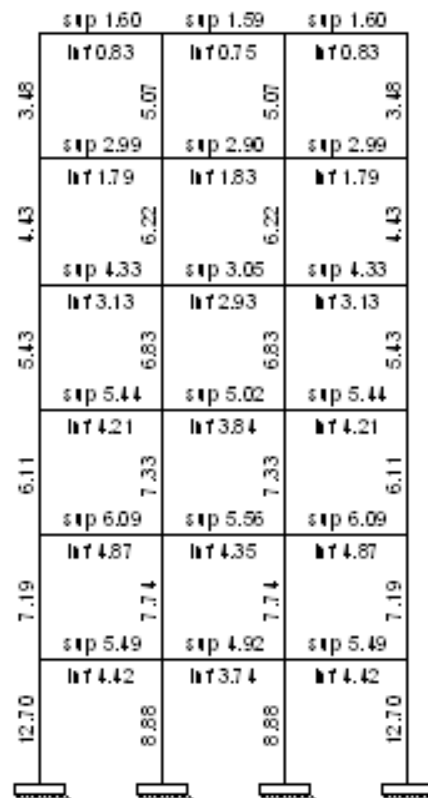


**Figure V.10** : Distribution triangulaire des forces statiques.

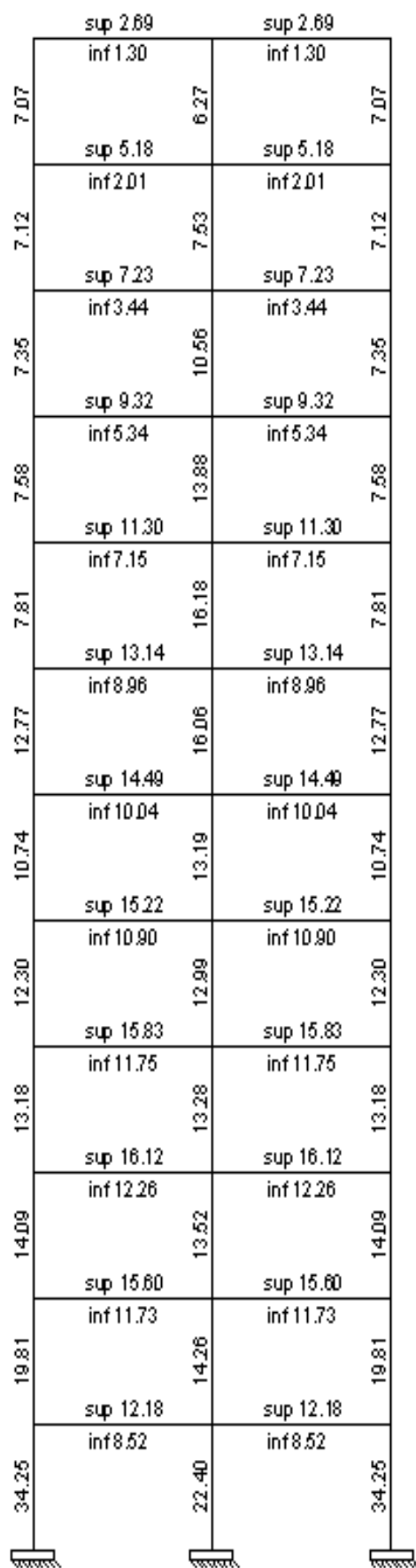
• Ferraillages des Éléments Structuraux selon l'analyse linéaire statique :



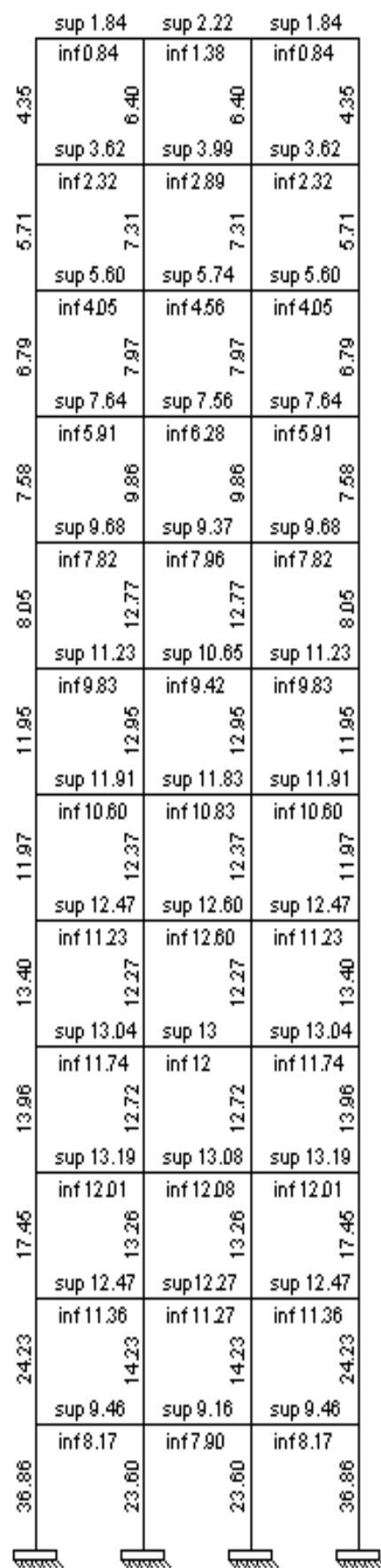
**Figure VII :** Ferraillage (cm<sup>2</sup>) du portique de la coupe AA (sens XX) bâtiment 01.



**Figure V.12 :** Ferraillage (cm<sup>2</sup>) du portique de la coupe BB (sens YY) bâtiment 01.



**Figure V13 :** Ferrailage (cm<sup>2</sup>) du portique de la coupe AA (sens XX) bâtiment 02.



**Figure V14 :** Ferrailage (cm<sup>2</sup>) du portique de la coupe BB (sens YY) bâtiment 02.

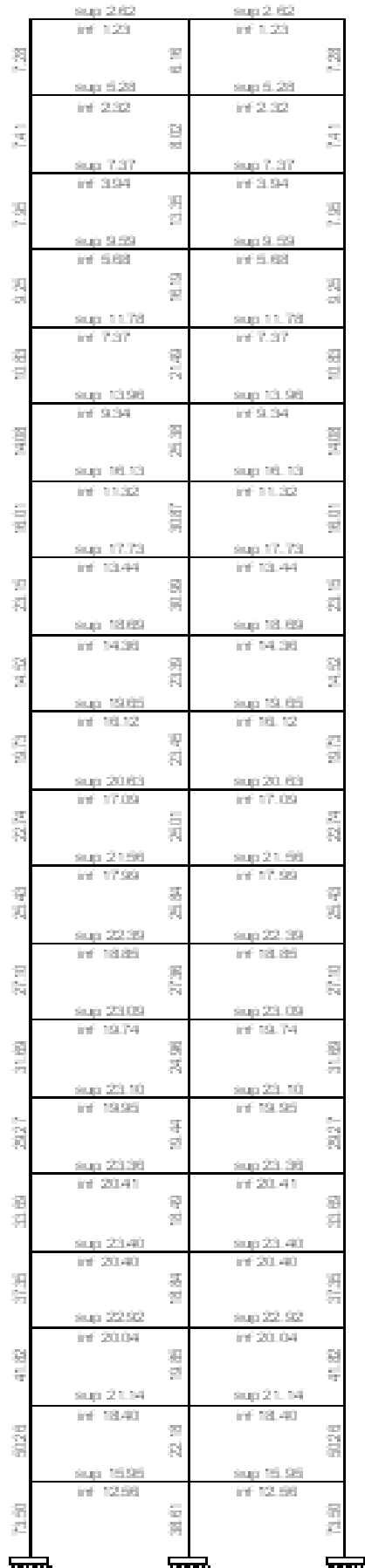


Diagramme V.15 : 7' erratage (cm²) du portique de la coupe A-A (axe X-X) bâtiment 02.

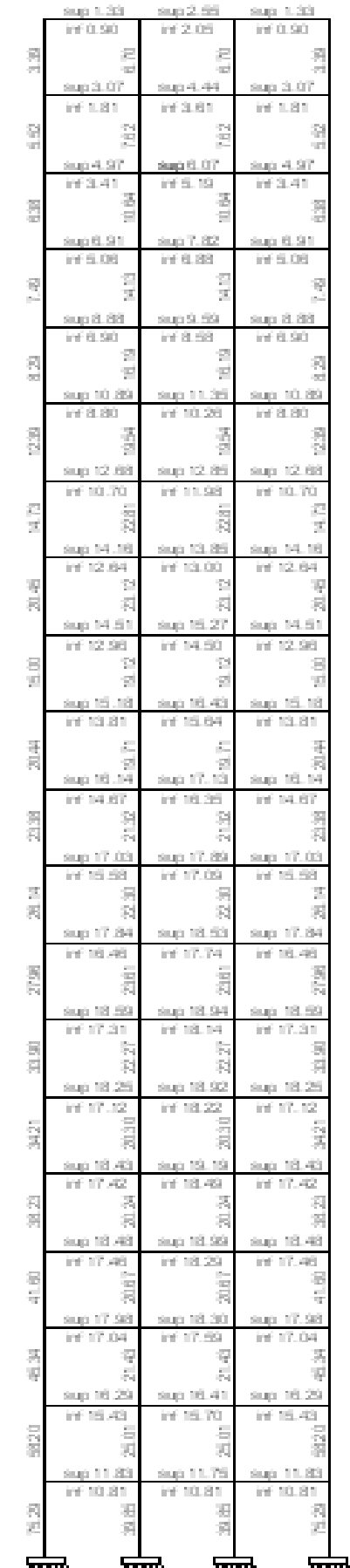
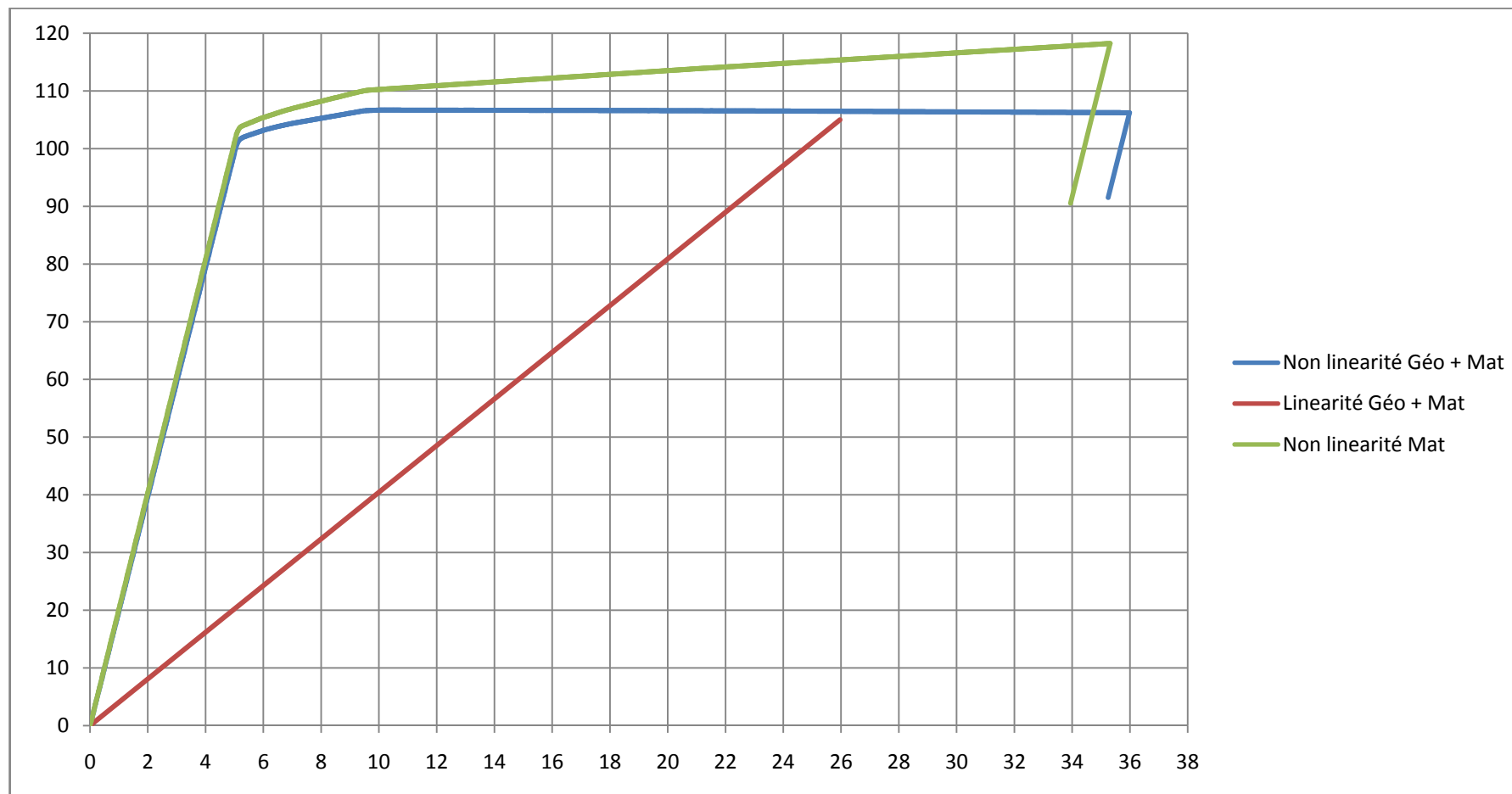


Diagramme V.16 : 7' erratage (cm²) du portique de la coupe B-B (axe Y-Y) bâtiment 02.

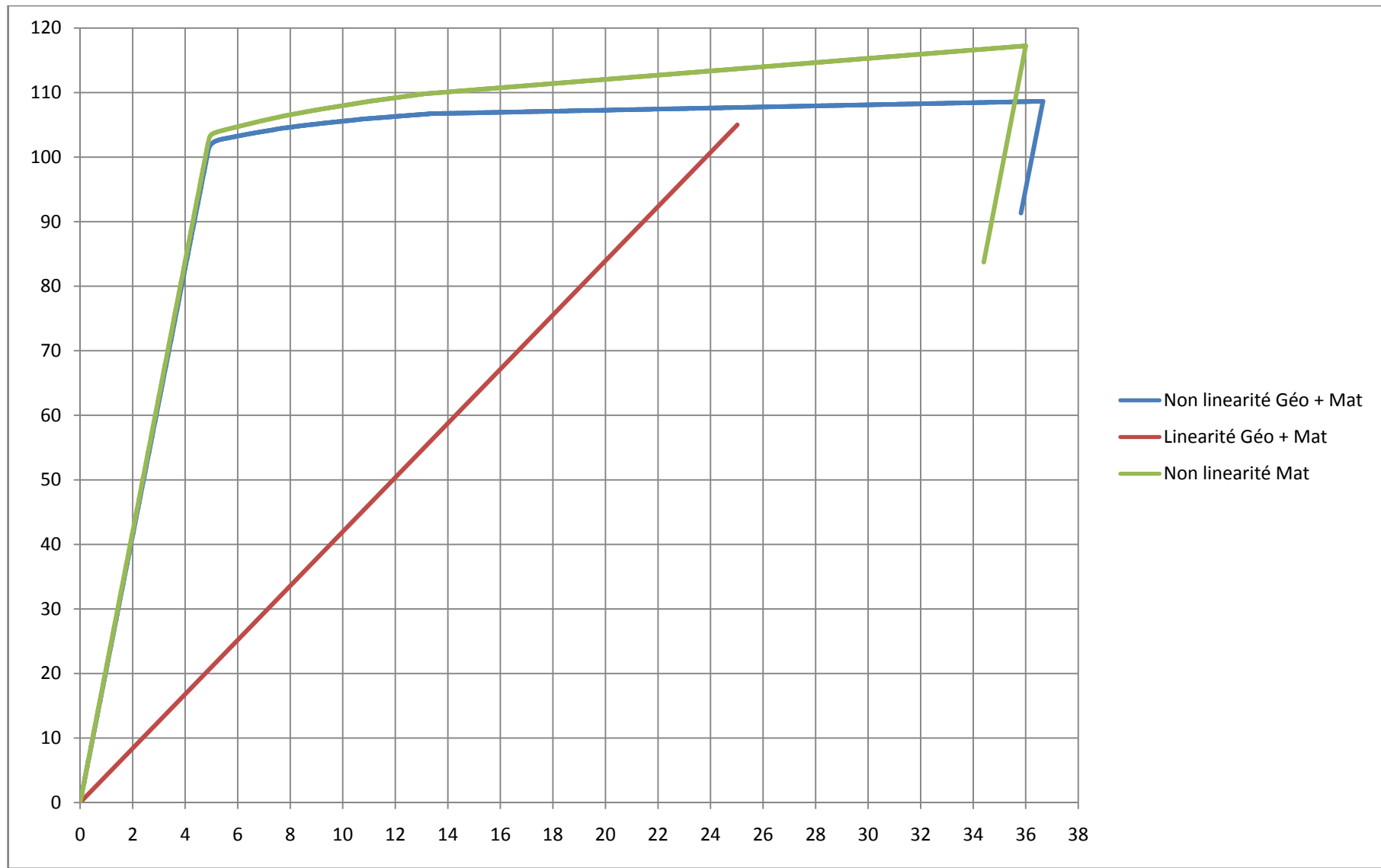


#### V.4. Résultats de l'analyse statique linéaire et non-linéaire :

##### Bâtiment 01 :

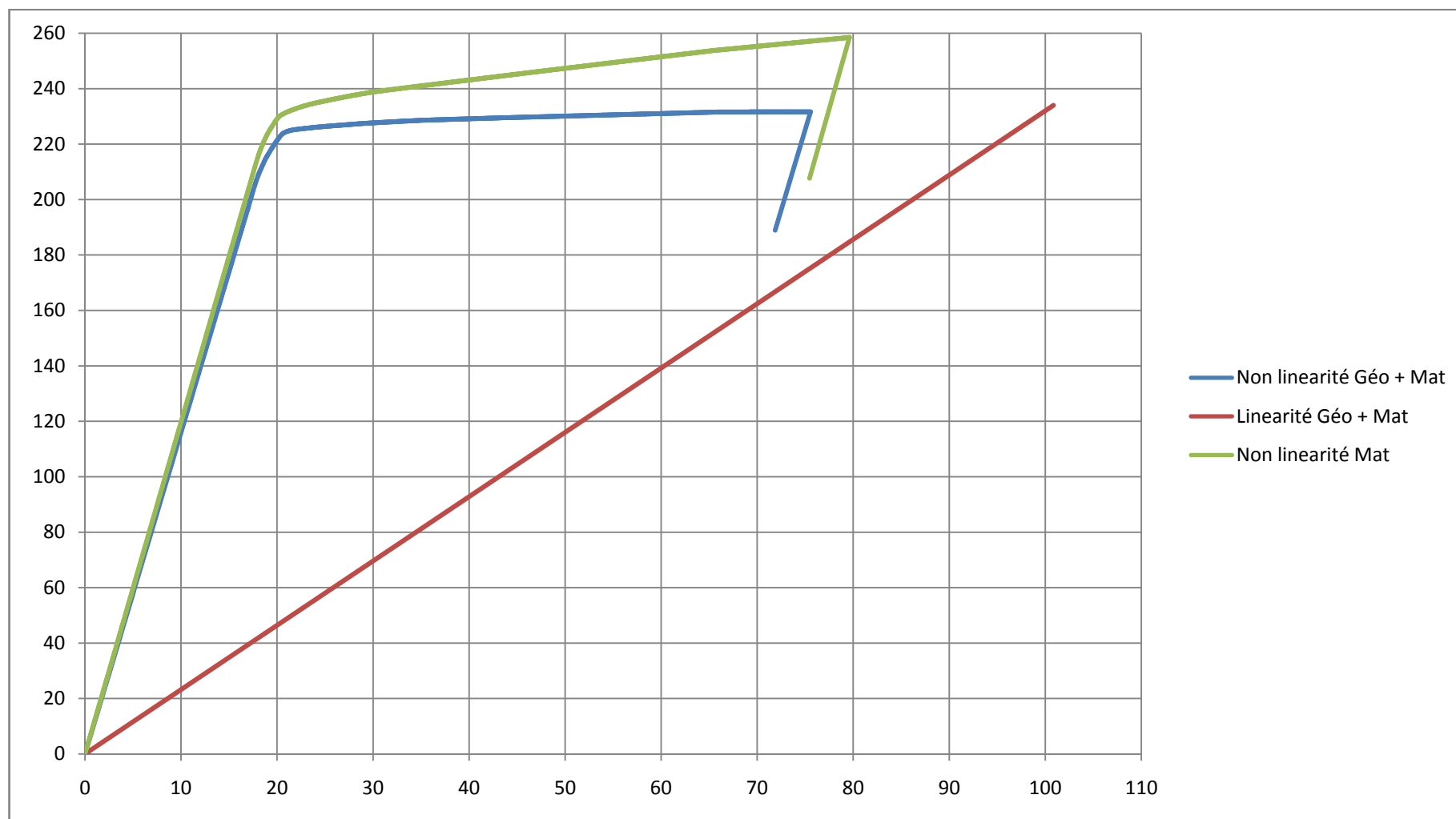


**Figure V.17 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens XX.

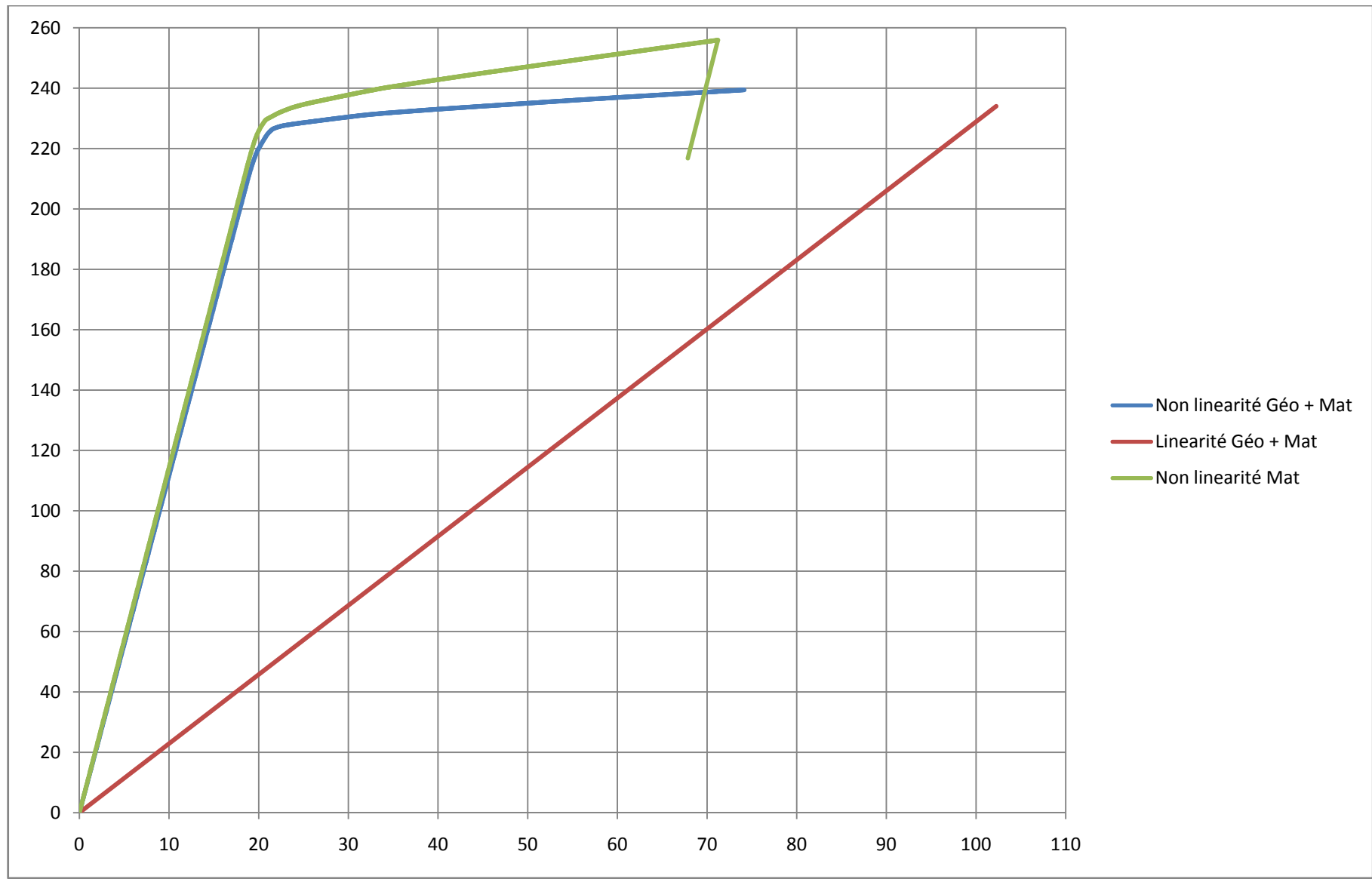


**Figure V.18 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens YY.

**Bâtiment 02 :**

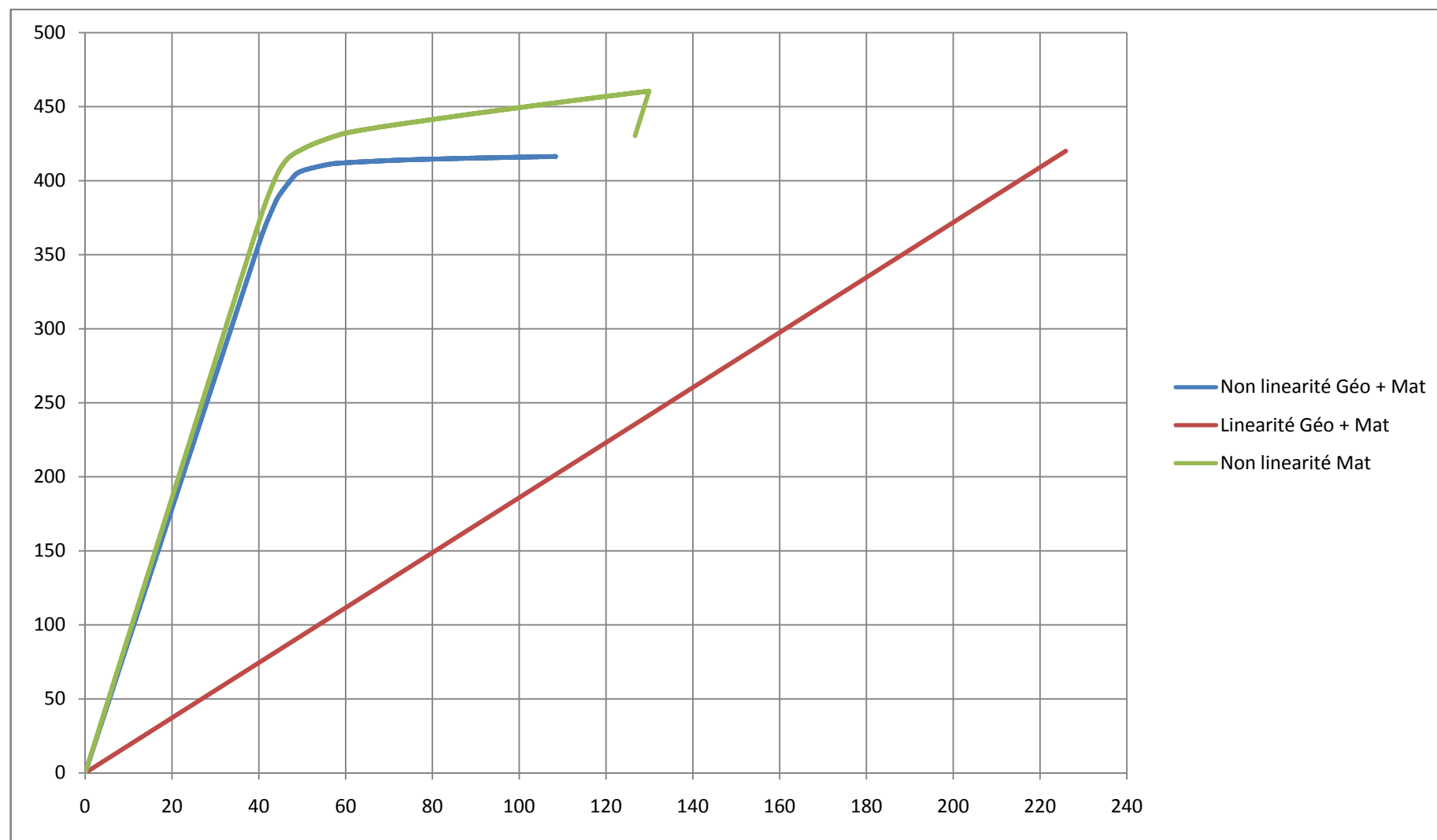


**Figure V.19 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens XX.

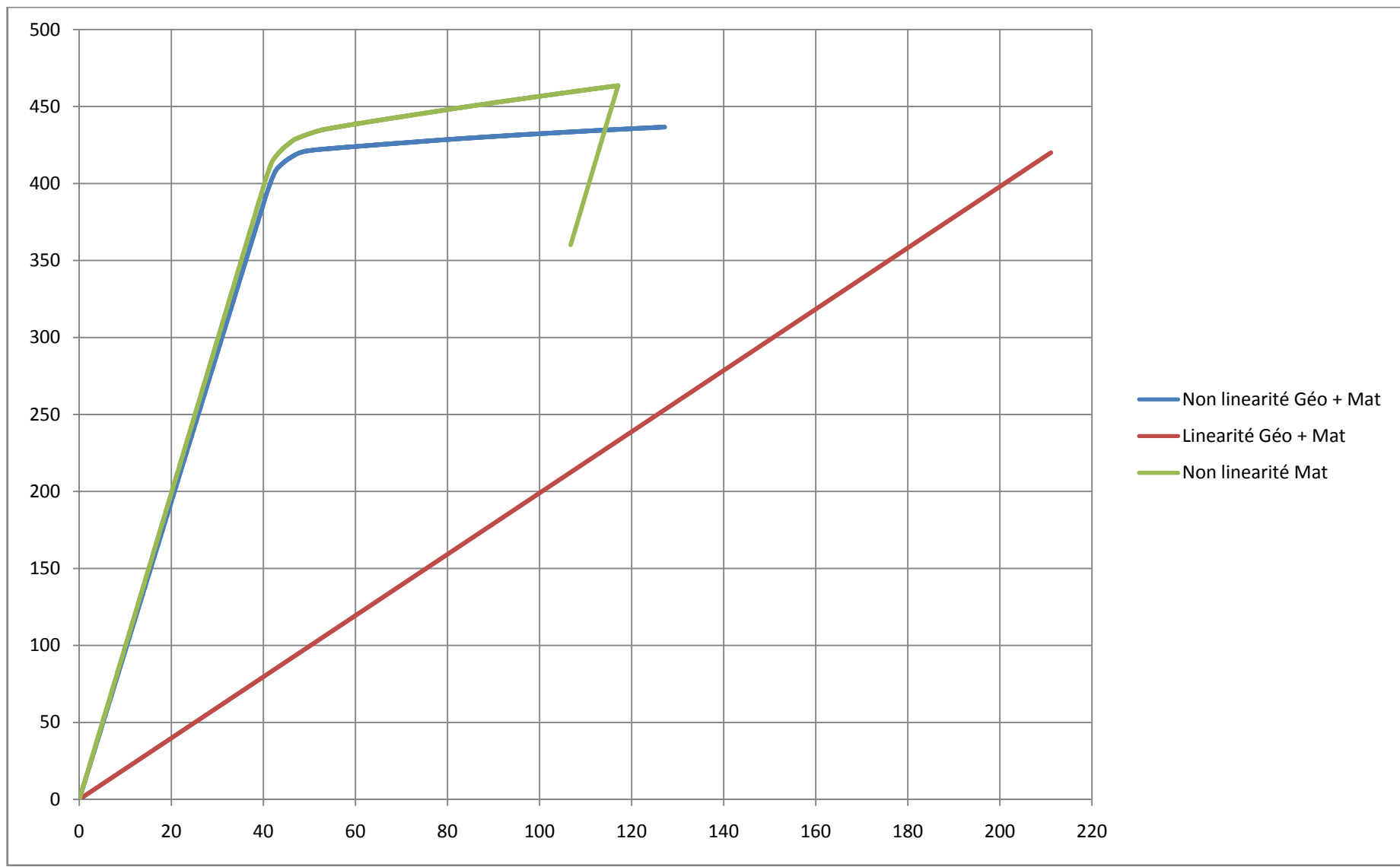


**Figure V.20 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens YY.

**Bâtiment 03 :**



**Figure V.21 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens XX.



**Figure V.22 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens YY.

## **V.5. Interprétation des résultats statiques linéaires et non linéaires géométrique et matérielle :**

### **Bâtiment 01:**

Les courbes force-déplacement résultantes de l'analyse statique des portiques représentatifs du bâtiment 01 montrent clairement que :

- Pour un même déplacement la résistance de notre bâtiment à l'effort tranchant est nettement supérieure à celle prévue par l'analyse statique linéaire, ce qui veut dire que l'analyse statique linéaire sous-estime la résistance de nos deux bâtiments et donc il l'on résulte un surdimensionnement des éléments structuraux (poteaux et poutres).
- Pour le même niveau d'effort tranchant à la base, le déplacement au sommet est inférieur à celui donné par l'analyse statique linéaire.
- On constate que le déplacement et la résistance à l'effort tranchant montrés par l'analyse statique linéaire ne sont pas très précis, en prenant comme référence ceux de l'analyse non linéaire géométrique et matérielle.

### **Bâtiment 02 et 03 :**

Les courbes force-déplacement résultantes de l'analyse statique des portiques représentatifs des deux bâtiments montrent clairement que :

- Pour un même déplacement (analyse statique linéaire), nous avons la ruine de nos bâtiments, en se référant aux courbes de l'analyse statique non linéaire géométrique et matérielle, ce qui veut dire que l'analyse statique linéaire surestime la capacité en déplacements de nos deux bâtiments.
- Pour un même niveau d'effort tranchant à la base, nous avons un déplacement au sommet inférieur à celui donné par l'analyse statique linéaire, en se référant aux courbes de l'analyse statique non linéaire géométrique et matérielle, à ce niveau on peut dire que l'analyse statique linéaire ne peut pas être utilisée pour des structures de grandes hauteurs (élançements) sans limitation des déplacements.
- Le déplacement et la résistance à l'effort tranchant prévus par l'analyse statique linéaire ne sont pas très précis (pour ne pas dire erronés), en prenant comme référence ceux de l'analyse non linéaire géométrique et matérielle.

### **Bâtiment 01, 02 et 03 :**

- On remarque une dégradation significative de la rigidité au niveau de la courbe V-d résultante de l'analyse statique non linéaire géométrique et matérielle par rapport à celle de l'analyse statique non linéaire matérielle à cause des efforts et des déplacements parasites (résiduels) provenant de la non linéarité géométrique. Cette dégradation a une relation proportionnelle avec la hauteur du bâtiment étudiée.
- On remarque également que sans l'intégration de la non linéarité géométrique, on a une courbe capacitaire V-d (non linéarité matérielle) supérieure (plus bénéfique) à celle de l'analyse statique combinée (non linéarité géométrique et matérielle).
- En comparant les courbes résultantes de l'analyse statique non linéaire matérielle (sans non linéarité géométrique) avec celles de l'analyse statique linéaire, on peut dire:
  - ✓ Pour le même niveau d'effort tranchant, le déplacement montré par l'analyse statique non linéaire matérielle de nos trois bâtiments est toujours inférieur à celui de l'analyse statique linéaire.

**Remarque :** Cette différence entre les deux efforts tranchants et les deux déplacements (analyse linéaire et non linéaire) exprime le gain entre les deux analyses linéaires et non linéaires en terme de matériaux de construction.

On constate que pour des structures de petites hauteurs l'analyse statique linéaire sous-estime la capacité en déplacement et en effort tranchant, ce qui conduit à leurs surdimensionnements, leurs sur-ferraillages, leurs coûts élevés, leurs fragilités (ductilité limitée) et cette même analyse surestime la capacité en déplacement et en effort tranchant des structures élancées ou de grandes hauteurs, ce qui veut dire qu'elle n'est plus utilisable pour ce type de structures sans conditionnement des déplacements.

**Remarque (R+5) :** Si on veut que les deux analyses (dynamique linéaire et dynamique non linéaire) tendent aux mêmes résultats, nous avons deux solutions :

- **solution 1 :** diminuer les sections des éléments structuraux et leurs taux de ferrailage pour l'analyse non linéaire (jusqu'à un niveau de performance donné, développement de quelques rotules plastiques), ce qui veut dire moins de béton et d'acier, ce qu'il est bénéfique vis-à-vis du coût et du poids de l'ouvrage (pour des ouvrages sur des sols de capacité portante modeste).
- **solution 2 :** augmenter l'intensité (niveau d'accélération) sismique (jusqu'à un niveau de performance donné), ce qui veut dire que pour les mêmes quantités géométriques et matérielles, notre ouvrage peut résister à un séisme plus fort que celui prévu par l'analyse dynamique linéaire, ce qui est bénéfique vis-à-vis la résistance et le niveau d'importance de notre ouvrage (exemple : un ouvrage de



classe 1B peut être surclassé comme 1A, se qui augmente le prix de vente de notre ouvrage).

## **V.6. Importance de l'analyse non linéaire du point de vue économique et stabilité :**

### **V.6.1. Importance du point de vue économique :**

Dans cette partie nous allons essayer de calculer le pourcentage des gains en termes de matériaux de construction entre les deux analyses linéaire et non linéaire pour les deux bâtiments 1 et 2.

#### **Démarche :**

##### **Etape 1 :**

1. Utiliser une analyse linéaire statique ou dynamique (dans notre cas nous avons choisis d'utiliser la statique linéaire) dans le but de déterminer un pré-dimensionnement et un pré-ferraillage des poteaux et des poutres pour les portiques représentatifs des bâtiments étudiés, sous l'effet des combinaisons statiques en utilisant une force statique équivalente de calcul pour l'analyse statique ou un accélérogramme pour l'analyse dynamique.
2. Tracer la courbe linéaire V-d « Effort tranchant à la base ''V'' en fonction du déplacement au sommet ''d'' ».
3. La détermination des lois de comportement des poteaux et des poutres, en exploitant les résultats de l'analyse linéaire statique et dynamique.
4. Une analyse non linéaire statique en utilisant le même modèle de chargement, dans le but de déterminer la courbe V-d « Effort tranchant a la base ''V'' en fonction du déplacement au sommet ''d'' ».

## Étape 2 :

### Procédé 1 :

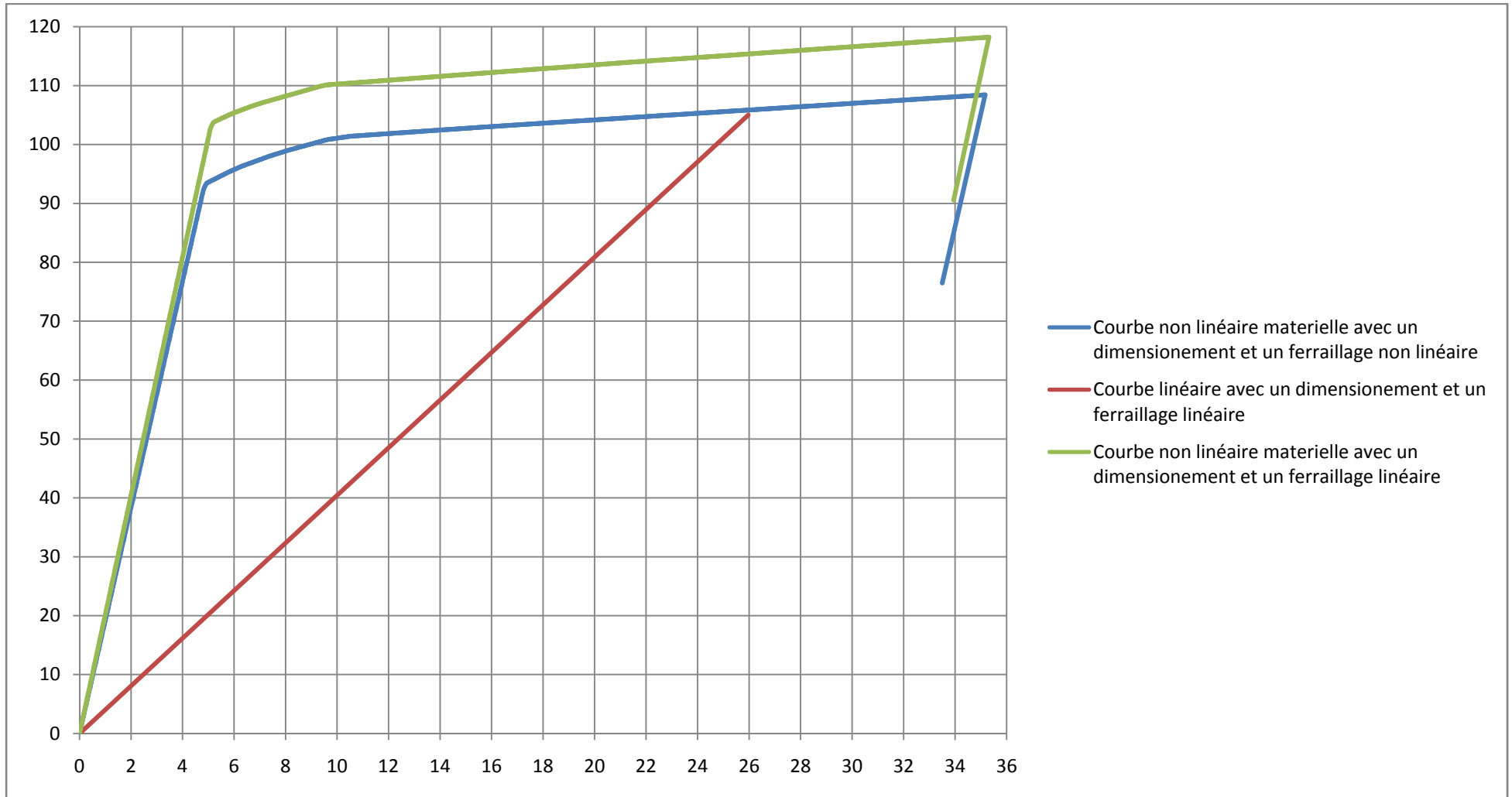
- Pour le même déplacement, on procède à la détermination de la différence ou plus exactement le pourcentage ( $V_L/V_{NL}$ ) entre les deux efforts celui de l'analyse linéaire et celui de l'analyse non linéaire, multiplication de ce facteur par notre force statique ;
- Recalcul de notre structure (analyse linéaire) avec cette nouvelle force ;
- Re-ferraillage des éléments.
- Retraçage des nouvelles lois de comportement.
- Détermination de la nouvelle courbe V-d (analyse non linéaire) de notre structure ;
- Vérification du pourcentage ( $V_L/V_{NL}$ ), si ( $V_L/V_{NL}$ ) = 1 alors on calcul le gain ou la perte en terme de matériaux de construction et si ( $V_L/V_{NL}$ )  $\neq$  1 on refait le même procédé.

### Procédé 2 :

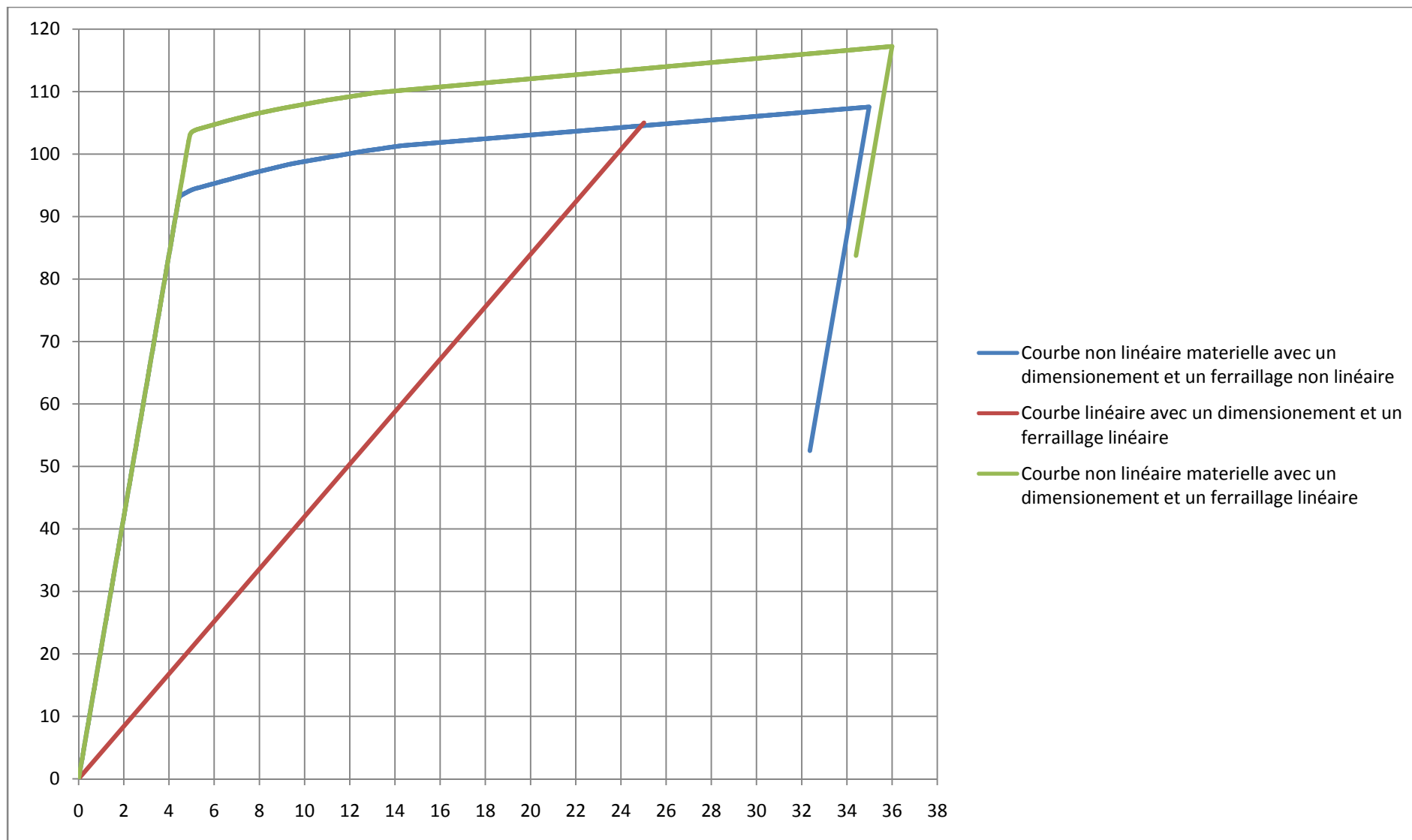
- Pour le même déplacement, on procède à la détermination de la différence ( $V_{NL}-V_L$ ) entre les deux efforts celui de l'analyse linéaire et celui de l'analyse non linéaire ;
- la détermination des éléments où les dernières rotules plastiques sont développées et où même les rotules plastiques ne sont pas développées ;
- Diminuer légèrement les sections de ces éléments ou/et leurs taux de ferraillage ;
- Retraçage des nouvelles lois de comportement.
- Détermination de la nouvelle courbe V-d (analyse non linéaire) de notre structure ;
- Vérification de la différence ( $V_{NL}-V_L$ ), si ( $V_{NL}-V_L$ ) = 0 alors on calcul le gain ou la perte en terme de matériaux de construction et si ( $V_{NL}-V_L$ )  $\neq$  0 on refait le même procédé. (**NB :** ( $V_{NL}-V_L$ ) > 0 diminuer légèrement les sections ou/et le taux de ferraillage, ( $V_{NL}-V_L$ ) < 0 augmenter légèrement les sections ou/et le taux de ferraillage).

**Remarque :** On peut aussi combiner les deux procédés pour une convergence plus rapide.

**Résultats bâtiment 01 :**



**Figure V.23 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet avant et après dimensionnement et ferrailage avec une analyse non linéaire dans le sens XX.



**Figure V.24 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet avant et après dimensionnement et ferrailage avec une analyse non linéaire dans le sens YY.

### **Gain bâtiment 01 :**

#### **Portique de la coupe AA (sens XX) :**

#### **Dimensionnement et ferrailage avec l'analyse linéaire :**

Volume total du béton =  $9.16 \text{ m}^3$

Poids total des aciers d'armature des poteaux = 1008338.14 kg/ml

Poids total des aciers d'armature supérieure des poutres = 511669.84 kg/ml

Poids total des aciers d'armature inférieure des poutres = 271013.59 kg/ml

#### **Dimensionnement et ferrailage avec l'analyse non linéaire :**

Volume total du béton =  $9.04 \text{ m}^3$

Poids total des aciers d'armature des poteaux = 951843.60 kg/ml

Poids total des aciers d'armature supérieure des poutres = 486379.76 kg/ml

Poids total des aciers d'armature inférieure des poutres = 243582.63 kg/ml

#### **Gain détaillé :**

Gain béton = 1.31 %

Gain acier d'armature des poteaux = 5.60 %

Gain acier d'armature supérieure des poutres = 4.74 %

Gain acier d'armature inférieure des poutres = 10.12 %

#### **Gain totale :**

Gain béton = 1.31 %

Gain acier d'armature = 6.10 %

**Portique de la coupe BB (sens YY) :**

**Dimensionnement et ferrailage avec l'analyse linéaire :**

Volume total du béton = 9.31 m<sup>3</sup>

Poids total des aciers d'armature des poteaux = 1252660.06 kg/ml

Poids total des aciers d'armature supérieure des poutres = 584143.95 kg/ml

Poids total des aciers d'armature inférieure des poutres = 430308.78 kg/ml

**Dimensionnement et ferrailage avec l'analyse non linéaire :**

Volume total du béton = 9.31 m<sup>3</sup>

Poids total des aciers d'armature des poteaux = 1211182.48 kg/ml

Poids total des aciers d'armature supérieure des poutres = 528042.17 kg/ml

Poids total des aciers d'armature inférieure des poutres = 378457.94 kg/ml

**Gain détaillé :**

Gain béton = 0.00 %

Gain acier d'armature des poteaux = 3.31 %

Gain acier d'armature supérieure des poutres = 9.60 %

Gain acier d'armature inférieure des poutres = 12.05 %

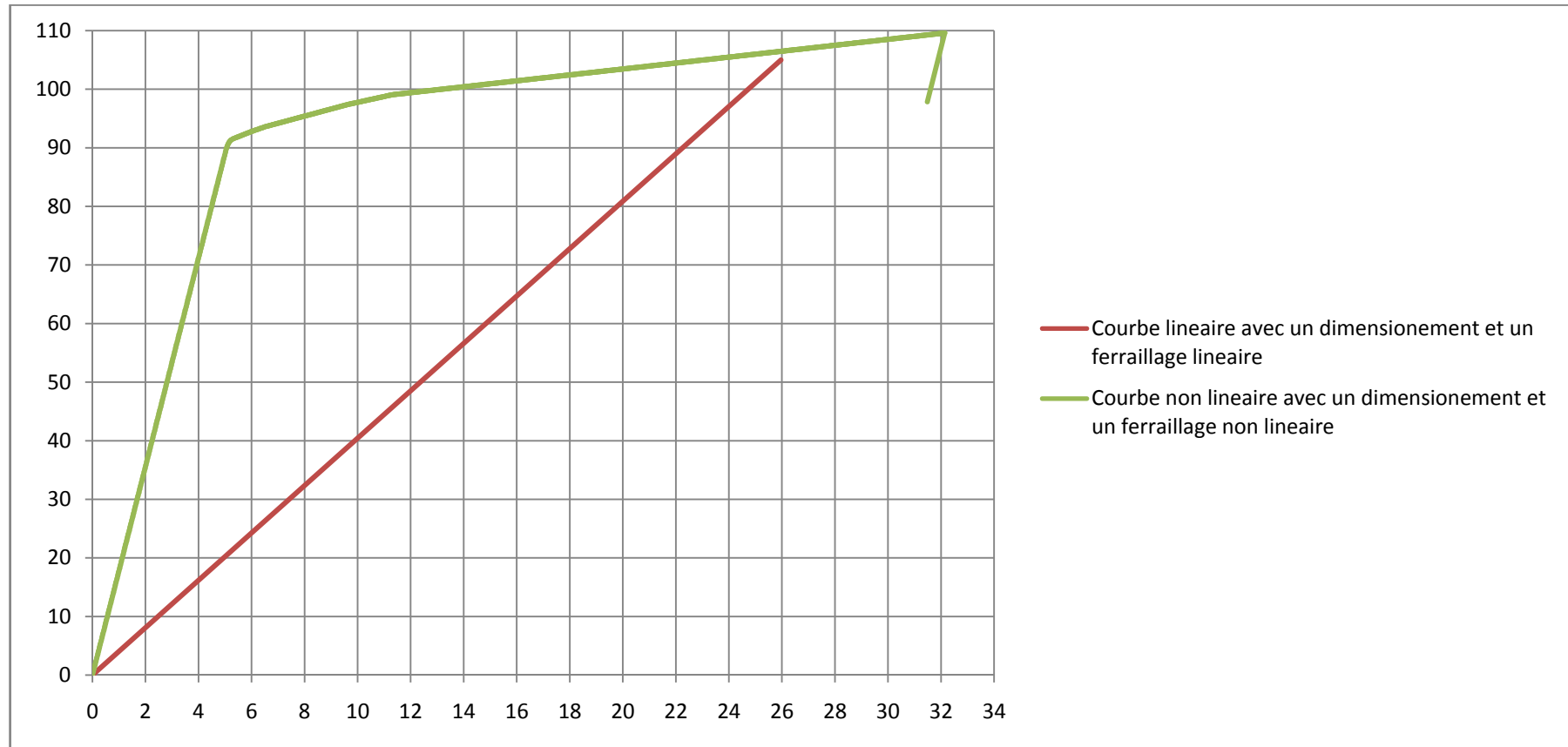
**Gain totale :**

Gain béton = 0.00 %

Gain acier d'armature = 6.59 %

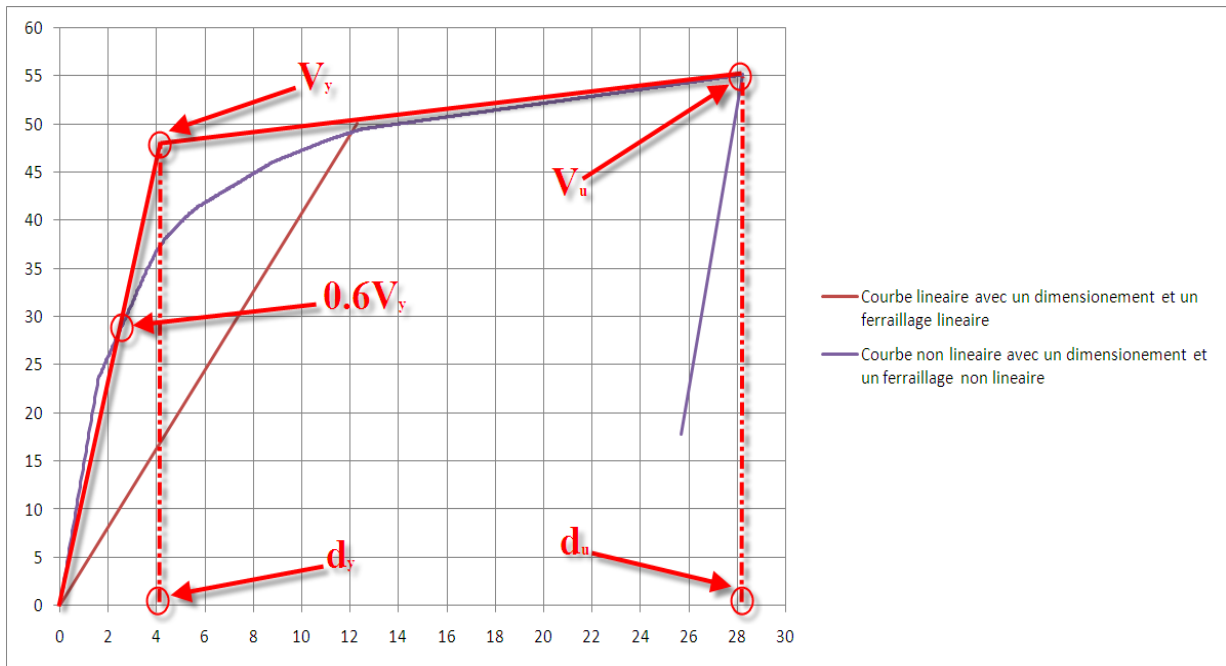
### V.6.2. Importance du point de vue stabilité et sécurité :

#### Exemple du portique de la coupe AA (sens XX) bâtiment 01 :



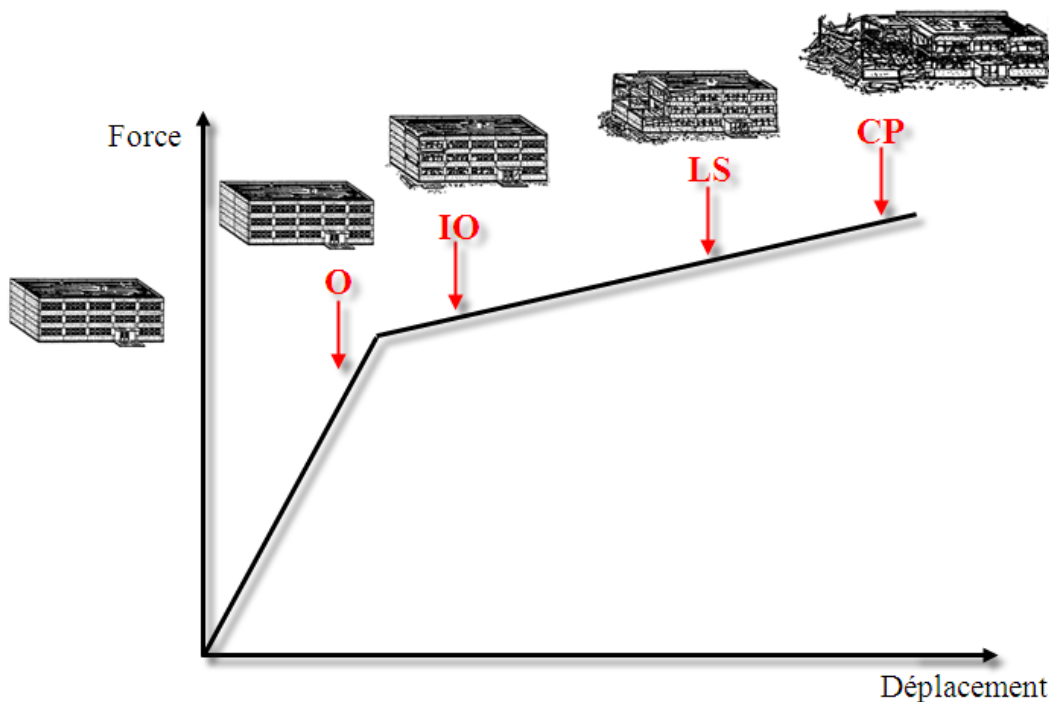
**Figure V.25 :** Courbe de l'effort tranchant à la base en fonction du déplacement au sommet dans le sens XX.

Cette courbe capacitaire montrée ci-dessus peut être idéalisée en une courbe bilinéaire comme suit :



**Figure V.26 :** Représentation de l'idéalisation de la courbe capacité V-d en une courbe bilinéaire.

Cette même courbe peut être divisée en ce qu'on appelle des niveaux de performance comme le montre la figure ci-dessous :



**Figure V.27 :** Représentation des niveaux de performance sur une courbe capacitaire bilinéaire.

On tient à attirer l'attention qu'au cours une analyse non linéaire, on peut suivre le développement des rotules plastiques (zones et points critiques) pour chaque pas de temps en



cas d'analyse dynamique et pour chaque pas de déplacement ou de force en cas d'analyse statique.

### **Niveaux de performance [FEMA 273]:**

Complètement opérationnel – **O** : Le bâtiment reste opérationnel et les dommages sont négligeables.

Occupation immédiate – **IO** : Le bâtiment reste sûr dans ces fonctions et les dommages enregistrés sont non structurels et mineurs.

Sécurité de vie humaine – **LS** : Présence de quelques dommages structurels localisés dans le bâtiment, la structure reste stable et possède une réserve de capacité, mais nécessite un renforcement.

Non effondrement – **CP** : Un état du dommage très étendu, mais le bâtiment ne s'effondre pas.

Ces intervalles (niveaux de performance) nous indiquent le niveau des dommages et des rotules développés.

Ce qui veut dire du point de vue sécurité et stabilité, qu'avec une analyse non linéaire, on peut :

- Prévoir le vrai ou au moins une approche plus réaliste sur le comportement réel des structures à savoir sa capacité à dissiper de l'énergie ;
- Déterminer le vrai niveau de résistance de nos structures ;
- Déterminer la rigidité réelle de nos structures ;
- Définir la ductilité chose qu'on ne peut pas avec une simple analyse linéaire ;
- Obtenir des informations sur plusieurs caractéristiques de la réponse qui ne peuvent pas être fournies par une simple analyse linéaire, comme :
  - Estimation des déformations inélastiques afin de dissiper de l'énergie ;
  - Détermination des sollicitations réelles sur les éléments fragiles ;
  - Conséquences de la détérioration de la résistance des éléments ;
  - Identification des zones critiques et intervenir en conséquence;

## **CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS**

## **Conclusion et recommandations**

Au Final, nous estimons avoir répondu, à l'objectif fixé au début de ce travail, puisqu'on est parvenu à calculer le gain en terme de matériaux de construction entre les deux analyses linéaire et non-linéaire et de justifier en grande partie l'importance de l'analyse non linéaire du point de vue stabilité (sécurité).

Suite aux résultats obtenus de ce présent travail, on peut conclure les points suivants :

- L'importance de l'analyse non linéaire (matérielle et géométrique) du point de vue stabilité (sécurité) et économie.
- Prévoir le vrai ou au moins une approche plus réaliste du comportement réel des structures à savoir sa capacité a dissiper de l'énergie ;
- Déterminer le vrai niveau de résistance de nos structures ;
- Déterminer la rigidité réelle de nos ouvrages ;
- Définir la ductilité chose qu'on ne peut pas avec une simple analyse linéaire ;
- Obtenir des informations sur plusieurs caractéristiques de la réponse qui ne peuvent pas être fournies par une simple analyse linéaire, comme :
  - Estimation des déformations inélastiques afin de dissiper de l'énergie ;
  - Détermination des sollicitations réelles sur les éléments fragiles ;
  - Conséquences de la détérioration de la résistance des éléments ;
  - Identification des zones critiques et d'intervenir en conséquence;
- La dégradation significative de la rigidité à cause des efforts et des déplacements parasites (résiduels) provenant de la non linéarité géométrique.
- Il est possible d'établir une nouvelle méthodologie de dimensionnement et de ferrailage des structures, en s'appuyant sur les deux analyses linéaire et non linéaire, afin d'améliorer le comportement, la capacité et diminuer le coût de nos ouvrages.

## **ANNEXE**

# Annexe

## Résultats ETABS

### Bâtiment N° 01 (R+5) sens XX

**Tableau N° 01** : montrant les périodes et la participation massique.

Mode	Period	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
1	0.840435	82.371	0	0	82.371	0	0
2	0.268943	10.201	0	0	92.572	0	0
3	0.150901	3.9962	0	0	96.5683	0	0
4	0.101084	2.0818	0	0	98.6501	0	0
5	0.075836	1.0386	0	0	99.6887	0	0
6	0.063517	0.3113	0	0	100	0	0

**Tableau N° 02** : montrant les déplacements des étages.

Story	Diaphragm	Load	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
STORY6	D6	GQEQX	0.0519	0	0	0	0	0
STORY5	D5	GQEQX	0.0478	0	0	0	0	0
STORY4	D4	GQEQX	0.0407	0	0	0	0	0
STORY3	D3	GQEQX	0.0311	0	0	0	0	0
STORY2	D2	GQEQX	0.0198	0	0	0	0	0
STORY1	D1	GQEQX	0.0079	0	0	0	0	0

**Tableau N° 03** : montrant les efforts internes pour chaque étage.

Story	Load	Loc	P	VX	VY	T	MX	MY
STORY6	GQEQX	Top	96.6	-30	0	0	0	-483
STORY6	GQEQX	Bottom	117.26	-30	0	0	0	-678.075
STORY5	GQEQX	Top	231.56	-55	0	0	0	-1249.575
STORY5	GQEQX	Bottom	252.21	-55	0	0	0	-1521.15
STORY4	GQEQX	Top	366.51	-75	0	0	0	-2092.65
STORY4	GQEQX	Bottom	387.17	-75	0	0	0	-2425.425
STORY3	GQEQX	Top	501.47	-90	0	0	0	-2996.925
STORY3	GQEQX	Bottom	522.12	-90	0	0	0	-3375.6
STORY2	GQEQX	Top	636.42	-100	0	0	0	-3947.1
STORY2	GQEQX	Bottom	657.08	-100	0	0	0	-4356.375
STORY1	GQEQX	Top	771.38	-105	0	0	0	-4927.875
STORY1	GQEQX	Bottom	792.03	-105	0	0	0	-5352.45

## Bâtiment N° 01 (R+5) sens YY

**Tableau N° 01 :** montrant les périodes et la participation massique.

Mode	Period	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
1	0.717413	0	81.446	0	0	81.446	0
2	0.226039	0	10.4963	0	0	91.9423	0
3	0.123866	0	4.2397	0	0	96.182	0
4	0.08098	0	2.2762	0	0	98.4582	0
5	0.059439	0	1.1754	0	0	99.6336	0
6	0.04905	0	0.3664	0	0	100	0

**Tableau N° 02 :** montrant les déplacements des étages.

Story	Diaphragm	Load	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
STORY6	D6	GQEQY	0	0.05	0	0	0	0
STORY5	D5	GQEQY	0	0.0458	0	0	0	0
STORY4	D4	GQEQY	0	0.0388	0	0	0	0
STORY3	D3	GQEQY	0	0.0294	0	0	0	0
STORY2	D2	GQEQY	0	0.0183	0	0	0	0
STORY1	D1	GQEQY	0	0.007	0	0	0	0

**Tableau N° 03 :** montrant les efforts internes pour chaque étage.

Story	Load	Loc	P	VX	VY	T	MX	MY
STORY6	GQEQY	Top	61.74	0	-30	-150	277.83	-308.7
STORY6	GQEQY	Bottom	89.28	0	-30	-150	493.56	-446.4
STORY5	GQEQY	Top	162.45	0	-55	-275	822.825	-812.25
STORY5	GQEQY	Bottom	189.99	0	-55	-275	1115.055	-949.95
STORY4	GQEQY	Top	263.16	0	-75	-375	1444.32	-1315.8
STORY4	GQEQY	Bottom	290.7	0	-75	-375	1797.75	-1453.5
STORY3	GQEQY	Top	363.87	0	-90	-450	2127.015	-1819.35
STORY3	GQEQY	Bottom	391.41	0	-90	-450	2526.345	-1957.05
STORY2	GQEQY	Top	464.58	0	-100	-500	2855.61	-2322.9
STORY2	GQEQY	Bottom	492.12	0	-100	-500	3285.54	-2460.6
STORY1	GQEQY	Top	565.29	0	-105	-525	3614.805	-2826.45
STORY1	GQEQY	Bottom	592.83	0	-105	-525	4060.035	-2964.15

**Bâtiment N° 02 (R+11) sens XX****Tableau N° 01** : montrant les périodes et la participation massique.

Mode	Period	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
1	1.513423	77.0508	0	0	77.0508	0	0
2	0.527147	10.9513	0	0	88.0021	0	0
3	0.29592	4.1535	0	0	92.1555	0	0
4	0.200129	2.3012	0	0	94.4567	0	0
5	0.147301	1.5077	0	0	95.9644	0	0
6	0.112422	1.1206	0	0	97.085	0	0
7	0.091293	0.7558	0	0	97.8407	0	0
8	0.07439	0.6004	0	0	98.4412	0	0
9	0.06561	0.3933	0	0	98.8344	0	0
10	0.05658	0.4772	0	0	99.3116	0	0
11	0.046489	0.4961	0	0	99.8077	0	0
12	0.039109	0.1923	0	0	100	0	0

**Tableau N° 02** : montrant les déplacements des étages.

Story	Diaphragm	Load	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
STORY12	D12	GQEQX	0.1955	0	0	0	0	0
STORY11	D11	GQEQX	0.1895	0	0	0	0	0
STORY10	D10	GQEQX	0.1796	0	0	0	0	0
STORY9	D9	GQEQX	0.166	0	0	0	0	0
STORY8	D8	GQEQX	0.149	0	0	0	0	0
STORY7	D7	GQEQX	0.1317	0	0	0	0	0
STORY6	D6	GQEQX	0.1122	0	0	0	0	0
STORY5	D5	GQEQX	0.0927	0	0	0	0	0
STORY4	D4	GQEQX	0.0719	0	0	0	0	0
STORY3	D3	GQEQX	0.0504	0	0	0	0	0
STORY2	D2	GQEQX	0.029	0	0	0	0	0
STORY1	D1	GQEQX	0.01	0	0	0	0	0

**Tableau N° 03 :** montrant les efforts internes pour chaque étage.

Story	Load	Loc	P	VX	VY	T	MX	MY
STORY12	GQEQX	Top	96.6	-36	0	0	0	-483
STORY12	GQEQX	Bottom	117.26	-36	0	0	0	-696.435
STORY11	GQEQX	Top	231.56	-69	0	0	0	-1267.935
STORY11	GQEQX	Bottom	252.21	-69	0	0	0	-1582.35
STORY10	GQEQX	Top	366.51	-99	0	0	0	-2153.85
STORY10	GQEQX	Bottom	387.17	-99	0	0	0	-2560.065
STORY9	GQEQX	Top	501.47	-126	0	0	0	-3131.565
STORY9	GQEQX	Bottom	522.12	-126	0	0	0	-3620.4
STORY8	GQEQX	Top	636.42	-150	0	0	0	-4191.9
STORY8	GQEQX	Bottom	662.43	-150	0	0	0	-4780.95
STORY7	GQEQX	Top	776.73	-171	0	0	0	-5352.45
STORY7	GQEQX	Bottom	802.74	-171	0	0	0	-6005.76
STORY6	GQEQX	Top	917.04	-189	0	0	0	-6577.26
STORY6	GQEQX	Bottom	953.76	-189	0	0	0	-7339.2
STORY5	GQEQX	Top	1068.06	-204	0	0	0	-7910.7
STORY5	GQEQX	Bottom	1104.78	-204	0	0	0	-8718.54
STORY4	GQEQX	Top	1219.08	-216	0	0	0	-9290.04
STORY4	GQEQX	Bottom	1255.8	-216	0	0	0	-10134.6
STORY3	GQEQX	Top	1370.1	-225	0	0	0	-10706.1
STORY3	GQEQX	Bottom	1406.82	-225	0	0	0	-11578.2
STORY2	GQEQX	Top	1521.12	-231	0	0	0	-12149.7
STORY2	GQEQX	Bottom	1557.84	-231	0	0	0	-13040.16
STORY1	GQEQX	Top	1672.14	-234	0	0	0	-13611.66
STORY1	GQEQX	Bottom	1708.86	-234	0	0	0	-14511.3



**Bâtiment N° 02 (R+11) sens YY****Tableau N° 01** : montrant les périodes et la participation massique.

Mode	Period	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
1	1.361828	0	75.011	0	0	75.011	0
2	0.474589	0	12.0746	0	0	87.0856	0
3	0.261158	0	4.1477	0	0	91.2333	0
4	0.175701	0	2.657	0	0	93.8903	0
5	0.126444	0	1.5907	0	0	95.481	0
6	0.096088	0	1.2579	0	0	96.7389	0
7	0.0765	0	0.8769	0	0	97.6158	0
8	0.062288	0	0.592	0	0	98.2078	0
9	0.052924	0	0.5897	0	0	98.7976	0
10	0.048059	0	0.3092	0	0	99.1068	0
11	0.038723	0	0.6515	0	0	99.7583	0
12	0.031733	0	0.2417	0	0	100	0

**Tableau N° 02** : montrant les déplacements des étages.

Story	Diaphragm	Load	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
STORY12	D12	GQEQY	0	0.2045	0	0	0	0
STORY11	D11	GQEQY	0	0.1982	0	0	0	0
STORY10	D10	GQEQY	0	0.1881	0	0	0	0
STORY9	D9	GQEQY	0	0.1744	0	0	0	0
STORY8	D8	GQEQY	0	0.1574	0	0	0	0
STORY7	D7	GQEQY	0	0.1374	0	0	0	0
STORY6	D6	GQEQY	0	0.1148	0	0	0	0
STORY5	D5	GQEQY	0	0.0939	0	0	0	0
STORY4	D4	GQEQY	0	0.0721	0	0	0	0
STORY3	D3	GQEQY	0	0.0497	0	0	0	0
STORY2	D2	GQEQY	0	0.0279	0	0	0	0
STORY1	D1	GQEQY	0	0.0092	0	0	0	0

**Tableau N° 03** : montrant les efforts internes pour chaque étage.

Story	Load	Loc	P	VX	VY	T	MX	MY
STORY12	GQEQY	Top	61.74	0	-36	-180	277.83	-308.7
STORY12	GQEQY	Bottom	89.28	0	-36	-180	511.92	-446.4
STORY11	GQEQY	Top	162.45	0	-69	-345	841.185	-812.25
STORY11	GQEQY	Bottom	189.99	0	-69	-345	1176.255	-949.95
STORY10	GQEQY	Top	263.16	0	-99	-495	1505.52	-1315.8
STORY10	GQEQY	Bottom	290.7	0	-99	-495	1932.39	-1453.5
STORY9	GQEQY	Top	363.87	0	-126	-630	2261.655	-1819.35
STORY9	GQEQY	Bottom	391.41	0	-126	-630	2771.145	-1957.05
STORY8	GQEQY	Top	464.58	0	-150	-750	3100.41	-2322.9
STORY8	GQEQY	Bottom	492.12	0	-150	-750	3683.34	-2460.6
STORY7	GQEQY	Top	565.29	0	-171	-855	4012.605	-2826.45
STORY7	GQEQY	Bottom	592.83	0	-171	-855	4659.795	-2964.15
STORY6	GQEQY	Top	666	0	-189	-945	4989.06	-3330
STORY6	GQEQY	Bottom	714.96	0	-189	-945	5787.72	-3574.8
STORY5	GQEQY	Top	788.13	0	-204	-1020	6116.985	-3940.65
STORY5	GQEQY	Bottom	837.09	0	-204	-1020	6961.545	-4185.45
STORY4	GQEQY	Top	910.26	0	-216	-1080	7290.81	-4551.3
STORY4	GQEQY	Bottom	959.22	0	-216	-1080	8172.09	-4796.1
STORY3	GQEQY	Top	1032.39	0	-225	-1125	8501.355	-5161.95
STORY3	GQEQY	Bottom	1081.35	0	-225	-1125	9410.175	-5406.75
STORY2	GQEQY	Top	1154.52	0	-231	-1155	9739.44	-5772.6
STORY2	GQEQY	Bottom	1203.48	0	-231	-1155	10666.62	-6017.4
STORY1	GQEQY	Top	1276.65	0	-234	-1170	10995.885	-6383.25
STORY1	GQEQY	Bottom	1325.61	0	-234	-1170	11932.245	-6628.05

**Bâtiment N° 03 (R+19) sens XX****Tableau N° 01** : montrant les périodes et la participation massique.

Mode	Period	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
1	2.197779	72.4731	0	0	72.4731	0	0
2	0.804069	12.959	0	0	85.4321	0	0
3	0.45466	4.7756	0	0	90.2077	0	0
4	0.321799	2.1506	0	0	92.3583	0	0
5	0.238364	1.5566	0	0	93.9148	0	0
6	0.190778	1.0436	0	0	94.9584	0	0
7	0.155044	0.8825	0	0	95.8409	0	0
8	0.131088	0.595	0	0	96.4359	0	0
9	0.11075	0.5288	0	0	96.9647	0	0
10	0.097121	0.4372	0	0	97.4019	0	0
11	0.08475	0.3352	0	0	97.7371	0	0
12	0.076515	0.3588	0	0	98.096	0	0

**Tableau N° 02** : montrant les déplacements des étages.

Story	Diaphragm	Load	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
STORY20	D19	GQEQX	0.4518	0	0	0	0	0
STORY19	D18	GQEQX	0.4435	0	0	0	0	0
STORY18	D17	GQEQX	0.4317	0	0	0	0	0
STORY17	D16	GQEQX	0.4163	0	0	0	0	0
STORY16	D15	GQEQX	0.3976	0	0	0	0	0
STORY15	D15	GQEQX	0.3758	0	0	0	0	0
STORY14	D14	GQEQX	0.3512	0	0	0	0	0
STORY13	D13	GQEQX	0.3239	0	0	0	0	0
STORY12	D12	GQEQX	0.2943	0	0	0	0	0
STORY11	D11	GQEQX	0.2702	0	0	0	0	0
STORY10	D10	GQEQX	0.2449	0	0	0	0	0
STORY9	D9	GQEQX	0.2185	0	0	0	0	0
STORY8	D8	GQEQX	0.191	0	0	0	0	0
STORY7	D7	GQEQX	0.1627	0	0	0	0	0
STORY6	D6	GQEQX	0.1338	0	0	0	0	0
STORY5	D5	GQEQX	0.1074	0	0	0	0	0
STORY4	D4	GQEQX	0.0809	0	0	0	0	0
STORY3	D3	GQEQX	0.0548	0	0	0	0	0
STORY2	D2	GQEQX	0.0303	0	0	0	0	0
STORY1	D1	GQEQX	0.0098	0	0	0	0	0

**Tableau N° 03 :** montrant les efforts internes pour chaque étage.

Story	Load	Loc	P	VX	VY	T	MX	MY
STORY20	GQEQX	Top	99.1	-40	0	0	0	-495.5
STORY20	GQEQX	Bottom	119.75	-40	0	0	0	-721.175
STORY19	GQEQX	Top	236.55	-78	0	0	0	-1305.175
STORY19	GQEQX	Bottom	257.21	-78	0	0	0	-1647.13
STORY18	GQEQX	Top	374.01	-114	0	0	0	-2231.13
STORY18	GQEQX	Bottom	394.66	-114	0	0	0	-2683.245
STORY17	GQEQX	Top	511.46	-148	0	0	0	-3267.245
STORY17	GQEQX	Bottom	532.12	-148	0	0	0	-3823.4
STORY16	GQEQX	Top	648.92	-180	0	0	0	-4407.4
STORY16	GQEQX	Bottom	669.57	-180	0	0	0	-5061.475
STORY15	GQEQX	Top	786.37	-210	0	0	0	-5645.475
STORY15	GQEQX	Bottom	807.03	-210	0	0	0	-6391.35
STORY14	GQEQX	Top	923.83	-238	0	0	0	-6975.35
STORY14	GQEQX	Bottom	944.48	-238	0	0	0	-7806.905
STORY13	GQEQX	Top	1061.28	-264	0	0	0	-8390.905
STORY13	GQEQX	Bottom	1081.94	-264	0	0	0	-9302.02
STORY12	GQEQX	Top	1198.74	-288	0	0	0	-9886.02
STORY12	GQEQX	Bottom	1235.46	-288	0	0	0	-10950.9
STORY11	GQEQX	Top	1352.26	-310	0	0	0	-11534.9
STORY11	GQEQX	Bottom	1388.98	-310	0	0	0	-12667.1
STORY10	GQEQX	Top	1505.78	-330	0	0	0	-13251.1
STORY10	GQEQX	Bottom	1542.5	-330	0	0	0	-14444.5
STORY9	GQEQX	Top	1659.3	-348	0	0	0	-15028.5
STORY9	GQEQX	Bottom	1696.02	-348	0	0	0	-16276.98
STORY8	GQEQX	Top	1812.82	-364	0	0	0	-16860.98
STORY8	GQEQX	Bottom	1849.54	-364	0	0	0	-18158.42
STORY7	GQEQX	Top	1966.34	-378	0	0	0	-18742.42
STORY7	GQEQX	Bottom	2003.06	-378	0	0	0	-20082.7
STORY6	GQEQX	Top	2119.86	-390	0	0	0	-20666.7
STORY6	GQEQX	Bottom	2177.24	-390	0	0	0	-22146.975
STORY5	GQEQX	Top	2294.04	-400	0	0	0	-22730.975
STORY5	GQEQX	Bottom	2351.41	-400	0	0	0	-24241.85
STORY4	GQEQX	Top	2468.21	-408	0	0	0	-24825.85
STORY4	GQEQX	Bottom	2525.59	-408	0	0	0	-26361.205
STORY3	GQEQX	Top	2642.39	-414	0	0	0	-26945.205
STORY3	GQEQX	Bottom	2699.76	-414	0	0	0	-28498.92
STORY2	GQEQX	Top	2816.56	-418	0	0	0	-29082.92
STORY2	GQEQX	Bottom	2873.94	-418	0	0	0	-30648.875
STORY1	GQEQX	Top	2990.74	-420	0	0	0	-31232.875
STORY1	GQEQX	Bottom	3048.11	-420	0	0	0	-32804.95

**Bâtiment N° 03 (R+19) sens YY****Tableau N° 01** : montrant les périodes et la participation massique.

Mode	Period	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
1	1.887393	0	70.952	0	0	70.952	0
2	0.696065	0	13.4956	0	0	84.4476	0
3	0.391312	0	5.1281	0	0	89.5758	0
4	0.271764	0	2.1843	0	0	91.7601	0
5	0.201403	0	1.7442	0	0	93.5043	0
6	0.158905	0	1.1199	0	0	94.6242	0
7	0.1292	0	0.9579	0	0	95.5821	0
8	0.107509	0	0.6177	0	0	96.1999	0
9	0.090999	0	0.6261	0	0	96.8259	0
10	0.07888	0	0.4495	0	0	97.2754	0
11	0.068776	0	0.4348	0	0	97.7102	0
12	0.061676	0	0.2987	0	0	98.0089	0

**Tableau N° 02** : montrant les déplacements des étages.

Story	Diaphragm	Load	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
STORY20	D20	GQEQY	0	0.4221	0	0	0	0
STORY19	D19	GQEQY	0	0.4136	0	0	0	0
STORY18	D18	GQEQY	0	0.402	0	0	0	0
STORY17	D17	GQEQY	0	0.3874	0	0	0	0
STORY16	D16	GQEQY	0	0.3699	0	0	0	0
STORY15	D15	GQEQY	0	0.3497	0	0	0	0
STORY14	D14	GQEQY	0	0.327	0	0	0	0
STORY13	D13	GQEQY	0	0.3021	0	0	0	0
STORY12	D12	GQEQY	0	0.2752	0	0	0	0
STORY11	D11	GQEQY	0	0.2522	0	0	0	0
STORY10	D10	GQEQY	0	0.2282	0	0	0	0
STORY9	D9	GQEQY	0	0.2032	0	0	0	0
STORY8	D8	GQEQY	0	0.1773	0	0	0	0
STORY7	D7	GQEQY	0	0.1508	0	0	0	0
STORY6	D6	GQEQY	0	0.1238	0	0	0	0
STORY5	D5	GQEQY	0	0.0986	0	0	0	0
STORY4	D4	GQEQY	0	0.0737	0	0	0	0
STORY3	D3	GQEQY	0	0.0493	0	0	0	0
STORY2	D2	GQEQY	0	0.0268	0	0	0	0
STORY1	D1	GQEQY	0	0.0085	0	0	0	0

**Tableau N° 03** : montrant les efforts internes pour chaque étage.

Story	Load	Loc	P	VX	VY	T	MX	MY
STORY20	GQEQY	Top	56.43	0	-40	-200	253.935	-282.15
STORY20	GQEQY	Bottom	83.97	0	-40	-200	500.265	-419.85
STORY19	GQEQY	Top	159.39	0	-78	-390	839.655	-796.95
STORY19	GQEQY	Bottom	186.93	0	-78	-390	1202.265	-934.65
STORY18	GQEQY	Top	262.35	0	-114	-570	1541.655	-1311.75
STORY18	GQEQY	Bottom	289.89	0	-114	-570	2014.425	-1449.45
STORY17	GQEQY	Top	365.31	0	-148	-740	2353.815	-1826.55
STORY17	GQEQY	Bottom	392.85	0	-148	-740	2930.625	-1964.25
STORY16	GQEQY	Top	468.27	0	-180	-900	3270.015	-2341.35
STORY16	GQEQY	Bottom	495.81	0	-180	-900	3944.745	-2479.05
STORY15	GQEQY	Top	571.23	0	-210	-1050	4284.135	-2856.15
STORY15	GQEQY	Bottom	598.77	0	-210	-1050	5050.665	-2993.85
STORY14	GQEQY	Top	674.19	0	-238	-1190	5390.055	-3370.95
STORY14	GQEQY	Bottom	701.73	0	-238	-1190	6242.265	-3508.65
STORY13	GQEQY	Top	777.15	0	-264	-1320	6581.655	-3885.75
STORY13	GQEQY	Bottom	804.69	0	-264	-1320	7513.425	-4023.45
STORY12	GQEQY	Top	880.11	0	-288	-1440	7852.815	-4400.55
STORY12	GQEQY	Bottom	929.07	0	-288	-1440	8954.415	-4645.35
STORY11	GQEQY	Top	1004.49	0	-310	-1550	9293.805	-5022.45
STORY11	GQEQY	Bottom	1053.45	0	-310	-1550	10462.725	-5267.25
STORY10	GQEQY	Top	1128.87	0	-330	-1650	10802.115	-5644.35
STORY10	GQEQY	Bottom	1177.83	0	-330	-1650	12032.235	-5889.15
STORY9	GQEQY	Top	1253.25	0	-348	-1740	12371.625	-6266.25
STORY9	GQEQY	Bottom	1302.21	0	-348	-1740	13656.825	-6511.05
STORY8	GQEQY	Top	1377.63	0	-364	-1820	13996.215	-6888.15
STORY8	GQEQY	Bottom	1426.59	0	-364	-1820	15330.375	-7132.95
STORY7	GQEQY	Top	1502.01	0	-378	-1890	15669.765	-7510.05
STORY7	GQEQY	Bottom	1550.97	0	-378	-1890	17046.765	-7754.85
STORY6	GQEQY	Top	1626.39	0	-390	-1950	17386.155	-8131.95
STORY6	GQEQY	Bottom	1702.89	0	-390	-1950	18923.805	-8514.45
STORY5	GQEQY	Top	1778.31	0	-400	-2000	19263.195	-8891.55
STORY5	GQEQY	Bottom	1854.81	0	-400	-2000	20831.445	-9274.05
STORY4	GQEQY	Top	1930.23	0	-408	-2040	21170.835	-9651.15
STORY4	GQEQY	Bottom	2006.73	0	-408	-2040	22763.565	-10033.65
STORY3	GQEQY	Top	2082.15	0	-414	-2070	23102.955	-10410.75
STORY3	GQEQY	Bottom	2158.65	0	-414	-2070	24714.045	-10793.25
STORY2	GQEQY	Top	2234.07	0	-418	-2090	25053.435	-11170.35
STORY2	GQEQY	Bottom	2310.57	0	-418	-2090	26676.765	-11552.85
STORY1	GQEQY	Top	2385.99	0	-420	-2100	27016.155	-11929.95
STORY1	GQEQY	Bottom	2462.49	0	-420	-2100	28645.605	-12312.45



## **REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE**



### **Référence bibliographique :**

- [01] Florent Robert, « Contribution A L'analyse Non Linéaire Géométrique Et Matérielle Des Ossatures Spatiales En Génie Civil », 1999, Institut national des Sciences Appliquées de Lyon.
- [02] Bel Arbi, « Développement de Nouveaux Eléments Finis a Model en Déformation. Application Linéaire et Non Linéaire », 2000, Université Mentouri Constantine.
- [03] Kamel Gjerhaba, « Contribution A L'analyse Non Linéaire Des Coques Minces En Théorie De Marguerre », 1990, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [04] Ernest Hinton Swansea, « NAFEMS Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis », 1991.
- [05] M.A Crisfield, « Non-Linear Finite Element Analysis of Solid and Structures », 1991.
- [06] Ted Belytschko, « Finite Elements of Nonlinear continua and structures », 1996, Northwestern University.
- [07] Mohamed Guenfoud, « Introduction A La Théorie Non Linéaire Géométrique De La Mécanique Des Structures », 2003, Direction De La Publication Universitaire De Guelma.
- [08] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, « The Finite Element Method Solid Mechanics », Fifth Edition.
- [09] Salima Hassani-Manai, « Etude Et Modélisation De La Stabilité Des Structures Elancées En Béton Armé », 2003, Université de Cergy-Pontoise.
- [10] Edward L. Wilson, « Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures », 2002, University of California at Berkeley.
- [11] Victor E.Saouma, « Finite Element of Reduced Continua (Framed Structures) », University of Colorado.
- [12] Javier Bonet and Richard D.Wood, « Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis », 1997, Cambridge University.
- [13] R. Park and T. Paulay, « Reinforced Concrete Structures », 1974, New Zealand.
- [14] P. Lestuzzi, « Non-Linéaire Dynamique », 2007, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne Analyse.

- [15] Alessandro Dazio, « Capacité Portante Des Constructions En Béton », Institut Für Baustatik Und Konstruktion.
- [16] Marc Badoux, Pierino Lestuzzi, Rudolf Vogt, « Construction En Béton Introduction A La Norme SIA 262 Dimensionnement Parasismique », 2003, Zürich.
- [17] Hugo Bachmann, Principes De Base Pour La Conception Parasismique Des Bâtiments, 2000, Zurich.
- [18] Pierre - Alain Naze, « Contribution A La Prédiction Du Dommage Des Structures En Béton Armé Sous Sollicitations Sismiques », 2004, INSA de Lyon.
- [19] M. Amel AOUAMEUR-MESBAH, « Analyse Non-Linéaire Matérielle Et Géométrique Des Structures Coques En Béton Armé Sous Chargements Statiques Et Dynamiques », 1998, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées Paris.
- [20] Mohammed Bénali Benmansour, « Modélisation Du Comportement Cyclique Alterne Du Béton Arme Application A Divers Essais Statiques De Poteaux », 1997, Université Laval Québec.
- [21] Marie-Josée Houde, « Modélisation De Poutres En Béton Armé Endommagées Par Chargements Cycliques Comportement En Flexion Et En Cisaillement », 2007, Université Laval Québec.
- [22] Claire Girard, « Modélisation De Colonnes De Pont En Béton Armé Sous Sollicitations Cycliques », 2000, Université Laval Québec.
- [23] Ourabah A., Hamouche S., Seghir A. et Tahakourt A., « Analyse Pushover D'une Structure Auto Stable (R+8) Pushover Analysis Of Multistory Structures », 2010, Université Hassiba Benbouali.
- [24] Panagiotis Kotronis, « Cisaillement Dynamique De Murs En Béton Armé Modélisation Simplifiées 2D et 3D », 2000, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [25] Gilbert Touzot, « Une Présentation De La Méthode Des Eléments Finis », 1981, Paris Et Université Laval Quebec.
- [26] S. Bellizzi et A. Cosquer, « Vibration Des Structures Du Linéaire Au Non Linéaire », 2003, Pradet.