

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des sciences et de la technologie  
Département de Génie Mécanique  
Réf : .....



جامعة محمد خيضر – بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
المرجع: .....

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de

**Docteur en sciences**  
Spécialité : Génie Mécanique

Par  
**Ymane ALLOUI**

Intitulée

---

# Convection naturelle induite par double diffusion et effet Soret dans un milieu fluide confiné

---

Soutenue publiquement le 27 / 09 / 2018 devant le jury composé de :

Mr <b>Abdelhafid BRIMA</b>	Pr Université de Biskra	Président
Mr <b>Hocine BEN MOUSSA</b>	Pr Université de Batna 2	Directeur de thèse
Mr <b>Cherif BOUGRIOU</b>	Pr Université de Batna 2	Examinateur
Mr <b>Kamel MASMOUDI</b>	Dr Université de Batna 2	Examinateur
Mr <b>Noureddine MOUMMI</b>	Pr Université de Biskra	Examinateur



---

## *DÉDICACES*

---

*Je dédie ce modeste travail :*

*À mes défunts parents*

*À mes beaux parents*

*À mon mari*

*À mes enfants : Chadha, Youcef, Rana et Rafif*

*À mes frères et sœurs, beaux frères et belles sœurs*

*À mes neveux et nièces*

*À mon oncle Hanafi*

*À Djamila, et à toutes mes amies*



---

## **REMERCIEMENTS**

---

*Premièrement et avant tout, louange à dieu Allah le tout puissant, qui m'a accordé la force, l'énergie, le courage, l'endurance et la volonté pour l'accomplissement de ce travail.*

*Mes remerciements les plus chaleureux, vont plus particulièrement à mon Directeur de thèse BENMOUSSA HOCINE, Professeur à l'Université de Batna , pour m'avoir suivi avec patience et intérêt dans mon projet, et pour la confiance qu'il a placé en moi tout au long de ce travail. Ses conseils précieux et ses encouragements, m'ont été d'une aide très importante dans la réalisation de ce projet.*

*Je tiens aussi à remercier vivement, Professeur BRIMA ABDELHAFID de l'université Mohamed Khider de BISKRA, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury d'examen de cette thèse.*

*Mes vifs remerciements s'adressent également aux membres du jury, le professeur MOUMMI NOUREDDINE de l'université Mohamed Khider de BISKRA, le Professeur BOUGRIOU CHERIF, et le Dr MASMOUDI KAMEL de l'université de BATNA, qui ont accepté d'honorer ce jury.*

*Cette thèse n'aurait pu se faire sans l'orientation, l'aide et le soutien continu et patient de mon frère Mr ALLOUI ZINEEDDINE, Maitre de conférence A à l'université de Batna, et ancien enseignant chercheur à l'école polytechnique de Montréal à CANADA. Je saisis cette occasion pour exprimer ma grande reconnaissance et gratitude envers lui. Les multiples discussions qu'on avait eu, m'ont éclairée sur le problème de la double diffusion, ses précieux conseils issus de sa longue expérience dans ce domaine, m'ont guidé dans le chemin du savoir. Qu'il veuille bien recevoir mes vifs et sincères remerciements, pour la contribution, l'aide et le soutien permanent qu'il m'a offert.*

*Je remercie vivement Mr PATRICK VASSEUR, professeur chercheur à l'école polytechnique de Montréal, CANADA, qui a accepté de m'accueillir dans son labo et n'a pas épargné un effort pour m'aider, je le remercie fortement pour l'apport scientifique qu'il m'a fourni, plus précisément dans la compréhension des phénomènes de stabilité.*

*J'adresse mes vifs remerciements, aux départements de Génie mécanique des universités, Mohamed Khider de Biskra, et KASDI MERBAH de Ouargla, à leurs personnels, et à toute personne ayant contribué au bon déroulement de ce travail.*

*Merci à ma famille, mes enfants et, surtout, j'aimerais témoigner à mon mari mon infinie reconnaissance pour son soutien quotidien, sa patience angélique, ses encouragements au cours de ces années de doctorat, et plus particulièrement de ces derniers mois, pour le fait d'avoir accepté et permis ces longues et innombrables heures consacrées à ce travail. Sans tout cela, ce travail n'aurait pas connu cette fin heureuse. Un grand merci est également adressé à mes sœurs et frères, qui m'ont beaucoup soutenu dans les moments les plus difficiles.*

*Je ne saurais terminer, sans remercier mon amie et collègue Djamila, pour l'aide et les encouragements qu'elle n'a cessé de m'offrir tout le long de ce travail. Pour finir, je dirais simplement merci à tous ceux qui, de près comme de loin, ont contribué à la réussite de ce travail de recherche.*

# Résumé

---

## RÉSUMÉ

---

Dans ce travail, une étude analytique et numérique de la convection naturelle dans une cavité peu profonde, remplie d'un mélange binaire, a été réalisée. Un flux de chaleur constant a été appliqué sur les limites horizontales de la couche et les parois verticales sont supposées adiabatiques. On a supposé que les forces de flottabilité solutales étaient générées par l'action combinée de l'effet Soret et l'imposition d'un flux constant de concentration sur les parois horizontales (convection à double diffusion). Les conditions pour des forces de flottabilité thermique et de concentration aidant et opposées ont été examinées pour une large gamme de paramètres régissant, à savoir, le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , le rapport de flottabilité  $\varphi$ , le nombre de Lewis  $Le$ , le nombre Prandtl  $Pr$ , le rapport de forme de la cavité  $A$ , le flux de soluté  $j$  et le type de convection.

Le début de la convection supercritique et sous-critique stationnaire a été déterminé analytiquement en termes des paramètres régissant le problème. Une solution analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, a été dérivée dans le cas d'une couche infinie. Le modèle approximatif, malgré sa relative simplicité, prédit avec succès les différents types d'écoulement rencontrés dans la présente étude. Cela couvre les écoulements coopérants et les écoulements opposés.

Une analyse de stabilité linéaire de la solution de l'écoulement parallèle a été réalisée et le seuil pour les bifurcations de Hopf, a été obtenu numériquement. De cette manière, il a été possible de délimiter les frontières définissant les régions d'instabilités stationnaires et oscillatoires.

La méthode des volumes de contrôle a été utilisée pour obtenir une solution numérique des équations entières. Un bon accord a été observé entre les prédictions analytiques et les simulations numériques.

**Mots clés** : *Convection naturelle, Mélange binaire, Couche fluide, Effet Soret, Approximation de l'écoulement parallèle, Analyse de stabilité linéaire.*

---

## *Abstract*

---

In this work an analytical and numerical study of natural convection in a shallow cavity, filled with a binary mixture, has been conducted. A constant heat flux was applied, on the horizontal boundaries of the layer while the vertical ones were adiabatic. The solutal buoyancy forces were assumed to be generated by the combined action of the Soret effect and the imposition of a constant flux of concentration on the horizontal walls (double-diffusive convection). Conditions for both aiding and opposing thermal and concentration buoyancy forces were examined for a large range of the governing parameters, namely, the thermal Rayleigh number  $Ra_T$ , the buoyancy ratio  $\varphi$ , the Lewis number  $Le$ , the Prandtl number  $Pr$ , the aspect ratio of the cavity  $A$ , the solute flux  $j$ , and the type of convection.

The onset of stationary supercritical and subcritical convection have been determined analytically in terms of the governing parameters of the problem. An analytical solution, based on the parallel flow approximation, has been derived for the case of an infinite layer. The approximate model, despite its relative simplicity, predicts successfully the various types of flows encountered in the present study. This covers aiding flows and opposing flows.

A linear stability analysis of the parallel flow solution has been carried out and the threshold for Hopf's bifurcations, is obtained numerically. In this way it has been possible to delineate the boundaries defining the regions of stationary and oscillatory instabilities.

A control volume method has been used to obtain a numerical solution of the full governing equations. A good agreement is observed between the analytical predictions and the numerical simulations.

**Key words:** *Natural convection, Binary mixture, Fluid layer, Soret effect, Parallel flow approximation, Linear stability analysis.*

## ملخص

نقدم في هذه الأطروحة دراسة تشسئتحليلية و رقمية للحمل الطبيعي الحراري المادي في تجويف مليء بمائع ثنائي. تخضع الحدود الأفقية إلى تدفق حراري ومادي ثابتين في حين أن الجدران العمودية اعتبرت كاظمة و غير نافذة.

افترضنا أن قوى الطفو تنتج عن العمل المشترك لتأثير "سوريه" و التدفق المادي الثابت للتركيز على الحدود الأفقية (الحمل الحراري المزدوج الانتشار). قمنا بفحص شروط قوى الطفو الحراري و المادي المساعدة منها والمعارضة و ذلك من اجل مجموعة واسعة من المتغيرات، والمتمثلة في رقم " رايلي" الحراري، النسبة بين قوى الحجوم الحرارية و المادية ، رقم "براندتل" ، نسبة شكل تجويف ، التدفق المادي ونوع الحمل الحراري.

سمحت لنا الدراسة بتحديد بداية الحمل الحراري فوق و دون الحرج بالطريقة التحليلية التي تستند على التقريب المتوازي للجريان من اجل طبقة لا نهائية. هذا النموذج التقريبي، على الرغم من بساطته النسبية، يعطي نتائج جيدة ويشمل تلك الجريانات المتداخلة و المعاكسة.

تم تطبيق الطريقة المعروفة بتحليل الاستقرار الخطي على التقريب المتوازي للجريان وقد تم الحصول عدديا على عتبة التشعب "هوبف" وبهذه الطريقة، أمكن تحديد مناطق عدم الاستقرار الثابتة والمتذبذبة. استخدمت طريقة الحجوم المنتهية للحصول على حل عددي للمعادلات بأكملها. وقد لوحظ اتفاقا جيدا بين التنبؤات التحليلية والمحاكاة العددية.

## الكلمات المفتاحية

الحمل الحراري الطبيعي، مزيج ثنائي، طبقة المائع، تأثير "سوريه"، التقريب المتوازي للجريان ، تحليل الاستقرار الخطي.

# Table des Matières



---

## *Table des matières*

---

1. Remerciements .....	i
2. Résumé .....	ii
3. Liste des figures .....	v
4. Liste des tableaux.....	x
5. Nomenclature .....	xi

---

### **Introduction générale** . . . . . 1

---

1. Généralités .....	1
2. But de la thèse.....	2
3. Contenu de la thèse .....	3

---

### **Chapitre 1 : Synthèse bibliographique**

---

1.1 Introduction.....	4
1.2 L'effet Soret ou Ludwig .....	5
1.3 Intérêt pratique de l'effet Soret .....	6
1.4 Convection double diffusive .....	6
1.5 Convection en présence de l'effet Soret .....	16
1.6 Conclusion .....	23

---

### **Chapitre 2 : Modèles physique et mathématique**

---

2.1 Description du problème.....	24
2.1.1 Hypothèses simplificatrices.....	24
2.1.2 Approximation de Boussinesq .....	25
2.2 Formulation mathématique .....	28
2.2.1 Équation de continuité.....	28
2.2.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement.....	28
2.2.3 Équation de conservation de l'énergie .....	29
2.2.4 Équation de conservation des espèces.....	29
2.2.5 Condition initiale.....	29
2.2.6 Conditions aux limites .....	30
2.3 Adimensionnalisation.....	30
2.3.1 Paramètres d'adimensionnalisation.....	30
2.3.2 Équations adimensionnelles .....	32
2.3.3 Formulation vorticité-fonction de courant .....	34

2.4	Transfert thermique massique.....	35
2.5	Conclusion .....	36

---

### **Chapitre 3 : Solution numérique**

---

3.1	Méthode des volumes finis .....	37
3.2	Discrétisation des équations.....	38
3.2.1	Forme conservatrice des équations gouvernantes .....	39
3.2.2	Intégration sur le volume de contrôle .....	39
3.3	Méthode implicite aux directions alternées .....	44
3.3.1	Schéma implicite en x et explicite en y.....	44
3.3.2	Schéma explicite en x et implicite en y.....	44
3.3.3	Traitement des conditions aux limites.....	44
3.3.4	Résolution des équations .....	45
3.4	Algorithme de calcul.....	46
3.5	Effet du maillage.....	47
3.6	Validation du code numérique .....	48
3.7	Conclusion .....	49

---

### **Chapitre 4 : Solution analytique**

---

4.1	Introduction.....	50
4.2	Concept de l'écoulement parallèle.....	50
4.2.1	Fonction de courant.....	51
4.2.2	Fonction de répartition de la température et de la concentration .....	51
4.2.3	Influence du facteur de forme de la cavité .....	51
4.3	Application aux équations de base.....	53
4.3.1	Détermination de la fonction de courant .....	54
4.3.2	Détermination de la température et de la concentration.....	54
4.3.3	Détermination des gradients $C_T$ et $C_S$ .....	55
4.3.4	Détermination des nombres de Nusselt et Sherwood.....	57
4.3.5	Détermination de $\psi_0$ .....	57
4.3.6	Détermination des nombres de Rayleigh critique .....	59
4.4	Comparaison avec la solution numérique .....	60
4.5	Conclusion .....	61

---

### **Chapitre 5 : Analyse de stabilité linéaire**

---

5.1	Introduction .....	62
5.2	Formulation mathématique .....	62

5.2.1	État de base.....	63
5.2.2	Équations de perturbation .....	64
5.3	Solution des equations de stabilité.....	65
5.3.1	Discrétisation des équations .....	65
5.3.2	Résolution.....	67
5.4	Validation du code numérique .....	68

---

## **Chapitre 6 : Résultats et discussions**

---

6.1	Introduction.....	70
6.2	Profils des fonctions de courant, isothermes et isoconcentrations.....	72
6.2.1	Cas de l'absence de l'effet Soret $a = 0$ .....	72
6.2.2	Cas de la présence de l'effet Soret $a = 1$ .....	73
6.3	Profils de vitesse .....	79
6.4	Transferts thermiques et massiques .....	79
6.4.1	Effet du nombre de Rayleigh sur $\psi_0$ pour $\varphi > 0$ .....	80
6.4.2	Effet du nombre de Rayleigh sur $\psi_0$ pour $\varphi < 0$ .....	82
6.4.3	Effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt et de Sherwood.....	83
6.5	Convection induite par double diffusion et effet Soret.....	87
6.5.1	Effet du nombre de Rayleigh $\bar{R}_T$ sur: $\Psi_0$ , Nusselt, et Sherwood, $\varphi \geq 0$ .....	87
6.5.2	Effet du nombre de Rayleigh $\bar{R}_T$ sur: $\Psi_0$ , Nusselt, et Sherwood, $\varphi \leq 0$ .....	90
6.6	Influence du nombre de Lewis.....	93
6.7	Effet du rapport des forces de flottabilité thermiques et solutales sur $\psi_0$ .....	95
6.7.1	Forces de flottabilité déstabilisantes .....	95
6.7.2	Forces de flottabilité stabilisantes .....	96
6.8	Analyse de stabilité linéaire .....	98
6.8.1	Interprétation des résultats de la stabilité linéaire .....	98
6.8.1.1	Premier cas: quadrant I et IV .....	98
6.8.1.2	Deuxième cas: quadrant II et III .....	99

---

## **Conclusion générale et perspectives** .....

---

<b>Références bibliographiques</b> .....	103
--	-----

# Liste des Figures

## *Liste des figures*

<b>Figure 1-1:</b> Schéma représentatif de la convection thermohaline (eau+sel). (a) Création d'un gradient de concentration par application d'un flux de soluté sur les parois (b) Mouvements convectifs engendrés par la double diffusion.....	4
<b>Figure 1-2:</b> Schéma représentatif de l'effet Soret.....	6
<b>Figure 1-3:</b> Diagramme de stabilité pour des perturbations monotones infinitésimales [Nield, 1967] .....	7
<b>Figure 1-4:</b> Nombres d'ondes critiques correspondants aux points neutres de la courbe de stabilité de la Figure 1-3. [Nield, 1967] .....	7
<b>Figure 1-5:</b> Différents comportements de modes stables et instables dans le plan $(Ra, Ra_s)$ [Baines et Gill, 1969] .....	9
<b>Figure 1-6:</b> Expérience en laboratoire pour démontrer la fontaine salée: A tube extérieur en verre. B: trou dans le fond pour le remplissage. C: tube intérieur en verre pour introduire la fontaine. [Stommel, Arons et Blanchard, 1956].....	9
<b>Figure 1-7:</b> Seuils critiques de l'amplitude finie pour la convection. [Veronis, 1965]...	10
<b>Figure 1-8:</b> Seuils critiques de bifurcation. [Huppert et Moore, 1976] .....	11
<b>Figure 1-9:</b> Schéma de principe de l'installation. [J. Lee, M. T. Hyun 1988] .....	13
<b>Figure 1-10:</b> Schéma de principe de l'installation, pour $A=0.2$ [J. Lee, M. T. Hyun et K. W. Kim, 1988] .....	13
<b>Figure 1-11:</b> Écoulements typiques dans l'enceinte [J. Lee, M. T. Hyun et K. W. Kim, 1988] .....	14
<b>Figure 1-12:</b> Coefficient de Soret pour le mélange eau-méthanol à $40^\circ$ [Hurle et Jakeman, 1971] .....	17
<b>Figure 1-13:</b> Seuils critiques théoriques du nombre de Rayleigh pour mélange eau-méthanol à $40^\circ$ . [Hurle et Jakeman, 1971] .....	17
<b>Figure 1-14:</b> Diagrammes de bifurcation en terme de la fonction de courant. (a): sans effet Soret, (b): avec effet Soret. [Ouriemi et al. (2005)] .....	20
<b>Figure 1-15:</b> Analyse de l'apparition de la convection [Choi et Kim, 2007] .....	21
<b>Figure 2-1:</b> Représentation schématique du modèle physique et du système de Cordonnées.....	27
<b>Figure 3-1 :</b> Maillage et distribution des nœuds sur le volume de contrôle.....	38
<b>Figure 3-2:</b> Vitesses et vecteurs normaux sur le volume de contrôle.....	41

<b>Figure 3-3</b> : Prédiction de la fonction $f$ en fonction du nombre de Peclet $P$ du maillage pour deux différents schémas (d'après Patankar, 1980).....	<b>42</b>
<b>Figure 3-4</b> : Les résultats de la solution numérique avec le maillage $90 \times 30$ , pour $A = 6, Le = 2, \varphi = 0.05, Ra = 10000, j = 5$ .....	<b>47</b>
<b>Figure 3-5</b> : Les résultats du présent travail comparés à ceux de Mamou et al. (2001) pour le cas $A = 1.5, R_T = 40000, Le = 10^{1/2}, \varphi = -0.79, a = 0, Pr = 1$ .....	<b>49</b>
<b>Figure 4-1</b> : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 10^4, Le = 2, \varphi = 0.2, a = 1, j = 1$ et $A = 8, \Psi_{max} = 5.984, \overline{Nu} = 2.906, \overline{Sh} = 3.394$ ...	<b>52</b>
<b>Figure 4-2</b> : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 10^4, Le = 2, \varphi = 0.2, a = 1, j = 1$ et $A = 4, \Psi_{max} = 5.983, \overline{Nu} = 2.898, \overline{Sh} = 3.409$ .....	<b>52</b>
<b>Figure 4-3</b> : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 10^4, Le = 2, \varphi = 0.2, a = 1, j = 1$ et $A = 2, \Psi_{max} = 5.977, \overline{Nu} = 2.797, \overline{Sh} = 3.664$ .....	<b>53</b>
<b>Figure 4-4</b> : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 10^4, Le = 2, \varphi = 0.2, a = 1, j = 1$ et $A = 1, \Psi_{max} = 4.88, \overline{Nu} = 2.599, \overline{Sh} = 4.086$ .....	<b>53</b>
<b>Figure 4-5</b> : Définition du volume de contrôle.....	<b>56</b>
<b>Figure 4-6</b> : Courbes de bifurcation.....	<b>59</b>
<b>Figure 4-7</b> : Influence du rapport de forme de la cavité sur, la fonction de courant, les transferts de chaleur et de masse, au centre de la cavité, pour $R_T = 10^4, Le = 2, \varphi = 0.2, a = 1, j = 1$ , et $Pr = 7$ .....	<b>61</b>
<b>Figure 5-1</b> : Construction du système matriciel.....	<b>67</b>
<b>Figure 5-2</b> : Courbe marginale de stabilité.....	<b>68</b>
<b>Figure 6-1</b> : Profils de la fonction de courant, des isothermes, des isoconcentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = +0.05, a = 0, \Psi_{max} = 1.088, Nu = 1.280, Sh = 1.831$ .....	<b>72</b>
<b>Figure 6-2</b> : Profils de la fonction de courant, des isothermes, des isoconcentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = -0.05, a = 0, \Psi_{max} = 0.88, Nu = 1.203, Sh = 1.641$ .....	<b>73</b>

<b>Figure 6-3:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes, des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = +0.05, a = 1$ et $j = 5, \Psi_{\max} = 1.40, Nu = 1.43, Sh = 2.28$ .	<b>73</b>
<b>Figure 6-4:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = +0.05, a = 1$ et $j = 0, \Psi_{\max} = 1.10, Nu = 1.29, Sh = 3.20$ .	<b>74</b>
<b>Figure 6-5:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = +0.05, a = 1$ et $j = -1, \Psi_{\max} = 1.01, Nu = 1.25$ .	<b>74</b>
<b>Figure 6-6:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations Prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = +0.05, a = 1$ et $j = -4, \Psi_{\max} = 0.5, Nu = 1.07, Sh = 1.56$ .	<b>75</b>
<b>Figure 6-7:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = -0.05, a = 1$ et $j = 1.4, \Psi_{\max} = 0.32, Nu = 1.03, Sh = 1.15$ .	<b>75</b>
<b>Figure 6-8:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = -0.05, a = 1$ et $j = 1.2, \Psi_{\max} = 0.56, Nu = 1.08, Sh = 1.44$ .	<b>76</b>
<b>Figure 6-9:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = -0.05, a = 1$ et $j = 0, \Psi_{\max} = 0.85, Nu = 1.18, Sh = 2.47$ .	<b>76</b>
<b>Figure 6-10:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = -0.05, a = 1$ et $j = -1, \Psi_{\max} = 0.98, Nu = 1.24$ .	<b>77</b>
<b>Figure 6-11:</b> Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = -0.05, a = 1$ et $j = -4, \Psi_{\max} = 1.23, Nu = 1.35, Sh = 1.70$ .	<b>77</b>
<b>Figure 6-12 :</b> L'influence du paramètre $j$ sur les profils de la vitesse pour $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = 0.05$ , et $a = 1$ .	<b>79</b>
<b>Figure 6-13 :</b> Diagrammes de bifurcation en fonction de Rayleigh $\overline{Ra}_T$ pour $Le = 10, \varphi = 0.05$ , et différentes valeurs de $j$ .	<b>82</b>

<b>Figure 6-14</b> : Diagrammes de bifurcation en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour $Le = 10$ , $\varphi = -0.05$ , et différentes valeurs de $j$ .....	<b>83</b>
<b>Figure 6-15</b> : Diagrammes du Nombre de Nusselt $Nu$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $Le = 10$ , $\varphi = 0.05$ , et différentes valeurs de $j$ .....	<b>85</b>
<b>Figure 6-16</b> : Diagrammes du Nombre de Sherwood $Sh$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $Le = 10$ , $\varphi = 0.05$ , et différentes valeurs de $j$ .....	<b>85</b>
<b>Figure 6-17</b> : Diagrammes du Nombre de Nusselt $Nu$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $Le = 10$ , $\varphi = -0.05$ , et différentes valeurs de $j$ .....	<b>86</b>
<b>Figure 6-18</b> : Diagrammes du Nombre de Sherwood $Sh$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $Le = 10$ , $\varphi = -0.05$ , et différentes valeurs de $j$ .....	<b>86</b>
<b>Figure 6-19</b> : Diagrammes de bifurcation en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour $a = 0$ et $a = 1$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0$ et $\varphi = +0.5$ .....	<b>88</b>
<b>Figure 6-20</b> : Diagrammes du Nombre de Nusselt $Nu$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $a = 0$ et $a = 1$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0$ et $\varphi = +0.5$ .....	<b>89</b>
<b>Figure 6-21</b> : Diagrammes du Nombre de Sherwood $Sh$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $a = 0$ et $a = 1$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0$ et $\varphi = +0.5$ .....	<b>90</b>
<b>Figure 6-22</b> : Diagrammes de bifurcation en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour $a = 0$ et $a = 1$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0$ et $\varphi = -0.5$ .....	<b>91</b>
<b>Figure 6-23</b> : Diagrammes du Nombre de Nusselt $Nu$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $a = 0$ et $a = 1$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0$ et $\varphi = -0.5$ .....	<b>92</b>
<b>Figure 6-24</b> : Diagrammes du Nombre de Sherwood $Sh$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $a = 0$ et $a = 1$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0$ et $\varphi = -0.5$ .....	<b>92</b>
<b>Figure 6-25</b> : Influence du nombre de Lewis sur $\Psi_0$ pour $Ra = 10^3$ , $\varphi = 0.2$ pour les cas: convection double diffusive, convection purement induite par effet Soret, et convection double diffusive avec effet Soret.....	<b>94</b>
<b>Figure 6-26</b> : Influence du nombre de Lewis sur le nombre de Nusselt pour $Ra = 10^3$ $\varphi = 0.2$ pour les cas : convection double diffusive, convection purement induite par effet Soret, et convection double diffusive avec effet Soret.....	<b>94</b>
<b>Figure 6-27</b> : Influence du nombre de Lewis sur le nombre de Sherwood pour $Ra = 10^3$ $\varphi = 0.2$ pour les cas : convection double diffusive, convection purement induite par effet Soret, et convection double diffusive avec effet Soret.....	<b>95</b>



<b>Figure 6-28:</b> Diagrammes de bifurcation en termes de $\Psi_0$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $Le = 10, a = 1, \varphi = +0.5$ , et différentes valeurs de $j$ .....	<b>97</b>
<b>Figure 6-29:</b> Diagrammes de bifurcation en termes de $\Psi_0$ en fonction de Rayleigh $\bar{R}_T$ pour, $Le = 10, a = 1, \varphi = -0.5$ , et différentes valeurs de $j$ .....	<b>97</b>
<b>Figure 6-30:</b> Diagrammes de stabilité dans le plan $(\bar{R}_{TC}, j)$ pour le cas $Le = 10, \varphi = 0.2$ et $a = 1$ .....	<b>100</b>

# Liste des Tableaux

---

## *Liste des tableaux*

---

<b>Tableau 1:</b>	Effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant $\psi_{\max}$ , du nombre de Nusselt moyen et du nombre de Sherwood moyen..	<b>47</b>
<b>Tableau 2:</b>	Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum, nombre de Nusselt et nombre de Sherwood avec les résultats de Mamou et al. (2001) pour $A = 1.5$ , $R_T = 4 \times 10^4$ , $Le = 10^{1/2}$ , $\varphi = -0.79$ , $a = 0$ , $Pr = 1$ .....	<b>48</b>
<b>Tableau 3:</b>	Effet du maillage du code numérique et comparaison avec le résultat de Sparrow et al. (1964) pour le cas $\varphi = 0$ .....	<b>69</b>
<b>Tableau 4:</b>	Validation du code numérique de stabilité, pour le cas $\varphi = 0$ , en terme de $Ra_{TC}^{Hoph}$ , $k_c$ et $w_c$ .....	<b>69</b>

# Nomenclature

## Nomenclature

### Alphabet latin

$A$	Rapport de forme de la cavité, $A = L / H$	
$a$	Nombre entier, $a = 1$ ou $a = 0$	
$c$	Paramètre adimensionnel, $c = aj + 1$	
$C_S$	Gradient de concentration suivant la direction $x$	
$C_T$	Gradient de température suivant la direction $x$	
$D$	Coefficient de diffusivité massique.	$m^2/s$
$D'$	Coefficient de l'effet Soret (ou de la thermo-diffusion)	$m^2/(s K)$
$\vec{F}$	Champ vectoriel	
$f$	La fonction à déterminer ( $\Psi$ , $\omega$ , $T$ ou $S$ )	
$\bar{f}$	La valeur moyenne de la fonction $f$ dans le volume de contrôle	
$g$	Accélération gravitationnelle.	$m/s^2$
$H'$	Hauteur de la cavité.	$m$
$J$	Opérateur Jacobien	
$j$	Flux massique adimensionnel	
$j'$	Flux massique par unité de surface	$kg/(m^2 s)$
$k$	Nombre d'onde dans la direction horizontale	
$k$	Conductivité thermique	$W/(m K)$
$L'$	Longueur de la cavité	$m$
$Le$	Nombre de Lewis, $Le = \alpha/D$	
$N$	Fraction massique du composant de référence (soluté)	
$N_0$	Fraction massique initiale du composant de référence	
$\Delta N$	Différence caractéristique de concentration	
$Nu$	Nombre de Nusselt	
$p$	Taux d'amplification des perturbations dans le temps	
$P$	La Pression	$Pa$
$Pr$	Nombre de Prandlt, $Pr = \nu/\alpha$	
$Pe$	Nombre de Peclet numérique	
$q'$	Flux constant de chaleur par unité de surface.	$W/m^2$
$Ra_T$	Nombre de Rayleigh thermique, $Ra_T = g\beta'_T q' H'^4 / k\alpha\nu$	
$Ra_{TC}$	Nombre de Rayleigh thermique critique.	
$\bar{R}_S$	Nombre de Rayleigh solutal standard, $\bar{R}_T \phi Le$	
$\bar{R}_T$	Nombre de Rayleigh thermique standard, $Ra_T/720$	
$Sh$	Nombre de Sherwood	
$S$	Fonction de répartition de la concentration	
$T$	Température du mélange fluide adimensionnelle	
$t$	Temps adimensionnel	

$t_s$	Terme source
$\Delta T$	Différence caractéristique de température, $q' H' / k$
$u, v, w$	Composantes adimensionnelles du vecteur vitesse.
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes mesurées à partir du centre de la Cavité.

---

*Lettres grecques*

---

$\alpha$	Diffusivité thermique du fluide.	$m^2/s$
$\beta_N$	Coefficient d'expansion solutal	$m^2/kg$
$\beta'_T$	Coefficient d'expansion thermique	$K^{-1}$
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide	$m^2/s$
$\varphi$	Rapport des forces de volume, $\beta_N \Delta N^* / \beta'_T \Delta T^*$	
$\Psi$	Fonction de courant	
$\Psi_0$	Fonction de courant au centre de la cavité	
$\rho$	Masse volumique du fluide,	$kg/m^3$
$\omega$	Vorticité	
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide	$Pa.s$
$\Omega$	Le volume de contrôle	
$\Gamma$	Une constante $\Gamma = 1$ ou $\Gamma = Pr$ , ou $\Gamma = 1/Le$	
$\Sigma$	La frontière qui limite le volume de contrôle $\Omega$	
$\varepsilon$	L'erreur calculée	
$\xi$	Incréments entre (lignes de courant, isothermes, ou concentrations)	
$\theta_T$	Fonction de répartition de la température selon l'axe $y$	
$\theta_S$	Fonction de répartition de la concentration selon l'axe $y$	
$\hat{\Psi}$	Perturbation infinitésimale de la fonction de courant	
$\hat{T}$	Perturbation infinitésimale de la température	
$\hat{S}$	Perturbation infinitésimale de la concentration	
$\sigma$	Le taux de croissance de l'amplitude	
$\omega$	La fréquence temporelle des perturbations	

---

*Exposant*

---

'	Variable dimensionnelle
*	Variable caractéristique
<i>Sous</i>	Souscritique
<i>sup</i>	Supercritique
<i>Hopf</i>	Hopf

## *Indices*

---

<i>max</i>	Maximum
<i>min</i>	Minimum
<i>B</i>	Etat de base
<i>c</i>	Critique
<i>o</i>	Etat de référence
<i>T</i>	Thermique
<i>N, S</i>	Solutal
<i>f</i>	Fluide
<i>i</i>	Indice d'un point du maillage suivant <i>x</i>
<i>j</i>	Indice d'un point du maillage suivant <i>y</i>

## *Abréviations*

---

ADI	Méthode implicite aux directions alternées
TDMA	Tri Diagonal Matrix Algorithm (Algorithme de Thomas)

# Introduction Générale



## 1-Généralités

L'étude du phénomène de la convection naturelle, d'origine thermique ou d'origine thermique et solutale, a suscité et suscite encore l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Les recherches dans ce domaine ont été continues, et le nombre des travaux sur le sujet est impressionnant.

Le phénomène dit de convection naturelle, est observé lorsqu'on applique un champ de gradient thermique sur un fluide. La différence de masse volumique engendrée, provoque dans certains cas, des mouvements naturels de la matière qui a tendance à monter grâce à la poussée d'Archimède lorsqu'elle est chaude, et à redescendre une fois refroidie, créant ainsi des mouvements circulaires pour assurer les échanges thermiques, entre les milieux chauds et les milieux froids.

Non seulement le gradient de température peut créer des mouvements de convection naturelle des particules fluides dus à la variation de la densité, mais il crée aussi des gradients de concentration. Ce phénomène qui combine les forces de poussée thermique (dus au gradient thermique) et solutale (dus au gradient de concentration) est connu sous le nom de double diffusion (convection thermosolutale), et donne naissance à des comportements dynamiques intéressants.

Lorsque les gradients de chaleur et de concentration sont tous les deux imposés, on parle de convection thermosolutale. Le cas où le gradient de concentration est induit par le gradient thermique, porte le nom de l'effet Soret (1880).

Ce type de transport convectif attire l'attention des chercheurs depuis plusieurs décennies, par ses applications dans un large éventail de domaines, il est fréquemment rencontré dans la nature, on peut citer à titre d'exemple les mouvements convectifs rencontrés dans les océans, les lacs, les étangs solaires et l'atmosphère, il est également responsable de la géophysique des planètes.

Les exemples dans l'industrie comprennent les procédés de séparation en industries chimique et pétrolière, la croissance des cristaux, le stockage des déchets nucléaires, les traitements des matériaux telle que la solidification, la migration de l'humidité à travers les isolations fibreuses, les opérations de dessalement de l'eau de mer, lors des procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques ...etc.

## 2-But de l'étude

Plusieurs études ont été menées sur la convection thermosolutale, dans une couche de fluide horizontale. Ces études concernent le cas de la convection, induite soit par double diffusion soit par l'effet Soret. Cependant, dans les applications pratiques, il n'y a aucune raison pour que ces deux effets ne soient présents simultanément.

La valeur ajoutée apportée par le présent travail, est l'étude de l'effet combiné de la double diffusion et l'effet Soret en milieu fluide binaire, dans le cas d'une cavité rectangulaire, soumise à des conditions aux frontières horizontales thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleur et de concentration), et ayant les surfaces verticales maintenues adiabatiques.

Le type de fluide considéré engendre des mouvements convectifs très intéressants. L'écoulement au sein de la cavité est régi par des équations non linéaires fortement couplées. Dans la plus part des cas la solution n'est possible que par des voies numériques, cependant il existe certaines situations où des solutions analytiques sont possibles. Ces dernières possèdent, malgré leur application à des situations idéalisées, la qualité de fournir à moindres coûts, des résultats pratiques intéressants, et elles aident énormément à la compréhension physique des phénomènes impliqués dans ce type de problèmes.

Dans cette investigation, les équations gouvernantes seront résolues analytiquement et numériquement. La solution analytique, se base sur l'approximation de l'écoulement parallèle, ce qui permettra d'obtenir des expressions mathématiques, pour les profils de vitesse, de température et de concentration au sein du modèle physique considéré. La validité du modèle analytique proposé, sera vérifiée à l'aide d'une démarche numérique basée sur la méthode des volumes finis.

Nous souhaitons illustrer l'influence des paramètres de contrôle (nombre de Rayleigh thermique, nombre de Lewis, et le flux massique) sur les nombres de Nusselt et de Sherwood ainsi que sur la structure de l'écoulement.

Une analyse de la stabilité linéaire du modèle de l'écoulement parallèle sera effectuée et le nombre de Rayleigh critique pour le début de la bifurcation de Hopf sera prédit numériquement, l'existence d'un régime convectif sous critique sera mise en évidence.

### 3-Contenu de la thèse

Le manuscrit de cette thèse est constitué de six chapitres

- Dans le premier chapitre une synthèse bibliographique portant sur les travaux de recherche antérieurs dans ce domaine est présentée afin d'en tenir compte pour orienter notre recherche vers des aspects non encore abordés par la littérature.
- Nous présentons dans le deuxième chapitre la configuration géométrique étudiée, le modèle mathématique, traduisant les équations régissant le phénomène de la convection naturelle thermosolutale, ainsi que les hypothèses adoptées.
- La description de la méthode des volumes finis (maillage et discrétisation) et le schéma de discrétisation adopté sont présentés au troisième chapitre. A la fin nous avons présenté l'algorithme de résolution.
- Le quatrième chapitre décrit la méthode analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle. Une validation des résultats est obtenue par comparaison avec les résultats numériques.
- Dans le cinquième chapitre, nous utilisons la méthode de stabilité linéaire pour déterminer les seuils critiques de l'apparition de la convection, et ceux de la bifurcation de Hopf.
- Le sixième chapitre regroupe les résultats obtenus par les méthodes : numérique, analytique et stabilité linéaire ainsi que leurs interprétations.
- Enfin, une conclusion générale est consacrée à la mise en évidence des différents points majeurs de cette étude, ainsi que les perspectives envisagées à long terme qui peuvent faire l'objet de recherches complémentaires.

# Chapitre 1

## Synthèse Bibliographique

### Résumé

---

*Dans ce premier chapitre, nous présentons une revue des travaux concernant la convection naturelle dans un milieu fluide, induite par double diffusion, et des travaux portant sur la prise en compte de l'effet Soret. Nous ferons ressortir les principaux résultats, théoriques, numériques et expérimentaux.*

---

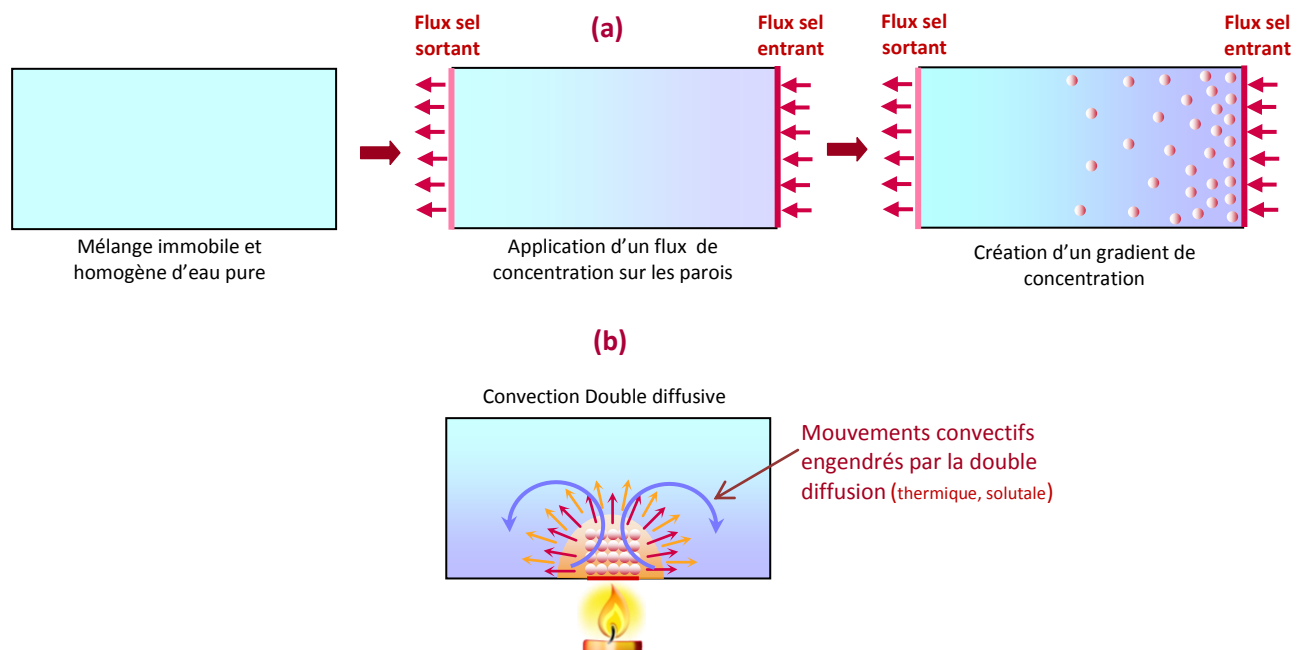
## 1.1 Introduction

La convection dans un fluide à plusieurs constituants est beaucoup plus compliquée que dans les fluides purs. Cela est dû à l'interaction entre la convection, la diffusion solutale et la diffusion thermique.

En outre, la dynamique de la convection dans de tels fluides dépend de la façon dont les gradients de température et de concentration sont orientés l'un par rapport à l'autre, elle peut être très différente de celle engendrée par les forces de flottabilité d'origine thermique uniquement.

Une revue de la littérature sur ce sujet indique que deux types de problèmes, qui ont une relation avec la génération d'un gradient solutal ont été pris en considération.

Dans le premier type de problème, appelé convection double diffusive, les gradients de concentration dans le mélange binaire sont induits par l'imposition de conditions aux limites solutales sur le système, Figure 1-1



**Figure 1-1:** Schéma représentatif de la convection thermohaline (eau + sel). (a) Création d'un gradient de concentration par application d'un flux de soluté sur les parois. (b) Mouvements convectifs engendrés par la double diffusion

Dans le second type de problème (Figure 1-2), les gradients de concentration ne sont pas la conséquence de l'application des conditions aux limites solutales sur le système. Il s'agit plutôt des flux de chaleur imposés au mélange initialement homogène qui

induisent des gradients solutals. Cette dernière situation est appelée convection induite par effet Soret.

La synthèse bibliographique fera un tour d'horizon sur les travaux effectués dans le fondamental, le numérique et l'expérimental, elle est divisée en deux parties principales. La première sera consacrée aux études portant sur la convection double diffusive, la deuxième concernera la convection induite par effet Soret.

Pour une meilleure compréhension de l'effet Soret, un préliminaire sera présenté pour une vision plus claire de ce phénomène.

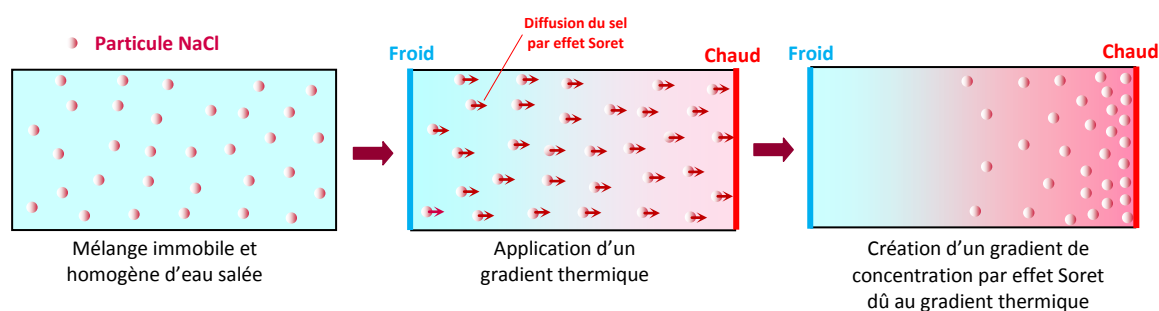
## 1.2 L'effet Soret ou Ludwig

Le comportement d'un fluide multi-constituant se caractérise par de nombreux phénomènes n'ayant pas cours dans un fluide pur. En particulier, lorsqu'un mélange de fluide binaire, initialement homogène, est soumis à un gradient de température, on observe une migration relative des constituants les uns par rapport aux autres, selon les espèces et les conditions thermodynamiques, cette migration partielle s'effectue vers les zones chaudes ou froides. Le phénomène de l'apparition du gradient de concentration dû au gradient de température, est connu sous le nom de la thermodiffusion ou l'effet Soret, ou bien encore la thermophorèse.

Cet effet fut découvert pour la première fois, par Carl Ludwig en 1856, médecin et physicien allemand, qui observa expérimentalement une solution de sulfate de soude, et a constaté que ce mélange de fluide, inégalement chauffé a cessé d'être homogène en composition.

Il fallait attendre jusqu'en 1879, où le scientifique suisse Charles Soret, à travers ses travaux expérimentaux sur des solutions électrolytiques, a mieux exploité ce phénomène, en mettant en évidence la présence d'un gradient de concentration ionique, opposé au gradient thermique. L'étude consistait en l'observation d'une solution saline, contenue dans un tube ayant les deux extrémités maintenues à des températures différentes, la conséquence était la migration des ions vers les parties froides du récipient.

Il est important de noter les travaux de Dufour qui, en 1872, avait déjà montré l'effet inverse qui porte son nom, à savoir l'apparition d'un gradient de température induit par un gradient de concentration. Toutefois, cet effet est négligeable dans les solutions, et n'est pris en compte que dans les mélanges de gaz.



**Figure 1-2:** Schéma représentatif de l'effet LUDWING-SORET

### 1.3 Intérêt pratique de L'effet Soret

Le phénomène de thermodiffusion joue un rôle déterminant, dans de nombreux processus importants que se soit, naturels, physiques ou technologiques. Comme exemples, on peut citer, la convection thermohaline (eau-NaCl) dans l'océan entraînée par des gradients de salinité associés aux différences de température, et le transport de masse à travers les membranes biologiques induit par de très faibles gradients thermiques dans la matière vivante. La thermodiffusion joue aussi un rôle important dans le processus de croissance cristalline, où l'effet Soret ne peut pas être négligé dans de nombreux procédés industriels. La thermodiffusion affecte de manière significative l'état et la répartition des espèces dans les réservoirs pétroliers.

### 1.4 Convection double diffusive

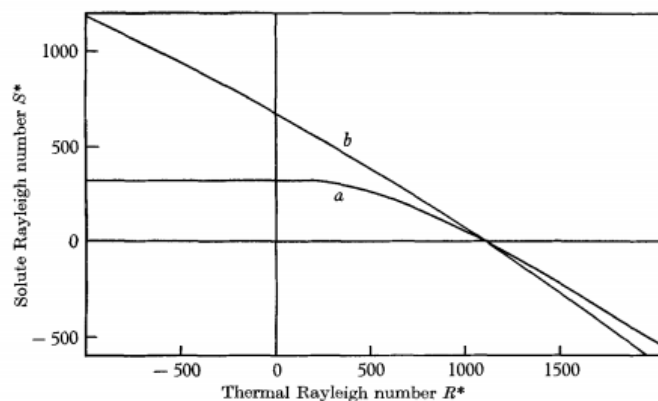
Parmi les études importantes concernant la convection double diffusive dans un fluide binaire, on peut citer l'œuvre pionnière de [Nield \(1967\)](#). Dans cette étude, le seuil critique du début de la convection thermosolutale dans une couche horizontale de fluide immobile chauffée par le bas, a été prédit par cet auteur sur la base de la théorie de la stabilité linéaire.

Une méthode de séries de fourrier a été utilisée pour l'obtention des équations aux valeurs propres, pour un ensemble de conditions aux limites ce qui a permis de prédire les nombres de Rayleigh supercritiques thermique et solutal, marquant le seuil de déclenchement de la convection.

Les instabilités oscillatoire et monotone ont été prises en considération. D'après cette étude l'instabilité oscillatoire peut se produire lorsqu'un gradient de soluté fortement

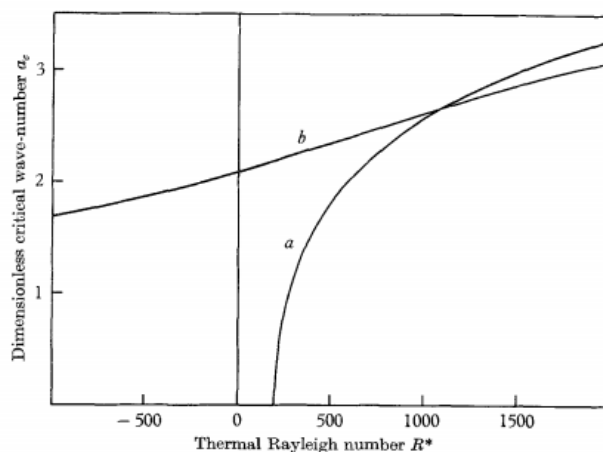
stabilisant est contré par un gradient thermique déstabilisant, et cela à un nombre de Rayleigh bien inférieur au supercritique.

Concernant l'instabilité monotone, plusieurs cas peuvent exister selon que les équations aux perturbations de la température et la concentration, sont satisfaites ou non. Dans le premier cas, l'allure de la courbe de stabilité dans le plan ( $R, S$ ) se présente sous forme de ligne droite, alors que dans le deuxième cas, elle est concave par rapport à l'origine, (Figure 1-3).



**Figure 1-3:** Diagramme de stabilité pour des perturbations monotones infinitésimales. [Nield, 1967].

Une autre situation se présente pour certaines conditions aux limites lorsque le nombre d'onde critique horizontal est nul, dans ce cas la valeur de  $R$  ne dépend pas de  $S$  et vice versa, (Figure 1-4). Une discussion générale a été présentée à la fin sur la possibilité et l'importance de la convection à nombre d'onde zéro (cellule de convection simple).



**Figure 1-4:** Nombres d'ondes critiques correspondants aux points neutres de la courbe de stabilité de la Figure 1-3. [Nield, 1967].



Le même problème a été réexaminé par Veronis (1968), il a été montré qu'un gradient solutal stabilisant, empêchait l'apparition de la convection dans un fluide soumis à un gradient thermique opposé. En outre, l'apparition de l'instabilité pouvait se produire avec un mouvement oscillatoire en raison de l'effet stabilisateur du soluté. Ces résultats ont été obtenus à partir de la théorie de stabilité linéaire. Il a été constaté que l'instabilité d'amplitude finie se produisait, pour les fluides ayant un nombre de Prandtl un peu plus petit que l'unité. Lorsque le nombre de Prandtl égalait ou dépassait l'unité, l'instabilité s'installait d'abord comme un mouvement oscillatoire, et devenait ensuite instable à des perturbations conduisant à des mouvements de convection cellulaires stationnaires, avec un flux de chaleur plus grand.

Baines et Gill (1969) ont examiné avec plus de détail le problème de stabilité de la convection thermohaline précédemment traité par Stern, Walin et Veronis. Ils ont effectué de nouveaux calculs pour diverses conditions aux limites, appliquées sur une couche d'un fluide immobile, présentant une stratification en température et en salinité.

D'après Baines et Gill, la plupart des études précédentes étaient focalisées sur la détermination des critères de début de l'instabilité, et l'étude de la nature du mouvement pour les systèmes qui sont bel et bien instables, par la méthode habituelle des modes normaux. Ils étaient alors doublement motivés, leur but était de clarifier certains aspects de la théorie linéaire, et de proposer des approximations utiles pour les études de l'amplitude finie.

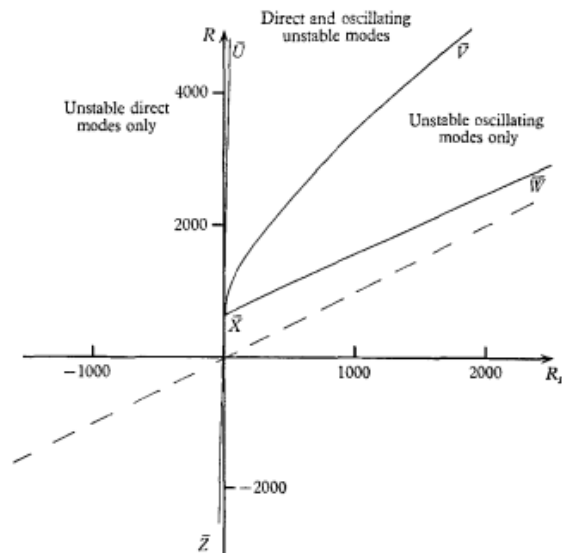
Leur travaux ont permis de prédire le nombre de Rayleigh thermique  $R_T$  pour lequel la convection directe pouvait se produire.

Lorsque le nombre de Rayleigh solutal  $R_S$  satisfaisait la condition  $R_S \gtrsim 0.1$ , le nombre de Rayleigh thermique prédit était moins que  $R_S$  de 100 fois.

Une représentation graphique a été mise au point, pour montrer l'importance relative des différents termes dans les équations du mouvement en fonction de  $R_T$  et  $R_S$ , (Figure 1-5).

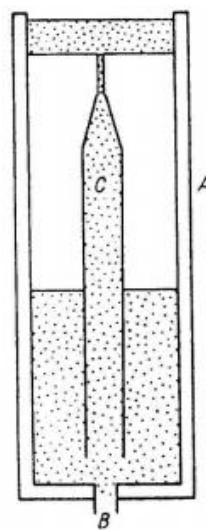
Le mode le plus instable sur tous les nombres d'onde pour chaque  $R_T$  et  $R_S$  a été trouvé et il a été démontré que lorsque les deux modes instables direct et oscillant étaient présents, le mode le plus instable était celui direct dans la plupart des cas.

D'après les auteurs, le principal intérêt dans le problème thermosolutal provient des régions du plan de  $(R_T, R_S)$ , où le système se comporte d'une manière fondamentalement différente que celle d'un système stratifié thermiquement seulement.



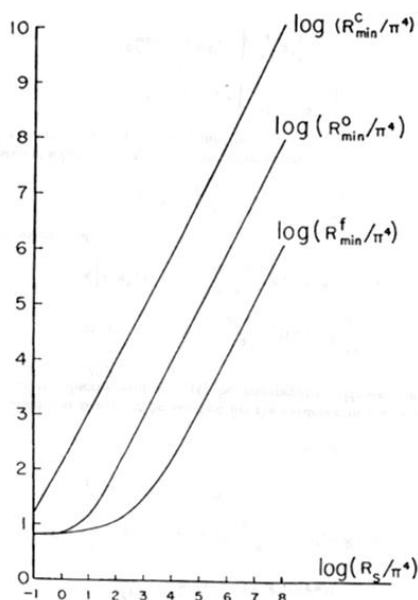
**Figure 1-5:** Différents comportements de modes stables et instables dans le plan  $(Ra, Ra_s)$  [Baines et Gill, 1969]

Cette constatation peut être expliquée par les travaux de **Stommel, Arons et Blanchard (1956)**, qui se sont basés sur l'étude des propriétés du système de convection thermohaline, et ont découvert le phénomène de la fontaine salée, qui se produit lorsque l'eau chaude salée se situe au-dessus de l'eau douce froide. Ils ont montré l'existence de deux régions, l'une dite du "doigt de sel" précédemment analysée par **Stern(1960)**, et l'autre dite région stable, (Figure 1-6). Ce comportement différent est dû à l'inégalité entre les diffusivités de chaleur et du sel, et si ces diffusivités étaient égales, le système pourrait être correctement paramétré par un seul nombre de Rayleigh.



**Figure 1-6:** Expérience en laboratoire pour démontrer la fontaine salée: A tube extérieur en verre. B: trou dans le fond pour le remplissage. C: tube intérieur en verre pour introduire la fontaine. [Stommel, Arons et Blanchard, 1956]

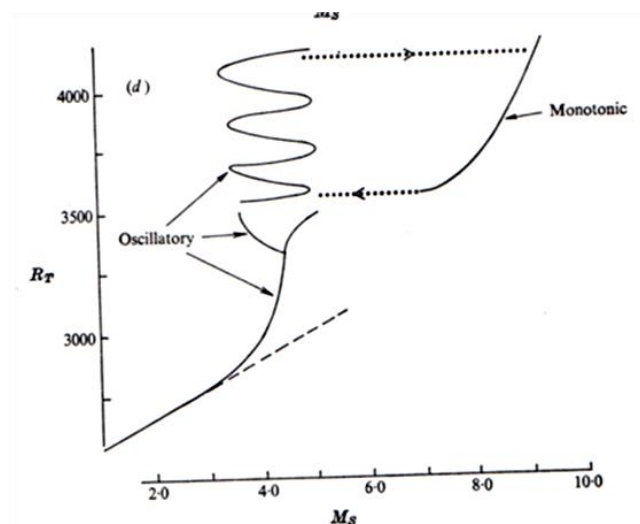
Veronis (1965), a également étudié la théorie de la stabilité non-linéaire, dans une couche de fluide horizontale infinie soumise à un gradient solutal stabilisant et un gradient thermique déstabilisant. Il a montré que dans ce cas, le système devenait instable à une valeur suffisamment grande du gradient thermique. Il a aussi indiqué que le système devrait être instable à des perturbations surstables ou oscillatoires pour une perturbation infinitésimale. Cependant, la convection d'amplitude finie pouvait exister pour des valeurs du gradient thermique déstabilisant aussi petites qu'un pour cent de la valeur critique,  $\Delta T_c$ , prédite par la théorie de stabilité linéaire. Les intégrations numériques ont montré que, si le système est infinitésimalement perturbé avec  $\Delta T > \Delta T_c$  ou par des perturbations appropriées d'amplitude finie avec  $\Delta T < \Delta T_c$ , Figure (I-7), l'état final du mouvement est celui prédit par l'analyse d'amplitude finie stable. L'étude a permis de prédire les seuils de l'amplitude finie pour la convection, et l'existence de la convection sous-critique, Figure (I-7).



**Figure I-7:** Seuils critiques de l'amplitude finie pour la convection.  
[Veronis, 1965]

Le mouvement bidimensionnel d'un fluide confiné entre deux plans horizontaux longs chauffés et salés par le bas, a été examiné par Huppert et Moore (1976). Par une analyse de stabilité non-linéaire et une solution numérique directe des équations gouvernantes, les seuils de l'amplitude finie pour la convection ont été prédits. Les formes possibles du mouvement à grande amplitude ont été tracées en fonction des quatre paramètres adimensionnels qui spécifient le problème: le nombre de Rayleigh thermique, le nombre de Rayleigh solutal, le nombre de Prandtl et le rapport des diffusivités.

L'étude a montré l'existence d'une bifurcation d'une branche des solutions asymptotiques dépendant du temps, à partir du point d'instabilité oscillatoire linéaire, Figure (1-8). Trois autres transitions brusques dans la forme du mouvement ont eu lieu indépendamment des conditions initiales, pour des valeurs fixes du nombre de Rayleigh solutal, du nombre de Prandtl et du rapport des diffusivités, et pour un Rayleigh thermique qui augmente.



**Figure 1-8:** Seuils critiques de bifurcation.  
[Huppert et Moore, 1976]

**Knobloch et Proctor (1981)** ont traité la convection périodique non linéaire dans les systèmes double diffusifs, par une analyse de stabilité non-linéaire. Deux exemples de convection bidimensionnelle non linéaire double diffusive ont été étudiés: la convection thermohaline, et la convection dans un champ magnétique imposé vertical. Les solutions non linéaires sont trouvées analytiquement.

Pour le premier problème de la convection thermohaline, la branche stable des solutions est toujours sous-critique et la branche d'oscillation est supercritique et stable, et rencontre la branche sur une orbite hétéroclinique sans perte de stabilité.

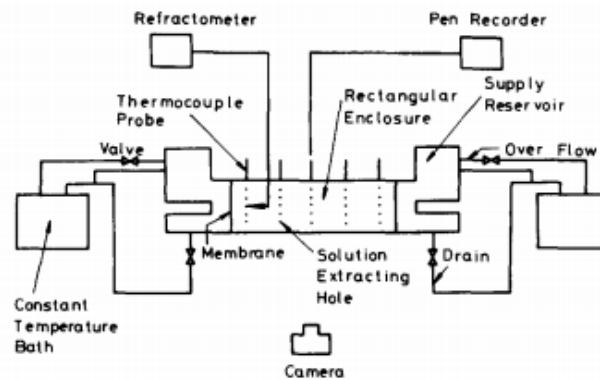
Pour le second cas de la convection dans un champ magnétique, le problème est beaucoup plus varié, les oscillations peuvent être stables ou instables, et rencontrent la branche stable, soit dans une orbite hétéroclinique soit dans une bifurcation de Hopf en fonction des paramètres physiques du problème. Les propriétés explicitement démontrées analytiquement, sont en accord qualitatif excellent avec les calculs numériques effectués.

L'étude du mouvement convectif dans une couche de fluide avec une stratification thermique instable et une stratification solutale stable a été faite par **Proctor (1981)**, à l'aide

d'une théorie de perturbations. Il a été constaté que, indépendamment du nombre de Rayleigh solutal, la convection d'amplitude finie pouvait se produire à des valeurs du nombre de Rayleigh thermique beaucoup plus faible, que celui nécessaire pour les oscillations infinitésimales. Il a été démontré que les résultats analytiques de ces travaux constituaient un complément naturel à ceux numériques de Huppert et Moore (1976). Les résultats présentés s'appliquaient à la fois pour les frontières libres et les frontières rigides, et l'applicabilité de la méthode à d'autres problèmes connexes a été suggérée.

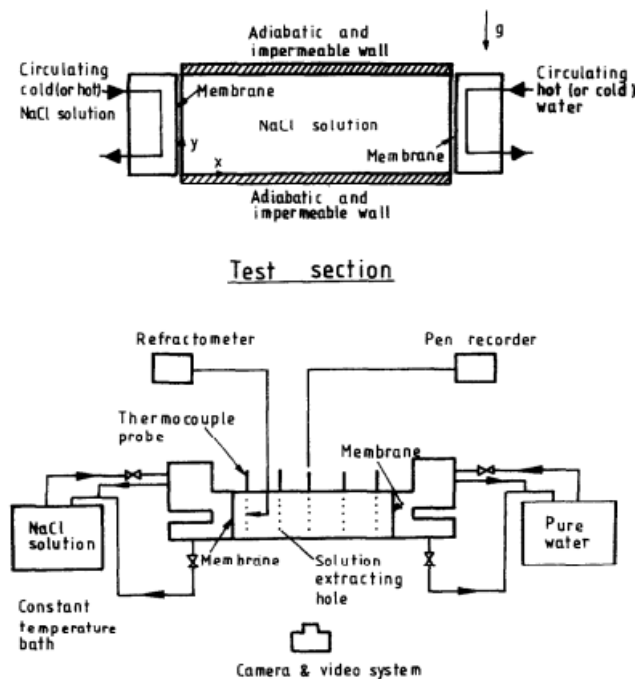
Y. Kamotani, L. W. Wang, S. Ostrach, et H.D. Jiang (1985), ont fait une étude expérimentale de la convection naturelle, dans des enceintes rectangulaires à faible rapport de forme, avec des gradients de température et de concentration horizontaux. Un système électrochimique a été employé pour imposer les gradients de concentration. Les forces de volume solutales considérées s'opposaient ou favorisaient les forces de volume thermiques. A cause d'une grande différence entre les flux de diffusion thermique et massique, l'écoulement possédait des caractéristiques de double diffusion. Pour différentes conditions expérimentales, des configurations d'écoulement complexes et variées ont été observés. Les distributions de température et des flux de transfert massiques ont été étudiés, et les conditions d'instabilité ont été rapportées.

Parmi les études expérimentales sur la convection naturelle double diffusive, on cite celle de J. Lee, M. T. Hyun (1988), l'auteur a considéré une cavité rectangulaire remplie d'un fluide binaire d'eau salée, ayant un facteur de forme 0.2, Figure (1-9). Les parois de la cavité étaient soumises à des gradients de température et de concentration horizontaux. Les deux gradients étaient imposés de telle sorte que leurs effets coopèrent ou s'opposent. La visualisation de flux a montré deux configurations, l'une d'écoulement unicellulaire et l'autre multicouche. L'auteur a observé que la deuxième configuration apparaissait dans une certaine gamme des plans ( $Ra_T - Ra_S$ ). La formation et la croissance d'une structure à écoulement stratifié avec le temps ont été observées et décrites. Plusieurs cas ont été observés selon que l'effet des gradients imposés était aidant ou opposé.

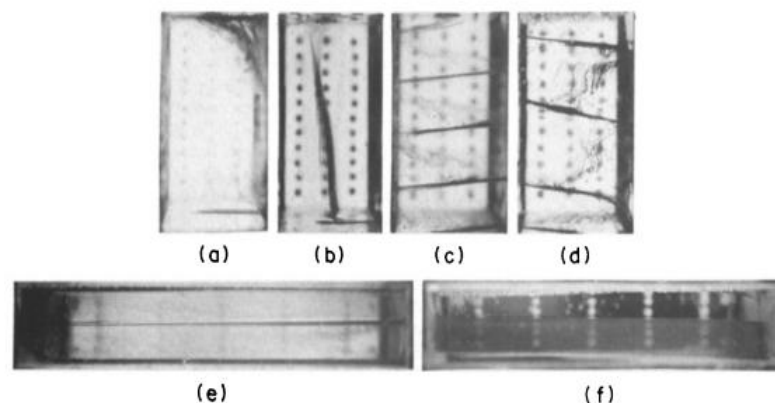


**Figure 1-9:** Schéma de principe de l'installation.  
[J. Lee, M. T. Hyun 1988]

La convection naturelle permanente d'un fluide binaire composé d'eau salée, a été étudiée expérimentalement par J. Lee, M. T. Hyun et K. W. Kim (1988). Les cavités utilisées étaient rectangulaires de facteur de forme 0.2 et 2, et étaient soumises à des gradients de température et de concentration horizontaux, Figure (1-10). Les résultats ont montré l'existence de deux types de configurations selon le rapport de flottabilité, celle comportant une seule cellule de mouvement et une autre multicouche, Figure (1-11). Une structure stratifiée a été observée, et le nombre de couches formées dépendait de la nature coopérante ou opposée des forces de volume thermiques et solutales. Les profils de température et de concentration obtenus étaient intéressants.



**Figure 1-10:** Schéma de principe de l'installation, pour  $A=0.2$   
[J. Lee, M. T. Hyun et K. W. Kim, 1988]



**Figure 1-11:** Écoulements typiques dans l'enceinte  
[J. Lee, M. T. Hyun et K. W. Kim, 1988]

Une étude numérique et expérimentale a été effectuée par H.K. WEE et al. (1989), portant sur le transfert simultané de chaleur et d'humidité par convection naturelle, dans une cavité remplie d'air de rapport de forme 7, pour une cavité horizontale ou verticale. Les nombres de Prandtl et de Schmidt étaient respectivement 0,7 et 0,6. Les équations aux différences finies ont été résolues par la méthode implicite dynamique à directions alternées. Ils ont calculé les écoulements aidants et opposés pour des nombres de Grashof thermique et solutal, qui correspondent aux gradients réels de température et de concentration trouvés dans une cavité typique de bâtiment en Nouvelle-Zélande ( $2 * 10^5 < Gr_T < 2 * 10^6$  et  $1 * 10^4 < Gr_C < 2 * 10^5$ ). La technique expérimentale utilisait deux plaques plastiques poreuses comme parois de la cavité, permettant l'imposition des gradients simultanés de température et d'humidité. Les nombres expérimentaux de Nusselt et de Sherwood étaient en accord avec les valeurs théoriques.

J. Lee, M. T. Hyun et Y. S. Kang (1990), ont mené des expériences pour étudier la convection naturelle, dans une solution stratifiée stable sel-eau, induite par un chauffage latéral, dans une enceinte rectangulaire de rapport de forme 3,0. Selon le rapport de flottement  $N$  qui représente l'importance relative de la stratification solutale et du flottement thermique, quatre régimes distincts d'écoulement ont été observés: régime d'écoulement unicellulaire pour  $N < 10$ , régime à couche limite simultanée pour  $10 \leq N < 40$ , régime d'écoulement à couche successivement formée pour  $40 \leq N < 55$  et régime stagnant pour  $N \geq 55$ . La formation et la croissance de la structure de l'écoulement à couche limite ont été observées et décrites, avec les distributions correspondantes de température et de concentration dans chaque couche.

Avec le nombre croissant d'applications technologiques impliquant des systèmes multicomposants et la nécessité d'un meilleur contrôle de ces processus, la convection naturelle due à des forces thermiques et solutales a reçu de plus en plus d'attention. C'est dans ce contexte que [J. A. Weaver et R. Viskanta \(1991\)](#) se sont intéressés à une étude portant sur l'influence des forces de flottabilité thermique et solutale coopérantes et opposées, sur la convection naturelle des gaz binaires, due aux gradients horizontaux de température et de concentration. L'étude a été menée expérimentalement sur une enceinte de dimension (5.5cm x 1cm). Ils ont utilisé des parois horizontales imperméables en lexan (plaques multicouches en polycarbonate, matériau difficilement inflammable découvert en 1953), et des parois verticales en verre optique. Une comparaison des flux et des distributions de température et de concentration mesurées avec celles prédites numériquement a été faite, et un bon accord était signalé.

Le déclenchement de la convection thermosolutale et les écoulements de convection d'amplitude finie dans une cavité peu profonde, soumise à des gradients verticaux thermique et solutal, ont été étudiés analytiquement et numériquement par [Mamou et al. \(2001\)](#). L'intérêt pour ce type de problème est motivé par son importance dans de nombreuses situations telles qu'en génie chimique et la métallurgie, où la convection dans des fluides à plusieurs composés est impliquée. Les deux conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann pour la température et la concentration, appliquées sur les parois horizontales du système, ont été considérées. Les seuils d'amplitude finie, des instabilités de la convection oscillatoire et monotone sont obtenus explicitement en termes de paramètres de contrôle. Les résultats indiquaient que pour les mêmes paramètres de contrôle, plusieurs états stables et instables pouvaient coexister. En outre, le seuil de bifurcation de Hopf (passage des états stationnaires aux états instationnaires) a été déterminé dans cette étude.

L'effet de la modulation de la température (variation périodique dans le temps de la température) sur le début de la convection, dans une couche de fluide binaire horizontale a été examiné par [Bhadoria \(2006\)](#).

L'analyse de la stabilité linéaire a été effectuée pour le début de la convection thermosolutale, dans une couche de fluide binaire horizontale avec des frontières rigides-rigides. L'auteur a considéré un champ de température entre les parois de la couche de fluide constitué de deux parties: une partie stable et une partie périodique dépendant du



temps, qui oscille au cours du temps. Il a considéré seulement les perturbations infinitésimales, et a étudié l'effet de la modulation de la température sur l'apparition de la convection thermosolutale, en utilisant la méthode de Galerkin et la théorie de Floquet. Le nombre de Rayleigh critique a été calculé, comme étant une fonction de la fréquence et de l'amplitude de modulation, du nombre de Prandtl, du rapport de diffusivité et du nombre de Rayleigh. Les effets stabilisants et déstabilisants de la modulation sur l'apparition de la convection double diffusive ont été obtenus. Les effets du rapport de la diffusivité et du nombre de Rayleigh solutal sur la stabilité du système ont été également discutés.

**Garaud Pascale (2018)** a étudié la convection double-diffusive à faible nombre de Prandtl, en utilisant les simulations numériques directes. Il a accordé une attention particulière à la modélisation du mélange induit par turbulence et à son impact dans diverses applications astrophysiques (planètes et étoiles) et métallurgiques. L'auteur a trouvé que la double diffusion à faible nombre de Prandtl différait significativement de celle à haut nombre de Prandtl. Les effets de la rotation, du cisaillement, des gradients latéraux et des champs magnétiques ont été brièvement discutés.

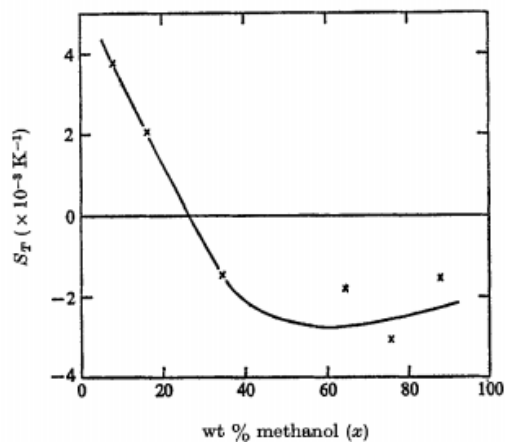
### 1.5 Convection en présence de l'effet Soret

D'autre part, les premières études théoriques sur le deuxième type de problèmes, c'est-à-dire la convection induite par l'effet Soret dans les mélanges binaires, ont concerné également l'apparition du mouvement dans une couche fluide horizontale. Une revue de littérature de ces études peut être trouvée dans le livre de **Platten et Legros (1984)**.

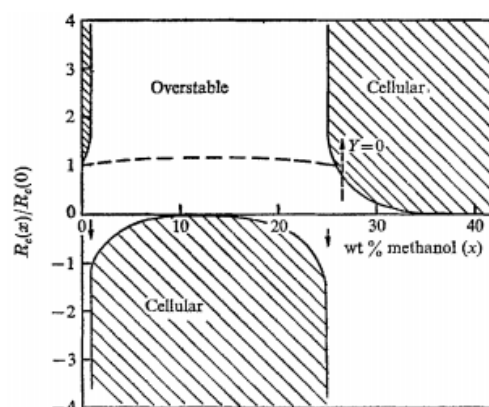
Dans une étude menée en 1969, Hurle et Jakeman ont suggéré que l'effet Soret pourrait donner lieu à des solutions surstables du problème thermosolutal de Rayleigh-Jeffreys, ils ont alors mené une autre étude **Hurle et Jakeman (1971)**, théorique et expérimentale sur la convection thermosolutale induite par effet Soret.

Ils ont montré que l'instabilité oscillatoire pouvait se produire dans les couches initialement homogènes des mélanges d'eau-méthanol, lorsqu'elles sont chauffées par le bas. Cette instabilité déclenchait un mode d'amplitude finie stable. L'amplitude et le signe du coefficient de Soret ont été modifiés, en faisant varier la composition du mélange, Figure (1-12). Comme prévu, les modes surstables ont été observés, lorsque le signe du coefficient était tel qu'il produisait une contribution à la stabilisation du gradient de

densité. Les nombres de Rayleigh critiques observés et les fréquences temporelles étaient compatibles avec la théorie, Figure (I-13).



**Figure I-12:** Coefficient de Soret pour le mélange eau-méthanol à 40° [Hurle et Jakeman, 1971]



**Figure I-13:** Seuils critiques théoriques du nombre de Rayleigh pour le mélange eau-méthanol à 40°. [Hurle et Jakeman, 1971]

Platten et Chavepeyer (1973), ont examiné le mouvement oscillatoire dû à l'effet Soret dans la cellule Bénard. Le système était à deux composants, en effet les auteurs ont présenté les graphiques de Schmidt-Milverton pour les systèmes eau-méthanol et eau-isopropanol. L'ordre de grandeur de la période des oscillations en tenant compte de la diffusion thermique était prédit par la théorie linéaire et confirmé par des expériences. Ils ont montré que cette période augmentait avec l'augmentation de la profondeur de la couche de liquide, et diminuait avec le renforcement de l'effet stabilisateur. Ceci est également en accord avec la théorie. Ces oscillations étaient induites vraiment par la diffusion thermique. Elles n'apparaissaient jamais dans les fluides purs.

Schechter et al. (1974), se sont intéressés à la détermination du gradient thermique critique nécessaire pour initier des courants de convection dans un système à deux composants. L'intérêt porté à cette étude a été stimulé par des études antérieures, qui suggéraient que le coefficient de Soret devrait être lié à l'instabilité d'un fluide chauffé par le bas. Dans ces études l'effet de faibles concentrations sur l'instabilité d'une couche de fluide chauffée a été considéré. Cela a une conséquence importante dans plusieurs domaines, allant de l'exploitation d'étangs solaires à la microstructure thermique de l'océan et peut-être même à la convection dans les étoiles. Leur étude avait pour but d'unifier un certain nombre de phénomènes apparemment différents et souvent surprenants. Par exemple, quand une couche d'eau salée chaude est versée avec précaution sur le dessus

d'une couche d'eau froide plus dense non salée, l'interface entre les deux couches devient turbulente.

Une structure ressemblant à une série de doigts, se produisait spontanément et se développait en longueur. Le mélange convectif entre les deux phases est observé, même si le gradient de densité favorisait la stabilité avec le fluide le plus dense se trouvant au fond! Un tel phénomène et d'autres ont été observés quantitativement par ces auteurs, et leur efforts étaient mis sur l'analyse de la théorie de stabilité linéaire, dans le but de déterminer les instabilités sous-critiques d'amplitude finie, en utilisant des méthodes de Liapunov fournissant une condition suffisante mais pas nécessaire pour la stabilité.

Des techniques de perturbation ont été utilisées, pour aider à résoudre le problème de détermination de l'état particulier auquel un système va évoluer, à partir d'un état initialement instable. D'après cette étude, les résultats expérimentaux au problème Bénard classique dans la région supercritique n'étaient pas prédits par les théories disponibles à cette époque et la poursuite des travaux dans ce domaine important était certainement nécessaire.

La convection de Rayleigh-Bénard avec effet Soret dans un système binaire à deux composants a été étudiée par [G.Zimmermann et U.Müller \(1992\)](#), et ceci en employant l'interférométrie différentielle en combinaison avec des enregistrements de température locale dans la couche liquide. Une cavité rectangulaire horizontale peu profonde de dimensions 200mm: 20 mm: 3.12 mm a été utilisée pour l'expérimentation. Les parois étaient en cuivre et en verre optique, le mélange binaire était l'éthanol-eau.

Plusieurs cas ont été considérés selon le signe du coefficient de Soret. Les résultats ont permis d'observer des configurations à tourbillons ayant un caractère variable ou permanent. Les fréquences associées avec les ondes progressives ont été déterminées et comparées avec les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire. Elles ont été interprétées en fonction du transport solutal et du mélange le long des lignes de courant. Une constatation imprévue stipulait que le domaine d'apparition de l'état permanent des ondes progressives s'était rétréci quand les effets non Boussinesq dominaient.

La stabilité d'une couche de fluide triplement diffusif chauffée par le bas a été étudiée par [Larre et al 1997](#). Le mélange en question était l'eau-isopropanol-éthanol, une analyse de stabilité linéaire de l'état de repos a été comparée avec l'expérimental.

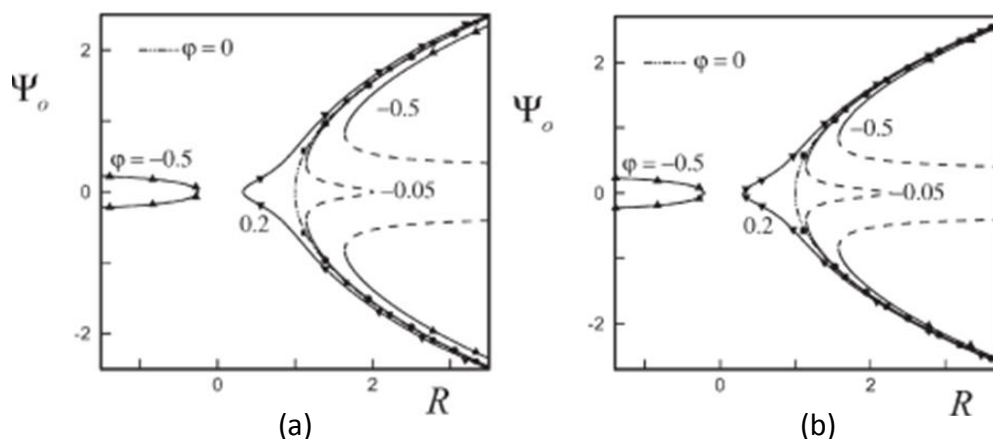
En intégrant les effets de la diffusion croisés dans la stabilité linéaire de l'état de repos, les seuils critiques théoriques de l'apparition de la convection étaient en accord avec les seuils expérimentaux.

La convection induite par effet Soret dans une cavité légèrement inclinée et peu profonde, remplie d'un fluide binaire, a été étudiée par **Ouirimi et al. (2005)** analytiquement et numériquement. Les conditions aux limites pour la température appliquées sur les parois latérales élancées de l'enceinte étaient de type Newmann, tandis que les deux autres parois étaient supposées imperméables et adiabatiques. Les forces de flottabilité solutales étaient induites soit par l'imposition des flux constants de concentration sur les murs (convection double-diffusive,  $a=0$ ) soit par des gradients thermiques (effets Soret,  $a=1$ .)

Les résultats ont été obtenus pour une large gamme de paramètres de contrôle, à savoir, le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra_T$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , le rapport des forces de flottabilité,  $\phi$ , l'angle d'inclinaison  $\theta$ , le rapport de forme de la cavité  $A$ , et le type de convection (c'est à dire, le paramètre  $a$ ). Pour la convection dans une couche infinie ( $A \gg 1$ ), une solution analytique de la forme stationnaire des équations gouvernantes a été obtenue sur la base de l'approximation de l'écoulement parallèle. Les résultats du modèle étudié ont permis de prédire les nombres de Rayleigh critiques correspondant à l'apparition de la convection supercritique et souscritique.

Dans le cas d'une couche horizontale ( $\theta=0^\circ$ ), le modèle indiquait que pour  $\phi > 0$ , lorsque les deux forces thermique et solutale étaient déstabilisantes, le seuil d'apparition de la convection se produisait à travers une bifurcation supercritique de l'état de repos. Pour les forces de flottabilité opposantes ( $\phi < 0$ ), la solution analytique prévoyait l'existence d'une bifurcation sous-critique, pour laquelle l'écoulement bifurquait à partir de l'état de repos à travers la convection d'amplitude finie, Figure (1-14).

Également, il a été démontré que, pour les petites inclinaisons par rapport au plan horizontal, plusieurs états stationnaires existaient, dont certains étaient instables. Une solution numérique de toutes les équations régissant a été obtenue pour une large gamme des paramètres de contrôle. Un bon accord a été observé entre la solution analytique et la simulation numérique.



**Figure 1-14:** Diagrammes de bifurcation en terme de la fonction de courant. (a): sans effet Soret, (b): avec effet Soret. [Ouriemi et al. (2005)]

Ouriemi et al. (2006) ont également étudié le cas d'une couche horizontale d'un fluide binaire soumis à des gradients horizontaux thermique et solutal. Les conditions aux limites de type Neumann étaient appliquées aux parois verticales de l'enceinte. Ils ont considéré deux cas, celui de la convection double diffusive ( $a = 0$ ) et celui de la convection induite par effet Soret ( $a = 1$ ). Une solution analytique basée sur le concept de l'écoulement parallèle, ait été dérivée dans le cas d'une cavité peu profonde  $A \gg 1$ .

Pour le cas particulier où les forces de flottabilité induites par les effets thermique et solutal s'opposent l'un par rapport à l'autre et sont de même intensité, les nombres de Rayleigh critiques pour l'apparition des convections supercritique et sous-critique étaient prédits, en se basant respectivement sur la théorie de stabilité linéaire et l'approximation de l'écoulement parallèle. Les caractéristiques du modèle analytique ont été fortement confirmées par les simulations numériques des équations gouvernantes.

L'apparition de la convection induite par l'effet Soret dans une couche de fluide horizontale chauffée par le haut a été analysée par Choi et Kim (2007), sur la base de la méthode de l'énergie.

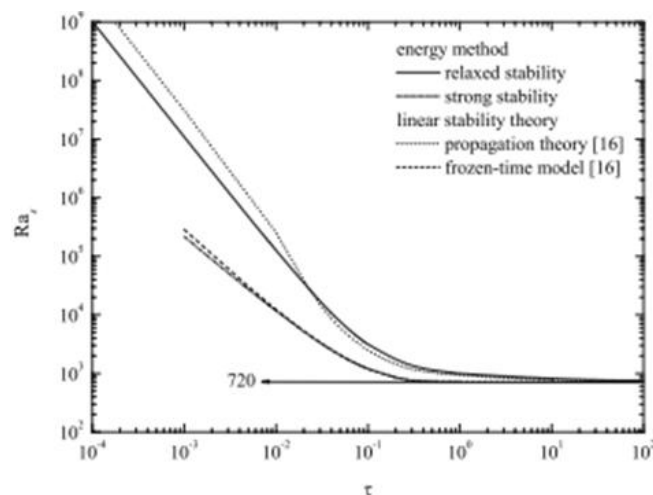
La couche de fluide horizontale était placée entre deux plaques et était initialement au repos, le déclenchement de la diffusion par effet Soret a pu induire des mouvements convectifs, dans le cas d'un coefficient de Soret négatif.

Pour le cas d'une stratification de densité très instable le mouvement induit par les forces de flottabilité s'installait pendant la phase transitoire de diffusion.

Les limites de stabilité qui sont liés au temps d'apparition des instabilités ont été obtenues en fonction des paramètres régissant le problème.

L'analyse de stabilité a permis de prédire le temps d'apparition de l'instabilité convective, qui diminuait avec l'augmentation du paramètre de flottabilité.

Les résultats obtenus montraient que la méthode de l'énergie relaxée pouvait être appliquée de manière raisonnable à l'analyse de l'apparition de la convection, induite par effet Soret dans les systèmes binaires, ayant un rapport de séparation négative et une très petite diffusivité de concentration, Figure (I-15).



**Figure I-15:** Analyse de l'apparition de la convection, par différentes méthodes. [Choi et Kim, 2007]

Les instabilités tridimensionnelles de Rayleigh-Bénard dans les fluides binaires avec effet Soret ont été étudiées par Jun Hu et al. (2012), par le biais d'une analyse de stabilité linéaire bi-globale. Le fluide était confiné dans un conduit avec possibilité d'appliquer ou non un écoulement traversant. Il a été démontré que dans les deux cas, différents modes transversaux et longitudinaux avec des nombres d'onde finis peuvent exister, et les résultats ont montré l'existence des régions d'instabilité de ces modes. En faisant varier le facteur de forme de la cavité, et le nombre de Reynolds, les nombres de Rayleigh critiques correspondant à ces modes étaient déterminés.

Une étude expérimentale a été menée pour la première fois, par Amirhossein et al (2013), dans le but de mesurer le coefficient de Soret, pour un mélange ternaire d'hydrocarbures dans un environnement de faible gravité. L'échantillon analysé était un mélange de tétrahydronaphtalène, d'isobutylbenzène et de dodécane à la fraction massique de 0,1 / 0,8 / 0,1 respectivement, et contenu dans une cellule qui mesurait (10mm x10mm x 5mm). La séparation des composants dans la région centrale de la cavité était comparable à

un comportement purement diffusif. La séparation des composants tétrahydronaphtalène et isobutylbenzène dans des directions opposées était presque égale, alors que le dodécane présentait une faible séparation dans la même direction que l'isobutylbenzène. Un traitement de l'image de Fourier et des calculs de la séparation transitoire des composants ont été utilisés, pour analyser le transfert de chaleur dans le système et pour mesurer les coefficients de Soret pour ce mélange ternaire. Les mesures réussies montrées dans ce travail pouvaient servir de norme, pour d'autres expériences et pour la modélisation numérique des mélanges d'hydrocarbures.

Y. Gaponenko A. Mialdun et V. Shevtsova (2014) ont effectué une analyse expérimentale et numérique de l'effet Soret sur le transfert de chaleur et de masse, dans un mélange binaire sous vibrations contrôlées, en présence d'une faible convection. Une cavité carrée remplie d'un mélange d'hydroisopropanol à parois différentiellement chauffée était soumise à une vibration perpendiculaire au gradient de température. Les observations expérimentales ont révélé que les champs de températures et de concentrations, étaient influencés par l'effet Soret. Un modèle mathématique a été développé afin de calculer les champs thermiques et de concentration et vérifier l'exactitude du traitement d'image, basé sur l'approche classique, utilisée dans les systèmes non-convectifs avec l'effet Soret.

Tatyana Lyubimova (2015) a étudié l'effet des vibrations longitudinales haute fréquence de faible amplitude sur la stabilité d'une couche horizontale d'un fluide ternaire, L'effet Soret a été pris en considération. L'instabilité des ondes longues a été étudiée analytiquement et l'instabilité aux perturbations avec des nombres d'onde finis a été étudiée numériquement. Les résultats ont montré l'effet des vibrations qui était déstabilisantes dans le cas d'un chauffage par le bas, et stabilisantes dans le cas d'un chauffage par le haut. Les conditions critiques pour le mélange ternaire réel ont été analysées, et de nouveaux modes d'instabilité vibratoire ont été trouvés.

La convection naturelle dans une cavité horizontale peu profonde remplie d'un nanofluide a été étudié par, Fakhreddine S. et al (2017). Des flux de chaleur constants étaient appliqués sur la paroi inférieure de la cavité, alors que sur la paroi verticale était soumise à un flux de chaleur variable. Une formulation modifiée prenant en compte des propriétés physiques (conductivité thermique, viscosité) par rapport au type de la concentration des nanofluides et la concentration hétérogène spatiale induite par l'effet

Soret a été présentée. La solution analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, était jugée en bon accord avec la solution numérique. L'existence d'écoulements naturels et anti-naturels a été démontrée. En effet, le nombre de Rayleigh sous-critique pour le début de l'instabilité avait tendance à disparaître lorsque le seuil supercritique était largement affecté.

Lyubimova et al. (2017) ont étudié le début de la convection induite par effet Soret dans une couche horizontale remplie de fluide ternaire, avec l'application d'un flux de chaleur vertical constant sur les parois supposées rigides et imperméables. Ils ont trouvé qu'il existait deux modes d'instabilité à longueur d'onde, monotone et oscillatoire.

Dans le plan (nombre de Rayleigh, taux de séparation), deux branches d'instabilité monotone de type hyperbolique existaient, correspondant aux nombres de Rayleigh (négatif et positif).

L'instabilité oscillatoire et pour un facteur de séparation positif, existait uniquement dans le cas de la cavité chauffée par le bas. Pour un facteur de séparation négatif, deux modes d'instabilité oscillatoire étaient observés, correspondant aux nombres de Rayleigh négatif et positif. La solution numérique de l'étude de stabilité linéaire pour de petites perturbations, avec des nombres d'onde finis, confirmait les résultats précédents. Une analyse non linéaire a permis de trouver les solutions stables et instables, correspondants aux différents modes à longueur d'onde.

## 1.6 Conclusion

En se basant sur la revue bibliographique existante, on a constaté qu'un nombre important d'études a été effectué sur la convection, dans une couche de fluide horizontale, induite soit, par double diffusion, soit par l'effet Soret, malgré la présence de ces deux effets simultanément. De là, est née la problématique, qui consiste en l'étude des effets combinés, double diffusifs et effet Soret.

Dans cette optique, nous nous sommes intéressés, à l'étude analytique et numérique de l'influence de l'effet Soret sur la convection thermosolutale à l'intérieur d'une couche de fluide horizontale, soumise aux conditions de Newmann.

L'étude analytique valable pour une cavité élancée, se basant sur le concept de l'écoulement parallèle, sera validée par les résultats de la solution numérique élaborée par un programme Fortran, enfin une étude de stabilité linéaire permettra de délimiter les différentes régions d'instabilités stationnaires et oscillatoires.



# Chapitre 2

## Modèles physique et Mathématique

### Résumé

---

*Modéliser un phénomène physique, c'est le traduire sous forme mathématique, de façon à le rendre prévisible et à en donner une connaissance plus approfondie. Ainsi nous développons dans le deuxième chapitre, le modèle mathématique, en introduisant les équations générales de la mécanique des fluides, complétées par les équations de l'énergie déduites des principes de la thermodynamique. On introduit des hypothèses simplificatrices, afin de permettre la formulation mathématique, tout en gardant les caractères essentielles.*

*Les conditions de Neumann sont appliquées aux frontières de la configuration géométrique choisie. L'utilisation d'une analyse dimensionnelle fera apparaître les groupements des nombres sans dimension dans les équations, et permettra de déterminer les effets prépondérants dans le phénomène traité, et d'en dégager ainsi les conditions de similitude dans les problèmes de convection naturelle.*

---

## 2.1 Description du problème

Dans cette thèse, nous allons étudier le phénomène de la convection thermosolutale avec effet Soret dans un espace contenant un fluide binaire. La configuration géométrique de l'écoulement est illustrée sur la [Figure 2.1](#). Il s'agit d'une cavité horizontale de longueur  $L'$ , de hauteur  $H'$  et de profondeur  $W'$ . Les parois actives (parois parallèles au plan  $x'-z'$ ) sont soumises à des flux de chaleur et de masse uniformes. Les autres parois sont supposées imperméables et adiabatiques.

### 2.1.1 Hypothèses simplificatrices

Le propre de toute théorie scientifique, c'est de faire des hypothèses simplificatrices en éliminant toutes les circonstances accessoires, et en ne gardant de la réalité que ses caractères essentiels. La simplification est ainsi, inhérente et préalable, à l'inclusion de l'outil mathématique dans une théorie préexistante. Toute formulation mathématique, parce qu'elle doit être simple et se prêter à des calculs ultérieurs, est toujours un compromis, entre le désir d'obtenir un degré de précision supérieur et de conserver un maniement relativement aisé. C'est pour cette raison, il est parfaitement rationnel de négliger les variations, et même l'existence de certains facteurs, lorsque les résultats ont une précision jugée suffisante.

Pour élaborer un modèle mathématique simplifié, nous allons considérer quelques approximations, qui sont souvent retenues dans l'étude de la convection naturelle, entre autre l'approximation de Boussinesq, dont la validité a été étudiée par [Gray.D et Giorgini. A \(1976\)](#).

1. La profondeur de la cavité, est considérée suffisamment grande par rapport aux autres dimensions ( $W'/L'$  et  $W'/H' \gg 1$ ), de façon à ce que les effets des bouts deviennent négligeables. La [Figure 2-1 \(b\)](#) illustre le problème bidimensionnel.
2. On suppose que le fluide binaire est newtonien (Contraintes de cisaillement proportionnelles au gradient de vitesse).
3. On considère que le fluide est incompressible. De ce fait, l'approximation de Boussinesq, peut être utilisée à bon escient en adéquation avec l'incompressibilité de l'écoulement, lorsque les écarts de température sont faibles.
4. L'écoulement engendré est supposé laminaire et transitoire.

5. On néglige le travail, induit par les forces visqueuses et de pression.
6. Les échanges thermiques par rayonnement sont négligeables.
7. Toute réaction chimique, ou source de chaleur ou de masse est absente.
8. L'effet Dufour est supposé négligeable (D'après **Schechter et al 1972** l'effet Dufour peut être négligé dans les liquides binaires, cependant ce n'est pas le cas dans les gaz binaires où il peut être très important).
9. Les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence, excepté la densité du fluide, qui varie linéairement avec la température et la concentration, dans le terme des forces de volume, selon l'approximation de Boussinesq.

### 2.1.2 Approximation de Boussinesq

Une des questions, fondamentale en mécanique des Fluides, réside dans le couplage des équations et le choix des variables de résolution. La physique contenue dans les équations, peut être opérée par un couplage inapproprié des équations, et l'introduction de variables non naturelles, qui facilitent leur résolution, mais qui dénature la réalité simulée.

Même dans une formulation simplifiée des équations de Navier-Stokes et de l'énergie, de nombreux couplages subsistent entre les différentes équations, la vitesse dans plusieurs termes de l'équation de l'énergie, la température intervient implicitement dans l'équation de Navier-Stokes à travers la masse volumique qui apparaît à son tour dans différents termes. Les différentes non-linéarités empêchent évidemment toute résolution directe de l'une de ces équations et à fortiori du système.

Une simplification, qui est l'approximation de Boussinesq, peut être utilisée si les écarts de température ne dépassent pas une dizaine de degrés pour les liquides et une trentaine de degrés pour les gaz (**Gray et Giorgini**). Elle consiste donc, à négliger les variations de la masse volumique en fonction de la température, sauf évidemment dans le terme générateur de la convection naturelle d'origine thermique. La même analyse est bien sûr valable pour des variations de concentration qui modifieraient la masse volumique. La densité du fluide est donnée, selon cette approximation, par la relation suivante :

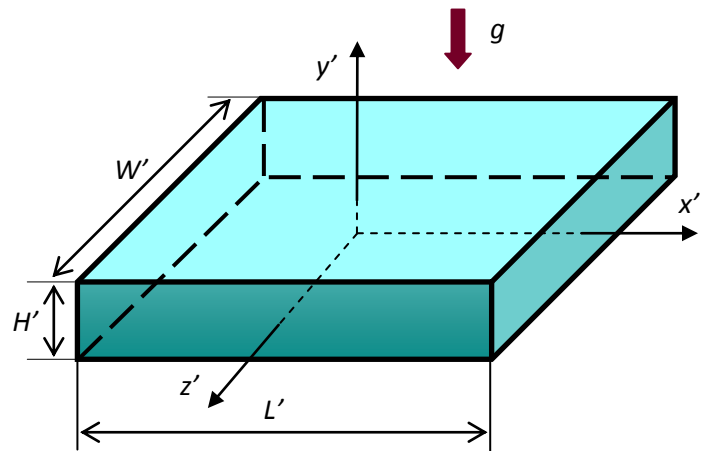
$$\rho = \rho_0 [1 - \beta'_T (T' - T'_0) - \beta_N (N - N_0)] \quad (2.1)$$

Où :  $T'$  et  $N$  représentent la température du mélange fluide et la fraction massique du soluté en un point donné du système,  $T'_0$  et  $N_0$  sont des grandeurs de référence qui représentent généralement les valeurs moyennes de la température et de la concentration dans le système, et  $\rho_0$  représente la masse volumique du mélange.

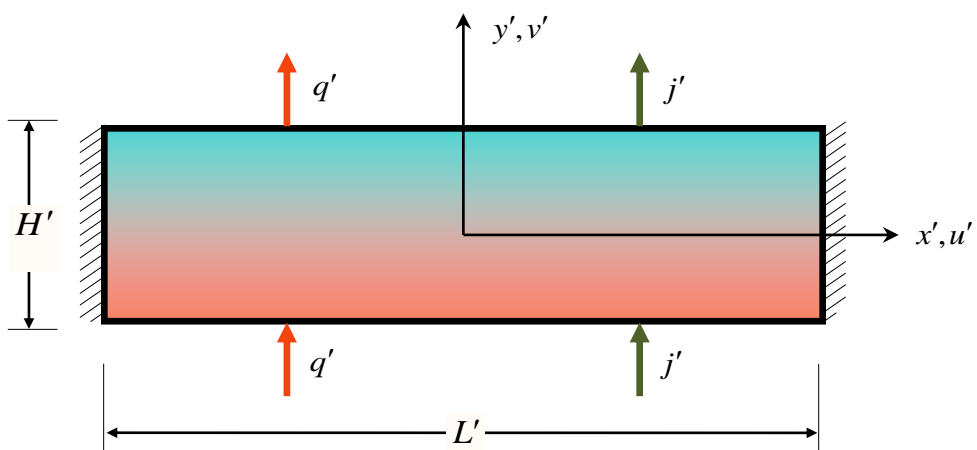
Les termes  $\beta'_T$  et  $\beta_N$  sont les coefficients d'expansion volumique thermique et solutal du fluide, respectivement. Ils sont définis par :

$$\beta_N = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial N} \right)_{P, T'} \quad \beta'_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_{P, N} \quad (2.2)$$

Le terme  $\beta'_T$ , est un coefficient possédant les dimensions de l'inverse d'une température, il varie avec cette dernière d'une façon décroissante dans le cas des gaz . En général,  $\beta'_T$  est positif pour tous les fluides, sauf l'eau en dessous de  $4^\circ C$ , tandis que  $\beta_N$  peut être positif ou négatif selon le soluté considéré. Par exemple, dans le cas où l'eau est considérée comme un solvant, et le sel comme un soluté, le coefficient  $\beta_N$  est négatif à cause de la contribution du sel à l'augmentation de la densité de l'eau. Dans le cas d'un mélange non saturé, air-vapeur d'eau, l'air humide est moins dense que l'air sec et de ce fait le coefficient  $\beta_N$  est positif.



(a)



(b)

**Figure 2-1** : Représentation schématique du modèle physique et du système de coordonnées.

## 2.2 Formulation mathématique

Les mouvements de convection naturelle, sont des mouvements de fluide dûs à l'effet des variations des forces de pesanteur, résultant de dilatations provenant d'écart de température au sein du fluide. Pour modéliser ces mouvements, on exprime les équations de conservation, et les conditions aux limites sous forme adimensionnelle, et nous introduisons les principales grandeurs dynamiques et thermiques.

En considérant les hypothèses simplificatrices énoncées auparavant, les équations de base, régissant l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse au sein de notre cavité, sont données par :

### 2.2.1 Équation de continuité

L'équation de continuité ou de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2.3)$$

Avec  $u'$  et  $v'$  respectivement les composantes horizontales et verticales de la vitesse.

### 2.2.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement ou de Navier-Stokes, s'écrit pour chacune des composantes  $u'$  et  $v'$  comme suit:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = - \frac{\partial P'}{\partial x'} + \mu \nabla^2 u' \quad (2.4)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = - \frac{\partial P'}{\partial y'} + \mu \nabla^2 v' - \rho_0 g \left[ \beta_T' (T' - T_0') + \beta_N (N - N_0) \right] \quad (2.5)$$

Où  $g$  est la constante gravitationnelle,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide,  $P'$  la pression en un point du système et  $t'$  représente le temps (quantité dimensionnelle).

Il faut noter que, le terme  $-\rho_0 g$ , normalement figurant dans l'équation (2.5) peut à son tour être intégré, dans le gradient de pression, pour donner la pression motrice comme suit:

$$-\frac{\partial P}{\partial y} - \rho_0 g = -\frac{\partial(P + \rho_0 g y)}{\partial y} = -\frac{\partial P'}{\partial y}$$

Avec  $P' = P + \rho_0 g y$ ,  $\rho_0 g y$  : étant la pression hydrodynamique.

### 2.2.3 Équation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha \nabla^2 T' \quad (2.6)$$

Où  $\alpha = k_f / (\rho C)_f$  est la diffusivité thermique du fluide et  $(\rho C)_f$  et  $k_f$  représentent respectivement la capacité calorifique et la conductivité thermique du fluide.

### 2.2.4 Équation de conservation des espèces

En considérant l'effet Soret, l'équation de conservation d'espèces s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial N}{\partial t'} + u' \frac{\partial N}{\partial x'} + v' \frac{\partial N}{\partial y'} = D \nabla^2 N + a D' N_0 (1 - N_0) \nabla^2 T' \quad (2.7)$$

Où  $D$  est la diffusivité massique,  $D'$  le coefficient de l'effet Soret (ou de thermo-diffusion) et  $a$  est une constante qu'on a ajouté, qui peut prendre la valeur 1 ou 0 et agit en conséquence comme un interrupteur. En effet, dans le cas  $a=0$ , le terme  $D' N_0 (1 - N_0) \nabla^2 T'$  qui représente l'effet Soret dans l'équation (2.7) disparaîtra, cependant pour  $a=1$ , ce terme restera et dans ce cas, la distribution de température aura une influence sur la distribution de concentration dans la cavité.

L'avantage de la variation du coefficient  $a$ , nous permet de traiter des cas identiques à la littérature, et d'en comparer nos résultats, voir par exemple Fekri. M, (2008), Mamou.M (1998).

### 2.2.5 Condition initiale

Au temps initial on considère que le fluide au sein de la cavité est au repos avec une température et concentration uniforme, ce qui se traduit comme suit :

$$t' = 0 : \quad u' = v' = 0, \quad T' = T'_0, \quad N = N_0 \quad (2.8)$$

### 2.2.6 Conditions aux limites

#### a) Conditions hydrodynamiques

Elles sont exprimées par, l'imperméabilité et le non glissement des particules fluides sur les parois rigides, elles sont données par :

$$x' = \pm \frac{L'}{2} : \quad u' = v' = 0 \quad (2.9)$$

$$y' = \pm \frac{H'}{2} : \quad u' = v' = 0 \quad (2.10)$$

#### b) Conditions thermique et massique

Sur les frontières verticales de la cavité, les parois sont adiabatiques et imperméables :

$$x' = \pm \frac{L'}{2} : \quad \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x'} = 0 \quad (2.11)$$

Par ailleurs, les conditions aux limites sur les parois horizontales actives, sont données par :

$$y' = \pm \frac{H'}{2} : \quad \frac{\partial T'}{\partial y'} = -\frac{q'}{k}, \quad \frac{\partial N}{\partial y'} = -\frac{j'}{\rho_0 D} - a \frac{D'}{D} N_0 (1 - N_0) \frac{\partial T'}{\partial y'} \quad (2.12)$$

Où  $q'$  et  $j'$  sont respectivement le flux de chaleur et le flux de concentration appliqués sur les parois de notre cavité.

## 2.3 Adimensionnalisation

### 2.3.1 Paramètres d'adimensionnalisation

L'emploi des variables adimensionnelles, permet de faire apparaître des nombres sans dimension dans les équations de la "Mécanique", appelés paramètres de contrôle, ce qui permet de simplifier la résolution, en faisant disparaître des termes, en justifiant les approximations, et en réduisant les équations aux dérivées partielles à leurs termes principaux. On donne ainsi, un sens physique aux équations, en retenant les termes qui ont effectivement de l'importance, et on obtient des informations générales, qui jouent un rôle prépondérant dans les similitudes. Pour ramener les équations phénoménologiques



sous la forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir, moyennant des grandeurs caractéristiques, des changements de variables.

Nous introduisons les variables adimensionnelles ci-dessous, afin de mettre les équations de conservation (2.3) à (2.7) et les conditions initiales et aux limites (2.8) à (2.12) sous forme adimensionnelle,

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= \left( \frac{x'}{l^*}, \frac{y'}{l^*} \right) & (u, v) &= \left( \frac{u'}{U^*}, \frac{v'}{U^*} \right) \\ t &= \frac{t'}{t^*} & P &= \frac{P'}{P^*} \\ S &= \frac{(N - N_0)}{\Delta N^*} & T &= \frac{(T' - T'_0)}{\Delta T^*} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Où  $l^*, P^*, t^*, U^*$ , sont, respectivement, la longueur, la pression, le temps et la vitesse caractéristiques. Le choix de ces grandeurs caractéristiques, dépend de la géométrie et du type de conditions aux limites. Elles sont définies comme suit :

$$\left. \begin{aligned} l^* &= H' \\ U^* &= \frac{\alpha}{l^*} \\ t^* &= \frac{l^*}{U^*} \\ P^* &= \rho_0 U^{*2} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Par ailleurs,  $\Delta T^*$  et  $\Delta N^*$  sont les différences caractéristiques de température et de concentration respectivement. Dans la présente étude, les valeurs de  $T'_0$ ,  $N_0$ ,  $\Delta T^*$  et  $\Delta N^*$  sont définies par :

$$\left. \begin{aligned} \Delta T^* &= \frac{q'H'}{k_f} \\ \Delta N^* &= (1-a) \frac{j'H'}{\rho_0 D} + a N_0 (N_0 - 1) \Delta T^* \frac{D'}{D} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

### 2.3.2 Équations adimensionnelles

En introduisant les variables adimensionnelles (2.13)-(2.15) dans (2.3) à (2.7), les équations de conservation adimensionnelles s'obtiennent comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{Pr} \nabla^2 u \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{Pr} \nabla^2 v - \text{Pr} Ra_T (T + \varphi S) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} (\nabla^2 S - a \nabla^2 T) \quad (2.20)$$

Les paramètres de contrôle adimensionnels qui apparaissent sont:

$$Ra_T = \frac{g \beta'_T \Delta T^* l^{*3}}{\alpha \nu}, \quad \varphi = \frac{\beta_N \Delta N^*}{\beta'_T \Delta T^*}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Le = \frac{\alpha}{D} \quad (2.21)$$

- Le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , caractérise le transfert de chaleur au sein du fluide, il exprime le rapport des forces d'inerties (poussée d'Archimède) sur les forces visqueuses.
- Le nombre de Prandtl  $Pr$ , compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Plus il est élevé, plus le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Le nombre de Prandtl des métaux liquides est faible, il prend des valeurs très importantes de l'ordre des milliers pour les huiles, le cas de l'eau est caractérisé par un nombre de Prandtl  $Pr = 7$ .
- Le nombre de Lewis  $Le$ , compare la diffusivité de masse avec la diffusivité thermique. Il caractérise les écoulements de fluides, dans lesquels ont lieu simultanément un transfert de masse et un transfert de chaleur par conduction thermique.

- Le rapport des forces de volume solutal et thermique  $\varphi$ . Ce paramètre peut être positif ou négatif selon le signe du coefficient  $\beta_N$ . Deux situations peuvent se présenter, celle de la convection coopérante, lorsque le coefficient  $\beta_N > 0$  ( $\varphi > 0$ ); les effets thermiques et solutaux dans ce cas coopèrent. La deuxième situation concerne la convection dite opposée, correspondante à  $\beta_N < 0$  ( $\varphi < 0$ ); et où les effets thermiques et solutaux s'opposent.

Les conditions initiales et aux frontières deviennent sous forme adimensionnelle comme suit :

$$t = 0 : \quad u = v = T = N = 0 \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{A}{2} : \quad u = v = 0 \\ y = \pm \frac{1}{2} : \quad u = v = 0 \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{A}{2} : \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ y = \pm \frac{1}{2} : \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -c \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

Où  $c = aj + 1$

On note ici la présence de deux paramètres adimensionnels supplémentaires qui sont, le flux massique adimensionnel qui traverse les parois actives  $j$ , et le rapport de forme de la cavité  $A$ , donnés par :

$$j = \frac{j'H'}{\rho_0 D \Delta N^*}, \quad A = \frac{L'}{H'} \quad (2.25)$$

Dans la formulation actuelle, le cas particulier  $a = 0$  correspond à la convection double diffusive pour laquelle, la contribution du terme de Soret dans l'équation des conservations des espèces (2.20), disparaît. Pour cette situation, considérée dans le passé par Mamou et al. (2001), les forces de flottabilité solutales résultent seulement de l'imposition des flux de masse verticaux, imposés aux frontières horizontales.

D'autre part, le cas  $a = 1$  correspond à la convection provoquée par l'effet Soret, pour lequel, le terme Soret dans l'équation (2.20), se combine avec les flux de masse

verticaux imposés aux frontières horizontales (équation (2.24)), pour donner naissance à des forces de flottabilité solutales.

La condition particulière  $j = 0$  correspond à une frontière imperméable au soluté. Cette situation, est généralement considérée dans la littérature (voir par exemple [Ouriemi et al. \(2005, 2006\)](#)). Cependant, en général, les frontières peuvent être perméables au soluté tel que la condition  $j \neq 0$ , s'applique comme il est considéré dans la présente étude. Ce type de conditions aux limites a été considéré, pour la première fois, par [Bennacer et al. \(2003\)](#).

### 2.3.3 Formulation vorticité-fonction de courant

Les équations ont été formulées en termes de vorticité/fonction. Nous avons opté pour cette formulation plutôt que la formulation en termes de variables primitives, pour les raisons suivantes:

- L'introduction des fonctions vorticité/fonction de courant, permet de satisfaire automatiquement l'équation de continuité (2.16).
- La possibilité de l'élimination de la pression dans l'équation de conservation de mouvement.

Nous introduisons donc la fonction de courant,  $\Psi$ , et la vorticité,  $\omega$ , qui sont définies comme suit:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.26)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\nabla^2 \Psi \quad (2.27)$$

En termes de la fonction de courant et de vorticité, les équations (2.16) à (2.20), peuvent être réécrites sous les formes suivantes :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - J(\Psi, \omega) = \text{Pr} \nabla^2 \omega + \text{Pr} Ra_T \frac{\partial}{\partial x} (T + \varphi S) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - J(\Psi, T) = \nabla^2 T \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - J(\Psi, S) = \frac{1}{Le} (\nabla^2 S - a \nabla^2 T) \quad (2.30)$$

$J$  est l'opérateur Jacobien défini comme suit :

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (2.31)$$

En utilisant l'équation (2.27) on peut réécrire l'équation (2.28) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} - J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \text{Pr} \nabla^2 (\nabla^2 \Psi) - \text{Pr} Ra_T \frac{\partial}{\partial x} (T + \varphi S) \quad (2.32)$$

Les conditions initiales et aux frontières hydrodynamiques sont données dans ce cas par :

$$t = 0: \quad \Psi = \omega = 0 \quad (2.33)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{A}{2}: \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \\ y = \pm \frac{1}{2}: \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

## 2.4 Transferts thermique et massique

La résolution des équations gouvernantes, par les méthodes choisies, permet d'exprimer les transferts de chaleur et de masse, en termes des nombres adimensionnés de Nusselt  $Nu$  et de Sherwood  $Sh$ , définis à une position donnée  $x$ , par:

$$\left. \begin{array}{l} Nu_x = \frac{q'H'}{k_f \Delta T'} \Big|_x = \frac{1}{T(x, -1/2) - T(x, 1/2)} \\ Sh_x = \frac{j'H'}{D \Delta S'} \Big|_x = \frac{c}{S(x, -1/2) - S(x, 1/2)} \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

Tels que :  $q'$  et  $j'$ , sont, respectivement, les flux constants de chaleur et de masse.

## 2.5 Conclusion

Après avoir posé les équations dynamiques, thermiques et massiques, ainsi que les conditions aux limites, et initiale associées, la recherche des solutions, sera conduite selon deux directions :

- Une résolution par voie numérique, objet du troisième chapitre, qui traitera les techniques utilisées pour simuler la convection.
- Une approche analytique présentée au quatrième chapitre, rendue possible en se basant sur l'approximation de l'écoulement parallèle.

# Chapitre 3

## Solution Numérique

### Résumé

---

---

*On présente dans ce chapitre, la procédure numérique retenue pour la résolution du système d'équations, gouvernant la convection thermosolutale dans une cavité horizontale. Ainsi, les équations gouvernantes, sont discrétisées avec la méthode des volumes finis, avec un maillage uniforme, et la solution est obtenue en utilisant une méthode itérative moyennant l'algorithme de Thomas. Nous terminerons le chapitre, par une validation du code numérique développé, en comparant nos résultats à ceux de la littérature.*

---

---

### 3.1 Méthode des volumes finis

La méthode utilisée dans cette thèse, est basée sur la technique des volumes de contrôle développée par Patankar (1980). La méthode des volumes finis, a été parmi les premières à atteindre un stade de développement avancé, pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires. Cette méthode largement utilisée en mécanique des fluides, est à l'origine de nombreux codes de simulation numérique: FLUENT, STAR-CD, CFX, FINE-TURBO, PHOENIX... Sa puissance et sa grande simplicité de mise en œuvre ont fait, qu'elle est la méthode de choix pour les équations de conservation non linéaires.

La méthode des volumes finis, consiste à transformer un problème exact et continu en un problème approché et discret. Comme chaque méthode numérique, elle comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation.

- le maillage : consiste à diviser le domaine physique en plusieurs intervalles réguliers appelés volumes de contrôle, limités par des nœuds, et identifiés chacun par un couple d'indice  $(i, j)$  (maille), remplissant tout le domaine étudié sans laisser d'interstices, et sans qu'ils ne se superposent. L'hypothèse à satisfaire pour le choix du maillage est que, l'information aux nœuds doit être suffisante pour décrire la solution dans le domaine entier. Ainsi notre domaine de calcul, est discrétisé avec un maillage uniforme, suivant les deux directions de l'espace.
- La discrétisation : cette phase discrétise le problème sur le maillage, ce qui conduit à un problème approché beaucoup moins difficile. Le principe de la méthode des volumes finis, consiste à intégrer tous les termes de l'équation à résoudre, dans chacun des éléments de volume dit volume de contrôle. Pour chaque pas de temps la méthode donne lieu à un système matriciel que nous résolvons par la technique ADI (méthode implicite aux directions alternées). Bien entendu, la solution finale est obtenue moyennant un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait.



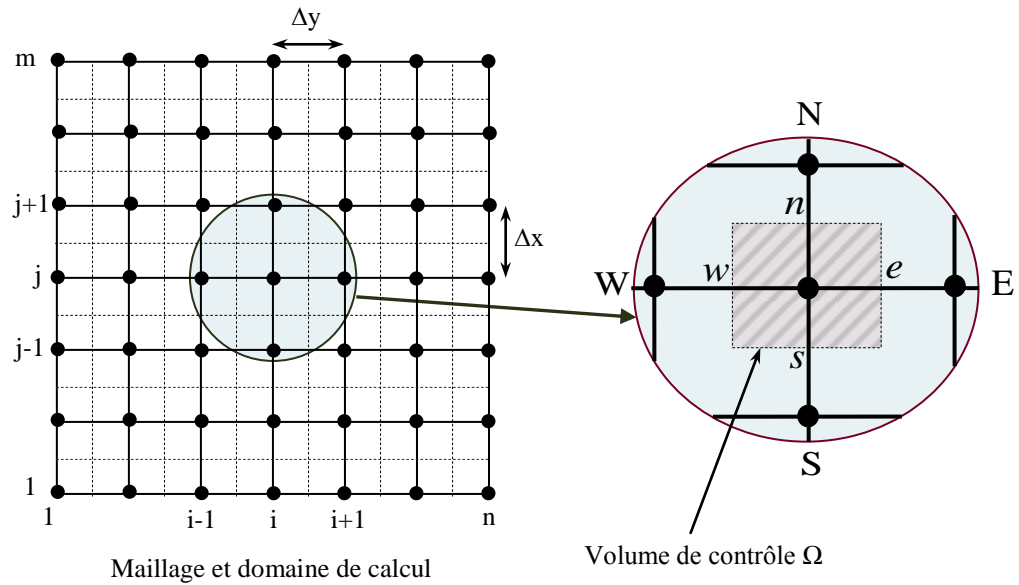


Figure 3-1 : Maillage et distribution des nœuds sur le volume de contrôle.

### 3.2 Discrétisation des équations

Dans l'approche des volumes finis, on considère un ensemble de volumes de contrôle à l'intérieur desquels la moyenne est calculée, cette approche a l'avantage en mécanique des fluides, notamment en raison de l'existence de quantités conservées par les équations. Il en découle, que les formulations conservatrices des équations aux dérivées partielles, peuvent être reformulées de façon intégrale à l'aide du théorème de flux-divergence.

Le théorème de divergence, ou de Green-Ostrogradski, reflète une loi de conservation, en effet il indique que, l'intégrale de volume de la divergence d'un champ vectoriel  $\vec{F}$ , étendu sur un volume  $\Omega$ , est égale à l'intégrale de contour de la projection de ce champ, sur la normale  $\vec{n}$  traversant la frontière  $\Sigma$ , qui limite le volume  $\Omega$ . Il peut s'écrire comme suit :

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F}) d\Omega = \iint_{\Sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\Sigma \quad (3.1)$$

La loi fondamentale de la méthode des volumes, est le principe de conservation. Ce dernier stipule que, la variation d'une propriété dépend du flux net, traversant la frontière  $\Sigma$  qui enveloppe le volume  $\Omega$ . Cette propriété dérive directement de l'interprétation physique du théorème de la divergence (3.1).

### 3.2.1 Forme conservatrice des équations gouvernantes

En écrivant les équations (2.27)-(2.30) sous la forme conservatrice, l'emploi de la technique de discrétisation par la méthode des volumes de contrôle pour la résolution des équations est bien fondé.

- Équation de fonction de courant

$$\nabla \cdot (\nabla \Psi) = -\omega \quad (3.2)$$

- Équation de vorticité

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \omega) = \text{Pr} \nabla \cdot (\nabla \omega) + \text{Pr} Ra_T \frac{\partial}{\partial x} (T + \varphi S) \quad (3.3)$$

- Équation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} T) = \nabla \cdot (\nabla T) \quad (3.4)$$

-  quation de concentration

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} S) = \frac{1}{Le} [\nabla \cdot (\nabla S) - a \nabla \cdot (\nabla T)] \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Intégration sur le volume de contrôle

Les équations (3.2)-(3.5) ont une forme généralisée qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} f) = \Gamma \nabla \cdot (\nabla f) + t_s \quad (3.6)$$

avec :

$f$  La fonction à déterminer ( $\Psi$ ,  $\omega$ ,  $T$  ou  $S$ )

$\partial f / \partial t$  Le terme transitoire

$\nabla \cdot (\vec{V} f)$  Le terme convectif

$\nabla \cdot (\nabla f)$  Le terme diffusif

$t_s$  Le terme source ( $= -\omega$  pour l'équation (3.2),  $= \text{Pr} Ra_T \partial(T + \varphi S) / \partial x$  pour l'équation (3.3),  $= 0$  pour l'équation (3.4) et  $= -a \nabla \cdot (\nabla T) / Le$  pour l'équation (3.5))

$\Gamma$  Une constante ( $= 1$  pour les équations (3.2) et (3.4),  $= \text{Pr}$  pour l'équation (3.3) et  $= 1/Le$  pour l'équation (3.6))

L'intégration de l'équation (3.6) sur le volume de contrôle illustré sur la Figure 3-1, donne :

- Pour le terme transitoire :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \bar{f} \int_{s_w}^n \int_{s_e}^e dx dy = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} (x_e - x_w)(y_n - y_s) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

Où  $\bar{f}$  est la valeur moyenne de la fonction  $f$  dans le volume de contrôle.

En utilisant les différences finies, la dérivée dans le temps est approximée par une discrétisation implicite du premier ordre, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\bar{f} - \bar{f}^0}{\Delta t}$$

Avec  $\bar{f}^0$  c'est la fonction au temps «  $t$  » et  $\bar{f}$  la fonction au temps «  $t + \Delta t$  » donc :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega = \frac{\bar{f} - \bar{f}^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y \quad (3.7)$$

- Pour le terme convectif et en appliquant le théorème de divergence on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{V}f) d\Omega &= \oint_S \vec{V}f \cdot d\vec{S} = \int_w (\bar{u}_w f_w) \cdot d\vec{S}_w + \int_e (\bar{u}_e f_e) \cdot d\vec{S}_e + \int_s (\bar{v}_s f_s) \cdot d\vec{S}_s + \int_n (\bar{v}_n f_n) \cdot d\vec{S}_n \\ &= -\bar{u}_w \bar{f}_w \Delta y + \bar{u}_e \bar{f}_e \Delta y - \bar{v}_s \bar{f}_s \Delta x + \bar{v}_n \bar{f}_n \Delta x \end{aligned}$$

Où  $d\vec{S}$  est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de longueur égale à l'élément de surface qu'il représente (Figure 3-2).

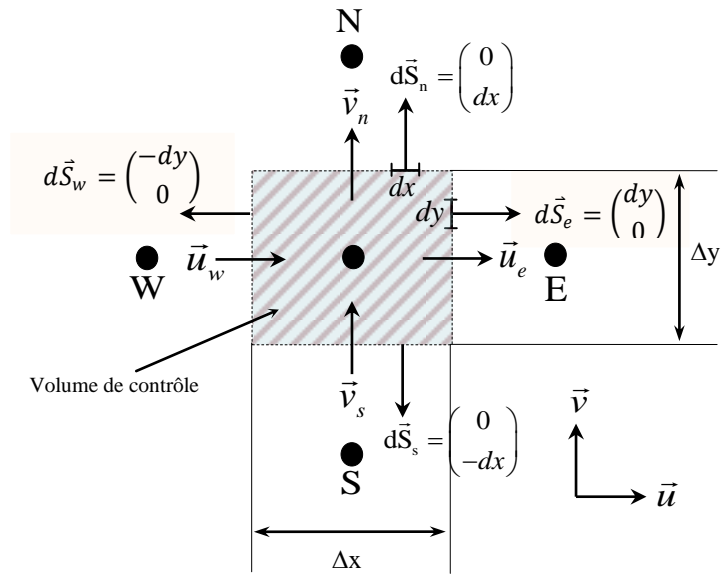
En utilisant le schéma des différences centré de Patankar on peut écrire :

$$\bar{f}_w = \frac{\bar{f}_W + \bar{f}}{2}, \bar{f}_e = \frac{\bar{f} + \bar{f}_E}{2}, \bar{f}_s = \frac{\bar{f}_s + \bar{f}}{2}, \bar{f}_n = \frac{\bar{f} + \bar{f}_N}{2}$$

Ce qui donne en remplaçant dans le terme convectif :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{V}f) d\Omega = \left( \frac{-\bar{u}_w \Delta y}{2} \right) \bar{f}_w + \left( \frac{\bar{u}_e \Delta y}{2} \right) \bar{f}_e + \left( \frac{-\bar{v}_s \Delta x}{2} \right) \bar{f}_s + \left( \frac{\bar{v}_n \Delta x}{2} \right) \bar{f}_n \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Puisque : } [(\bar{u}_e - \bar{u}_w) \Delta y + (\bar{v}_n - \bar{v}_s) \Delta x] \frac{\bar{f}}{2} &= \underbrace{\left[ \frac{\bar{u}_e - \bar{u}_w}{\Delta x} + \frac{\bar{v}_n - \bar{v}_s}{\Delta y} \right]}_{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}} \Delta x \Delta y \frac{\bar{f}}{2} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$



**Figure 3-2 :** Vitesses et vecteurs normaux sur le volume de contrôle.

Il est à noter ici que le schéma centré donne de bons résultats dans le cas de faibles nombres de Peclet du maillage, cependant pour des valeurs élevées du nombre de Peclet (dans le cas des écoulements à grande vitesse par exemple) ce schéma diverge de la solution exacte (Figure 3-3). Pour remédier à ce problème on peut raffiner notre maillage (diminuer le  $\Delta x$ ) et par conséquent diminuer le nombre de Peclet correspondant, l'inconvénient est bien sûr une augmentation du temps de calcul. Étant donné que dans notre étude le but n'est pas d'aller à de très grands nombres de Rayleigh, qui engendrent des écoulements à forte vitesse, l'adoption du schéma de différences centré est acceptable.

- Pour le terme diffusif de la même manière que pour le terme convectif on trouve:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla f) d\Omega = \int_S (\nabla f) \cdot d\vec{S} = \int_w \nabla f|_w \cdot d\vec{S}_w + \int_e \nabla f|_e \cdot d\vec{S}_e + \int_s \nabla f|_s \cdot d\vec{S}_s + \int_n \nabla f|_n \cdot d\vec{S}_n$$

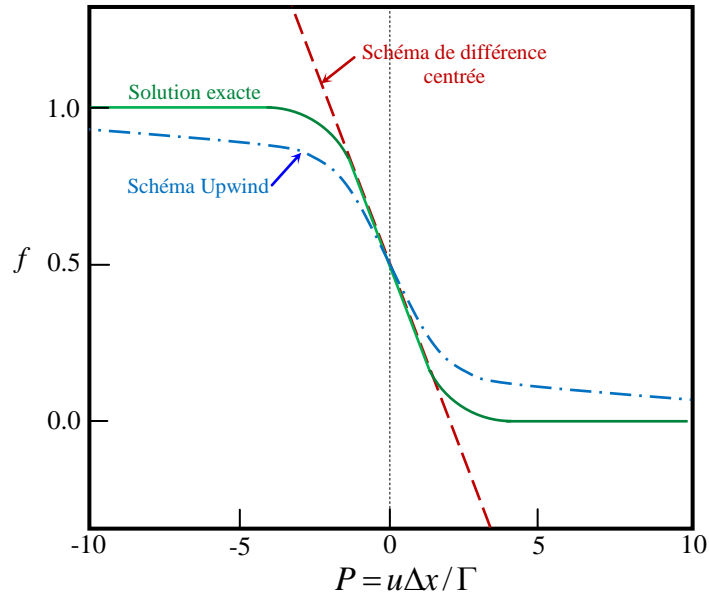
$$= -\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \Big|_w \Delta y + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \Big|_e \Delta y - \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \Big|_s \Delta x + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \Big|_n \Delta x$$

Avec :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \Big|_w = \frac{\bar{f} - \bar{f}_w}{\Delta x}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \Big|_e = \frac{\bar{f}_E - \bar{f}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \Big|_s = \frac{\bar{f} - \bar{f}_s}{\Delta y}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \Big|_n = \frac{\bar{f}_N - \bar{f}}{\Delta y}$$

Ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla f) d\Omega = \bar{f}_w \frac{\Delta y}{\Delta x} + \bar{f}_E \frac{\Delta y}{\Delta x} + \bar{f}_S \frac{\Delta x}{\Delta y} + \bar{f}_N \frac{\Delta x}{\Delta y} + \bar{f} \left( -\frac{2\Delta y}{\Delta x} - \frac{2\Delta x}{\Delta y} \right) \quad (3.9)$$



**Figure 3-3** : Prédiction de la fonction  $f$  en fonction du nombre de Peclet  $P$  du maillage pour deux différents schémas (d'après Patankar, 1980).

- Pour le terme source on a :

$$\int_{\Omega} t_s d\Omega = \bar{t}_s \Delta x \Delta y \quad (3.10)$$

En tenant compte des résultats (3.7)-(3.10), l'équation (3.6) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$a_P \bar{f} + a_W \bar{f}_W + a_E \bar{f}_E + a_S \bar{f}_S + a_N \bar{f}_N = b \quad (3.11)$$

Avec :

$$a_P = \frac{1}{\Delta t} + 2\Gamma \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right), \quad a_W = \frac{-\bar{u}_w}{2\Delta x} - \frac{\Gamma}{\Delta x^2}, \quad a_E = \frac{\bar{u}_e}{2\Delta x} - \frac{\Gamma}{\Delta x^2}$$

$$a_s = \frac{-\bar{v}_s}{2\Delta y} - \frac{\Gamma}{\Delta y^2}, \quad a_N = \frac{\bar{v}_n}{2\Delta y} - \frac{\Gamma}{\Delta y^2}, \quad b = \bar{t}_s + \frac{\bar{f}^0}{\Delta t}$$

L'intégration du terme source de l'équation de vorticité (3.3) donne pour la dérivée spatiale de température ce qui suit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x} d\Omega = \int_s^e \int_s^e \frac{\partial T}{\partial x} dx dy = \int_s^n (T_e - T_w) dy = (\bar{T}_e - \bar{T}_w) \Delta y$$

En remplaçant  $\bar{T}_w = (\bar{T}_W + \bar{T})/2$  et  $\bar{T}_e = (\bar{T} + \bar{T}_E)/2$  dans l'équation ci-haut on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x} d\Omega = \frac{\bar{T}_E - \bar{T}_W}{2} \Delta y = \left( \frac{\bar{T}_E - \bar{T}_W}{2\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \quad (3.12)$$

De même pour la concentration, c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial x} d\Omega = \left( \frac{\bar{S}_E - \bar{S}_W}{2\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \quad (3.13)$$

Maintenant pour l'équation de concentration (3.5) l'intégration du terme source donne :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla T) d\Omega = \left( \frac{\bar{T}_W - 2\bar{T} + \bar{T}_E}{\Delta x^2} + \frac{\bar{T}_S - 2\bar{T} + \bar{T}_N}{\Delta y^2} \right) \Delta x \Delta y \quad (3.14)$$

En utilisant les indices « i, j » de notre maillage, on sait que les points *P*, *W*, *E*, *S* et *N* correspondent respectivement aux points : (i, j), (i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), et (i, j+1). De ce fait l'équation (3.11) peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$a_{i,j} \bar{f}_{i,j} + a_{i-1,j} \bar{f}_{i-1,j} + a_{i+1,j} \bar{f}_{i+1,j} + a_{i,j-1} \bar{f}_{i,j-1} + a_{i,j+1} \bar{f}_{i,j+1} = b_{i,j} \quad (3.15)$$

### 3.3 Méthode implicite aux directions alternées

Cette méthode divise un pas de temps en deux : dans le premier demi pas, le système est résolu implicitement dans la direction  $x$ , et explicitement dans la direction  $y$ . Dans le second demi pas, la procédure est inversée.

#### 3.3.1 Schéma implicite en $x$ et explicite en $y$

L'équation (3.15) est réécrite sous la forme suivante :

$$A_i \bar{f}_{i-1,j}^{0.5} + B_i \bar{f}_{i,j}^{0.5} + C_i \bar{f}_{i+1,j}^{0.5} = D_i \quad (3.16)$$

Avec :

$$A_i = a_{i-1,j}, \quad B_i = a_{i,j}, \quad C_i = a_{i+1,j}, \quad D_i = b_{i,j} - a_{i,j-1} \bar{f}_{i,j-1}^0 - a_{i,j+1} \bar{f}_{i,j+1}^0$$

pour  $i = 2, n-1$  et  $j = 2, m-1$

$\bar{f}^0$  c'est la fonction au temps «  $t$  » et  $\bar{f}^{0.5}$  la fonction au temps «  $t + 0.5\Delta t$  »

#### 3.3.2 Schéma explicite en $x$ et implicite en $y$

Dans ce cas l'équation (3.15) s'écrit sous forme

$$A'_j \bar{f}_{i,j-1}^1 + B'_j \bar{f}_{i,j}^1 + C'_j \bar{f}_{i,j+1}^1 = D'_j \quad (3.17)$$

$$\text{Avec : } A'_j = a_{i,j-1}, \quad B'_j = a_{i,j}, \quad C'_j = a_{i,j+1}, \quad D'_j = b_{i,j} - a_{i-1,j} \bar{f}_{i-1,j}^{0.5} - a_{i+1,j} \bar{f}_{i+1,j}^{0.5}$$

pour  $i = 2, n-1$  et  $j = 2, m-1$

$\bar{f}^1$  est la fonction au temps «  $t + \Delta t$  »

#### 3.3.3 Traitement des conditions aux limites

La condition frontière peut être écrite sous la forme généralisée suivante :

$$\hat{a} \bar{f}_{1,j} + \hat{b} \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right|_{1,j} = \hat{c} \quad (3.18)$$

Où :  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  et  $\hat{c}$  sont des constantes.

Cette forme générale, permet de retrouver les deux types de conditions aux limites utilisées dans notre étude à savoir: la condition du type Dirichlet ( $\hat{a} = 1, \hat{b} = 0 \Rightarrow \bar{f}_{1,j} = \hat{c}$ ) et la condition du type Neumann ( $\hat{a} = 0, \hat{b} = 1 \Rightarrow (\partial \bar{f} / \partial x)_{1,j} = \hat{c}$ ).

La dérivée spatiale de la fonction  $\bar{f}$ , peut être approximée par différences finies comme suit :

$$\left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right|_{1,j} = \frac{\bar{f}_{2,j} - \bar{f}_{1,j}}{\Delta x} \quad (3.19)$$

En remplaçant l'équation (3.19) dans (3.18) on retrouve la valeur de la fonction  $\bar{f}$  sur la frontière  $i = 1$  en fonction de la valeur adjacente au point  $i = 2$  comme suit:

$$\bar{f}_{1,j} = \frac{\hat{c}\Delta x}{\hat{a}\Delta x - \hat{b}} - \frac{\hat{b}}{\hat{a}\Delta x - \hat{b}} \bar{f}_{2,j} \quad (3.20)$$

En tenant compte du résultat (3.20), l'équation (3.16) peut se réécrire pour  $i = 2$  sous la forme suivante :

$$\hat{B}_2 \bar{f}_{2,j} + C_2 \bar{f}_{3,j} = \hat{D}_2 \quad (3.21)$$

Avec :  $\hat{B}_2 = B_2 - \frac{\hat{b}}{\hat{a}\Delta x - \hat{b}} A_1$ ,  $\hat{D}_2 = D_2 - \frac{\hat{c}\Delta x}{\hat{a}\Delta x - \hat{b}} A_1$

De la même façon et pour  $i = n - 1$  on trouve :

$$A_{n-1} \bar{f}_{n-2,j} + \hat{B}_{n-1} \bar{f}_{n-1,j} = \hat{D}_{n-1} \quad (3.22)$$

Avec :  $\hat{B}_{n-1} = B_{n-1} - \frac{\hat{b}}{\hat{a}\Delta x + \hat{b}} C_{n-1}$ ,  $\hat{D}_{n-1} = D_{n-1} - \frac{\hat{c}\Delta x}{\hat{a}\Delta x + \hat{b}} C_{n-1}$

### 3.3.4 Résolution des équations

Pour résoudre le problème implicitement suivant  $x$ , il faut faire un balayage suivant la direction  $y$ , sur tous les points intérieurs du domaine de calcul. Pour un  $j$  donné, l'équation (3.16) est appliquée du point  $i=3$  jusqu'à  $i = n - 2$ . À cela il faut ajouter les conditions aux limites (3.21) et (3.22) ce qui permet de former le système matriciel tri-diagonal suivant:



$$\begin{bmatrix} \hat{B}_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & \hat{B}_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & A_i & \hat{B}_i & C_i & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{n-1} & \hat{B}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \cdot \\ \bar{f}_i \\ \cdot \\ \bar{f}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}_2 \\ D_3 \\ \cdot \\ D_i \\ \cdot \\ \hat{D}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Ce système est résolu avec l'algorithme TDMA (*Tri Diagonal Matrix Algorithm*) appelé aussi algorithme de Thomas. La méthode est répétée pour tous les  $j$  variant de 2 à  $m-1$ . De la même manière le problème est résolu implicitement suivant  $y$ .

### 3.4 Algorithme de calcul

Pour chaque pas de temps, la procédure de calcul suivante est utilisée pour calculer les champs de vitesse, de température et de concentration:

1. Initialisation des champs de température, de concentration, de vorticité et de fonction de courant ou utilisation de la solution au temps précédent.
2. Calcul de la fonction de courant grâce à la vorticité et à l'équation (3.2).
3. Calcul de  $u$  et  $v$  à partir de la fonction de courant.
4. Calcul de la vorticité utilisant  $T$ ,  $S$ ,  $u$ ,  $v$  et l'équation (3.3).
5. Calcul du champ de température et de concentration (Équations (3.4) et (3.5)).
6. Répéter jusqu'à obtenir la convergence.

Nous considérons cette convergence atteinte lorsque la condition de convergence, appliquée pour chaque quantité et à tous les points du maillage, obtenue à l'étape 5 est suffisamment petite pour que son calcul n'introduise pas de changement appréciable, c'est-à-dire lorsque :

$$\varepsilon = \frac{|\bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k|}{\max |\bar{f}^k|} \leq 10^{-6} \quad (3.21)$$

### 3-5 Effet du maillage

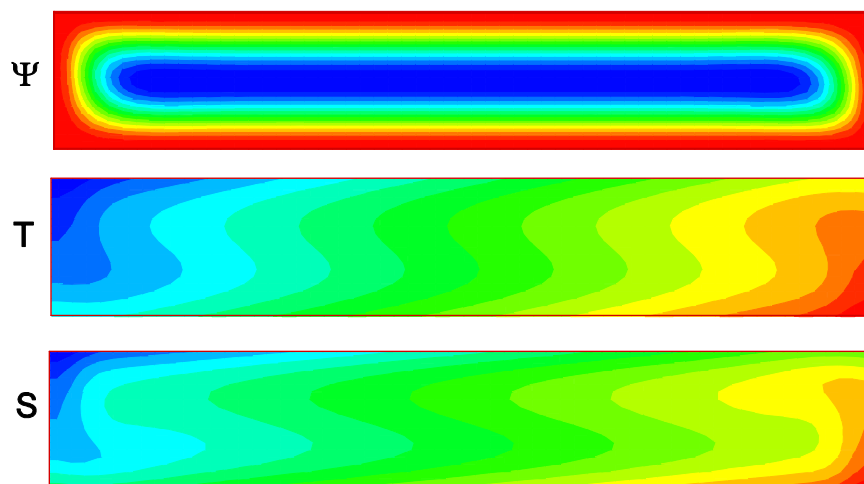
Dans le but de nous assurer, de l'indépendance de la solution numérique du maillage, nous avons exécuté le programme numérique élaboré en langage Fortran, pour différents maillages. Les paramètres fixés sont:

$$A = 6, Le = 2, \varphi = 0.05, Ra = 10000, j = 5$$

Les résultats illustrés sur le tableau 4, montrent l'effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant maximum, des nombres de Nusselt et de Sherwood.

On peut constater que, le nombre de mailles qui forment la grille de calcul, n'influence que peu ces résultats, et on peut conclure qu'à partir d'un maillage de 90 x 30, l'influence du maillage devient négligeable pour la cavité considérée.

<b>Tableau 1:</b> Effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant $\Psi_{\max}$ , du nombre de Nusselt moyen et du nombre de Sherwood moyen.				
n x m	30 x 10	60 x 20	<b>90 x 30</b>	120 x 40
$\Psi_{\max}$	6.005	6.077	<b>6.096</b>	6.097
Nusselt	2.925	2.906	<b>2.903</b>	2.903
Sherwood	3.297	3.269	<b>3.267</b>	3.267



**Figure 3-4:** Les résultats de la solution numérique avec le maillage 90 x 30, pour le cas  $A = 6$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.05$ ,  $Ra = 10000$ ,  $j = 5$ .

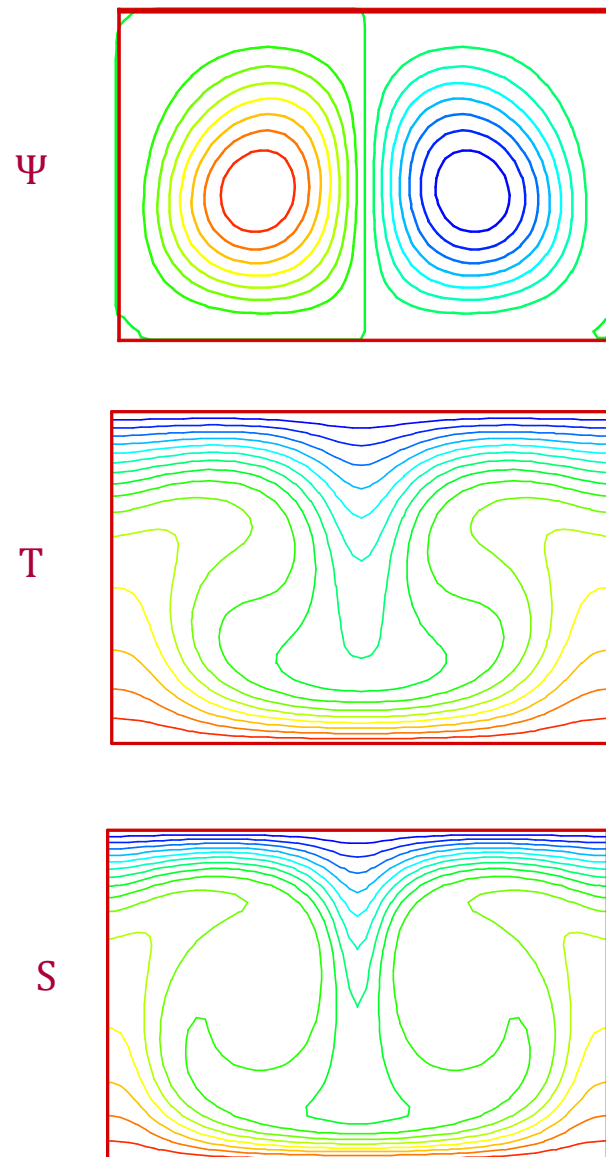
### 3-6 Validation du code numérique

Afin de valider le code numérique, les résultats de la présente étude seront comparés avec ceux de la littérature (Mamou et al. 2001), dans le cas de la double diffusion ( $a = 0$ ).

On considère une cavité rectangulaire, de facteur de forme  $A = 1.5$ , et les grandeurs adimensionnelles suivantes:  $R_T = 4 \times 10^4$ ,  $Le = 10^{1/2}$ ,  $\varphi = -0.79$ ,  $a = 0$ ,  $Pr = 1$ .

Les résultats présentés dans le tableau 1, montrent bien que notre code reproduit exactement les isovaleurs de  $\Psi$ ,  $T$ , et  $S$  en termes de  $\Psi_{max}$ ,  $\Psi_{min}$ ,  $Nu_m$  et  $Sh_m$ . Une bonne concordance des résultats avec ceux de (Mamou et al. 2001) est constatée.

<b>Tableau 2:</b> Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum, nombre de Nusselt et nombre de Sherwood avec les résultats de Mamou et al. (2001) pour $A = 1.5$ $R_T = 40000$ , $Le = 10^{1/2}$ , $\varphi = -0.79$ , $a = 0$ , $Pr = 1$ .						
	$\Psi_{max}$	$\Psi_{min}$	$Nu_m$	$Sh_m$	n x m	$\Delta t$
Mamou et al. (2001)	10.126	-10.126	2.546	3.741	24 x 20	$2 \times 10^{-4}$
Présente étude	<b>10.08</b>	<b>-10.08</b>	<b>2.534</b>	<b>3.728</b>	<b>60 x 40</b>	<b><math>10^{-3}</math></b>
Variation (%)	0.45	0.45	0.47	0.34		



**Figure 3-5:** Les résultats présent travail comparés à ceux de Mamou et al. (2001) pour le cas  $A = 1.5, R_T = 40000, Le = 10^{1/2}, \varphi = -0.79, a = 0, Pr = 1$ .

### 3-7 Conclusion

Le code numérique de résolution des équations de base, a été validé en prenant comme référence, certaines études numériques disponibles dans la littérature. Les résultats numériques de ces auteurs ont été reproduits, avec une erreur maximale égale à 0.47%.

La Solution de l'approche analytique, fera l'objet du chapitre quatre. Les résultats des deux méthodes seront discutés, et comparés dans le sixième chapitre.

# Chapitre 4

## Solution Analytique

### Résumé

---

*On peut parfois, réduire le nombre de variables intervenant dans une fonction cherchée, d'un point de vue analytique cela est très intéressant, surtout dans le cas où il ne reste plus qu'une variable. Dans ce cas, les équations aux dérivées partielles se réduisent à un système différentiel ordinaire pour lequel on dispose de méthodes analytiques de résolution. Les solutions seront obtenues, à partir d'hypothèses simplificatrices diverses, telles que, l'écoulement presque parallèle, et conduisent à des expressions analytiques, telles que les champs de vitesse, de température, ou de concentration.*

*Ainsi, une approche analytique est proposée dans le quatrième chapitre, reposant sur le concept de l'écoulement parallèle, valide pour le cas d'une cavité horizontale élancée. Les équations différentielles qui en découlent, seront résolues moyennant des programmes élaborés et exécutés sur Maple, et comparés à ceux numériques.*

---

## 4.1 Introduction

Les problèmes physiques rencontrés dans notre quotidien, sont décrits par des équations aux dérivées partielles, fortement couplées et non linéaires. En général, Ces équations n'admettent pas de solutions analytiques exactes, sauf dans des cas simplifiés.

L'écoulement convectif dans le système représenté sur la Figure 2-1 est aussi régi par les équations de base (2.27)-(2.30), qui sont des équations aux dérivées partielles, non linéaires et fortement couplées. La solution analytique n'est possible, que dans certains cas limites pour lesquels les équations se simplifient considérablement. Ainsi, pour le cas des cavités élancées,  $A \gg 1$ , avec des parois actives exposées à des flux constants de chaleur et de masse, l'obtention d'une solution analytique approximée est possible, en utilisant le concept de l'écoulement parallèle. Cette méthode, permet une compréhension rapide des phénomènes physiques, impliqués dans la convection naturelle, grâce à sa flexibilité et à sa manipulation facile.

## 4.2 Concept de l'écoulement parallèle

Plusieurs auteurs se sont intéressés au concept de l'écoulement parallèle, pour l'étude de la convection naturelle dans des cavités élancées ou aplaties. Ils ont montré numériquement que, cette approximation décrit d'une façon précise l'écoulement et le transfert de chaleur. Parmi ces auteurs, nous pouvons citer : [Cormack et al. \(1974\)](#), [Vasseur et al. \(1987\)](#) et [Mamou et al. \(1996\)](#) pour l'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire, et [Bejan et Tien \(1978\)](#) dans le cas d'une cavité cylindrique.

Ce concept suppose que, dans le cas des cavités présentant un grand rapport d'aspect, l'écoulement engendré, devient parallèle relativement aux longues parois de la cavité. On distingue alors trois régions, la région centrale dans laquelle l'écoulement est parallèle, et dont la composante de la vitesse perpendiculaire aux longues parois de la cavité pourra être négligée. Les deux autres régions, seront les bouts extrêmes de la cavité dans lesquelles, l'écoulement tourne de  $180^\circ$ . Leur influence sur le reste de la cavité, sera présentée dans les sections qui suivent.

### 4.2.1 Fonction de courant

Moyennant le concept de l'écoulement parallèle, les lignes de courant au centre de la cavité, seront parallèles à l'axe  $x$ . Autrement dit, la fonction de courant  $\Psi$  devient fonction de la coordonnée  $y$  seulement. Nous pouvons alors écrire :

$$\Psi(x, y) \approx \Psi(y) \quad (4.1)$$

### 4.2.2 Fonctions de répartition de la température et de la concentration

Dans la portion centrale de la cavité, le fluide se déplace à vitesse constante, et est soumis aux flux uniformes, de chaleur et de concentration, tout au long de son trajet. La fonction de répartition de la température, varie donc linéairement suivant  $x$ . La variation suivant  $y$  étant inconnue, on introduit la fonction  $\theta_T(y)$  telle que :

$$T(x, y) = C_T x + \theta_T(y) \quad (4.2)$$

De la même manière, on peut écrire la fonction de répartition de la concentration sous la forme :

$$S(x, y) = C_S x + \theta_S(y) \quad (4.3)$$

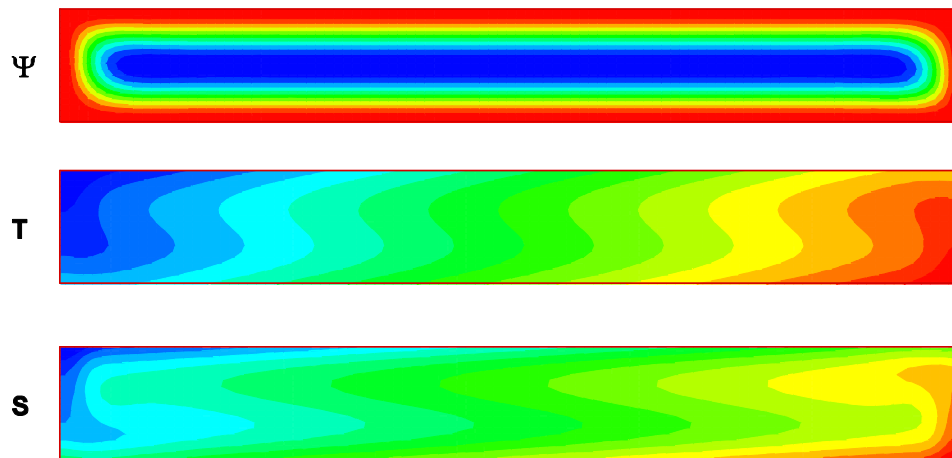
Où :  $C_T$  et  $C_S$  sont respectivement les gradients de température et de concentration suivant l'axe  $x$ . Ces gradients sont introduits afin de prendre en considération l'influence des bords de la cavité sur le reste de l'écoulement.

### 4.2.3 Influence du facteur de forme de la cavité

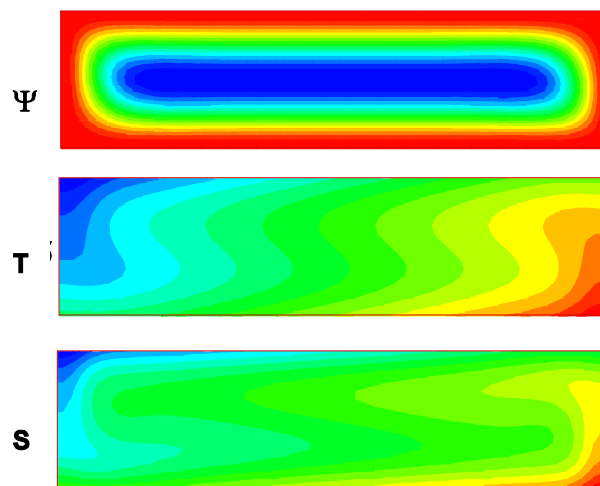
Afin de valider le concept de l'écoulement parallèle et de vérifier le bien fondé de cette notion, nous présentons des résultats numériques typiques de l'influence du facteur de forme de la cavité  $A$  sur les profils de la fonction de courant, des isothermes et des isoconcentrations. Sur les Figures (4-1), (4-2), (4-3), et (4-4) sont reportés les résultats correspondant à différentes valeurs de  $A$ , pour le cas  $R_T = 10^4$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $Pr = 7$ , et  $j = 1$ .

L'effet du rapport de forme de la cavité, sur la structure de l'écoulement, et les profils de température et concentration, est important. En augmentant ce rapport, l'écoulement devient progressivement parallèle dans le cœur de la cavité, l'intensité de la convection est augmentée, résultant en des transferts de chaleur et de masse plus importants. Pour des grands rapports de forme ( $A = 8$  par exemple), la Figure 4-1 montre

que l'écoulement est bien parallèle dans la partie centrale de la cavité considérée, et que la température et la concentration sont linéairement stratifiées dans la direction horizontale.

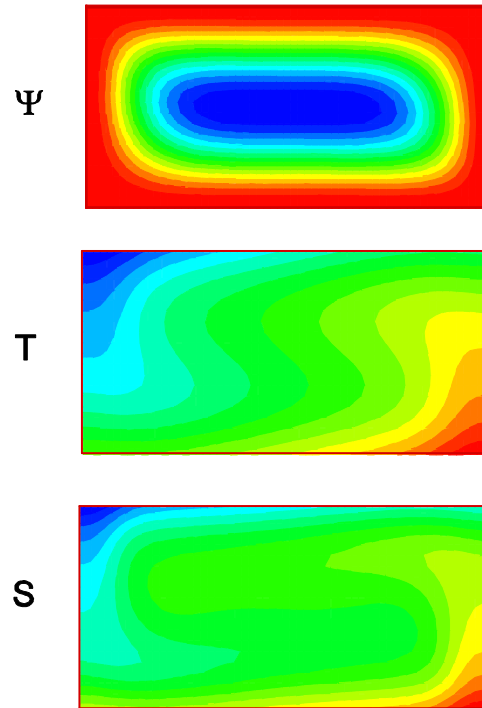


**Figure 4-1:** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $R_T = 10^4$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $j = 1$  et  $A = 8$ .  $\Psi_{max} = 5.984$ ,  $\overline{Nu} = 2.906$ ,  $\overline{Sh} = 3.394$ .

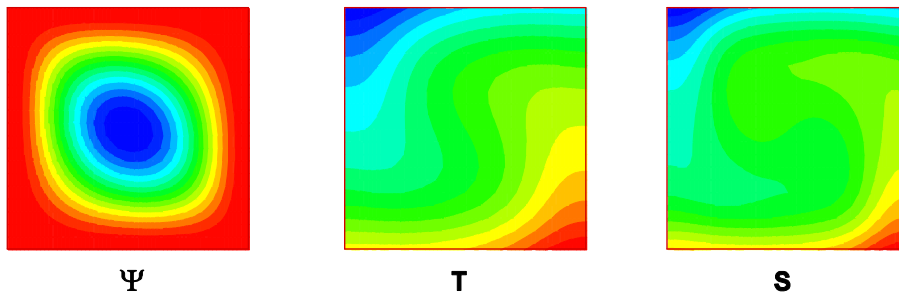


**Figure 4-2:** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $R_T = 10^4$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $j = 1$  et  $A = 4$ .  $\Psi_{max} = 5.983$ ,  $\overline{Nu} = 2.898$ ,  $\overline{Sh} = 3.409$ .





**Figure 4-3:** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $R_T = 10^4$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $j = 1$  et  $A = 2$ .  $\Psi_{max} = 5.977$ ,  $\overline{Nu} = 2.797$ ,  $\overline{Sh} = 3.664$ .



**Figure 4-4:** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $R_T = 10^4$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $j = 1$  et  $A = 1$ .  $\Psi_{max} = 4.88$ ,  $\overline{Nu} = 2.599$ ,  $\overline{Sh} = 4.086$ .

### 4.3 Application aux équations de base

Comme on l'a vu précédemment, la température ainsi que la concentration sont des fonctions de  $x$  et  $y$ . La fonction de courant ne dépend que de  $y$ . De plus, on se place en régime permanent. En substituant les approximations (4.1)-(4.3) dans les équations (2.29), (2.30) et (2.32), nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{d^4\Psi(y)}{dy^4} = Ra_T(C_T + C_S) \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2\theta_T(y)}{dy^2} = C_T \frac{d\Psi(y)}{dy} \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2\theta_S(y)}{dy^2} - a \frac{d^2\theta_T(y)}{dy^2} = C_S Le \frac{d\Psi(y)}{dy} \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) peut être réécrite en utilisant l'équation (4.5), on obtient :

$$\frac{d^2\theta_S(y)}{dy^2} = (C_S Le + aC_T) \frac{d\Psi(y)}{dy} \quad (4.7)$$

### 4.3.1 Détermination de la fonction de courant

L'intégration de l'équation (4.4) avec l'application des conditions aux limites spécifiées dans l'équation (2.34) donne :

$$\Psi(y) = \Psi_0 (4y^2 - 1)^2 \quad (4.8)$$

Avec :

$$\Psi_0 = \frac{Ra_T}{384} (C_T + \phi C_S) \quad (4.9)$$

$\Psi_0$  : représente la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité.

En utilisant les équations (2.26) et (4.8) on trouve la composante de vitesse horizontale comme suit :

$$u(y) = 16\Psi_0 (4y^2 - 1)y \quad (4.10)$$

### 4.3.2 Détermination de la température et de la concentration

En intégrant maintenant l'équation (4.5) en utilisant le résultat (4.8) et en appliquant les conditions (2.24) en  $y = \pm 1/2$ , on obtient la relation suivante :

$$\theta_T(y) = \frac{C_T \Psi_0}{15} y (48y^4 - 40y^2 + 15) - y \quad (4.11)$$

De même l'intégration de l'équation (4.7) nous conduit à la relation :

$$\theta_S(y) = \frac{(aC_T + LeC_S)\Psi_0}{15} y (48y^4 - 40y^2 + 15) - cy \quad (4.12)$$

Ainsi nous avons :

$$T(x, y) = C_T x + \frac{C_T \Psi_0}{15} y (48y^4 - 40y^2 + 15) - y \quad (4.13)$$

$$S(x, y) = C_S x + \frac{(aC_T + LeC_S)\Psi_0}{15} y (48y^4 - 40y^2 + 15) - cy \quad (4.14)$$

### 4.3.3 Détermination des gradients $C_T$ et $C_S$

Afin de déterminer le gradient de température  $C_T$ , on effectue un bilan thermique sur un côté de la cavité, [Trevisan et Bejan \(1986\)](#). Comme le montre la Figure 4-5, on choisit un volume de contrôle (en pointillés) sur lequel on peut répertorier les différents gains et pertes de chaleur.

On intègre alors l'équation de l'énergie (3.4) sur le volume de contrôle  $\Omega$ , en régime permanent :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{V}T) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla T) d\Omega \quad (4.15)$$

D'après le théorème de divergence, on peut écrire :

$$\oint_S \vec{V}T \cdot d\vec{S} = \oint_S (\nabla f) \cdot d\vec{S} \quad (4.16)$$

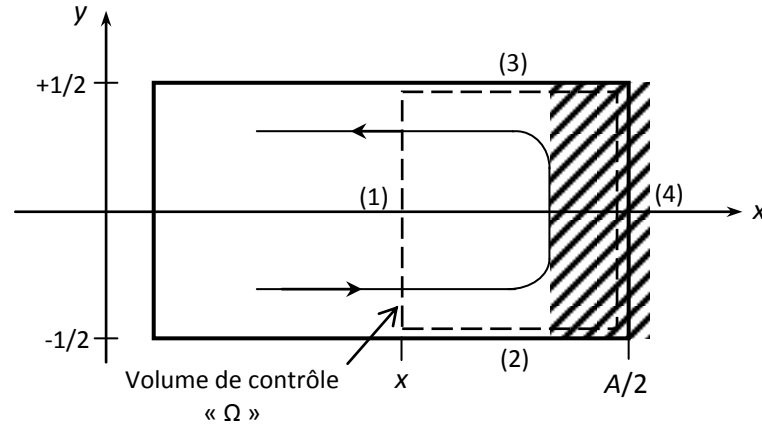
La paroi (4) est une paroi solide adiabatique, il n'y aura pas de transfert de chaleur à travers celle-ci :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=A/2} dy = 0 \quad (4.17)$$

De plus la composante horizontale de la vitesse  $u$  est nulle sur la paroi en  $x = A/2$ .

Alors :

$$\int_{-1/2}^{1/2} (u T)_{x=A/2} dy = 0 \quad (4.18)$$



**Figure 4-5** : Définition du volume de contrôle.

Si on suppose que les quantités de chaleur entrant en (2) et sortant en (3) sont égales, ces quantités s'annulent donc dans l'équation (4.16). L'équation de l'énergie devient pour tout  $x$  :

$$\int_{-1/2}^{1/2} (u T) dy = \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy \quad (4.19)$$

D'après l'hypothèse (4.2) sur  $T(x, y)$ , on obtient finalement :

$$C_T = \int_{-1/2}^{1/2} u(y) \theta_T(y) dy \quad (4.20)$$

De la même manière, en intégrant l'équation (3.5) de conservation de concentration sur le même volume de contrôle, on obtient l'équation :

$$C_S - aC_T = Le \int_{-1/2}^{1/2} u(y) \theta_S(y) dy \quad (4.21)$$

D'après les équations (4.10), (4.11), (4.12), (4.20) et (4.21) on peut calculer les expressions du gradient de température  $C_T$  et du gradient de concentration  $C_S$  :

$$C_T = \frac{I_1}{1 + I_2} \quad (4.22)$$

$$C_S = \frac{(1 - I_2 Le) a C_T + c I_1 Le}{1 + I_2 Le^2} \quad (4.23)$$

Où  $I_1 = 8 \Psi_0 / 15$  et  $I_2 = 128 \Psi_0^2 / 315$ .

#### 4.3.4 Détermination des nombres de Nusselt et Sherwood

À partir des équations (4.13) et (4.14) il est possible de connaître les valeurs des nombres de Nusselt et Sherwood définies en (2.35):

$$Nu = \frac{10}{3} \left( \frac{\Psi_0^2 + 2b}{\Psi_0^2 + 20b/3} \right) \quad (4.24)$$

$$Sh = \frac{Sh_0}{1 - \Pi Sh_0 (Nu - 1) / Nu} \quad (4.25)$$

Avec:

$$Sh_0 = \frac{10}{3} \left( \frac{Le^2 \Psi_0^2 + 2b}{Le^2 \Psi_0^2 + 20b/3} \right), \quad \Pi = \frac{2ab(Le+1)}{Le^2 \Psi_0^2 + 2b} \quad \text{et} \quad b = 315/256$$

#### 4.3.5 Détermination de $\Psi_0$

En utilisant la relation (4.9) et en remplaçant les valeurs de  $C_T$  et  $C_S$  par leurs expressions calculées dans les relations (4.22) et (4.23) on obtient l'équation polynomiale de degré 5 en  $\Psi_0$  suivante :

$$\Psi_0 \left( Le^4 \Psi_0^4 - 2b d_1 Le^2 \Psi_0^2 - b^2 d_2 \right) = 0 \quad (4.26)$$

Où :

$$d_1 = \bar{R}_T Le [Le + \varphi(c-a)] - (Le^2 + 1) \quad (4.27)$$

$$d_2 = 4\bar{R}_T Le^2 [1 + \varphi(cLe + a)] - 4Le^2 \quad (4.28)$$

Avec  $\bar{R}_T = Ra_T / 720$  et  $b = 315/256$

Il est à noter ici que la valeur 720 correspond au Rayleigh supercritique de la naissance de la convection dans le cas d'une couche fluide chauffée par le bas par un flux constant tel que prédite par Sparrow et al. (1964).

L'équation (4.26) admet la solution suivante:

$$\Psi_0 = \left\{ \pm \frac{\sqrt{b}}{Le} \left[ d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right]^{1/2}, 0 \right\} \quad (4.29)$$

Cette équation indique l'existence possible de 5 solutions :

- Solution (1) :  $\Psi_0 = 0$
- Solution (2) :  $\Psi_0 = + \sqrt{b} [d_1 + \sqrt{d_1^2 + d_2}]^{1/2} / Le$
- Solution (3) :  $\Psi_0 = - \sqrt{b} [d_1 + \sqrt{d_1^2 + d_2}]^{1/2} / Le$
- Solution (4) :  $\Psi_0 = + \sqrt{b} [d_1 - \sqrt{d_1^2 + d_2}]^{1/2} / Le$
- Solution (5) :  $\Psi_0 = - \sqrt{b} [d_1 - \sqrt{d_1^2 + d_2}]^{1/2} / Le$

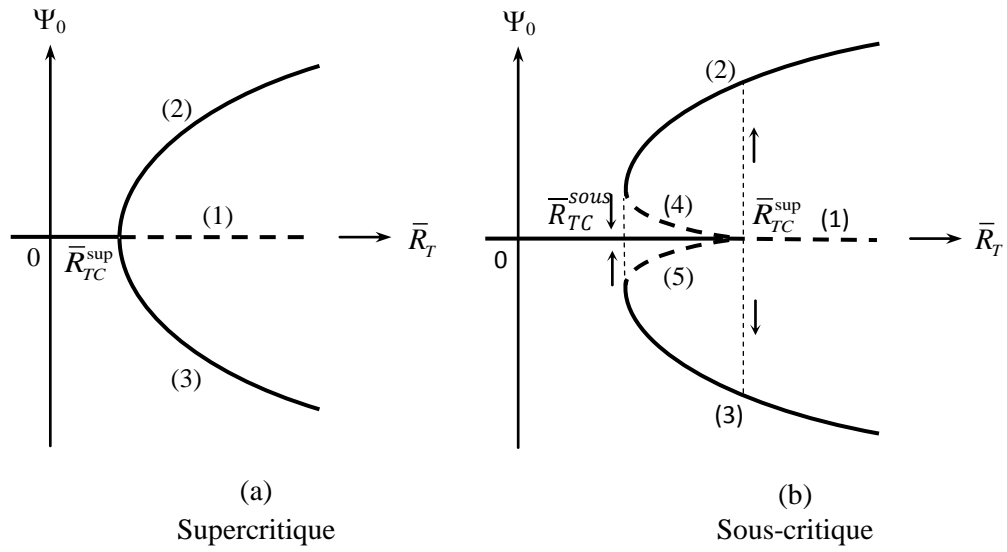
#### a) Solution de conduction (1)

Elle représente le cas où il n'y a pas de mouvement, elle est montrée par la branche (1) sur la Figure 4-6.

Cette solution existe et elle est stable jusqu'à une certaine valeur appelée Rayleigh supercritique  $\bar{R}_{TC}^{\text{sup}}$ . Après le Rayleigh supercritique cette solution (représentée par une ligne en pointillé) est toujours valable mais devient instable et on ne peut pas l'avoir réellement.

#### b) Solution de convection stable (2) et (3)

Montrée par les branches (2) et (3) sur la Figure 4-6, elle représente l'écoulement antihoraire (+) et l'écoulement horaire (-) générés dans la cavité. Suivant le type de courbe de bifurcation cette solution existe soit à partir du Rayleigh supercritique (Figure 4-6(a)) soit à partir du Rayleigh sous-critique (Figure 4-6(b)).



**Figure 4-6** : Courbes de bifurcation.

### c) Solution de convection instable (4) et (5)

Cette solution existe seulement dans le cas d'une bifurcation sous-critique, elle est cependant instable. Elle est représentée par les branches (4) et (5) en lignes pointillées sur la Figure 4-6 (b).

#### 4.3.6 Détermination des nombres de Rayleigh critique

Dans la relation (4.29), pour  $d_1 < 0$  et  $d_2 = 0$ , on obtient la valeur du nombre de Rayleigh supercritique  $Ra_{TC}^{\text{sup}}$  :

$$Ra_{TC}^{\text{sup}} = \frac{720}{1 + \varphi(cLe + a)} \quad (4.30)$$

Toujours d'après, cette relation, les conditions  $d_1 > 0$  et  $d_1^2 + d_2 = 0$  permettent d'obtenir la valeur du nombre de Rayleigh sous-critique  $\overline{R}_{TC}^{\text{sous}}$  :

$$\overline{R}_{TC}^{\text{sous}} = \frac{720(1+Le) \left[ (Le-1)(Le-\varphi c) - a\varphi(Le+1) + 2\sqrt{\varphi Le(cLe+a-c)(a\varphi-Le+1)} \right]}{Le [Le+\varphi(c-a)]^2} \quad (4.31)$$

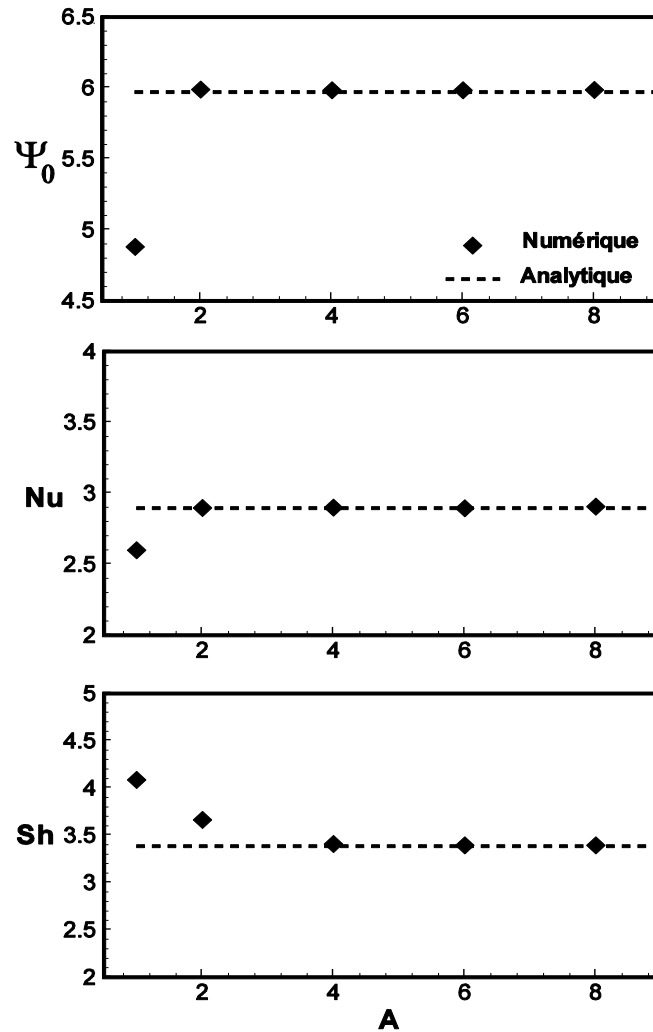
#### 4.4 Comparaison avec la solution numérique

Dans le cas de la simple diffusion, pour une cavité chauffée avec un flux de chaleur constant, il a été démontré par Vasseur et al. 1987, Hasnaoui 1991 et Mamou 1993 que la condition pour laquelle la solution analytique obtenue avec l'hypothèse de l'écoulement parallèle serait satisfaisante est que le rapport de forme de la cavité soit supérieur à 4 ( $A \geq 4$ ) et que le nombre de Prandlt,  $Pr$ , soit supérieur à 0.7. Dans ce cas, les résultats numériques étaient en bon accord avec les résultats analytiques, cependant pour un facteur de forme inférieur à 4, un écart a été observé entre les résultats numériques et analytiques, et les lignes de courant perdent leur parallélisme.

Dans le présent travail, et afin d'estimer le rapport de forme minimum, nécessaire pour simuler le cas d'un écoulement parallèle dans une couche horizontale, des tests numériques ont été exécutés. Les résultats typiques sont rapportés dans la Figure 4-7, où les résultats numériques sont indiqués par des symboles en noir et la solution analytique approximée, valide dans une couche horizontale infinie ( $A \gg 1$ ), est indiquée par des lignes en pointillés. La solution numérique est illustrée pour  $Ra_T = 10^4$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 2$ ,  $Pr = 7$ ,  $a = 1$ , et  $j = 1$ . La solution analytique prévoit les résultats suivants:  $\Psi_{max} = 5.971$ ,  $Nu = 2.969$ ,  $Sh = 3.387$ .

On a pu conclure que, les résultats numériques deviennent indépendants du rapport de forme, lorsque  $A \geq 2$  pour  $\Psi_0$  et pour le nombre de Nusselt, et lorsque  $A \geq 4$  pour le nombre de Sherwood. En effet, pour un facteur de forme égale à l'unité, la solution numérique s'écarte considérablement de la solution analytique, en augmentant progressivement le rapport de forme, les résultats de la solution numérique convergent asymptotiquement vers la solution prédite par la théorie de l'écoulement parallèle, qui est indépendante du rapport de forme de la cavité. Un bon accord est observé à partir de  $A = 4$ , pour cette raison les résultats numériques dans le présent travail, seront obtenus pour un facteur de forme  $A = 6$ .





**Figure 4-7:** Influence du rapport de forme de la cavité sur la fonction de courant, les transferts de chaleur et de masse, au centre la cavité, pour  $R_T = 10^4$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $j = 1$ , et  $Pr = 7$ .

## 4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, la méthode analytique pour la résolution des équations gouvernantes, basée sur l'approche de l'écoulement parallèle, et qui a permis d'obtenir des solutions exactes des équations différentielles. Les champs des vitesses, des températures et des concentrations, ainsi que les taux des transferts thermiques et de masse, ont été déterminés. Les nombres de Rayleigh critiques, marquant les seuils de l'apparition de la convection ont été prédits. L'approche du concept a été validée, par la littérature et par la solution numérique. Le chapitre 5, sera consacré à une analyse de stabilité linéaire, qui permettra de donner des informations sur le caractère stationnaire ou oscillant du seuil de convection.

# Chapitre 5

## Analyse de Stabilité

### Linéaire

#### Résumé

---

*Lorsqu'un système physique dans un état de référence, qui peut être un état d'équilibre mécanique, un état stationnaire ou même un état quelconque, est soumis à l'action d'une perturbation, le système guette son état de référence: - si le système perturbé revient à son état initial, ce dernier est dit stable, - si le système perturbé s'éloigne de son état initial, ce dernier est dit instable, - l'état entre la stabilité et l'instabilité est l'état de stabilité neutre ou marginale.*

*Dans ce contexte, on effectue une analyse de stabilité linéaire, en considérant l'état de référence, celui de la solution analytique de l'écoulement parallèle, par la théorie des perturbations et grâce à une approche numérique, on déterminera les valeurs critiques des paramètres du problème, marquant le passage d'un état vers un autre. On délimitera ainsi les régions des instabilités stationnaire et oscillant.*

---

## 5.1 Introduction

Un état d'équilibre d'un système physique est sa situation la plus régulière, expliquée par la dissipation minimale de l'énergie mécanique. Mais sous une contrainte extérieure de plus en plus accentuée, le système se déstabilise et perd sa régularité. Chaque brisure de symétrie est accompagnée d'une bifurcation, qui fait évoluer le système d'un état vers un autre qui lui est macroscopiquement différent, et où la dissipation est moins privilégiée que si l'ancien état a continué d'exister. L'étude de la stabilité nous permet de marquer les conditions de passage entre ces états. D'une manière générale on s'intéressera à la détermination du nombre de Rayleigh critique, à partir duquel il y aura bifurcation d'un état à un autre, et ce dans le cas d'une couche d'élanement infini.

## 5.2 Formulation mathématique

La méthode de stabilité linéaire consiste en premier lieu, à introduire des petites perturbations à l'état de base d'un système physique, puis à examiner leurs évolutions dans le temps. En réalité ces perturbations peuvent se présenter sous forme de vibrations mécaniques, ou de perturbations thermiques induites par l'environnement, ou même l'agitation thermique. On distingue trois cas possibles:

- Si le système perturbé revient à son état initial, ce dernier est dit stable.
- Si le système perturbé s'éloigne de son état initial, ce dernier est dit instable.
- L'état entre la stabilité et l'instabilité est l'état de stabilité neutre ou marginale.

La nature des perturbations permet de distinguer les perturbations infinitésimales, de celles d'amplitude finie. L'étude des perturbations infinitésimales, se fait grâce aux théories linéaires comme la théorie linéaire des perturbations, et les méthodes variationnelles, tandis que pour les perturbations d'amplitude finie, c'est grâce à des théories non-linéaires comme la théorie des bifurcations, la méthode de l'énergie, ou les méthodes itératives, que ces études s'effectuent.

Ainsi, on considère qu'au tout début de l'instabilité, l'écoulement global est supposé être la superposition de l'état de base  $(\Psi_B, T_B, S_B)$  et une perturbation infinitésimale

$(\hat{\Psi}, \hat{T}, \hat{S})$  comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \Psi_B + \hat{\Psi}(x, y, t) \\ T(x, y, t) &= T_B + \hat{T}(x, y, t) \\ S(x, y, t) &= S_B + \hat{S}(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

### 5.2.1 État de base

L'état de base que nous allons considérer dans cette étude est décrit par la solution de l'écoulement parallèle, représentée par les équations (4.8), (4.13) et (4.14) :

$$\left. \begin{aligned} \Psi_B = \Psi(y) &= \Psi_0 (4y^2 - 1)^2 \\ T_B = C_T x + \theta_T(y) &= C_T x + \frac{C_T \Psi_0}{15} y (48y^4 - 40y^2 + 15) - y \\ S_B = C_S x + \theta_S(y) &= C_S x + \frac{(aC_T + LeC_S) \Psi_0}{15} y (48y^4 - 40y^2 + 15) - cy \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Les valeurs de  $\Psi_0$ ,  $C_T$  et  $C_S$  peuvent être calculées avec les équations (4.22), (4.23) et (4.27)-(4.29). Il est à noter ici que la solution parallèle (5.2) inclue la solution convective où il y a un écoulement à l'intérieur de la couche fluide, et aussi la solution conductive dans laquelle le fluide occupant la couche est au repos.

#### a) Solution de conduction

C'est la solution donnée par  $\Psi_0 = 0$  qui se traduit par une stratification en température et en concentration comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \Psi_B &= 0 \\ T_B &= -y \\ S_B &= -cy \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Cette solution peut être retrouvée aussi en résolvant les équations (2.29), (2.30) et (2.32) avec les conditions aux limites (2.24) et (2.34) pour  $u = v = \Psi = 0$ . Dans ce cas on cherche à déterminer le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{TC}$  à partir duquel il y aura naissance de la convection.

#### b) Solution de convection

C'est la solution donnée par :

$$\Psi_0 = \frac{\sqrt{b}}{Le} \sqrt{d_1 + \sqrt{d_1^2 + d_2}} \quad (5.4)$$

L'état convectif de l'écoulement parallèle exprimé par (5.2) et (5.4) peut devenir instable lorsque le nombre de Rayleigh excède une certaine valeur. Au-delà de cette valeur appelée Rayleigh critique de Hopf  $Ra_{TC}^{Hopf}$  l'écoulement devient oscillant.

### 5.2.2 Équations de perturbation

En substituant l'état perturbé (5.1) dans le système d'équations (2.29), (2.30) et (2.32) et en négligeant les termes non linéaires nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \nabla^2 \hat{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \left( \frac{\partial \nabla^2 \hat{\Psi}}{\partial y} + \frac{d^3 \Psi_B}{dy^3} \right) + \left( \frac{d\Psi_B}{dy} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \right) \frac{\partial \nabla^2 \hat{\Psi}}{\partial x} \\ & = \text{Pr} \nabla^2 (\nabla^2 \hat{\Psi}) - \text{Pr} Ra_T \frac{\partial}{\partial x} (\hat{T} + \varphi \hat{S}) + \text{Pr} \left( \frac{d^4 \Psi_B}{dy^4} - Ra_T (C_T + \varphi C_S) \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \left( \frac{\partial T_B}{\partial y} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \frac{d\Psi_B}{dy} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \left( C_T + \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) = \nabla^2 \hat{T} + \frac{\partial^2 T_B}{\partial y^2} - C_T \frac{d\Psi_B}{dy} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \left( \frac{\partial S_B}{\partial y} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \hat{S}}{\partial x} \frac{d\Psi_B}{dy} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \left( C_S + \frac{\partial \hat{S}}{\partial x} \right) \\ & = \frac{1}{Le} (\nabla^2 \hat{S} - a \nabla^2 \hat{T}) + \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 S_B}{\partial y^2} - a \frac{\partial^2 T_B}{\partial y^2} \right) - C_S \frac{d\Psi_B}{dy} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dans les équations (5.5)-(5.7) on retrouve les équations (4.4)-(4.6) ce qui veut dire que :

$$\frac{d^4 \Psi_B}{dy^4} - Ra_T (C_T + \varphi C_S) = \frac{\partial^2 T_B}{\partial y^2} - C_T \frac{d\Psi_B}{dy} = \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 S_B}{\partial y^2} - a \frac{\partial^2 T_B}{\partial y^2} \right) - C_S \frac{d\Psi_B}{dy} = 0$$

Étant donné que les quantités perturbées sont infinitésimales, les termes non linéaires en perturbation dans les équations (5.5)-(5.7) peuvent être négligés, ce qui conduit au système suivant :

$$\frac{\partial \nabla^2 \hat{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \frac{d^3 \Psi_B}{dy^3} + \frac{\partial \nabla^2 \hat{\Psi}}{\partial x} \frac{d\Psi_B}{dy} = \text{Pr} \nabla^2 (\nabla^2 \hat{\Psi}) - \text{Pr} Ra_T \frac{\partial}{\partial x} (\hat{T} + \varphi \hat{S}) \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial T_B}{\partial y} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \frac{d\Psi_B}{dy} + C_T \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} = \nabla^2 \hat{T} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial S_B}{\partial y} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial x} \frac{d\Psi_B}{dy} + C_S \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} = \frac{1}{Le} (\nabla^2 \hat{S} - a \nabla^2 \hat{T}) \quad (5.10)$$

Les perturbations peuvent être développées en modes normaux comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Psi}(t, x, y) &= \tilde{\Psi}(y)e^{pt+ikx} \\ \hat{T}(t, x, y) &= \tilde{\theta}_T(y)e^{pt+ikx} \\ \hat{S}(t, x, y) &= \tilde{\theta}_S(y)e^{pt+ikx} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Où  $p = \sigma + i\omega$  est un nombre complexe qui représente le taux d'amplification des perturbations dans le temps,  $\sigma$  est le taux de croissance de l'amplitude,  $k$  est le nombre d'onde dans la direction horizontale  $x$  et  $\omega$  la fréquence temporelle des perturbations.

En remplaçant l'équation (5.11) dans le système d'équations (5.8), (5.9) et (5.10) on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} \text{Pr}(D^4 - 2k^2D^2 + k^4)\tilde{\Psi} - ik\tilde{\Psi}D^3\Psi_B + ik(D^2 - k^2)\tilde{\Psi}D\Psi_B \\ - ik\text{Pr}Ra_T(\tilde{\theta}_T + \varphi\tilde{\theta}_S) = p(D^2 - k^2)\tilde{\Psi} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$(D^2 - k^2)\tilde{\theta}_T - ik\tilde{\theta}_TD\Psi_B - C_T D\tilde{\Psi} + ik\tilde{\Psi}DT_B = p\tilde{\theta}_T \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{Le}(D^2 - k^2)(\tilde{\theta}_S - a\tilde{\theta}_T) - ik\tilde{\theta}_SD\Psi_B - C_S D\tilde{\Psi} + ik\tilde{\Psi}DS_B = p\tilde{\theta}_S \quad (5.14)$$

Où  $D$  est l'opérateur différentiel par rapport à  $y$  défini par :  $D = d/dy$

Les conditions aux limites des perturbations s'obtiennent en remplaçant (5.1) avec (5.11) dans (2.24) et (2.34) :

$$y = \pm 1/2: \quad \tilde{\Psi} = D\tilde{\Psi} = D\tilde{\theta}_T = D\tilde{\theta}_S = 0 \quad (5.15)$$

## 5.3 Solution des équations de stabilité

### 5.3.1 Discrétisation des équations

Les équations (5.12)-(5.14) et les conditions aux limites (5.15) sont discrétisées avec la méthode des différences finies. On résume les étapes de discrétisation comme suit :

1. Diviser la hauteur de la couche en  $N$  sous-intervalles de longueur uniforme.
2. Approximer les dérivées dans l'équation (5.12) par des schémas centrés de quatre et cinq points en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
Df_j &= \frac{-f_{j+2} + 8f_{j+1} - 8f_{j-1} + f_{j-2}}{12\Delta y} \\
D^2 f_j &= \frac{-f_{j+2} + 16f_{j+1} - 30f_j + 16f_{j-1} - f_{j-2}}{\Delta y^2} \\
D^4 f_j &= \frac{f_{j+2} - 4f_{j+1} + 6f_j - 4f_{j-1} + f_{j-2}}{\Delta y^4}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Où  $f$  est une variable qui représente  $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{\theta}_T$  et  $\tilde{\theta}_S$  et  $\Delta y$  est la distance entre deux nœuds voisins.

3. Pour les équations (5.13) et (5.14) on utilise la discrétisation par des schémas centrés de deux et trois points comme suit :

$$Df_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta y}, D^2 f_j = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta y^2} \tag{5.17}$$

4. Pour les conditions aux frontières (5.15) les dérivées sont approchées en utilisant des schémas décentrés cinq points en amont ou en aval comme suit :

$$\begin{aligned}
Df_1 &= \frac{-25f_1 + 48f_2 - 36f_3 + 16f_4 - 3f_5}{12\Delta y} \\
Df_N &= \frac{25f_N - 48f_{N-1} + 36f_{N-2} - 16f_{N-3} + 3f_{N-4}}{12\Delta y}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

5. Les équations (5.12)-(5.14) et les conditions aux limites (5.15) discrétisées sont réécrites sous forme du système matriciel discret suivant :

$$L(k)\mathbf{Y} = pM(k)\mathbf{Y} \tag{5.19}$$

où  $\mathbf{Y}$  est un vecteur à trois composantes  $[\tilde{\Psi}, \tilde{\theta}_T, \tilde{\theta}_S]$  des perturbations et  $L(k)$  et  $M(k)$  sont deux opérateurs différentiels linéaires qui dépendent des paramètres de contrôle  $Ra_T$ ,  $\varphi$ ,  $Le$ ,  $Pr$ ,  $a$  et  $j$ . La figure 5.1 montre la construction du système matriciel (5.19) et l'introduction des conditions aux limites dans ce dernier.

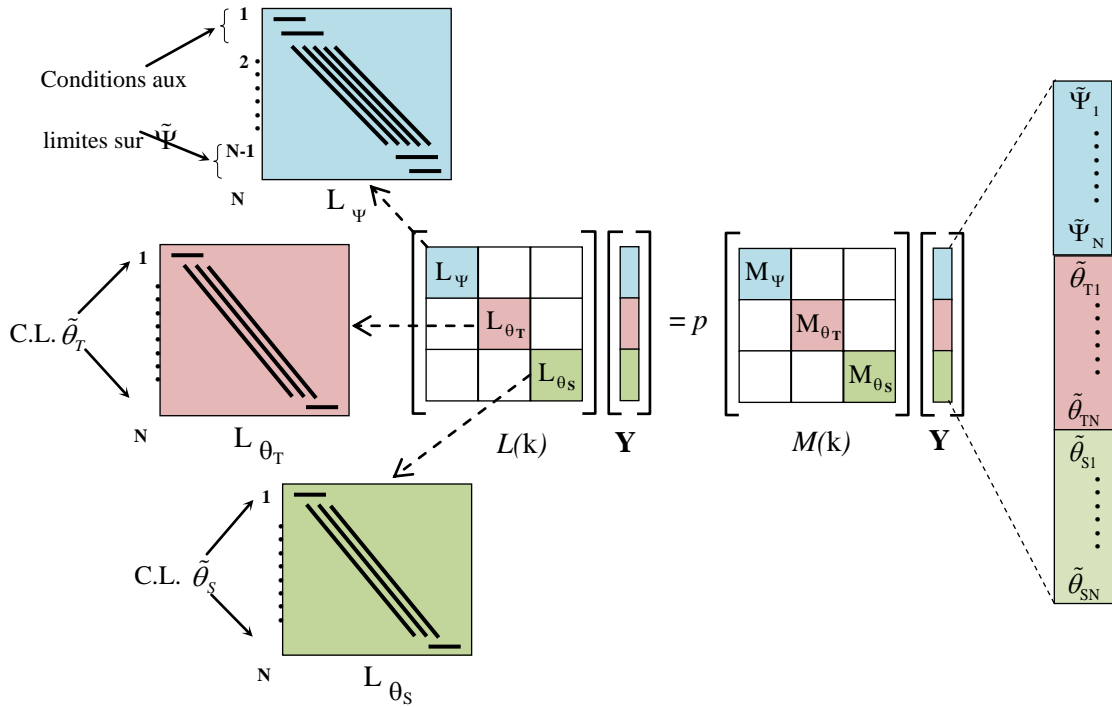


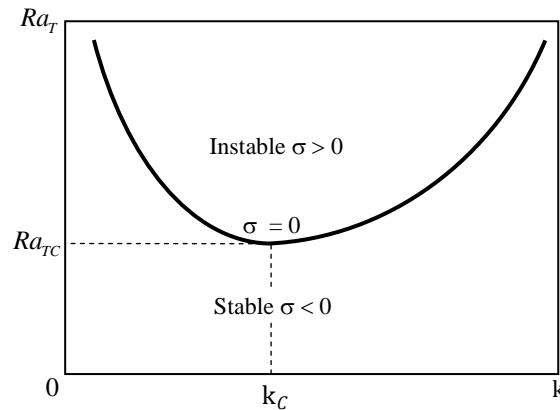
Figure 5-1 : Construction du système matriciel.

### 5.3.2 Résolution

D'après la Figure 5-1 on constate que pour  $N$  points de calcul on aura un système matriciel de dimension  $3N$ . L'analyse de stabilité linéaire se ramène ainsi à un problème aux valeurs propres «  $p$  », qui peuvent être trouvées en utilisant le sous-programme standard DGVCCG de la librairie IMSL de fortran. La valeur du nombre de Rayleigh, pour laquelle le taux de croissance de l'amplitude  $\sigma$  est nulle, est calculée par la méthode itérative de Newton, en fixant les paramètres  $k, \varphi, Le, Pr, a$  et  $j$ .

La courbe de stabilité marginale est générée par répétition de la procédure pour différents nombres d'ondes  $k$  (Figure 5-2). Le minimum de cette courbe correspond au seuil critique  $(Ra_{TC}, k_c)$ .





**Figure 5-2** : Courbe marginale de stabilité.

#### 5.4 Validation du code numérique

La méthode des différences finies exige une discrétisation du domaine de calcul en  $N$  points. Les résultats montrent que la précision des calculs augmente quand le nombre de points  $N$  augmente également. Pour tester le code de stabilité, nous avons calculé le seuil critique de l'apparition de la convection thermique dans une couche d'un fluide pur chauffé par le bas avec flux constant. Nous avons comparé les résultats de notre programme, en terme du Rayleigh supercritique  $Ra_c$ , avec le résultat de Sparrow et al. (1964). Ceci nous a permis de constater qu'il faut un maillage de  $N \geq 50$  pour que la solution puisse converger adéquatement (Tableau 3).

**Tableau 3** : Effet du maillage du code numérique et comparaison avec le résultat de Sparrow et al. (1964) pour le cas  $\varphi = 0$ .

Résultat de notre code numérique						Sparrow et al. (1964)
Maillage	10	20	30	40	50	
$Ra_c$	729.66	720.63	720.11	720.04	720.02	720

Dans le souci de s'assurer de la consistance de nos résultats, d'autres comparaisons ont été effectuées. Nous avons comparé nos résultats avec ceux de Prud'homme et Nguyen (2002) pour le cas de la bifurcation de Hopf de l'écoulement d'un fluide pur (Tableau 4). D'après ces tests de validation, il s'avère évident que les résultats obtenus en terme du nombre de Rayleigh critique de Hopf  $Ra_{TC}^{Hopf}$ , du nombre d'onde critique  $k_c$  et de la fréquence critique  $\omega_c$ , sont en très bon accord avec les résultats de la littérature.

**Tableau 4**: Validation du code numérique de stabilité, pour le cas  $\varphi = 0$ , en terme de  $Ra_{TC}^{Hopf}$ ,  $k_c$  et  $\omega_c$ .

$Pr$	Prud'homme et Nguyen (2002)			Notre résultat		
	$Ra_{TC}^{Hopf}$	$k_c$	$\omega_c$	$Ra_{TC}^{Hopf}$	$k_c$	$\omega_c$
50	64275.9	4.626	183.9	64275.86	4.626	183.9
100	65125.8	4.662	187.1	65125.75	4.662	187.1
500	65819.3	4.691	189.8	65819.27	4.691	189.8
5000	65977.0	4.697	190.4	65976.98	4.697	190.4

# Chapitre 6

## Résultats et Discussions

### Résumé

---

---

*Le sixième chapitre, est consacré à la présentation des résultats analytiques et numériques, de la convection naturelle induite par double diffusion et effet Soret, dans une cavité horizontale remplie d'un fluide binaire, et soumise aux conditions de type Neumann.*

*L'analyse des résultats, consiste en l'étude de l'influence des paramètres de contrôle, sur l'écoulement et sur les mécanismes de transferts de chaleur et de masse. Une analyse de stabilité linéaire, complètera l'étude, et donnera les seuils critiques délimitant les différentes régions d'instabilités.*

---

---

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats analytiques, numériques et de stabilité linéaire. Le modèle étudié est une cavité rectangulaire de facteur de forme  $A = 6$ , remplie de fluide binaire. Les paramètres de contrôle sont le Rayleigh thermique, le nombre de Lewis, le rapport des forces de volume solutal et thermique, et le flux de masse.

Les résultats numériques présentés dans cette étude sont obtenus pour un  $Pr = 7$ . Comme il a été discuté par de nombreux auteurs, voir par exemple [Trevisan et Bejan \(1985\)](#), la présente solution est plutôt indépendante de ce paramètre à condition que ce dernier soit de l'ordre de un ou plus. En outre, ce point est confirmé par la solution analytique discutée dans le chapitre 4 qui, dans son domaine de validité, est indépendant du  $Pr$ .

La première section de ce chapitre traitera deux cas, le premier est consacré à la discussion des résultats obtenus par la solution numérique des équations gouvernantes du système, dans le cas de l'absence de l'effet Soret, c'est-à-dire le cas de la double diffusion pour lequel les gradients de concentration sont dus à l'imposition de la condition massique aux limites, et le deuxième cas conservera la convection induite par effet Soret, les résultats seront obtenus en termes de fonction de courant, isothermes et isoconcentrations, en faisant varier les paramètres de contrôle.

Sur les graphiques de cette section, les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations seront présentées de haut en bas. Pour chaque figure, les incréments entre les lignes de courant adjacentes, les isothermes et les isoconcentrations sont donnés par:

$\Delta\xi = (\xi_{max} - \xi_{min})/15$ , où  $\xi$  représente  $\Psi$ ,  $T$ , et  $N$  et  $\xi_{max}$  et  $\xi_{min}$  sont les valeurs maximum et minimum de  $\xi$  respectivement.

Les profils de la vitesse horizontale au centre de la cavité déterminés numériquement, comparés à ceux obtenus analytiquement, sont présentés et discutés dans la deuxième section.

Une troisième section illustre les résultats obtenus numériquement et analytiquement, exprimant l'influence du nombre de Rayleigh thermique sur le taux de transfert de chaleur et de masse, en termes de fonctions de courant, du nombre Nusselt et du nombre de Sherwood. Une large gamme de valeurs a été considérée, pour le flux de masse et le rapport des forces de volume solutales et thermiques.

Pour une bonne compréhension des phénomènes qui interviennent dans la convection naturelle, une quatrième section, traite différentes situations, à savoir la convection thermique pure, la convection double diffusive, la convection avec effet Soret, et la convection induite par double diffusion et effet Soret. Pour ces quatre situations, les seuils critiques de l'apparition de la convection ont été déterminés et comparés, ainsi que pour les nombres de Nusselt et de Sherwood. La comparaison tient compte des effets de forces de flottabilité thermiques et solutales, aidant et opposant.

L'un des paramètres essentiels caractérisant un mélange binaire, est le nombre de Lewis, il permet de déterminer le seuil de stabilité de l'écoulement. L'étude de l'influence de ce paramètre, sur les transferts thermiques et massiques, est présentée dans la cinquième section, les résultats analytiques et numériques obtenus pour les différentes situations citées précédemment, sont interprétés et comparés.

Pour mettre en évidence, les effets des forces de flottabilité thermiques et solutales aidant et opposant, une sixième section illustre les résultats numériques et analytiques montrant la contribution du flux de masse, de l'effet Soret et du Rayleigh sous-critique (supercritique) dans l'apparition des bifurcations supercritique et sous-critique.

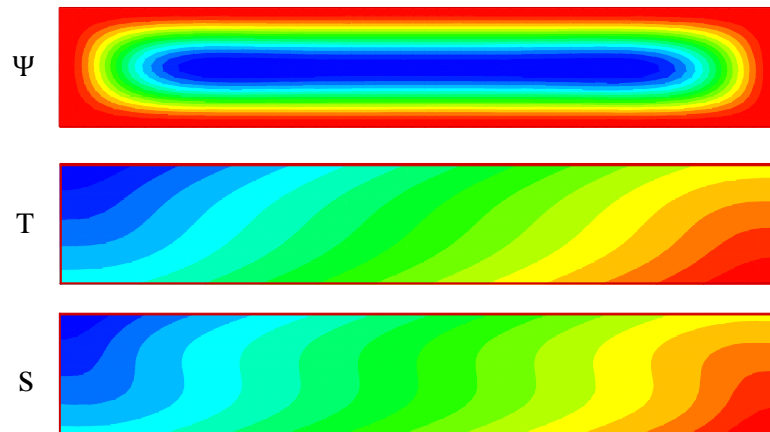
Sur la base de la théorie de la stabilité linéaire, la stabilité du modèle de l'écoulement parallèle, développée dans la présente étude, est examinée dans la septième section, dans le but de délimiter les limites définissant les régions des instabilités stationnaires et oscillatoires.

## 6.2 Profils des fonctions de courant, isothermes et isoconcentrations

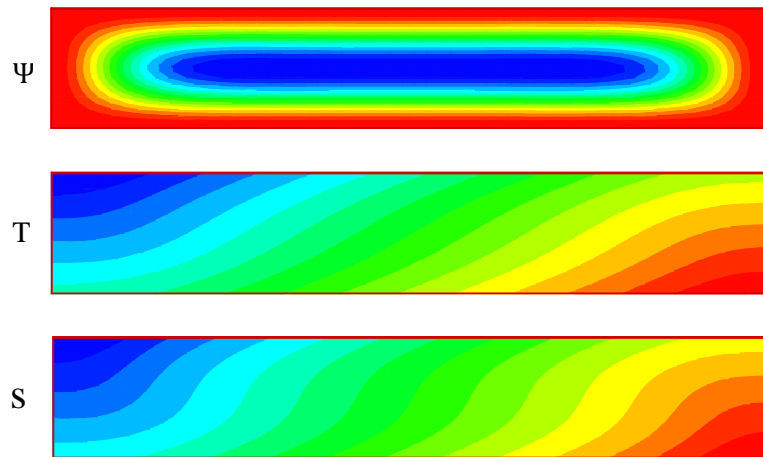
### 6.2.1 Cas de l'absence de l'effet Soret $a = 0$

Nous allons d'abord discuter le cas de la convection double diffusive, sans effet Soret. Les résultats numériques rapportés sur les Figures 6-1 et 6-2, obtenus pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le=2$ , illustrent les profils de la fonction de courant, des isothermes et des isoconcentrations respectivement pour  $\varphi = +0.05$  et  $\varphi = -0.05$ .

Les Figures montrent que, l'écoulement résultant consiste en une cellule convective, qui peut tourner indifféremment dans le sens horaire ou antihoraire. La convection est plutôt faible et par conséquent les taux de transfert de chaleur et de masse ne sont pas très grands ( $\Psi_{\max} = 1.088$ ,  $Nu = 1.280$ ,  $Sh = 1.831$ ) pour  $\varphi = +0.05$  et ( $\Psi_{\max} = 0.88$ ,  $Nu = 1.203$ ,  $Sh = 1.641$ ) pour  $\varphi = -0.05$ . Ces résultats seront comparés avec le cas  $a = 1$ .



**Figure 6-1:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = +0.05$ ,  $a = 0$ .  $\Psi_{\max} = 1.088$ ,  $Nu = 1.280$ ,  $Sh = 1.831$

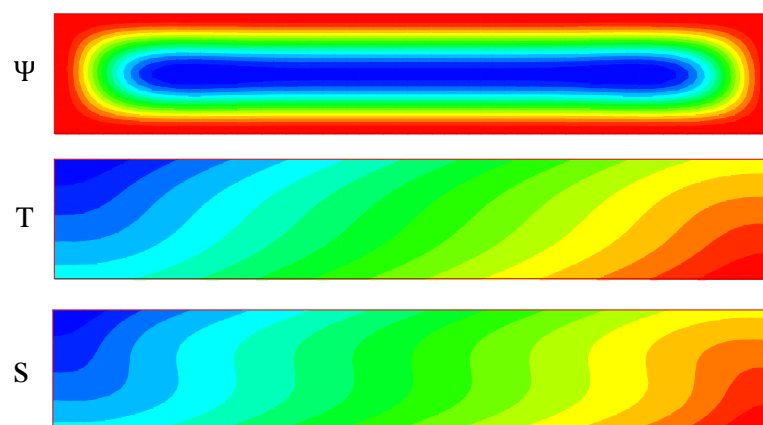


**Figure 6-2:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = -0.05$ ,  $a = 0$ .  $\Psi_{\max} = 0.88$ ,  $Nu = 1.203$ ,  $Sh = 1.641$ .

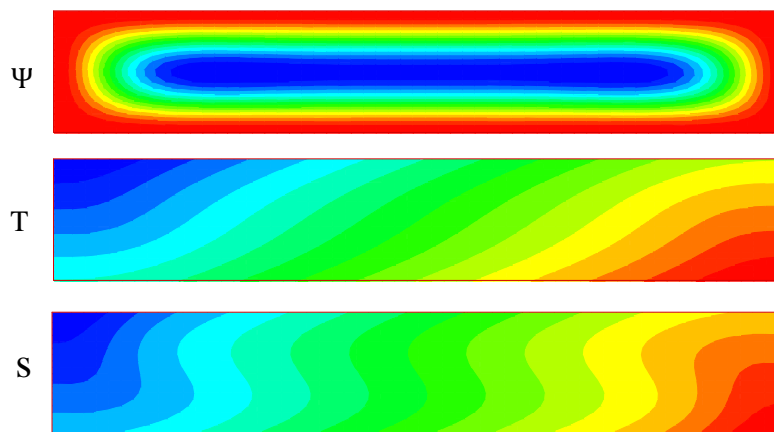
### 6.2.2 Cas de la présence de l'effet Soret $a = 1$

Des résultats numériques typiques sont présentés sur: les Figures: de 6-3 à 6-6 et les Figures: de 6-7 à 6-11 pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le=2$ ,  $\varphi = \pm 0.05$ , et différentes valeurs de  $j$ . Les Figures illustrent l'effet de la variation de l'intensité du flux de soluté  $j$ , sur la force de la convection ( $\Psi_{\max}$ ) et sur les transferts de chaleur ( $Nu$ ) et de masse ( $Sh$ ) qui en résultent, deux cas sont présentés concernant le rapport  $\varphi$  des forces volumiques.

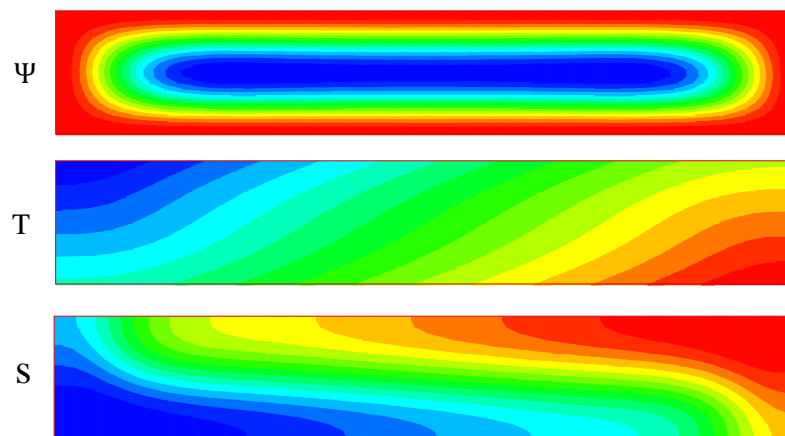
- 1<sup>er</sup> cas:  $\varphi > 0$



**Figure 6-3:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, des iso-concentrations prédits Par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = +0.05$ ,  $a = 1$  et  $j = 5$ .  $\Psi_{\max} = 1.40$ ,  $Nu = 1.43$ ,  $Sh = 2.28$

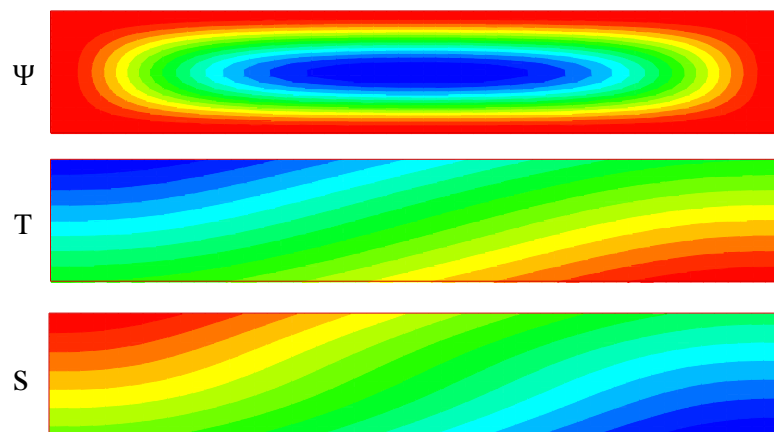


**Figure 6-4:** Profils de la fonction de courant, des isothermes et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = +0.05$ ,  $a = 1$  et  $j = 0$ .  $\Psi_{\max} = 1.10$ ,  $Nu = 1.29$ ,  $Sh = 3.20$ .



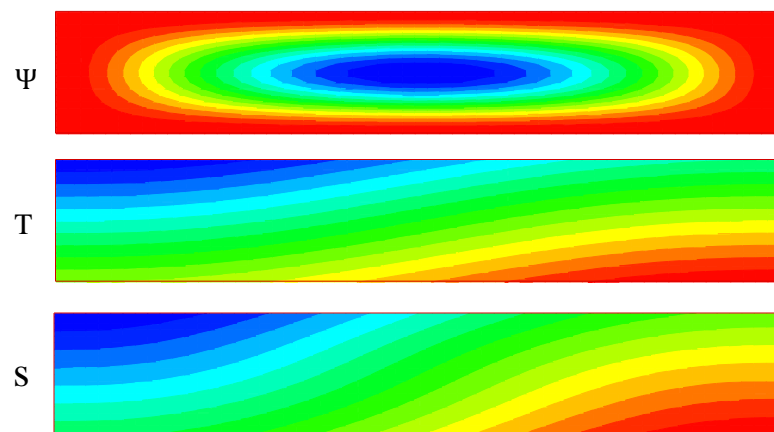
**Figure 6-5:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = +0.05$ ,  $a = 1$  et  $j = -1$ .  $\Psi_{\max} = 1.01$ ,  $Nu = 1.25$ .



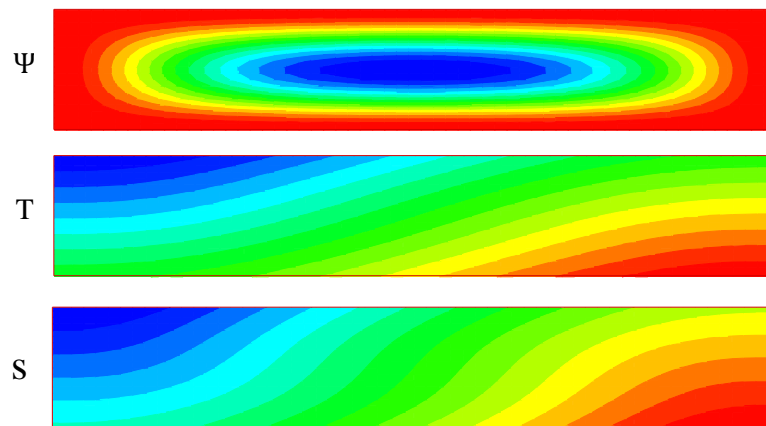


**Figure 6-6:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = +0.05$ ,  $a = 1$  et  $j = -4$ ,  $\Psi_{\max} = 0.5$ ,  $Nu = 1.07$ ,  $Sh = 1.56$

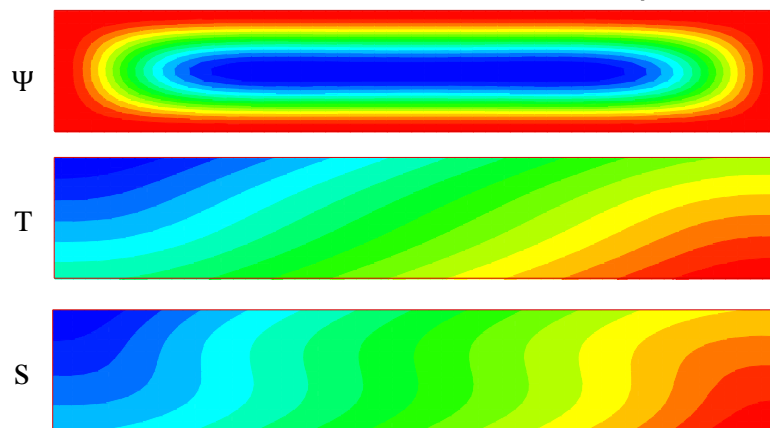
- 2<sup>ème</sup> cas:  $\varphi < 0$



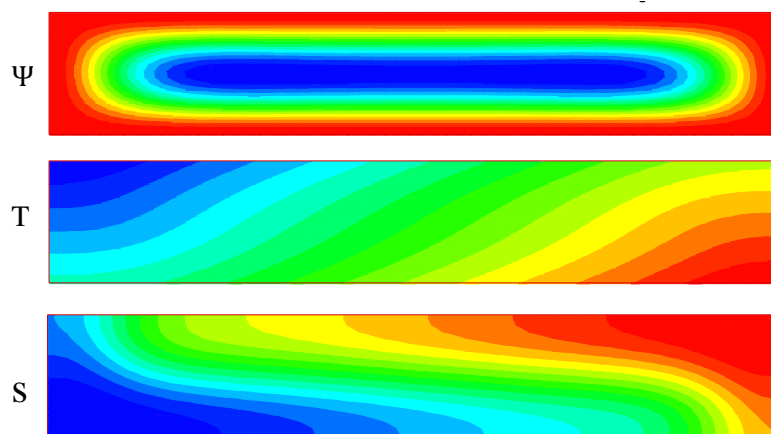
**Figure 6-7:** Profils de la fonction de courant, des isothermes et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = -0.05$ ,  $a = 1$  et  $j = 1.4$ .  $\Psi_{\max} = 0.32$ ,  $Nu = 1.03$ ,  $Sh = 1.15$ .



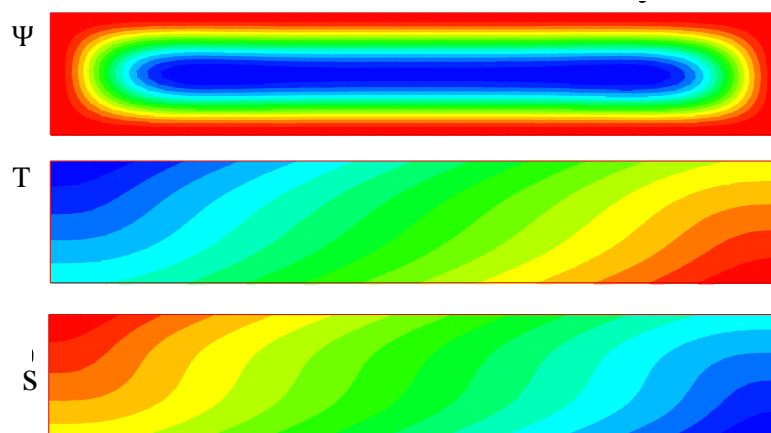
**Figure 6-8:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = -0.05$ ,  $a = 1$  et  $i = 1.2$ .  $\Psi_{\max} = 0.56$ .  $Nu = 1.08$ .  $Sh = 1.44$ .



**Figure 6-9:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = -0.05$ ,  $a = 1$  et  $j = 0$ .  $\Psi_{\max} = 0.85$ ,  $Nu = 1.18$ ,  $Sh = 2.47$ .



**Figure 6-10:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = -0.05$ ,  $a = 1$  et  $j = -1$ .  $\Psi_{\max} = 0.98$ ,  $Nu = 1.24$ .



**Figure 6-11:** Profils de la fonction de courant, des isothermes, et des iso-concentrations prédits par la solution numérique des équations gouvernantes pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = -0.05$ ,  $a = 1$  et  $j = -4$ .  $\Psi_{\max} = 1.23$ ,  $Nu = 1.35$ ,  $Sh = 1.70$ .

Afin de voir l'influence du flux de masse, on a suivi numériquement l'évolution de la structure de l'écoulement, du transfert de chaleur et de masse au sein de la cavité, en faisant varier le flux de soluté  $j$  dans une large gamme de valeurs.

On rappelle que  $j$  est le rapport entre flux de masse double diffusive, et flux de masse dû à l'effet Soret, sa contribution est d'une grande importance.

La variation de  $j$ , nous a permis d'apprécier les résultats dans des zones différentes, en effet la structure de l'écoulement a montré des aspects différents selon que  $j$  est positif, négatif ou nul. Le choix donc des profils présentés sur les Figures : de 6-3 à 6-11 est fondé en matière de résultats les plus significatifs marquant les différentes zones.

L'interprétation des résultats illustrés sur les graphiques pour les deux cas, absence ou présence de l'effet Soret, en fonction du rapport  $\varphi$  ( $\varphi < 0$ ) et ( $\varphi > 0$ ), nous a permis d'énumérer les points suivants:

1-Pour une cavité peu profonde  $A \gg 1$ , l'écoulement dans le noyau de l'enceinte est essentiellement parallèle alors que la température et la concentration sont linéairement stratifiées selon la direction  $x$ .

2-Lorsque l'effet Soret est absent  $\alpha = 0$  (Figure 6-1), la force de l'écoulement au centre de la cavité et les nombres de Nusselt et de Sherwood, pour des valeurs positives de  $\varphi$  et de  $j$ , sont légèrement atténués comparés au cas où l'effet Soret est présent (Figures 6-3, 6-4), cela s'explique par l'action déstabilisante de l'effet Soret. La situation s'inverse quand  $\varphi < 0$  on observe dans ce cas, que la présence de l'effet Soret est relativement stabilisante pour un flux de masse positif, les nombres de Nusselt et de Sherwood sont alors moindres que ceux où l'effet Soret est absent.

3-Le cas de la valeur  $j = -1$ , présente une particularité. On remarque que les isoconcentrations sont perpendiculaires aux parois. Ce résultat peut être interprété par le fait que les flux de masse dus à la double diffusion et à l'effet Soret sont égaux et de signe opposé, la situation est telle que la paroi peut être considérée comme imperméable au flux de masse.

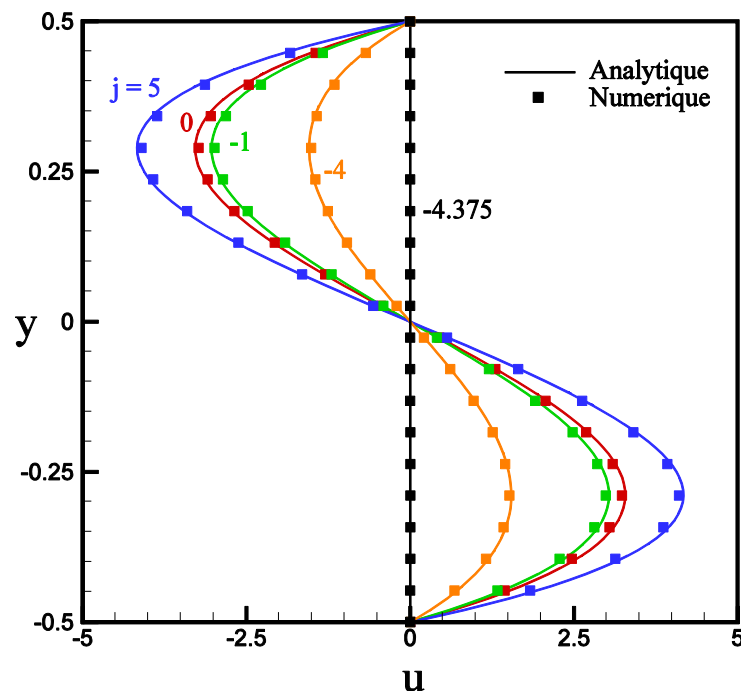
4-Après plusieurs tests numériques on a pu constater que le seuil de l'apparition de la convection, correspond à une valeur approximative de  $j = 1.42$  lorsque  $\varphi = -0.05$ , Tandis que pour des valeurs supérieures de  $j$  le transfert se fait par conduction avec des nombres de Nusselt et de Sherwood égaux à l'unité.

### 6.3 profils de vitesse

La Figure 6-12 représente les profils de la vitesse horizontale  $u$  au centre de la cavité. Les résultats obtenus numériquement sont comparés avec ceux obtenus analytiquement.

L'accord entre les deux solutions est considéré comme excellent.

Il est à noter que d'après la Figure 6-12, l'état de repos dans la cavité est atteint lorsque  $j \leq -4.30$ . Cela découle du fait que pour les paramètres considérés, à savoir:  $Le = 2, \varphi = 0.05$  et  $a = 1$ , le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition de la convection est donné par  $Ra_{TC}^{sup} \geq 1000$ , comme prévu par l'équation (4.30).



**Figure 6-12:** L'influence du paramètre  $j$  sur les profils de la vitesse pour  $Ra_T = 10^3, Le = 2, \varphi = +0.05$ , et  $a = 1$ . — analytique, ■ numérique.

### 6.4 transferts thermiques et massiques

La discussion de cette section, est limitée au cas de  $a = 1$ , correspondant à la convection induite par effet Soret dans une couche de fluide soumise à un flux de masse  $j$  constant, sur les frontières horizontales. Le cas de  $a = 0$ , a été étudié par Mamou et al. (2001) et n'est pas considéré ici. Il s'ensuit que le problème qui en résulte est régi par quatre paramètres, à savoir: le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , le flux de masse  $j$ , le rapport de flottabilité  $\varphi$  et le nombre de Lewis  $Le$ .

Les diagrammes de bifurcation typiques sont représentés dans les Figures 6-13 et 6-14 pour différentes valeurs du flux de concentration  $j$ , pour  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.05$  et  $\varphi = -0.05$ .

Le nombre de Rayleigh thermique est normalisé en respectant le paramètre critique pour l'apparition de la convection purement thermique, à savoir  $Ra^{sup} = 720$ .

Les courbes présentées dans les graphiques, sont le résultat du modèle analytique actuel, les lignes en trait plein correspondent aux branches stables, celles en pointillés correspondent aux branches instables, (voir par exemple Mamou et Vasseur (1999)).

La solution numérique des équations gouvernantes, représentée par des cercles pleins, est en excellent accord avec le modèle analytique.

#### 6.4.1 Effet du nombre de Rayleigh sur $\Psi_0$ pour $\varphi > 0$

La Figure 6-13 illustre l'effet du nombre de Rayleigh  $\bar{R}_T$  sur  $\psi_0$  pour des valeurs de  $2 \geq j \geq -4$  lorsque  $\varphi$  est supérieur à zéro, à savoir :  $\varphi = 0.05$ .

- **1<sup>er</sup> cas:  $j = 0$**

La convection induite purement par effet Soret peut être retrouvée en remplaçant  $j = 0$  dans les équations (4.8) - (4.13) (4.14) (4.22) (4.23) - (4.27), (4.28) (4.29). Pour cette situation, les deux contributions, thermique et solutale sont déstabilisantes ( $\bar{R}_T > 0$  et  $\varphi > 0$ ). En conséquence, l'apparition de la convection se produit à  $\bar{R}_{TC}^{SUP} = 0.645$ , à travers une bifurcation fourche.

- **2<sup>ème</sup> cas:  $j > 0$**

Par l'application d'un flux de concentration  $j > 0$  sur le système, les deux effets, Soret et double diffusion contribuent à déstabiliser le système. Ainsi, comme il est montré sur la courbe  $j = 2$ , l'apparition de la convection se produit à un nombre de Rayleigh supercritique inférieur, à savoir  $\bar{R}_{TC}^{SUP} = 0.392$ .

- **3<sup>ème</sup> cas:  $j < 0$**

De l'autre part, lorsque la valeur de  $j$  est inférieure à zéro, les effets de la double diffusion induite par le flux de concentration stabilisent le système progressivement contrairement aux contributions déstabilisantes des effets thermiques et Soret.

Il est bien connu que, dans cette situation, le début du mouvement peut se produire avec une convection d'amplitude finie à un nombre de Rayleigh thermique sous-critique prédit par l'équation (4.31).

La condition spécifique de la transition entre écoulements supercritiques et sous-critiques, donnée par l'équation.

$$Le_c = \left[ -a \pm \sqrt{a^2 + 4c\left(-\frac{1}{\bar{R}_S} + c - a\right)} \right] / 2c \quad (6.1)$$

$$\text{Où: } \bar{R}_S = \bar{R}_T \varphi Le \quad (6.2)$$

et  $\bar{R}_T$  est donné par l'équation

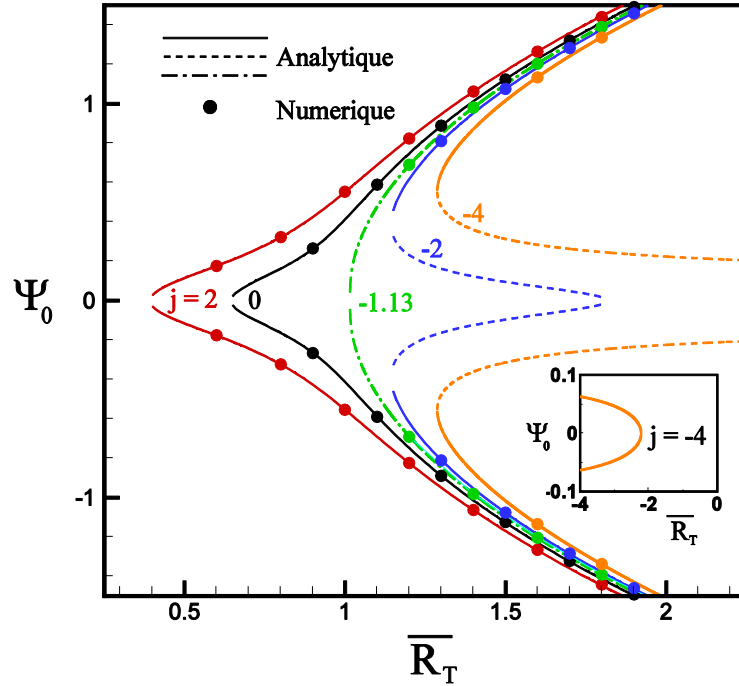
$$\bar{R}_T = \frac{cLe^3 + a(Le^2 + Le + 1)}{Le[c(Le^2 - 1) + a(Le + 1)]} \quad (6.3)$$

peut être exprimé explicitement en termes de flux de concentration critique  $j_c$ , donné par l'équation

$$j_c = -\frac{1 + \varphi[Le^3 + a(Le^2 + Le + 1)]}{a\varphi Le^3} \quad (6.4)$$

À partir de l'équation ci-dessus, on constate que la transition se produit à  $j_c = -1.13$  et la courbe résultante est représentée sur la Figure 6-13 à titre de référence.

Ainsi, pour des valeurs de  $j$  en dessous de la valeur critique  $j_c$ ,  $\bar{R}_{TC}^{Sous} = 1.14$  quand  $j = -2$  et  $\bar{R}_{TC}^{Sous} = 1.29$  lorsque  $j = -4$ . Ces points correspondent aux bifurcations nœud-col, où deux branches émergent.



**Figure 6-13:** Diagrammes de bifurcation en fonction de Rayleigh  $\bar{R}_T$  pour  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.05$ , et différentes valeurs de  $j$  Intensité de l'écoulement  $\Psi_0$   $\text{---}\text{---}\text{---}$  Analytique  $\bullet$  Numérique.

Une branche instable représentée sur la Figure 6-13 par une ligne pointillée relie les nombres de Rayleigh sous-critique et supercritique.

L'autre ligne représentée par une ligne en trait plein est stable et son existence est confirmée par les résultats numériques de toutes les équations gouvernantes.

La courbe  $j = -4$  est caractérisé par le fait que  $\bar{R}_{TC}^{SUP} = -2.22$ .

Un nombre de Rayleigh négatif correspond à une inversion de la direction des flux thermiques, imposés à la couche de fluide de telle sorte que les apports thermiques sont maintenant stabilisants. En conséquence, en diminuant  $\bar{R}_T$  en dessous de la valeur critique,  $\bar{R}_{TC}^{SUP} = -2.22$ , la Figure 6-13 indique l'existence d'une transition de bifurcation supercritique, comme illustrée par la courbe obtenue pour  $j = -4$ .

### 6.4.2 Effet du nombre de Rayleigh sur $\Psi_0$ pour $\varphi < 0$

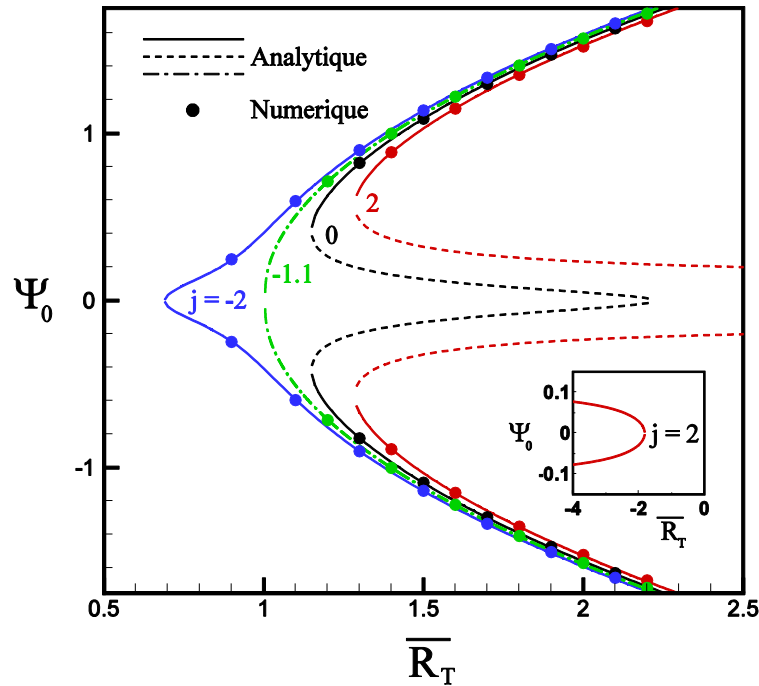
La Figure 6-14 illustre les effets de  $\bar{R}_T$  sur  $\psi_0$  obtenus pour  $\varphi = -0.05$ , c'est à dire lorsque  $\varphi$  est inférieur à zéro. Pour cette situation les forces de flottabilité thermiques, sont déstabilisantes pour  $\bar{R}_T > 0$  stabilisantes pour  $\bar{R}_T < 0$ . Cependant, puisque  $\varphi < 0$ , il s'ensuit que les effets Soret sont stabilisants pour  $\bar{R}_T > 0$  déstabilisants pour  $\bar{R}_T < 0$



alors que les effets double diffusifs sont stabilisants pour  $j > 0$  déstabilisants pour  $j < 0$ .

La courbe de transition, entre la convection supercritique et sous-critique, survenant à  $j = -1.10$ , donnée par l'équation (6.4), est représentée sur la Figure 6-14.

Pour  $\overline{R}_T < 0$  l'apparition de la convection supercritique est possible. Une telle bifurcation est illustrée dans la Figure 6-14 pour le cas  $j = 2$ .



**Figure 6-14:** Diagrammes de bifurcation en fonction de Rayleigh  $\overline{R}_T$  pour  $Le = 10$ ,  $\varphi = -0.05$ , et différentes valeurs de  $j$ . Intensité de l'écoulement  $\Psi_0$    Analytique  Numérique.

### 6.4.3 Effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt et de Sherwood

Les Figures 6-15, 6-16, 6-17, et 6-18 illustrent également les effets de  $\overline{R}_T$ ,  $\varphi$  et  $j$  sur le transfert de chaleur et de masse. Ainsi, on observe sur les Figures 6-15 et 6-17 que, lorsqu'on compare avec la situation de la convection purement induite par effet Soret ( $j = 0$ ) le nombre de Nusselt  $Nu$  est plus élevé pour  $j > 0$  pour lequel les effets double diffusifs et effet Soret s'ajoutent aux effets thermiques pour déstabiliser la couche.

A l'inverse, le nombre Nusselt est plus faible pour  $j < 0$  pour lequel les effets thermiques déstabilisants sont en concurrence avec les effets double diffusifs et effet Soret stabilisants.

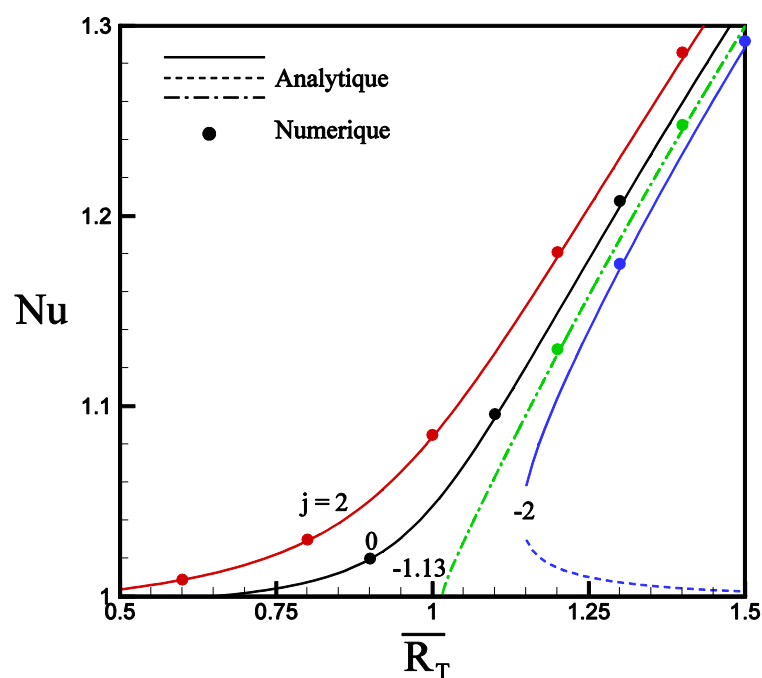
Pour de très grandes valeurs de  $\overline{R}_T$  on trouve que d'après la présente théorie les deux nombres  $Nu$  et  $Sh$  tendent asymptotiquement vers la limite  $Nu = Sh = 10/3$ , que l'on peut déduire des équations (4.24) et (4.25). Ce comportement est une conséquence des conditions aux limites particulières considérées ici.

Les résultats obtenus pour le transfert de masse sont représentées dans les Figures 6-16 et 6-18. On observe que, à la fois pour  $\varphi > 0$  et  $\varphi < 0$ , le nombre de Sherwood pour la convection induite par effet Soret  $j = 0$  est supérieur à celui obtenu pour  $j \neq 0$ , c'est à dire sous l'influence conjuguée de l'effet Soret et effets double diffusifs. Cependant, on remarque que la signification de  $Sh$  pour ces deux cas est différente.

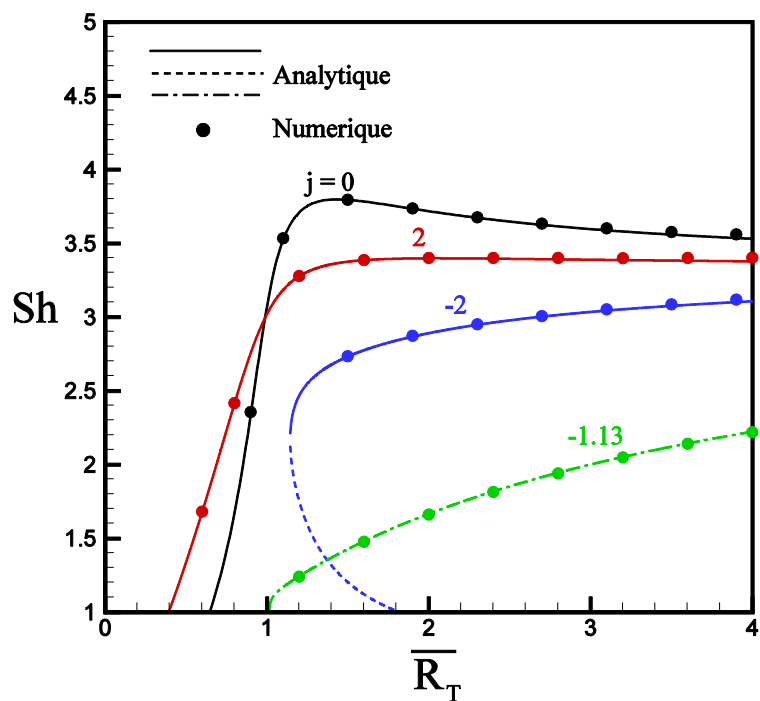
Le nombre de Sherwood pour la convection double diffusive  $j \neq 0$ , représente le transfert de masse à travers les frontières horizontales de la couche résultant de l'action combinée de la convection et de la conduction.

De l'autre part, le nombre de Sherwood pour la convection induite par effet Soret n'a pas la même interprétation puisque les frontières de la couche sont imperméables  $j = 0$ . Ainsi, dans cette situation,  $Sh$  est plutôt lié à la distribution de concentration induite par l'effet Soret et par convection.

- 1<sup>er</sup> cas:  $\varphi > 0$

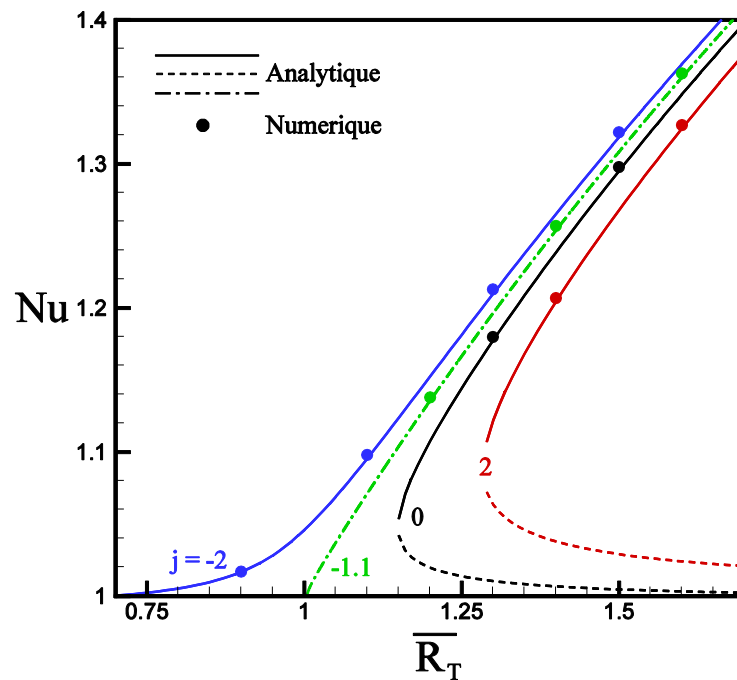


**Figure 6-15 :** Diagrammes du Nombre de Nusselt  $Nu$  en fonction de Rayleigh  $\overline{R}_T$  pour,  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.05$ , et différentes valeurs de  $j$ .

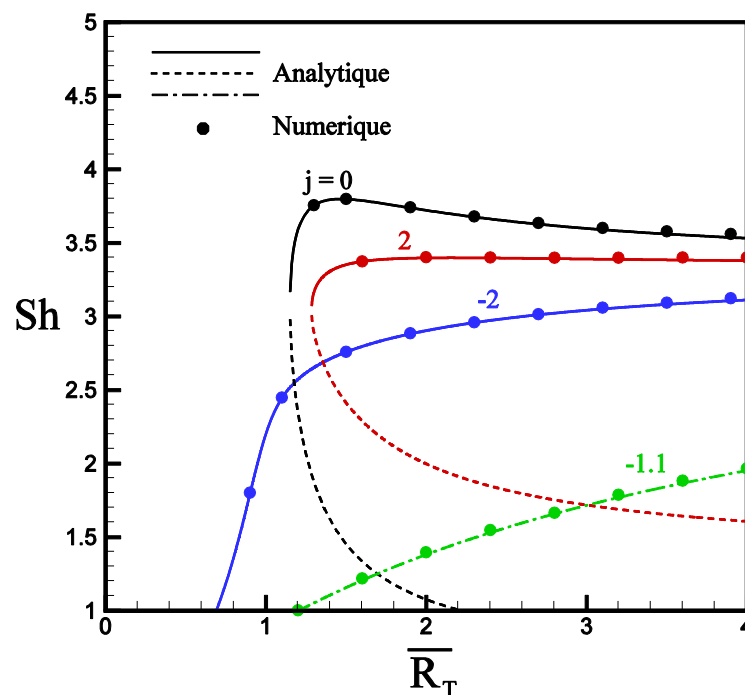


**Figure 6-16 :** Diagrammes du Nombre de Sherwood  $Sh$  en fonction de Rayleigh  $\overline{R}_T$  pour,  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.05$ , et différentes valeurs de  $j$ .

- 2<sup>ème</sup> cas:  $\varphi < 0$



**Figure 6-17** : Diagrammes du Nombre de Nusselt  $Nu$  en fonction de Rayleigh  $\overline{R}_T$  pour,  $Le = 10$ ,  $\varphi = -0.05$ , et différentes valeurs de  $j$ .



**Figure 6-18** : Diagrammes du Nombre de Sherwood  $Sh$  en fonction de Rayleigh  $\overline{R}_T$  pour,  $Le = 10$ ,  $\varphi = -0.05$ , et différentes valeurs de  $j$ .

## 6.5 Convection induite par double diffusion et effet Soret

Les travaux de recherche réalisés dans le domaine de la convection naturelle, dans un système de fluide binaire, voir par exemple, Mamou.M (1998), Yahiaoui. M.A (2007), Fekri. M, (2008), ont traité deux problèmes séparément l'un de l'autre, celui de la double diffusion et celui de la convection induite par l'effet Soret.

Dans le premier type, les conditions thermiques et solutales qui ont été imposées aux frontières de la cavité, étaient à l'origine de l'écoulement induit par les forces d'Archimède. Dans le deuxième cas, les gradients de concentration sont induits par les gradients de température, et ne sont pas dus à l'imposition des conditions aux limites solutales.

Ces deux types de problèmes, sont étudiés dans le présent travail, séparément et combinés. Afin d'illustrer leur influence, des résultats typiques sont représentés sur les Figures 6-19, 6-20, 6-21 pour  $\varphi \geq 0$  et 6-22, 6-23, 6-24 pour  $\varphi \leq 0$ .

Les tracés graphiques, illustrent l'effet du nombre de Rayleigh  $\overline{R}_T$  sur  $\psi_0$ , sur le transfert de chaleur et sur le transfert de masse, obtenus pour les quatre situations suivantes:

- ✓ La convection thermique pure, c'est-à-dire lorsque  $a = 0$  et  $\varphi = 0$ .
- ✓ La convection double diffusive,  $a = 0$  et  $\varphi \neq 0$ .
- ✓ La convection purement induite par effet Soret,  $a = 1$ ,  $\varphi \neq 0$  et  $j = 0$
- ✓ La convection double diffusive avec effet Soret,  $a = 1$ ,  $\varphi \neq 0$  et  $j \neq 0$

### 6.5.1 Effet du nombre de Rayleigh sur: $\psi_0$ , les transferts thermiques et massiques lorsque $\varphi \geq 0$

Les courbes de bifurcation de la Figure 6-19, regroupent les résultats analytiques et numériques, obtenus pour les quatre situations précédentes.

Le cas de la convection thermique pure, correspond à la convection classique de Rayleigh-Bénard. L'état de repos existe jusqu'à un nombre de Rayleigh supercritique donné par l'équation(4.30), à savoir  $Ra_{TC}^{sup} = 720$ , ( $\overline{R}_{TC}^{sup} = 1$ ). Au dessus de cette valeur, on observe l'apparition d'une cellule convective tournant dans le sens horaire ou antihoraire. Un bon accord est observé entre la solution analytique et la solution numérique.

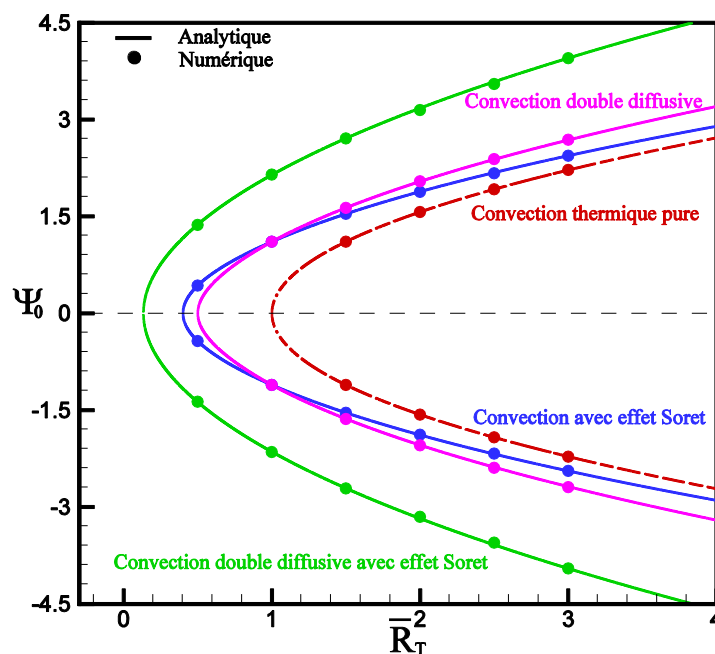
Le cas de la convection double diffusive, est illustré sur la même figure, on remarque que la courbe de bifurcation, est influencée par la présence de la force d'Archimède solutale. Dans ce cas, le nombre de Rayleigh critique de l'apparition de la

convection correspond à  $Ra_{TC}^{sup} = 360$ , ( $\bar{R}_{TC}^{sup} = 0.50$ ), pour cette situation, les forces d'Archimède thermique et solutale sont déstabilisantes.

Sur la courbe représentative de la convection induite par effet Soret, l'apparition de la convection, se produit à un nombre de Rayleigh critique légèrement inférieur à celui de la double diffusion, à savoir  $Ra_{TC}^{sup} = 288$ , ( $\bar{R}_{TC}^{sup} = 0.40$ ) à travers une bifurcation fourche.

La courbe représentative de l'effet simultané de la double diffusion et l'effet Soret, illustre clairement l'influence des deux effets combinés. La bifurcation fourche est observée à une valeur de  $Ra_{TC}^{sup} = 160$ , ( $\bar{R}_{TC}^{sup} = 0.22$ ). On conclue que, la considération de l'effet Soret, contribue d'une manière très signifiante dans l'apparition de la convection, le seuil en est plus petit et cela est du, à l'effet conjugué des effets déstabilisants thermiques et solutales.

Ces résultats, ont été obtenus avec un nombre de Lewis  $Le = 2$ , et  $\varphi = 0.5$ . Les nombres de Rayleigh critiques, de l'apparition de la convection sont en bon accord avec les résultats trouvés par Fekri. M, (2008), à savoir  $Ra_{TC}^{sup} = 360$ , pour le cas de la convection double diffusive et  $Ra_{TC}^{sup} = 290$ , pour la convection induite par effet Soret.

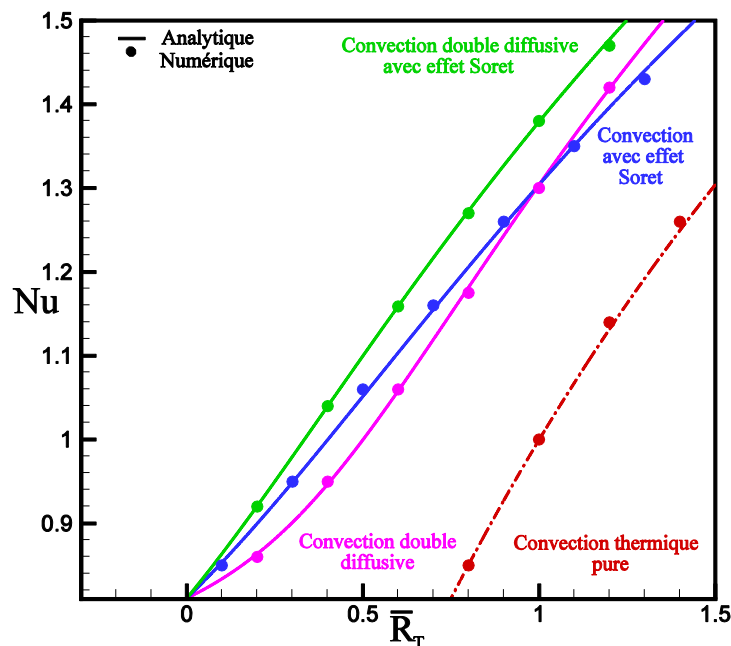


**Figure 6-19 :** Diagrammes de bifurcation en fonction de Rayleigh  $\bar{R}_T$  pour,  $a = 0$  et  $a = 1$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0$  et  $\varphi = +0.5$ .

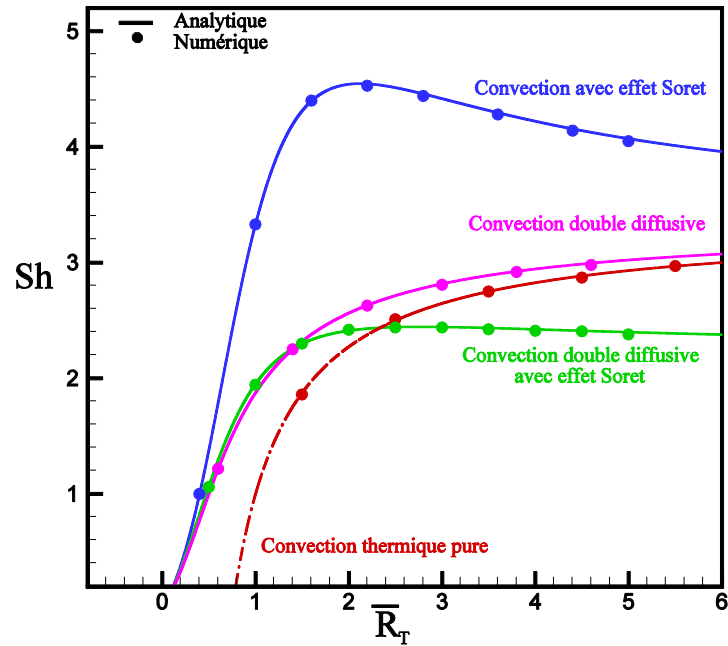
Sur les Figures 6-20, 6-21 , sont représentés les résultats analytiques et numériques, des transferts thermiques et massiques, en terme de Nusselt et Sherwood, obtenus pour  $Le = 2$ , et  $\varphi \geq 0$ , correspondant aux différentes situations de convection.

La Figure 6-20, indique que, le nombre de Nusselt est plus grand dans le cas de la convection double diffusive avec effet Soret, à cause des effets déstabilisants thermique et solutal qui s'ajoutent. Pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh, dépassant le seuil supercritique, la convection double diffusive devient plus intense, ce qui se traduit par une augmentation du nombre de Nusselt correspondant.

Les courbes de la Figure 6-21, montrent que le nombre de Sherwood, est beaucoup plus grand pour la convection avec effet Soret, ce cas correspond à des frontières imperméables, et le nombre de Sherwood est lié à la distribution de concentration induite par effet Soret et par convection. Cependant, lorsque les effets sont combinés, le nombre de Sherwood diminue considérablement.



**Figure 6-20 :** Diagrammes du nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh  $\bar{R}_T$  pour,  $a = 0$  et  $a = 1, Le = 2, \varphi = 0$  et  $\varphi = +0.5$ .



**Figure 6-21 :** Diagrammes du nombre Sherwood en fonction de Rayleigh pour,  $a = 0$  et  $a = 1, Le = 2, \varphi = 0$  et  $\varphi = +0.5$ .

### 6.5.2 Effet du nombre de Rayleigh sur: $\psi_0$ , les transferts thermiques et massiques lorsque $\varphi \leq 0$

Les Figures 6-22, 6-23, 6-24, représentent les résultats obtenus pour un rapport des forces de flottabilité négatif, lorsque les forces d'Archimède solutales et thermiques sont opposées. Dans cette situation, la convection se développe à des nombres de Rayleigh plus élevés à travers une bifurcation sous-critique (Figure 6-22), marquée par un seuil d'amplitude finie.

Pour le nombre de Lewis considéré, les nombres de Rayleigh sous-critiques correspondant aux différentes situations étudiées, sont prédits par l'équation (4.31), à

savoir:  $Ra_{TC}^{Sous} = 2160$  ( $\overline{Ra}_{TC}^{Sous} = 3$ ) pour la convection double diffusive ( $a = 0$ ),

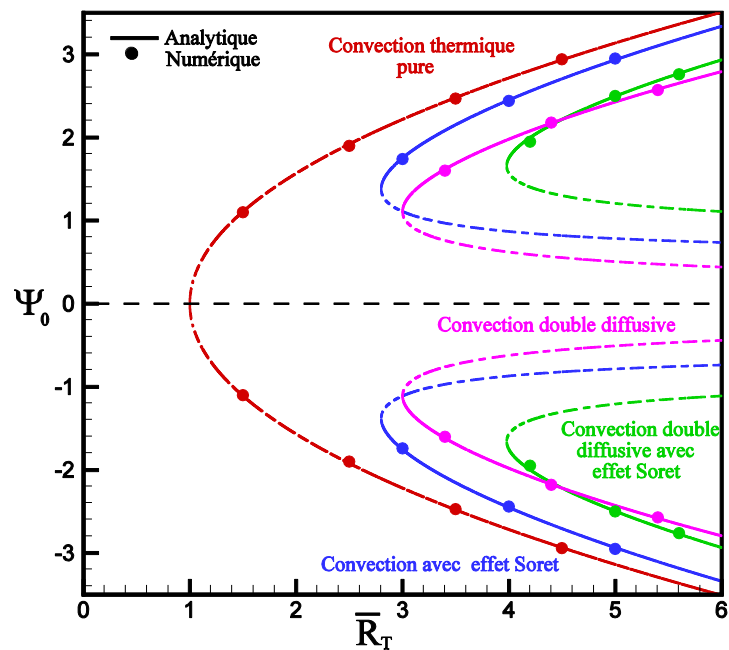
$Ra_{TC}^{Sous} = 2016$  ( $\overline{Ra}_{TC}^{Sous} = 2.8$ ) dans le cas de la convection induite par effet Soret

( $a = 1, j = 0$ ), et  $Ra_{TC}^{Sous} = 2880$  ( $\overline{Ra}_{TC}^{Sous} = 4$ ) correspondant à la convection double diffusive avec effet Soret ( $a = 1, j \neq 0$ ).

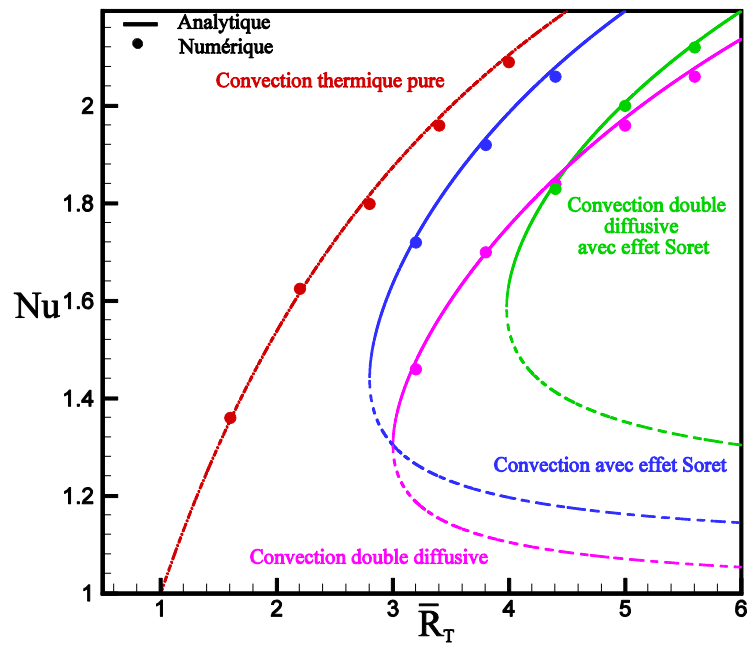
Le nombre de Nusselt diminue lorsque les effets double diffusifs et effet Soret s'ajoutent et sont stabilisants et en concurrence avec les effets thermiques (Figure 6-23), cependant pour des nombres de Rayleigh plus élevés, les effets thermiques contribuent à déstabiliser le système ce qui se traduit par une légère augmentation du nombre de Nusselt. Sur la Figure 6-24, le nombre de Sherwood pour la convection induite par effet



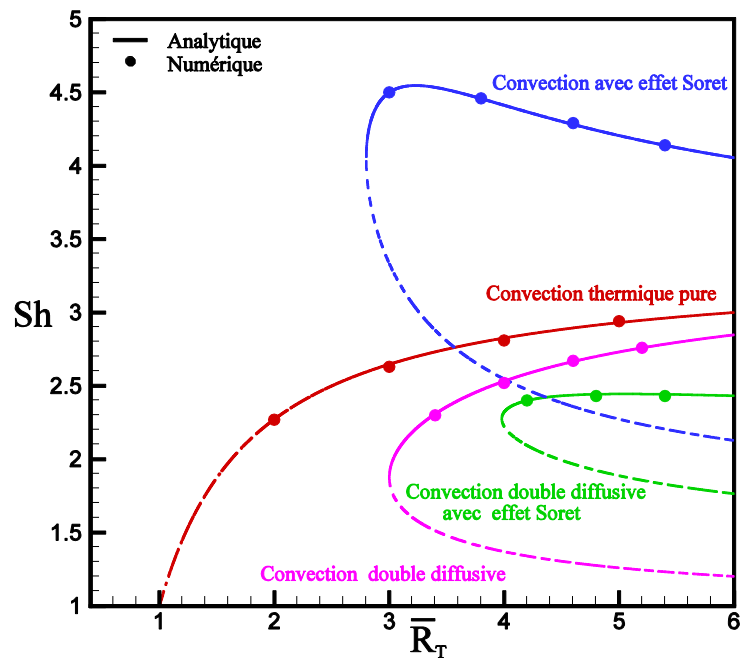
Soret est supérieur à celui obtenu pour les trois autres situations. Tandis que sa valeur pour le cas de la convection double diffusive avec effet Soret, est la plus petite. Cependant elle peut varier pour ce cas selon la valeur de  $j$ . Les tests réalisés pour différentes valeurs de  $j$ , nous ont permis de conclure que le nombre de Sherwood augmente avec la diminution de  $j$ . Les effets du flux de masse sont déstabilisants dans ce cas, et l'influence de l'effet Soret en est plus importante.



**Figure 6-22 :** Diagrammes de bifurcation en fonction de Rayleigh  $\bar{R}_T$  pour,  $a = 0$  et  $a = 1$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0$  et  $\varphi = -0.5$ .



**Figure 6-23 :** Diagrammes du nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh  $\bar{R}_T$  pour,  $a = 0$  et  $a = 1, Le = 2, \varphi = 0$  et  $\varphi = -0.5$ .



**Figure 6-24 :** Diagrammes du nombre de Sherwood en fonction de Rayleigh  $\bar{R}_T$  pour,  $a = 0$  et  $a = 1, Le = 2, \varphi = 0$  et  $\varphi = -0.5$ .

## 6.6 Influence du nombre de Lewis

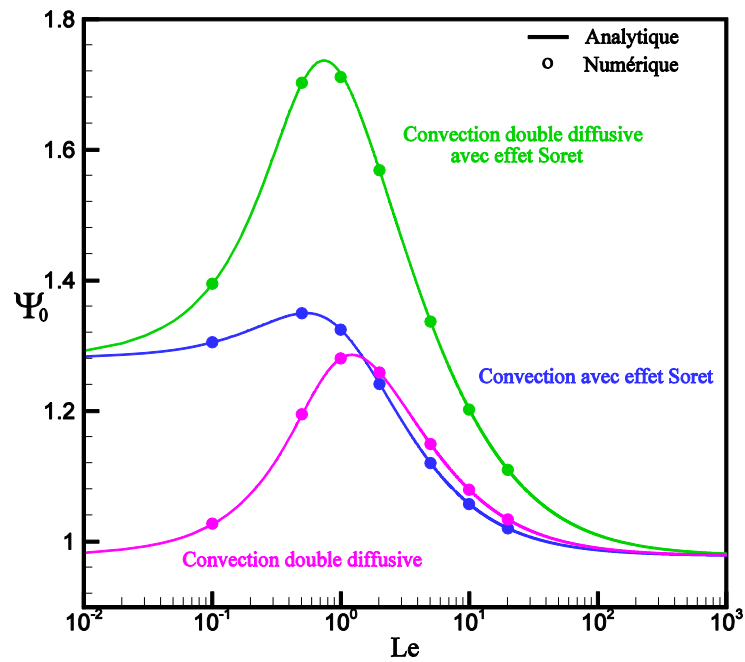
Le nombre de Lewis est par définition, le rapport de la diffusivité thermique du fluide sur la diffusivité solutale. Le choix de sa valeur, influe considérablement sur l'intensité de l'écoulement et sur les transferts thermiques. Le contrôle de l'écoulement peut selon la valeur choisie, être dominé soit par les effets solutaux, soit par les effets thermiques, et dans les deux cas les phénomènes engendrés, méritent une attention particulière afin d'en trouver la signification physique correspondante.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'effet du nombre de Lewis, sur la force de l'écoulement  $\Psi_0$ , sur le nombre de Nusselt et sur le nombre de Sherwood, pour  $Ra = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$  dans les cas: convection double diffusive, convection purement induite par effet Soret, et convection double diffusive avec effet Soret.

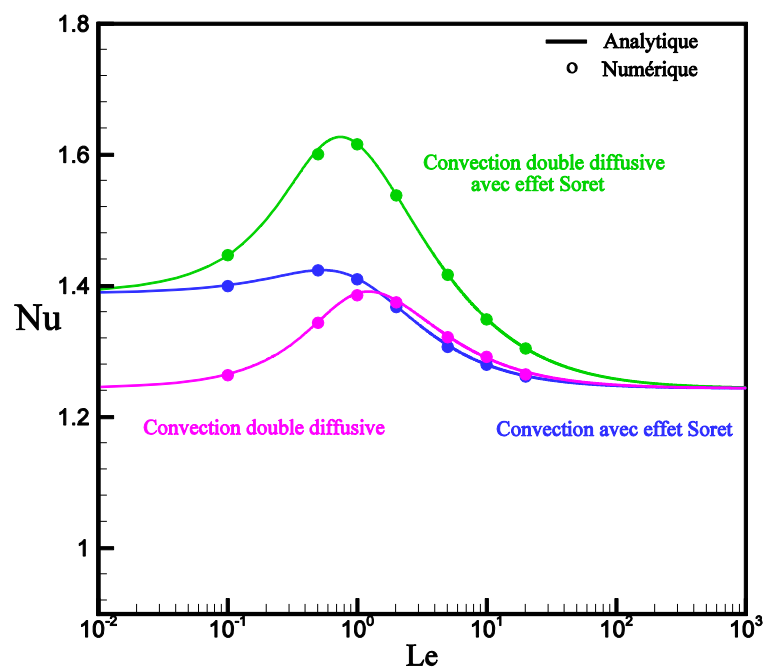
L'influence du nombre de Lewis sur la fonction de courant, est illustré sur la Figure 6-25, on remarque que cet effet est plus important pour le cas de double diffusion avec effet Soret, que pour les cas de, l'effet Soret ou de la double diffusion. Pour de faibles valeurs de lewis, les effets solutaux contrôlent entièrement l'écoulement convectif, et puisque les forces d'Archimède solutales et thermiques sont coopérantes ( $\varphi > 0$ ), l'intensité de l'écoulement atteint un maximum pour  $0.8 < Le < 1$ , pour décroître vers une valeur constante. Lorsque le nombre de lewis dépasse la valeur de 100, l'effet Soret n'a aucune influence sur l'écoulement convectif.

La courbe de la Figure 6-26 montre que le nombre de Nusselt, pour les faibles valeurs de lewis augmente légèrement, en passant par un maximum, lorsque  $Le \leq 1$ , puis décroît vers une valeur constante. L'effet du nombre de Lewis pour la convection double diffusive avec effet Soret est plus important, lorsque les effets solutaux et thermiques sont coopérants et déstabilisent le système. Quant au nombre de Sherwood (Figure 6-27), il augmente considérablement au début lorsque le nombre de Lewis s'accroît et tend par la suite vers une valeur constante. On remarque que pour la convection induite par effet Soret, le nombre de Sherwood est plus important, et l'allure de la courbe passe par un maximum pour une valeur de Lewis supérieure à l'unité, puis décroît pour rejoindre la courbe de la double diffusion. Le cas des effets conjugués de double diffusion et effet Soret présente un cas différent, comme il a été discuté précédemment. Le nombre de Sherwood augmente légèrement et pour les valeurs de Lewis  $Le \geq 10$ , tend vers une valeur constante qui dépasse peu l'unité.

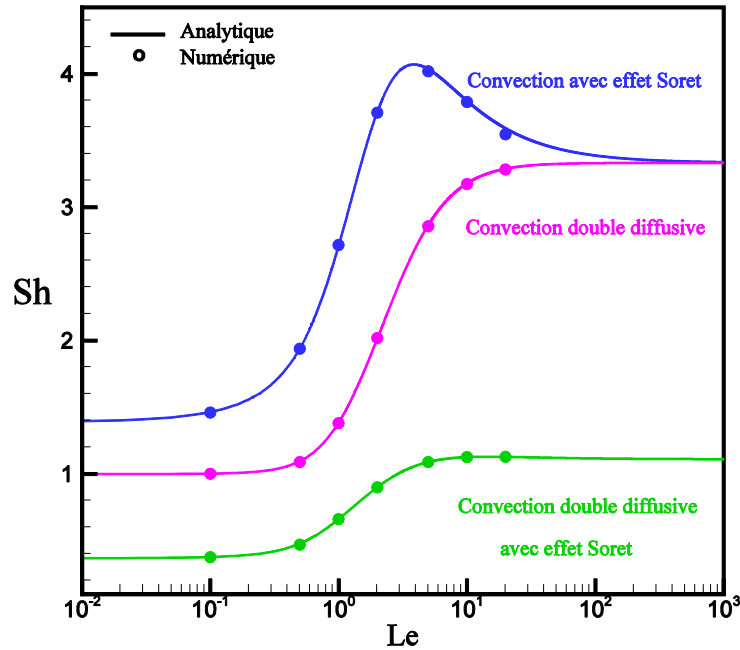
Les solutions analytiques sont en bon accord avec les résultats numériques.



**Figure 6-25 :** Influence du nombre de Lewis sur  $\Psi_0$  pour  $Ra = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$  pour les cas: convection double diffusive, convection purement induite par effet Soret, et convection double diffusive avec effet Soret.



**Figure 6-26 :** Influence du nombre de Lewis sur le nombre de Nusselt pour  $Ra = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$  pour les cas : convection double diffusive, convection purement induite par effet Soret, et convection double diffusive avec effet Soret.



**Figure 6-27 :** Influence du nombre de Lewis sur le nombre de Sherwood pour  $Ra = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$  pour les cas : convection double diffusive, convection purement induite par effet Soret, et convection double diffusive avec effet Soret.

## 6.7 Effet du rapport des forces de flottabilité thermiques et solutales sur $\Psi_0$

Une autre vue des effets des forces de flottabilité thermiques et solutales aidant et opposant est présentée sur les Figures 6-19 et 6-20 en termes de  $\Psi_0$  par rapport à  $j$  et  $\bar{R}_T$ , pour  $Le = 10$  et  $\varphi = 0.5$  et  $\varphi = -0.5$ .

### 6.7.1 Forces de flottabilité déstabilisantes

Le cas de  $\bar{R}_T > 0$ , pour lequel les forces de flottabilité thermiques (flux de chaleur appliqué à la partie inférieure de la couche), ont un effet déstabilisant sera d'abord discuté. Pour cette situation, les forces de flottabilité solutales induites par l'effet Soret sont déstabilisantes pour  $\varphi > 0$ , stabilisantes pour  $\varphi < 0$ .

De même, celles induites par le flux de masse sont déstabilisantes pour  $j > 0$  stabilisantes pour  $j < 0$ . Naturellement, les forces de flottabilité solutales nettes résultent de la somme de ces deux contributions. Ainsi, on voit sur la Figure 6-28 que pour  $\varphi > 0$ , le début du mouvement se produit à travers une bifurcation supercritique pour  $j > 0$  tant que les forces thermiques et solutales sont déstabilisantes. Cette situation est illustrée par la courbe de  $\bar{R}_T = 0.1$ , d'autre part, lorsque  $j$  est

inférieur à zéro, la contribution du flux de masse de plus de l'effet Soret devient progressivement plus importante, de telle sorte que les forces de flottabilité solutales nettes deviennent finalement stabilisantes.

Comme il a été discuté en détail par Mamou et Vasseur (1999), lorsque les forces thermiques et solutales s'opposent l'un à l'autre, le résultat du début de l'apparition du mouvement se fait par une bifurcation sous-critique, voir la courbe  $\bar{R}_T = 2$ , à condition que l'agent stabilisant soit la composante de diffusion lente ( $Le > 1$ ). La courbe de transition entre bifurcation supercritique et sous-critique, est prévue par l'équation (6.4), à savoir:  $\bar{R}_T = 1.069$  et est représentée sur la Figure 6-28.

De même, la Figure 6-29 montre que pour  $\varphi < 0$ , la courbe de transition entre bifurcation supercritique et sous-critique, est prévue par l'équation (6.4), se produisant maintenant à  $\bar{R}_T = 0.957$ .

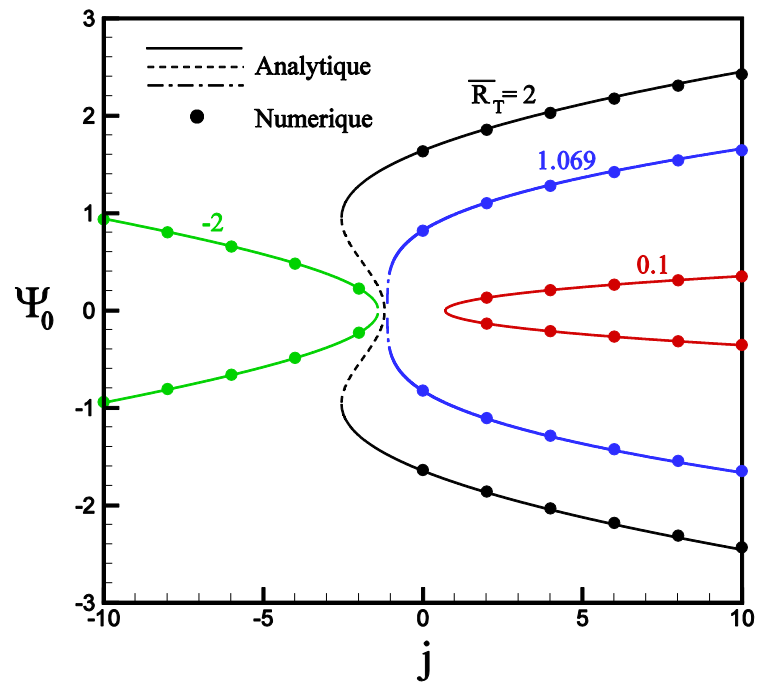
Pour des valeurs inférieures (supérieures) de  $\bar{R}_T$  sous-critique (supercritique) les bifurcations sont possibles pour  $j > 0$  ( $j < 0$ ).

### 6.7.2 Forces de flottabilité stabilisantes

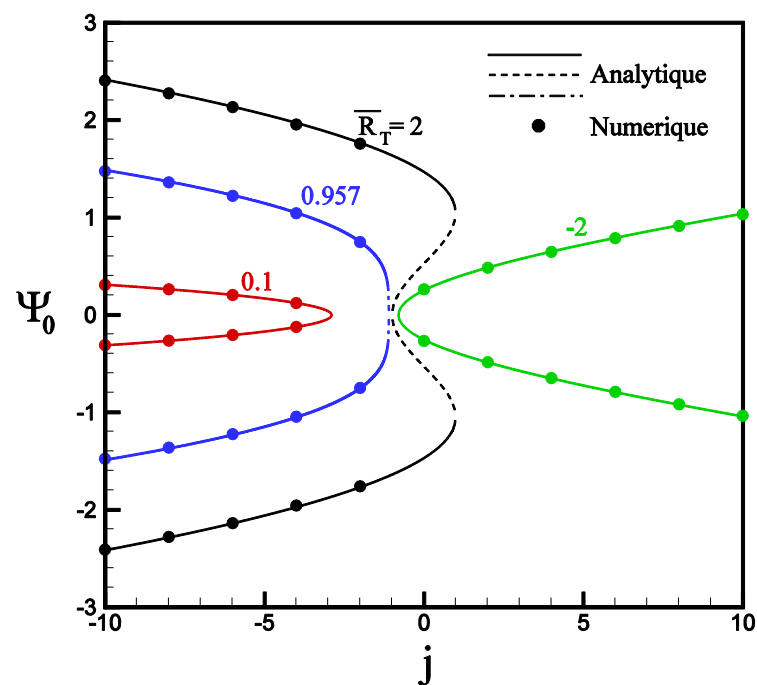
Dans les Figures 6-28 et 6-29, des résultats sont également présentés pour  $\bar{R}_T < 0$ , pour lequel la direction des flux de chaleur et de masse et, en Figure 2-1b, est inversée.

Ainsi, le flux de chaleur appliqué sur le dessus de la couche est maintenant dans stabilisant et la seule façon pour observer le mouvement est de créer une force de flottabilité solutale nette déstabilisante.

Des résultats typiques sont présentés pour  $\bar{R}_T = -2$  les Figures 6-28 et 6-29, et on a observé que les bifurcations qui en résultent sont supercritiques, puisque pour cette situation l'agent stabilisant n'est plus la composante de diffusion lente.



**Figure 6-28 :** Diagrammes de bifurcation en termes de  $\Psi_0$  en fonction de Rayleigh  $\bar{R}_T$  pour,  $Le = 10$ ,  $a = 1$ ,  $\varphi = +0.5$ , et différentes valeurs de  $j$ .



**Figure 6-29 :** Diagrammes de bifurcation en termes de  $\Psi_0$  en fonction de Rayleigh  $\bar{R}_T$  pour  $Le = 10$ ,  $a = 1$ ,  $\varphi = -0.5$ , et différentes valeurs de  $j$ .

## 6.8 Analyse de stabilité linéaire

Dans cette section, la stabilité du model de l'écoulement parallèle, dérivée dans la présente étude, est examinée sur la base de la théorie de la stabilité linéaire. Il est prévu que, lors de l'augmentation de l'intensité de l'écoulement unicellulaire stable, ce dernier deviendra éventuellement instable.

La transition se fait par une bifurcation de Hopf, à un nombre de Rayleigh critique,  $Ra_{TC}^{Hopf}$ , qui dépend de la valeur des paramètres de contrôle, à savoir  $\varphi, j, Le, Pr$  et  $a$ .

### 6.8.1 Interprétation des résultats de l'analyse de stabilité linéaire

Les courbes représentatives pour le nombre Rayleigh de Hopf critique  $\bar{R}_{TC}^{Hopf}$ , résultent de l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement convectif, prédit par l'approximation de l'écoulement parallèle.

Le plan  $(\bar{R}_{TC}, \varphi)$  est divisé en quatre quadrants. Les régions I et II correspondent respectivement à  $\bar{R}_T > 0$  et  $\bar{R}_T < 0$  pour  $j > -1.6$  tandis que les régions III et IV correspondent respectivement à  $\bar{R}_T < 0$  et  $\bar{R}_T > 0$  pour  $j < -1.6$ .

Selon l'équation. (4.30), pour  $j = -1.6$ , le nombre de Rayleigh critique,  $\bar{R}_{TC}^{SUP}$  pour le début du mouvement est égale à l'infini. Il est aussi observé à partir de la Figure 6-30 que, pour  $j = -1.1$  trois nombres de Rayleigh critiques coexistent, à savoir: le supercritique, sous-critique et oscillant.

La discussion des résultats est présentée ci-dessous, en analysant en premier lieu le cas des quadrants I et IV, suivi par les quadrants II et III comme deuxième cas.

#### 6.8.1.1 Premier cas: quadrant I et IV

On va aborder en premier, le cas d'une couche chauffée par le bas (quadrant I et IV). Pour cette situation, comme  $\varphi > 0$ , les forces de flottabilité solutales induites par l'effet Soret et le flux de concentration  $j$ , sont coopératifs avec les forces de flottabilité thermiques, à condition que  $j > 0$ . Pour  $j < 0$  les forces de flottabilité solutales résultant de l'imposition du flux de concentration  $j$  sont en opposition avec celles résultant à la fois du flux de chaleur et l'effet Soret.

Ainsi, en diminuant progressivement la valeur de  $j$  en dessous de zéro, une valeur sera atteinte, à savoir:  $j = -1.1$ , où les forces de flottabilité solutales nettes



devront contrer celles thermiques. Ainsi, selon la théorie de la stabilité dans le quadrant I, le début du mouvement se produit à un nombre de Rayleigh supercritique pour  $j > -1.1$ .

Cependant, pour  $-1.6 < j < -1.1$ , la théorie non-linéaire de l'écoulement parallèle prévoit l'apparition d'une bifurcation sous-critique. Le même type de bifurcation majoritaire dans la région IV où, en outre, l'apparition éventuelle des écoulements oscillatoires ( $\sigma = 0$ ) est prédite par l'analyse numérique de l'analyse de stabilité linéaire discutée dans le chapitre 5.

Comme les forces de flottabilité induites par les effets thermiques et effet Soret sont opposées à de  $j < 0$  dans le quadrant IV, l'apparition de la convection se produit à travers une bifurcation sous-critique.

Une comparaison est faite sur la Figure 6-30 entre les prédictions numériques obtenues avec ce dernier, pour le nombre de Rayleigh supercritique, et la solution analytique, donnée par l'équation (4.30). L'accord entre ces deux résultats est excellent.

### 6.8.1.2 Deuxième cas: quadrant II et III

Le cas d'une couche chauffée par le bas (quadrant II et III) sera maintenant discuté. Dans la région II, pour  $j > -1.6$  les forces de flottabilité solutales nettes sont stabilisantes telles que le système est inconditionnellement stable et le fluide au repos. Pour  $j < -1.6$  les forces de flottabilité solutales nettes sont déstabilisantes, par contre celles thermiques sont stabilisantes.

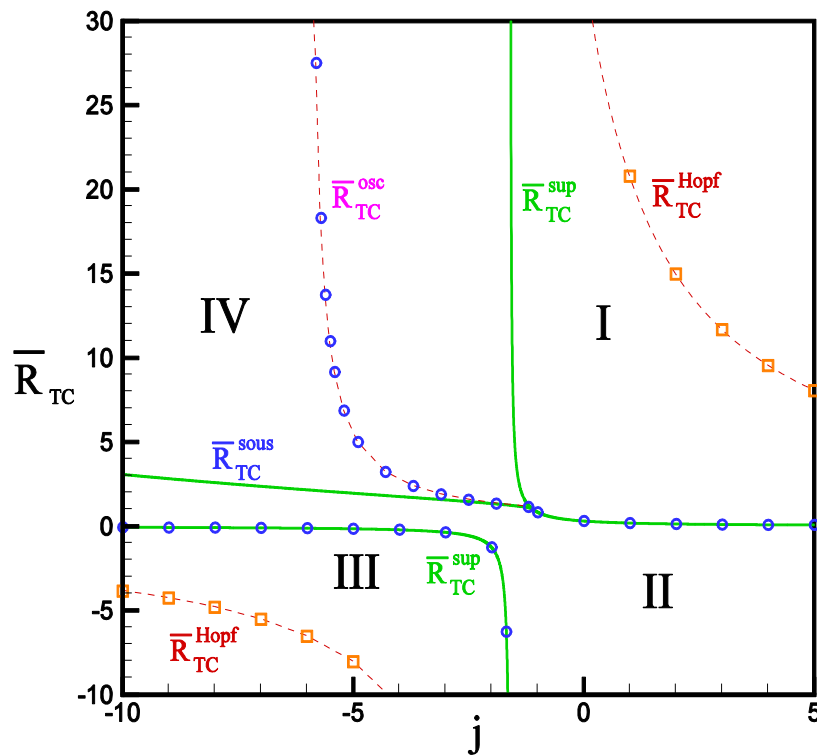
En conséquence, étant donné que le nombre de Lewis est supérieur à l'unité, l'apparition du mouvement se fait pour un nombre de Rayleigh supercritique et non par un sous-critique.

Les nombres de Rayleigh de Hopf numériquement déterminés sont représentés sur la Figure 6-30.

Un test numérique a été réalisé afin de vérifier la validité de ces résultats. Le code numérique développé pour résoudre toutes les équations gouvernantes a été exécuté dans les conditions  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 10$ ,  $a = 1$ ,  $A = 6$ , et  $Ra_T \approx 13000$ , c'est à

dire à un nombre de Rayleigh environ 20% supérieur à la valeur  $Ra_{TC}^{Hopf} = 10782$  prévu par la théorie de stabilité linéaire.

Les écoulements résultants observés restent quasiment parallèles, mais le noyau de la cellule oscille légèrement.



**Figure 6-30:** Diagrammes de stabilité dans le plan  $(\bar{R}_{TC}, j)$  pour le cas  $Le = 10, \varphi = 0.2$  et  $a = 1$   
 ———— Stabilité linéaire de l'état de repos.  
 - - - - - Stabilité linéaire de la solution de l'écoulement parallèle.

# Conclusion Générale

## Conclusion générale

Dans cette thèse, une étude analytique et numérique de la convection naturelle dans une cavité peu profonde, remplie d'un mélange binaire, est menée.

Un flux de chaleur constant a été appliqué sur les frontières horizontales de la couche, tandis que celles verticales sont adiabatiques. Les forces de flottabilité solutales sont supposées être générées par l'action combinée de l'effet Soret et l'imposition d'un flux de concentration constant sur les parois horizontales (convection double diffusive).

Les conditions à la fois aidant et opposant aux forces de flottabilité thermiques et de concentration ont été étudiées pour une large gamme de paramètres de contrôle, à savoir: le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , le rapport de flottabilité  $\varphi$ , le nombre de Lewis  $Le$ , le nombre de Prandtl  $Pr$ , le rapport de forme de la cavité  $A$ , le flux de concentration  $j$ , et le type de convection  $a$ .

Les principales conclusions de la présente étude sont les suivantes:

1. L'apparition de la convection stationnaire, supercritique et sous critique a été déterminée analytiquement en termes des paramètres de contrôle du problème, à savoir: le rapport de flottabilité  $\varphi$ , le nombre de Lewis  $Le$ , le flux de concentration  $j$  et la constante  $a$ .
2. Une solution analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, est dérivée dans le cas d'une couche infinie ( $A \gg 1$ ). Le modèle approché, en dépit de sa relative simplicité, prédit avec succès les différents types d'écoulements rencontrés dans la présente étude. Cela inclut les flux aidants et les flux opposants.
3. La résolution de toutes les équations gouvernantes, par voie numérique basée sur la méthode des volumes de contrôle a été adoptée, et a confirmé la validité du modèle analytique proposé. Les solutions ont conduit à plusieurs résultats, illustrant l'influence des paramètres de contrôle sur les nombres de Nusselt et de Sherwood, ainsi que sur l'intensité de la fonction de courant. Un bon accord est observé entre les prévisions analytiques et simulations numériques.

4. Une analyse de stabilité linéaire de la solution de l'écoulement parallèle a été effectuée et le seuil de bifurcations de Hopf,  $\overline{R}_{TC}^{Hopf}$ , est obtenu numériquement. De cette façon, il a été possible de délimiter les limites définissant les régions des instabilités stationnaires et oscillatoires.

## Perspectives

Dans une thématique aussi riche que celle-ci, de nombreuses perspectives restent bien ouvertes.

Du point de vue numérique, l'étude du problème en configuration 3D pourrait prolonger ce travail de thèse.

L'effort doit être porté sur la recherche de nouvelles configurations à la fois géométriques et physiques et étudier l'influence des conditions aux limites, le cas d'une cavité présentant une surface libre en est un exemple, dans ce cas il faudrait tenir compte des effets de tension de surface qui s'exercent sur la surface libre. Un autre cas pourrait être intéressant où les effets de rotation, ou d'un champ magnétique seront pris en considération.

En dernier lieu, la possibilité d'envisager une réalisation expérimentale serait intéressante pour valider les résultats analytiques et numériques obtenus.

Références

Bibliographiques

## A

- [Amirhossein 2013] **A.Ahadi, S.V.Varenbergh, M. Z.Saghir**, "Measurement of the Soret coefficients for a ternary hydrocarbon mixture in low gravity environment", *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 138, 2013.

## B

- [Baines 1969] **P.G.Baines, A.E.Gill**, "On the thermohaline convection with linear gradients" *J. Fluid Mech.* 37, pp.289–306, 1969.
- [Bejan 1978] **A.Bejan, C.L.Tien**, "Laminar Natural Convection Heat Transfer in a Horizontal Cavity with Different End Temperatures", *J. Heat Transfer*, Vol. 100, pp. 641-647,1978.
- [Bejan 1985] **A.Bejan, K.R Khair**, "Heat and Mass Transfer by Natural Convection in a Porous Medium", *J. International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 2, pp. 909-918, 1985.
- [Bennacer 2003] **R.Bennacer, A.Mahidjiba, P.Vasseur, H.Beji, R.Duval**, "The Soret effect on convection in a porous domain under cross temperature and concentration gradient", *Int.J. Numerical Methods Heat and Fluid Flow* 13, pp.199-215, 2003.
- [Bhadauria 2006] **B.S.Bhadauria**, " Temperature modulation of double diffusive convection in a horizontal fluid layer", *Zeitschrift fur Naturforschung* 61, pp.335-344, 2006.

## C

- [Cormarck 1974] **D.E.Cormarck, L.G. Leal, J. Imberger**, "Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated end Walls, part 1: Asymptotic Theory", *J. Fluid Mechanics.* 65. pp. 209-230, 1974.

## D

- [DeGroot 1969] **S.R.DeGroot, P.Mazur**, "Non equilibrium thermodynamics" *Amsterdam, North-Holland Pub*, 1969.

## F

- [Fakhreddine 2017] **S.O.Fakhreddine, R. El Cafsi** , " Competition between the lid driven and the natural convection of nanofluids taking into consideration the Soret effect", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 114, pp. 1341–1349, 2017.
- [Fekri 2008] **M. Fekri**, "Convection naturelle dans une couche horizontale d'un fluide binaire confiné par des parois poreuses minces", *Thèse de maîtrise* , *École Polytechnique de Montréal, Canada*, 2008.

## G

- [Gaponenko 2014] **Y. Gaponenko, A. Mialdun, V. Shevtsova** , "Experimental and numerical analysis of mass transfer in a binary mixture with Soret effect in the presence of weak convection", *The European Physical Journal E Eur. Phys. J. E* 37:90, 2014.
- [Garaud 2013] **P. Garaud**, "Double diffusive convection", *EAS Publications Series*, 63 pp.285-295, 2013.
- [Garaud 2018] **P. Garaud**, "Double-Diffusive Convection at Low Prandtl Number", *Ann. Rev. Fluid Mech.* 50,pp. 275-298, 2018.
- [Gray 1976] **D. Gray, A. Giorgini**. "The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases", *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 19, Issue 5,pp.545-551,May 1976.

## H

- [Hasnaoui 1991] **M. Hasnaoui** "Etude numérique de la convection dans un champ de cavité", *Thèse de doctorat*, *Ecole polytechnique de Montréal Canada*, 1991.
- [Huppert 1976] **H.E.Huppert, D.R. Moore**, "Nonlinear double-diffusive convection", *J. Fluid Mech.* 78, pp.821–854,1976.
- [Huppert 1981] **H.E.Huppert, J.S. Turner**, "Double diffusive convection", *J. Fluid Mech.* 106,pp. 299-329.
- [Hurle 1971] **D.T.J.Hurle, E. Jakeman**, "Soret-driven Thermosolutal Convection" , *J. Fluid Mech.* 47,pp. 667-687.



**J**

- [Jun 2012] **H.Jun, D. Henry, X.Y.Yin, B.H.Hamda** , "Linear biglobal analysis of Rayleigh-Bénard instabilities in binary fluids with and without throughflow", *Journal of Fluid Mechanics*, 713, pp.216-242, 2012.

**K**

- [KamotaniL 1985] **Y. KamotaniL, L. W. Wang, S. Ostrach, H.D. Jiang** "Experimental study of natural convection in shallow enclosures with horizontal temperature and concentration gradients", *International Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 28, Issue 1*, pp.165-173, January 1985.
- [Kim 2007] **M.C.Kim., C.K.Choi**, "Analysis of onset of soret –driven convection by the energy method" *phys.Rev,E* 76, pp.363021-363026, 2007.
- [Knobloch 1981] **E.Knobloch, M.Proctor** ,"Nonlinear periodic convection in double-diffusive systems", *J. Fluid Mech* 108, pp.291–316, 1981.

**L**

- [ Larre 1997] **J.P.Larre, J.K. Platten, G. Chavepeyer**, " Soret effect in ternary systems heated from below", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40, pp.545-555, 1997.
- [Lee 1988] **J. Lee, M. T. Hyun**, "Experiments on thermosolutal convection in a shallow rectangular enclosure", *Experimental Thermal and Fluid Science* 1, pp.259-265, 1988.
- [Lee 1988] **J. Lee, M. T. Hyun et K. W. Kim** , "Natural convection in confined fluids with combined horizontal temperature and concentration gradients", *J. Heat Mass Transfer, Vol 31, N<sup>o</sup> 10*, pp. 1969-1977, 1988.
- [Lee 1990] **J. Lee, M. T. Hyun et Y. S. Kang** , "Confined natural convection due to a lateral heating in a staly stratified solution", *J. Heat Mass Transfer. Vol.33, N<sup>o</sup> 5*, pp. 869-875, 1990.

- [Lyubimova 2017] **T.P. Lyubimova , E.S. Sadilov, S.A. Prokopev** , "Onset of Soret-induced convection in a horizontal layer of ternary fluid with fixed vertical heat flux at the boundaries " *The European physical journal, Eur. Phys. J. E* ,40: 15.10.1140 /epje/i2017pp.11505-9, 2017.

## M

- [Mamou 1993] **M.Mamou**, "Convection naturelle dans une cavité inclinée à partition multiples", *Thèse de Maîtrise, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada*. pp 45,1993.
- [Mamou 1996] **M.Mamou, P. Vasseur and E.Bilgen** "Analytical and Numerical Study of Double Diffusion Convection in a Vertical Enclosure", *Heat and Mass Transfer*, 32, pp.115-125,1996.
- [Mamou 1998] **M.Mamou**, "Convection thermosolutale dans des milieux poreux et fluide confinés", *Thèse de Philosophiae Doctor, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada*. 1998.
- [Mamou 1999] **M.Mamou, P.Vasseur**, "Thermosolutal bifurcation phenomena in porous enclosures subject to vertical temperature and concentration gradients", *J. Fluid Mech.* 395, pp.61-87, 1999.
- [Mamou 2001] **M. Mamou, P. Vasseur and M.Hasnaoui**," On numerical stability analysis of double-diffusive convection in confined enclosures", *J. Fluid Mech.* 433, pp.209-250, 2001.

## N

- [Nield 1967] **D.A.Nields**, "The thermohaline Rayleigh–Jeffreys problem", *J. Fluid Mech* 29, pp.545–548, 1967.

## O

- [Ouiriami 2005] **M.Ouiriami,P.Vasseur A.Bahloul**, "Natural convection of a binary fluid in a slightly inclined shallow cavity", *Numerical Heat Transfer* 48, pp.547-565, 2005.
- [Ouiriami 2006] **M.Ouiriami,P.Vasseur A.Bahloul, L. Robillard**, "Natural convection in a horizontal layer of a binary mixture", *Int. J. Thermal Sciences* 45, pp.752-759, 2006.

## P

- [Patankar 1980] **S.V.Patankar**, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Taylor&Francis", *Hemisphere, Washington, DC*, 1980.
- [Platten 1973] **J.K.Platten, G.Chavepeyer**, "Oscillatory motion in Bénard cell due to the Soret effect", *J. Fluid Mech.* 60, pp.305, 1973.
- [Platten 1984] **J.K.Platten, J.C.Legros**, " Convection in Liquids", *Springer, Berlin*, 1984.
- [Proctor 1981] **M.R.E. Proctor**, "Steady subcritical thermohaline convection", *J. Fluid Mech.* 29, pp.105, 1981.
- [Prud'homme 2002] **M. Prud'homme, T. H. Nguyen**, "Parallel flow stability under a uniform heat flux: effect of the Prandtl number", *International Communications in Heat and Mass Transfer* 29, pp.749-756, 2002.

## S

- [Schechter 1972] **R.S.Schechter, I.Prigogine, J.R. Hamm**, "Thermal diffusion and convective stability", *Phys. Fluids*, 15, 379, 1972.

- [Schechter 1974] **R.S.Schechter, M.G.Verlarde, J.K.Platten**, "The two components Bénard problem", *Adv. Chem. Phys.* 26, 265 Colombo,1974.
- [Sparrow 1964] **E.M.Sparrow, R.J.Goldstein, V.K. Jonsson** , "Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and nonlinear temperature profile", *J. Fluid Mech.* 18, pp.513-528, 1964.
- [Stern 1960] **M.E.Stern**, "The "Salt-fountain" and thermohaline convection", *Tellus*, 12, pp.172-175, 1960.
- [Stommel 1956] **H.Stommel, A.B.Arons, D.Blanchard**, "An oceanographic curiosity: the perpetual salt fountain". *Deep-Sea Res*, 3, 152-153. 1956

## T

- [Tatyana 2015] **L.Tatyana** , "High-frequency vibration effect on the stability of a horizontal layer of ternary fluid" *Eur. Phys. J. E* 38, 43, 2015.
- [Trevisan 1985] **O.V.Trevisan , A.Bejan**, "Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium", *International journal of heat and mass transfer* 28, pp.1597-1611, 1985.
- [Trevisan 1986] **O.V.Trevisan , A.Bejan**, "Mass and Heat transfer y natural convection in a vertical slot filled with porous medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29, pp.403-415.
- [Turner 1985] **J.S.Turner** , "Multi-component convection", *Ann. Rev. Fluid Mech.* 17, pp.11-44, 1985.

## V

- [Vasseur 1987] **P.Vasseur, M.G.Satish, L Robillard**, "Natural Convection in a Thin, Inclined, Porous Layer Exposed to a Constant Heat Flux", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30, pp.537-549,1987.
- [Veronis 1965] **G.Veronis**, " On finite amplitude instability in thermohaline convection", *J. Mar. Res.* 23, pp.1–17, 1965.

- [Veronis 1968] **G.Veronis**, "Effect of a stabilizing gradient of solute on thermal convection", *J. Fluid Mech.* 34, pp.315–368, 1968.

## W

- [Weaver 1991] **J. A. Weaver , R. Viskanta** , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", *J. Heat Transfer* 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

- [Wee 1989] **H.K. Wee, R. Keey , M.J. Cunniham**, " Heat and moisture transfer by natural convection in a rectangular cavity", *J. Heat Mass Transfer* vol 32, N<sup>o</sup> 9, pp 1765-1778, 1989.

## Y

- [Yahiaoui 2007] **M.A. Yahiaoui**, "Simulation numérique de la convection induite par double diffusion et effet Soret dans une cavité cylindrique concentrique", *Thèse de Philosophiae Doctor, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada.* 2007.

## Z

- [Zimmermann 1992] **G.Zimmermann , U.Müller**, "Benard convection in a two-component system with Soret effectConvection de benard dans un systeme binaire avec effet soret", *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol 35, Issue 9, pp. 2245-2256, September 1992.



**ملخص:** نقدم في هذه الأطروحة دراسة تحليلية و رقمية للحمل الطبيعي الحراري الهادي في تجويف مليء بمائع ثنائي. تخضع الحدود الأفقية إلى تدفق حراري ومادي ثابتين في حين أن الجدران العمودية اعتبرت كاطمة و غير نافذة. افترضنا أن قوى الطفو تنتج عن العمل المشترك لتأثير "سوريه" و التدفق المادي الثابت للتركيز على الحدود الأفقية. قمنا بفحص شروط قوى الطفو الحراري و المادي المساعدة منها والمعارضة و ذلك من اجل مجموعة واسعة من المتغيرات. سمحت لنا الدراسة بتحديد بداية الحمل الحراري فوق و دون الحرج بالطريقة التحليلية التي تستند على التقريب المتوازي للجريان من اجل طبقة لا نهائية. هذا النموذج التقريبي، على الرغم من بساطته النسبية، يعطي نتائج جيدة ويشمل تلك الجريانات المتداخلة و المعاكسة. تم تطبيق الطريقة المعروفة بتحليل الاستقرار الخطي على التقريب المتوازي للجريان وقد تم الحصول عدديا على عتبة التشعب "هوبف" وبهذه الطريقة، أمكن تحديد مناطق عدم الاستقرار الثابتة والمتذبذبة. استخدمت طريقة الحجوم المنتهية للحصول على حل عددي للمعادلات بأكملها. وقد لوحظ اتفاقا جيدا بين التنبؤات التحليلية والمحاكاة العددية.

## Résumé

L'objectif de ce travail, est l'étude analytique et numérique de la convection naturelle dans une cavité peu profonde, remplie d'un mélange binaire, avec des conditions de type Neumann appliquées sur les limites horizontales. Les forces de flottabilité solutales étaient supposées générées par l'action combinée de l'effet Soret et l'imposition d'un flux constant de concentration sur les parois horizontales. Les conditions pour des forces de flottabilité thermique et de concentration aidant et opposées ont été examinées pour une large gamme de paramètres.

Le début de la convection supercritique et sous-critique stationnaire a été déterminé analytiquement en termes des paramètres régissant le problème. Une solution analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, a été dérivée dans le cas d'une couche infinie. La solution numérique des équations entières, est obtenue en utilisant la méthode des volumes de contrôle, et un bon accord a été observé entre les prédictions analytiques et les simulations numériques.

Une analyse de stabilité linéaire de la solution de l'écoulement parallèle a été réalisée et le seuil pour les bifurcations de Hopf, a été obtenu numériquement ce qui a permis de délimiter les frontières définissant les régions d'instabilités stationnaires et oscillatoires.

## Abstract

In this work an analytical and numerical study of natural convection in a shallow cavity, filled with a binary mixture, has been conducted. A constant heat flux was applied, on the horizontal boundaries of the layer while the vertical ones were adiabatic. The solutal buoyancy forces were assumed to be generated by the combined action of the Soret effect and the imposition of a constant flux of concentration on the horizontal walls. Conditions for both aiding and opposing thermal and concentration buoyancy forces were examined for a large range of the governing parameters.

The onset of stationary supercritical and subcritical convection have been determined analytically in terms of the governing parameters of the problem. An analytical solution, based on the parallel flow approximation, has been derived for the case of an infinite layer. A linear stability analysis of the parallel flow solution has been carried out and the threshold for Hopf's bifurcations, is obtained numerically. In this way it has been possible to delineate the boundaries defining the regions of stationary and oscillatory instabilities.

A control volume method has been used to obtain a numerical solution of the full governing equations. A good agreement is observed between the analytical predictions and the numerical simulations.

