

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : **de génie civil et  
hydraulique**



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية و الري  
المرجع:.....

Ref :.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Magister**

**Option : Modélisation des matériaux et structures**

**Modélisation des structures continues à  
symétrie axiale de formes quelconques  
Par la méthode des éléments finis**

Présenté par :

**LABIODH Bachir**

Soutenu publiquement le 19/10/2011

**Devant le jury composé de :**

MELLAS Mekki	Maître de conférences	Université de Biskra	Président
HAMADI Djamel	Maître de conférences	Université de Biskra	Rapporteur
CHEBILI Rachid	Professeur	Université de Biskra	Examineur
OUNIS Abdelhafid	Maître de conférences	Université de Biskra	Examineur

INTRODUCTION \_\_\_\_\_ 01

**CHAPITRE 1 : THEORIE DES COQUES ET  
SOLIDE DE REVOLUTION/RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE**

1.1 THEORIE DES COQUES ET SOLIDE DE REVOLUTION \_\_\_\_\_ 03

    1.1.1 Définitions des structures axisymétriques \_\_\_\_\_ 03

    1.1.2 Coque De Révolution \_\_\_\_\_ 04

        1.1.2.1 Surface moyenne \_\_\_\_\_ 04

        1.1.2.2 Géométrie de la surface moyenne \_\_\_\_\_ 04

        1.1.2.3 Courbure normale \_\_\_\_\_ 05

        1.1.2.4 Ligne de courbure \_\_\_\_\_ 06

        1.1.2.5 Théorie de Rissner Mindlin \_\_\_\_\_ 08

            1.1.2.5.1 Déplacements et déformations virtuelles \_\_\_\_\_ 08

            1.1.2.5.2 Principe des travaux virtuels \_\_\_\_\_ 10

            1.1.2.5.3 Loi de comportement \_\_\_\_\_ 15

            1.1.2.5.4 Modèles mixtes en cisaillement transversal \_\_\_\_\_ 16

        1.1.2.6 Théorie de love Kirchoff \_\_\_\_\_ 18

            1.1.2.6.1 Déplacements et déformations virtuelles \_\_\_\_\_ 18

            1.1.2.6.2 Principe des travaux virtuels \_\_\_\_\_ 19

            1.1.2.6.3 Loi de comportement \_\_\_\_\_ 20

            1.1.2.6.4 Modèles déplacement \_\_\_\_\_ 20

    1.1.3 Solide de révolution \_\_\_\_\_ 21

1.2 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE \_\_\_\_\_ 22

    1.2.1 Coque de révolution \_\_\_\_\_ 22

        1.2.1.1 Eléments finis tronconiques \_\_\_\_\_ 24

        1.2.1.2 Eléments courbés \_\_\_\_\_ 25

    1.2.2 Solide de révolution \_\_\_\_\_ 27

**CHAPITRE 2 : FORMULATION**

2.1 Méthode des éléments finis \_\_\_\_\_ 28

    2.1.1 Formulation variationnelle \_\_\_\_\_ 28

    2.1.2 Modèle déplacement \_\_\_\_\_ 29

    2.1.3 Principes variationnels mixtes \_\_\_\_\_ 30

2.2 Formulation des éléments \_\_\_\_\_ 32

    2.2.1 Elément CAXI\_L (coque mince ou épaisse) \_\_\_\_\_ 32

        2.2.1.1 Approximation des déplacements et déformations \_\_\_\_\_ 33

        2.2.1.2 Matrice de rigidité \_\_\_\_\_ 34

        2.2.1.3 Charges équivalentes \_\_\_\_\_ 35

        2.2.1.4 Efforts résultants et contraintes \_\_\_\_\_ 36

    2.2.2 Elément CAXI\_K (coque mince) \_\_\_\_\_ 37

        2.2.2.1 Approximation des déplacements et déformations \_\_\_\_\_ 37

        2.2.2.2 Matrice de rigidité \_\_\_\_\_ 38

2.2.2.3 Charges équivalentes	39
2.2.2.4 Efforts résultants et contraintes	40
2.2.3 Elément triangulaire pour le cas des solides de révolution	41
2.2.3.1 Approximation des déplacements et déformations	41
2.2.3.2 Matrice de rigidité	42
2.2.3.3 Charges équivalentes	43
2.2.3.4 Contraintes	43

### CHAPITRE 3 : MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE

3.1 Introduction	44
3.2 Présentation des programmes Axisym	45
3.2.1 Algorithme générale	45
3.2.2 Description des programmes Axisym	46

### CHAPITRE 4 : VALIDATION ET APPLICATIONS

4.1 Coque De Révolution	48
4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité	48
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression	53
4.1.3 Cylindre sous pression	55
4.1.4 Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties	56
4.1.5 Plaque circulaire sous différents types de chargement	58
4.1.6 Plaque circulaire (avec CT)	66
4.1.7 Plaque circulaire (sans CT)	67
4.1.8 Hémisphère	68
4.1.9 Dôme sphérique sous pression	70
4.1.10 Paraboloïde	72
4.1.11 Cylindre conique	74
4.1.12 Cône de révolution	76
4.2 Solide de révolution	78
4.2.1 Cylindre épaisse	78
4.2.2 Problème de BOUSSINESQ	82

<b>CONCLUSION</b>	<b>85</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>86</b>
<b>ANNEXE</b>	<b>90</b>

## Résumé

La nécessité actuelle des ouvrages en coques de forme géométriques très complexes dans le domaine pratique est devenue importante. L'étude analytique est limitée, en général aux formes simples ; donc il est indispensable de recourir à l'usage des méthodes numériques, particulièrement la méthode des éléments finis. Cette méthode a prouvé son efficacité pour l'analyse numérique des structures. Dans ce mémoire, nous avons présenté la formulation de trois éléments développés pour l'étude des structures à symétrie axiale et la programmation de ces éléments sous Matlab . Les testes de validation et les applications dans le domaine de génie civil sont faites. Enfin les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par l'emploi du logiciel ANSYS.

**Mots clés : Modélisation, symétrie axiale, éléments finis, formes géométriques**

## Abstract

Nowadays, shell structures with complicated geometrical shapes are very imported in practice. Analytical study is limited generally to simple forms; therefore it is essential to resort to the use of the numerical methods. Among them, finite element method; which proven its effectiveness for the numerical analysis of structures. In this research, the formulation of three finite elements for the study of the axial symmetry shells are presented; in addition; the programming of these elements in Mat lab has been done. Test validation and the applications in the field of civil engineering are given; also, the comparison with the results obtained by the use of ANSYS is done.

**Key words: Modelling, axial symmetry, finite elements, geometrical forms**

## ملخص

إن الحاجة الى انجاز منشآت قشرية ذات اشكال هندسية معقدة اصبحت حاليا ضرورة ملحة من الجانب التطبيقي. والدراسة التحليلية تقتصر عموما على الاشكال الهندسية البسيطة، وعليه أصبح من الضروري التوجه الى استعمال الطرق العددية والتي من بينها طريقة العناصر المحدودة، حيث اثبتت نجاعتها في التحليل العددي للهياكل. في هذا البحث تم تشكيل ثلاثة عناصر محدودة خاصة بدراسة الهياكل القشرية ذات التناظر المحوري، إضافة إلى برمجة . تم القيام باجراء الاختبارات اللازمة و التطبيقات في مجال الهندسة المدنية Mat lab هذه العناصر من خلال استعمال ANSYS ومقارنة النتائج المتحصل عليها مع تلك المتحصل عليها باستعمال برنامج

**الكلمات المفتاحية: النمذجة، التناظر المحوري، العناصر المحدودة، الاشكال الهندسية.**

## Liste des Figures

### Chapitre 1 :

Figure (1 . 1): description géométrique de l'axisymétrie.....	9
Figure (1 . 2): description de la surface moyenne.....	10
Figure (1 . 3): Surface et ligne de coordonnées.....	11
Figure (1 . 4): courbe $v$ de courbure normale $1/ r_n$ au point A.....	11
Figure (1 . 5) : élément de surface limité par des lignes de courbure.....	12
Figure (1 . 6): description géométrique de la surface moyenne.....	13
Figure (1 . 7): rayon de courbure $R_S$ et $R_\theta$ .....	14
Figure (1 . 8): Composantes cylindriques et curvilignes virtuelles .....	15
Figure (1 . 9): Composantes $\sigma_s$ et $\sigma_z'$ .....	17
Figure (1 . 10) : sollicitation surfacique $f_r$ $f_z$ $f_s$ $f_z$ $m_s$ .....	18
Figure (1 . 11) : efforts résultantes $N_s$ , $N_\theta$ , $T_s$ , $M_s$ et $M_\theta$ .....	19
Figure (1 . 12) : cosinus directeur de la normale.....	20

### Chapitre 2 :

Figure (2 . 1) : Relations entre système d'équations différentielles, forme intégrale et fonctionnelles.....	28
Figure (2 . 2) : Elément tronconique (géométrie).....	32
Figure (2 . 3) : Elément tronconique linéaire CAXI_L.....	33
Figure (2 . 4) : Elément tronconique linéaire CAXI_K.....	37
Figure (2 . 5) : Elément à symétrie axiale.....	41

### Chapitre 3 :

Figure (3 . 1) : blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis.....	44
Figure (3 . 2) : Algorithme général du Programme Axisym.....	45

## Chapitre 4 :

Figure (4 , 1) cylindre chargé à leur extrémité.....	48
Figure (4 , 2) Convergence de déplacement de l'extrémité libre.....	49
Figure (4 , 3) structure déformé (ANSYS).....	49
Figure (4 , 4) variation du déplacement radial (maillage 24 éléments).....	50
Figure (4 , 5) variation du moment méridien (maillage 24 éléments) .....	51
Figure (4 , 6) Cylindre encasté/guidé sous pression .....	53
Figure (4 , 7) Convergence de $U_c$ .....	54
Figure (4 , 8) Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties.....	56
Figure (4 , 9) convergence de la flèche au centre.....	57
Figure (4 , 10) convergence de $M_s$ à $r= 0.5$ m.....	57
Figure (4 , 11) Plaque circulaire sous divers cas de chargement.....	58
Figure (4 , 12) convergence de déplacement maximal (divers cas de charge).....	62
Figure (4 , 13) convergence de déplacement maximal (divers cas de charge).....	65
Figure (4 , 14) Plaque circulaire soumise a une chargement linéaire.....	66
Figure (4 , 15) convergence de déplacement maximal.....	66
Figure (4 , 16) Plaque circulaire soumise à une charge uniformément répartie.....	67
Figure (4 , 17) convergence de déplacement maximal.....	67
Figure (4 , 18) : Hémisphère.....	68
Figure (4 , 19) structure déformé.....	69
Figure (4 , 20) : Dôme sphérique sous pression.....	70
Figure (4 , 21) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS.....	71
Figure (4 , 22) Structure déformé.....	71
Figure (4 , 23) : Hyperboloïde.....	72
Figure (4 , 24) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS.....	73
Figure (4 , 25) Structure déformé.....	73
Figure (4 , 26) : Cylindre conique.....	74

Figure (4 , 27) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS.....	75
Figure (4 , 28) : Structure déformé .....	75
Figure (4 , 29) Cône de révolution.....	76
Figure (4 , 30) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS.....	77
Figure (4 , 31) Structure déformé .....	77
Figure (4 , 32) Cylindre épais.....	78
Figure (4 , 33) Variation du déplacement (in).....	79
Figure (4 , 34) Variation du contrainte tangentielle (ton/in <sup>2</sup> ).....	80
Figure (4 , 35) Problème de BOUSSINESQ .....	82
Figure (4 , 36) Variation de l'erreur en déplacement.....	83
Figure (4 , 37): Structure déformé problème de BOUSSINESQ (Prog :AxisymT3AX dessins obtenus avec MATLAB).....	84

## Liste des Tableaux

### Chapitre 4 :

Tableau (4 , 1) : Déplacement radial à l'extrémité chargé.....	48
Tableau (4 , 2) : Déplacement radial (in) ( x1/1000) maillage 24 éléments.....	50
Tableau (4 , 3) : Moment méridien lbf in/in ( x1/1000) maillage 24 éléments.....	51
Tableau (4 , 4) : Variation de la solution en déplacement en fonction du nombre de points d'intégration numérique (méthode de Gauss).....	52
Tableau (4 , 5) : Déplacement radial $U_c$ (m).....	53
Tableau (4 , 6) : Déplacement radial (in) de l'extrémité $Z = 200$ in.....	55
Tableau (4 , 7) : Flèche maximal (m).....	56
Tableau (4 , 8) : contrainte $M_s$ (N.m/m) à $r = 0.50$ m.....	56
Tableau (4 , 9) : Valeur de déplacement maximal pour divers cas de charge.....	60
Tableau (4 , 10) : Valeur de déplacement maximal pour divers cas de charge.....	63
Tableau (4 , 11) : Valeur de déplacement maximal (in).....	66
Tableau (4 , 12) : Valeur de déplacement maximal (in).....	67
Tableau (4 , 13) : Valeur de déplacement maximal (in).....	68
Tableau (4 , 14) : Valeur de déplacement maximal (in).....	70
Tableau (4 , 15) : Valeur de déplacement maximal (ft).....	72
Tableau (4 , 16) : Valeur de déplacement maximal (in).....	74
Tableau (4 , 17) : Valeur de déplacement maximal (in).....	76
Tableau (4 , 18) : Valeur de déplacement radiale (in).....	78
Tableau (4 , 19) : Valeur de contrainte tangentielle (ton/in <sup>2</sup> ).....	80
Tableau (4 , 20) : Valeur de contrainte radial (ton/in <sup>2</sup> ).....	81
Tableau (4 , 21) : Valeur de contraintes radial Kn/m <sup>2</sup> .....	83



## Liste des Notations

$\mathbf{u}_p$  : vecteur déplacement d'un point p (tous vecteurs sont notés en gras)

$\mathbf{u}_p^*$  : vecteur déplacement virtuel d'un point p (\* utilisé pour définir tous valeurs virtuels)

$\beta, \beta^*$  : rotation réel et virtuel

{ } : matrice colonne (vecteur)

[ ] : matrice (utilisé aussi pour les références bibliographiques)

[ ]<sup>-1</sup> : inverse de la matrice

[ ]<sup>T</sup> : transposé de la matrice

det : déterminant d'une matrice

$\langle \rangle$  : matrice ligne ( transposé de vecteur)

$f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$  : dérivée partielle de f par rapport à x

X, Y, Z : coordonnées cartésiennes globales

$x_p, x_q$  : vecteur position du point p et q

$\xi, \theta$  : coordonnées paramétriques (méridienne et circonférentiel)

s : abscisse curviligne

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  : base orthonormé cartésienne

$\mathbf{t}, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{n}$  : base curviligne

$\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{k}$  : base cylindrique

$n_{sc}$  : cosinus directeur de  $\mathbf{n}$  suivant s

$\frac{1}{R_s}, \frac{1}{R_\theta}$  : courbure méridienne, courbure circonférentielle

K, H : courbure gaussienne, courbure moyenne

u, w : composantes du vecteur déplacement dans le repère curviligne

U, W : composantes du vecteur déplacement dans le repère cylindrique

$\epsilon_s, \epsilon_\theta$  : composantes de déformation curviligne

$\chi_s, \chi_\theta$  : courbures de flexion

$\psi$  : rotation de la surface moyenne

$e_s, e_\theta$  : déformation de membrane

$\gamma_s$  : déformation de cisaillement

$\sigma_s, \sigma_\theta$  : contraintes normales (composantes curviligne)

$\sigma_{s\theta}, \sigma_{sz}, \sigma_{\theta z}$  : contraintes de cisaillement (composantes curviligne)

$\sigma_r, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_\theta, \sigma_{\theta z}, \sigma_z$  : composantes cylindriques de contraintes

$\Pi$  : fonctionnelle d'énergie

$\Pi_{int}, \Pi_{ext}$  : fonctionnelle, énergie potentielle interne, externe

PTV : principe des travaux virtuels

$W_{int}, W_{ext}$  : travail virtuel interne, externe

$f_r, f_z, f_s, f_\theta, m_s$  : sollicitations par unité de surface moyenne

$N_s, N_\theta$  : effort résultantes de membrane suivant s et  $\theta$

$M_s, M_\theta$  : effort résultantes de flexion

$T_s$  : effort tranchant suivant z

$[H_I], [H]$  : matrice de comportement élastique

$G$  : module de cisaillement

$E$  : module de young

$\nu$  : coefficient de poisson

$[H_m], [H_{mf}], [H_f]$  : matrice de comportement homogénéisées de membrane, flexion et couplage  
membrane-flexion

$[H_c]$  : matrice de comportement globale en cisaillement transversal

$k$  : facteur de correction de cisaillement transversal

$(f_r, f_z), (f_{sr}, f_{sz})$  : force de volume, force surfacique sur Sf (solide de révolution)

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$  : composantes cylindriques des contraintes (solide de révolution)

$L, C$  : opérateurs différentielles

$\Psi$  : fonction de pondération

$\delta$  : symbole de calcul des variations

$V^e$  : volume élémentaire

$p(x), p(\xi)$  : base polynomiale de l'approximation espace réel, paramétrique

$N(x)$  : fonction de forme

$\{ a \}$  : variables généralisées de l'approximation

$\{ u(x) \}$  : variables généralisées

$\{ u_n \}$  : variables nodales

$[B]$  : matrice reliant les déformations aux variables nodales

$[\partial]$  : matrice des dérivées partielles

$\{ f_n \}$  : vecteur des forces nodales de l'élément

$[k]$  : matrice de rigidité élémentaire

$[K],[F]$  : matrice de rigidité et vecteur des forces globales

$[B_m] [B_f] [B_c]$  : matrices définissant les déformations de membrane, de flexion et de cisaillement transversal

$[k_{mf}], [k_c]$  : matrices de rigidité élémentaires de membrane-flexion, cisaillement transversal

$g$  : accélération de la pesanteur

$\rho$  : masse volumique

$V$  : volume

$h$  : épaisseur suivant  $\mathbf{n}$

$\{ u_n \}_{loc}$  : vecteur déplacements nodales dans le repère local

$[k]_{loc}$  : matrice de rigidité élémentaire dans le repère local

$[T]$  : matrice de changement de base

# **INTRODUCTION**

## INTRODUCTION

L'avantage du choix et de la conception des structures à symétrie axiale avec chargement de révolution soit coque ou solide de révolution (réservoirs, châteaux d'eau, silos, enceinte de réacteur, tunnels, etc.), est que la modélisation nous permet d'étudier la structure dans n'importe quel demi plan contenant l'axe de révolution dit plan méridien.

Dans la théorie des coques de révolution la symétrie par rapport à l'axe Z offre une simplicité et par conséquent une diminution du temps de calcul soit pour la solution numérique ou manuel qui est rarement possible (sauf dans des cas très simple), basé sur cette modélisation, et avec l'évolution de la méthode des éléments finis les chercheurs ont développés plusieurs types d'éléments finis où on peut distinguer d'après la théorie des coques deux types d'éléments finis:

- Des éléments finis où le cisaillement transversal est pris en considération dans la formulation (théorie de Rissner-Mindlin).
- Des éléments finis où l'effet du cisaillement transversal n'est pas pris en compte (théorie de Love-Kirchoff).

Pour la deuxième catégorie (solide de révolution) les types d'éléments finis utilisés sont semblables aux éléments finis de l'élasticité plane, sauf qu'on ajoute dans ce cas aux tenseurs des déformations et des contraintes la composante tangentielle, ces éléments sont généralement triangulaires, rectangulaires ou des quadrilatères.

L'objectif de notre étude est la mise en œuvre numérique de quelques modèles éléments finis (élaboration des programmes sous langage Matlab) pour les deux catégories et l'étude de convergence pour chaque type d'élément finis, ainsi d'étudier l'influence de certains paramètres sur la performance de l'élément:

- le modèle mathématique choisie (déplacement ou mixte).
- la méthode d'intégration numérique et les nombres des points d'intégration

Le premier chapitre est consacré dans une première partie à la présentation des différentes méthodes théoriques nécessaires pour la formulation des éléments finis, dans la deuxième partie on s'intéresse à la recherche bibliographique des éléments finis type coques axisymétriques et les éléments de type solides de révolution.

Dans le deuxième chapitre on donne une bref présentation de l'aspect mathématique (formulation variationnelle) de la méthode des éléments finis ainsi les modèles éléments finis

utilisés, ensuite par l'utilisation des théories décrites dans le premier chapitre, on donne la formulation (matrice de rigidité et contraintes) des éléments finis utilisés dans notre programmes.

Dans Le troisième chapitre on concrétise ce qui à été présenter au deuxième chapitre dans un programme informatique, on commence par la définition des différentes étapes qui caractérisent un programme éléments finis, puis on présente l'algorithme général de notre programmes écrits sous MATLAB, aussi on donne le mode de fonctionnement des différentes fonctions (subroutine) qui les constitues.

Le quatrième chapitre fait l'objet de la validation de notre programmes, ainsi La comparaison des résultats obtenus par notre programmes pour diverses applications avec ceux obtenus par d'autres logiciels (ANSYS et SAP), qui est indispensable pour tester la fiabilité et la capacité de notre programmes à résoudre les différents types des problèmes qui peut être fréquentés dans le domaine de la construction.

# **CHAPITRE 1**

## **THEORIE DES COQUES ET SOLIDE DE REVOLUTION / RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE**

## 1.1 THEORIE DES COQUES ET SOLIDE DE REVOLUTION

### 1.1.1 Définitions des structures axisymétriques :

Les structures a symétrie axial peuvent être en général séparées en deux grandes catégories :

- a) les coques de révolution où l'épaisseur de la structure est petit par rapport à sont diamètre.  
 $e \ll R$
- b) les corps solides de révolution où l'épaisseur de la structure est considérable par rapport au diamètre.

➤ Symétrie axiale :

On dit qu'il existe une symétrie axiale lorsque la géométrie de la structure et les charges agissants (surfaiques, volumiques etc.) est symétriques par rapport à un axe (généralement Oz) .

➤ Coque de révolution :

Les forces et déplacements se trouvent dans un plan tourne autour d'un axe.

Dans le cas présenté sur la figure (1 . 1) les forces et déplacements se trouvent dans le plan (Or ,Oz) appelé plan de révolution, l'axe de symétrie est l'axe Oz.

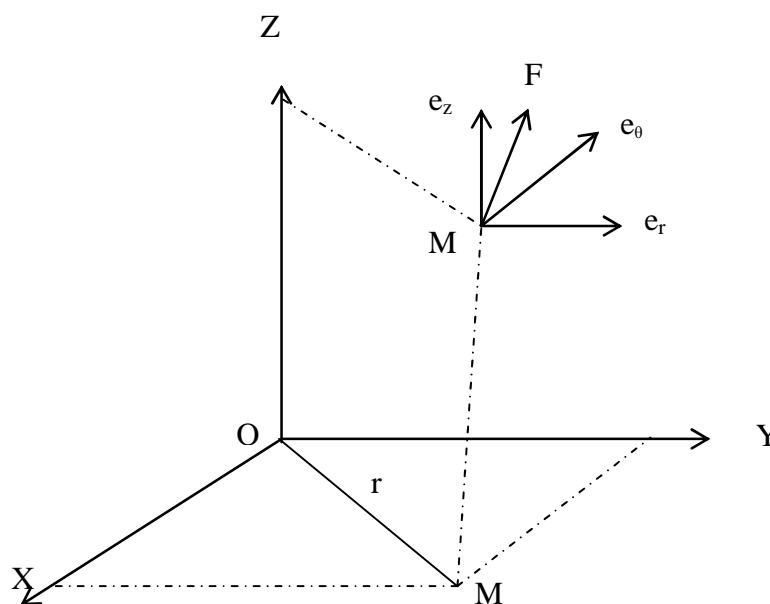


Figure (1 . 1): description géométrique de l'axisymétrie



### 1.1.2 Coque De Révolution

#### 1.1.2.1 Surface moyenne :

La théorie des coques est l'étude des solides déformables surfaciques, elle est adaptée à l'étude des solides déformables dont la géométrie est assimilable à une surface avec une épaisseur.

Comme en théorie des poutres qui est l'étude des solides déformables linéiques (une courbe avec une épaisseur), cette géométrie va permettre d'établir une théorie simplifiée dans la quelle on dira qu'on connaît suffisamment les déplacements en connaissant seulement ceux de la surface moyenne

Dans l'étude théorique des coques, la surface moyenne  $\Sigma$ , la normale  $n$  et le segment BC (figure (1 . 2)) jouent un rôle essentiel.

Dans la suite on désigne par normale tant le segment que la droite qui le porte. Le segment correspond, dans la théorie des coques, à la section droite dans la théorie des poutres de Bernoulli.

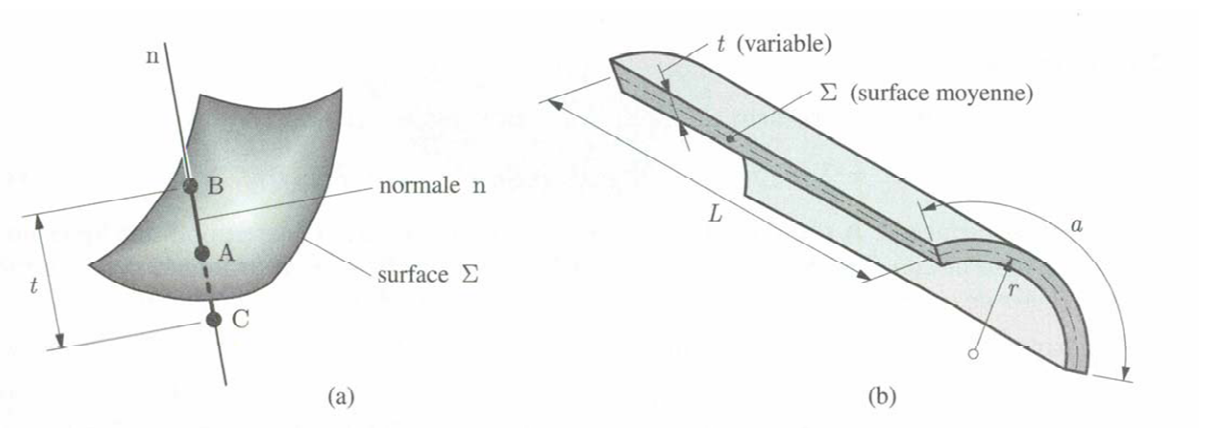


Figure (1 . 2): description de la surface moyenne : (a) surface moyenne  $\Sigma$  et sa normale ; (b) dimensions caractéristiques (L, a, r) [5]

#### 1.1.2.2 Géométrie de la surface moyenne :

Dans un système d'axes cartésiens orthogonal (X, Y, Z), les équations paramétriques :

$$X = X(\alpha, \beta) \quad Y = Y(\alpha, \beta) \quad Z = Z(\alpha, \beta)$$

Définissent une surface  $\Sigma$ .

A toute valeur constante  $C_\beta$  du paramètre  $\beta$  correspond une ligne sur la surface, dite ligne de coordonnées  $\alpha$  ; de même,  $\alpha = C_\alpha$  définit une ligne de coordonnées  $\beta$ .

L'ensemble forme les lignes de coordonnées et  $(\alpha, \beta)$  sont les coordonnées curvilignes de la surface.

Le vecteur position est défini par :

$$\mathbf{OA} = x(\alpha, \beta) = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3$$

Où  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sont les vecteurs unités dans (X, Y, Z)

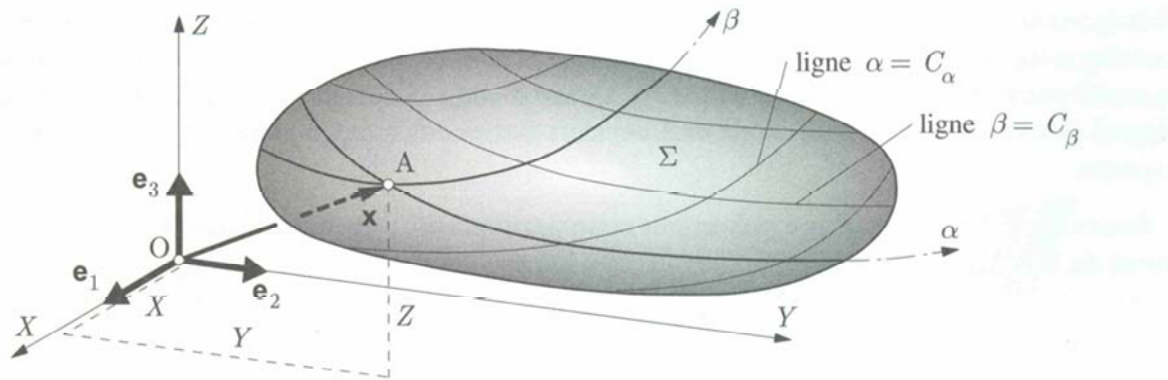


Figure (1 . 3): Surface et ligne de coordonnées [5]

### 1.1.2.3 Courbure normale :

Soit  $n$  la normale élevée au point  $A$  d'une surface  $\Sigma$  figure (1 . 4), on dit qu'un plan contenant  $n$  réalise une section normale de la surface ; cette section se traduit par une courbe plan  $v$  tracé sur  $\Sigma$ .

Au point  $A$  de cette courbe, on désigne par  $r_n$  le rayon de courbure, son inverse  $1/ r_n$  est la courbure normale.

Lorsque le plan  $P$  tourne autour de  $n$ ,  $r_n$  et  $1/ r_n$  varie entre deux valeurs extrêmes appelées rayons de courbure principaux  $r_{\max}$   $r_{\min}$  et courbures principales  $1/ r_{\min}$  et  $1/ r_{\max}$  , les plans  $P$  correspondants sont perpendiculaires.

La trace de ces deux plans dessine, au voisinage immédiat du point  $A$ , une petite croix sur La surface  $\Sigma$ , les bras de cette croix sont les directions principales ; les courbes enveloppes de ces directions en tous les points de  $\Sigma$ , constituent un réseau orthogonal de deux familles de lignes, appelés les lignes de courbure principales, ou simplement ligne de courbure.

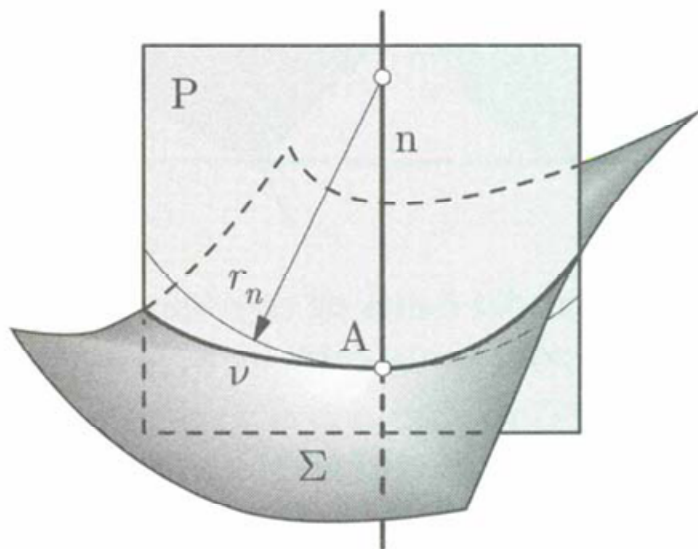


Figure (1 . 4): courbe  $v$  de courbure normale  $1/ r_n$  au point  $A$ , section normale de  $\Sigma$  par  $P$  [5]

### 1.1.2.4 Ligne de courbure :

Le réseau des lignes de courbure d'une surface peut être utilisé avantageusement comme système de ligne de coordonnées curviligne  $(\alpha, \beta)$  pour exprimer les équations des coques, outre l'orthogonalité, ce réseau possède la propriété essentielle suivante : le long d'un tronçon  $ds_\alpha$  (ou  $ds_\beta$ ) d'une ligne de courbure, la normale reste dans le plan contenant la section normale et passe par le centre de courbure de tronçon (figure (1 . 5)), grâce à cette propriété, on peut isoler un fragment de coque d'épaisseur  $t$  par des sections droites, c'est-à-dire des coupes planes et normales à la surface moyenne.

Seule les lignes de courbures présentent cette particularité.

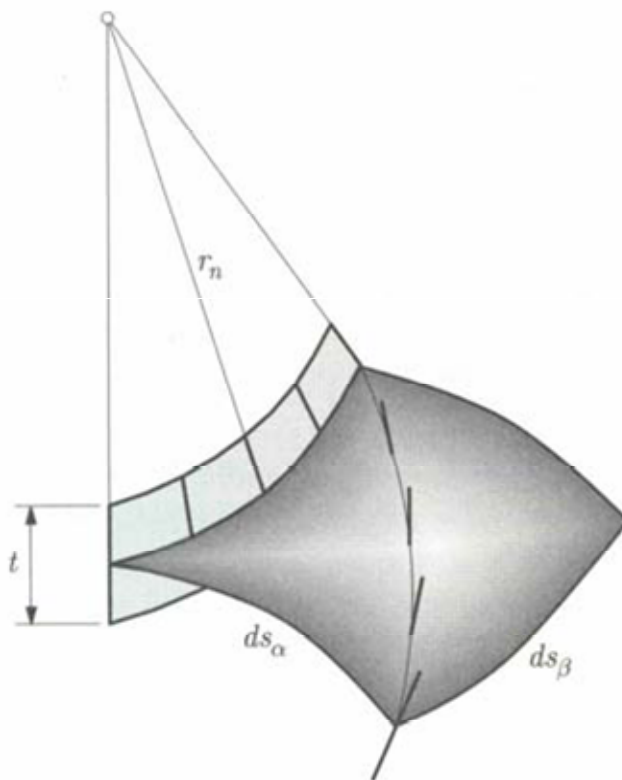


Figure (1 . 5) : élément de surface limité par des lignes de courbure [5]

#### Vecteur position de la surface moyenne (coque de révolution):

Un point P de la surface moyenne A de la coque de révolution (figure (1 . 6)) est défini en fonction de deux coordonnées paramétriques  $\xi$  et  $\theta$  (qui remplacent les coordonnées curvilignes  $(\alpha, \beta)$ ),  $\xi$  est un paramètre associé à la description de la courbe méridienne génératrice de la coque de révolution.

Le vecteur position du point P s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{x}_p = r(\xi) \mathbf{i}_r(\theta) + Z(\xi) \mathbf{k}$$

Et en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{x}_p = X(\xi, \theta) \mathbf{i} + Y(\xi, \theta) \mathbf{j} + Z(\xi) \mathbf{k}$$

Avec  $X = r(\xi) \cos\theta$  et  $Y = r(\xi) \sin\theta$

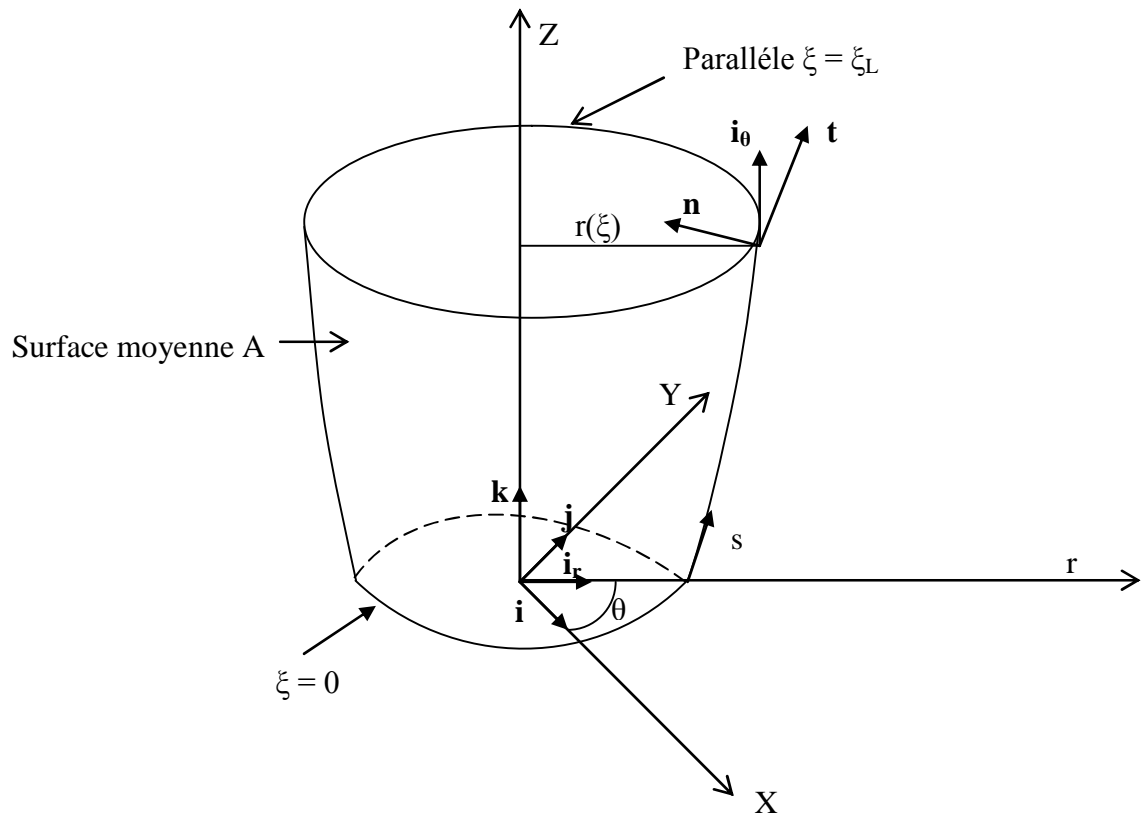


Figure (1 . 6): description géométrique de la surface moyenne [2]

**Courbures :**

On définit :

$\frac{1}{R_s}$  : Courbure méridienne

$\frac{1}{R_\theta}$  : Courbure circonférentielle

$K = \frac{1}{R_s} \frac{1}{R_\theta}$  courbure gaussienne

$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right)$  courbure moyenne

Cas particuliers :

Cylindre :  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ;  $\varphi_{,s} = 0$  ;  $R_s = \infty$  ;  $R_\theta = R$

Disque :  $\varphi = 0$  ;  $\varphi_{,s} = 0$  ;  $R_s = \infty$  ;  $R_\theta = \infty$

Cône :  $\varphi = 0$  ;  $\varphi_{,s} = 0$  ;  $R_s = \infty$  ;  $R_\theta = \frac{r}{\sin\varphi}$

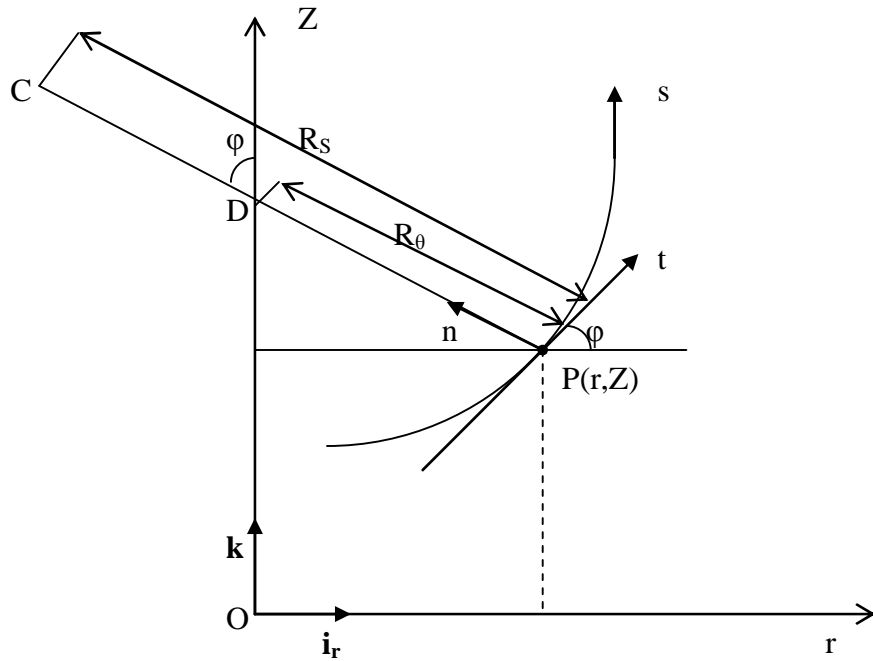


Figure (1 . 7): rayon de courbure  $R_s$  et  $R_\theta$  [2]

**1.1.2.5 Théorie de Rissner Mindlin :**

Cette théorie consiste à exprimer moyennant certaines hypothèses simplificatrices toutes les inconnues du problème :

- Hypothèse de linéarisation géométrique :  
Les déplacements et déformations restent petites en sorte que les équations cinématiques soient linéaires.
- Hypothèse de linéarisation matérielle :  
Le matériau obéit à la loi de Hooke.
- La contrainte normale transversale est négligable :  $\sigma_z = 0$
- $(h/R_{\min})^2 \ll 1$  (h épaisseur de la coque)

Remarques :

- Les expressions données ci-dessous sont pour un matériau homogène isotrope.
- l'épaisseur h est prise constant sur toute la structure.

**1.1.2.5.1 Déplacements et déformations virtuelles :**

on peut déduire le déplacement virtuel d'un point q figure (1 . 8):

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{x}_p + z \mathbf{n}$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

Hypothèse des sections droites (cinématique virtuelle) :

$$\mathbf{x}_p^* = \mathbf{x}_p + \mathbf{u}_p^*$$

$$\mathbf{x}_q^* = \mathbf{x}_p^* + z (\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}^*) = \mathbf{x}_q + \mathbf{u}_q^*$$

$$\mathbf{u}_q^* = \mathbf{u}_p^* + z \boldsymbol{\beta}^* \text{ avec } \boldsymbol{\beta}^* = \beta^* \mathbf{t} + \beta_\theta^* \mathbf{i}_\theta \quad \text{et } \boldsymbol{\beta}^* \cdot \mathbf{n} = 0$$

les vecteurs  $\mathbf{u}_p^*$  et  $\boldsymbol{\beta}^*$  sont définis en fonction de deux paramètres descriptifs de la surface moyenne :

les coordonnées paramétriques  $\xi$  et  $\theta$  :

$$\mathbf{u}_p^* = \mathbf{u}_p^*(\xi, \theta) \quad ; \quad \boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta}^*(\xi, \theta)$$

les coordonnées curvilignes physiques s (méridien) et  $\theta$  (circonférence)

$$\mathbf{u}_p^* = \mathbf{u}_p^*(s, \theta) \quad ; \quad \boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta}^*(s, \theta)$$

Descriptions cylindrique et curviligne:

$\beta^* (s, \theta)$  est relative à la base curviligne  $t, i_\theta, n$

les composantes de  $u_p^*$  peuvent être définies dans la base cylindrique  $(i_r, i_\theta, k)$  ou dans la base curviligne  $(t, i_\theta, n)$

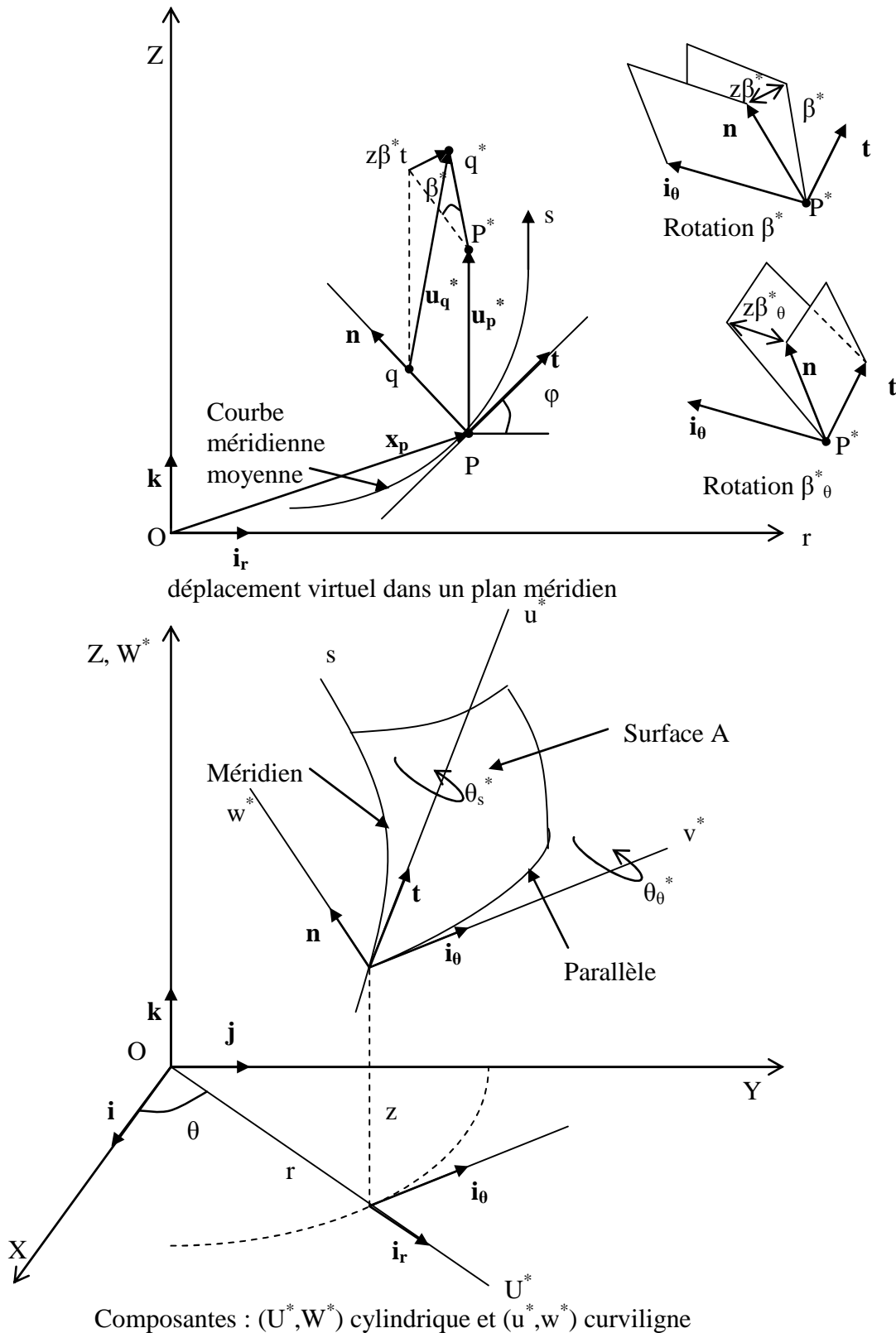


Figure (1.8): Composantes cylindriques et curvilignes virtuelles [2]

Le champ de déplacement virtuel pour un comportement axisymétrique :

$$\begin{aligned} v^* &= \beta^*_{,\theta} = 0 \\ \mathbf{u}^*_q &= \mathbf{u}^*_p + z \beta^* \end{aligned}$$

Le champ de déplacement en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$\mathbf{u}^*_q = (U^* + z \beta^* \cos\varphi) \mathbf{i}_r + (W^* + z \beta^* \sin\varphi) \mathbf{k} \quad (1.1)$$

Et en coordonnées curvilignes :

$$\mathbf{u}^*_q = (u^* + z \beta^*) \mathbf{t} + w^* \mathbf{n} \quad (1.2)$$

$$\text{avec } \mathbf{t} = \mathbf{x}_{p,s} = \cos\varphi \mathbf{i}_r + \sin\varphi \mathbf{k} \quad ; \quad \text{normal unitaire } \mathbf{n} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{i}_\theta = -\sin\varphi \mathbf{i}_r + \cos\varphi \mathbf{k}$$

Les déformations virtuelles :

Expressions générales :

$$\varepsilon^*_s = \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{u}^*_{q,s} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{\alpha_1} (e^*_s + z \chi^*_s) \quad (1.3)$$

$$\varepsilon^*_\theta = \frac{1}{r\alpha_2} \mathbf{u}^*_{q,\theta} \cdot \mathbf{i}_\theta = \frac{1}{\alpha_2} (e^*_\theta + z \chi^*_\theta) \quad (1.4)$$

$$\gamma^*_s = \mathbf{u}^*_{q,z} \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{u}^*_{q,s} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\alpha_1} \gamma^* \quad ; \quad \gamma^* = \beta^* + \psi^* \quad (1.5)$$

( $\psi$  rotation de la surface moyen)

$$\text{avec : } \alpha_1 = 1 - \frac{z}{R_s} \quad ; \quad \alpha_2 = 1 - \frac{1}{R_\theta} \quad ; \quad \frac{1}{R_s} = \varphi_{,s} \quad ; \quad r = R_\theta \sin\varphi$$

$$e^*_s = \mathbf{u}^*_{p,s} \cdot \mathbf{t} \quad ; \quad e^*_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{u}^*_{p,\theta} \cdot \mathbf{i}_\theta \quad ; \quad \psi^* = \mathbf{u}^*_{p,s} \cdot \mathbf{n} \quad (1.6)$$

Les courbures virtuelles suivant s et  $\theta$  sont:

$$\chi^*_s = \beta^*_{,s} \quad ; \quad \chi^*_\theta = \frac{1}{r} \beta^* \cos\varphi \quad (1.7)$$

Déformation de membrane et de cisaillement transversal :

En coordonnées cylindriques :

$$e^*_s = U^*_{,s} \cos\varphi + W^*_{,s} \sin\varphi \quad ; \quad e^*_\theta = \frac{1}{r} U^* \quad (1.8)$$

$$\psi^* = -U^*_{,s} \sin\varphi + W^*_{,s} \cos\varphi \quad ; \quad \gamma^* = \beta^* + \psi^* \quad (1.9)$$

En coordonnées curvilignes :

$$e^*_s = u^*_{,s} - \frac{1}{R_s} w^* \quad ; \quad e^*_\theta = \frac{1}{r} (u^* \cos\varphi + w^* \sin\varphi) \quad (1.10)$$

$$\psi^* = w^*_{,s} + \frac{1}{R_s} u^* \quad ; \quad \gamma^* = \beta^* + \psi^* \quad (1.11)$$

### 1.1.2.5.2 Principe des travaux virtuels:

**Tenseur des contraintes :**

Les relations contraintes-déformations (loi de comportement) seront établies avec l'hypothèse des contraintes planes soit :

$$\sigma_{z'} = 0$$

Les cinq contraintes significatives dans la base curviligne orthonormée (  $\mathbf{t}_\xi, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{n}_\xi$  )

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_s & \sigma_{s\theta} & \sigma_{sz'} \\ & \sigma_\theta & \sigma_{\theta z'} \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix}$$

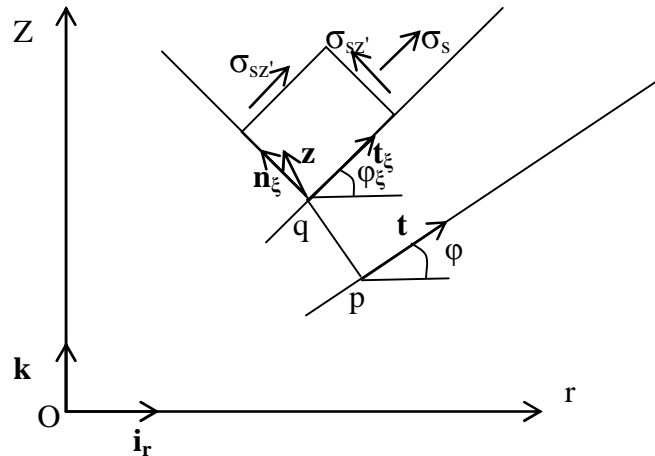


Figure (1 . 9): Composantes  $\sigma_s$  et  $\sigma_{z'}$  [2]

Le tenseur des contraintes dans le repère cylindrique (base  $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{k}$  ) :

$$[\sigma_r] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rZ} \\ & \sigma_\theta & \sigma_{\theta Z} \\ \text{sym} & & \sigma_Z \end{bmatrix}$$

Pour un comportement axisymétrique :

$$\sigma_{z'} = \sigma_{\theta s} = \sigma_{\theta z'} = 0$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & \sigma_{sz'} \\ & \sigma_\theta & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (1 . 12)$$

**Expression du principe des travaux virtuels:**

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall u_q^* \text{ avec } u_q^* = 0 \text{ sur } S_u \quad (1 . 13)$$

$W_{\text{int}}$  : travail virtuel des forces interne

$W_{\text{ext}}$  : travail virtuel des forces externe

$W$  : travail total



- travail virtuel des forces externe :

En composantes cylindriques :

$$W_{\text{ext}} = 2 \pi \int_{\xi} (U^* f_r + W^* f_z + \beta^* m_s) r d\xi \quad (1.14)$$

En composantes curvilignes :

$$W_{\text{ext}} = 2 \pi \int_{\xi} (u^* f_s + w^* f_z + \beta^* m_s) r d\xi \quad (1.15)$$

Avec  $f_r, f_z, f_s, f_z, m_s$  sont des sollicitations par unité de surface moyenne A figure (1.10)

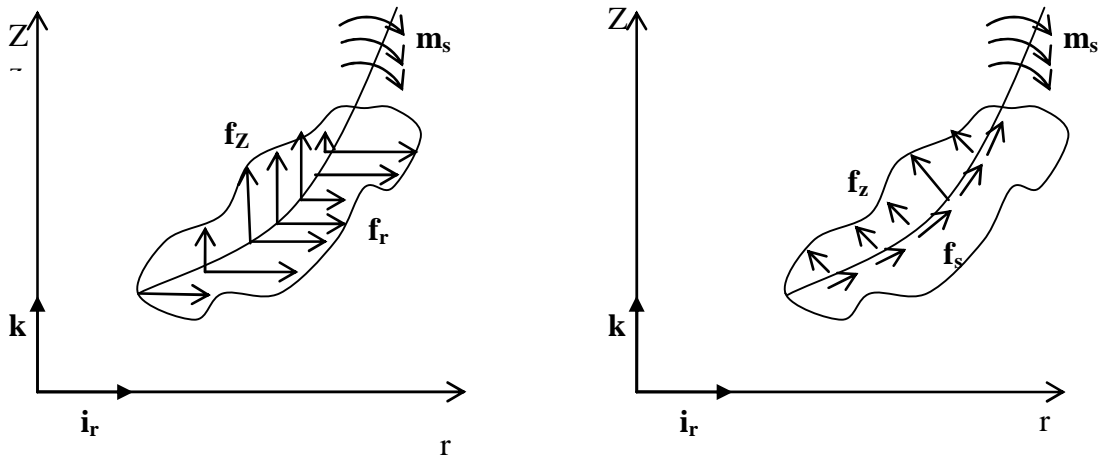


Figure (1.10) : sollicitation surfacique  $f_r, f_z, f_s, f_z, m_s$  [2]

- travail virtuel des forces interne :

L'expression de  $W_{\text{int}}$  en fonction des efforts résultants :

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= 2 \pi \int_s (e_s^* N_s + e_\theta^* N_\theta + \chi_s^* M_s + \chi_\theta^* M_\theta) r ds \\ &= 2 \pi \int_s (\langle e^* \rangle [N] + \langle \chi^* \rangle [M] + \gamma^* T_s) r ds \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\text{Avec } \langle e^* \rangle = \langle e_s^* \ e_\theta^* \rangle ; \quad \langle \chi^* \rangle = \langle \chi_s^* \ \chi_\theta^* \rangle \quad (1.17)$$

$$\langle N \rangle = \langle N_s \ N_\theta \rangle ; \quad \langle M \rangle = \langle M_s \ M_\theta \rangle \quad (1.17)$$

$$N_s = \int_{-t}^t \sigma_s \alpha_2 dz ; \quad M_s = \int_{-t}^t \sigma_s z \alpha_2 dz ; \quad T_s = \int_{-t}^t \sigma_{sz} \alpha_2 dz \quad (1.18)$$

$$N_\theta = \int_{-t}^t \sigma_\theta \alpha_1 dz ; \quad M_\theta = \int_{-t}^t \sigma_\theta z \alpha_1 dz \quad (1.18)$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{z}{R_s} ; \quad \alpha_2 = 1 - \frac{z}{R_\theta}$$

$e_s^*, e_\theta^*, \chi_s^*, \chi_\theta^*, \gamma^*$  sont définis par équations (1.3) à (1.11)

$N_s, N_\theta$  : effort résultantes de membrane suivant  $s$  et  $\theta$  figure (1.11)

$M_s, M_\theta$  : effort résultantes de flexion (moments) autour de  $i_\theta$  et de  $t$

$T_s$  : effort tranchant suivant  $z$

Ces efforts résultants sont définis par unité de longueur de surface de référence circonférentielle pour  $N_s$ ,  $M_s$  et  $T_s$  et méridienne pour  $N_\theta$  et  $M_\theta$ , ce qui explique la présence des termes de courbure  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dans leur expressions.

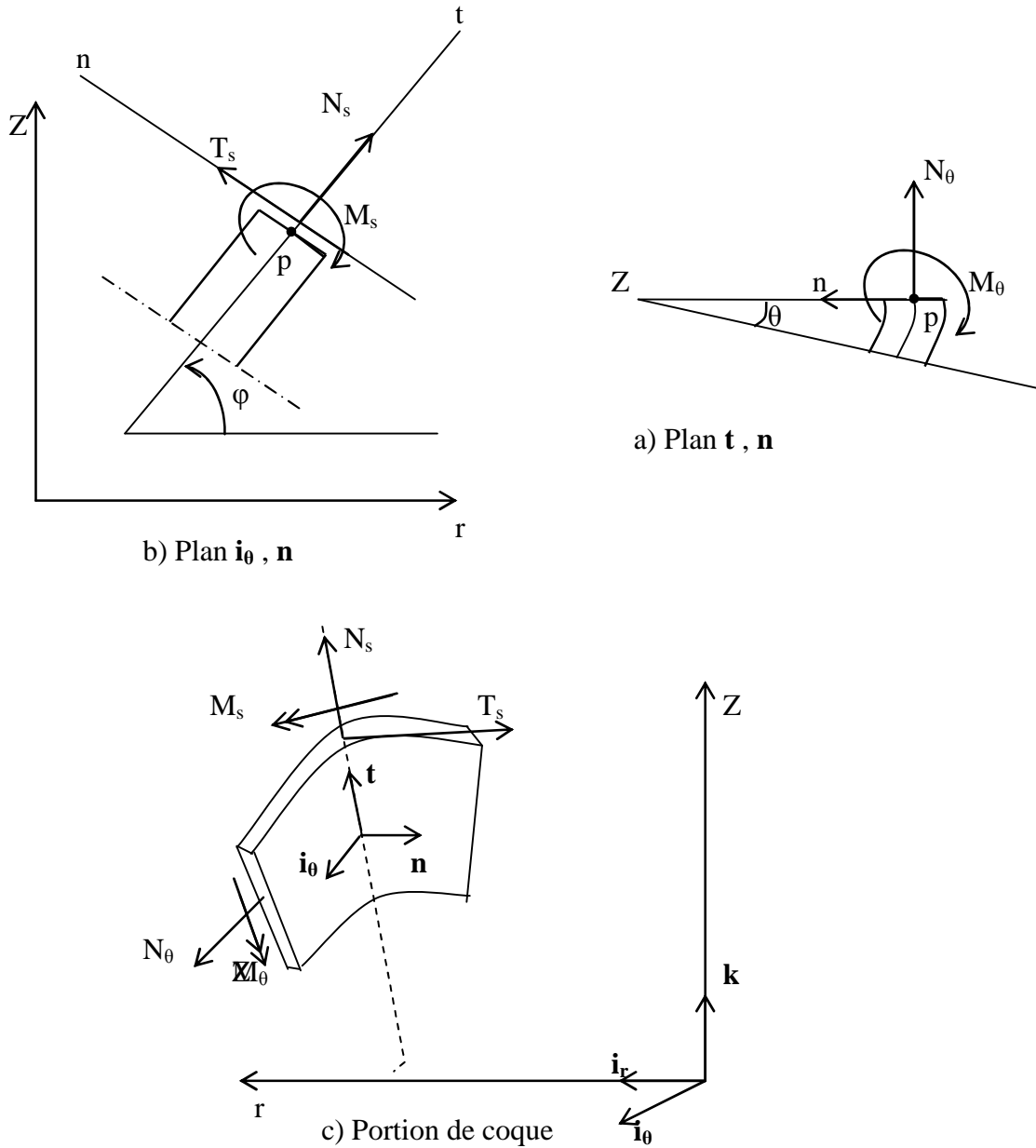


Figure (1 . 11) : efforts résultantes  $N_s$ ,  $N_\theta$ ,  $T_s$ ,  $M_s$  et  $M_\theta$  [2]

**Equation d'équilibre :**

Considérons l'expression du principe des travaux virtuels équations (1 . 13) (1 . 15) (1 . 16)

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall u^*_q \text{ avec } u^*_q = 0 \text{ sur } S_u$$

$$W_{int} = 2 \pi \int_s \langle \epsilon^* \rangle [N] + \langle \chi^* \rangle [M] + \gamma^* T_s \rangle r \, ds$$

$$W_{\text{ext}} = 2 \pi \int_s (u^* f_s + w^* f_z + \beta^* m_s) r ds$$

$$+ 2 \pi (r u^* F_s + r w^* F_z + r \beta^* \mathcal{M})_{S_f}$$

avec  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{m}_s$  des sollicitations surfaciques,  $\mathbf{F}$  et  $\mathcal{M}$  linéiques.

En tenant compte des expressions de  $\langle e^* \rangle$ ,  $\langle \chi^* \rangle$  et  $\gamma^*$  équations de (1.3) à (1.11) et en intégrant par partie tous les termes faisant intervenir les dérivées par rapport à  $s$ , on obtient les équation d'équilibre sur  $A$  et sur  $S_f$  :

$$W = -2 \pi \int_s (u^* EQ1 + w^* EQ2 + \beta^* EQ3) r ds$$

$$+ 2 \pi (r u^* EQ4 + r w^* EQ5 + r \beta^* EQ6)_{S_f}$$

$$\forall u^*, w^*, \beta^* = 0 \text{ sur } S_u$$

$$EQ1 = N_{s,s} + \frac{\cos \varphi}{r} (N_s - N_\theta) - \frac{T_s}{R_s} + f_s = 0 \quad (1.19)$$

$$EQ2 = T_{s,s} + \frac{\cos \varphi}{r} T_s + \frac{N_s}{R_s} + \frac{N_\theta}{R_\theta} + f_z = 0 \quad (1.20)$$

$$EQ3 = M_{s,s} + \frac{\cos \varphi}{r} (M_s - M_\theta) - T_s + m_s = 0 \quad (1.21)$$

Et sur  $S_f$  :

$$EQ4 = N_s n_{sc} - F_s = 0$$

$$EQ5 = T_s n_{sc} - F_z = 0$$

$$EQ6 = M_s n_{sc} - \mathcal{M} = 0$$

$n_{sc}$  est le cosinus directeur de la normale en  $s$  dirigée vers l'extérieur du méridien, c'est-à-dire

$$n_{sc} = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{t} = \pm 1$$

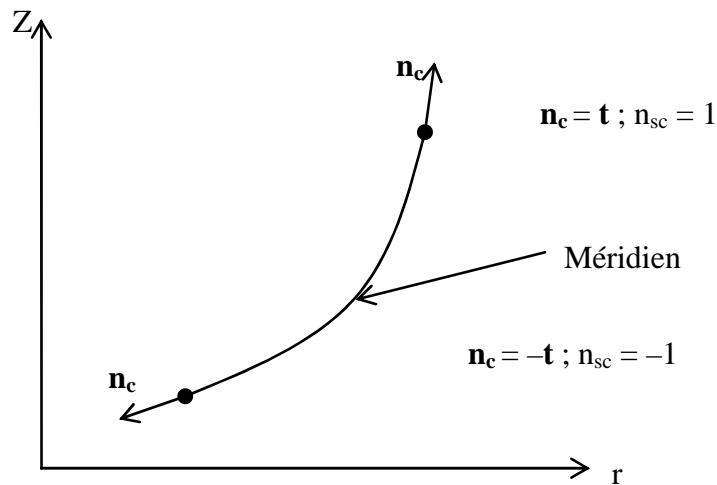


Figure (1.12) : cosinus directeur de la normale [2]

### 1.1.2.5.3 Loi de comportement :

#### Relations contraintes-déformations et déformation déplacement :

Nous considérons une coque constituée de matériau élastique subit de petites déformations et de petits déplacements, les relations contraintes-déformations sont établies avec l'hypothèse des contraintes planes ( $\sigma_{z'} = 0$ ) et avec l'hypothèse d'anisotropie plane, (pas de couplage entre ( $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta$ ) et  $\gamma_{sz'}$ )

On suppose également que les propriétés élastiques sont axisymétriques :

Pour un matériau isotrope :

$$[\sigma] = [H_1] [\varepsilon] \quad ; \quad [H_1] = \begin{bmatrix} [H] & \{0\} \\ \langle 0 \rangle & G \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.22)$$

G : module de cisaillement

E : module de yong

$\nu$  : coefficient de poisson

Dans le cadre des petits déplacements et des petites rotations, l'hypothèse des sections droites conduit au champ de déplacements réels d'un point quelconque q :

$$\mathbf{u}_q = \mathbf{u}_p + z \boldsymbol{\beta} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 0$$

avec pour un comportement axisymétrique ( $\nu = \beta_\theta = 0$ ) :

$$\mathbf{u}_q = (U(s) + z \beta(s) \cos\varphi) \mathbf{i}_r + (W(s) + z \beta(s) \sin\varphi) \mathbf{k} \quad (\text{coordonnées cylindrique})$$

$$\mathbf{u}_q = (u(s) + z \beta(s)) \mathbf{t} + w(s) \mathbf{n} \quad (\text{coordonnées curviligne})$$

les déformations réelles  $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta$  et  $\gamma_{sz'}$  sont définies en fonction des composantes de  $\mathbf{u}_p$  et de  $\beta$  comme  $\varepsilon_s^*, \varepsilon_\theta^*$  et  $\gamma_{sz'}^*$  en fonction de  $\mathbf{u}_p^*$  et de  $\beta^*$ . On a donc:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{\alpha_1} (e_s + z \chi_s) \quad (1.23)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{\alpha_2} (e_\theta + z \chi_\theta) \quad (1.24)$$

$$\gamma_s = \frac{1}{\alpha_1} \gamma \quad ; \quad \gamma = \beta + \psi \quad (1.25)$$

$$\text{Avec} \quad \langle \mathbf{e} \rangle = \langle e_s \quad e_\theta \rangle \quad ; \quad \langle \boldsymbol{\chi} \rangle = \langle \chi_s \quad \chi_\theta \rangle$$

$$e_s = \mathbf{u}_{p,s} \cdot \mathbf{t} = U_{,s} \cos\varphi + W_{,s} \sin\varphi = u_{,s} - \frac{1}{R_s} w \quad (1.26)$$

$$e_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{u}_{p,\theta} \cdot \mathbf{i}_\theta = \frac{1}{r} U = \frac{1}{r} (u \cos\varphi - w \sin\varphi) \quad (1.27)$$

$$\chi_s = \beta_{,s} \quad ; \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \beta \cos\varphi \quad (1.28)$$

$$\Psi = \mathbf{u}_{p,s} \cdot \mathbf{n} = -U_{,s} \sin\varphi + W_{,s} \cos\varphi = w_{,s} + \frac{1}{R_s} u \quad (1.29)$$

### Relation efforts resultants-déformations (membrane et flexion) :

on considérant les définitions des efforts résultants équation (1.18) et en utilisant les relations contraintes-déformations équations (1.22) et de (1.23) à (1.29) on obtient :

$$\begin{aligned} [N] &= [H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\} \\ [M] &= [H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\} \end{aligned} \quad (1.30)$$

### Rigidité de cisaillement transversal :

en utilisant les équations (1.18) (1.22) et de (1.23) à (1.29) on obtient :

$$T_s = H_c \gamma \quad ; \quad H_c = k \bar{H}_c \quad (1.31)$$

$$\bar{H}_c = \int_{-t}^t \frac{\alpha_1}{\alpha_2} G_{sz} dz$$

Pour un matériau homogène isotrope :

$$\bar{H}_c = G h \quad \text{et} \quad k = \frac{5}{6}$$

k : facteur de correction de cisaillement transversal

### Energie interne de déformation :

On admet, pour les matériaux élastiques qui constituent la coque, l'existence d'une énergie interne de déformation, celle-ci s'écrit en fonction des déformations généralisées :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}_p, \beta) &= 2\pi \int_s \left( \frac{1}{2} \langle e \rangle [H_m] \{e\} + \langle e \rangle [H_{mf}] \{\chi\} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \langle \chi \rangle [H_f] \{\chi\} + \frac{1}{2} \gamma H_c \gamma \right) r ds \end{aligned} \quad (1.32)$$

Où  $\{e\}, \{\chi\}, \gamma$  sont définis par équations de (1.23) à (1.30)

#### 1.1.2.5.4 Modèles mixtes en cisaillement transverse :

L'expression du principe des travaux virtuels équation (1.13) traduit sous forme intégrale l'équilibre de la coque soumise à des sollicitations agissant sur la surface moyenne A et sur les contours  $S_f$ , plusieurs expressions variationnelles mixtes peuvent être définies suivant la manière dont on tient compte des relations déformations-déplacements et des relations contraintes-déformations :

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \mathbf{u}_p^*, \beta^*, T_s^* ; \mathbf{u}_p = \bar{\mathbf{u}}_p \text{ et } \beta_p = \bar{\beta}_p \quad \text{sur } S_u \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= 2\pi \int_s \left( \langle e^* \rangle ([H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\}) \right. \\ &+ \left. \langle \chi^* \rangle ([H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}) + \gamma^* T_s + T_s^* (\gamma - H_c^{-1} T_s) \right) r ds \end{aligned}$$

L'énergie potentielle totale est :

$$\Pi = \Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}_p, \beta, T_s) - \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}_p, \beta)$$

L'expression de la fonctionnelle d'énergie  $\Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}_p, \beta, T_s)$  associée est:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}_p, \beta, T_s) = & 2 \pi \int_s \left( \frac{1}{2} \langle \mathbf{e} \rangle [\mathbf{H}_m] \{ \mathbf{e} \} + \langle \mathbf{e} \rangle [\mathbf{H}_{mf}] \{ \chi \} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \langle \chi \rangle [\mathbf{H}_f] \{ \chi \} + \gamma T_s - \frac{1}{2} T_s \mathbf{H}_c^{-1} T_s \right) r \, ds \end{aligned} \quad (1.34)$$

L'expression de la  $\Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}_p, \beta)$  est:

$$\Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}_p, \beta) = 2 \pi \int_s (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{f} + \beta m_s) r \, ds + 2 \pi (r \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{F} + r \beta \mathcal{M})_{\text{sf}} \quad (1.35)$$

### 1.1.2.6 Théorie de love Kirchoff :

La théorie des coques dites de kirchoff est basée sur l'hypothèse de conservation des normales : les points matériels situés sur une normale  $\mathbf{n}$  à la surface moyenne déformée. On admet ainsi que les déformations de cisaillement transversal sont négligées, cela conduit à relier la rotation de la normale  $\beta^*$  et la rotation de la surface moyenne  $A$ , notée  $\psi^*$ .

#### 1.1.2.6.1 Déplacements et déformations virtuelles :

$$\gamma^* = 0 \quad \text{et} \quad \gamma = 0$$

conduit à (équations de (1.3) à (1.11) et de (1.23) à (1.29)) :

$$\beta^* = -\psi^* = -\mathbf{u}_{p,s}^* \cdot \mathbf{n} \quad ; \quad \beta = -\psi = -\mathbf{u}_{p,s} \cdot \mathbf{n} \quad (1.36)$$

Les champs de déplacements réels et virtuels sont ainsi :

$$\mathbf{u}_q^* = \mathbf{u}_p^* - z \psi^* \mathbf{t} \quad ; \quad \mathbf{u}_q = \mathbf{u}_p - z \psi \mathbf{t} \quad (1.37)$$

Ces champs ne sont fonction que des composantes de  $\mathbf{u}_p^*$  et de  $\mathbf{u}_p$  (en faisant intervenir les dérivées premières par rapport à  $s$ ).

En description cylindrique :

$$\mathbf{u}_q = U_q \mathbf{i}_r + W_q \mathbf{k} \quad \psi = W_{,s} \cos\varphi - U_{,s} \sin\varphi \quad (1.38)$$

$$\text{avec : } U_q = U - z \psi \cos\varphi \quad ; \quad W_q = W - z \psi \sin\varphi$$

En description curviligne :

$$\mathbf{u}_q = u_q \mathbf{t} + w_q \mathbf{n} \quad ; \quad \psi = w_{,s} + \frac{1}{R_s} u \quad (1.39)$$

$$\text{avec : } u_q = u - z \psi \quad ; \quad w_q = w$$

Les déplacements virtuels sont du même type.

Pour les déformations, nous obtenons :

$$\epsilon_s = \frac{1}{\alpha_1} (e_s + z \chi_s) \quad (1.40)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{\alpha_2} (e_\theta + z \chi_\theta) \quad (1.41)$$

les déformation de membrane  $e_s$  et  $e_\theta$  sont définies par (en coordonnées cylindriques et curvilignes) :

$$e_s = \mathbf{u}_{p,s} \cdot \mathbf{t} = U_{,s} \cos\varphi + W_{,s} \sin\varphi = u_{,s} - \frac{1}{R_s} w$$

$$e_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{u}_{p,\theta} \cdot \mathbf{i}_\theta = \frac{1}{r} U = \frac{1}{r} (u \cos\varphi - w \sin\varphi)$$

les déformation de membrane virtuels  $e_s^*$  et  $e_\theta^*$  :

En coordonnées cylindrique :

$$e_s^* = U_{,s}^* \cos\varphi + W_{,s}^* \sin\varphi \quad ; \quad e_\theta^* = \frac{1}{r} U^* \quad (1.42)$$

En coordonnées curviligne :

$$e_s^* = u_{,s}^* - \frac{1}{R_s} w^* \quad ; \quad e_\theta^* = \frac{1}{r} (u^* \cos\varphi + w^* \sin\varphi) \quad (1.43)$$

les courbures sont :

$$\chi_s = -\psi_{,s} = -(\mathbf{u}_{p,s} \cdot \mathbf{n})_{,s} \quad ; \quad \chi_\theta = -\frac{1}{r} \psi \cos\varphi = -\frac{1}{r} \cos\varphi \mathbf{u}_{p,s} \cdot \mathbf{n}$$

En coordonnées cylindrique :

$$\chi_s = - \left( \cos\varphi \left( W_{,ss} - \frac{1}{R_s} U_{,s} \right) - \sin\varphi \left( U_{,ss} + \frac{1}{R_s} W_{,s} \right) \right) \quad (1.44)$$

$$\chi_\theta = - \frac{1}{r} \cos\varphi \left( W_{,s} \cos\varphi - U_{,s} \sin\varphi \right) \quad (1.45)$$

En coordonnées curviligne :

$$\chi_s = - \left( w_{,s} + \frac{1}{R_s} u \right)_{,s} = - \left( w_{,ss} + \frac{1}{R_s} u_{,s} - \frac{R_{s,s}}{R_s^2} u \right) \quad (1.46)$$

$$\chi_\theta = - \frac{1}{r} \cos\varphi \left( w_{,s} + \frac{1}{R_s} u_{,s} \right) \quad (1.47)$$

(idem pour  $\chi_s^*$  et  $\chi_\theta^*$  en fonction de  $U^*$ ,  $W^*$ ,  $u^*$  et  $w^*$ )

Remarque :

Les expressions de courbures  $\chi_s$  et  $\chi_\theta$  sont plus complexes que dans le modèle de Mindlin, en particulier, la présence des dérivées secondes de  $U$  et  $W$  dans la description cylindrique, mais seulement celle de  $w$  dans la description curviligne ; cependant, dans cette dernière, apparaît également la dérivée première du rayon  $R_s$ .

### 1.1.2.6.2 Principe des travaux virtuels :

Les différentes expressions du principe des travaux virtuels établies pour la théorie de Mindlin sont valables pour la théorie de kirchoff en tenant compte des relations cinématiques équations (1.37) à (1.47) nous écrivons:

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad (1.48)$$

$$\forall u_p^* \text{ avec } u_p^* = 0 \text{ et } \psi^* = 0 \text{ sur } S_u$$

$$W_{\text{int}} = 2\pi \int_s \left( \langle e^* \rangle [N] + \langle \chi^* \rangle [M] \right) r ds \quad (1.49)$$

$$\text{avec } \langle e^* \rangle = \langle e_s^* e_\theta^* \rangle \quad ; \quad \langle \chi^* \rangle = \langle \chi_s^* \chi_\theta^* \rangle$$

les déformations virtuelles de membrane sont définis par les équations (1.3) à (1.11), et les courbures virtuelles par les équations (1.44) à (1.47)

les efforts résultantes sont données par :

$$\langle N \rangle = \langle N_s N_\theta \rangle \quad ; \quad \langle M \rangle = \langle M_s M_\theta \rangle$$

$$N_s = \int_{-t}^t \sigma_s \alpha_2 dz \quad ; \quad M_s = \int_{-t}^t \sigma_s z \alpha_2 dz \quad ; \quad T_s = \int_{-t}^t \sigma_{sz} \alpha_2 dz \quad (1.50)$$

$$N_\theta = \int_{-t}^t \sigma_\theta \alpha_1 dz \quad ; \quad M_\theta = \int_{-t}^t \sigma_\theta z \alpha_1 dz \quad (1.51)$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{z}{R_s} \quad ; \quad \alpha_2 = 1 - \frac{z}{R_\theta}$$

pour les travaux virtuels externes nous retenons une forme générale due à des sollicitations surfaciques  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{m}_s$ , linéiques  $\mathbf{F}$  et  $\mathcal{M}$  et une charge concentré  $P_Z$  sur l'axe  $Z$  :

$$W_{\text{ext}} = 2\pi \int_s \left( \mathbf{u}_p^* \cdot \mathbf{f} - \psi^* m_s \right) r ds + 2\pi \left( r \mathbf{u}_p^* \cdot \mathbf{F} - r \psi^* \mathcal{M} \right)_{S_f} + w_p^* P_Z \quad (1.52)$$

En effectuant plusieurs intégrations par parties de l'équation (1.49) en obtient les équations d'équilibre suivant  $s$  et  $z$  ainsi que les conditions sur  $S_f$ .

Les équations correspondantes aux relations (1.19) à (1.21) en éliminant l'effort tranchant  $T_s$  (en utilisant EQ3 (1.21) c'est-à-dire :

$$T_s = M_{s,s} + \frac{\cos\varphi}{r} (M_s - M_\theta) \quad (1.53)$$



### 1.1.2.6.3 Loi de comportement :

La loi de comportement retenue ne concerne que  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$

$$[\sigma] = [H] [\varepsilon] \quad (1.54)$$

avec  $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_s \quad \sigma_\theta \rangle$  ;  $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_s \quad \varepsilon_\theta \rangle$

### 1.1.2.6.4 Modèles déplacement :

Les relations efforts résultantes-déformations sont données par :

$$[N] = [H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\} \quad (1.55)$$

$$[M] = [H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}$$

avec  $\langle e \rangle = \langle e_s \quad e_\theta \rangle$  ;  $\langle \chi \rangle = \langle \chi_s \quad \chi_\theta \rangle$

Le modèle déplacement correspond à l'équation (1.48) avec :

$$W_{\text{int}} = 2 \pi \int_s \langle e^* \rangle ([H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\}) \quad (1.56)$$

+  $\langle \chi^* \rangle ([H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}) r ds$

( $\chi_s$  et  $\chi_\theta$  sont donnés par les équations de (1.44) à (1.47))

L'énergie potentielle totale est :

$$\Pi(\mathbf{u}_p) = \Pi_{\text{int}} - \Pi_{\text{ext}}$$

Avec  $\forall \mathbf{u}_p = \bar{\mathbf{u}}_p$  et  $\psi = \bar{\psi}$  sur  $S_u$

$$\Pi_{\text{int}} = 2 \pi \int_s \left( \frac{1}{2} \langle e \rangle [H_m] \{e\} + \langle e \rangle [H_{mf}] \{\chi\} + \frac{1}{2} \langle \chi \rangle [H_f] \{\chi\} \right) r ds \quad (1.57)$$

$$\Pi_{\text{ext}} = 2 \pi \int_s (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{f} - \psi m_s) r ds + 2 \pi (r \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{F} - r \psi \mathcal{M})_{sf} + w_p P_Z \quad (1.58)$$

### 1.1.3 Solide de révolution :

L'étude des solides de révolution est un cas particulier de l'étude des solides tridimensionnels élastiques (théorie classique du mécanique du milieu continue).

L'expression du principe des travaux virtuels traduit sous forme intégrale l'équilibre de solide soumis à l'action des forces de volume  $f_v$  et de surface  $f_s$  :

$$W = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle [\sigma] dV - \int_V \langle u^* \rangle \{ f_v \} dV - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} dS = 0$$

$$\forall \{ u^* \} \text{ avec } \{ u^* \} = \{ 0 \} \text{ sur } S_u$$

Les déplacements virtuels :

$$\langle u^* \rangle = \langle u^* \ v^* \ w^* \rangle$$

Les forces volumiques et surfaciques :

$$\langle f_v \rangle = \langle f_x \ f_y \ f_z \rangle \quad \langle f_s \rangle = \langle f_{xx} \ f_{xy} \ f_{xz} \rangle$$

Les contraintes :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \rangle$$

Les déformations :

$$\langle \varepsilon^* \rangle = \langle u^*_{,x} \ v^*_{,y} \ w^*_{,z} \ u^*_{,y} + v^*_{,x} \ u^*_{,z} + w^*_{,x} \ v^*_{,z} + w^*_{,y} \rangle$$

Pour un problème axisymétrique (solide de révolution) les relations précédentes deviennent :

$$\langle u^* \rangle = \langle u^* \ w^* \rangle$$

$$\langle f_v \rangle = \langle f_r \ f_z \rangle \quad \langle f_s \rangle = \langle f_{sr} \ f_{sz} \rangle$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_r \ \sigma_\theta \ \sigma_z \ \sigma_{rz} \rangle$$

$$\langle \varepsilon^* \rangle = \langle u^*_{,r} \ \frac{u^*}{r} \ w^*_{,z} \ u^*_{,z} + w^*_{,r} \rangle$$

En introduisant dans l'expression du PTV :

La loi de comportement :

$$[\sigma] = [H] \{ \varepsilon \}$$

Les relations déformations-déplacements :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle u_{,r} \ \frac{u}{r} \ w_{,z} \ u_{,z} + w_{,r} \rangle$$

Les conditions aux limites sur les déplacements:

$$u = \bar{u} \quad ; \quad w = \bar{w} \quad \text{sur } S_u$$

on obtient l'expression du W sous la forme intégrale suivantes en fonction du  $\langle u^* \rangle$  et  $\langle u \rangle$  :

$$W(u^*, u) = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV - \int_V \langle u^* \rangle \{ f_v \} dV - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} dS = 0$$

$$\forall \{ u^* \} \text{ avec } \{ u^* \} = \{ 0 \} \text{ et } \{ u \} = \{ \bar{u} \} \text{ sur } S_u$$

Pour un corps de révolution l'intégrale sur le volume se transforme en intégrale sur la surface en remplaçant  $dV$  par  $2 \pi r dr dz$ .

Le problème se ramène à trouver  $\{ u \}$  satisfaisant cette dernière expression.

## 1.2 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE :

### 1.2.1 Coque de révolution :

Pour les coques axisymétriques on peut considérer qu'il y'a deux types d'éléments finis

- Les éléments finis basés sur la théorie de Love-Kirchoff, où l'effet du cisaillement transversal n'est pas pris en compte.
- Les éléments finis basés sur la théorie de Rissner-Mindlin où le cisaillement transversal est pris en considération dans la formulation.

Le premier type d'élément nécessite le respect de la continuité  $C^1$  aux interfaces, le deuxième type d'éléments est basé sur des interpolations indépendantes des déplacements et rotations, et ne nécessite que la continuité  $C^0$ , il est applicable aux coques minces si on utilise la méthode d'intégration réduite.

Comme pour tous les types d'élément finis il faut s'assurer avant tout calcul, que les éléments de types coque axisymétrique convergent vers la solution exacte lorsqu'on discrétise toujours plus finement, la solution exacte est celle résultant de la théorie sur base de laquelle l'élément finis est construit.

Pour garantir la convergence, l'élément fini doit pouvoir représenter les modes rigides et constants, de plus il doit être conforme, c'est-à-dire assurer la parfaite continuité des déplacements représentatifs aux frontières.

Dans les éléments finis de type coque, il est souvent très difficile de satisfaire ces exigences, la plus délicate est celle de conformité aux frontières, dans certaines circonstances il est tout simplement impossible d'y satisfaire, elle n'est toutefois pas impérative, les éléments non conformes assurent également la convergence vers la solution exacte s'ils satisfont au patch test, concrètement l'excès de rigidité est compensé par un certain assouplissement dû aux légères discontinuité aux frontières.

#### **Tests de convergence :**

Presque tous les éléments finis de coque sont non conformes, cependant la vérification de la convergence de l'élément peut se faire avec:

- Les tests impliquant un seul élément
- Les tests impliquant plusieurs éléments (patch test)

Dans le cas des coques à surface courbe, les tests sont plus difficiles à proposer que dans le cas des plaques ou des milieux continus, à cause de la représentation (discrétisation) de la géométrie.

Les tests impliquant un seul ou plusieurs éléments (patch tests) sont relatifs à la représentation des mouvements rigides ou modes rigides (état de déformations nulles) et de l'état de déformations constantes ou modes constantes.

**Etat de déformations nulles (mode rigides) :**

Un mode rigide (ou mouvement de corps rigides) est caractérisé par un champ de déplacement  $\mathbf{u}_p$  et de rotation  $\beta$  non nuls qui produit des déformations  $e_s$ ,  $e_\theta$ ,  $\chi_s$ ,  $\chi_\theta$  et  $\gamma$  nulles en tout points.

Il en découle que l'énergie interne de déformation est nulle pour un mode rigide, pour le cas d'une coque de révolution axisymétrique il existe un seul mode rigide, soit la translation suivant l'axe global Z, en description cylindrique :

$$U = 0 \quad , \quad W = a_1 \quad , \quad \beta = 0$$

$$\text{Et } e_s = e_\theta = \chi_s = \chi_\theta = \gamma = 0$$

Pour que les éléments finis soient performants, il est nécessaires que les approximations retenues pour la géométrie  $r(s)$  et  $Z(s)$  et pour les composantes de  $\mathbf{u}_p$  assurent une représentation exacte sinon très bonne de l'état de déformations nulles, si cet état est mal représenté, il y a présence de déformations et d'une énergie interne parasite

La représentation exacte des déformations nulles ne pose pas de problème si les composantes cylindriques U et W sont utilisées puisqu'il suffit que l'approximation de W contienne un terme constant, pour une formulation curviligne, si les approximations de la géométrie  $r(s)$ ,  $Z(s)$  et des déplacements  $u(s)$ ,  $w(s)$  sont identiques, le mode rigide est correctement représenté.

**Blocage en membrane (formulation curviligne) :**

Le comportement d'une coque résulte de l'interaction entre membrane, flexion et cisaillement :

$$\Pi_{\text{int}} = (h \Pi_m + h^3 \Pi_f + h \Pi_c) 2\pi$$

Les termes de membrane dépendent linéairement de l'épaisseur en h alors que la flexion est fonction cubique de h, il en découle qu'une mauvaise représentation des déformations de membrane peut introduire une influence numérique parasite des termes de membrane sur les termes de flexion ce qui définit le blocage en membrane (membrane locking).

Pour éviter le blocage en membrane il faut que les approximations de  $u(s)$  et de  $w(s)$  permettent d'obtenir des déformations  $e_s$  et  $e_\theta$  nulles sont modifier la représentation de la flexion, pour une coque de révolution il n'existe pas de mode dit inextensionnel, c'est-à-dire tel que  $e_s = e_\theta = \gamma = 0$  avec  $\chi_s$  et  $\chi_\theta \neq 0$ .

Cependant le problème de blocage en membrane se manifeste d'autant moins que les approximations  $u(s)$  et  $w(s)$  permettent de représenter  $e_s = u_{,s} - w/R_s$ , où  $R_s$  est le rayon de courbure réel de la coque sans restreindre l'approximation de  $w(s)$  (qui sert à la représentation des courbures  $\chi_s$  et  $\chi_\theta \neq 0$ ).

### **Etat de déformations constantes (mode constant) :**

Un mode constant est un champ de déplacement  $\mathbf{u}_p$  et  $\beta$  non nuls qui conduit à une valeur constante d'une ou de plusieurs déformations généralisées  $e_s$ ,  $e_\theta$ ,  $\chi_s$ ,  $\chi_\theta$  et  $\gamma$  les autres déformations étant nulles.

Il existe un seul mode constant pour une coque dont le méridien est quelconque et trois modes constants pour une coque tronconique.

#### **1.2.1.1 Eléments finis tronconiques :**

Plusieurs éléments ont été développés au début des années 1960, le premier élément fini formulé (en 1963) dans le domaine des types de structures coque été un élément tronconique pour coques de révolution basé sur la théorie de Love-Kirchoff références ([39] [40] [41] [42]).

L'élément de type Kirchoff le plus utilisé actuellement est l'élément CAXI\_K, pour ce type le champ de déplacement  $u$  est linéaire,  $w$  cubique.

En ce qui concerne les éléments basés sur la théorie de Rissner-Mindlin d'autres éléments que l'élément CAXI\_L( référence [2], qui sera présenter en détail dans le chapitre 2) ont été proposés est testés.

un élément simple est performant basé sur le modèle déplacement à été formulé en [23], les composantes  $u$  et  $\beta$  sont linéaires et  $w$  quadratique, l'intégration ce fait avec 3 points de Gauss pour la membrane, 2 points pour la flexion, 1 point pour le cisaillement transversal.

En s'inspirant de l'élément avec formulation mixte en cisaillement transversal pour les poutres droites, un élément avec  $u$  et  $w$  linéaires et  $\beta$  quadratique à été formulé et testé en [24] et [25], en utilisant une intégration uniforme avec deux points de Gauss, il implique une élimination locale de deux variables internes, mais il présente une performance meilleur que l'élément CAXI\_L.

En [26], un élément fini tronconique a été défini pour les coques multicouches et sandwich en utilisant l'hypothèse de Mindlin pour chaque couche et en assurant la continuité des déplacements aux interfaces, sur chaque couche le déplacement  $u(s)$  est linéaire ainsi que la rotation  $\beta(s)$  alors que  $w(s)$  est cubique de type Hermite.

### 1.2.1.2 Eléments courbés :

On peut distinguer aussi Les éléments courbés qui sont basés sur la description curviligne du champ de déplacement (composantes  $u$  et  $w$ ), de tels éléments utilisant la théorie de Kirchoff ont été formulés et évalués à partir des années 1965 références ([30] [31] [27] [32] [17] [33] [29]), les chercheurs emploient différentes approximations de la géométrie et de composantes  $u(s)$  et  $w(s)$ , un des problèmes majeurs avec les éléments courbes en composantes curviligne est celui qui est relatif à la représentation correcte du mouvement du corps rigide, des approximations assez élevées doivent être utilisées pour  $u(s)$  si on utilise le modèle déplacement pour éviter une rigidité parasite ou blocage en membrane.

Certains chercheurs ont utilisé des approximations de  $u(s)$  et  $w(s)$  permettant une représentation explicite des mouvements de corps rigide [27], une représentation implicite acceptable nécessite une approximation polynomiale au moins quadratique pour  $u(s)$  [28] [17] [29].

Dans la thèse [17] des approximations quadratique pour  $u(s)$  et cubique (Hermite) pour  $w(s)$  sont utilisées et conduisent à un élément très performant.

Un élément courbe avec  $u$  et  $w$  quadratiques et  $w$  du 5<sup>ème</sup> degré est présenté en [34], il permet d'avoir trois nœuds et quatre degrés de liberté par nœud ( $u$ ,  $w$  et  $w_{,s}$ ).

Des approximations cubiques de type Hermite pour  $u$  et  $w$  ont été utilisées en [35], alors que des fonctions cubiques de type B-Splines ont été retenues en [36], pour définir un élément courbé, où les variables nodales pour cet élément sont  $u$ ,  $w$  et les dérivées premières et secondes par rapport à  $s$ .

Un élément mixte de très haute précision (mais relativement compliqué) est présenté en [18] où  $u$  et  $w$  sont cubiques de type Hermite ainsi que les moments  $M_s$  et  $M_\theta$  (conservés comme variables nodales).

Des éléments courbes avec cisaillement transversal ont été formulés à partir des années 1980 références ([20] [35] [31] [16] [37] [23] [38]), Au risque de blocage en membrane s'ajoute le blocage en cisaillement transversal.

Un élément courbé avec trois nœuds est développé dans [16], il utilise une interpolation quadratique, cet élément est présenter pour le cas des plaques circulaires avec introduction d'un facteur de pénalisation quand le rapport  $R/h$  est de l'ordre de 100, l'élément donne aussi des bons résultats pour les coques cylindriques et sphériques.

Un élément courbe avec  $u$ ,  $w$ ,  $\beta$  quadratiques et  $R_s$  constant a été utilisé en [20].

D'autres éléments courbes avec  $R_s$  constant ont été formulés en [21] et [22] sans blocage en membrane et cisaillement transversal.

En [22] les chercheurs considèrent des approximations linéaires de  $u$ ,  $w$  et  $\beta$  mais ils utilisent des expressions modifiées (indépendantes) de  $e_s$ ,  $e_\theta$  et  $\gamma$ , un ou deux points de Gauss peuvent être utilisés, de bons résultats sont obtenus avec cet élément simple à six degrés de liberté.

Dans [21] un élément du même type mais avec  $u$ ,  $w$ ,  $\beta$  quadratiques à été proposé et testé, des approximations différentes de  $u$ ,  $w$ ,  $\beta$  sont cependant utilisées dans les expressions de  $e_s$ ,  $e_\theta$  et  $\gamma$ , pour définir  $e_s$  et  $e_\theta$  ils utilisent  $u$  quadratique et :

$$w = N_i w_i \text{ avec } (i=1,2,3)$$

$$N_1 = \left(\frac{1}{3} - \xi\right)/2 \quad N_2 = \frac{2}{3} \quad N_3 = \left(\frac{1}{3} + \xi\right)/2$$

Pour définir  $\gamma$  ils considèrent  $u$  et  $w$  quadratiques mais utilisent  $\beta = \overline{N}_i \beta_i$  (les fonctions  $\overline{N}_i$  sont obtenus par la méthode des moindres carrés), deux ou trois points de Gauss peuvent être utilisés, de bons résultats sont obtenus.

Dans la thèse [35] on trouve des éléments courbes où les composantes curvilignes  $u$ ,  $w$  ou cylindriques  $U$ ,  $W$  sont approchées (comme  $\beta$ ) par des polynômes quadratiques ou cubiques (de type Lagrange) et la géométrie est définie à partir d'une représentation cubique de type Hermite pour  $r(s)$  et  $Z(s)$ , des exemples de coques sphériques, tronconiques et cylindriques sont traités.

Des éléments avec des approximations du 5<sup>ème</sup> degré des variables  $u$ ,  $w$ ,  $\beta$  sont utilisés en [31] (pas de blocage en membrane ou cisaillement transversal), de nombreux exemples sont présentés.

Un élément pour l'étude statique et dynamique des coques axisymétrique épaisses est présenté en [15] l'élément est basé sur un principe de variation modifiée de Hellinger-Reissner, et présente des degrés de liberté nodales additionnels pour l'interpolation du champ de déplacement afin d'augmenter la performance numérique, Plusieurs exemples numériques confirment l'efficacité de cet élément qui donne des résultats très précis pour des analyses statiques et vibration.

Un nouveau élément à huit nœuds de type coque-solide baptisé CSH8gZ7 très performant et présenté en [19], valable pour l'analyse des structures isotropes et composites minces ou épaisses, Cet élément a été couplé à une méthode spécifique de surface de réponse pour l'optimisation des structures composites. La méthodologie proposée a montré une efficacité en terme de précision et capacité d'optimisation de structures composites multicouches.

### **1.2.2 Solide de révolution :**

Les éléments finis types solide de révolution sont généralement des éléments triangulaires, rectangulaires ou quadrilatères, vu sa simplicité et sa souplesse l'élément triangulaire T3AX avec une approximation linéaire du champ de déplacement et le plus répandu.

Dans les références [1] [9] et [12] on trouve que l'intégration exacte qui a été utilisée (matrice de rigidité  $[k]$  explicite) pour formuler l'élément T3AX,

En [10] l'élément T3AX a été formulé avec l'utilisation d'une intégration réduite à un seul point pour évaluer la matrice de rigidité  $[k]$

On peut distinguer aussi l'élément quadrilatéral Q4AX présenté en [10], le calcul de la matrice de rigidité  $[k]$  se fait de la même manière que l'élément T3AX avec des schémas d'intégration numérique de type Gauss.

Une étude numérique de comparaison des performances de différents éléments axisymétriques en [14] a montré que l'élément triangulaire T6 et l'élément quadrilatéral Q8 s'avèrent les plus performants pour les problèmes traités, l'élément T3AX reste très économique pour les situations sans flexion ou sans concentration des contraintes.



## **CHAPITRE 2**

### **FORMULATION**

## 2.1 Méthode des éléments finis :

### Introduction :

La mécanique des solides permet de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations, elle consiste à utiliser une approximations simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques, elle fait appel aux trois domaines suivants :

- la mécanique des solides pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

### 2.1.1 Formulation variationnelle (ou intégrale) :

La méthode des résidus pondérés qui, en utilisant des fonctions de pondération, permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale, l'intégration par parties fournit des formulations intégrales modifiées dites faible qui sont plus faciles à utiliser, En mécanique des solides, la notion de fonctionnelle est utilisée pour construire directement une formulation intégrale en utilisant le principe de stationnarité de la fonctionnelle d'énergie.

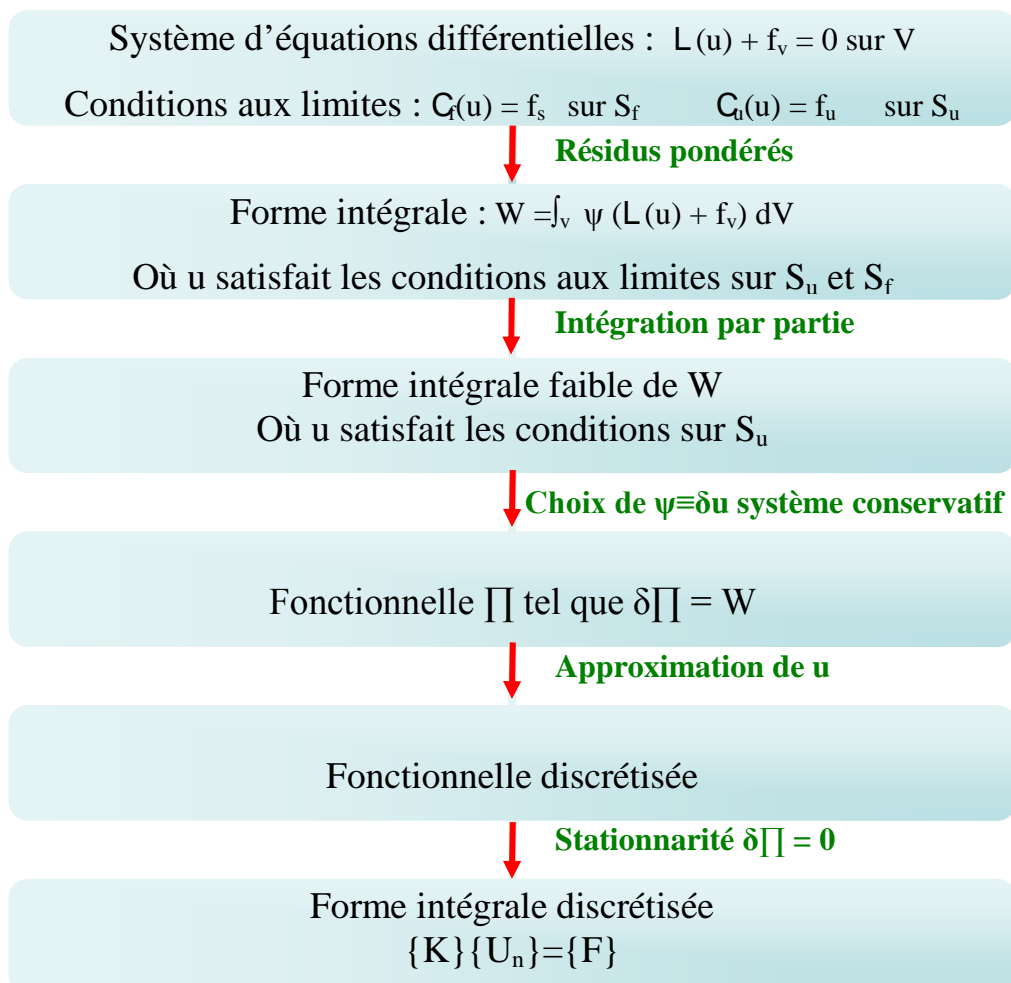


Figure (2 . 1) : Relations entre système d'équations différentielles, forme intégrale et fonctionnelles [6]

Le comportement d'un système continu est décrit par les équations aux dérivées partielles :

$$L(u) + f_v = 0 \quad \text{sur un domaine } V$$

$$C(u) = f_s \quad \text{sur la frontière } S \text{ de } V$$

Où:  $L$  et  $C$  sont des opérateurs différentiels caractérisant le système

$u$  fonctions inconnues (déplacement)

$f_v$  et  $f_s$  fonctions connues dites sollicitations (forces volumiques et surfaciques)

### 2.1.2 Modèle déplacement :

Un problème d'élasticité est décrit par un ensemble de relations aux dérivées partielles faisant intervenir les contraintes  $[\sigma]$ , les déformations  $[\epsilon]$  et les déplacements  $\{u\}$ , le modèle variationnelle en déplacement tient compte :

- Des équations d'équilibre sur  $V$  et aux limites sur  $S_f$  sous une forme variationnelle
- Des équations cinématiques sous forme explicite en chaque point de  $V$
- Des équations de comportement sous forme explicite en chaque point de  $V$
- Des équations aux limites sous forme explicite en chaque point de  $S_u$

La forme variationnelle (dans le cas des sollicitations statique uniquement) associé à l'équation d'équilibre obtenue par la méthode des résidus pondérés :

$$W = \int_V \psi R(u) dV = \int_V \psi (\text{div} \sigma + f_v) dV = 0$$

avec :  $\text{div} \sigma + f_v$  représente l'équation d'équilibre

on choisissons le champ de déplacement virtuel comme fonction de pondération  $\psi = \mathbf{u}^*$  ce qui conduit à une cas particulière de la méthode de Galerkin, nous obtenons la forme variationnelle :

$$W = \int_V \mathbf{u}^* (\text{div} \sigma + f_v) dV = 0$$

En intégrant par partie nous obtenons la forme faible de  $W$  :

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \mathbf{u}^*$$

Où:

$$W_{\text{int}} = \int_V \langle \epsilon^* \rangle [\sigma] dV \quad \text{avec } [\sigma] = [H] \{ \epsilon \}$$

$$W_{\text{ext}} = \int_V \langle \mathbf{u}^* \rangle \{ f_v \} dV + \int_{S_f} \langle \mathbf{u}^* \rangle \{ f_s \} dS = 0$$

Donc l'expression du principe des travaux virtuels s'écrit :

$$W(\mathbf{u}^*, u) = \int_V \langle \epsilon^* \rangle [H] \{ \epsilon \} dV - \int_V \langle \mathbf{u}^* \rangle \{ f_v \} dV - \int_{S_f} \langle \mathbf{u}^* \rangle \{ f_s \} dS = 0$$

$\forall \{ \mathbf{u}^* \}$  avec  $\{ \mathbf{u}^* \} = \{ 0 \}$  et  $\{ u \} = \{ \bar{u} \}$  sur  $S_u$

Un problème d'élasticité consiste ainsi à trouver  $\{ u \}$  satisfaisant cette dernière expression Cette forme variationnelle sert de base pour construire les modèles déplacement en éléments finis.

En admettant que les fonctions de pondérations  $\mathbf{u}^*$  et les fonctions solutions  $\mathbf{u}$  appartiennent au même espace de fonctions (mêmes bases de représentations) on obtient la formulation de type Galerkin conduisant aux modèles déplacement en éléments finis. Les déplacements virtuels  $\mathbf{u}^*$  sont alors définis comme les variations des déplacements réels :

$$\mathbf{u}^* = \delta(\mathbf{u}) = \delta\mathbf{u}$$

Où  $\delta(\mathbf{u})$  représente la variation de la fonction  $u$ , l'expression de type Galerkin est alors :

$$W(\mathbf{u}) = \int_V \langle \delta\boldsymbol{\varepsilon} \rangle [H] \{ \boldsymbol{\varepsilon} \} dV - \int_V \langle \delta\mathbf{u} \rangle \{ \mathbf{f}_v \} dV - \int_{S_f} \langle \delta\mathbf{u} \rangle \{ \mathbf{f}_s \} dS = 0$$

$$\forall \{ \delta\mathbf{u} \} \text{ avec } \{ \delta\mathbf{u} \} = \{ 0 \} \text{ et } \{ \mathbf{u} \} = \{ \bar{\mathbf{u}} \} \text{ sur } S_u$$

On peut définir un fonctionnelle  $\Pi$  appelée énergie potentielle totale telle que :

$$W = \delta(\Pi(\mathbf{u})) = 0$$

$$\text{avec } \Pi(\mathbf{u}) = \Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u})$$

Où  $\Pi_{\text{int}}$  est l'énergie interne de déformation :

$$\Pi_{\text{int}} = \int_V \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle [H] \{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \} dV$$

Et  $\Pi_{\text{ext}}$  est le potentiel des forces de volume et de surface :

$$\Pi_{\text{ext}} = \int_V \langle \mathbf{u} \rangle \{ \mathbf{f}_v \} dV - \int_{S_f} \langle \mathbf{u} \rangle \{ \mathbf{f}_s \} dS$$

La seconde variation de  $\Pi$  est donnée par :

$$\delta^2 \Pi(\mathbf{u}) = \int_V \langle \delta\boldsymbol{\varepsilon} \rangle [H] \{ \delta\boldsymbol{\varepsilon} \} dV > 0 \quad \forall \{ \delta\mathbf{u} \} \neq 0$$

La solution  $\{ \mathbf{u} \}$  du problème d'élasticité correspond ainsi à un minimum de l'énergie potentielle totale, le principe du minimum de l'énergie potentielle totale s'énonce ainsi :

Parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissible celui qui rend  $\Pi$  minimum correspond à la solution du problème.

### 2.1.3 Principes variationnels mixtes :

L'application des formulations dites mixtes ou hybrides permet dans de nombreuses situations comme les poutres, les plaques et les coques de définir des modèles éléments finis très performants (voire exacte pour les poutres droites ou courbes)

#### Principe variationnel général :

On peut définir un modèle général où tous les relations du problème d'élasticité sont représentées sous forme variationnelle, les fonctions  $\mathbf{u}^*$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^*$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  seront utilisées comme des fonctions de pondérations dans la formulation de type Galerkin, ces fonctions appartiennent au même espace que les fonctions solutions  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$

Nous pouvons construire une forme faible de  $W$  en contrainte ou en déplacement après intégration par partie du premier ou du seconde terme de l'intégrale.

#### Principes mixtes (type Hellinger – Reissner) :

L'expression du fonctionnelle est fonctions des deux variables indépendantes  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{u}$  :

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V -\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle [C] \{ \boldsymbol{\sigma} \} + \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \} dV - \int_V \langle \mathbf{u} \rangle \{ \mathbf{f}_v \} dV - \int_{S_f} \langle \mathbf{u} \rangle \{ \mathbf{f}_s \} dS$$

$$\text{avec } \{ \mathbf{u} \} = \{ \bar{\mathbf{u}} \} \text{ sur } S_u$$

en intégrant par partie on obtient la forme faible en déplacement.

**Démarche éléments finis (modèle déplacement):**

- Représentation du domaine de volume  $V$  par un ensemble de sous domaines de volume  $V^e$  dits éléments finis :

$$V = \Sigma V^e \quad W = \Sigma W^e$$

- Approximation du champ de déplacement  $u(x)$  sur l'élément:

$$u(x) = [p(x)] \{ a \} \quad (\text{espace réel})$$

$$u(\xi) = [p(\xi)] \{ a \} \quad (\text{espace paramétrique})$$

$p(x)$  : base polynomiale de l'approximation

$\{ a \}$  : variable généralisées de l'approximation

- Construction de la fonction d'interpolation  $N(x)$  :

$$\{ u(x) \} = [p(x)] [p_n]^{-1} \{ u_n \}$$

$$\{ u(x) \} = [N(x)] \{ u_n \}$$

$\{ u_n \}$  : variable nodales

- Approximation du champ de déformation  $\varepsilon$  sur l'élément :

En utilisant la relation déformation-déplacement on peut écrire les déformations sous la forme :

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ u_n \} = [\partial] [N(x)] \{ u_n \}$$

Avec :  $[\partial]$  matrice des dérivées partielles

- Construction de la matrice de rigidité élémentaire  $[k]$ :

En utilisant le PTV :

$$W^e = \int_{V^e} \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV - \int_{V^e} \langle u^* \rangle \{ f_v \} dV - \int_{S_r^e} \langle u^* \rangle \{ f_s \} dS = 0$$

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ u_n \} \quad \text{et} \quad \{ \varepsilon^* \} = [B] \{ u_n^* \}$$

$W^e$  s'écrit sous forme matricielle :

$$\langle u_n^* \rangle ([k] \{ u_n \}) - \langle u_n^* \rangle \{ f_n \} = 0$$

$$\text{Avec } [k] = \int_{V^e} [B]^T [H] [B] dV$$

$\{ f_n \}$  : vecteur des forces (équivalentes) élémentaires dues aux forces de volume et de surface

- Assemblage (construction de  $[K]$  et  $[F]$  :

$[K]$  matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires

$[F]$  vecteur globale des sollicitations obtenue par assemblage des vecteurs sollicitations élémentaires

- Résolution :

Le problème se ramène à résoudre le système linéaire :

$$[K] [U] - [F] = 0$$

## 2.2 Formulation des éléments :

### 2.2.1 Élément CAXI\_L (coque mince ou épaisse) :

C'est un élément tronconique à deux nœuds basé sur la théorie de Reissner-Mindlin présentée en [2], le modèle élément fini utilisé pour cet élément est le modèle mixte en cisaillement transverse

Les approximations de  $\mathbf{u}_p$  et de  $\beta$  sont linéaires en  $s$  et l'effort tranchant  $T_s$  est constant  
Cet élément peut être formulé en utilisant les composantes cylindriques ou curvilignes:

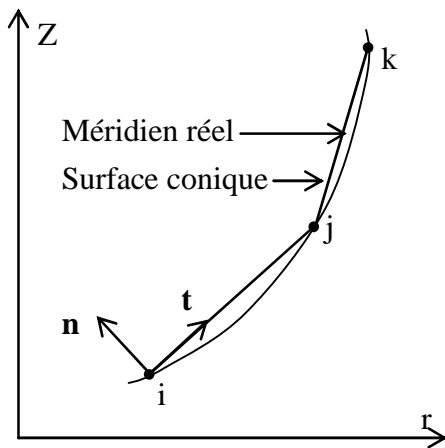
$$\begin{aligned}\mathbf{u}_p &= U(s) \mathbf{i}_r + W(s) \mathbf{k} && (\text{idem } \mathbf{u}_p^*) \\ \mathbf{u}_p &= u(s) \mathbf{t} + w(s) \mathbf{n} && (\text{idem } \mathbf{u}_p^*)\end{aligned}$$

L'ordre d'approximation des composantes  $(u,w)$  est le même que celui de  $(U,W)$ , il est préférable de présenter l'élément avec les composantes cylindriques qui sont utilisables directement sans transformation avant l'assemblage.

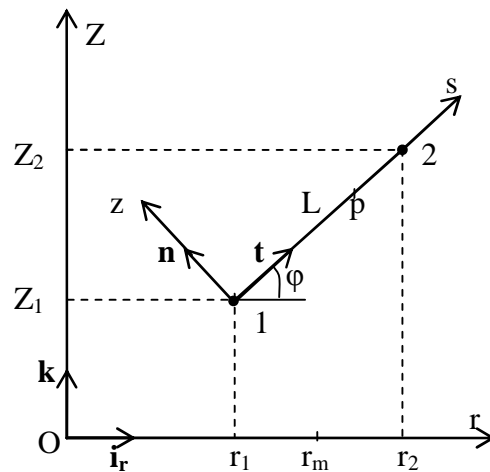
On suppose que la coque est discrétisée par une suite des troncs de cône définis par les nœuds extrémités sur la courbe méridienne.

Un point  $p$  de la surface moyenne est défini par :

$$\mathbf{x}_p = r(s) \mathbf{i}_r + Z(s) \mathbf{k}$$



a) discrétisation par facettes



b) géométrie d'un élément

Figure (2 . 2) : Élément tronconique (géométrie)

$$\begin{aligned}\text{avec } r(s) &= N_1 r_1 + N_2 r_2 && ; \quad Z(s) = N_1 Z_1 + N_2 Z_2 \\ N_1 &= 1 - \frac{s}{L} && ; \quad N_2 = \frac{s}{L} && ; \quad L^2 = r_{21}^2 + Z_{21}^2 && ; \quad 0 \leq s \leq L && (2 . 1) \\ r_{21} &= r_2 - r_1 && ; \quad Z_{21} = Z_2 - Z_1 && ; \quad r_m = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)\end{aligned}$$

on a ainsi (équation (1 , 2)) :

$$\mathbf{t} = \cos\varphi \mathbf{i}_r + \sin\varphi \mathbf{k} \qquad \mathbf{n} = -\sin\varphi \mathbf{i}_r + \cos\varphi \mathbf{k}$$

$$\langle \mathbf{t} \rangle = \langle C \quad S \rangle \quad \langle \mathbf{n} \rangle = \langle -S \quad C \rangle \quad (2.2)$$

avec :  $S = \sin\varphi$  ;  $C = \cos\varphi$

L'angle  $\varphi$  est constant équation (1.5) :

$$\varphi_{,s} = \frac{1}{R_s} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_\theta} = \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{Z_{21}}{Lr(s)} = \frac{S}{r}$$

un point quelconque q et défini par :

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{x}_p + z \mathbf{n} \quad \text{avec} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

### 2.2.1.1 Approximation des déplacements et déformations :

Considérons les expressions de (1.23) à (1.29) avec des approximations linéaires des composantes cylindriques U et W et de la rotation  $\beta$  figure (2.3) (idem pour  $U^*$ ,  $W^*$ ,  $\beta^*$ ) :

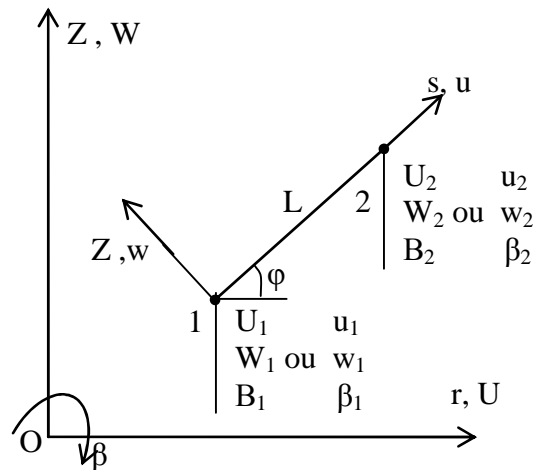


Figure (2.3) : Elément tronconique linéaire CAXI\_L

$$\begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_p = U \mathbf{i}_r + W \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{u}_q = \mathbf{u}_p + z \beta \mathbf{t}$$

$$U = N_1 U_1 + N_2 U_2 \quad ; \quad W = N_1 W_1 + N_2 W_2 \quad ; \quad \beta = N_1 \beta_1 + N_2 \beta_2 \quad (2.3)$$

Les déformations de membrane sont:

$$\{\mathbf{e}\} = \begin{Bmatrix} e_s \\ e_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C U_{,s} + S W_{,s} \\ U/r \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_m] [u_n]$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{C}{L} & -\frac{S}{L} & 0 & \frac{C}{L} & \frac{S}{L} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$\langle u_n \rangle = \langle U_1 \ W_1 \ \beta_1 \ U_2 \ W_2 \ \beta_2 \rangle$  (déplacements nodaux)

Les courbures sont:

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{,s} \\ (C/r) \beta \end{Bmatrix} = [B_f] \{u_n\}$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{C}{r} N_1 & 0 & 0 & \frac{C}{r} N_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Les déformations de cisaillement transverse sont:

$$\gamma = \beta + \psi = \beta - S U_{,s} + C W_{,s} = [B_c] \{u_n\}$$

$$\langle B_c \rangle = \left\langle \frac{S}{L} \quad -\frac{C}{L} \quad N_1 \quad -\frac{S}{L} \quad \frac{C}{L} \quad N_2 \right\rangle \quad (2.6)$$

### 2.2.1.2 Matrice de rigidité :

Considérons les expressions (1.33) et (1.34), pour un élément nous avons :

$$W_{int}^e = 2\pi \int_0^L \left( \langle e^* \rangle ([H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\}) + \langle \chi^* \rangle ([H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}) + \gamma^* T_s + T_s^* (\gamma - H_c^{-1} T_s) \right) r ds$$

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \ T_s^* \rangle \begin{bmatrix} [k_{mf}] & \{k_{m/T}\} \\ \langle k_{m/T} \rangle & -k_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ T_s \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$[k_{mf}] = 2\pi \int_0^L \left( [B_m]^T ([H_m] [B_m] + [H_{mf}] [B_f]) \right.$$

$$\left. + [B_f]^T ([H_{mf}] [B_m] + [H_f] [B_f]) \right) r ds$$

$$\{k_{m/T}\} = 2\pi \int_0^L [B_c] r ds$$

$$k_T = 2\pi \int_0^L \frac{r}{H_c} ds$$

Les matrices  $[k_{mf}]$ ,  $\{k_{m/T}\}$ ,  $k_T$  peuvent être évaluées numériquement avec un seul point d'intégration ( $s = L/2$ ,  $\omega = L$ ) (intégration réduite)

$$[k_{mf}] = 2\pi \left( [B_m]^T ([H_m] [B_m] + [H_{mf}] [B_f]) \right.$$

$$\left. + [B_f]^T ([H_{mf}] [B_m] + [H_f] [B_f]) \right) r_m L \quad (2.9)$$

$$\{k_{m/T}\} = 2\pi [B_c] r_m L$$



$$k_T = 2 \pi \frac{r_m}{H_c} L$$

Où les termes r et s des matrices  $[B_m]$ ,  $[B_f]$ ,  $[B_c]$  sont remplacés par  $r_m = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  et  $L/2$

La variable  $T_s$  est une variable locale qui est éliminée en appliquant la relation :

$$T_s^* (\langle k_{m/T} \rangle \{u_n\} - k_T T_s) = 0 \quad \forall T_s^*$$

$$\text{d'où} \quad T_s = \frac{1}{k_T} \langle k_{m/T} \rangle \{u_n\} = H_c \langle B_c \rangle \{u_n\} \quad (2.10)$$

le travail interne  $W_{int}^e$  :

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [k] \{u_n\} \quad \text{avec} \quad [k] = [k_{mf}] + [k_c] \quad (2.11a)$$

avec :

$$[k_{mf}] = 2 \pi ([B_m]^T ([H_m] [B_m] + [H_{mf}] [B_f]) + [B_f]^T ([H_{mf}] [B_m] + [H_f] [B_f])) r_m L$$

$$[k_c] = \{k_{m/T}\} \frac{1}{k_T} \langle k_{m/T} \rangle = 2 \pi \{B_c\} H_c r_m L \langle B_c \rangle \quad (2.11b)$$

Avec :

$[k_c]$  : matrice de rigidité de CT

$[k_{mf}]$  : matrice de rigidité membrane flexion

Pour un matériau isotrope :

$$H_c = k G h$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$k = \frac{5}{6} \quad (\text{facteur de correction de cisaillement transverse})$$

$$[H_m] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} ; \quad [H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} ; \quad [H_{mf}] = \frac{Eh^3 S}{12(1-\nu^2)r_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### 2.2.1.3 Charges équivalentes :

Considérons l'équation (1.14)

$$W_{ext}^e = 2 \pi \int_0^L (U^* f_r + W^* f_z + \beta^* m_s) r ds$$

En utilisant l'équation (2.3) le vecteur charges équivalentes  $\{f_n\}$  :

$$W_{ext}^e = \langle u_n^* \rangle \{f_n\}$$

$$\langle f_n \rangle = 2 \pi \int_0^L \langle N_1 f_r \quad N_1 f_z \quad N_1 m_s \quad N_2 f_r \quad N_2 f_z \quad N_2 m_s \rangle r ds$$

$f_r$ ,  $f_z$ ,  $m_s$  sont des sollicitations surfacique données par :

$$\mathbf{f} = \int_{-t}^t \mathbf{f}_v \alpha_2 dz \quad ; \quad m_s = \int_{-t}^t \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{t} \alpha_2 dz$$

$\mathbf{f}_v$  sollicitations volumiques

dans le cas des forces de gravité  $\mathbf{f}_v$  et le vecteur charges équivalentes avec  $\rho g$  constant :

$$f_r = 0 \quad ; \quad f_z = -\rho g h \quad ; \quad m_s = \rho g \frac{S^2 h^3}{12r}$$

En cas du présence d'une pression P

$$f_r = -S P \left(1 - \frac{Sh}{2r}\right) \quad ; \quad f_z = C P \left(1 - \frac{Sh}{2r}\right) \quad ; \quad m_s = 0$$

si P est constant et  $\frac{Sh}{2r} \ll 1$  on obtient :

$$\langle f_n \rangle = 2 \pi P \frac{L}{6} \langle -S a_1 \quad C a_1 \quad 0 \quad -S a_2 \quad C a_2 \quad 0 \rangle$$

$$a_1 = 2r_1 + r_2 \quad ; \quad a_2 = 2r_2 + r_1$$

dans le cas d'une charge concentré  $P_z$  agissant en un point  $r = 0$  :

$$\langle f_n \rangle = 2 \pi P \frac{L}{6} \langle 0 \quad P_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

#### 2.2.1.4 Efforts résultants et contraintes :

Lorsque les variables nodales  $\{u_n\}$  sont connues équation (2 . 4), les déformations de membrane et les courbures sont évaluées en  $s = L/2$  équations (2 . 4) et (2 . 5) :

$$\{e\} = [B_m]\{u_n\} \quad ; \quad \{\chi\} = [B_f]\{u_n\}$$

Les efforts résultants [N] et [M] (2 . 4)

$$[N] = [H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\}$$

$$[M] = [H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}$$

$\{e\}$  ,  $\{\chi\}$  , [N] et [M] seront évalués au milieu de l'élément ( $s = L/2$ )

Les contraintes  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$  sont obtenues par équation (1 . 22) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix}$$

$\epsilon_s$  et  $\epsilon_\theta$  sont données par les équations (1 . 23) et (1 . 24)

## 2.2.2 Elément CAXI\_K (coque mince) :

C'est un élément tronconique basé sur la théorie de Kirchoff [2], le modèle utilisé pour cet élément est le modèle déplacement, les composantes curvilignes  $u(s)$  et  $w(s)$  sont définies par des approximations linéaires et cubiques respectivement.

La géométrie est définie comme l'élément CAXI\_L.

### 2.2.2.1 Approximation des déplacements et déformations :

L'élément est formulé en utilisant les composantes curvilignes  $u$  et  $w$  de  $\mathbf{u}_p$  :

$$\mathbf{u}_p = u(s) \mathbf{t} + w(s) \mathbf{n}$$

$u(s)$  est linéaire (2 variables) et  $w(s)$  est cubique en  $s$ , de type Hermite (quatre variable) figure (2 . 4)

approximation de  $u(\xi)$   $-1 \leq \xi \leq 1$ :

$$u(\xi) = N_1^L u_1 + N_2^L u_2 \quad ; \quad N_1^L = \frac{1-\xi}{2} \quad ; \quad N_2^L = \frac{1+\xi}{2}$$

$$u_{,\xi} = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \quad ; \quad u_{,s} = u_{,\xi} \xi_{,s} = \frac{2}{L} u_{,\xi} \quad (2 . 12)$$

approximation de  $w(\xi)$  :

$$w = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \mathbf{w}_n \} \quad ; \quad \langle \mathbf{w}_n \rangle = \langle w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \rangle$$

$\theta = -w_{,s}$  est du même type que  $\beta$  dans l'élément CAXI\_L

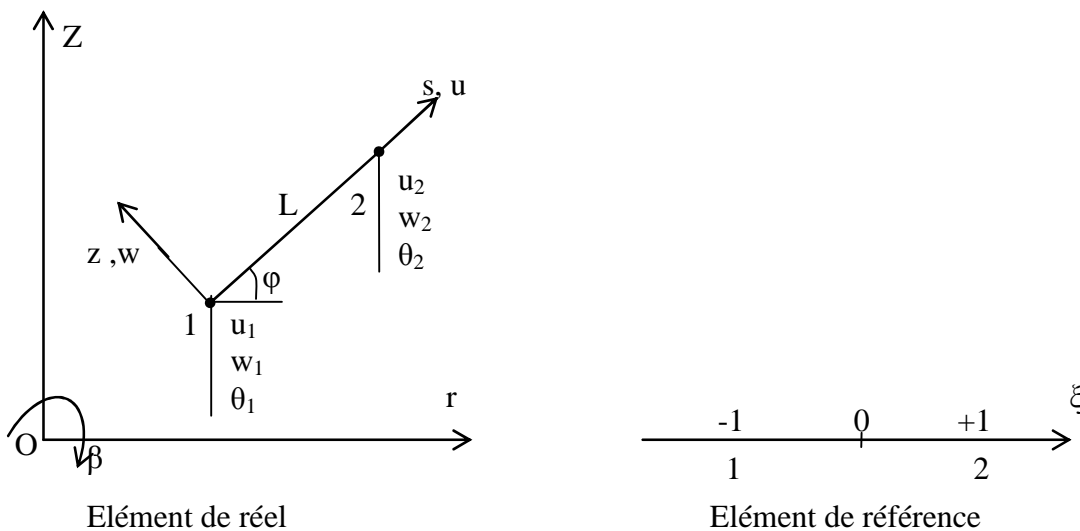


Figure (2 . 4) : Elément tronconique linéaire CAXI\_K

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1-\xi)^2 (2+\xi) \quad ; \quad N_2 = -\frac{L}{8} (1-\xi^2) (1-\xi) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1+\xi)^2 (2-\xi) \quad ; \quad N_4 = -\frac{L}{8} (-1+\xi^2) (1+\xi) \end{aligned} \quad (2 . 13)$$

$$\begin{aligned}
N_{1,s} &= \frac{3}{2L} (-1+\xi^2) & ; & & N_{2,s} &= -\frac{1}{4} (-1-2\xi+3\xi^2) \\
N_{3,s} &= \frac{3}{2L} (1-\xi^2) & ; & & N_{4,s} &= -\frac{1}{4} (-1+2\xi+3\xi^2) \\
N_{1,ss} &= \frac{6}{L^2} \xi & ; & & N_{2,ss} &= -\frac{1}{L} (-1+3\xi) \\
N_{3,ss} &= -\frac{6}{L^2} \xi & ; & & N_{4,ss} &= -\frac{1}{L} (-1+3\xi)
\end{aligned}$$

Déformation de membrane équations de (1 . 23) à (1 . 29) :

$$\{\mathbf{e}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,s} \\ 1/r (\mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{w}) \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_m] \{\mathbf{u}_n\}_{loc} \quad (2 . 14)$$

$$[\mathbf{B}_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} N_1^L C & -\frac{1}{r} N_1 S & -\frac{1}{r} N_2 S & \frac{1}{r} N_2^L C & -\frac{1}{r} N_3 S & -\frac{1}{r} N_4 S \end{bmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u}_n \rangle_{loc} = \langle u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \rangle \quad (\text{déplacements nodaux}) \quad (2 . 15)$$

Courbure de Kirchoff équations (1 . 46) et (1 . 47) avec  $\frac{1}{R_s}$

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{,ss} \\ -(C/r) w_{,s} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_f] \{\mathbf{u}_n\}_{loc} \quad (2 . 16)$$

$$[\mathbf{B}_f] = \begin{bmatrix} 0 & -N_{1,ss} & -N_{2,ss} & 0 & -N_{3,ss} & -N_{4,ss} \\ 0 & -\frac{C}{r} N_{1,s} & -\frac{C}{r} N_{2,s} & 0 & -\frac{C}{r} N_{3,s} & -\frac{C}{r} N_{4,s} \end{bmatrix}$$

### 2.2.2.2 Matrice de rigidité :

Les expressions (1 . 48) et (1 . 49) , et de (2 . 14) à (2 . 16) permettent de définir la matrice de rigidité d'un élément :

$$\begin{aligned}
W_{int}^e &= 2 \pi \int_0^L (\langle \mathbf{e}^* \rangle ([\mathbf{H}_m] \{\mathbf{e}\} + [\mathbf{H}_{mf}] \{\chi\}) \\
&\quad + \langle \chi^* \rangle ([\mathbf{H}_{mf}] \{\mathbf{e}\} + [\mathbf{H}_f] \{\chi\})) r ds \\
W_{int}^e &= \langle \mathbf{u}_n^* \rangle_{loc} [\mathbf{k}]_{loc} \{\mathbf{u}_n\}_{loc} \quad (2 . 17)
\end{aligned}$$

$\langle \mathbf{u}_n^* \rangle_{loc}$  est défini comme  $\langle \mathbf{u}_n \rangle_{loc}$  équation (2 . 15)

$$[k]_{loc} = 2 \pi \int_0^L [k_\xi] ds = 2 \pi \int_{-1}^1 [k_\xi] \frac{L}{2} d\xi \quad (2.18)$$

$$\text{avec } [k_\xi] = ([B_m]^T ([H_m] [B_m] + [H_{mf}] [B_f]) \\ + [B_f]^T ([H_{mf}] [B_m] + [H_f] [B_f])) r$$

Les matrices  $[B_m]$  et  $[B_f]$  sont données par (2.14) et (2.16) les matrices  $[H_m]$ ,  $[H_{mf}]$  et  $[H_f]$  sont définies par (2.11b)

Les termes à intégrer équation (2.18) sont des fractions rationnelles en  $\xi$  avec aux dénominateurs des termes linéaires en  $\xi$  (provenant de  $r(\xi)$ ) et aux numérateurs des termes constants à cubiques en  $\xi$  (provenant de  $[B_m]$ ), l'intégration numérique selon la méthode de Gauss intègre exactement un polynôme d'ordre  $m$  avec un nombre de points d'intégrations  $r$  tel que :  $m \leq 2r - 1$ , donc on peut utiliser un schéma d'intégration numérique à deux points de Gauss :

$$[k]_{loc} = 2 \pi \sum_{i=1}^2 [k_\xi(\xi=\xi_i)] \omega_i \frac{L}{2}$$

$$\text{avec } \xi_i = \pm 1/\sqrt{3} \text{ et } \omega_i = 1$$

après évaluation de  $[k]_{loc}$  il est nécessaire de transformer les variables  $\{u_n\}_{loc}$  définies dans le repère local de l'élément en fonction des variables nodales du repère cylindrique, avant de procéder à l'assemblage, la matrice de transformation  $[T]$  est donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [t] = \begin{bmatrix} [t]^T & 0 \\ [0] & [t] \end{bmatrix}$$

$$[Q] = [t \quad \mathbf{n}] = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$$

Donc on peut écrire:

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [k] \{u_n\}$$

$$\text{avec } \langle u_n \rangle = \langle U_1 \ W_1 \ \theta_1 \ U_2 \ W_2 \ \theta_2 \rangle$$

$$\text{et } [k] = [T]^T [k]_{loc} [T]$$

### 2.2.2.3 Charges équivalentes :

Pour de nombreux types de sollicitations volumique et surfacique le vecteur des charges équivalentes est défini à partir de l'équation (1.15)

$$W_{ext}^e = 2 \pi \int_0^L (u^* f_s + w^* f_z - w_{,s}^* m_s) r ds$$

$$\begin{Bmatrix} f_s \\ f_z \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix}$$

les composantes  $f_r$ ,  $f_z$ ,  $m_s$  sont présentées dans la partie (2.2.1.3) pour plusieurs types de sollicitations (poids propre, pression)

le vecteur des charges équivalentes est ainsi :

$$W_{\text{ext}}^e = \langle \mathbf{u}_n^* \rangle \{f_n\} \quad \text{avec } \{f_n\} = 2\pi \int_{-1}^1 \{f_\xi\} \frac{L}{2} d\xi$$

$$\{f_\xi\} = \{N^L\} f_s + \{N^C\} f_z - \{N^C_{,s}\} m_s$$

avec :

$$\langle N^L \rangle = \langle N_1^L \ 0 \ 0 \ N_2^L \ 0 \ 0 \rangle$$

$$\langle N^C \rangle = \langle 0 \ N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4 \rangle$$

$$\langle N^C_{,s} \rangle = \langle 0 \ N_{1,s} \ N_{2,s} \ 0 \ N_{3,s} \ N_{4,s} \rangle$$

#### 2.2.2.4 Efforts résultants et contraintes :

Les déformations  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_\theta$ , les efforts résultants  $[N]$ ,  $[M]$  et les contraintes  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$  se calculent par les relations :

$$[N] = [H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\}$$

$$[M] = [H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}$$

$$\{e\} = [B_m] \{u_n\} \quad ; \quad \{\chi\} = [B_f] \{u_n\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix}$$

dans cet élément les déformations et contraintes peuvent être évaluées en plusieurs points (point d'intégration, nœuds sommets)

### 2.2.3 Élément triangulaire pour le cas des solides de révolution :

Les solides à symétrie axiale et les corps de révolution peuvent être modélisés par des éléments finis de révolution, chaque élément consiste en un anneau solide.

L'élément qu'on va présenter, c'est un élément triangulaire iso paramétrique (3 nœuds) figure (2 . 5)

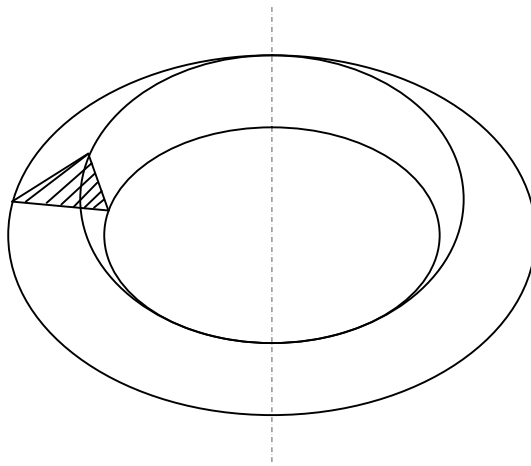


Figure (2 . 5) : Élément à symétrie axiale [1]

#### 2.2.3.1 Approximation des déplacements et déformations :

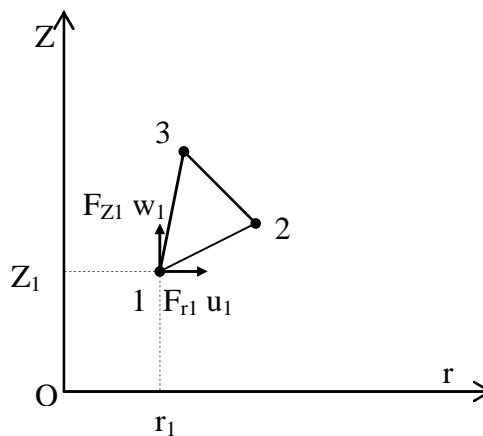


Figure (2 . 6) : Élément triangulaire pour solide à symétrie axiale [1]

Pour cet élément [2] le champ de déplacement comporte uniquement les déplacements dans le plan ( $r$   $O$   $z$ ), ce qui présente un état membranaire ( $u$  radial,  $w$  axial)

L'approximation sera établie par des polynômes linéaires pour  $u$  et  $w$  :

$$u = a_1 + a_2 r + a_3 z$$

$$w = a_4 + a_5 r + a_6 z$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\{u(r,z)\} = [P(r,z)] \{a\}$$

En remplaçant les coordonnées généralisés par les coordonnées nodaux on obtient :

$$\{u_n\} = [P_n] \{a\} \text{ avec } \langle u_n \rangle = \langle u_1 \ w_1 \ u_2 \ w_2 \ u_3 \ w_3 \rangle$$

la fonction d'interpolation est défini par :

$$[N(r,z)] = [p(r,z)] [p_n]^{-1}$$

Finalement les déplacements généralisés s'écrit:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3$$

ou sous forme matricielle:

$$\{u(r,z)\} = [N(r,z)] \{u_n\}$$

La relation déformation-déplacement est donnée par :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle u_{,r} \quad \frac{u}{r} \quad w_{,z} \quad u_{,z} + w_{,r} \rangle = \langle \varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \rangle$$

En remplaçant les déplacements généralisés par leur expressions on trouve :

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ u_n \}$$

avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix}$$

### 2.2.3.2 Matrice de rigidité :

L'expression du PTV est donnée par (paragraphe 1.2.3) :

$$W = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV - \int_V \langle u^* \rangle \{ f_v \} dV - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} dS = 0$$

Pour un corps de révolution  $dV = 2 \pi r dr dz$  ce qui donne pour un élément :

$$W^e = \langle u_n^* \rangle ([k] \{ u_n \} - \{ f_n \})$$

$$[k] = 2 \pi \int \int [B]^T [H] [B] r dr dz$$

Pour calculé cette intégrale on peut utilisé une méthode simple qui consiste à évalué la matrice [B] pour un point centrale de l'élément défini par les coordonnées  $(\bar{r}, \bar{z})$

$$\text{avec : } \bar{r} = (r_1 + r_2 + r_3)/3 \quad ; \quad \bar{z} = (z_1 + z_2 + z_3)/3$$



la matrice de rigidité devient alors :

$$[k] = 2 \pi [B]^T [H] [B] \bar{r} \Delta$$

où  $\Delta$  représente l'aire du triangle :

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

### 2.2.3.3 Charges équivalentes :

Les vecteurs forces de volume et de surface sont donnés par :

$$\langle f_v \rangle = \langle f_r \quad f_z \rangle \quad (\text{définies par unité de surface})$$

$$\langle f_s \rangle = \langle f_{sr} \quad f_{sz} \rangle \quad (\text{définies par unité de longueur})$$

Le vecteur sollicitation (appliqué aux nœuds) dû à des forces de volume :

$$\langle f_{nv} \rangle = \frac{Ah}{3} \langle f_r \quad f_z \quad f_r \quad f_z \quad f_r \quad f_z \rangle \quad \text{avec } f_r \text{ et } f_z \text{ constants}$$

Où : h est l'épaisseur dans la direction  $\theta$

A surface du triangle

Le vecteur charges équivalentes sur un côté du triangle appartenant à la frontière  $S_f$  :

$$\langle f_{ns} \rangle = \frac{L}{2} \langle f_{sr} \quad f_{sz} \quad f_{sr} \quad f_{sz} \rangle$$

avec  $f_{sr}$  et  $f_{sz}$  constants

### 2.2.3.4 Contraintes :

Les composantes des contraintes sont :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \sigma_{rz} \rangle$$

de la relation contrainte -déformation :

$$[\sigma] = [H] \{ \varepsilon \} \quad \text{avec } \{ \varepsilon \} = [B] \{ u_n \}$$

Les contraintes seront calculé par :

$$[\sigma] = [H] [B] \{ u_n \}$$

## **CHAPITRE 3**

### **MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE**

### 3.1 Introduction :

Tous programmes basés sur la méthode des éléments finis inclut quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (module d'élasticité...etc), les sollicitations et conditions aux limites.
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (contraintes, réactions...etc)

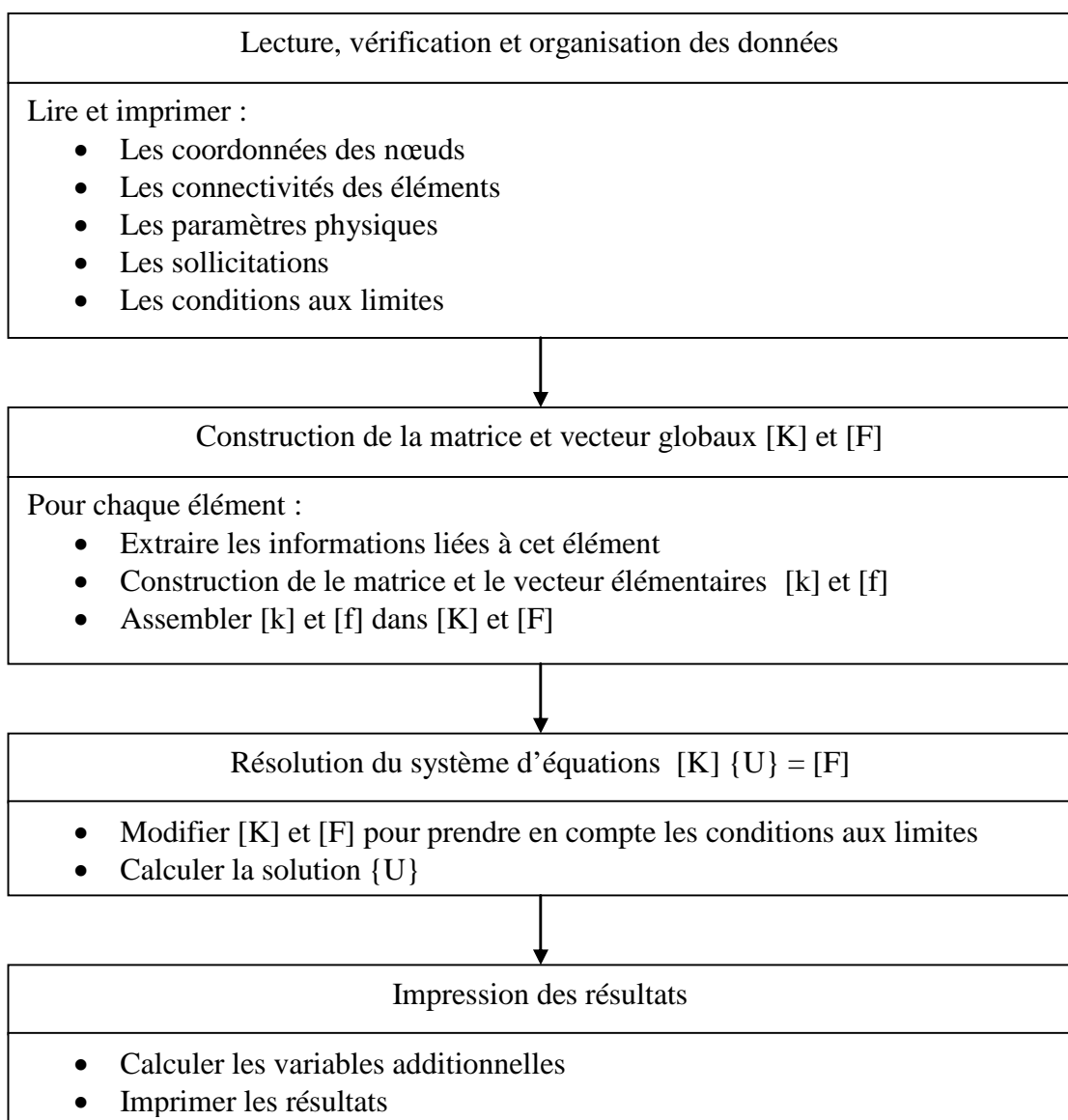


Figure (3 . 1) : blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis [6]

### 3.2 Présentation des programmes Axisym :

Les programmes qu'on a élaborés (AxisymCAXI\_L, AxisymCAXI\_K, AxisymT3AX) relatifs aux éléments finis CAXI\_L, CAXI\_K et T3AX présentés dans le chapitre 2 sont écrits sous langage Matlab, chaque programme est constitué d'une fonction (function) principale Axisym qui remplace le programme principal en Fortran et un ensemble des fonctions (functions) secondaires (qui jouent le même rôle des subroutines en Fortran).

#### 3.2.1 Algorithme générale :

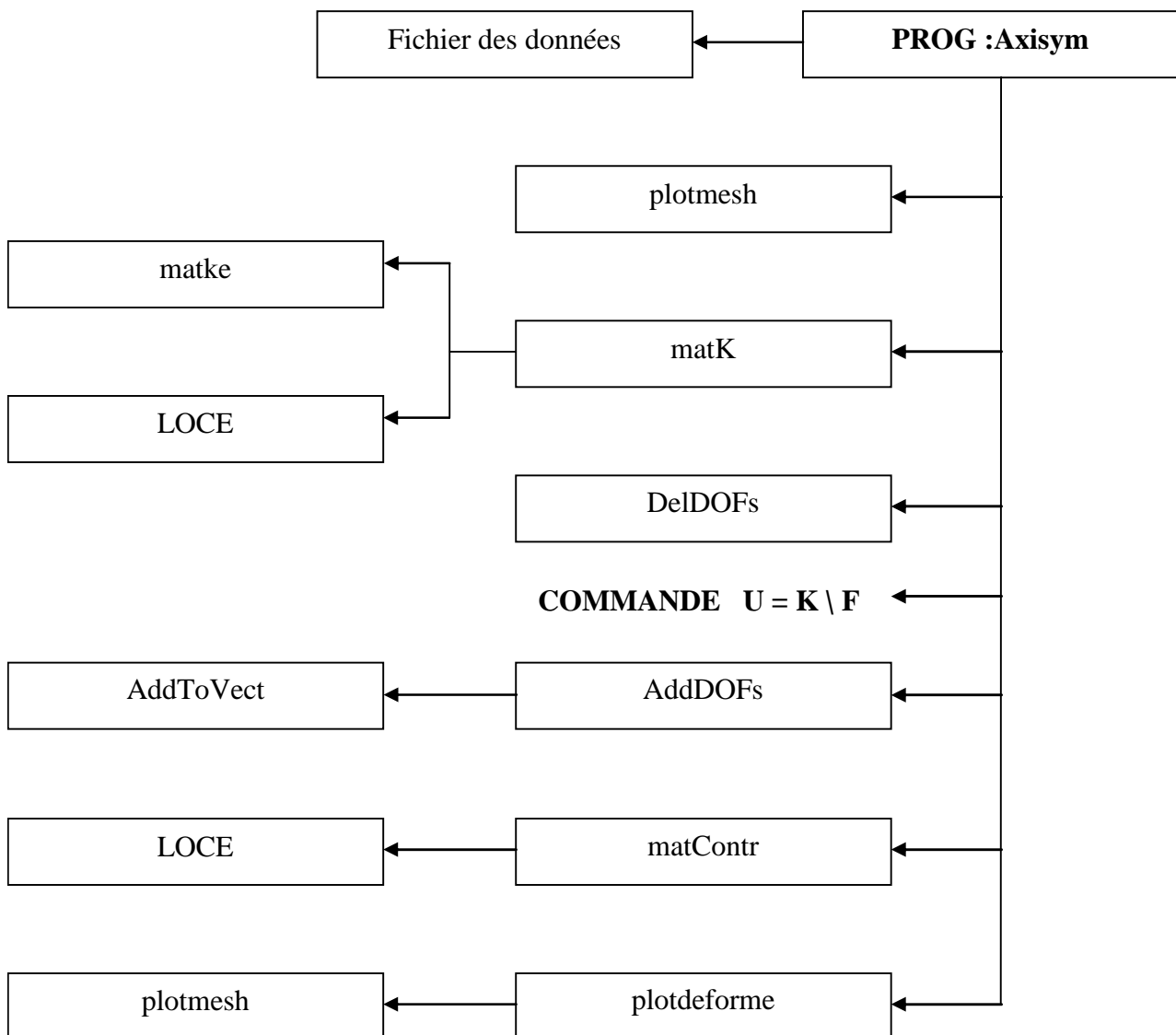


Figure (3 . 2) : Algorithme général d'un Programme Axisym

### 3.2.2 Description des programmes Axisym :

- **Programme principal Axisym :**

Il fait appel aux différentes fonctions secondaires nécessaires aux calculs d'une structure axisymétrique en utilisant les formulations décrites au chapitre (2) pour chaque type d'élément.

- **Fichier des données :**

C'est un fichier fonction où on introduit toutes les données relatives au problème :

- tableau des coordonnées des nœuds
- tableau de connectivité des éléments
- épaisseur des éléments
- module d'élasticité
- coefficient de poisson
- conditions aux limites (numéros des degrés de liberté a bloqués)
- vecteur sollicitations

La commande Matlab : `[les données] = feval(str2func(Nom du fichier des données))`; ouvre le fichier des données et permet aux différentes fonction existant dans le programme principal de lire les données.

- **Fonction plotmesh :**

Cette fonction nous donne un affichage graphique du maillage, les coordonnées et la numérotation des nœuds, ce qui permet, avec le tracer la structure saisie, une vérification visuelle des données (tableaux des coordonnées et connectivité).

- **Fonction matK :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires  $K_e$  fournit par la fonction `matke`, la boucle ce fait sur les éléments en utilisant la fonction `LOCE` qui nous fournit les degrés de liberté de chaque élément qui est nécessaires pour le stockage des termes de la matrice élémentaire dans la matrice de rigidité globale.

- **Fonction LOCE :**

A partir de la table de connectivité des éléments existant dans le fichier des données, cette fonction Fournit la table de localisation (numéros) des degrés de liberté pour chaque élément.

- **Fonction matke:**

Permet le calcul des matrices de rigidité élémentaires présenter au chapitre 2 (différentes d'un élément à un autre).

- **Fonction DelDOFs :**

Les conditions aux limites sont l'ensemble des déplacements nuls aux niveaux des appuis, un vecteur  $\mathbf{e}$  dans le fichier de données est utilisé pour spécifier les degrés de liberté à bloquer. Pour appliquer cette condition on élimine les lignes et les colonnes correspondants au vecteur  $\mathbf{e}$  des matrices  $\mathbf{K}$  et du vecteur  $\mathbf{F}$  vecteur sollicitations (puisque le chargement est saisi pour tous les noeuds y compris ceux d'appuis).

- **Commande  $U = K \setminus F$  :**

Une fois les conditions aux limites sont appliquées, il ne reste qu'à résoudre le système discret, La solution en déplacement (au nœuds) s'obtient avec la commande MATLAB  $U = K \setminus F$ , qui remplace les méthodes classiques pour résoudre les systèmes d'équations linéaires (méthode de factorisation de cholesky Pour une matrice symétrique définie positive).

- **Fonction AddDOFs :**

Avec cette fonction on ajoute au vecteur déplacement les degrés de liberté des nœuds bloqués qui est supprimés par la fonction DelDOFs, la boucle se fait sur les numéros des degrés de liberté à ajouter en utilisant la fonction AddToVect.

- **Fonction AddToVect:**

Fournit le vecteur déplacement résultant pour chaque degré de liberté ajouté.

- **Fonction matContr:**

Permet le calcul des contraintes en utilisant la formulation présenter au chapitre 2, pour chaque type d'élément.

- **Fonction plotdeforme:**

Cette fonction dessine la structure déformée, elle trace les solutions obtenues sur le schéma déjà obtenu par la fonction plotmesh.

## **CHAPITRE 4**

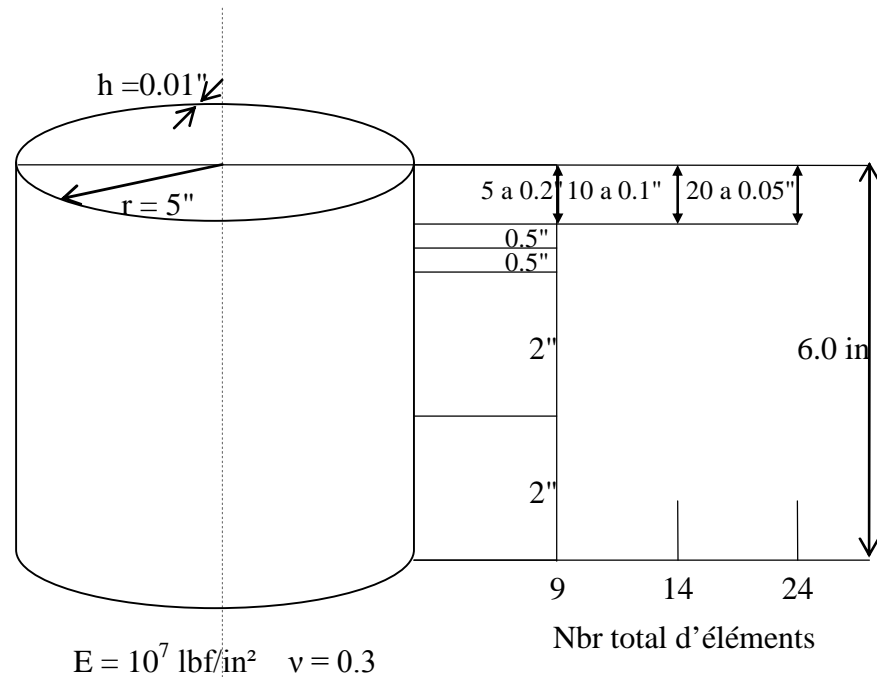
### **VALIDATION ET APPLICATIONS**

## 4.1 Coque De Révolution

### 4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité:

On applique les éléments étudiés à une coque cylindrique fixée à une extrémité est chargé à l'autre extrémité libre figure (4 , 1 ).

le tableau N°(4 , 1) permet de faire la comparaison entre la solution analytique donné en [1] et les résultats obtenus par le programme Axisym pour les éléments (CAXI\_K et CAXI\_L) , ainsi ceux du logiciel ANSYS .



Les déplacements  
donnés sont ceux de  
cette région →

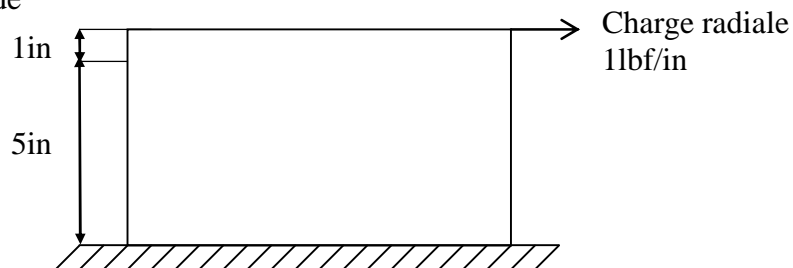


Figure (4 , 1) cylindre chargé à leur extrémité

Maillage	ANSYS	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_K	Erreur	Prog:CAXI_L	Erreur
9 éléments	2,876	2,874	2,815	2,05%	2,875	-0,03%
14 éléments	2,876		2,861	0,45%	2,875	-0,03%
24 éléments	2,876		2,871	0,10%	2,875	-0,03%

Tableau (4 , 1) : Déplacement radial (in) à l'extrémité chargé ( x1/1000)



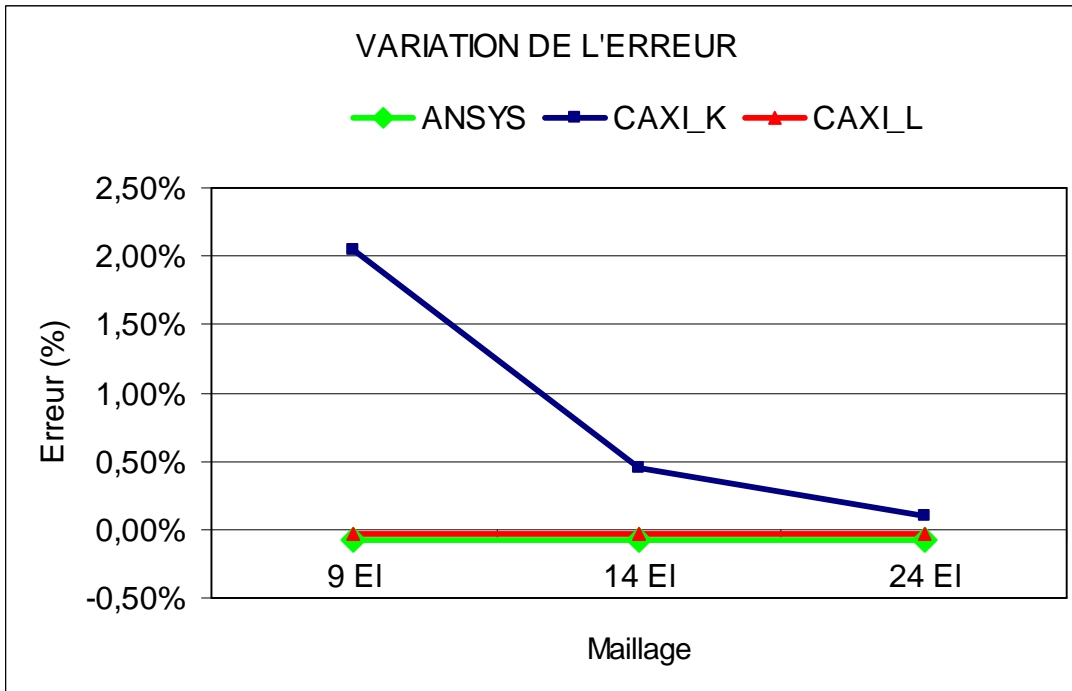


Figure (4 , 2) Convergence de déplacement de l'extrémité libre

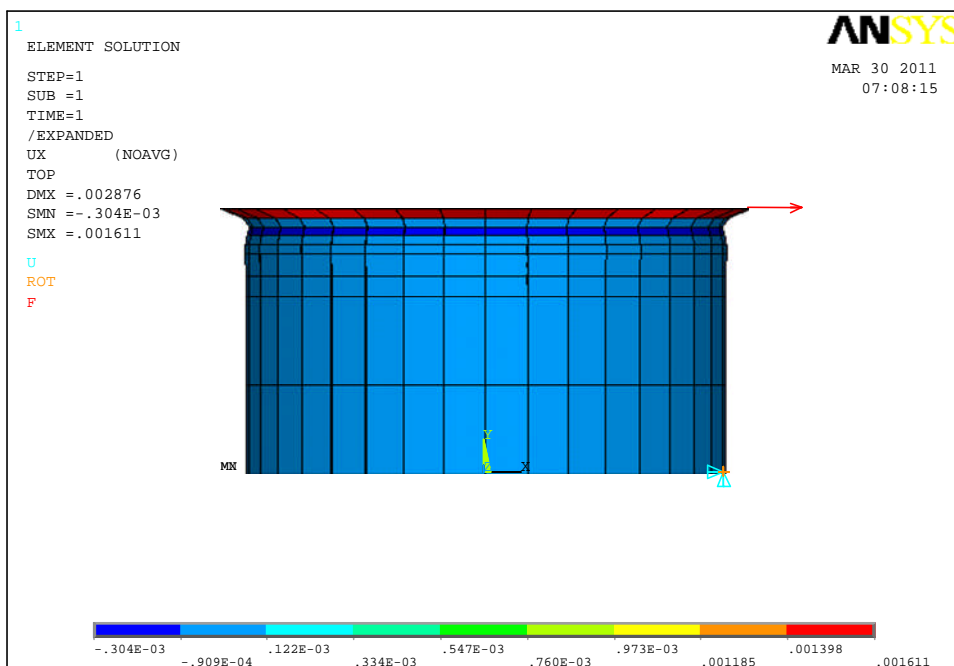


Figure (4 , 3) structure déformée (ANSYS)

Position radial (in)	Prog:CAXI_K	Prog:CAXI_L	ANSYS	SOL [1]
0,00	2,871	2,875	2,876	2,875
0,05	2,065	2,073	2,074	2,073
0,10	1,356	1,361	1,361	1,361
0,15	0,789	0,787	0,788	0,787
0,20	0,372	0,364	0,365	0,364
0,25	0,092	0,079	0,079	0,079
0,30	-0,078	-0,092	-0,092	-0,092
0,35	-0,163	-0,178	-0,178	-0,178
0,40	-0,191	-0,205	-0,205	-0,205
0,45	-0,183	-0,195	-0,194	-0,195
0,50	-0,156	-0,164	-0,164	-0,164
0,55	-0,121	-0,127	-0,127	-0,127
0,60	-0,087	-0,089	-0,090	-0,089
0,65	-0,056	-0,057	-0,058	-0,057
0,70	-0,032	-0,032	-0,032	-0,032
0,75	-0,015	-0,013	-0,013	-0,013
0,80	-0,003	-0,002	-0,002	-0,002
0,85	0,004	0,005	0,005	0,005
0,90	0,007	0,008	0,008	0,008
0,95	0,008	0,009	0,009	0,009
1,00	0,007	0,008	0,008	0,008

Tableau (4 , 2) : valeurs déplacement radial (in) ( x1/1000) maillage 24 éléments

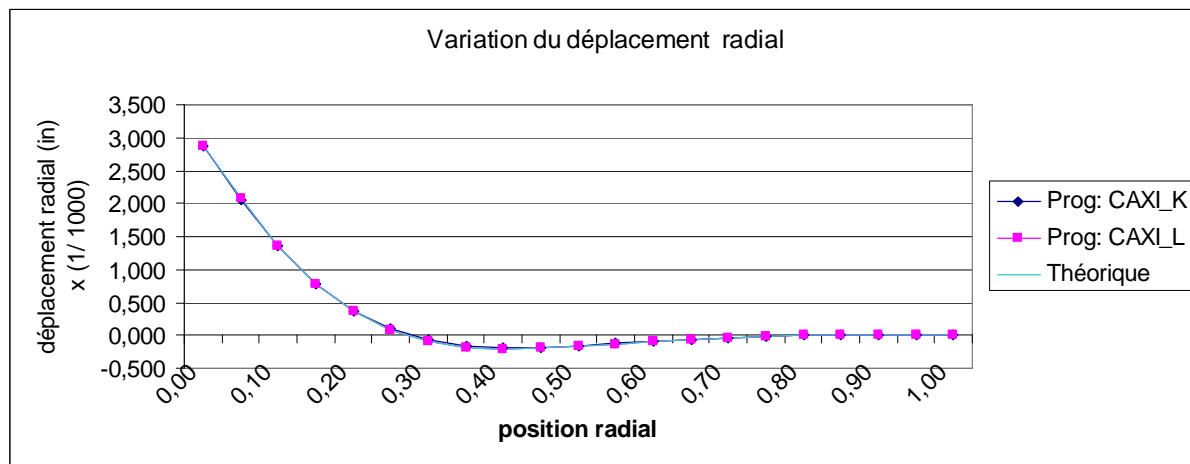


Figure (4 , 4) variation du déplacement radial (maillage 24 éléments)

Position radial (in)	Prog:CAXI_K	Prog:CAXI_L
0,00	0,00	0,00
0,05	36,94	37,62
0,10	53,15	54,29
0,15	55,68	56,99
0,20	50,21	51,44
0,25	40,90	41,89
0,30	30,60	31,27
0,35	21,00	21,35
0,40	13,00	13,07
0,45	6,89	6,75
0,50	2,60	2,32
0,55	-0,14	-0,47
0,60	-1,66	-2,00
0,65	-2,32	-2,62
0,70	-2,40	-2,65
0,75	-2,15	-2,34
0,80	-1,75	-1,87
0,85	-1,31	-1,38
0,90	-0,90	-0,93
0,95	-0,56	-0,55
1,00	-0,30	-0,27

Tableau (4 , 3) : Moment méridien lbf in/in ( x1/1000) maillage 24 éléments

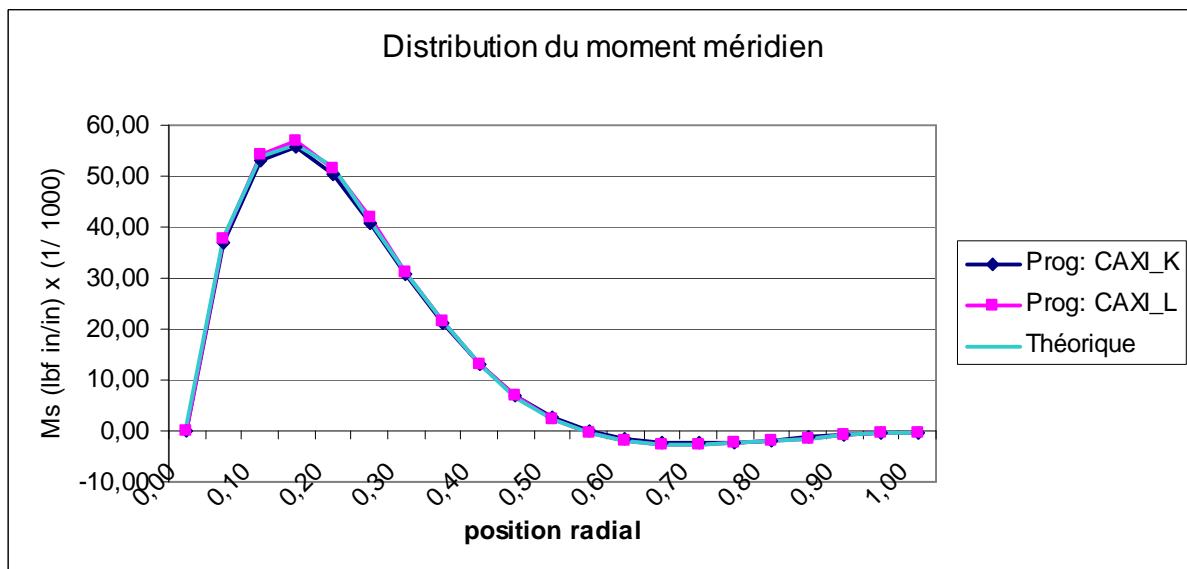


Figure (4 , 5) variation du moment méridien (maillage 24 éléments)

maillage	SOL [1]	Prog:CAXI_K 1 pts d'intégration	Prog:CAXI_K 3 pts d'intégration	Prog:CAXI_K 4 pts d'intégration	Prog:CAXI_L 2 pts d'intégration
24 éléments	2,874	1514	2,871	2,871	0,41

Tableau (4 , 4) : Variation de la solution en déplacement (in) ( x1/1000) en fonction du nombre des points d'intégration numérique (méthode de Gauss)

### Commentaires :

D'après les résultats présentés dans le tableau N°(4 , 1) et le graphe de la variation de l'erreur par rapport à la solution analytique, on constate que l'élément CAXI\_L donne des résultats meilleurs que l'élément CAXI\_K.

Dans le dernier tableau on constate que le changement du nombre de points d'intégration pour l'élément CAXI\_K, ne porte aucun changement sur la solution en déplacement si on utilise un nombre de points plus que 2 points de Gauss, mais si on utilise un point d'intégration le résultat sera inacceptable.

Pour le deuxième éléments CAXI\_L, si on utilise un schéma d'intégration à 2 points de Gauss et plus le résultat est obtenu avec une grande erreur, donc seul l'intégration réduite qui est applicable.

### 4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression :

La figure (4 , 6 ) montre un cylindre soumis à une pression externe uniforme, il est encastré/guidé aux extrémités, un demi méridien est discrétisé avec un nombre d'élément  $N = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$  .

Dans le tableau N°(4 , 5) on trouve la valeur du déplacement au centre  $U_c$  la comparaison ce fait entre la solution analytique sans prise en compte de cisaillement transverse donné en [2] et les résultats obtenus par les programmes Axisym pour les éléments CAXI\_K et CAXI\_L.

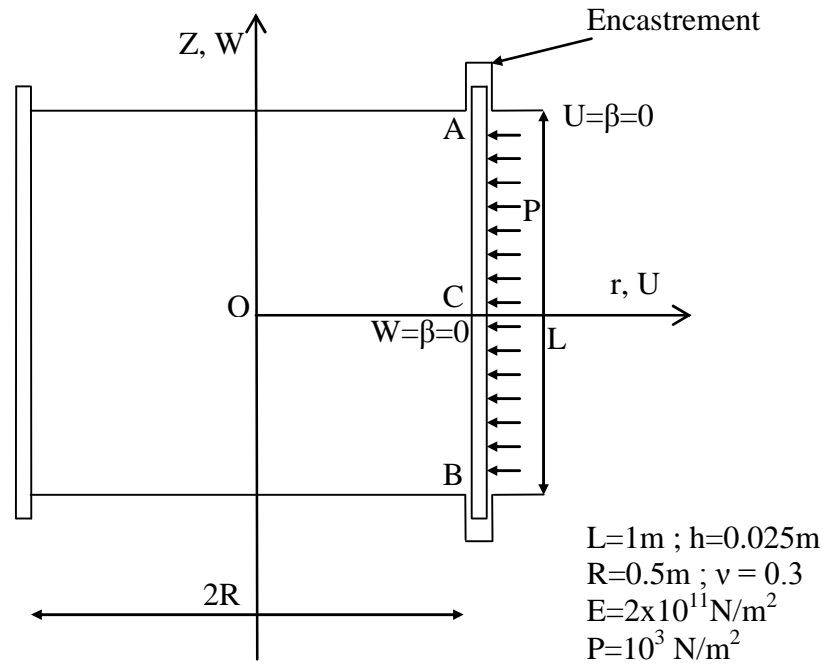
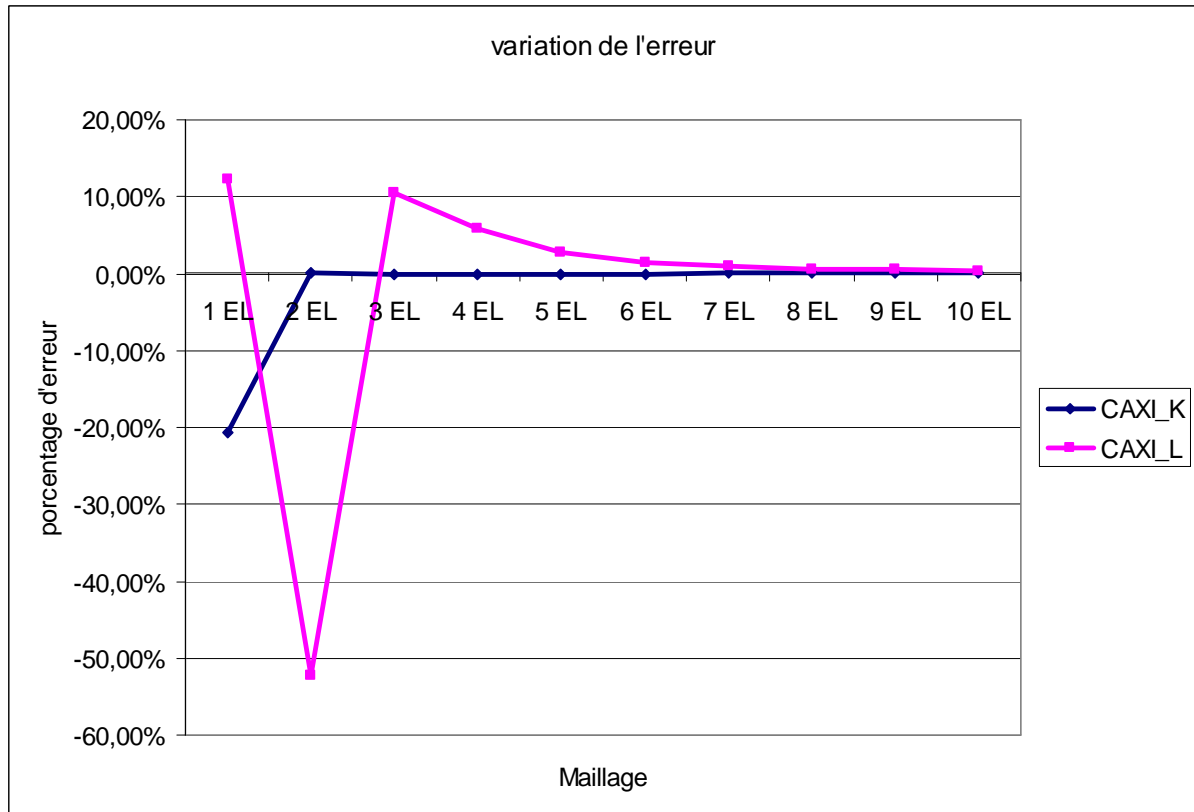


Figure (4 , 6) Cylindre encastré/guidé sous pression

Maillage	SOL Ref [2]	Prog: CAXI_K	Erreur	Prog: CAXI_L	Erre
1 élément	-4,989E-08	-6,0160E-08	-20,59%	-4,3820E-08	12,1
2 éléments		-4,9780E-08	0,22%	-7,6020E-08	-52,3
3 éléments		-4,9896E-08	-0,01%	-4,4680E-08	10,4
4 éléments		-4,9900E-08	-0,02%	-4,6980E-08	5,83
5 éléments		-4,9896E-08	-0,01%	-4,8530E-08	2,73
6 éléments		-4,9892E-08	0,00%	-4,9140E-08	1,50
7 éléments		-4,9889E-08	0,00%	-4,9420E-08	0,94
8 éléments		-4,9887E-08	0,01%	-4,9560E-08	0,66
9 éléments		-4,9886E-08	0,01%	-4,9650E-08	0,48
10 éléments		-4,9885E-08	0,01%	-4,9710E-08	0,36

Tableau (4 , 5) : Déplacement radial  $U_c$  (m)

Figure (4 , 7) Convergence de  $U_c$ **Commentaires :**

On remarque que les résultats fournis par le programme Axisym pour l'élément CAXI\_K convergent plus rapide vers la solution exacte que l'élément CAXI\_L, puisque la solution analytique est relative à la théorie de Love-Kirchoff (cisaillement transverse négligé).

### 4.1.3 Cylindre sous pression interne :

Un cylindre de hauteur 200 inches et un rayon de 60 inches, est soumis à une pression interne de  $1\text{k/in}^2$ , l'épaisseur  $h=1\text{in}$ ,  $E=29000\text{k/in}^2$   $\nu=0.3$

Conditions aux limites :

A la base  $W=\beta=0$

Point courant  $W=0$

Le déplacement donné au tableau (4 , 6) pour un maillage de 2 éléments, correspond au point extrême  $Z=200\text{in}$ , la solution analytique est donné en [3] est comparé avec les résultats obtenus par le programme Axisym pour les éléments CAXI\_K et CAXI\_L, ainsi ceux obtenus par le logiciel SAP.

	SAP	SOL [3]	Prog:CAXI_K	Erreur	Prog:CAXI_L	Erreur
Ur	0,12175	0,12414	0,12414	0,00%	0,12414	0,00%
N $\theta$	59,87	60	60	0,00%	59,99	0,02%

Tableau (4 , 6) : Déplacement radial (in) et effort normal (K/in<sup>2</sup>) à l'extrémité  $Z = 200\text{ in}$

#### Commentaires :

Les résultats obtenus par les programmes Axisym sont presque exactes et cela pour un maillage minimal.

#### 4.1.4 Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties :

Une plaque circulaire soumise à une charge uniforme et encastrée sur le contour, les valeurs de référence pour la flèche  $W$  et le moment  $M_s$  sont données en [2]

Conditions aux limites :

Au milieu :  $u = \beta = 0$

A l'extrémité :  $u = w = \beta = 0$

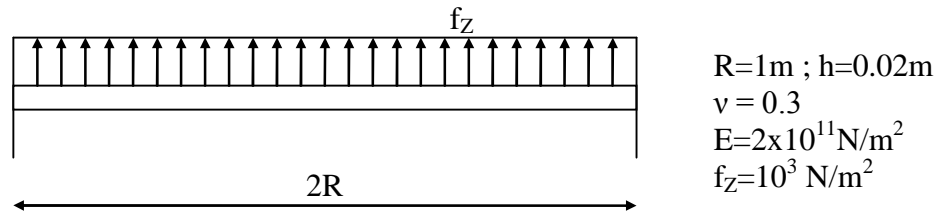


Figure (4 , 8) Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties

Maillage	SOL Ref [2]	Prog:CAXI_K	Erreur	Prog:CAXI_L	Erreur
2 éléments	1068E-07	1071E-07	-0,28%	1069E-07	-0,09%
4 éléments		1067E-07	0,09%	1085E-07	-1,59%
6 éléments		1066E-07	0,19%	1077E-07	-0,84%
8 éléments		1066E-07	0,19%	1074E-07	-0,56%
10 éléments		1066E-07	0,19%	1072E-07	-0,37%
20 éléments		1066E-07	0,19%	1069E-07	-0,09%

Tableau (4 , 7) : Flèche maximal (m)

Maillage	SOL Ref [2]	Prog:CAXI_K	Erreur	Prog:CAXI_L	Erreur
2 éléments	29,69	58,69	-97,68%	60,42	-103,50%
4 éléments		35,92	-20,98%	37,09	-24,92%
6 éléments		32,30	-8,79%	32,92	-10,88%
8 éléments		31,45	-5,93%	31,52	-6,16%
10 éléments		30,59	-3,03%	30,86	-3,94%
20 éléments		29,90	-0,71%	29,98	-0,98%

Tableau (4 , 8) : contrainte  $M_s$  (N.m/m) à  $r = 0.50 \text{ m}$



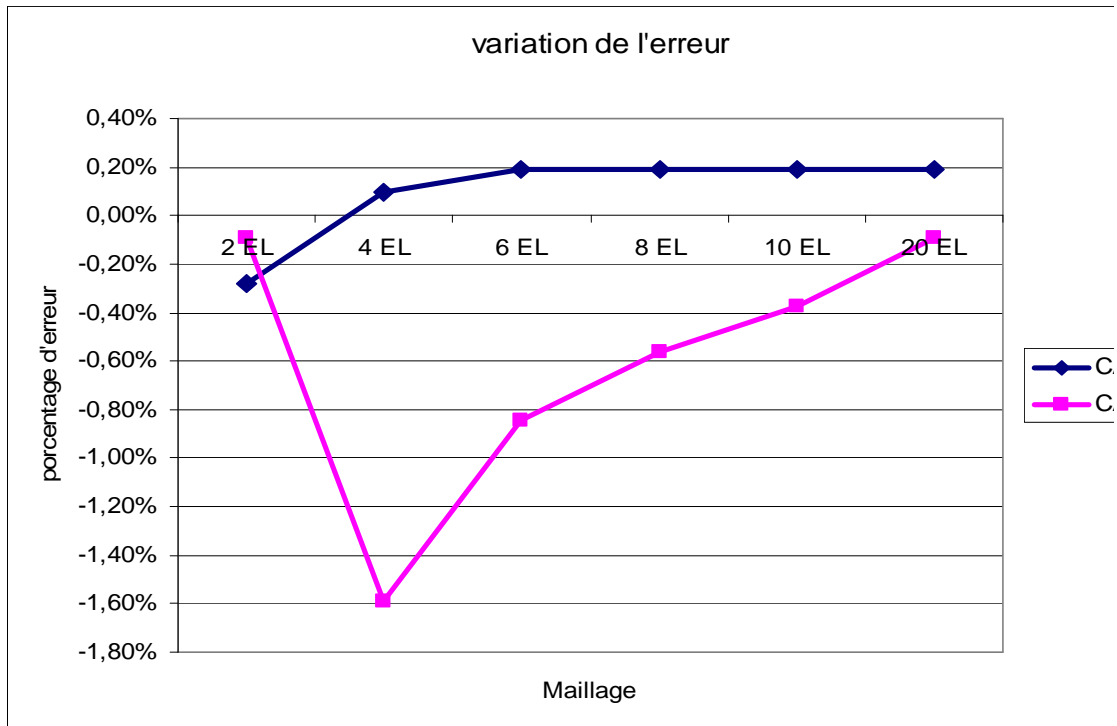


Figure (4 , 9) convergence de la flèche au centre

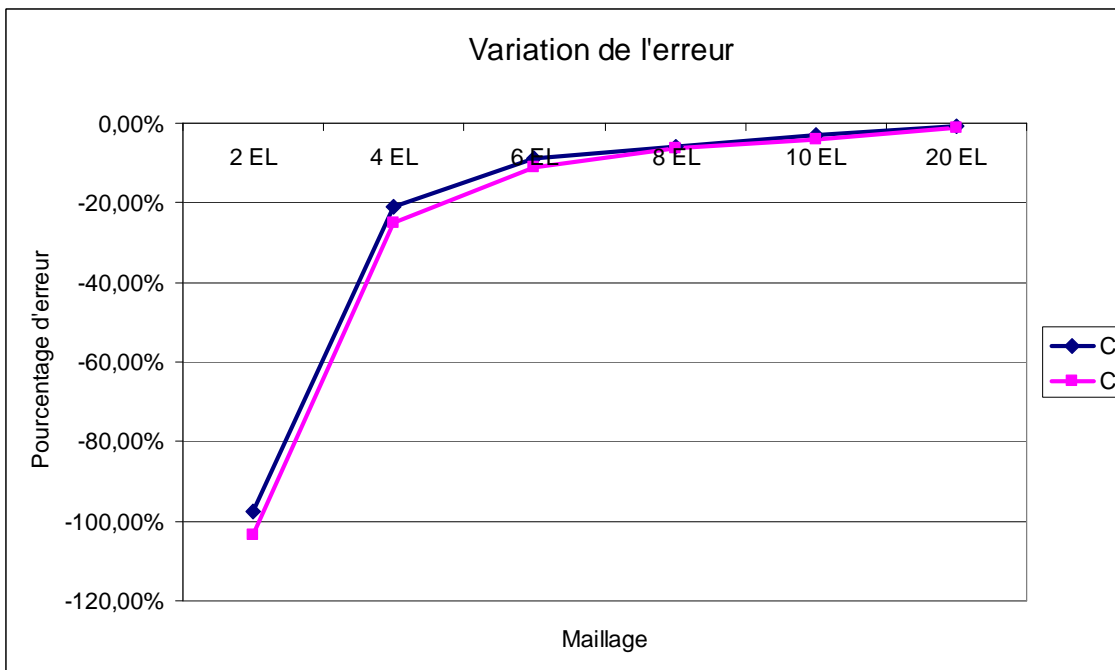


Figure (4 , 10) convergence de Ms à r= 0.5 m

**Commentaires :**

Pour le déplacement on remarque que l'élément CAXI\_K converge plus rapide que l'élément CAXI\_L, mais avec moins de précision, pour la contrainte Ms les deux éléments convergent de la même manière.

**4.1.5 Plaque circulaire sous différents types de chargement :**

On applique les éléments CAXI\_L et CAXI\_K à une plaque circulaire sous diverses conditions de charges et d'appuis figure (4 , 11)

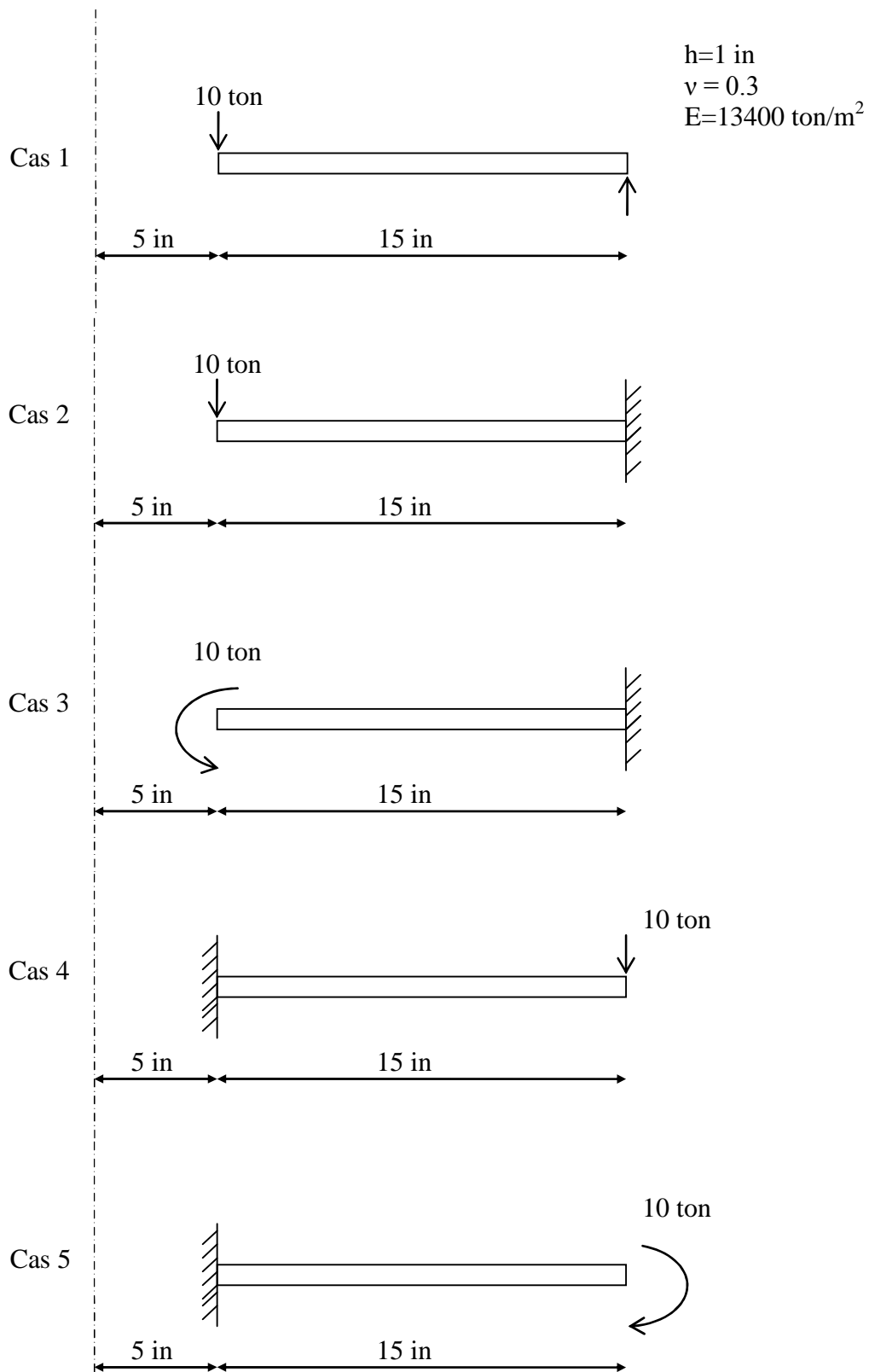


Figure (4 , 11) Plaque circulaire sous divers cas de chargement

**1) ELEMENT CAXI K :**

Cas de charge 1			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,1232	0,1236	-0,32%
10 éléments		0,1233	-0,08%
20 éléments		0,1232	0,00%
20 éléments graduels		0,1232	0,00%

**Elément CAXI\_K cas de charge 1**

Cas de charge 2			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,02888	0,02958	-2,42%
10 éléments		0,02906	-0,62%
20 éléments		0,02893	-0,17%
20 éléments graduels		0,02896	-0,28%

**Elément CAXI\_K cas de charge 2**

Cas de charge 3			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,00502	0,005138	-2,35%
10 éléments		0,005052	-0,64%
20 éléments		0,00503	-0,20%
20 éléments graduels		0,00503	-0,20%

**Elément CAXI\_K cas de charge 3**

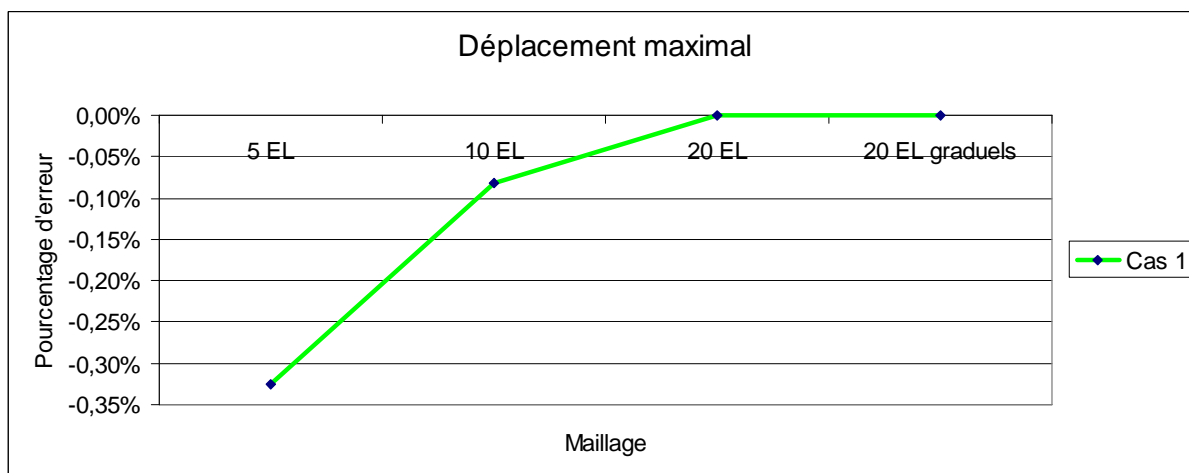
Cas de charge 4			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,03509	0,03432	2,19%
10 éléments		0,03495	0,40%
20 éléments		0,03512	-0,09%
20 éléments graduels		0,03514	-0,14%

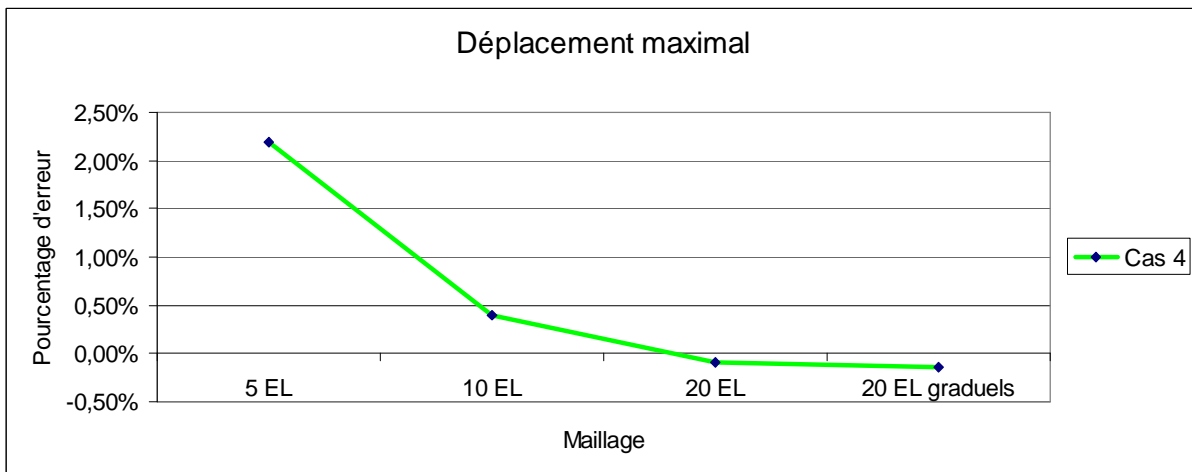
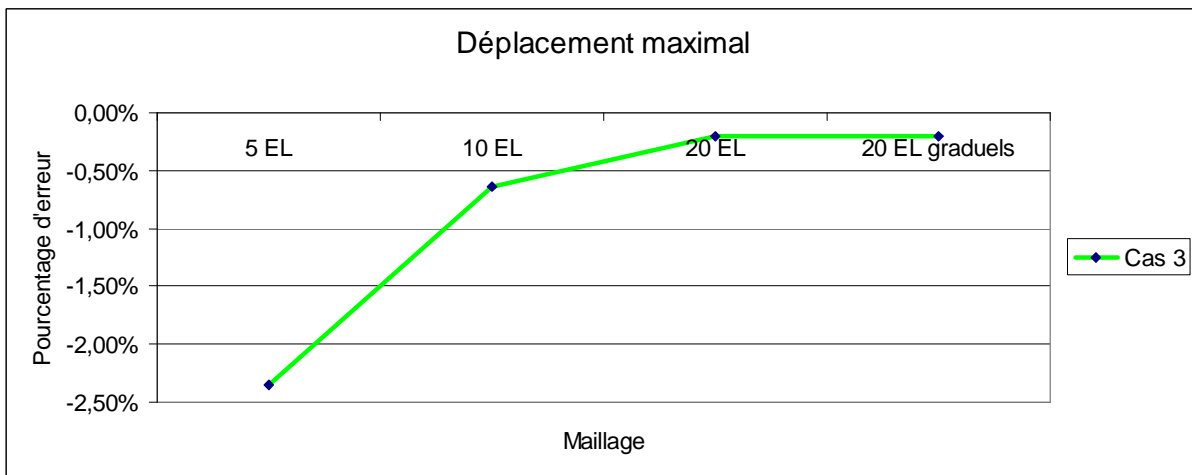
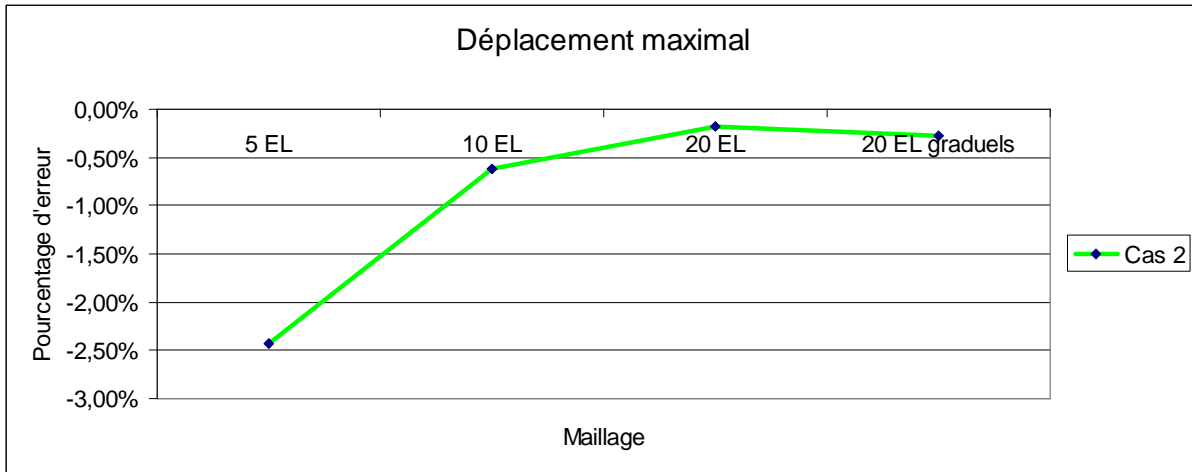
### Élément CAXI\_K cas de charge 4

Cas de charge 5			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_K	Erreur
5 éléments	0,00455	0,00448	1,54%
10 éléments		0,00453	0,44%
20 éléments		0,00454	0,22%
20 éléments graduels		0,00454	0,22%

### Élément CAXI\_K cas de charge 5

Tableau (4 , 9) : Valeur de déplacement maximal pour divers cas de charge





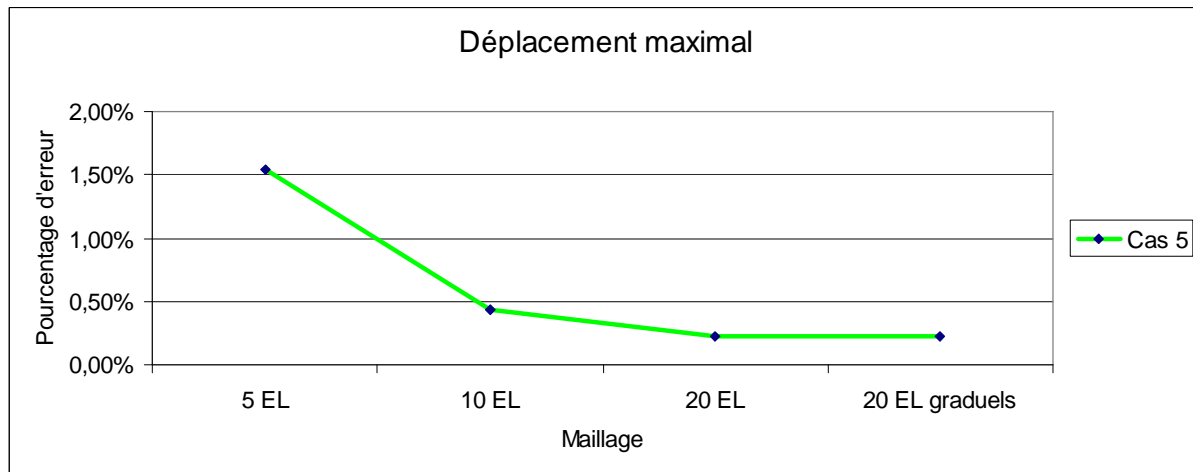


Figure (4 , 12) convergence de déplacement maximal (divers cas de charge)

**2) ELEMENT CAXI L :**

Cas de charge 1			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_L	Erreur
5 éléments	0,1232	0,1245	-1,06%
10 éléments		0,1238	-0,49%
20 éléments		0,1237	-0,41%
20 éléments graduels		0,1236	-0,32%

**Elément CAXI\_L cas de charge 1**

Cas de charge 2			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_L	Erreur
5 éléments	0,02888	0,02949	-2,11%
10 éléments		0,02935	-1,63%
20 éléments		0,02931	-1,49%
20 éléments graduels		0,02931	-1,49%

**Elément CAXI\_L cas de charge 2**

Cas de charge 3			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_L	Erreur
5 éléments	0,00502	0,005113	-1,85%
10 éléments		0,005046	-0,52%
20 éléments		0,005029	-0,18%
20 éléments graduels		0,005028	-0,16%

### Élément CAXI\_L cas de charge 3

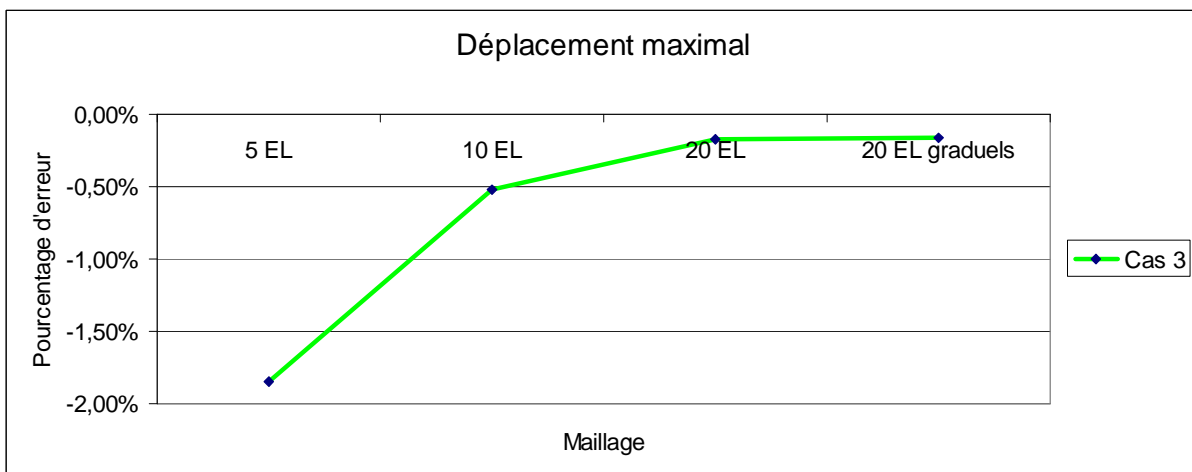
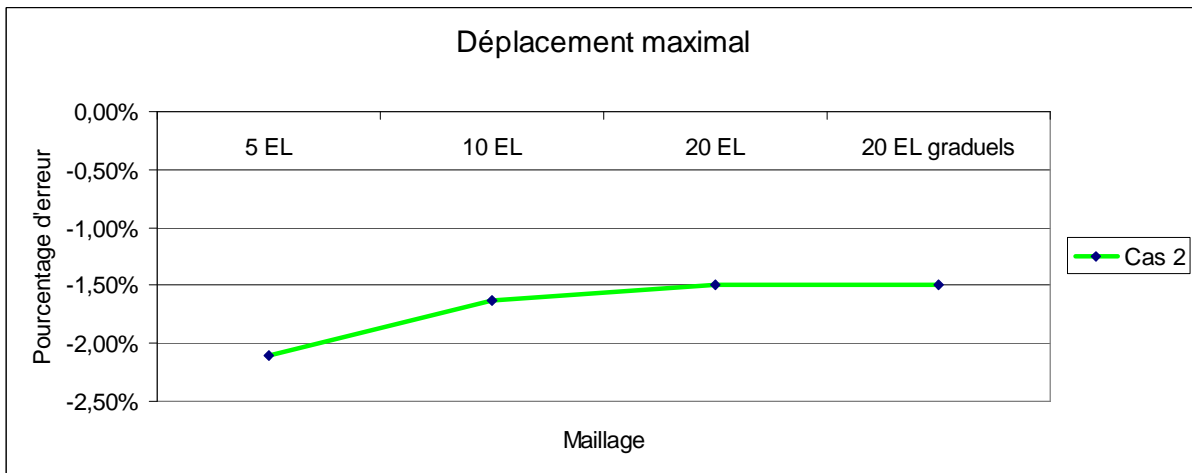
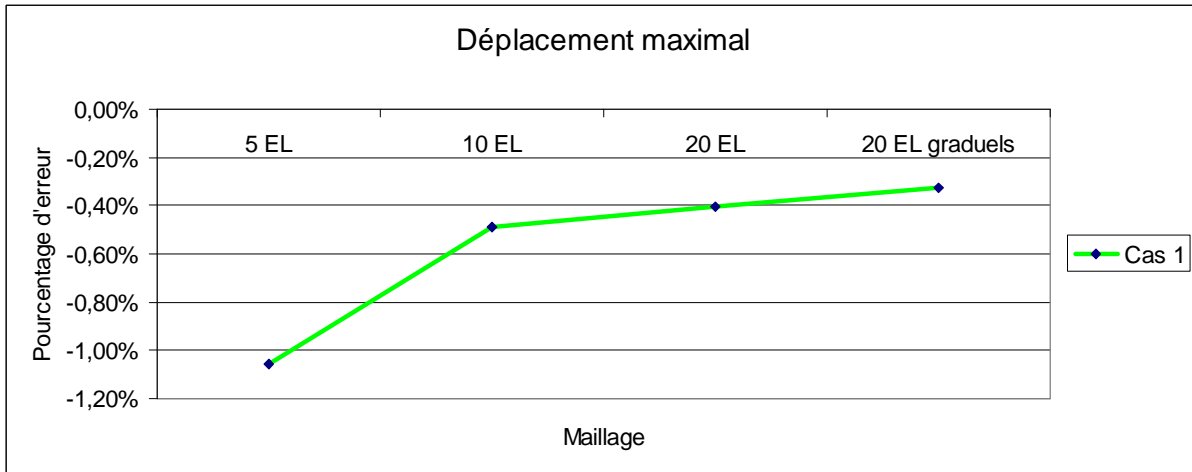
Cas de charge 4			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_L	Erreur
5 éléments	0,03509	0,03491	0,51%
10 éléments		0,03541	-0,91%
20 éléments		0,03553	-1,25%
20 éléments graduels		0,03547	-1,08%

### Élément CAXI\_L cas de charge 4

Cas de charge 5			
Maillage	SOL Ref [1]	Prog:CAXI_L	Erreur
5 éléments	0,00455	0,00453	0,44%
10 éléments		0,00454	0,22%
20 éléments		0,00455	0,00%
20 éléments graduels		0,00454	0,22%

### Élément CAXI\_L cas de charge 5

Tableau (4 , 10) : Valeur de déplacement maximal pour divers cas de charge





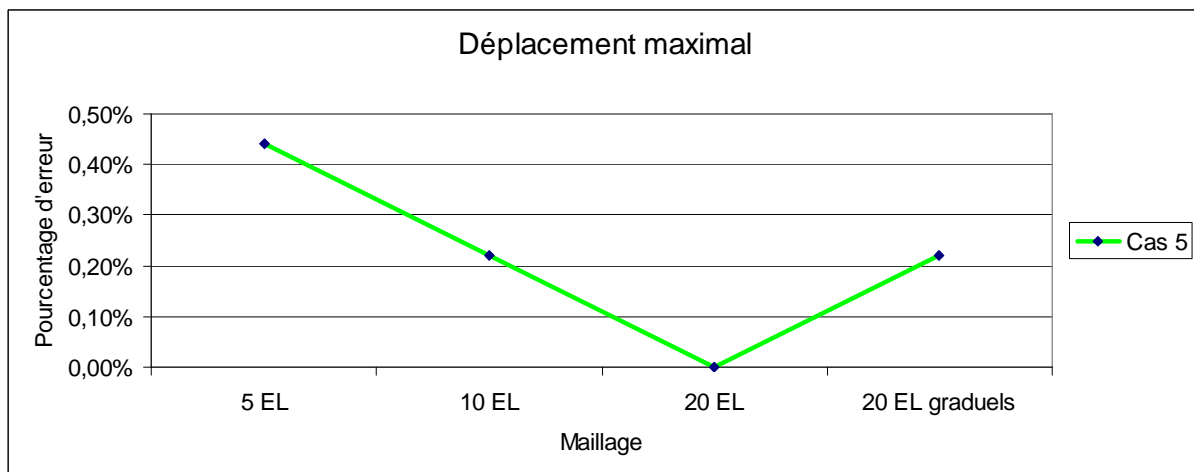
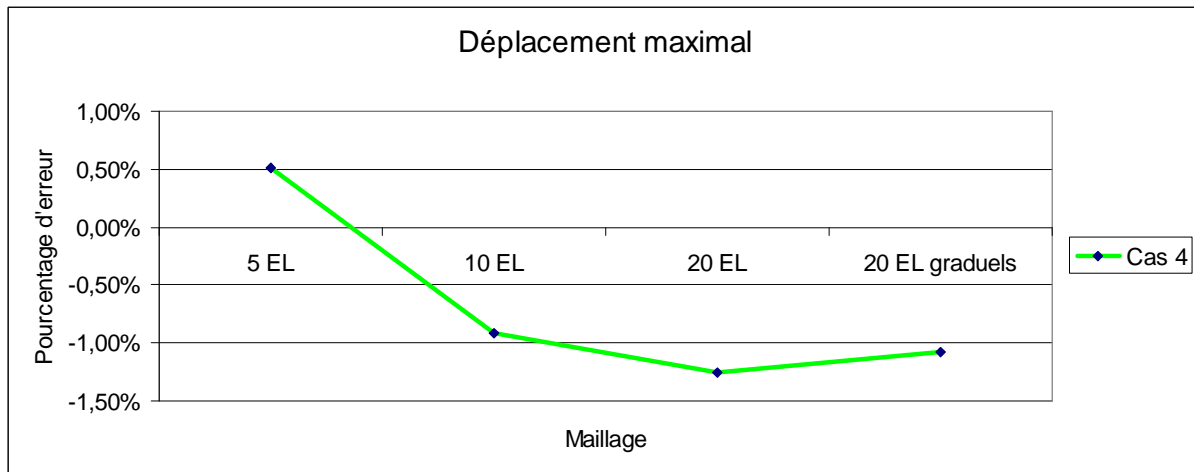


Figure (4 , 13) convergence de déplacement maximal (divers cas de charge)

#### Commentaires :

##### Cas de charge 1 :

Les deux types d'éléments convergent de la même façon, l'élément CAXI\_K coïncide avec la valeur exacte pour un nombre d'éléments égale à 20.

##### Cas de charge 2 :

L'élément CAXI\_K converge sensiblement rapide au démarrage de la discrétisation, ensuite les deux types d'éléments convergent vers la solution exacte.

##### Cas de charge 3 :

C'est l'inverse du cas de charge 2

##### Cas de charge 4 :

L'élément CAXI\_K converge d'une façon régulière, tandis que L'élément CAXI\_L converge de façon non régulière

##### Cas de charge 5 :

Le comportement des deux types pour ce cas est similaire a celui du cas 1.

#### 4.1.6 Plaque circulaire (avec CT) :

Une plaque circulaire de rayon intérieur égale à 1.4 in et extérieur 2 in est soumise à une charge linéaire de 800 lb/in appliquée à un rayon égale à 1.8 in, la plaque est simplement appuyée au rayon intérieur et libre à l'extrémité (rayon extérieur).

On donne la solution analytique [3] avec prise en charge du CT, ainsi le résultat du logiciel SAP

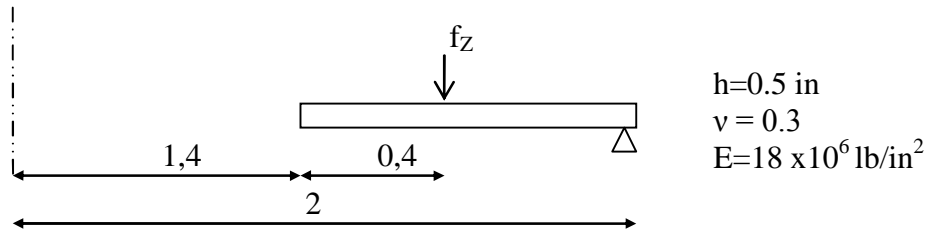


Figure (4 , 14) Plaque circulaire soumise a une chargement linéaire

Maillage	SOL Ref [1]	SAP	Prog:CAXI_L	Erreur	Prog:CAXI_k	Erreur
2 éléments	0,00534	0,00534	0,00537	-0,56%	0,00521	2,43%
6 éléments			0,00534	0,00%	0,00521	2,43%
12 éléments			0,00534	0,00%	0,00521	2,43%

Tableau (4 , 11) : Valeur de déplacement maximal (in)

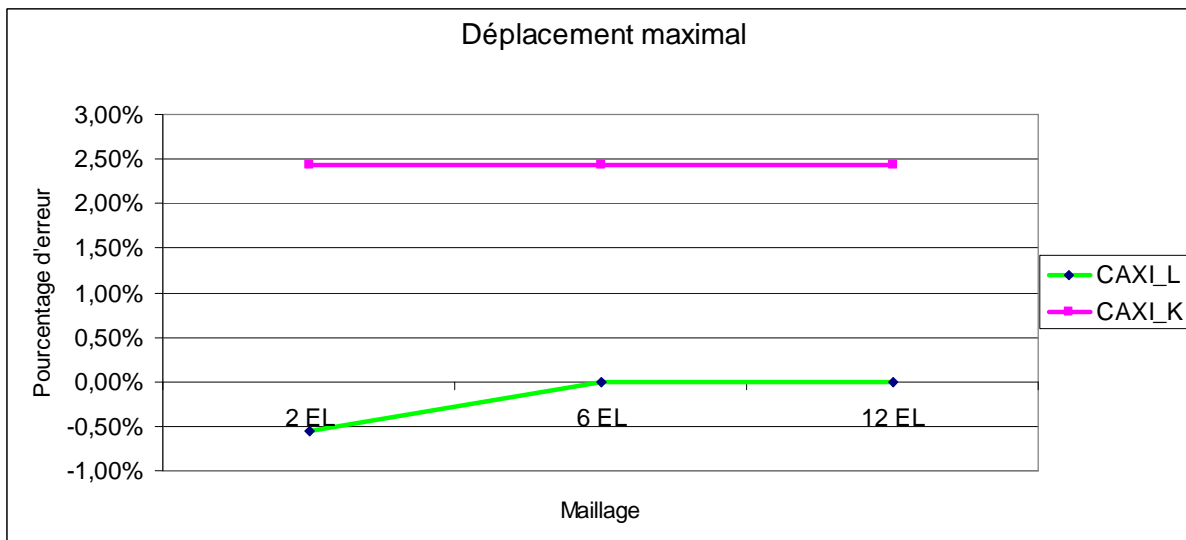


Figure (4 , 15) convergence de déplacement maximal

#### Commentaires :

On constate que l'élément CAXI\_L coïncide avec la valeur exacte pour un nombre d'éléments égale à 6, tandis que l'élément CAXI\_K a donné une résultat acceptable, mais pour un plus de précision il nécessite un nombre d'élément plus grand.

### 4.1.7 Plaque circulaire (sans CT) :

Une plaque circulaire est soumise à une charge uniformément répartie la géométrie et les caractéristiques mécaniques sont présentés sur la figure ( 4 , 16).

On donne la solution analytique [4] sans prise en charge du CT.

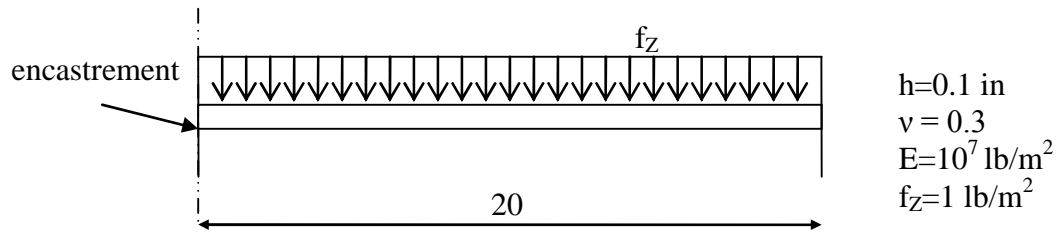


Figure (4 , 16) Plaque circulaire soumise à une charge uniformément répartie

Maillage	SOL Ref [4]	Prog:CAXI_L	Erreur	Prog:CAXI_K	Erreur
2 éléments	0,17	0,2113	-24,29%	0,1705	-0,29%
4 éléments		0,1759	-3,47%	0,1700	0,00%

Tableau (4 , 12) : Valeur de déplacement maximal (in)

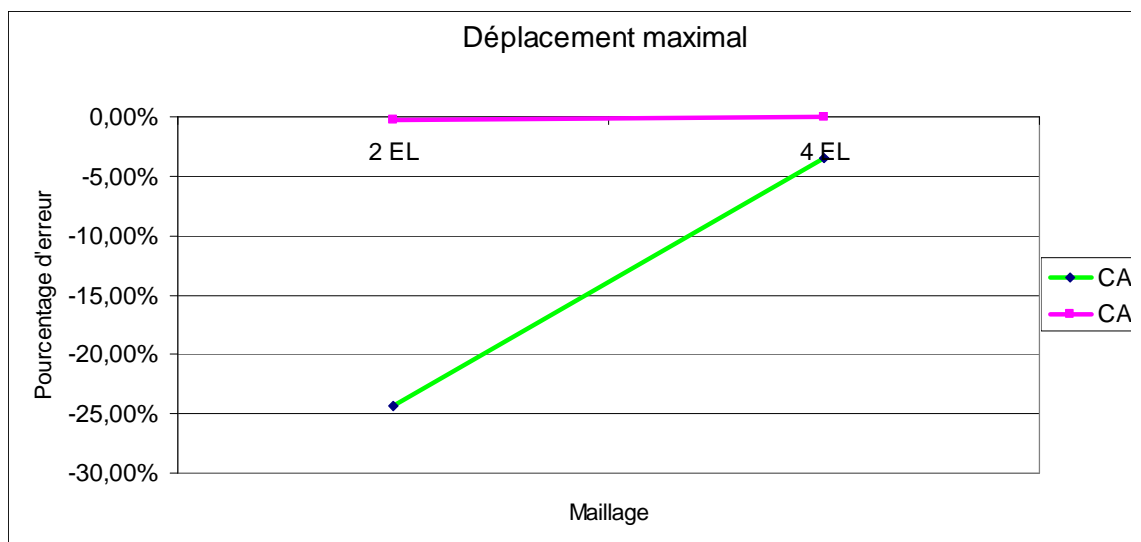


Figure (4 , 17) convergence de déplacement maximal

### Commentaires :

L'erreur de convergence de l'élément CAXI\_L est grande par rapport à l'élément CAXI\_K, la comparaison se fait pour une solution sans influence de CT..

### 4.1.8 Hémisphère

Un hémisphère est modélisé par l'élément tronconique CAXI\_K (maillage 24 éléments), le résultat sera comparé avec la solution analytique [4], ainsi ce obtenu par ANSYS  
 Les résultats obtenus sont regroupé dans le tableau (4 , 13)

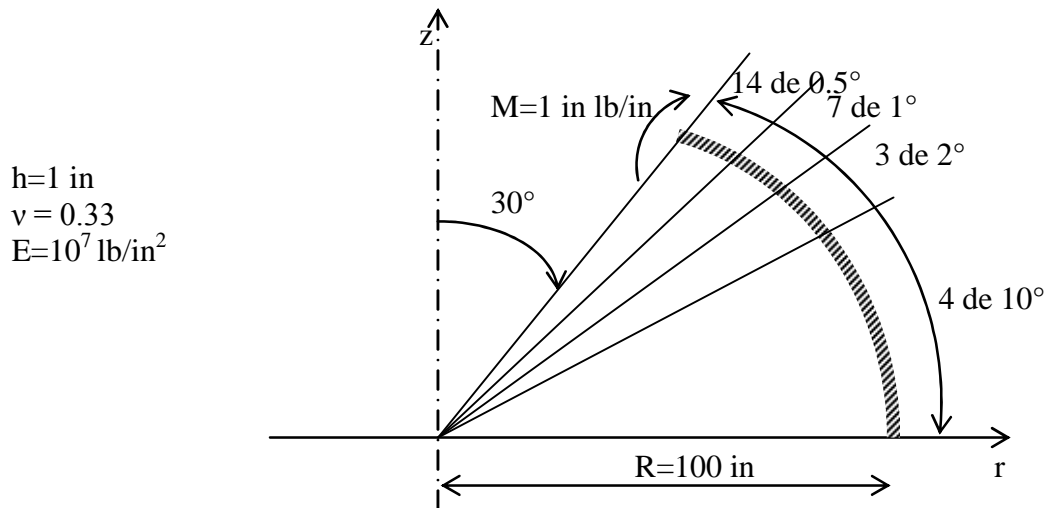


Figure (4 , 18) : Hémisphère

Maillage	SOL Ref [4]	ANSYS	Prog:CAXI_K	Erreur
24 éléments	1,60E-05	1,59E-05	1,587E-05	0,81%

Tableau (4 , 13) : Valeur de déplacement maximal (in)

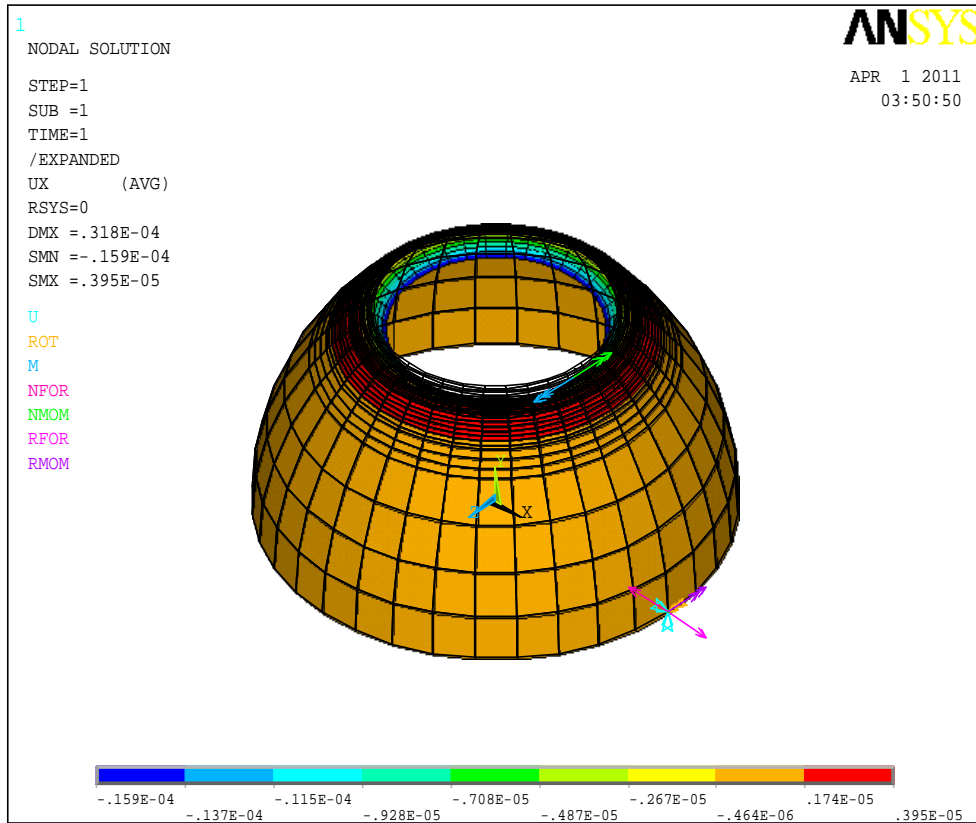


Figure (4 , 19) structure déformée

**Commentaires :**

On comparant avec le résultat obtenu par ANSYS, le résultat obtenu par l'élément CAXI\_K est acceptable.

#### 4.1.9 Dôme sphérique sous pression :

Un dôme sphérique [4] est modélisé par le logiciel ANSYS et notre programme Axisym pour l'élément CAXI\_K, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-après :

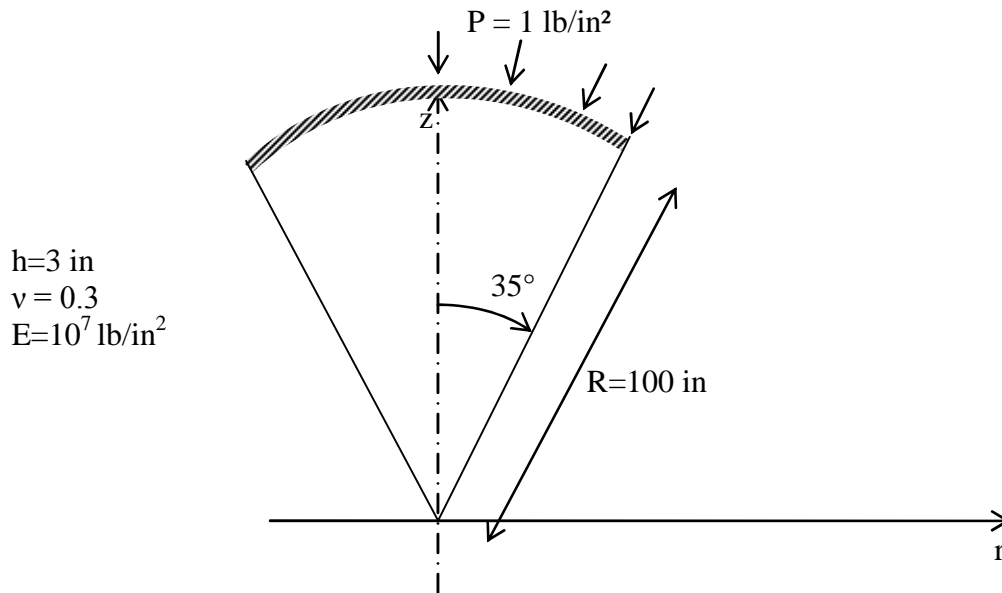


Figure (4 , 20) : Dôme sphérique sous pression

Maillage	ANSYS	Prog:CAXI_K	DIFF
5 éléments	1,6100E-04	1,7140E-04	-6,46%
10 éléments	1,4700E-04	1,5190E-04	-3,33%
14 éléments	1,4500E-04	1,4890E-04	-2,69%

Tableau (4 , 14) : Valeur de déplacement maximal (in)

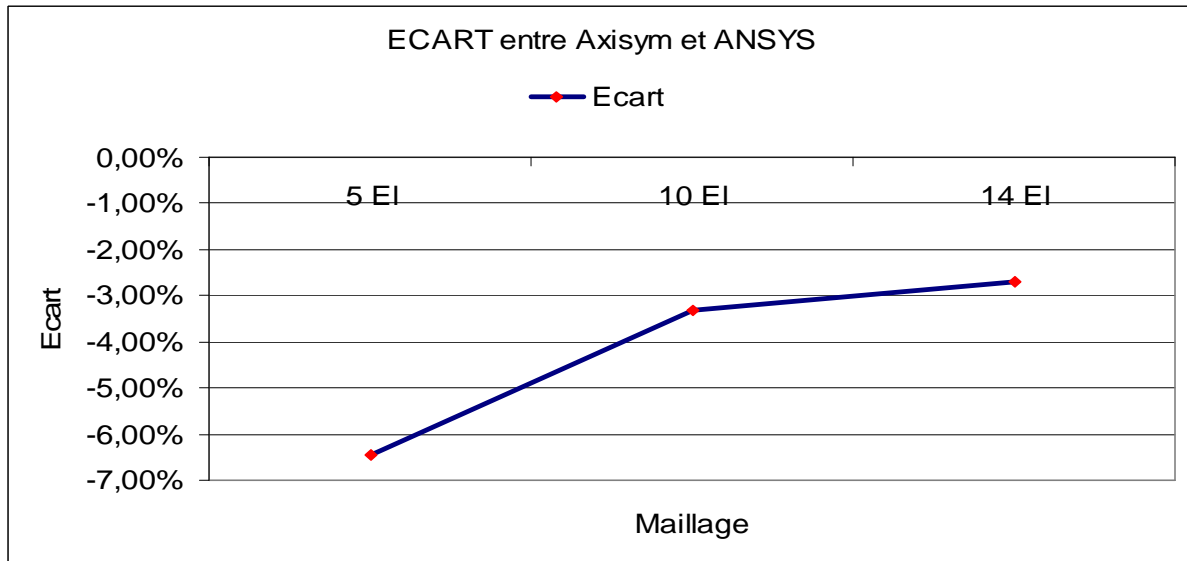


Figure (4 , 21) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS

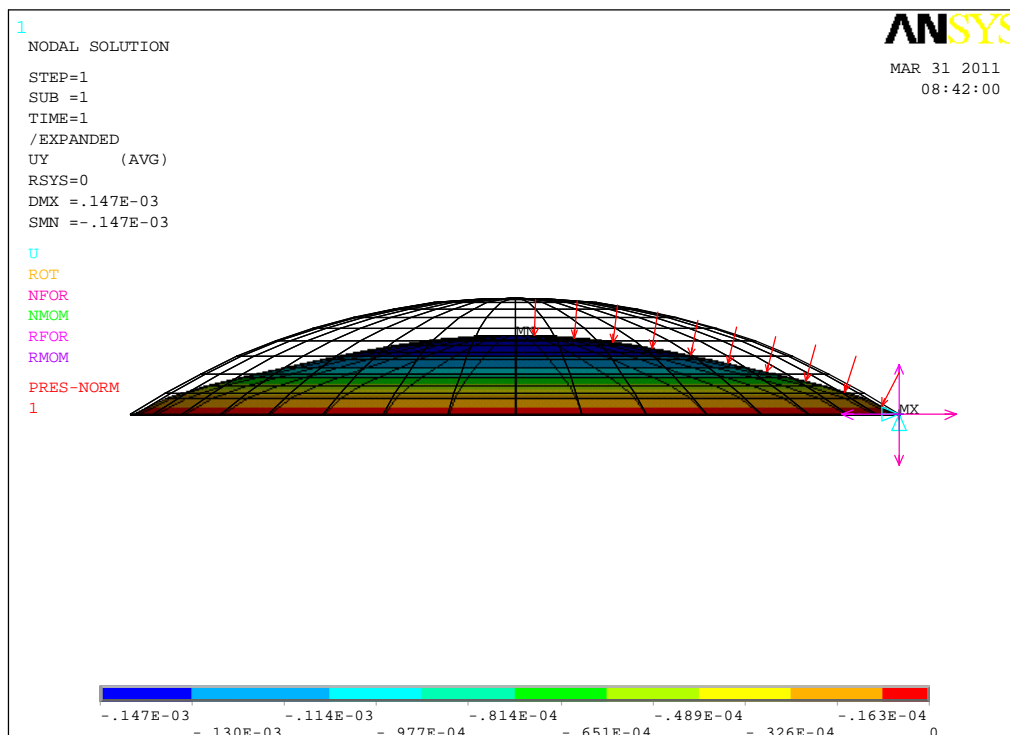


Figure (4 , 22) Structure déformée

### Commentaires :

On remarque que les résultats obtenus par ANSYS, et ce de notre programme pour l'élément CAXI\_K convergent de façon uniforme.

#### 4.1.10 Hyperboloïde :

Un hyperboloïde [4] (qui peut être un tour de refroidissement) est modélisé par le logiciel ANSYS et notre programme Axisym pour l'élément CAXI\_K, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-après :

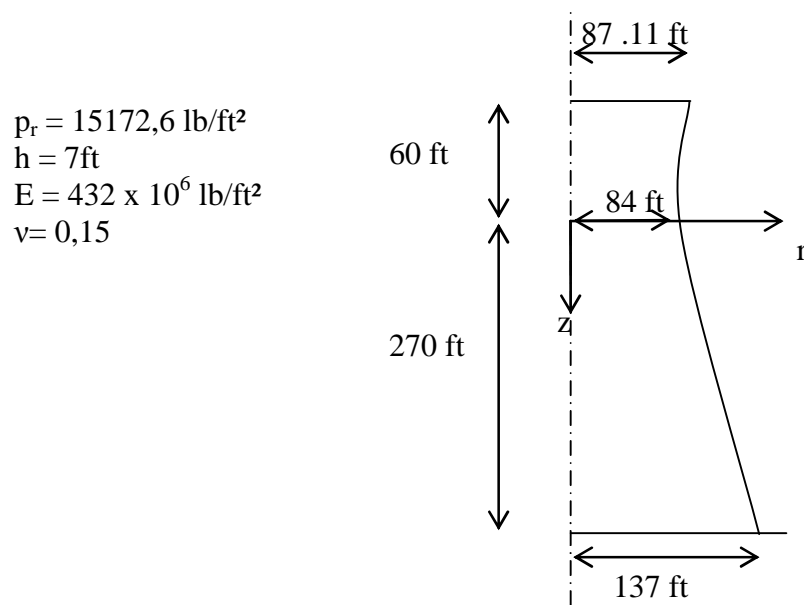


Figure (4 , 23) : hyperboloïde

Maillage	ANSYS	Prog:CAXI_K	DIFF
7 éléments	0,0414	0,02537	38,72%
20 éléments	0,03823	0,03815	0,21%
30 éléments	0,03823	0,03857	-0,89%

Tableau (4 , 15) : Valeur de déplacement maximal (ft)



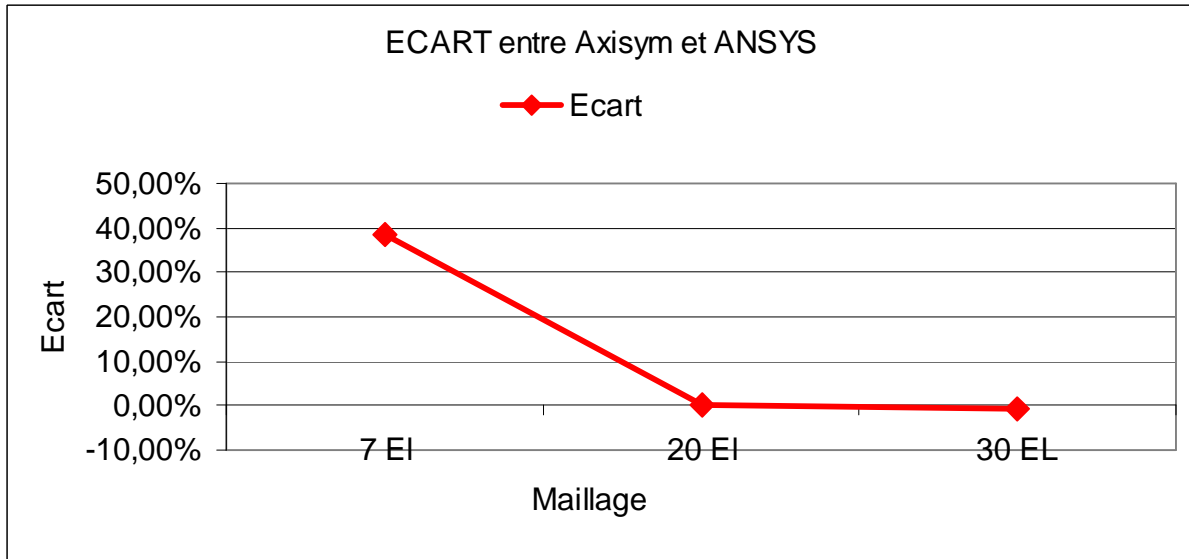


Figure (4 , 24) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS

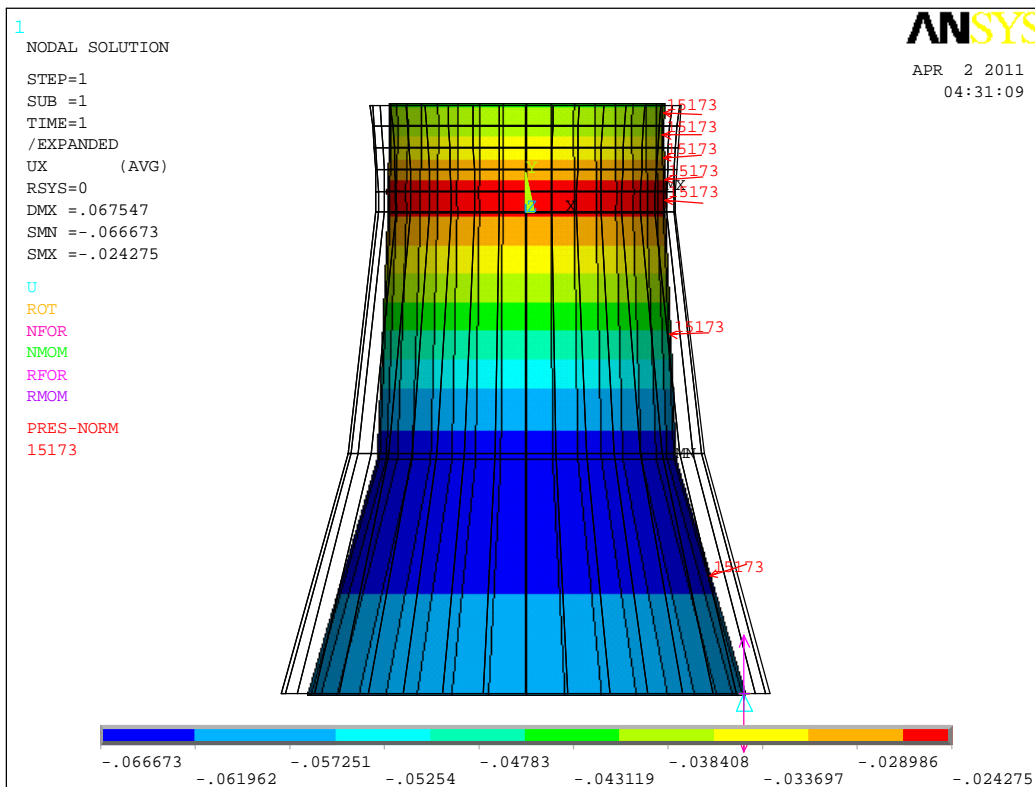


Figure (4 , 25) Structure déformée

**Commentaires :**

On remarque que les résultats obtenus par le logiciel ANSYS convergent rapidement au démarrage par rapport à notre programme pour l'élément CAXI\_K, ensuite les deux programmes convergent vers le même résultat.

#### 4.1.11 Cylindre conique :

Un cylindre conique [8] est modélisé par le logiciel ANSYS et notre programme Axisym pour l'élément CAXI\_L, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-après :

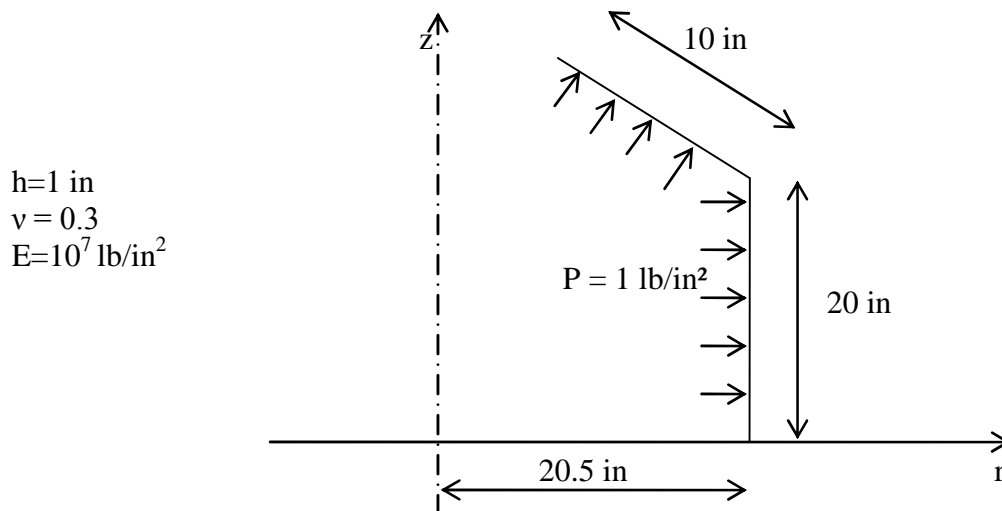


Figure (4 , 26) : Cylindre conique

Maillage	ANSYS	Prog:CAXI_L	DIFF
4 éléments	4,338E-05	4,347E-05	-0,21%
8 éléments	3,592E-05	3,599E-05	-0,19%
12 éléments	3,455E-05	3,461E-05	-0,17%

Tableau (4 , 16) : Valeur de déplacement maximal (in)

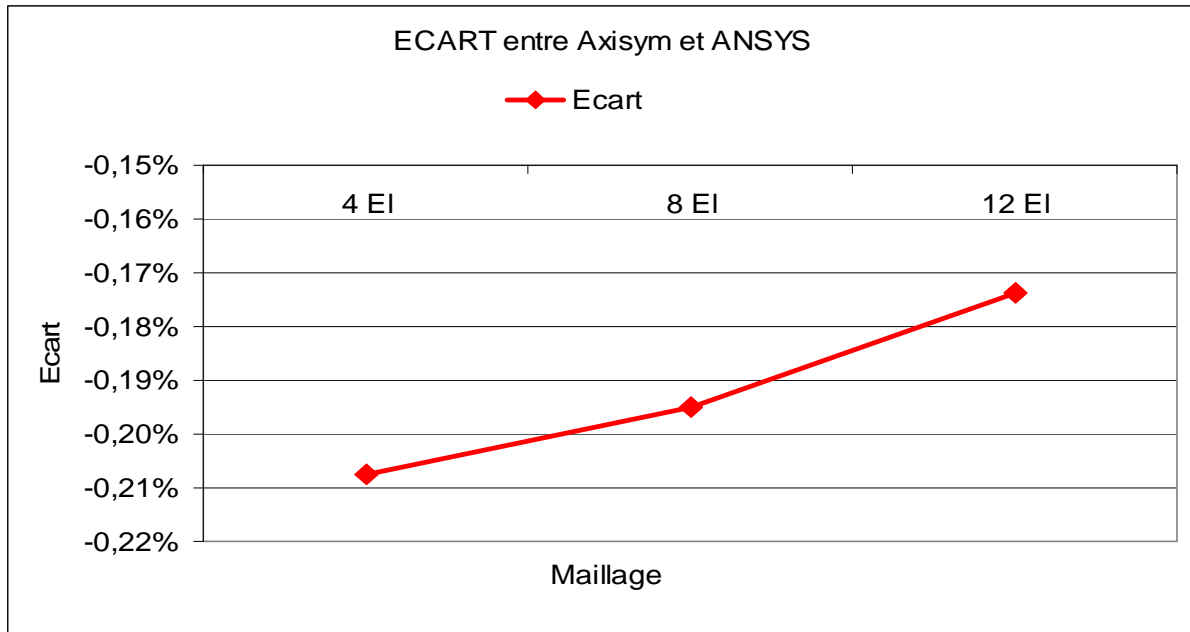


Figure (4 , 27) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS

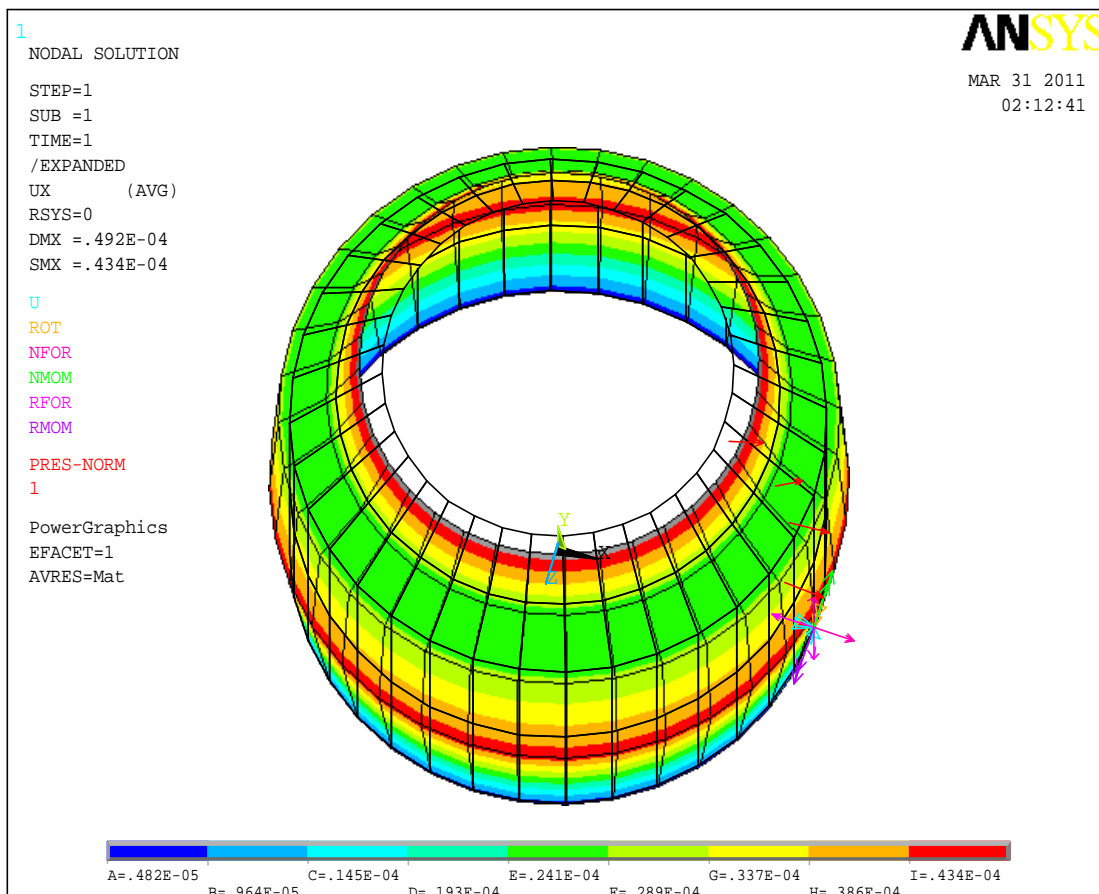


Figure (4 , 28) Structure déformée

**Commentaires :**

On remarque que les résultats obtenus par ANSYS, et ceux de notre programme pour l'élément CAXI\_L convergent de façon uniforme.

#### 4.1.12 Cône de révolution

Un cône de révolution [8] est modélisé par le logiciel ANSYS et notre programme Axisym pour l'élément CAXI\_L, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-après :

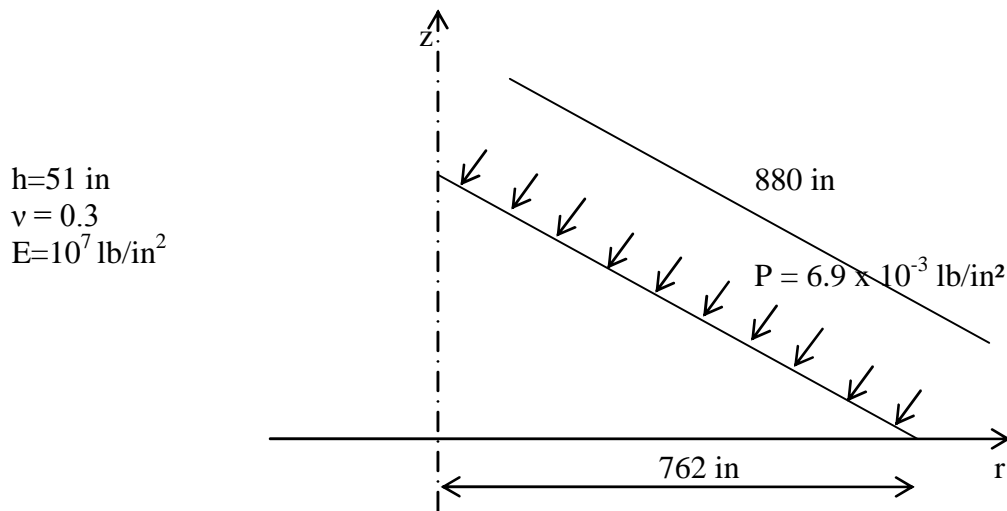


Figure (4 , 29) : Cône de révolution

Maillage	ANSYS	Prog:CAXI_L	DIFF
2 éléments	1,642E-05	1,645E-05	-0,18%
6 éléments	1,104E-05	1,103E-05	0,09%
10 éléments	1,107E-05	1,106E-05	0,09%

Tableau (4 , 17) : Valeur de déplacement maximal (in)

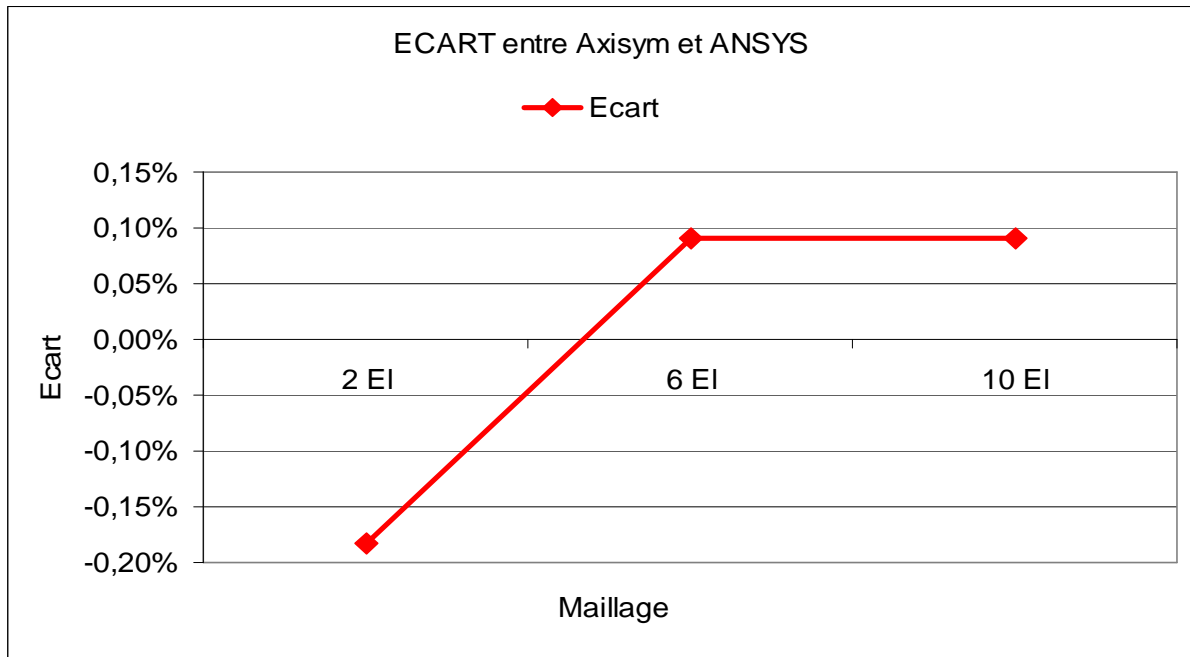


Figure (4 , 30) variation de l'écart entre Axisym et ANSYS

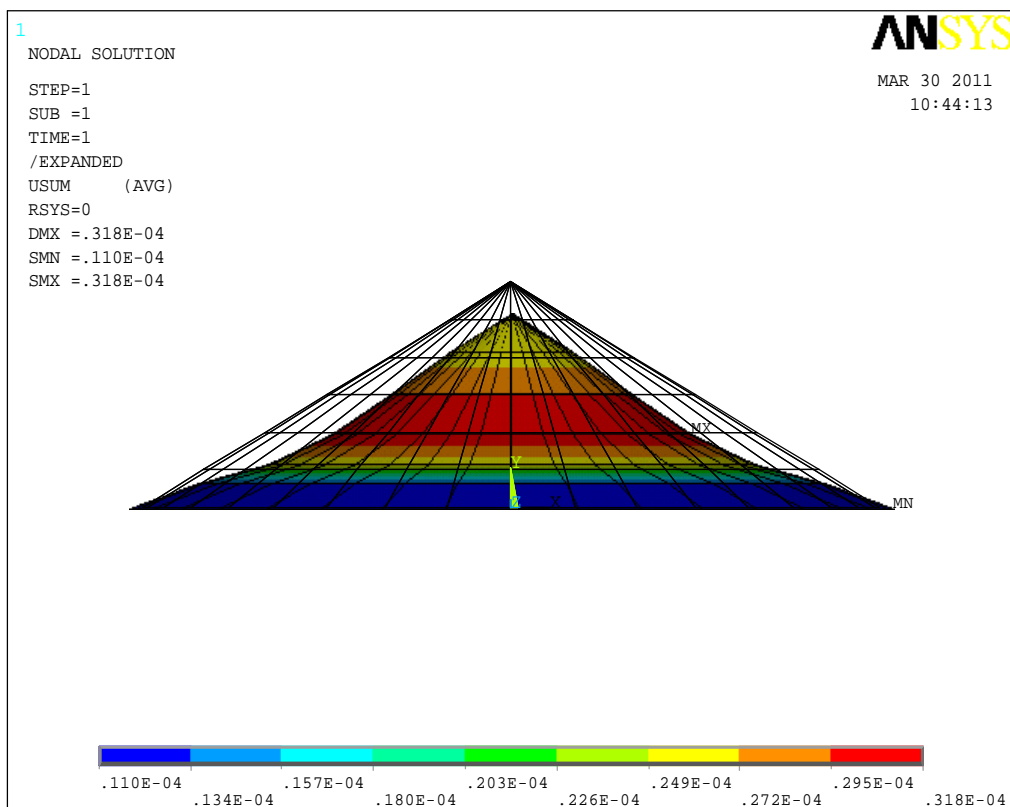


Figure (4 , 31) Structure déformée

**Commentaires :**

On remarque que les résultats obtenus par ANSYS, et ceux de notre programme pour l'élément CAXI\_L convergent de façon uniforme.

## 4.2 Solide de révolution

### 4.2.1 Cylindre épais :

Un cylindre épais [1] est soumis à une pression interne est modélisé par l'élément T3AX, les dimensions et les caractéristiques sont tel que :

Diamètre intérieur = 2 in , Diamètre extérieur = 4 in

Hauteur = 4 in

Pression interne  $P = 0.3975 \text{ ton/in}^2$   $E = 13400 \text{ ton/in}^2$  ,  $\nu = 0.3$

Conditions aux limites :  $U_r=0$  aux extrémités

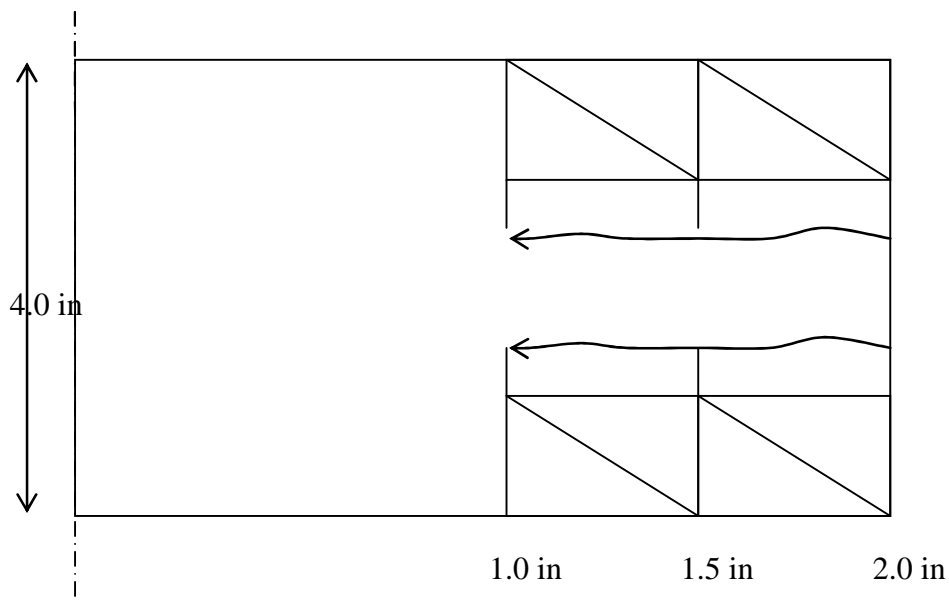


Figure (4 , 32) cylindre épais

Position radiale (in)	Prog:T3AX		
	Maillage 40 ELE 33 nœuds	Maillage 100 ELE 66 nœuds	Maillage 200 ELE 121 nœuds
1,00	5,734E-05	5,672E-05	5,691E-05
1,10			5,259E-05
1,20		4,874E-05	4,910E-05
1,30			4,623E-05
1,40		4,344E-05	4,386E-05
1,50	4,049E-05		4,189E-05
1,60		3,976E-05	4,022E-05
1,70			3,882E-05
1,80		3,714E-05	3,762E-05
1,90			3,662E-05
2,00	3,444E-05	3,523E-05	3,576E-05

Tableau (4 , 18) : Valeur de déplacement radiale (in)

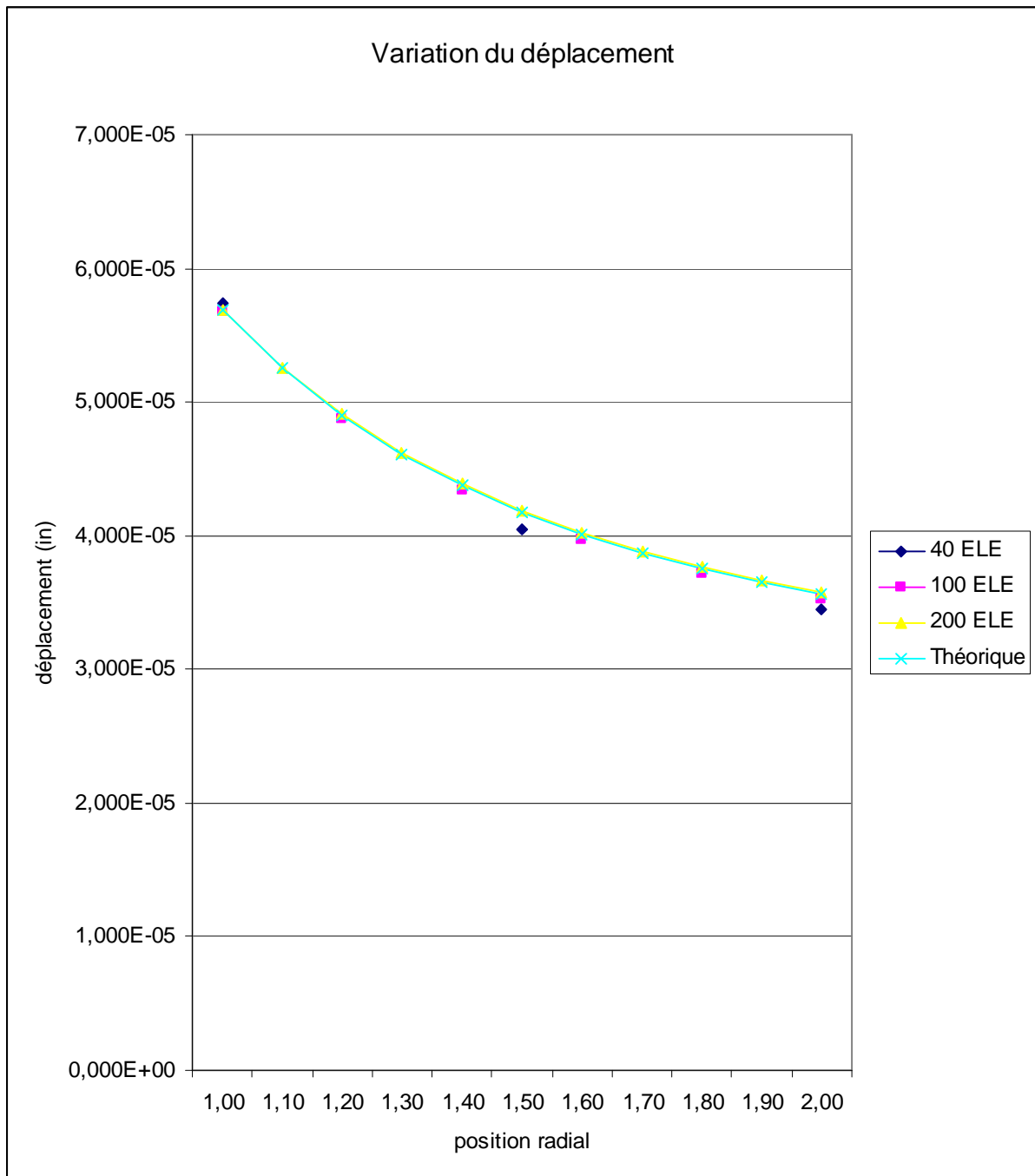
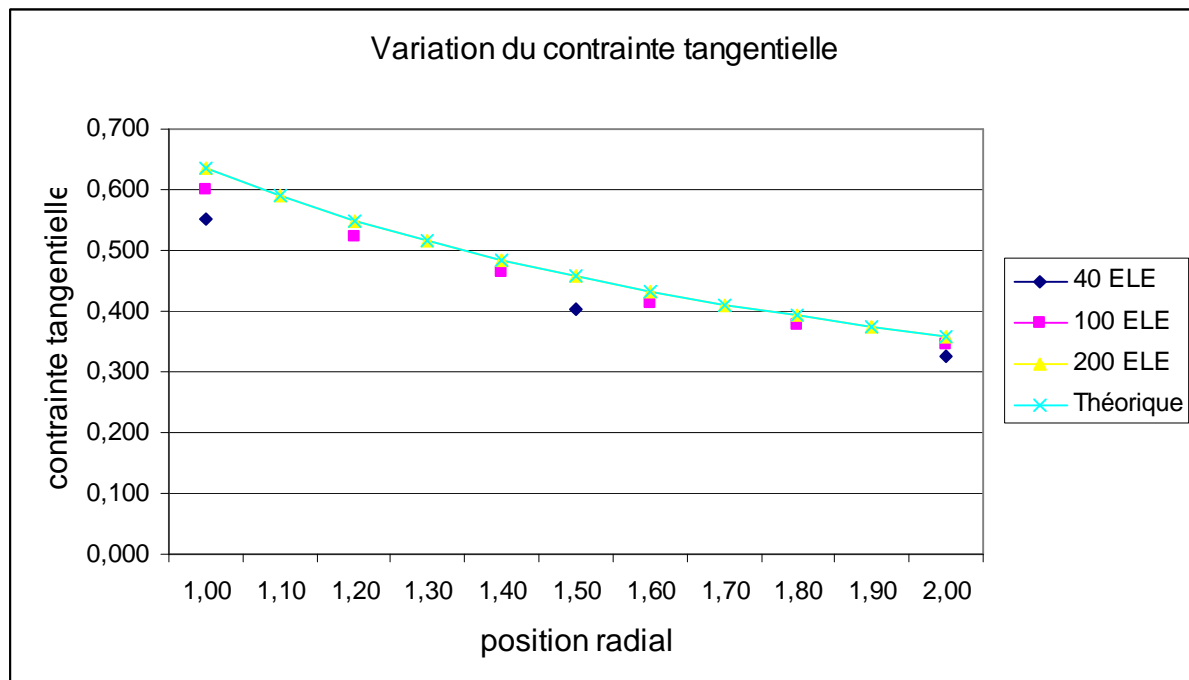


Figure (4 , 33) Variation du déplacement (in)

Position radiale (in)	Prog:T3AX		
	Maillage 40 éléments 33 nœuds	Maillage 100 éléments 66 nœuds	Maillage 200 éléments 121 nœuds
	$\sigma_{\theta}$	$\sigma_{\theta}$	$\sigma_{\theta}$
1,00	0,552	0,600	0,634
1,10			0,590
1,20		0,523	0,549
1,30			0,515
1,40		0,463	0,484
1,50	0,402		0,457
1,60		0,414	0,433
1,70			0,411
1,80		0,378	0,392
1,90			0,375
2,00	0,326	0,346	0,359

Tableau (4 , 19) : Valeur de contrainte tangentielle (ton/in<sup>2</sup>)Figure (4 , 34) Variation du contrainte tangentielle (ton/in<sup>2</sup>)



Position radiale (in)	Prog:T3AX		
	Maillage 40 éléments 33 nœuds	Maillage 100 éléments 66 nœuds	Maillage 200 éléments 121 nœuds
	$\sigma_r$	$\sigma_r$	$\sigma_r$
1,00	-0,240	-0,330	-0,363
1,10			-0,360
1,20		-0,328	-0,278
1,30			-0,278
1,40		-0,191	-0,213
1,50	-0,256		-0,214
1,60		-0,196	-0,162
1,70			-0,165
1,80		-0,108	-0,122
1,90			-0,125
2,00	-0,048	-0,113	-0,090

Tableau (4 , 20) : Valeur de contrainte radial (ton/in<sup>2</sup>)**Commentaires :**

D'après les courbes des variations des déplacements et contraintes, On remarque que notre programme donne des bons résultats pour les déplacements et les contraintes, on comparant avec la solution analytique,

#### 4.2.2 Problème de BOUSSINESQ :

C'est une surface circulaire (du sol) [43] soumise à une charge uniformément répartie égale à  $1 \text{ KN/m}^2$ , la modélisation se fait avec 56 éléments de type T3AX

Les caractéristiques du sol :

$$E = 1 \text{ KN/m}^2 \quad \nu = 0,3 \quad R = 5 \text{ m}$$

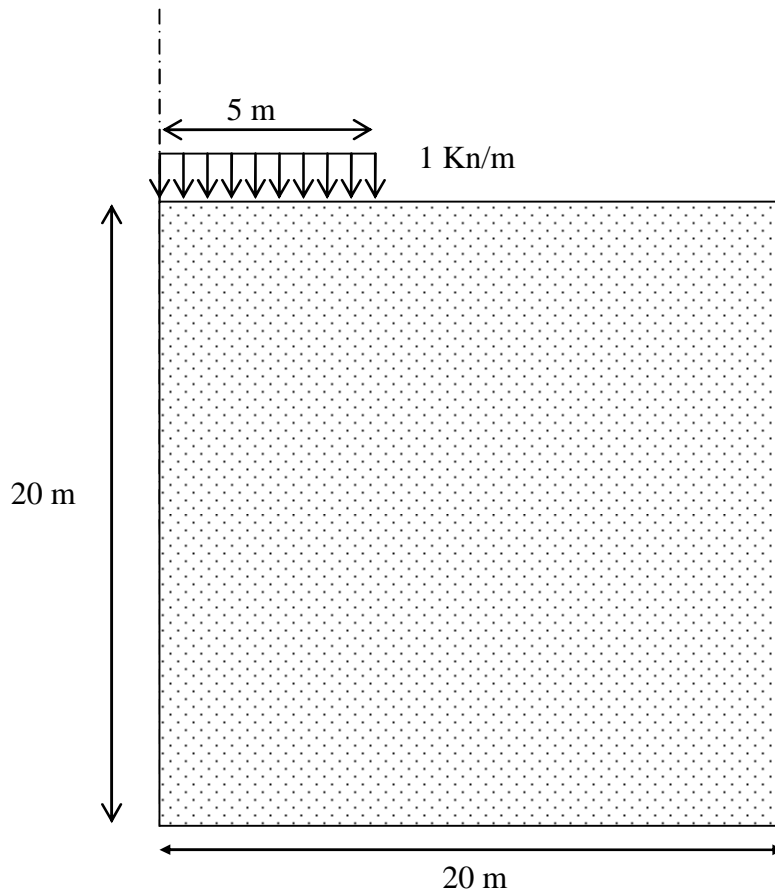


Figure (4 , 35) Problème de BOUSSINESQ

Maillage 56 éléments 37 nœuds			
nœud	SOL analytique	Prog:Axisym	Erreur
1	-0,98	-1,05	-7,14%
2	-0,98	-0,98	0,00%
3	-0,99	-0,95	4,04%
4	-0,97	-0,92	5,15%
6	-0,99	-0,99	0,00%
7	-0,86	-0,92	-6,98%
8	-0,76	-0,76	0,00%
20	-0,37	-0,44	-18,92%
32	-0,18	-0,13	27,78%
44	-0,13	-0,14	-7,69%

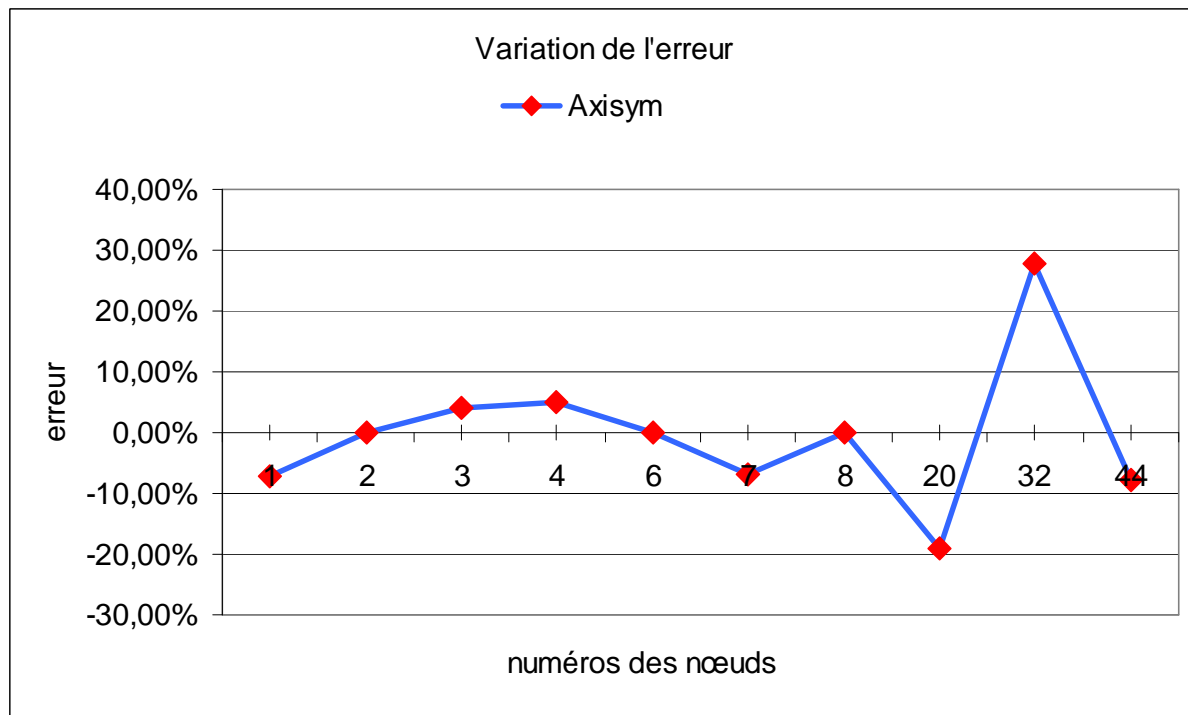
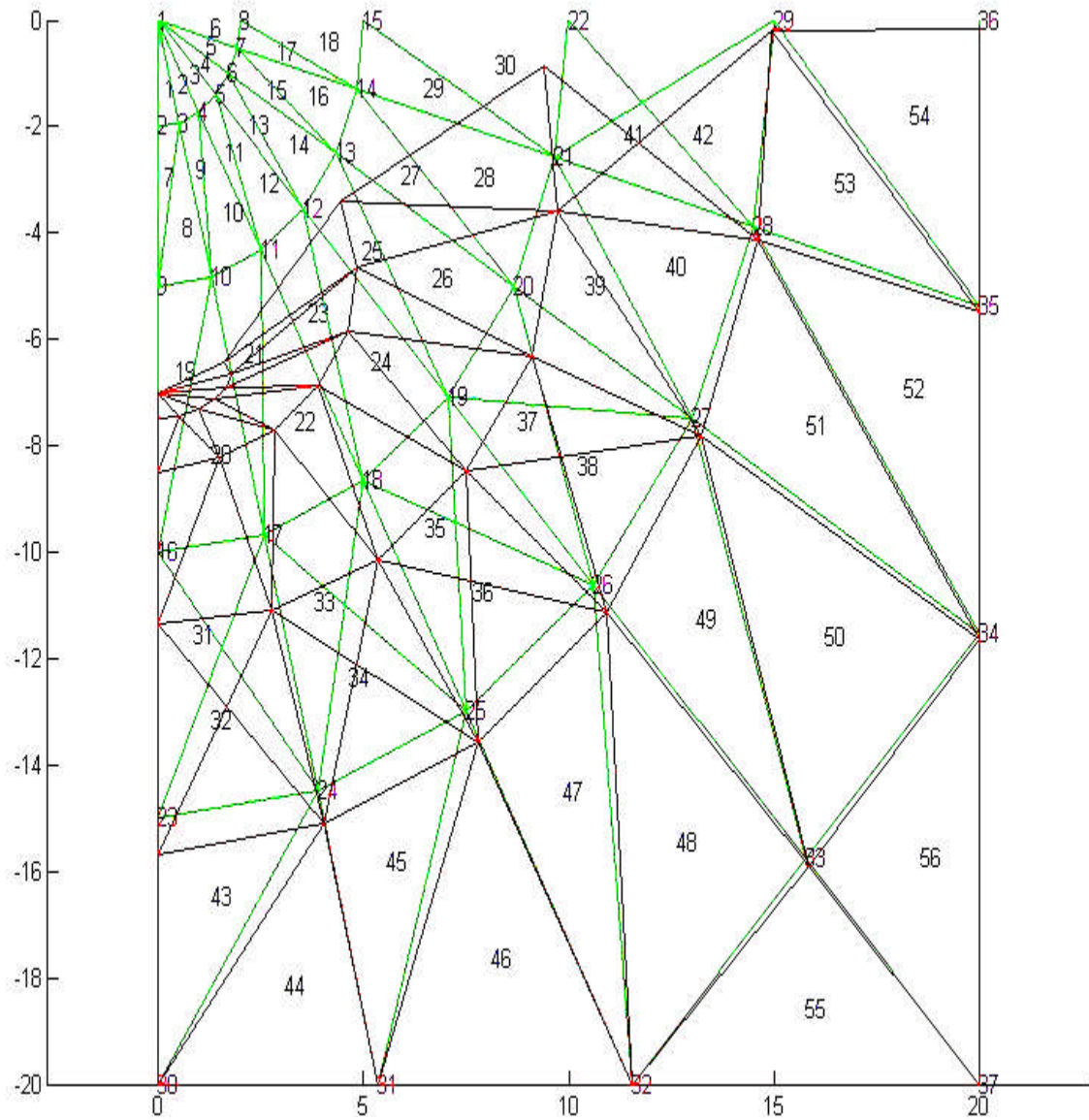
Tableau (4 , 21) : Valeur des contraintes radial Kn/m<sup>2</sup>

Figure (4 , 36) Variation de l'erreur en déplacement

**Commentaires :**

L'erreur entre la solution obtenue avec notre programme et la solution théorique est comprise entre 4 % et 28 %, cependant l'erreur peut être diminuée en raffinant le maillage.

Figure (4 , 37): Structure déformée problème de BOUSSINESQ  
(Prog :AxisymT3AX dessins obtenus avec MATLAB)



## **CONCLUSION**

---

**CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS:**

D'après cette étude et les résultats obtenus dans ce cadre on peut conclure quelques remarques qui peuvent être utiles dans le développement des éléments finis destinés aux calculs des structures axisymétriques :

- ✓ Le choix du modèle mathématique joue un rôle très important, dans les applications étudiées au chapitre 4 on remarqué la supériorité de l'élément CAXI\_L qui utilise une formulation mixte par rapport à l'élément CAXI\_K où la formulation à été faite avec un modèle en déplacement, même pour des cas où la solution analytique est basé sur la théorie de Love-Kirchoff, donc on peut dire que si on utilise la formulation variationnelle mixte (type Hellinger – Reissner), on peut construire d'autre modèles mixtes qui peuvent présenter plus de précision.
- ✓ Pour les éléments de type coques l'augmentations du nombres des point d'intégration ne porte pas des améliorations sur la solution, au contraire il nous donne dans certains cas des mauvais résultats, ce qui à été remarqué dans l'exemple : 4.1.1 pour l'élément CAXI\_L, où seul l'intégration réduites qui donne de bons résultats, aussi si on utilise un schéma d'intégration numérique avec plus de deux points de gauss pour l'élément CAXI\_K, les résultats sera identiques à ceux obtenus avec deux points de Gauss, l'utilisation d'un seul point de Gauss pour ce type d'élément donne des résultats inacceptables.
- ✓ L'augmentation de l'ordre du champ de déplacement comme il a été mentionné dans le chapitre 1, par l'utilisation des techniques des degrés de liberté additionnels, peut présenter des améliorations sur la précision des résultats.
- ✓ Vu la forme géométrique et les dimensions importantes de ce type de structures l'analyse non linéaire géométrique est souhaitable.

Vu l'efficacité des éléments finis à champ de déformation on recommande la formulation des éléments finis pour ces structures de révolution.

## **BIBLIOGRAPHIE**

**BIBLIOGRAPHIE:**

- [1] C.ROCKEY, H.R. EVANS, D.W. GRIFFITHS, D.A. NETHERCOT Introduction à la méthode des éléments finis. EYROLLES 1979.
- [2] BATOZ, J.L., DHATT.G., Modélisation des structures par éléments finis volume 3, HERMES 1992.
- [3] ROARCK, R., YOUNG, W., Formulas for stress and strain. McGraw-Hill, 5<sup>th</sup> edition 1975.
- [4] O.C ZIENKIEWICZ AND R.L TAYLOR, the finite element method volume 2 Solid mechanic fifth edition Butterworth-Heinemann, 2000.
- [5] FREY, F., STUDER, M.A., Analyse des structures et milieu continue volume 5, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003.
- [6] TOZOUT, G., DHATT, G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S.A 1981.
- [7] SERGE LAROZE résistance des matériaux et structures, tome 1, Milieux continus solides plaques et coques, EYROLLES – MASSON, 1983.
- [8] F.HAZIM ,Phd Thesis ,University of walls, 1989, UC
- [9] RATHOD, H.A, Explicit stiffness matrices for axisymmetric triangular element, Comput. and Struct, Vol. 30, N° 5, p. 1091-1100. 1988.
- [10] BATOZ, J.L., DHATT.G., Modélisation des structures par éléments finis volume 1, HERMES 1990.
- [11] BATOZ, J.L., DHATT.G., Modélisation des structures par éléments finis volume 2, HERMES 1990.
- [12] UTKU, S., Explicit expression for triangular torus stiffness matrix, AIAA J., Vol. 6, p. 1174-1176, 1968.
- [13] DAVID,V. HUTTON, fundamentals of finite element analysis, McGraw - Hill, 2004.



- [14] DUROCHER, L., GASPER, A., RHOADES, G., A numerical comparison of axisymmetric finite element, IJNME, Vol. 12, p. 1415-1427, 1978.
- [15] KIM JIN-GON Korean Society of Mechanical Engineers, Seoul, COREE, REPUBLIQUE 2004 (Revue)
- [16] G.A.MOHR Application of penalty functions to a curved isoparametric axisymmetric thick shell element, Computers & Structures Volume 15, Issue 6, 1982, Pages 685-690.
- [17] PROST, J.P., Analyse de la stabilité élastique des voiles minces de révolution par la méthode des éléments finis, Thèse de maîtrise es sciences, Université Laval, Québec, 1975.
- [18] CHAN,A.S.L, TRBOJEVIC,V.M, Thin shell finite element by the mixed method formulation, CMAME 1977
- [19] M. HANNACHI, H. NACEUR, J.L. BATOZ, S. BELOUETTAR 8<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures Mai 2007, Giens
- [20] COMBESCURE, A., Etude numérique du flambage plastique des coques de révolution, dans Volume 3, Calcul des structures et intelligence artificielle, (Fouet et al. Eds.), Pluralis, p. 81-95, 1990.
- [21] PRATHAP, G., RAMESH BABU,C.R., A field consistent three noded quadratic curved axisymmetric shell element, IJNME, Vol. 23, p.711-723, 1986.
- [22] RAMESH BABU,C., PRATHAP, G., A field consistent two noded curved axisymmetric thick shell element, IJNME, Vol. 23, p.1245-1261, 1986.
- [23] TESSLER, A., An efficient conforming axisymmetric shell element including transverse shear and rotary inertia, Computers & Structures Vol 15 N° 5, p. 567-574, 1982
- [24] DESPINOY, J.P, Modélisation des coques de révolution par éléments finis. Formulations et applications en statique et dynamique, Mémoire d'ingénieur CNAM, 1991.

- [25] LIU, X.J, Modélisation de coques minces axisymétriques en grandes déformations élasto-plastiques. Thèse de doctorat, UTC, 1991.
- [26] ENGRAND, D., BORDAS, J., Calcul des coques en matériaux multicouches et sandwiches, par la méthode des éléments finis, la Recherche Aérospatiale, n°2, p. 109-118, 1973
- [27] JONES, R.E, STROME, D.R, Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curved elements, AIAA J., Vol. 4, N° 9, p. 1519-1526, 1966
- [28] MEBANE, P.M., STRICKLIN, J.A., Implicit rigid body motion in curved finite elements, AIAA J., Vol. 9, N° 2, p. 344-345, 1971.
- [29] STRICKLIN, J.A., NAVARATNA, D.R, PIAN, T.H.H., Improvements on the analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, AIAA J., Vol. 4, p. 2069-2072, 1966.
- [30] BROMBOLISH, L., GOULD, P., Finite element analysis of shells of revolution by minimization of the potential energy functional, Proceeding Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Nashville, USA, p. 279-307, 1969.
- [31] GOULD, P., Finite element analysis of shells of revolution, Pitman Publishing Ltd, London, 1985.
- [32] POPOV, E.P., SHARIFI, P., A refined curved element for thin shells of revolution, IJNME, Vol. 3, p.495-508, 1971.
- [33] SHIVAKUMAR, K.N., KRISHNA MURTY, A.V., A high precision ring element for vibration of laminated shells, J. Sound Vibrations, Vol. 58, p. 311-318, 1978.
- [34] HITCHINGS, D., Axisymmetric thin shells, in finite element analysis of thin walled Structures, J. Bull Ed., Elsevier, 1988, p. 133-164.

- [35] EL HARIF, A., Etude par la méthode des éléments finis de l'effet de cisaillement transverse dans les plaques et les coques de révolution, Thèse de doctorat es Sciences, Université de Mouhamed V, Rabat, Maroc, Décembre 1988.
- [36] LUKASIEWICZ, S., Local loads in plate and shells, Sijthoff at Noordhoff, 1979.
- [37] LEISSA, A.W, NARITA, Y., Natural frequencies of simply supported circular plates, JSV, Vol. 70, p. 221-229, 1980.
- [38] TESSLER, A., SPIRIDIGLIOZZI, L., Resolving membrane and shear locking phenomena in curved shear deformable axisymmetric shell elements, IJNME, Vol. 26, p. 1071-1086, 1988.
- [39] GRAFTON, P.E, STROME, D.R, Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method, AIAAJ., Vol. 1, n° 10, p. 2342-2347, 1963.
- [40] MEYER, R.R, HARMON, M.B, Conical segment method for analyzing open crown shells of revolution for edge loadings, AIAAJ., Vol. 1, n° 4, p. 886-891, 1963.
- [41] PERCY, J.H, PIAN, T.N.H, KLEIN, S., NAVARATNA, D.R., Application of matrix displacement method for linear elastic analysis of shell of revolution, AIAA J., Vol. 3, n° 11, p. 2138-2145, Nov. 1965.
- [42] POPOV, E.P, PENZIEN, J, LU., Z.A., Finite element solution for axisymmetric shells, J. Engng. Mech, Div., ASCE, Vol. 90, p. 119-145, 1964.
- [43] O.C ZIENKIEWICZ AND R.L TAYLOR, the finite element method volume 1 The basic fifth edition Butterworth-Heinemann, 2000.

# **ANNEXE**





MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
 4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI\_K  
 fichier de données du probleme : elemtronc9ELE  
 Nombre des elements total :9  
 Nombre des noeuds total : 10

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002815	-0.00001	+0.01629
2	+0.000373	+0.00000	+0.00680
3	-0.000181	+0.00000	+0.00015
4	-0.000084	+0.00000	-0.00063
5	-0.000004	-0.00000	-0.00018
6	+0.000007	-0.00000	+0.00002
7	-0.000000	+0.00000	-0.00000
8	+0.000000	-0.00000	+0.00000
9	+0.000000	+0.00000	+0.00000
10	+0.000000	+0.00000	+0.00000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	-0.0000	-2.142	+0.0000	+0.0000	-2.9926	-0.049
2	-0.0000	-3.291	+0.0487	+0.0000	-3.0043	-0.013
3	-0.0000	-3.279	+0.0126	+0.0000	-3.1207	+0.002
4	+0.0000	-3.162	-0.0015	-0.0000	-3.1497	+0.002
5	-0.0000	-3.134	-0.0017	+0.0000	-3.1458	+0.000
6	+0.0000	-7.850	-0.0003	-0.0000	-7.8538	-0.000
7	-0.0000	-7.854	+0.0000	+0.0000	-7.8540	+0.000
8	-0.0000	-31.416	-0.0000	+0.0000	-31.4159	+0.000
9	-0.0000	-31.416	-0.0000	+0.0000	-31.4159	-0.000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
 4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI\_L  
 fichier de données du probleme : elemtronc9ELE  
 Nombre des elements total :9  
 Nombre des noeuds total : 10

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002875	-0.00001	+0.01652
2	+0.000346	+0.00000	+0.00875
3	-0.000439	+0.00000	-0.00089
4	-0.000168	+0.00000	-0.00181
5	+0.000039	-0.00000	-0.00027
6	+0.000038	-0.00000	+0.00027
7	-0.000014	+0.00000	-0.00006
8	+0.000001	-0.00000	+0.00000
9	+0.000000	-0.00000	+0.00000
10	+0.000000	+0.00000	+0.00000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	-0.0000	-2.142	-0.0000	+0.0000	-2.8531	-0.071
2	-0.0000	-3.430	+0.0712	+0.0000	-2.8903	-0.017
3	-0.0000	-3.393	+0.0172	+0.0000	-3.1332	+0.009
4	-0.0000	-3.150	-0.0088	+0.0000	-3.1851	+0.005
5	-0.0000	-3.098	-0.0053	+0.0000	-3.1544	-0.000
6	-0.0000	-7.841	+0.0004	+0.0000	-7.8432	-0.001
7	-0.0000	-7.865	+0.0009	+0.0000	-7.8569	+0.001
8	-0.0000	-31.413	-0.0011	+0.0000	-31.4151	-0.001
9	-0.0000	-31.417	+0.0011	+0.0000	-31.4145	+0.001



Résultats ANSYS

4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité :

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.16060E-06	-0.96360E-08	0.0000	0.16089E-06
3	0.76879E-06	-0.65399E-07	0.0000	0.77156E-06
4	-0.14488E-04	0.14039E-06	0.0000	0.14489E-04
5	0.38083E-04	-0.21354E-06	0.0000	0.38084E-04
6	0.38667E-04	-0.67404E-06	0.0000	0.38673E-04
7	-0.16843E-03	0.10452E-06	0.0000	0.16843E-03
8	-0.43882E-03	0.37480E-05	0.0000	0.43883E-03
9	0.34571E-03	0.43066E-05	0.0000	0.34574E-03
10	0.28756E-02	-0.15021E-04	0.0000	0.28756E-02

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	10	10	0	10
VALUE	0.28756E-02	-0.15021E-04	0.0000	0.28756E-02

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : elemtroncl4ELE  
Nombre des elements total :14  
Nombre des noeuds total : 15

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002861	-0.00001	+0.01643
2	+0.001353	-0.00000	+0.01279
3	+0.000373	+0.00000	+0.00688
4	-0.000076	+0.00000	+0.00245
5	-0.000189	+0.00000	+0.00014
6	-0.000155	+0.00000	-0.00064
7	-0.000086	+0.00000	-0.00065
8	-0.000033	-0.00000	-0.00041
9	-0.000003	-0.00000	-0.00018
10	+0.000007	-0.00000	-0.00004
11	+0.000007	-0.00000	+0.00002
12	-0.000000	+0.00000	-0.00000
13	+0.000000	+0.00000	+0.00000
14	+0.000000	+0.00000	+0.00000
15	+0.000000	+0.00000	+0.00000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	+0.0000	-0.571	+0.0000	-0.0000	-1.7400	-0.053
2	+0.0000	-1.402	+0.0529	-0.0000	-1.4144	-0.050
3	+0.0000	-1.727	+0.0499	-0.0000	-1.3696	-0.030
4	+0.0000	-1.772	+0.0304	-0.0000	-1.4302	-0.013
5	+0.0000	-1.711	+0.0129	-0.0000	-1.5017	-0.003
6	-0.0000	-1.640	+0.0026	+0.0000	-1.5500	+0.002
7	-0.0000	-1.592	-0.0016	+0.0000	-1.5729	+0.002
8	-0.0000	-1.569	-0.0024	+0.0000	-1.5794	+0.002
9	-0.0000	-1.562	-0.0017	+0.0000	-1.5782	+0.001
10	-0.0000	-1.563	-0.0009	+0.0000	-1.5752	+0.000
11	-0.0000	-7.850	-0.0003	+0.0000	-7.8538	-0.000
12	-0.0000	-7.854	+0.0000	+0.0000	-7.8540	+0.000
13	-0.0000	-31.416	-0.0000	+0.0000	-31.4159	-0.000
14	+0.0000	-31.416	+0.0000	+0.0000	-31.4159	+0.000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
 4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI\_L  
 fichier de données du probleme : elemtroncl4ELE  
 Nombre des elements total :14  
 Nombre des noeuds total : 15

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002875	-0.00001	+0.01652
2	+0.001378	-0.00000	+0.01338
3	+0.000347	+0.00000	+0.00724
4	-0.000134	+0.00000	+0.00241
5	-0.000247	+0.00000	-0.00015
6	-0.000191	+0.00000	-0.00096
7	-0.000100	+0.00000	-0.00087
8	-0.000031	-0.00000	-0.00051
9	+0.000004	-0.00000	-0.00019
10	+0.000014	-0.00000	-0.00001
11	+0.000011	-0.00000	+0.00006
12	-0.000002	+0.00000	-0.00000
13	-0.000001	-0.00000	-0.00000
14	+0.000001	-0.00000	+0.00000
15	+0.000000	+0.00000	+0.00000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	+0.0000	-0.571	+0.0000	-0.0000	-1.7200	-0.057
2	-0.0000	-1.422	+0.0575	+0.0000	-1.3749	-0.055
3	-0.0000	-1.767	+0.0551	+0.0000	-1.3322	-0.033
4	-0.0000	-1.809	+0.0334	+0.0000	-1.4083	-0.013
5	-0.0000	-1.733	+0.0133	+0.0000	-1.4958	-0.001
6	-0.0000	-1.646	+0.0015	+0.0000	-1.5539	+0.003
7	-0.0000	-1.588	-0.0031	+0.0000	-1.5800	+0.003
8	-0.0000	-1.562	-0.0035	+0.0000	-1.5853	+0.002
9	-0.0000	-1.556	-0.0023	+0.0000	-1.5817	+0.001
10	-0.0000	-1.560	-0.0010	+0.0000	-1.5766	+0.000
11	-0.0000	-7.848	-0.0002	+0.0000	-7.8506	-0.000
12	-0.0000	-7.857	+0.0004	+0.0000	-7.8539	+0.000
13	-0.0000	-31.416	-0.0004	+0.0000	-31.4168	-0.000
14	-0.0000	-31.415	+0.0004	+0.0000	-31.4141	+0.000

Résultats ANSYS

4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité:

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.67033E-06	-0.40220E-07	0.0000	0.67154E-06
3	-0.91623E-06	-0.25466E-07	0.0000	0.91658E-06
4	-0.23498E-05	0.23525E-07	0.0000	0.23500E-05
5	0.11493E-04	-0.11362E-06	0.0000	0.11494E-04
6	0.14023E-04	-0.19017E-06	0.0000	0.14024E-04
7	0.40991E-05	-0.24454E-06	0.0000	0.41064E-05
8	-0.30767E-04	-0.16453E-06	0.0000	0.30768E-04
9	-0.99535E-04	0.22637E-06	0.0000	0.99535E-04
10	-0.19091E-03	0.10977E-05	0.0000	0.19091E-03
11	-0.24648E-03	0.24099E-05	0.0000	0.24649E-03
12	-0.13421E-03	0.35519E-05	0.0000	0.13425E-03
13	0.34729E-03	0.29127E-05	0.0000	0.34730E-03
14	0.13784E-02	-0.22644E-05	0.0000	0.13784E-02
15	0.28756E-02	-0.15026E-04	0.0000	0.28757E-02

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	15	15	0	15
VALUE	0.28756E-02	-0.15026E-04	0.0000	0.28757E-02

MATLAB Command window

4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI\_K

Nombre des elements total :24

Nombre des noeuds total : 25

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002871	-0.00001	+0.01650
2	+0.002066	-0.00001	+0.01538
3	+0.001357	-0.00000	+0.01284
4	+0.000789	+0.00000	+0.00982
5	+0.000372	+0.00000	+0.00691
6	+0.000092	+0.00000	+0.00441
7	-0.000078	+0.00000	+0.00246
8	-0.000163	+0.00000	+0.00106
9	-0.000191	+0.00000	+0.00013
10	-0.000183	+0.00000	-0.00040
11	-0.000156	+0.00000	-0.00065
12	-0.000121	+0.00000	-0.00071
13	-0.000087	+0.00000	-0.00066
14	-0.000057	+0.00000	-0.00055
15	-0.000033	-0.00000	-0.00041
16	-0.000015	-0.00000	-0.00029
17	-0.000003	-0.00000	-0.00018
18	+0.000004	-0.00000	-0.00010
19	+0.000007	-0.00000	-0.00004
20	+0.000008	-0.00000	+0.00000
21	+0.000007	-0.00000	+0.00002
22	-0.000000	+0.00000	-0.00000
23	+0.000000	-0.00000	+0.00000
24	+0.000000	+0.00000	+0.00000
25	+0.000000	+0.00000	+0.00000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	+0.0000	+0.215	+0.0000	-0.0000	-1.2926	-0.037
2	+0.0000	-0.278	+0.0369	-0.0000	-0.9525	-0.053
3	+0.0000	-0.618	+0.0531	-0.0000	-0.7404	-0.056
4	-0.0000	-0.830	+0.0557	+0.0000	-0.6266	-0.050
5	-0.0000	-0.944	+0.0502	+0.0000	-0.5823	-0.041
6	-0.0000	-0.989	+0.0409	+0.0000	-0.5825	-0.031
7	-0.0000	-0.988	+0.0306	+0.0000	-0.6078	-0.021
8	-0.0000	-0.963	+0.0210	+0.0000	-0.6440	-0.013
9	-0.0000	-0.927	+0.0130	+0.0000	-0.6819	-0.007
10	-0.0000	-0.889	+0.0069	+0.0000	-0.7161	-0.003
11	-0.0000	-0.855	+0.0026	+0.0000	-0.7439	+0.000
12	-0.0000	-0.827	-0.0001	+0.0000	-0.7647	+0.002
13	-0.0000	-0.806	-0.0017	+0.0000	-0.7789	+0.002
14	-0.0000	-0.792	-0.0023	+0.0000	-0.7877	+0.002
15	-0.0000	-0.783	-0.0024	+0.0000	-0.7924	+0.002
16	-0.0000	-0.778	-0.0022	+0.0000	-0.7941	+0.002
17	-0.0000	-0.777	-0.0018	+0.0000	-0.7940	+0.001
18	-0.0000	-0.777	-0.0013	+0.0000	-0.7929	+0.001
19	-0.0000	-0.778	-0.0009	+0.0000	-0.7914	+0.001
20	-0.0000	-0.779	-0.0006	+0.0000	-0.7899	+0.000
21	-0.0000	-7.850	-0.0003	+0.0000	-7.8538	-0.000
22	-0.0000	-7.854	+0.0000	+0.0000	-7.8540	+0.000
23	-0.0000	-31.416	-0.0000	+0.0000	-31.4159	+0.000
24	-0.0000	-31.416	-0.0000	+0.0000	-31.4159	-0.000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
 4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité: Prog CAXI\_L  
 fichier de données du probleme : elemtronc24ELE  
 Nombre des elements total :24  
 Nombre des noeuds total : 25

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.002875	-0.00001	+0.01652
2	+0.002074	-0.00001	+0.01549
3	+0.001361	-0.00000	+0.01299
4	+0.000788	+0.00000	+0.00995
5	+0.000365	+0.00000	+0.00699
6	+0.000079	+0.00000	+0.00444
7	-0.000093	+0.00000	+0.00244
8	-0.000178	+0.00000	+0.00101
9	-0.000205	+0.00000	+0.00007
10	-0.000195	+0.00000	-0.00048
11	-0.000164	+0.00000	-0.00072
12	-0.000127	+0.00000	-0.00077
13	-0.000090	+0.00000	-0.00071
14	-0.000058	+0.00000	-0.00058
15	-0.000032	-0.00000	-0.00044
16	-0.000014	-0.00000	-0.00030
17	-0.000002	-0.00000	-0.00018
18	+0.000005	-0.00000	-0.00010
19	+0.000008	-0.00000	-0.00003
20	+0.000009	-0.00000	+0.00001
21	+0.000008	-0.00000	+0.00003
22	-0.000001	+0.00000	+0.00000
23	-0.000001	-0.00000	-0.00000
24	+0.000001	-0.00000	+0.00000
25	+0.000000	+0.00000	+0.00000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	-0.0000	+0.215	-0.0000	+0.0000	-1.2905	-0.038
2	+0.0000	-0.280	+0.0376	-0.0000	-0.9469	-0.054
3	+0.0000	-0.624	+0.0543	-0.0000	-0.7320	-0.057
4	+0.0000	-0.839	+0.0570	-0.0000	-0.6167	-0.051
5	+0.0000	-0.954	+0.0514	-0.0000	-0.5723	-0.042
6	+0.0000	-0.999	+0.0419	-0.0000	-0.5736	-0.031
7	+0.0000	-0.997	+0.0313	-0.0000	-0.6006	-0.021
8	+0.0000	-0.970	+0.0214	-0.0000	-0.6390	-0.013
9	+0.0000	-0.932	+0.0131	-0.0000	-0.6789	-0.007
10	+0.0000	-0.892	+0.0068	-0.0000	-0.7148	-0.002
11	+0.0000	-0.856	+0.0023	-0.0000	-0.7439	+0.000
12	+0.0000	-0.827	-0.0005	-0.0000	-0.7656	+0.002
13	+0.0000	-0.805	-0.0020	-0.0000	-0.7803	+0.003
14	+0.0000	-0.790	-0.0026	-0.0000	-0.7893	+0.003
15	+0.0000	-0.781	-0.0027	-0.0000	-0.7939	+0.002
16	+0.0000	-0.777	-0.0023	-0.0000	-0.7955	+0.002
17	+0.0000	-0.775	-0.0019	-0.0000	-0.7951	+0.001
18	+0.0000	-0.776	-0.0014	-0.0000	-0.7938	+0.001
19	+0.0000	-0.777	-0.0009	-0.0000	-0.7920	+0.001
20	+0.0000	-0.779	-0.0006	-0.0000	-0.7903	+0.000
21	+0.0000	-7.849	-0.0003	-0.0000	-7.8516	-0.000
22	+0.0000	-7.856	+0.0004	-0.0000	-7.8535	+0.000
23	+0.0000	-31.416	-0.0003	-0.0000	-31.4170	-0.000
24	+0.0000	-31.415	+0.0003	-0.0000	-31.4141	+0.000

Résultats ANSYS

4.1.1 Cylindre chargé à leur extrémité:

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.73862E-06	-0.44317E-07	0.0000	0.73995E-06
3	-0.11391E-05	-0.20286E-07	0.0000	0.11393E-05
4	-0.76359E-06	0.82549E-08	0.0000	0.76363E-06
5	0.80320E-05	-0.10077E-06	0.0000	0.80327E-05
6	0.90195E-05	-0.12635E-06	0.0000	0.90204E-05
7	0.84315E-05	-0.15253E-06	0.0000	0.84329E-05
8	0.52522E-05	-0.17305E-06	0.0000	0.52551E-05
9	-0.17293E-05	-0.17834E-06	0.0000	0.17385E-05
10	-0.13817E-04	-0.15502E-06	0.0000	0.13818E-04
11	-0.32198E-04	-0.85994E-07	0.0000	0.32198E-04
12	-0.57602E-04	0.48707E-07	0.0000	0.57602E-04
13	-0.89786E-04	0.26979E-06	0.0000	0.89786E-04
14	-0.12685E-03	0.59473E-06	0.0000	0.12685E-03
15	-0.16437E-03	0.10316E-05	0.0000	0.16437E-03
16	-0.19447E-03	0.15698E-05	0.0000	0.19447E-03
17	-0.20489E-03	0.21688E-05	0.0000	0.20490E-03
18	-0.17834E-03	0.27437E-05	0.0000	0.17836E-03
19	-0.92421E-04	0.31498E-05	0.0000	0.92475E-04
20	0.79324E-04	0.31695E-05	0.0000	0.79387E-04
21	0.36473E-03	0.25034E-05	0.0000	0.36474E-03
22	0.78797E-03	0.77433E-06	0.0000	0.78797E-03
23	0.13614E-02	-0.24497E-05	0.0000	0.13614E-02
24	0.20740E-02	-0.76028E-05	0.0000	0.20740E-02
25	0.28756E-02	-0.15027E-04	0.0000	0.28757E-02

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	25	25	0	25
VALUE	0.28756E-02	-0.15027E-04	0.0000	0.28757E-02

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz1ELE  
Nombre des elements total :1  
Nombre des noeuds total : 2

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000602	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	-0.0000000090	+0.0000000000



MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz1ELE  
Nombre des elements total :1  
Nombre des noeuds total : 2

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000438	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000000	+0.0000000066	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz2ELE  
Nombre des elements total :2  
Nombre des noeuds total : 3

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000498	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000524	-0.0000000077	-0.0000000033
3	+0.0000000000	-0.0000000116	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz2ELE  
Nombre des elements total :2  
Nombre des noeuds total : 3

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000760	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000419	+0.0000000089	+0.0000003007
3	+0.0000000000	+0.0000000120	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz3ELE  
Nombre des elements total :3  
Nombre des noeuds total : 4

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000499	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000515	-0.0000000050	+0.0000000177
3	+0.0000000450	-0.0000000101	-0.0000001703
4	+0.0000000000	-0.0000000121	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz3ELE  
Nombre des elements total :3  
Nombre des noeuds total : 4

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000447	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000614	+0.0000000053	-0.0000001939
3	-0.0000000412	+0.0000000105	+0.0000004512
4	+0.0000000000	+0.0000000125	+0.0000000000

MATLAB Command window

4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz4ELE  
Nombre des elements total :4  
Nombre des noeuds total : 5

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000499	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000508	-0.0000000038	+0.0000000148
3	+0.0000000519	-0.0000000076	-0.0000000173
4	+0.0000000364	-0.0000000112	-0.0000002778
5	+0.0000000000	-0.0000000123	+0.0000000000

MATLAB Command window

4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz4ELE  
Nombre des elements total :4  
Nombre des noeuds total : 5

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000470	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000525	+0.0000000037	-0.0000000880
3	-0.0000000590	+0.0000000079	-0.0000000078
4	-0.0000000316	+0.0000000114	+0.0000004547
5	+0.0000000000	+0.0000000125	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz5ELE  
Nombre des elements total :5  
Nombre des noeuds total : 6

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000499	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000505	-0.0000000030	+0.000000121
3	+0.0000000520	-0.0000000061	+0.000000113
4	+0.0000000495	-0.0000000092	-0.0000000868
5	+0.0000000290	-0.0000000117	-0.0000003359
6	+0.0000000000	-0.0000000124	+0.0000000000



MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz5ELE  
Nombre des elements total :5  
Nombre des noeuds total : 6

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000485	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000504	+0.0000000030	-0.0000000380
3	-0.0000000551	+0.0000000061	-0.0000000546
4	-0.0000000530	+0.0000000094	+0.0000001083
5	-0.0000000253	+0.0000000118	+0.0000004478
6	+0.0000000000	+0.0000000125	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz6ELE  
Nombre des elements total :6  
Nombre des noeuds total : 7

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000499	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000503	-0.0000000025	+0.0000000101
3	+0.0000000515	-0.0000000050	+0.0000000163
4	+0.0000000520	-0.0000000076	-0.0000000172
5	+0.0000000455	-0.0000000101	-0.0000001599
6	+0.0000000232	-0.0000000120	-0.0000003628
7	+0.0000000000	-0.0000000124	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz6ELE  
Nombre des elements total :6  
Nombre des noeuds total : 7

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000491	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000500	+0.0000000025	-0.0000000212
3	-0.0000000526	+0.0000000050	-0.0000000415
4	-0.0000000547	+0.0000000077	-0.0000000016
5	-0.0000000471	+0.0000000103	+0.0000001937
6	-0.0000000207	+0.0000000120	+0.0000004338
7	+0.0000000000	+0.0000000125	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz7ELE  
Nombre des elements total :7  
Nombre des noeuds total : 8

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000499	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000502	-0.0000000021	+0.0000000086
3	+0.0000000511	-0.0000000043	+0.0000000162
4	+0.0000000521	-0.0000000065	+0.0000000064
5	+0.0000000506	-0.0000000088	-0.0000000615
6	+0.0000000410	-0.0000000108	-0.0000002225
7	+0.0000000189	-0.0000000121	-0.0000003714
8	+0.0000000000	-0.0000000124	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz7ELE  
Nombre des elements total :7  
Nombre des noeuds total : 8

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000494	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000499	+0.0000000021	-0.0000000142
3	-0.0000000515	+0.0000000043	-0.0000000300
4	-0.0000000535	+0.0000000066	-0.0000000246
5	-0.0000000526	+0.0000000088	+0.0000000583
6	-0.0000000417	+0.0000000109	+0.0000002549
7	-0.0000000173	+0.0000000122	+0.0000004164
8	+0.0000000000	+0.0000000125	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz8ELE  
Nombre des elements total :8  
Nombre des noeuds total : 9

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000499	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000501	-0.0000000019	+0.0000000075
3	+0.0000000508	-0.0000000038	+0.0000000149
4	+0.0000000518	-0.0000000057	+0.0000000143
5	+0.0000000520	-0.0000000076	-0.0000000170
6	+0.0000000484	-0.0000000096	-0.0000001112
7	+0.0000000366	-0.0000000112	-0.0000002713
8	+0.0000000156	-0.0000000122	-0.0000003697
9	+0.0000000000	-0.0000000124	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz8ELE  
Nombre des elements total :8  
Nombre des noeuds total : 9

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000496	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000499	+0.0000000019	-0.0000000106
3	-0.0000000509	+0.0000000038	-0.0000000228
4	-0.0000000525	+0.0000000057	-0.0000000268
5	-0.0000000533	+0.0000000077	+0.0000000065
6	-0.0000000498	+0.0000000096	+0.0000001158
7	-0.0000000370	+0.0000000113	+0.0000002977
8	-0.0000000147	+0.0000000123	+0.0000003979
9	+0.0000000000	+0.0000000125	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz9ELE  
Nombre des elements total :9  
Nombre des noeuds total : 10

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000499	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000501	-0.0000000017	+0.0000000066
3	+0.0000000506	-0.0000000033	+0.0000000135
4	+0.0000000515	-0.0000000050	+0.0000000165
5	+0.0000000522	-0.0000000068	+0.0000000028
6	+0.0000000511	-0.0000000085	-0.0000000494
7	+0.0000000456	-0.0000000101	-0.0000001594
8	+0.0000000326	-0.0000000115	-0.0000003073
9	+0.0000000131	-0.0000000123	-0.0000003625
10	+0.0000000000	-0.0000000124	+0.0000000000



MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz9ELE  
Nombre des elements total :9  
Nombre des noeuds total : 10

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000497	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000499	+0.0000000017	-0.0000000085
3	-0.0000000506	+0.0000000033	-0.0000000182
4	-0.0000000518	+0.0000000050	-0.0000000246
5	-0.0000000530	+0.0000000068	-0.0000000123
6	-0.0000000523	+0.0000000085	+0.0000000446
7	-0.0000000466	+0.0000000102	+0.0000001667
8	-0.0000000329	+0.0000000115	+0.0000003268
9	-0.0000000126	+0.0000000123	+0.0000003794
10	+0.0000000000	+0.0000000125	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : Cylbatoz10ELE  
Nombre des elements total :10  
Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000499	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000500	-0.0000000015	+0.0000000059
3	+0.0000000505	-0.0000000030	+0.0000000122
4	+0.0000000512	-0.0000000045	+0.0000000166
5	+0.0000000520	-0.0000000061	+0.0000000116
6	+0.0000000520	-0.0000000076	-0.0000000169
7	+0.0000000496	-0.0000000092	-0.0000000860
8	+0.0000000426	-0.0000000106	-0.0000002028
9	+0.0000000291	-0.0000000117	-0.0000003329
10	+0.0000000111	-0.0000000123	-0.0000003523
11	+0.0000000000	-0.0000000124	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution  
4.1.2 Cylindre encastré/guidé sous pression : Prog CAXI\_L  
fichier de données du probleme : Cylbatoz10ELE  
Nombre des elements total :10  
Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.0000000497	+0.0000000000	+0.0000000000
2	-0.0000000499	+0.0000000015	-0.0000000071
3	-0.0000000504	+0.0000000030	-0.0000000152
4	-0.0000000514	+0.0000000045	-0.0000000218
5	-0.0000000524	+0.0000000061	-0.0000000186
6	-0.0000000528	+0.0000000077	+0.0000000105
7	-0.0000000506	+0.0000000092	+0.0000000846
8	-0.0000000434	+0.0000000106	+0.0000002097
9	-0.0000000294	+0.0000000118	+0.0000003460
10	-0.0000000110	+0.0000000124	+0.0000003617
11	+0.0000000000	+0.0000000125	+0.0000000000

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.4 Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties : Prog CAXI\_K  
fichier de données du probleme : plaque2ELECHE

Nombre des elements total :2

Nombre des noeuds total : 3

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000	-0.0001071	+0.0000
2	+0.0000000	-0.0000602	-0.0002
3	+0.0000000	+0.0000000	+0.0000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	+0.0000	+4166650.000	+3125132.986	+0.000	+241.667	-41.962
2	+0.0000	-241.667	+58.628	+0.000	+495.833	+108.333

MATLAB Command window

4.1.4 Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties : ELE CAXI\_L  
fichier de données du probleme : plaque2ELECHE

Nombre des elements total :2

Nombre des noeuds total : 3

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000	+0.000106857	+0.000000000
2	+0.000000000	+0.000053472	+0.000213281
3	+0.000000000	+0.000000000	+0.000000000

les contraintes :

Nœud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	NaN	+Inf	-Inf	+0.000	+83.333	+60.417
2	+0.0000	+916.667	-60.417	+0.000	-83.333	-114.583

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.4 Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties : Prog CAXI\_K  
 fichier de données du probleme : plaque6ELECHE

Nombre des elements total :6

Nombre des noeuds total : 7

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000	+0.0001066	+0.0000
2	+0.0000000	+0.0001008	+0.0001
3	+0.0000000	+0.0000843	+0.0001
4	+0.0000000	+0.0000600	+0.0002
5	+0.0000000	+0.0000329	+0.0002
6	+0.0000000	+0.0000100	+0.0001
7	+0.0000000	+0.0000000	+0.0000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	NaN	+Inf	-Inf	+0.000	+30.556	+76.877
2	+0.0000	+302.777	-78.728	+0.000	-26.389	+60.177
3	+0.0000	+359.723	-61.103	+0.000	-100.926	+31.691
4	+0.0000	+434.258	-32.308	+0.000	-179.861	-8.334
5	+0.0000	+513.195	+7.871	+0.000	-260.555	-59.850
6	+0.0000	+593.889	+59.479	+0.000	-342.129	-122.839

MATLAB Command window

4.1.4 Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties : ELE CAXI\_L  
 fichier de données du probleme : plaque6ELECHE

Nombre des elements total :6

Nombre des noeuds total : 7

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000	+0.000107717	+0.000000000
2	+0.000000000	+0.000101540	+0.000074034
3	+0.000000000	+0.000084331	+0.000132269
4	+0.000000000	+0.000059490	+0.000165490
5	+0.000000000	+0.000032138	+0.000162287
6	+0.000000000	+0.000009312	+0.000111029
7	+0.000000000	+0.000000000	+0.000000000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	NaN	+Inf	-Inf	+0.000	+27.778	+82.295
2	+0.0000	+305.555	-82.295	+0.000	-27.778	+62.851
3	+0.0000	+361.111	-62.851	+0.000	-101.852	+32.951
4	+0.0000	+435.184	-32.951	+0.000	-180.556	-8.030
5	+0.0000	+513.889	+8.030	+0.000	-261.111	-60.270
6	+0.0000	+594.445	+60.270	+0.000	-342.592	-123.843

MATLAB Command window

4.1.4 Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties : Prog CAXI\_K

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000	+0.0001066	+0.0000
2	+0.0000000	+0.0001061	+0.0000
3	+0.0000000	+0.0001045	+0.0000
4	+0.0000000	+0.0001019	+0.0001
5	+0.0000000	+0.0000983	+0.0001
6	+0.0000000	+0.0000937	+0.0001
7	+0.0000000	+0.0000883	+0.0001
8	+0.0000000	+0.0000821	+0.0001
9	+0.0000000	+0.0000752	+0.0001
10	+0.0000000	+0.0000678	+0.0002
11	+0.0000000	+0.0000600	+0.0002
12	+0.0000000	+0.0000519	+0.0002
13	+0.0000000	+0.0000437	+0.0002
14	+0.0000000	+0.0000356	+0.0002
15	+0.0000000	+0.0000277	+0.0002
16	+0.0000000	+0.0000204	+0.0001
17	+0.0000000	+0.0000138	+0.0001
18	+0.0000000	+0.0000082	+0.0001
19	+0.0000000	+0.0000038	+0.0001
20	+0.0000000	+0.0000010	+0.0000
21	+0.0000000	+0.0000000	+0.0000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	NaN	+Inf	-Inf	+0.000	+9.167	+80.856
2	+0.0000	+90.833	-81.023	+0.000	-7.917	+79.353
3	+0.0000	+107.917	-79.437	+0.000	-30.278	+76.790
4	+0.0000	+130.278	-76.845	+0.000	-53.958	+73.187
5	+0.0000	+153.958	-73.229	+0.000	-78.167	+68.551
6	+0.0000	+178.167	-68.584	+0.000	-102.639	+62.882
7	+0.0000	+202.639	-62.910	+0.000	-127.262	+56.181
8	+0.0000	+227.262	-56.205	+0.000	-151.979	+48.448
9	+0.0000	+251.979	-48.469	+0.000	-176.759	+39.683
10	+0.0000	+276.759	-39.702	+0.000	-201.583	+29.887
11	+0.0000	+301.583	-29.904	+0.000	-226.439	+19.060
12	+0.0000	+326.439	-19.075	+0.000	-251.319	+7.201
13	+0.0000	+351.319	-7.215	+0.000	-276.218	-5.689
14	+0.0000	+376.218	+5.676	+0.000	-301.131	-19.610
15	+0.0000	+401.131	+19.598	+0.000	-326.056	-34.563
16	+0.0000	+426.056	+34.552	+0.000	-350.990	-50.547
17	+0.0000	+450.990	+50.536	+0.000	-375.931	-67.562
18	+0.0000	+475.931	+67.552	+0.000	-400.880	-85.609
19	+0.0000	+500.880	+85.600	+0.000	-425.833	-104.687
20	+0.0000	+525.833	+104.678	+0.000	-450.792	-124.796



MATLAB Command window

4.1.4 Plaque circulaire soumise a des charges uniformément réparties : ELE CAXI\_L

Nombre des elements total :20

Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000	+0.000106924	+0.000000000
2	+0.000000000	+0.000106386	+0.000021493
3	+0.000000000	+0.000104783	+0.000042560
4	+0.000000000	+0.000102143	+0.000062951
5	+0.000000000	+0.000098507	+0.000082359
6	+0.000000000	+0.000093932	+0.000100469
7	+0.000000000	+0.000088490	+0.000116966
8	+0.000000000	+0.000082272	+0.000131531
9	+0.000000000	+0.000075380	+0.000143847
10	+0.000000000	+0.000067935	+0.000153594
11	+0.000000000	+0.000060075	+0.000160454
12	+0.000000000	+0.000051951	+0.000164108
13	+0.000000000	+0.000043731	+0.000164236
14	+0.000000000	+0.000035600	+0.000160519
15	+0.000000000	+0.000027758	+0.000152638
16	+0.000000000	+0.000020421	+0.000140273
17	+0.000000000	+0.000013821	+0.000123104
18	+0.000000000	+0.000008207	+0.000100812
19	+0.000000000	+0.000003843	+0.000073077
20	+0.000000000	+0.000001009	+0.000039580
21	+0.000000000	+0.000000000	+0.000000000

les contraintes :

Noeud	Ns1	Ts1	Ms1	Ns2	Ts2	Ms2
1	NaN	+Inf	-Inf	+0.000	+8.333	+81.671
2	+0.0000	+91.667	-81.671	+0.000	-8.333	+79.921
3	+0.0000	+108.333	-79.921	+0.000	-30.556	+77.230
4	+0.0000	+130.556	-77.230	+0.000	-54.167	+73.541
5	+0.0000	+154.167	-73.541	+0.000	-78.333	+68.840
6	+0.0000	+178.333	-68.840	+0.000	-102.778	+63.118
7	+0.0000	+202.778	-63.118	+0.000	-127.381	+56.373
8	+0.0000	+227.381	-56.373	+0.000	-152.083	+48.603
9	+0.0000	+252.083	-48.603	+0.000	-176.852	+39.805
10	+0.0000	+276.852	-39.805	+0.000	-201.667	+29.980
11	+0.0000	+301.667	-29.980	+0.000	-226.515	+19.126
12	+0.0000	+326.515	-19.126	+0.000	-251.389	+7.243
13	+0.0000	+351.389	-7.243	+0.000	-276.282	-5.670
14	+0.0000	+376.282	+5.670	+0.000	-301.190	-19.612
15	+0.0000	+401.190	+19.612	+0.000	-326.111	-34.584
16	+0.0000	+426.111	+34.584	+0.000	-351.042	-50.585
17	+0.0000	+451.042	+50.585	+0.000	-375.980	-67.617
18	+0.0000	+475.980	+67.617	+0.000	-400.926	-85.680
19	+0.0000	+500.926	+85.680	+0.000	-425.877	-104.773
20	+0.0000	+525.877	+104.773	+0.000	-450.833	-124.896

MATLAB Command window

4.1.5 Plaque circulaire sous divers cas de charge ELE CAXI\_L  
fichier de données du probleme : plaq  
Nombre des elements total :5  
Nombre des noeuds total : 6

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.000000000	-0.124468503	-0.014065731
2	-0.000000000	-0.097301207	-0.012978042
3	+0.000000000	-0.071755629	-0.012474893
4	+0.000000000	-0.047088960	-0.012117663
5	+0.000000000	-0.023151151	-0.011758384
6	+0.000000000	+0.000000000	-0.011339828

MATLAB Command window

4.1.5 Plaque circulaire sous divers cas de charge ELE CAXI\_L  
fichier de données du probleme : plaq10  
Nombre des elements total :10  
Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.000000000	-0.123817899	-0.013975003
2	-0.000000000	-0.110102820	-0.013320403
3	-0.000000000	-0.096929068	-0.012913079
4	-0.000000000	-0.084105514	-0.012635210
5	+0.000000000	-0.071532141	-0.012424345
6	+0.000000000	-0.059158426	-0.012245070
7	+0.000000000	-0.046962436	-0.012076325
8	+0.000000000	-0.034939471	-0.011905159
9	+0.000000000	-0.023095525	-0.011723440
10	+0.000000000	-0.011443352	-0.011526006
11	+0.000000000	+0.000000000	-0.011309586

MATLAB Command window

4.1.5 Plaque circulaire sous divers cas de charge ELE CAXI\_L  
fichier de données du probleme : plaq20  
Nombre des elements total :20  
Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.000000000	-0.123653542	-0.013951968
2	-0.000000000	-0.116734032	-0.013584902
3	-0.000000000	-0.109980283	-0.013301200
4	-0.000000000	-0.103356019	-0.013077278
5	-0.000000000	-0.096835096	-0.012896615
6	-0.000000000	-0.090398548	-0.012747352
7	-0.000000000	-0.084032601	-0.012620803
8	-0.000000000	-0.077727318	-0.012510496
9	+0.000000000	-0.071475634	-0.012411538
10	+0.000000000	-0.065272673	-0.012320186
11	+0.000000000	-0.059115236	-0.012233545
12	+0.000000000	-0.053001435	-0.012149356
13	+0.000000000	-0.046930398	-0.012065848
14	+0.000000000	-0.040902061	-0.011981619
15	+0.000000000	-0.034916998	-0.011895557
16	+0.000000000	-0.028976289	-0.011806778
17	+0.000000000	-0.023081418	-0.011714578
18	+0.000000000	-0.017234192	-0.011618394
19	+0.000000000	-0.011436673	-0.011517778
20	+0.000000000	-0.005691133	-0.011412376
21	+0.000000000	+0.000000000	-0.011301908

MATLAB Command window

4.1.5 Plaque circulaire sous divers cas de charge ELE CAXI\_L  
fichier de données du probleme : plaq20Mgrad  
Nombre des elements total :20  
Nombre des noeuds total : 21

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.000000000	-0.123646214	-0.013950940
2	-0.000000000	-0.120164851	-0.013755354
3	-0.000000000	-0.116730160	-0.013584285
4	-0.000000000	-0.113336420	-0.013433879
5	-0.000000000	-0.109978797	-0.013300952
6	-0.000000000	-0.103354639	-0.013077099
7	-0.000000000	-0.096833790	-0.012896499
8	-0.000000000	-0.090397285	-0.012747293
9	-0.000000000	-0.084031355	-0.012620798
10	-0.000000000	-0.077726061	-0.012510541
11	+0.000000000	-0.071474343	-0.012411631
12	+0.000000000	-0.065271323	-0.012320325
13	+0.000000000	-0.059113807	-0.012233727
14	+0.000000000	-0.052999903	-0.012149580
15	+0.000000000	-0.046928744	-0.012066112
16	+0.000000000	-0.040900266	-0.011981922
17	+0.000000000	-0.034915042	-0.011895898
18	+0.000000000	-0.028974154	-0.011807156
19	+0.000000000	-0.023079084	-0.011714992
20	+0.000000000	-0.011435239	-0.011517800
21	+0.000000000	+0.000000000	-0.011301565

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.8 Hémisphère: Prog CAXI\_K

fichier de données du probleme : SPHER28ELECHE

Nombre des elements total :28

Nombre des noeuds total : 29

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.0000000000	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.0000000003	+0.0000000000	+0.0000000000
3	-0.0000000034	-0.0000000001	-0.0000000007
4	+0.0000000135	+0.0000000007	+0.0000000066
5	+0.0000001573	+0.0000000098	-0.0000000155
6	+0.0000000490	-0.0000000000	-0.0000000741
7	-0.0000002559	-0.0000000284	-0.0000001712
8	-0.0000008399	-0.000000856	-0.0000003015
9	-0.0000012500	-0.000001276	-0.0000003701
10	-0.0000017332	-0.000001783	-0.0000004305
11	-0.0000022708	-0.000002362	-0.0000004700
12	-0.0000028281	-0.000002976	-0.0000004712
13	-0.0000033497	-0.000003558	-0.0000004110
14	-0.0000037550	-0.000004004	-0.0000002607
15	-0.0000039346	-0.000004164	+0.000000141
16	-0.0000038974	-0.000004073	+0.0000002101
17	-0.0000037487	-0.000003828	+0.0000004520
18	-0.0000034659	-0.000003393	+0.0000007447
19	-0.0000030250	-0.000002728	+0.0000010932
20	-0.0000024002	-0.000001789	+0.0000015021
21	-0.0000015647	-0.000000528	+0.0000019755
22	-0.0000004907	+0.000001106	+0.0000025167
23	+0.0000008496	+0.000003166	+0.0000031279
24	+0.0000024837	+0.000005708	+0.0000038098
25	+0.0000044379	+0.000008788	+0.0000045611
26	+0.0000067363	+0.000012460	+0.0000053784
27	+0.0000093994	+0.000016777	+0.0000062550
28	+0.0000124435	+0.000021784	+0.0000071810
29	+0.0000158783	+0.000027518	+0.0000081422

Résultats ANSYS

4.1.8 Hémisphère

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 0 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.19644E-07	-0.11281E-08	0.0000	0.19676E-07
3	0.76592E-07	0.22882E-07	0.0000	0.79937E-07
4	-0.64380E-07	-0.43561E-07	0.0000	0.77733E-07
5	-0.19646E-06	-0.12352E-06	0.0000	0.23207E-06
6	-0.80864E-07	-0.19284E-07	0.0000	0.83132E-07
7	0.23911E-06	0.27850E-06	0.0000	0.36706E-06
8	0.83856E-06	0.86607E-06	0.0000	0.12055E-05
9	0.12542E-05	0.12910E-05	0.0000	0.17999E-05
10	0.17428E-05	0.18041E-05	0.0000	0.25084E-05
11	0.22853E-05	0.23884E-05	0.0000	0.33056E-05
12	0.28460E-05	0.30056E-05	0.0000	0.41393E-05
13	0.33688E-05	0.35889E-05	0.0000	0.49223E-05
14	0.37721E-05	0.40327E-05	0.0000	0.55219E-05
15	0.39456E-05	0.41849E-05	0.0000	0.57516E-05
16	0.39096E-05	0.40963E-05	0.0000	0.56626E-05
17	0.37620E-05	0.38534E-05	0.0000	0.53853E-05
18	0.34803E-05	0.34203E-05	0.0000	0.48796E-05
19	0.30403E-05	0.27568E-05	0.0000	0.41041E-05
20	0.24162E-05	0.18191E-05	0.0000	0.30244E-05
21	0.15808E-05	0.55928E-06	0.0000	0.16768E-05
22	0.50660E-06	-0.10740E-05	0.0000	0.11875E-05
23	-0.83475E-06	-0.31347E-05	0.0000	0.32440E-05
24	-0.24704E-05	-0.56783E-05	0.0000	0.61924E-05
25	-0.44278E-05	-0.87618E-05	0.0000	0.98170E-05
26	-0.67304E-05	-0.12439E-04	0.0000	0.14143E-04
27	-0.93995E-05	-0.16764E-04	0.0000	0.19220E-04
28	-0.12452E-04	-0.21783E-04	0.0000	0.25090E-04
29	-0.15896E-04	-0.27532E-04	0.0000	0.31792E-04

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE 29 29 0 29  
VALUE -0.15896E-04 -0.27532E-04 0.0000 0.31792E-04

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.9 Dôme sphérique sous pression :Prog CAXI\_K

fichier de données du probleme : elemtronc14ELE

Nombre des elements total :14

Nombre des noeuds total : 15

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.0000000000	+0.000000000
2	-0.000001009198	-0.000009765	-0.000003992
3	-0.000007294752	-0.000029108	-0.000005790
4	-0.000014642379	-0.000052163	-0.000006115
5	-0.000020750915	-0.000074937	-0.000005562
6	-0.000024655253	-0.000095062	-0.000004582
7	-0.000026222817	-0.000111442	-0.000003486
8	-0.000025764578	-0.000123887	-0.000002468
9	-0.000023764658	-0.000132775	-0.000001632
10	-0.000020712671	-0.000138789	-0.000001015
11	-0.000017015043	-0.000142702	-0.000000611
12	-0.000012961495	-0.000145239	-0.000000385
13	-0.000008727042	-0.000146967	-0.000000280
14	-0.000004396129	-0.000148204	-0.000000219
15	-0.000000005902	-0.000148907	-0.000000167



Résultats ANSYS

4.1.9 Dôme sphérique sous pression :

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.15152E-05	-0.10463E-04	0.0000	0.10573E-04
3	-0.80223E-05	-0.30123E-04	0.0000	0.31173E-04
4	-0.15418E-04	-0.53231E-04	0.0000	0.55419E-04
5	-0.21479E-04	-0.75881E-04	0.0000	0.78862E-04
6	-0.25287E-04	-0.95758E-04	0.0000	0.99040E-04
7	-0.26737E-04	-0.11180E-03	0.0000	0.11495E-03
8	-0.26156E-04	-0.12383E-03	0.0000	0.12656E-03
9	-0.24037E-04	-0.13223E-03	0.0000	0.13440E-03
10	-0.20874E-04	-0.13767E-03	0.0000	0.13925E-03
11	-0.17081E-04	-0.14093E-03	0.0000	0.14196E-03
12	-0.12955E-04	-0.14273E-03	0.0000	0.14332E-03
13	-0.86802E-05	-0.14368E-03	0.0000	0.14394E-03
14	-0.43506E-05	-0.14420E-03	0.0000	0.14427E-03
15	-0.35381E-08	-0.14462E-03	0.0000	0.14462E-03

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	7	15	0	15
VALUE	-0.26737E-04	-0.14462E-03	0.0000	0.14462E-03

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.10 Paraboloïde : Prog CAXI\_K

fichier de données du probleme : elemtronc30ELE

Nombre des elements total :30

Nombre des noeuds total : 31

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	-0.042153288531	+0.000000000	+0.000000000
2	-0.051612250234	-0.005028748	-0.001146218
3	-0.065921407409	-0.011079850	-0.000921111
4	-0.074169177806	-0.014795573	-0.000350146
5	-0.075372118101	-0.016060298	+0.000096719
6	-0.072154904320	-0.015819286	+0.000317259
7	-0.067244423765	-0.014955490	+0.000370589
8	-0.062286621567	-0.013963590	+0.000343997
9	-0.057909325246	-0.013013858	+0.000297595
10	-0.054166782960	-0.012111387	+0.000257627
11	-0.050921150704	-0.011215668	+0.000228655
12	-0.048041568324	-0.010295276	+0.000206705
13	-0.045460336370	-0.009338785	+0.000187055
14	-0.043160426053	-0.008348034	+0.000166984
15	-0.041146393652	-0.007329457	+0.000145887
16	-0.039420186155	-0.006288858	+0.000124638
17	-0.037966627342	-0.005230122	+0.000104756
18	-0.036755546791	-0.004157393	+0.000086562
19	-0.035783425416	-0.003079346	+0.000064993
20	-0.035187209284	-0.002009261	+0.000023546
21	-0.035417786200	-0.000947182	-0.000066458
22	-0.035730366480	-0.000462178	-0.000040964
23	-0.035924091016	+0.000024183	-0.000028327
24	-0.036069057595	+0.000508096	-0.000026030
25	-0.036218929620	+0.000988195	-0.000031221
26	-0.036411013947	+0.001464597	-0.000041350
27	-0.036669086319	+0.001938148	-0.000054466
28	-0.037007249035	+0.002409944	-0.000069276
29	-0.037433702421	+0.002881122	-0.000085068
30	-0.037953757809	+0.003352828	-0.000101548
31	-0.038571708972	+0.003826263	-0.000118624

Résultats ANSYS

4.1.10 Hypérboloïde :

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	-0.41026E-01	0.0000	0.0000	0.41026E-01
2	-0.50437E-01	-0.49732E-02	0.0000	0.50682E-01
3	-0.65751E-01	-0.11352E-01	0.0000	0.66724E-01
4	-0.74911E-01	-0.15366E-01	0.0000	0.76471E-01
5	-0.76397E-01	-0.16724E-01	0.0000	0.78206E-01
6	-0.72938E-01	-0.16412E-01	0.0000	0.74762E-01
7	-0.67608E-01	-0.15426E-01	0.0000	0.69346E-01
8	-0.62318E-01	-0.14340E-01	0.0000	0.63946E-01
9	-0.57781E-01	-0.13347E-01	0.0000	0.59303E-01
10	-0.54016E-01	-0.12438E-01	0.0000	0.55430E-01
11	-0.50809E-01	-0.11551E-01	0.0000	0.52106E-01
12	-0.47972E-01	-0.10639E-01	0.0000	0.49137E-01
13	-0.45411E-01	-0.96855E-02	0.0000	0.46432E-01
14	-0.43110E-01	-0.86937E-02	0.0000	0.43978E-01
15	-0.41084E-01	-0.76727E-02	0.0000	0.41795E-01
16	-0.39354E-01	-0.66311E-02	0.0000	0.39908E-01
17	-0.37931E-01	-0.55754E-02	0.0000	0.38338E-01
18	-0.36779E-01	-0.44748E-02	0.0000	0.37050E-01
19	-0.36012E-01	-0.34406E-02	0.0000	0.36176E-01
20	-0.35532E-01	-0.23646E-02	0.0000	0.35610E-01
21	-0.35386E-01	-0.12868E-02	0.0000	0.35410E-01
22	-0.35430E-01	-0.80655E-03	0.0000	0.35439E-01
23	-0.35540E-01	-0.32612E-03	0.0000	0.35541E-01
24	-0.35714E-01	0.15436E-03	0.0000	0.35714E-01
25	-0.35949E-01	0.63465E-03	0.0000	0.35955E-01
26	-0.36242E-01	0.11142E-02	0.0000	0.36259E-01
27	-0.36585E-01	0.15923E-02	0.0000	0.36619E-01
28	-0.36968E-01	0.20673E-02	0.0000	0.37025E-01
29	-0.37378E-01	0.25373E-02	0.0000	0.37464E-01
30	-0.37803E-01	0.29997E-02	0.0000	0.37922E-01
31	-0.38230E-01	0.34513E-02	0.0000	0.38385E-01

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	5	5	0	5
VALUE	-0.76397E-01	-0.16724E-01	0.0000	0.78206E-01

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de revolution

4.1.11 Cylindre conique : CAXI\_L

fichier de données du probleme : coqueconique12EL

Nombre des elements total :12

Nombre des noeuds total : 13

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000000000000	+0.0000000000	+0.000000000
2	+0.000016004691	+0.000001419	+0.000008438
3	+0.000037436323	+0.000001874	+0.000004298
4	+0.000044354791	+0.000001637	-0.000000040
5	+0.000038350776	+0.000001380	-0.000003588
6	+0.000021730539	+0.000001679	-0.000006274
7	+0.000010791994	+0.000002689	+0.000000577
8	+0.000014661218	+0.000007343	+0.000005399
9	+0.000021356432	+0.000014522	+0.000005731
10	+0.000027174259	+0.000020403	+0.000004031
11	+0.000030913433	+0.000023739	+0.000002106
12	+0.000033025389	+0.000024945	+0.000000948
13	+0.000034608373	+0.000025040	+0.000000604

Résultats ANSYS

4.1.11 Cylindre conique :

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.15991E-04	0.13852E-05	0.0000	0.16051E-04
3	0.37384E-04	0.18586E-05	0.0000	0.37430E-04
4	0.44286E-04	0.16419E-05	0.0000	0.44316E-04
5	0.38322E-04	0.14024E-05	0.0000	0.38347E-04
6	0.21777E-04	0.17118E-05	0.0000	0.21844E-04
7	0.10862E-04	0.26910E-05	0.0000	0.11190E-04
8	0.14723E-04	0.73134E-05	0.0000	0.16439E-04
9	0.21388E-04	0.14458E-04	0.0000	0.25816E-04
10	0.27164E-04	0.20305E-04	0.0000	0.33914E-04
11	0.30864E-04	0.23612E-04	0.0000	0.38860E-04
12	0.32953E-04	0.24803E-04	0.0000	0.41245E-04
13	0.34554E-04	0.24921E-04	0.0000	0.42604E-04

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	4	13	0	4
VALUE	0.44286E-04	0.24921E-04	0.0000	0.44316E-04

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure coque de révolution

4.1.12 Cône de révolution: Prog CAXI\_L

fichier de données du probleme : coqueconique10EL

Nombre des elements total :10

Nombre des noeuds total : 11

Déplacements nodales :

Noeud	Uz	Ur	Beta
1	+0.000011064616	+0.0000000000	+0.0000000000
2	+0.000008776102	-0.000005260	-0.000000106
3	+0.000003988863	-0.000014881	-0.000000124
4	-0.000000366859	-0.000023594	-0.000000092
5	-0.000002949105	-0.000028988	-0.000000044
6	-0.000003618888	-0.000030814	-0.000000003
7	-0.000002945816	-0.000030096	+0.000000020
8	-0.000001732260	-0.000028279	+0.000000026
9	-0.000000649789	-0.000026575	+0.000000019
10	-0.000000041053	-0.000025624	+0.000000007
11	+0.000000000000	-0.000025610	-0.000000005

Résultats ANSYS

4.1.12 Cône de révolution

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.11075E-04	0.0000	0.0000	0.11075E-04
2	0.87732E-05	-0.52523E-05	0.0000	0.10225E-04
3	0.39842E-05	-0.14871E-04	0.0000	0.15395E-04
4	-0.36666E-06	-0.23587E-04	0.0000	0.23590E-04
5	-0.29441E-05	-0.28992E-04	0.0000	0.29141E-04
6	-0.36136E-05	-0.30837E-04	0.0000	0.31048E-04
7	-0.29453E-05	-0.30138E-04	0.0000	0.30282E-04
8	-0.17387E-05	-0.28331E-04	0.0000	0.28384E-04
9	-0.66088E-06	-0.26619E-04	0.0000	0.26628E-04
10	-0.51442E-07	-0.25637E-04	0.0000	0.25637E-04
11	0.0000	-0.25539E-04	0.0000	0.25539E-04

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	1	6	0	6
VALUE	0.11075E-04	-0.30837E-04	0.0000	0.31048E-04

MATLAB Command window

Résultats de calcul structure solide de revolution

4.2.1 Cylindre épais

fichier de données du probleme : solRev40ELE

Nombre des elements total :40

Nombre des noeuds total : 33

Déplacements nodales :

Noeud	Ur	Uz
1	+0.000057343	+0.000000000
2	+0.000040949	+0.000000000
3	+0.000034442	+0.000000000
4	+0.000055976	+0.000000545
5	+0.000041322	+0.000000309
6	+0.000035327	+0.000000014
7	+0.000055881	+0.000000563
8	+0.000041531	+0.000000343
9	+0.000035585	+0.000000112
10	+0.000055943	+0.000000485
11	+0.000041628	+0.000000340
12	+0.000035688	+0.000000192
13	+0.000055984	+0.000000408
14	+0.000041667	+0.000000331
15	+0.000035732	+0.000000244
16	+0.000055999	+0.000000344
17	+0.000041680	+0.000000322
18	+0.000035749	+0.000000276
19	+0.000056001	+0.000000283
20	+0.000041683	+0.000000317
21	+0.000035751	+0.000000295
22	+0.000055991	+0.000000210
23	+0.000041681	+0.000000321
24	+0.000035746	+0.000000307
25	+0.000055943	+0.000000105
26	+0.000041666	+0.000000340
27	+0.000035755	+0.000000302
28	+0.000055715	-0.000000033
29	+0.000041634	+0.000000356
30	+0.000035939	+0.000000201
31	+0.000054382	+0.000000000
32	+0.000041933	+0.000000000
33	+0.000036572	+0.000000000