REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES
DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Thèse Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques **Option : Mathématiques Appliquées**

Thème

Contribution à l'étude de quelques problèmes piézoélectriques

Par : DOUIB Bachir

Soutenu publiquement le : 22/06/2022

Devant le jury composé de :

DJABRANE Yahia	Professeur à l'université de Biskra	**Président**
HADJ AMMAR Tedjani	Professeur à l'université d'El-Oued	**Rapporteur**
MENACER Tidjani	Professeur à l'université de Biskra	**Examinateur**
BERBICHE Mohamed	Professeur à l'université de Biskra	**Examinateur**
SAOUDI Khaled	Professeur à l'université de Khanchela	**Examinateur**
ZAOUECHE Elmehdi	MCA à l'université d'El-Oued	**Examinateur**
AZEB AHMED Abdelaziz	MCA à l'université d'El-Oued	**Invité**

Résumé

L'objective de cette thèse est d'étudier deux problèmes de la mécanique de contact. Le premier est quasi-statique avec mémoire à longue terme entre deux corps électro-thérmo-élastiques avec frottement, endommagement, adhésion et compliance normale. Le deuxième poblème est dynamique entre deux corps électro-viscoélastiques avec endommagement et frottement de Tresca.

Nous avons présenté une formulation des équations et des inéquations variationnelles de chaque problème à étudier, pour ceci en utilisant quelques types de la formule de Green.

Enfin on a confirmé l'existence et l'unicité d'une solution faible de chaque problème, en utilisant quelques théorèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution, théorème de Lax-Milgram, théorème de Cauchy-Lipshitz, puis les techniques de point fixe de Banach et les inégalités du lemme de Gronwall.

Mots clés : Problème quasi-statique, problème dynamique, adhésion, frottement, endommagement, compliance normale, solution faible, point fixe.

Abstract

The objective of this thesis is to study two problems of contact mechanics. The first is quasi-static with long-term memory between two electro-thermo-elastic bodies with friction, damage, adhesion and normal compliance. The second problem is dynamic between two electro-viscoelastic bodies with damage and Tresca's friction.

We have presented a formulation of the variational equations and inequalities of each problem to be studied, for this using some types of Green's formula.

Finally we confirmed the existence and the uniqueness of a weak solution of each problem, by using some theorems of elliptic and evolutionary quasi-variational inequalities, Lax-Milgram's theorem, theorem of Cauchy-Lipshitz, then the techniques of fixed point of Banach and the inequalities of the lemma's Gronwall.

Key words : Quasi-static problem, dynamic problem, adhesion, friction, damage, normal compliance, weak solution, fixed point.

ملخــص

هدف هذه الأطروحة هو دراسة مسألتين في ميكانيكا الاتصال. الأولـى شـبه ساكنة مع ذاكرة طويلـة لجسـمين كهروضـغطيين - حـراريين - مـرنين فـي وجـود احتكـاك وتلـف وتلاصـق وامتثـال طبيعـي. والمسـألة الثانيـة ديناميكيـة لجسـمين كهروضغطيين - لزجين - مرنين في وجود تلف واحتكاك تريسكا.

لقد قدمنا في هذا العمـل معـادلات ومتراجحـات تغايريـة لكـل مسـألة محـل الدراسة، مستخدمين بعض نماذج صيغة غرين.

وفي الأخير أثبتنا وجود ووحدانية الحل الضعيف لكل مسألة باسـتخدام بعـض المتباينات التغايرية الناقصية والتطورية إلى جانب نظريـة لاكـس- مليغـرام وكـذا نظرية كوشي- ليبشتز ومن ثم تقنيات النقطة الثابتة لبناخ ومتباينات غرونويل.

كلمــات مفتاحيــة: مسـألة شـبه سـاكنة، مسـألة ديناميكيـة، التصـاق، احتكـاك، تلف، امتثال طبيعي، حل ضعيف، نقطة ثابتة.

Dédicaces

A la mémoire de ***ma mère***

A la mémoire de ***mon père***

A ***ma chère femme***

A mes chers enfants : ***Aya, Mohieddine, Raed, Mohamed Ouassim, Assil et Abdennour***

A ***mes frères*** *et* ***mes sœurs***

Je dédie mon mémoire de thèse de Doctorat en Sciences avec toute ma gratitude, ma reconnaissance et mon amour.

Bachir

Remerciements

*Je remercie **Dieu** Tout-Puissant qui ma permis de terminer ce travail.*

*J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à mon encadreur le professeur **Hadj Ammar Tedjani** de m'avoir beaucoup appris lors de son encadrement de ma thèse de doctorat. Son enthousiasme et sa compétence m'ont encouragé à mes travaux de recherche sous sa direction.*

*Je remercie particulièrement mon cher ami le docteur **Abdelaziz Azeb Ahmed** pour tout le soutien qu'il m'a apporté durant la période de préparation de cette thèse.*

*Je suis très honorée que Monsieur le professeur **Djabrane Yahia** a accepté de présider le jury de ma soutenance de ma thèse.*

*Je voudrais adresser tous mes remerciements sincèrement et apprécions aux membres du jury Messieurs les professeurs **Menacer Tidjani, Saoudi Khaled, Berbiche Mohamed, Zaoueche Elmehdi**, je leur prie de trouver ici l'expression de ma plus grande gratitude.*

A tous mes amis et collègues de travail qui m'ont accompagnés et soutenus durant mes années d'études, qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Aussi, je rends hommage à tous mes maîtres et professeurs à partir du primaire, à celles et ceux qui m'ont stimulé dans mes études, je leur dis du fond du coeur merci en espérant que cette thèse leur soit dédicacé comme fruit de leur travail.

À tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ces travaux, de près ou de loin, nous remercions et apprécions beaucoup.

Enfin, je tiens à exprimer mes vifs remerciements à ma femme et à tous mes enfants qui m'ont soutenue et encouragée par leur amour et leur confiance.

Bachir Douib

Table des matières

Introduction générale 1

Notations principales 5

I Modélisation et Outils Mathématiques 7

1 Modélisation 8

1.1 Cadre physique et Modèles mathématiques 8

1.1.1 Cadre physique 8

1.1.2 Modèles mathématiques 10

1.2 Lois de comportement piézoélectriques 13

1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques 13

1.2.2 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques avec mémoire longue 14

1.2.3 Loi de comportement des matériaux thermo-électro-élastiques avec mémoire longue et endommagement 14

1.2.4 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques . . . 15

1.2.5 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec endommagement 16

1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement 17

1.3.1 Contact bilatéral 18

1.3.2 Contact avec compliance normale 18

1.3.3 Contact bilatéral avec frottement de Tresca 19

1.3.4 Loi de frottement de type Coulomb 20

1.3.5 Loi de contact avec frottement et adhésion 21

2 Outils Mathématiques 25

2.1 Cadre fonctionnel scalaire 25

2.1.1 Espaces de fonctions continues et continûment différentiables . . 26

2.1.2 Espaces de Hilbert 26

2.1.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega^\ell)$ 27

2.1.4 Espaces de Sobolev d'ordre entier 29

2.2 Cadre fonctionnel vectoriel 31

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles 35

2.3.1 Fonctions continues et continûment différentiables 36

2.3.2 Fonctions intégrables 36

2.3.3 Espaces $L^p(0,T;X)$ et $W^{k,p}(0,T;X)$ 37

2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans un espace de Hilbert 39

2.5 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et équations d'évolution . 43

2.6 Triplet de Gelfand 44

2.7 Théorème de point fixe de Banach 46

2.8 Lemmes de Gronwall 47

II Problème quasi-statique de contact thérmo-électro-élastique 49

3 Contact entre deux corps thérmo-électro-élastiques avec frottement, endommagement, adhésion et compliance normale 50

3.1 Position du problème 50

3.2 Formulation Variationnelle 53

3.3 Existence et unicité de la solution 66

3.3.1 Théorème d'existence et d'unicité 66

3.3.2 Démonstration du théorème 3.3.1 80

III Problème dynamique de contact électro-viscoélastique 84

4 Contact entre deux corps électro-viscoélastiques avec endommagement et frottement de Tresca 85

4.1 Position du problème et hypothèses 86

4.2 Formulation variationnelle 91

4.3 Existence et unicité de la solution 95

4.3.1 Théorème d'existence et d'unicité 95

4.3.2 Démonstration du Théorème 4.3.1 106

Conclusion générale 107

Bibliographie 108

Introduction générale

La piézoélectricité traduit la propriété que présentent certains cristallins à se polariser sous l'action d'une contrainte mécanique (effet direct) ou bien à se déformer lorsqu'il leur est appliqué un champ électrique (effet inverse). Bien qu'ayant été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en 1879, l'effet piézoélectrique n'a été correctement expliqué par expérimentation qu'en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie. Par la suite le formalisme de la piézoélectricité a été développé par P. Duhem, F. Pockels et particulièrement par W. Voigt en 1894. Une présentation des débuts de la piézoélectricité peut être trouvée dans [60], et plus récemment dans [9]. Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps (piézoélectrique) déformable entre en contact avec d'autre corps, Il est évident que le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc.... Avant l'application de forces sur un corps, la surface de contact réelle sur laquelle les corps se touchent est inconnue ; par ailleurs, les conditions de frontière sur cette surface inconnue fait intervenir des efforts et des déplacements inconnus. En conséquence, les modèles mathématiques de contact impliquent des systèmes des inégalités ou des équations non linéaires. D'ailleurs, quand le frottement est présent, des solutions multiples de ces équations décrivant le contact peuvent exister, et la description du mouvement des corps en contact devient extrêmement complexe. Signorini fut le premier à énoncer un problème de contact entre un corps déformable et une fondation rigide. La Théorie Mathématique de la Mécanique du Contact débute avec Duvaut et Lions [21], qui présentent des formulations variationnelles des problèmes de contact et des résultats d'existence et d'unicité. En particulier, on trouvera dans [56] des résultats concernant l'étude des problèmes de contact des corps piézoélectriques. Du fait de l'importance des processus de contact, un effort considérable a été fait dans leurs modélisations et la littérature sur ce sujet est large. Ceci étant dit, il y a encore très peu de résultats mathématiques concernant les problèmes de contact impliquant des matériaux piézo-électriques et c'est pourquoi, il y a une demande pour étendre les résultats des modèles de contact de corps déformables à des modèles de corps déformables incluant le couplage entre les propriétés électriques et mécanique. Des modèles généraux pour des matériaux élastiques avec effets piézoélectriques peuvent être trouvés plus récemment dans [18, 19, 34, 38, 56, 58], et pour les modèles des matériaux électro-viscoélastiques sont cités dans [6, 16, 20, 28, 30, 32, 35, 43, 51, 54].

Dans tous les travaux, l'endomagemment du matériau est décrit par une fonction α^ℓ ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\alpha^\ell = 1$, $\ell = 1, 2$ il n'ya pas d'endomagemment dans le matériau, lorsque $\alpha^\ell = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \alpha^\ell < 1$, il a un endomagemment partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes de contact avec endommagement ont été étudiés par exemple dans [20, 24, 25, 26, 28] et aussi dans [30, 32, 52, 54, 57].

L'adhésion est un phénomène d'interface qui accompagne le contact où il y a aussi un intérêt considérable dans les problèmes de contact avec adhésion concernant des matériaux piézoélectrique. Dans les travaux [22, 23], Frémond propose une théorie moderne du contact avec adhésion. Cette théorie se base sur les conditions du contact unilatéral de Hertz-Signorini-Moreau ; elle utilise une variable interne le champ d'adhésion $\beta \in [0, 1]$ qui décrit la densité fractionnelle des adhésifs actifs sur la surface de contact et qu'est régie par une loi d'évolution au délà du seuil d'adhésion. En un point de la surface de contact adhésif, lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs ; lorsque $\beta = 0$, tous les adhésifs sont inactifs, sévères et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et seulement une fraction des adhésifs est active. Des travaux ont considéré des conditions de contact avec adhésion comme dans [17, 19, 30, 31, 32, 54, 56, 57].

L'objectif de cette thèse est de proposer une certaine contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact. Dans un processus quasi-statique, nous considérons un problème, qu'on note par $\mathcal{P}_1$, et qui est consacré pour étudier l'évolution des matériaux électro-thermo-élastiques prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau et un effet thermique. Pour cela nous utilisons des lois de comportement non linéaires électro-thermo-élastiques à mémoires longues avec frottement, endommagement et adhésion. Le contact est entre deux corps et est modélisé avec une compliance normale et l'adhésion du surface de contact est prise en compte et est modélisée avec un variable de champ de collage. Nous considérons également un autre problème de contact, qu'on note par $\mathcal{P}_2$, dans un processus dynamique et qui est consacré pour étudier l'évolution des matériaux dites électro-viscoélastiques, ayant des propriétés mécaniques ainsi que des propriétés électriques (matériaux piézoélectriques). Pour cela nous utilisons des lois de comportement non linéaires électro-viscoélastiques avec frottement et endommagement. Ici le contact est bilatérale mais sans adhésion et le frottement est de type de Tresca. On décrit l'évolution de l'endommagement par une inclusion différentielle du type parabolique comme dans [51, 57]. Nous présentons, pour chaque problème mécanique, une formulation variationnelle pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème étudié.

Le mémoire se compose de trois parties que nous décrivons brièvement :

La première partie est composée en deux chapitres, le premier introduit des notations générales de la mécanique nécessaire pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Nous commençons par le cadre physique, lois de comportement piézoélectrique et conditions aux limites. Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons aux résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution, Triplet de Gelfand et les lemmes de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

La deuxième partie, qui s'inspire de la publication [19], contient le troisième chapitre qui est consacré pour étudier un problème de contact entre deux corps électro-thermo-élastiques avec frottement, endommagement, adhésion et compliance normale. Le plan de ce chapitre est le suivant, dans la première section, nous commençons à proposer et décrire notre problème puis nous introduisons des hypothèses très utiles pour la dernière section, ensuite dans la deuxième, en utilisant la formule de Green, on propose une formulation variationnelle du problème. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons un théorème de l'existence d'une solution faible unique du problème, et nous le prouvons, en utilisant quelques théorèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution, théorème du Lax-Milgram, théorème de Cauchy-Lipshitz, puis les techniques de point fixe de Banach et les inégalitées du lemme de Gronwall.

Enfin, la dernière partie, qui contient le quatrième chapitre, nous considérons un problème de contact dans un processus dynamique entre deux corps électro-viscoélastiques avec endommagement. Le contact est bilatéral et modélisé avec la loi de frottement de Tresca. L'endommagement des matériaux causé par les déformations élastiques et est décrite par une inclusion différentielle. Notre partie est structurée comme suite. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous listons des hypothèses sur les données. Dans la deuxième nous proposons une formulation variationnelle du problème. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons notre résultat principal d'existence et d'unicité qui est basé sur le résultat classique des inégalités d'évolution non linéaires du premier ordre et des équations avec des opérateurs monotones et des arguments de point fixe de Banach.
Les résultats présentés dans cette partie font l'objet de la publication [20] qui a été arbitré et accepté pour publier en *"TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics"* qui est indexé dans les bases de données *"Web of Science and Scopus"*.

Notations principales

Pour $\ell = 1,2$, soit Ω^ℓ un ouvert de $\mathbb{R}^d (d = 2,3)$, on note par

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels,
$\partial_i \psi$	la dérivée partielle de ψ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante de x : $\partial_i \psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	le gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, \ldots, \partial_d \psi)$,
$\mathrm{div}\psi$	la divergence de l'application ψ : $\mathrm{div}\psi = \partial_1 \psi + \ldots + \partial_d \psi$,
$(.,.)_X$	le produit scalaire de X,
$\Vert \cdot \Vert_{\mathrm{X}}$	la norme de X,
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2,3)$,
$\bar{\Omega}^\ell$	l'adhérence de Ω^ℓ,
Γ^ℓ	la frontière de Ω^ℓ supposée régulière : $\Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	les parties de frontière $\Gamma^\ell, (i = 1,2,3)$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	l'interface de contact entre le deux corps Ω^1, Ω^2,
$mes\Gamma_i^\ell$	mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ,
$d\Gamma_i^\ell$	mesure superficielle sur Γ_i^ℓ,
ν^ℓ	la normale unitaire sortante à Γ^ℓ,
u^ℓ	vecteur de déplacement dans le domaine Ω^ℓ, on écrit (u_i^ℓ) les composantes du vecteur dans la base canonique,
u_ν^ℓ, u_τ^ℓ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel u^ℓ définis sur $\bar{\Omega}^\ell$,
σ^ℓ	tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ, on écrit (σ_{ij}^ℓ) les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	le composante normale du champ tensoriel σ^ℓ : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell).\nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	le composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ : $\sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell - \sigma_\nu^\ell.\nu^\ell$,

φ^ℓ	valeur de potentiel électrique dans le domaine Ω^ℓ,
β	vecteur d'adhésion sur la surface de contact Γ_3,
D^ℓ	valeur de déplacement électrique dans le domaine Ω^ℓ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon_{ij}(u^\ell) = \frac{1}{2}\Big(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell\Big)$,
$\mathrm{Div}\sigma^\ell$	Divergence de σ^ℓ : $\mathrm{Div}\sigma^\ell = (\sigma^\ell_{ij,j})$,
$L^2(\Omega^\ell)$	espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ où $\int_{\Omega^\ell} \lvert u^\ell(x)\rvert^2 dx < +\infty$,
$\lVert \cdot \rVert_{L^2(\Omega^\ell)}$	la norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\lVert u^\ell \rVert_{L^2(\Omega^\ell)} = \Big(\int_{\Omega^\ell} \lvert u^\ell(x)\rvert^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telle que,
	$\exists c > 0 : \mid u^\ell(x) \mid \leq c$, p.p. sur Ω^ℓ,
H^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^d$,
H_1^ℓ	l'espace $H^1(\Omega^\ell)^d$,
$\mathcal{H}^\ell$	l'espace $L^2(\Omega^\ell)_s^{d\times d}$,
$\mathcal{H}_1^\ell$	l'espace $\{\sigma^\ell = (\sigma^\ell_{ij}) \in \mathcal{H}^\ell \mid Div\sigma^\ell \in H^\ell\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ,
H_{Γ^ℓ}	l'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,
H'_{Γ^ℓ}	l'espace dual de H_{Γ^ℓ},
$\gamma : H_1^\ell \to H_{\Gamma^\ell}$	l'application de trace pour les fonctions vectorielles,

Si de plus $[0,T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0,T;H)$	l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans H,
$C^1(0,T;H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,T]$ dans H,
$L^p(0,T;H)$	l'espace des fonctions p-intégrables sur $[0,T]$ dans H,
$\lVert \cdot \rVert_{L^p(0,T;H)}$	norme de $L^p(0,T;H)$ définie par $\lVert u\rVert^p_{L^p(0,T;H)} = \int_0^T \lVert u(t)\rVert_H^p dt$,
$\mathrm{W}^{k,p}(0,T;H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p,
$\lVert \cdot \rVert_{\mathrm{W}^{k,p}(0,T;H)}$	norme de $\mathrm{W}^{k,p}(0,T;\mathrm{H})$; $\lVert u\rVert^p_{W^{k,p}(0,T;H)} = \sum_{\lvert\alpha\rvert\leq k} \int_0^T \lVert D^\alpha u(t)\rVert_H^p dt$,
$C,\ c$	constantes réelles strictement positives,
i.e.	c'est-à-dire,
p.p.	presque partout.

Première partie

Modélisation et Outils Mathématiques

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique de contact ou nous allons introduire le cadre physique utilisé dans ce mémoire, nous commençons de rappeler l'équation de mouvement de Cauchy et décrire les lois de comportement thérmo-électro-élastiques et électro-viscoélastiques. Par ailleurs nous précisons les conditions aux limites de contact concernant les problèmes étudiés dans cette thèse.

1.1 Cadre physique et Modèles mathématiques

Nous allons introduire dans ce paragraphe le modèle général du problème mécanique utilisé dans toute la thèse. Ensuite nous indiquerons les formulations mathématiques pour les problèmes de contact entre deux corps piézoélectriques correspondants au cadre physique d'étude.

1.1.1 Cadre physique

Nous considérons deux corps matériels qui occupent deux domaines bornés Ω^1 et Ω^2 inclus dans $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, chaque domaine Ω^ℓ $(\ell = 1, 2)$ a une frontière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$ lipschitzienne partitionnée en trois parties mesurables Γ_1^ℓ, Γ_2^ℓ et Γ_3^ℓ telle que $mes\Gamma_1^\ell > 0$. Nous supposons que la frontière Γ^ℓ est de Lipschitz et par conséquent le vecteur normal extérieur existe presque partout sur Γ^ℓ, nous notons par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ, le corps est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agisse des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et dans Ω^ℓ agisse des forces volumiques de densité f_0^ℓ . Nous supposons f_0^ℓ et f_2^ℓ varient très lentement par rapport au temps et soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. En plus de l'action des forces des tractions, chaque corps est soumis à l'action de charge électrique de densité volumique q_0^ℓ et de charge électrique surfacique q_2^ℓ . Pour le décrire, nous considérons une partition de la frontière $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ telle que $mes\Gamma_a^\ell > 0$. le potentiel électrique est annulé sur Γ_a^ℓ, et la charge électrique superficielle de densité q_2^ℓ est prescritée sur Γ_b^ℓ.

Les deux corps sont thérmo-électro-élastiques et en contact avec frottement, endommagement, adhésion et compliance normale pour le premier problème $\mathcal{P}_1$ que nous étudierons dans la deuxième partie de cette thèse. Pour le deuxième problème $\mathcal{P}_2$ que nous étudierons dans la troisième parie, les deux corps sont électro-viscoélastique et en contact avec frottement de Tresca et endommagement. Le contact, pour le deux problèmes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, se fait sur une partie commune $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$ que nous avons noté par Γ_3 (voir figure 1.1).

Notre cadre physique étudié pour chaque problème est électro-mécanique qui résulte du fait que maintenant nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques de chaque corps. Nous étudions l'évolution de ces propriétés dans un intervalle de temps $[0, T]$ en admettant que le processus est quasi-statique pour $\mathcal{P}_1$ et dynamique pour $\mathcal{P}_2$, dans l'hypothèse des petites transformations.

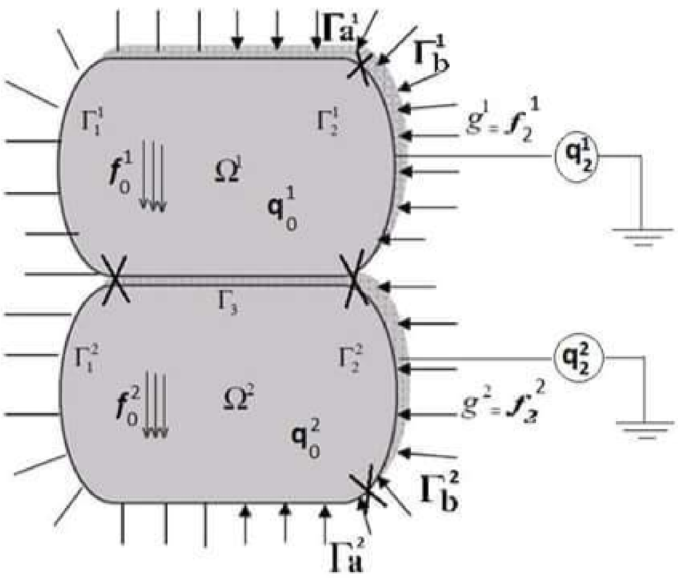

FIGURE 1.1 – Contact entre deux corps électro-mécanique.

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondant au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de ce mémoire.

Ici et partout dans cette thèse nous désignons par $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d\times d}$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$, " $\cdot$ " et $||\cdot||$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$u^\ell \cdot v^\ell = u_i^\ell \cdot v_i^\ell, \qquad \| v^\ell \| = (v^\ell \cdot v^\ell)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall u^\ell, v^\ell \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma^\ell \cdot \tau^\ell = \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell, \qquad \| \tau^\ell \| = (\tau^\ell \cdot \tau^\ell)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathbb{S}^d.$$

Pour chaque élément $v^\ell \in H^1(\Omega^\ell)$, nous notons par v_ν^ℓ et v_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu^\ell = v^\ell \cdot \nu^\ell, \qquad\qquad v_\tau^\ell = v^\ell - v_\nu^\ell \nu^\ell. \tag{1.1}$$

Nous désignons par $\sigma^\ell = \sigma^\ell(x,t)$ le champ des contraintes, par $u^\ell = u^\ell(x,t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales.

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}^\ell$ et $t \in [0,T]$.

Pour un champ des contraintes σ^ℓ nous dénotons par σ_ν^ℓ et σ_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell, \quad \sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell - \sigma_\nu^\ell \cdot \nu^\ell. \tag{1.2}$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot v^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \sigma_\tau^\ell \cdot v_\tau^\ell, \tag{1.3}$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement de la formulation variationnelle de chaque problème mécanique de contact.

1.1.2 Modèles mathématiques

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique de la figure 1.1. L'état électro-mécanique d'un milieu piézoélectrique est déterminé par le couple (u^ℓ, φ^ℓ) tel que u^ℓ est le champ de déplacement et φ^ℓ est le potentiel électrique.

Tout d'abord, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \qquad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2},$$

où $\dot{u}^\ell$ désigne le champ de vitesse et $\ddot{u}^\ell$ désigne le champ d'accélération. Pour le champ de vitesse $\dot{u}^\ell$ les notations $\dot{u}^\ell_\nu$ et $\dot{u}^\ell_\tau$ représentent respectivement le vitesse normale et le vitesse tangentielle à la frontière, c'est à dire

$$\dot{u}^\ell_\nu = \dot{u}^\ell \cdot \nu^\ell, \qquad \dot{u}^\ell_\tau = \dot{u}^\ell - \dot{u}^\ell_\nu \cdot \nu^\ell.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u^\ell) = (\varepsilon_{ij}(u^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(u^\ell) = \frac{1}{2}(\partial_j u^\ell_i + \partial_i u^\ell_j).$$

En outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$E(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell = -(\varphi^\ell_{,i}).$$

Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et le champ des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$. Notons la densité de la masse par $\rho^\ell : \Omega^\ell \to \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques par $f^\ell_0 : \Omega^\ell \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy suivante

$$\mathrm{Div}\sigma^\ell + f^\ell_0 = \rho^\ell \ddot{u}^\ell \qquad \text{dans } \Omega^\ell \times [0,T], \tag{1.4}$$

où "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs ; $\mathrm{Div}\sigma^\ell = (\sigma^\ell_{ij,j})$. Les processus d'évolution sont modelés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{u}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statique), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{u}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{u}^\ell$ peut être négligé (processus quasi-statique). Dans ces deux cas l'équation du mouvement (1.4) devient

$$\mathrm{Div}\sigma^\ell + f^\ell_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\ell \times [0,T]. \tag{1.5}$$

Puisque le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ, le champ des déplacements s'annule ici :

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\ell \times (0, T). \tag{1.6}$$

L'égalité (1.6) est appelée la condition aux limites de déplacement. Sur Γ_2^ℓ agisse des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ, alors la condition aux limites en tractions est

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur} \quad \Gamma_2^\ell \times (0, T). \tag{1.7}$$

On obtient deux modèles mathématiques (1.5)-(1.7) pour le problème $\mathcal{P}_1$ et (1.4), (1.6) et (1.7) pour le problème $\mathcal{P}_2$. Nous allons compléter ultérieurement chaque modèle par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière Γ^ℓ.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \to \mathbb{R}$ et le champ des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ des déplacements électriques

$$\operatorname{div} D^\ell = q_0^\ell \qquad \text{dans} \quad \Omega^\ell \times [0, T], \tag{1.8}$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs ; $\operatorname{div} D^\ell = D^\ell_{i,i}$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ. Rappelons que dans le cadre physique (voir le figure 1.1), le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière

$$\varphi^\ell = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_a^\ell \times [0, T], \tag{1.9}$$

tandis que sur Γ_b^ℓ, une charge électrique de densité q_2^ℓ est prescrite

$$D^\ell . \nu^\ell = q_2^\ell \qquad \text{sur} \quad \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \tag{1.10}$$

Les deux équations (1.9) et (1.10) sont appelées les conditions aux limites électriques. Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement de chaque corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois de comportement piézoélectriques

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécaniques, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ, le tenseur des déformations infinitésimales $\varepsilon(u^\ell)$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques.

Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériaux électro-élastiques et électro-viscoélastiques, pour ceci nous prenons en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$, le champ électrique $E^\ell(\varphi^\ell)$, le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell$, l'opérateur d'élasticité, l'opérateur de viscosité, l'opérateur de permittivité électrique et la fonction de relaxation $\mathcal{Q}^\ell$, ceci est naturellement il lui faut ajouté d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de solide.

1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques D^ℓ sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell E(\varphi^\ell), \end{cases} \tag{1.11}$$

où $\mathcal{A}^\ell$ est l'opérateur d'élasticité non forcement linéaire linéaire à champ électrique nul, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul, $\mathcal{G}^\ell = (b_{ij}^\ell)$ est l'opérateur de la permittivité électrique à déformation nulle qui constitue un opérateur symétrique défini positif et $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$, où $\nabla\varphi^\ell = (\varphi^\ell_{,i})$ représente le champ électrique. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e^{\ell*}_{ijk})$ dénote le transposé du tenseur $\mathcal{E}^\ell$, tel que

$$\mathcal{E}^\ell\sigma.v = \sigma.(\mathcal{E}^\ell)^*v \qquad \forall\sigma \in \mathbb{S}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d. \tag{1.12}$$

Pour plus de détails sur la loi de comportement (1.11), nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [9, 13].

1.2.2 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques avec mémoire longue

Pour modéliser les propriétés électro-élastiques des matériaux avec mémoire longue, nous considérons une loi de comportement de la forme

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell)) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)))ds - (\mathcal{E}^\ell)^*E(\varphi^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)), \end{cases} \tag{1.13}$$

dans laquelle l'opérateur $\mathcal{A}^\ell$ est l'opérateur d'élasticité pas forcément linéaire à champ électrique nul, $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$ est un tenseur de relaxation, $\mathcal{E}^\ell = (e^\ell_{ijk})$ est le tenseur piézo-électrique à champ constant ou nul, $\mathcal{G}^\ell = (b^\ell_{ij})$ est le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle et $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ représente le champ électrique.
Remarquons que lorsque $\mathcal{Q} = 0$, la loi (1.13) devient une loi de comportement électro-élastique de la forme (1.11).

1.2.3 Loi de comportement des matériaux thermo-électro-élastiques avec mémoire longue et endommagement

La loi de comportement d'un matériau thermo-électro-élastique avec mémoire longue et endommagement est donnée par

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{Q}^\ell\big(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)), \theta^\ell(s), \alpha^\ell(s)\big)\, ds - (\mathcal{E}^\ell)^*E^\ell(\varphi^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)), \end{cases} \tag{1.14}$$

où $\mathcal{A}^\ell$ est l'opérateur d'élasticité, $\mathcal{E}^\ell = (e^\ell_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique à champ constant ou nul, $\mathcal{G}^\ell = (b^\ell_{ij})$ est le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle, $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ représente le champ électrique et $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$ est un tenseur de relaxation qui représente une fonction constitutive non linéaire et décrit le comportement électro-élastique du matériau, nous considérons également que $\mathcal{Q}^\ell$ dépend de deux variables internes la température absolue θ^ℓ et l'endommagement α^ℓ.

La température θ^ℓ est définie par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta\theta^\ell = \Theta^\ell\left(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell\right) + \rho^\ell, \tag{1.15}$$

où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous κ_0^ℓ est une constante strictement positive et ρ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

L'endommagement α^ℓ est une variable internes d'état définie dans $\Omega^\ell \times [0, T]$, avec $0 \leqslant \alpha^\ell \leqslant 1$, l'évolution du champ d'endommagement utilisée au troisième chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation

$$\dot{\alpha}^\ell - \kappa^\ell \Delta\alpha^\ell + \partial\psi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni \phi^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell), \tag{1.16}$$

où κ^ℓ est une constante positive, ϕ^ℓ est la fonction source de l'endommagement, $\partial\psi_{K^\ell}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice ψ_{K^ℓ} qu'on a expliqué dans le deuxième chapitre et K^ℓ est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$K^\ell = \{\alpha \in \mathrm{H}^1(\Omega^\ell); 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad \text{p.p. dans } \Omega^\ell\}. \tag{1.17}$$

Nous utilisons la loi de comportement des matériaux thermo-électro-élastiques avec mémoire longue et endommagement dans le problème qu'on va étudier dans le troisième chapitre de ce mémoire.

1.2.4 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques

Les matériaux piézoélectriques sont caractérisés par le couplage des propriétés électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lors de l'application des contraintes mécaniques, et inversement, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont viscoélastique est appelé matériau électro-viscoélastique, alors qu'un matériau est dit électro-viscoélastique si sa loi de construction est de la forme

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\dot{u}^\ell)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{C}^\ell E(\varphi^\ell), \end{cases} \tag{1.18}$$

dans laquelle, l'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell$ et l'opérateur d'élasticité $\mathcal{B}^\ell$ non forcément linéaires, $\mathcal{E}^\ell = (e^\ell_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique et $\mathcal{C}^\ell = (c^\ell_{ij})$ est le tenseur de la permittivité électrique.
Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire de type Kelvin-Voight (voir par exemple [35]) et en tenant compte de la dépendance du champ des contraintes avec le champ électrique, le tenseur de contraintes $\sigma^\ell = (\sigma^\ell_{ij})$ est donné par

$$\sigma^\ell_{ij} = a^\ell_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\dot{u}^\ell) + b^\ell_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u^\ell) - e^{\ell *}_{ijk} E^\ell_k(\varphi^\ell),$$

où $E^\ell_k(\varphi^\ell) = -\varphi^\ell_{,k}$.

On va maintenant introduire une loi de comportement de matériaux électro-viscoélastiques avec endommagement qu'on va utiliser au long de la troisième partie de cette thèse.

1.2.5 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec endommagement

Un matériau est dit électro-viscoélastique avec endommagement si sa loi de comportement est de la forme suivante

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\dot{u}^\ell)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \alpha^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{C}^\ell E(\varphi^\ell), \end{cases} \tag{1.19}$$

où $\mathcal{A}^\ell$, $\mathcal{B}^\ell$, $\mathcal{E}^\ell$ et $\mathcal{C}^\ell$ sont l'opérateur de viscosité, l'opérateur d'élasticité, le tenseur piézoélectrique et le tenseur de permittivité électrique respectivement.

Nous rappelons que l'endommagement α^ℓ dans la loi (1.19) est une fonction de $\Omega^\ell \times [0, T]$ à valeurs dans $[0, 1]$ définie par l'inclusion suivante

$$\dot{\alpha}^\ell - \kappa^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni \phi^\ell(\varepsilon(u^\ell), \alpha^\ell), \tag{1.20}$$

où κ^ℓ est une constante positive, ϕ^ℓ est la fonction source d'endommagement, $\partial\psi_{K^\ell}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice ψ_{K^ℓ} qu'on a expliqué dans le deuxième chapitre par (2.4.4), et K^ℓ est l'ensemble d'endommagement admissible défini par (1.17). Nous utilisons la loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec endommagement dans le problème qu'on va étudier dans la troisième partie de ce mémoire.

Finalement, afin de compléter les modèles mathématiques qui décrit l'évolution des deux corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ^ℓ, pour ceci nous ajouterons les conditions aux limites sur Γ_3 à coté des conditions aux limites de déplacement, de traction et les conditions aux limites électriques définis par (1.6), (1.7), (1.9) et (1.10), ce sont l'objet des conditions aux limites de contact et des lois de frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement

Dans ce paragraphe, nous exposons en détails les conditions aux limites que nous utilisons dans les problèmes de contact en petites déformations. Nous décrivons aussi bien l'aspect mathématique que mécanique de ces conditions.
Par *condition de contact* nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements u^ℓ_ν, des vitesses $\dot{u}^\ell_\nu$ ou des contraintes σ^ℓ_ν. Par *loi de frottement* nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ^ℓ_τ et le déplacement tangentiel u^ℓ_τ où le vitesse tangentiel $\dot{u}^\ell_\tau$. Notons ici que σ^ℓ_τ s'appelle aussi *force de frottement*.

Tout d'abord on définit le déplacement normal par relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2, \tag{1.21}$$

et le déplacement tangentiel par relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2, \tag{1.22}$$

ainsi la continuité des contraintes sur l'interface Γ_3 se traduit par

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \qquad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau. \tag{1.23}$$

Nous signalons que si le contact entre les deux corps sur Γ_3 est sans frottement, ce qui n'est pas notre sujet dans cette thèse, alors

$$\sigma_\tau = 0.$$

Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur $\Gamma_3 \times [0, T]$.

1.3.1 Contact bilatéral

Le contact se fait de façon bilatérale c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement ; il n'y a pas de séparation entre le deux corps. Cette propriétés se traduit mathématiquement par

$$[u_\nu] = 0, \tag{1.24}$$

où $[u_\nu]$ est défini par (1.21). L'équation (1.24) sera utilisé dans la troisième partie de ce mémoire.

1.3.2 Contact avec compliance normale

Dans ce cas, les deux corps sont supposés légèrements déformables. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{cases} \tag{1.25}$$

où g représente l'interstice entre les deux corps et p_ν est une fonction positive donnée appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique qu'un corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$.
Des conditions de contact avec compliance normale entre un corps et une fondation ont été proposées dans [45] et ont été utilisées par exemple dans [3, 33, 34, 40, 41, 47]. Si on considère le cas où un corps repose sur l'autre corps, alors l'interstice est nul, c'est-à-dire $g = 0$. Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \tag{1.26}$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si} \quad r \leq \lambda, \\ c_\nu \alpha & \text{si} \quad r > \lambda, \end{cases} \tag{1.27}$$

où λ est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.25) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse λ, la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons la loi de frottement de Tresca intervenant au long de la troisième partie de ce mémoire.

1.3.3 Contact bilatéral avec frottement de Tresca

La loi de Tresca présente un seuil de frottement fixe g lorsque les deux corps sont en contact, l'un de deux corps exerce sur l'autre un effort tangentiel σ_τ, qui vérifie (1.23), et qui ne dépasse pas le seuil g c'est-à-dire

$$||\sigma_\tau|| \leq g.$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil g, l'un de deux corps ne peut pas se déplacer par rapport à l'autre et il y a blocage, ce qui traduit par

$$||\sigma_\tau|| < g \Rightarrow [\dot{u}_\tau] = 0.$$

Lorsque ce seuil est atteint, un corps peut se déplacer tangentiellement par rapport à l'autre et il y a alors un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse et par conséquent

$$||\sigma_\tau|| = g \Rightarrow \text{il exite } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda[\dot{u}_\tau].$$

En conclusion, les conditions de contact bilatéral avec frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit

$$\begin{cases} [u_\nu] = 0, \\ \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \ \ ||\sigma_\tau|| \leq g, \\ ||\sigma_\tau|| < g \Rightarrow [\dot{u}_\tau] = 0, \\ ||\sigma_\tau|| = g \Rightarrow \text{il exite } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda[\dot{u}_\tau], \end{cases} \tag{1.28}$$

où le seuil de frottement g est une fonction réelle strictement positive définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$. La loi de Tresca a été utilisée récemment dans [6, 38, 47].

1.3.4 Loi de frottement de type Coulomb

C'est une loi de frottement le plus répandue dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit

$$\begin{cases} \| \ \sigma_\tau \ \| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \| \ \sigma_\tau \ \| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow [u_\tau] = 0, \\ \| \ \sigma_\tau \ \| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda[u_\tau], \end{cases} \tag{1.29}$$

où $\sigma_\tau, \ \sigma_\nu$ sont définis par (1.23) et $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement.
La fonction positive $\mu|\sigma_\nu|$ représentant le seuil de frottement, tant que le seuil n'est pas atteint, il y a immobilité (nullité de la vitesse tangentielle ou du déplacement tangentiel). Quand ce seuil est atteint, les deux corps se mettent à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement.

Maintenant, nous remplaçons σ_ν dans le seuil de frottement de la loi (1.29), par la condition de compliance normale (1.25), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \| \sigma_\tau \| \leq \mu p_\nu([u_\nu] - g), \\ \| \sigma_\tau \| < \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow [u_\tau] = 0, \\ \| \sigma_\tau \| = \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda[u_\tau]. \end{cases} \tag{1.30}$$

Dans (1.30) lorsque l'interstice est nul, i.e. $g = 0$, ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasi-statique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \| \sigma_\tau \| \leq p_\tau([u_\nu] - g), \\ [u_\tau] \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g)\dfrac{[u_\tau]}{\|[u_\tau]\|}, \end{cases} \tag{1.31}$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.31), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau([u_\nu] - g)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement.

Enfin, nous présentons dans le paragraphe suivant une loi de contact qu'on va utiliser au long de la deuxième partie de cette thèse.

1.3.5 Loi de contact avec frottement et adhésion

Dans quelques modèles étudiés, nous supposons que les deux corps sont en contact adhésif avec frottement sur la partie Γ_3. Ceci se traduit par l'introduction d'une nouvelle variable interne de surface, en se basant sur les idées de Frémond [22, 23], appelée champ d'adhésion et notée par $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$; elle décrit l'intensité des couches actives d'adhésion sur la surface de contact et elle vérifie $0 \leq \beta \leq 1$ sur Γ_3. Lorsque $\beta = 0$, il n'y a plus d'adhésion, lorsque $\beta = 1$ c'est le cas d'une adhésion complète et il y a lieu à une adhésion partielle quand $0 < \beta < 1$.

Tout au long de la deuxième partie de ce mémoire supposons que les deux corps sont déformables, alors la contrainte σ_ν satisfait la condition dite de *compliance normale avec adhésion*, c'est-à-dire

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \tag{1.32}$$

où σ_ν est celle qui vérifie (1.23) et p_ν est une fonction non négative telle que $p_\nu(r) = 0$ pour $r \leq 0$. la deuxième terme de l'égalité (1.32) est la contribution de l'adhésion à la tension de surface dans lequel γ_ν est un coefficient d'adhésion et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si} \quad s < -L, \\ -s & \text{si} \quad -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si} \quad s > 0. \end{cases} \tag{1.33}$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique d'adhésion. L'introduction de R_ν est motivée par l'observation que si l'extension est plus grande que L, la colle s'étend plastiquement sans offrir de tension additionnelle de traction. Cependant, en choisissant L suffisamment grand, c'est-à-dire plus grand que la taille du système, nous retrouvons le cas où la traction est linéaire avec l'extension. Ainsi la contribution de l'adhésion à la traction normale est représentée par $\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])$; la traction adhésive est en tension et est proportionnelle (avec le coefficient de proportionnalité γ_ν) au carré de l'intensité de l'adhésion et au déplacement normal, mais cela, tant qu'elle n'excède pas la longueur d'adhésion L. La traction maximale de tension est $\gamma_\nu L$. La condition (1.32) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.32) a été déjà utilisée dans [18, 31].

Quand le champ d'adhésion β est nul,(1.32) devient

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T], \tag{1.34}$$

qui représente la condition de compliance normale.

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle satisfait la condition suivante

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [u_\tau] = 0, \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geqslant 0 \\ \text{telle que } \ \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) = -\lambda [u_\tau], \end{cases} \tag{1.35}$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif. $R_\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncature défini par

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si} \quad \| v \| \leq L, \\ L \dfrac{v}{\| v \|} & \text{si} \quad \| v \| > L. \end{cases} \tag{1.36}$$

Notons que les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.35) ont été considérées dans [30] pour L très grand.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est gouvernée par une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_\nu([u_\nu]), R_\tau([u_\tau])) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \tag{1.37}$$

A celle-ci, nous rajoutons la condition initiale

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad \text{sur } \Gamma_3, \tag{1.38}$$

où H_{ad} est une fonction, appelée taux d'adhésion, qui s'annulle quand le premier de ses variables s'annulle et ξ_β est un coefficient d'adhérence positif, et β_0 l'adhésion initiale, tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \ \text{p.p. sur } \ \Gamma_3. \tag{1.39}$$

On considère la possibilité d'une diminution de l'efficacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de l'histoire d'adhésion qu'on note par

$$\xi_\beta(x,t) = \int_0^t \beta(x,s)ds \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0,T]. \tag{1.40}$$

On donne deux exemples de ce genre de fonction, le premier est

$$H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -\beta_+ \gamma_\nu R_1^2,$$

où γ_ν est le coefficient de taux normal et $\gamma_\nu L$ est la traction normale maximale que l'adhésif peut fournir et $\beta_+ = \max\{0, \beta\}$.

Le deuxième exemple est proposé par une équation de taux différente pour l'évolution du champ d'adhésion comme suivant

$$H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -(\beta(\gamma_\nu R_1^2 + \gamma_\tau |R_2|^2) - \xi_\beta)_+. \tag{1.41}$$

Ici γ_τ est le coefficient de vitesse tangentielle, qui peut également être interprété comme coefficient de rigidité tangentielle de l'interface lorsque l'adhérence est compléte ($\beta = 1$). Notons que le processus adhésif est irréversible, en effet, une fois que le décollement se passe le collage ne peut pas être rétabli, puisque $\dot{\beta} \leq 0$.

Pour plus de détails concernant la modélisation du contact adhésif, nous référons aux livres [55, 57].

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Ce chapitre est consacré à la description des espaces utilisés dans toute au longue de cette thèse. Nous supposons que chaque domaine Ω^ℓ $(\ell = 1, 2)$ de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ est bornée et a une frontière Γ^ℓ de Lipschitz, c'est-à-dire que sa frontière est présentable comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ avec une partitions de trois parties mesurables disjointes Γ_1^ℓ, Γ_2^ℓ et Γ_3^ℓ d'un côté et une partition de $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ en deux parties ouvertes Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ d'un autre côté, telles que $mes\Gamma_1^\ell > 0$ et $mes\Gamma_a^\ell > 0$.

2.1 Cadre fonctionnel scalaire

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles. Nous allons aborder les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Hilbert, les fonctions $p-$intégrables et les espaces de Sobolev, qui nous permettrons d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique au prochaine section. Nous rappelons par la suite les définitions et quelques propriétés de ces espaces. Nous ne donnons pas de démonstrations afin de pas rallonger la longueur de ce chapitre. Le lecteur souhaitant de plus amples approfondissement pourra se reporter par exemple à [1, 15] où encore [53].

Nous introduisons la notation classique

$$D^\alpha . = \frac{\partial^{|\alpha|} .}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}, \tag{2.1}$$

dans laquelle le multi-index $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et sa longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$.

Commençons tout d'abord par les espaces classiques de fonctions continues et continûment différentiables.

2.1.1 Espaces de fonctions continues et continûment différentiables

Nous notons par $C(\bar{\Omega}^\ell)$ l'espace des fonctions uniformément continues sur Ω. Toute fonction de $C(\bar{\Omega}^\ell)$ est bornée. La notation $C(\bar{\Omega}^\ell)$ désigne que toute fonction uniformément continue sur Ω^ℓ possède une unique extension continue sur $\bar{\Omega}^\ell$. C'est un espace de Banach s'il muni de la norme

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega}^\ell)} = \sup\{|v(x)|;\ x \in \bar{\Omega}^\ell\}.$$

Pour tout entier m, l'espace $C^m(\bar{\Omega}^\ell)$ est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}^\ell$ dont les différentielles d'ordre au plus m sont également continues sur $\bar{\Omega}^\ell$, i.e.

$$C^m(\bar{\Omega}^\ell) = \{v \in C(\bar{\Omega}^\ell) \mid D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}^\ell) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

C'est également un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{C^m(\bar{\Omega}^\ell)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\bar{\Omega}^\ell)},$$

où l'opérateur D^α est donné par (2.1). L'espace $C^\infty(\bar{\Omega}^\ell)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables défini par

$$C^\infty(\bar{\Omega}^\ell) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\bar{\Omega}^\ell)$$

2.1.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(.,.)_H : H\times$H$\rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\| u \|_H = (u,u)_H^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Rappelons que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u,v)_H| \leq \| u \|_H \| v \|_H,\ \ \forall u,v \in H.$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (2.2). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{|\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}|}{\| v \|_H},$$

où $\langle ., . \rangle_{H' \times H}$ représente le produit de dualité entre H' et H.

2.1.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega^\ell)$

D'abord on note par $L^1(\Omega^\ell)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω^ℓ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\|v\|_{L^1(\Omega^\ell)} = \int_{\Omega^\ell} |v(x)| dx.$$

On va rappeler des résultats d'intégration très outils surtout pour la dernière partie de cette thèse.

Théorème 2.1.1. *(**Théorème de convergence dominée de Lebesgue**). Soit (v_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega^\ell)$. On suppose que*
1) $\lim_{n \to \infty} v_n(x) = v(x)$, p.p. sur Ω^ℓ,
2) il existe une fonction positive $g \in L^1(\Omega^\ell)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|v_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω^ℓ.
Alors $v \in L^1(\Omega^\ell)$ et $\lim_{n \to \infty} \|v_n - v\|_{L^1(\Omega^\ell)} = 0$.

Lemme 2.1.1. *(**Lemme de Fatou**). Soit (v_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega^\ell)$ telle que*
1) pour chaque n, $v_n \geq 0$ p.p. sur Ω^ℓ,
2) $\sup_n \int_{\Omega^\ell} v_n(x) < \infty$.
Pour chaque $x \in \Omega^\ell$ on pose $v(x) = \liminf_{n \to \infty} v_n(x)$.
Alors $v \in L^1(\Omega^\ell)$ et $\int_{\Omega^\ell} v(x) dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_{\Omega^\ell} v_n(x) dx$.

Définition 2.1.1. *Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega^\ell)$ l'ensemble*

$$L^p(\Omega^\ell) = \{v : \Omega^\ell \to \mathbb{R} \; mesurable, et \; |v|^p \in L^1(\Omega^\ell)\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^p(\Omega^\ell)} = \Big(\int_{\Omega^\ell} |v(x)|^p dx \Big)^{1/p}.$$

On appelle l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega^\ell)$ *l'ensemble*

$$L^\infty(\Omega^\ell) = \{v : \Omega^\ell \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \exists\, C > 0,\ |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega^\ell\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega^\ell)} = inf\{C; |v(x)| \leq C \quad \text{p.p. sur } \Omega^\ell\}.$$

Dans la suite, nous utilisons la notation suivante. Soit $1 < p < +\infty$ un réel. On pose $q = \dfrac{p}{p-1}$, i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et on dit que q est l'exposant conjugué de p. Pour $p = 1$ (resp. $p = +\infty$) nous poserons naturellement $q = +\infty$ (resp. $q = 1$).

Quelques propriétés de ces espaces $L^p(\Omega)$ sont résumées ci-après.

Théorème 2.1.2. *Pour tout* $p \in [1, +\infty]$, *les espaces* $L^p(\Omega^\ell)$ *vérifient les assertions suivantes :*

1) Les espaces $L^p(\Omega^\ell)$ *sont des espaces de Banach.*

2) Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega^\ell)$ *et toute* $v \in L^q(\Omega^\ell)$, q *désigne l'exposant conjugué de* p, *l'inégalité de Hölder est vérifiée, i.e.*

$$\int_{\Omega^\ell} |\ u(x)v(x)\ |\ dx \leq \|\ u\ \|_{L^p(\Omega^\ell)} \|\ v\ \|_{L^q(\Omega^\ell)}\ .$$

3) Les duaux des espaces $L^p(\Omega^\ell)$, *pour* $p \in [1, +\infty[$, *vérifient* $(L^p(\Omega^\ell))' = L^q(\Omega^\ell)$.

4) L'espace $L^2(\Omega)$ *muni de produit scalaire*

$$(u, v)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Omega^\ell} u(x)v(x)dx, \forall u, v \in\ L^2(\Omega^\ell).$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega^\ell} |\ u(x)v(x)\ |\ dx \leq \|\ u\ \|_{L^2(\Omega^\ell)} \|\ v\ \|_{L^2(\Omega^\ell)}\ .$$

Remarque 2.1.1. ***(Inégalité de Hölder des sommations)***. *On peut aussi vérifier aisément que pour tout* $1 < p < \infty$ *et* q *est l'exposant conjugué de* p , *tels que les séries* $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p$ *et* $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q$ *convergent, alors la série* $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k|$ *converge et on a l'inégalité suivante*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}}, \qquad \text{avec } \big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\big)$$

2.1.4 Espaces de Sobolev d'ordre entier

Les espaces de Sobolev ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

Dans ce manuscrit, pour désigner les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ d'une fonction u, nous adoptons indifféremment la notation usuelle suivantes $\partial_i u$ où encore $u_{,i}$.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega^\ell)$ défini par

$$H^1(\Omega^\ell) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega^\ell) \quad | \quad \partial_i u \in \mathrm{L}^2(\Omega^\ell), \quad i = 1, ..., d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega^\ell)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega^\ell)$.

On sait que $H^1(\Omega^\ell)$ est un espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega^\ell)} = (u, v)_{\mathrm{L}^2(\Omega^\ell)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{\mathrm{L}^2(\Omega^\ell)},$$

et la norme associée $\| u \|_{H^1(\Omega^\ell)} = (u, u)^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega^\ell)}$, qu'on peut écrire

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega^\ell)} = \| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^\ell)} + \| \nabla u \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^\ell)^d} . \tag{2.3}$$

On a les résultats suivants

Théorème 2.1.3. *(**de densité**). $C^1(\bar{\Omega}^\ell)$ est dense dans $H^1(\Omega^\ell)$.*

Théorème 2.1.4. *(**Rellich**). $H^1(\Omega^\ell) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)$ avec injection compacte.*

Définition 2.1.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega^\ell)$ par*

$$\mathrm{W}^{k,p}(\Omega^\ell) = \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega^\ell)\, \forall \alpha,\ |\alpha| \leq k\ \exists\ v_\alpha \in \mathrm{L}^p(\Omega^\ell) \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u\},$$

où $D^\alpha u$ est la $\alpha^{ième}$ dérivée faible de u définie par (2.1).

Remarque 2.1.2. *Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α.*

Munissons $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega^\ell)$ de la norme

$$\| u \|_{\mathrm{W}^{k,p}(\Omega^\ell)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{\mathrm{L}^p(\Omega^\ell)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega^\ell)}, & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Quand $p = 2$, on note par $H^k(\Omega^\ell)$ l'espace $\mathrm{W}^{k,2}(\Omega^\ell)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 2.1.5. *Les espaces de Sobolev $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega^\ell)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\| \cdot \|_{\mathrm{W}^{k,p}(\Omega^\ell)}$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega^\ell)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.*

Nous avons besoin de la définition d'ouverts de classe C^m, qui précisent les diverses régularités sur les ensembles que nous considérons.

Définition 2.1.3. *Soit Ω^ℓ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et U un espace de fonctions à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^{d-1}$. La frontière Γ^ℓ de l'ensemble Ω^ℓ est dite de classe U si, pour tout point x_0 de la frontière Γ^ℓ, il existe un réel $r > 0$ et une fonction f de U tels que*

$$\Omega^\ell \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \mid x_d > f(x_1, ..., x_{d-1})\},$$

où $B(x_0, r)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r. En particulier si U désigne l'ensemble des fonctions lipschitziennes, l'ouvert Ω^ℓ est dit domaine de Lipschitz. Si U désigne l'espace C^m alors l'ensemble Ω^ℓ est dit domaine de classe C^m.

Théorème 2.1.6. *(**Théorème de trace de Sobolev**). Soit Ω^ℓ un domaine de Lipschitz de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ^ℓ et $1 \leq p < \infty$. Il existe une application linéaire continue $\gamma : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega^\ell) \to \mathrm{L}^p(\Gamma^\ell)$ possède les propriétés suivantes :*

1) $\gamma v = v|_{\Gamma^\ell}$ si $v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega^\ell) \cap C(\bar{\Omega}^\ell)$,

2) l'application γ est une application compacte,

3) il existe une constante $k > 0$, prouvenant de la continuité de l'application γ, tel que

$$\|\gamma v\|_{\mathrm{L}^p(\Gamma^\ell)} \leq k \|v\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega^\ell)} \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega^\ell).$$

Notons γv la trace d'une fonction $v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega^\ell)$. Nous nous permettons, lorsqu'il n'y a aucune ambigüité, de remplacer la notation γv par v.

Pour plus des détails sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [1, 15, 21, 48].

2.2 Cadre fonctionnel vectoriel

La modélisation de problèmes de la mécanique de contact nécessite la plupart du temps l'introduction des espaces de fonctions spécifiques. Nous donnons dans cette section les espaces ainsi que quelques unes de leurs propriétés. Nous en profitons pour adopter certaines habitudes typographiques.

Dans ce qui suit les indices i et j sont compris entre 1 et d ; la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée et l'indice qui suit une virgule indique une dérivée partielle par rapport à la composante correspondante de la variable indépendante.

Pour les champs mécaniques qui conviennent dans les deux problèmes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, nous utilisons les espaces suivants :

$$\begin{cases} H^\ell = \{u^\ell = (u_i^\ell) \ \mid \ u_i^\ell \in \mathrm{L}^2(\Omega^\ell)\} = \mathrm{L}^2(\Omega^\ell)^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \ \mid \ \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in \mathrm{L}^2(\Omega^\ell)\} = \mathrm{L}^2(\Omega^\ell)_s^{d\times d}, \\ H_1^\ell = \{u^\ell = (u_i^\ell) \ \mid \ u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell)\} = H^1(\Omega^\ell)^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \in \mathcal{H}^\ell \ \mid \ \mathrm{Div}\sigma^\ell \in H^\ell\}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Les espaces $H^\ell, \mathcal{H}^\ell, H_1^\ell$ et $\mathcal{H}_1^\ell$ sont des espaces réels de Hilbert munis respectivement des produits scalaires suivants

$$\begin{cases} (u^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \displaystyle\int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell dx, \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \displaystyle\int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell dx, \\ (u^\ell, v^\ell)_{H_1^\ell} = (u^\ell, v^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\mathrm{Div}\sigma^\ell, \mathrm{Div}\tau^\ell)_{H^\ell}, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $\varepsilon : H_1^\ell \to \mathcal{H}^\ell$ et $\mathrm{Div} : \mathcal{H}_1^\ell \to H^\ell$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u^\ell) = (\varepsilon_{ij}(u^\ell)), \text{ où } \ \varepsilon_{ij}(u^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell), \text{ et } \ \mathrm{Div}\sigma^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell).$$

Les normes associées à ces produit scalaires seront

$$\begin{cases} \|u^\ell\|_{H^\ell} = \Big(\displaystyle\int_{\Omega^\ell} |u_i^\ell|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}^\ell} = \Big(\displaystyle\int_{\Omega^\ell} \|\sigma_{ij}^\ell\|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}, \\ \|u^\ell\|_{H_1^\ell} = \Big(\|u^\ell\|^2_{H^\ell} + \|\varepsilon(u^\ell)\|^2_{\mathcal{H}^\ell} \Big)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}_1^\ell} = \Big(\|\sigma^\ell\|^2_{\mathcal{H}^\ell} dx + \|\mathrm{Div}\sigma^\ell\|^2_{H^\ell} \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{2.6}$$

D'après le théorème 2.1.6, rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \to \mathrm{L}^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1^ℓ par cette application est notée par H_{Γ^ℓ} ; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma^\ell)^d$. Désignons par H'_{Γ^ℓ} le dual de H_{Γ^ℓ}, et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}}$ le produit de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ}.

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν^ℓ à la frontière est défini presque partout pour tout champ de vecteurs $v^\ell \in H_1^\ell$, nous utilisons la notation v^ℓ pour désigner la trace γv^ℓ de v^ℓ sur Γ^ℓ. Pour tout $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\sigma^\ell \nu^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ tel que

$$\langle \sigma^\ell \nu^\ell, \gamma v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\mathrm{Div}\sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell}, \;\; \forall v^\ell \in H_1^\ell.$$

En outre, si σ^ℓ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$\langle \sigma^\ell \nu^\ell, \gamma v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \;\; \forall v^\ell \in H_1^\ell.$$

Donc, pour σ^ℓ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\mathrm{Div}\sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \;\; \forall v^\ell \in H_1^\ell, \tag{2.7}$$

où da est un élément de mesure de surface.

Par ailleurs, soient u et v deux fonctions assez régulières (par exemple $u \in C^2(\bar{\Omega}^\ell)$ et $v \in C^1(\bar{\Omega}^\ell)$), elles vérifient la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega^\ell} \Delta u v dx = - \int_{\Omega^\ell} \nabla u . \nabla v dx + \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial u}{\partial \nu} v da. \tag{2.8}$$

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$V^\ell = \{ v^\ell \in H_1^\ell \quad | \quad v^\ell = 0, \; \mathrm{sur}\, \Gamma_1^\ell \}. \tag{2.9}$$

Comme $mes\Gamma_1^\ell > 0$, alors il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ vérifie l'inégalité suivante, dite *inégalité de Korn*

$$\| \varepsilon(v^\ell) \|_{H^\ell} \geq c_k \| v^\ell \|_{H_1^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \tag{2.10}$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouver dans ([49] p. 79).

Nous considérons sur l'espace V^ℓ, défini par (2.9), le produit scalaire donné par

$$(u^\ell, v^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall u^\ell, v^\ell \in V^\ell, \tag{2.11}$$

et soit $\| \cdot \|_{V^\ell}$ la norme associée

$$\| v^\ell \|_{V^\ell} = \| \varepsilon(v^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \tag{2.12}$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\| \cdot \|_{H_1^\ell}$ et $\| \cdot \|_{\mathrm{V}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(\mathrm{V}^\ell, \| \cdot \|_{\mathrm{V}^\ell})$ est un espace de Hilbert.
En effet, on a d'après (2.6)

$$\| v^\ell \|_{H_1^\ell}^2 = \| v^\ell \|_{H^\ell}^2 + \| \varepsilon(v^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell}^2,$$

donc

$$\| \varepsilon(v^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \leq \| v^\ell \|_{H_1^\ell}^2, \tag{2.13}$$

ce qui donne d'après (2.10) et (2.13) que

$$c_k \| v^\ell \|_{H_1^\ell} \leq \| v^\ell \|_{V^\ell} \leq \| v^\ell \|_{H_1^\ell}.$$

Alors les normes $\| \cdot \|_{H_1^\ell}$ et $\| \cdot \|_{V^\ell}$ sont équivalentes .
De plus, en utilisant le théorème de trace de Sobolev (voir [7] p. 31), il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ, Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\| v^\ell \|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \| v^\ell \|_{\mathrm{V}^\ell} \qquad \forall v^\ell \in \mathrm{V}^\ell. \tag{2.14}$$

Pour une fonction scalaire ς, qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$Z = \{\varsigma \in \mathrm{L}^2(\Gamma_3);\ 0 \leq \varsigma \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3\}. \tag{2.15}$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev de nos problèmes associés aux inconnues électriques :

$$\begin{cases} W^\ell = \{\psi^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \mid \psi^\ell = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a^\ell\}, \\ \mathcal{W}^\ell = \{D^\ell = (D_i^\ell) \in H^\ell \mid \text{div} D^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}, \end{cases} \tag{2.16}$$

où $\text{div} D^\ell = D^\ell_{i,i}$. Les espaces W^ℓ et $\mathcal{W}^\ell$ définis par (2.16) sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{cases} (\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell} = (\nabla\varphi^\ell, \nabla\psi^\ell)_{H^\ell}, \\ (D^\ell, \Phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (D^\ell, \Phi^\ell)_{H^\ell} + (\text{div} D^\ell, \text{div}\Phi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Soient $\| \cdot \|_{W^\ell}$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \| \psi^\ell \|_{W^\ell} = \| \nabla\psi^\ell \|_{H^\ell}, \\ \| D^\ell \|^2_{\mathcal{W}^\ell} = \| D^\ell \|^2_{H^\ell} + \| \text{div} D^\ell \|^2_{L^2(\Omega^\ell)} . \end{cases} \tag{2.18}$$

Par ailleurs, lorsque D^ℓ est un champ régulier appartient à $\mathcal{W}^\ell$, on a la formule de Green suivante

$$(D^\ell, \nabla\psi^\ell)_{H^\ell} + (\text{div} D^\ell, \psi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H^1(\Omega^\ell). \tag{2.19}$$

Puisque $mes\Gamma_a^\ell > 0$, l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée, ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\| \nabla\psi^\ell \|_{H^\ell} \geq c \| \psi^\ell \|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell. \tag{2.20}$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvé, par exemple, dans [15, 23].

Il s'ensuit, d'après (2.20) et (2.3), que $\| \cdot \|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\| \cdot \|_{W^\ell}$ sont des normes équivalentes sur W^ℓ et donc $(W^\ell, \| \cdot \|_{W^\ell})$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev (voir [42] p. 26), il existe une constante $\tilde{c_0}^\ell$ dépendant uniquement de Ω^ℓ, Γ_a^ℓ et Γ_3, telle que

$$\| \psi^\ell \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c_0}^\ell \| \psi^\ell \|_{W^\ell}, \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell. \tag{2.21}$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits pour les inconnues mécaniques

$$\begin{cases} E_0 = L^2(\Omega^1) \times L^2(\Omega^2), \\ E_1 = H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2), \\ H = H^1 \times H^2, \\ H_1 = H_1^1 \times H_1^2, \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \\ \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \end{cases}$$

et pour les inconnues électriques, nous présentons les espaces produits suivants

$$\begin{cases} W = W^1 \times W^2, \\ \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2. \end{cases}$$

Enfin, nous définissons un espace V défini par

$$V = V^1 \times V^2,$$

cet espace est consacré pour étudier le premier problème $\mathcal{P}_1$ que nous étudierons dans la deuxième partie de cette thèse, et nous définissons un sous espace fermé de V, qu'on note par $\mathbb{V}$, défini par

$$\mathbb{V} = \big\{ v \in V; \quad [v_\nu] = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \big\}, \tag{2.22}$$

pour étudier le deuxième problème $\mathcal{P}_2$, que nous étudierons dans la troisième partie de cette thèse.

Les espaces $E_0, E_1, H, H_1, \mathcal{H}, \mathcal{H}_1, W, \mathcal{W}, V$ et $\mathbb{V}$ sont des espaces de Hilbert réels dotés respectivement des produits scalaires canoniques notés $(\cdot,\cdot)_{E_0}$, $(\cdot,\cdot)_{E_1}$, $(\cdot,\cdot)_H$, $(\cdot,\cdot)_{H_1}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_1}, (\cdot,\cdot)_W, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{W}}, (\cdot,\cdot)_V$ et $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{V}}$.

Les normes associées seront désignées par $\|\cdot\|_{E_0}, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{H_1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$, $\|\cdot\|_W, \|\cdot\|_{\mathcal{W}}, \|\cdot\|_V$, et $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ respectivement.

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel X.

2.3.1 Fonctions continues et continûment différentiables

Soit $0 < T < \infty$, et soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C(0,T;X)$ et $C^1(0,T;X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0,T]$ à valeurs dans X, respectivement, avec les normes

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X,$$

$$\|u\|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X + \max_{t\in[0,T]} \|\dot{u}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c(0,T;X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $[0,T]$ à valeurs dans X, où le support d'une fonction $u \in C_c(0,T;X)$ se définit de la manière suivante

$$\text{supp } u = \overline{\{t \in [0,T] \mid u(t) \neq 0\}}$$

2.3.2 Fonctions intégrables

Définition 2.3.1. *Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble* $\mathrm{E} \subset [0,T]$ *de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0,T;X)$ telle que $\| u_n(t) - u(t) \|_X \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $t \in [0,T] \setminus \mathrm{E}$.*

Définition 2.3.2. *Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite fortement dérivable en $t_0 \in (0,T)$ s'il existe un élément $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de u en t_0, telle que*

$$\lim_{h\to 0} \|\frac{1}{h}(u(t_0+h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0)\|_X = 0.$$

Définition 2.3.3. *Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0,T;X)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \| u_n(t) - u(t) \|_X \, dt = 0$$

Théorème 2.3.1. ***(Bochner)****. Une fonction $u : [0,T] \to X$ mesurable est intégrable si et seulement si $t \mapsto \| u(t) \|_X : [0,T] \to R_+$ est intégrable. Dans ce cas*

$$\| \int_0^T u(t)dt \|_X \leq \int_0^T \| u(t) \|_X \, dt.$$

2.3.3 Espaces $L^p(0,T;X)$ et $W^{k,p}(0,T;X)$

Définition 2.3.4. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace de Lebesgue* $L^p(0,T;X)$ *est l'ensemble des classes de fonctions* $u : (0,T) \to X$ *mesurables telle que l'application* $t \to \|u(t)\|_X$ *appartient à* $L^p(0,T)$. *On sait que* $L^p(0,T;X)$ *est un espace vectoriel normé avec la norme*

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0,T;X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad si\ 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} &= \inf\{C > 0 : \ \|u(t)\|_X \leq C, \ p.p.\ t \in (0,T)\} \quad si\ p = \infty. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 2.3.1. *(1)* $L^p(0,T;X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *est un espace de Banach.*
(2) Si X *est un espace de Hilbert avec le produit scalaire* $(\cdot,\cdot)_X$ *alors* $L^2(0,T;X)$ *est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

(3) $L^r(0,T;X) \subset L^q(0,T;X)$ *avec injection continue* $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
(4) Si X *est un espace de Hilbert, alors*

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X) \quad si\ 1 < p,q < \infty, \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X),$$

où $L^p(0,T;X)'$ *représente le dual de l'espace* $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.3.5. *Soit* $u, v \in L^1(0,T;X)$. *La fonction* v *s'appelle la dérivée généralisée d'ordre* n *de* u *sur* $(0,T)$ *si*

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)v(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,T).$$

$C_c^\infty(0,T)$ *étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans* $(0,T)$. *Nous écrivons* $v = \dot{u}$ *pour* $n = 1$ *et* $v = u^{(n)}$ *pour* $n \geq 2$.

Définition 2.3.6. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(0,T;X)$ *est l'espace des fonctions* $u : [0,T] \to X$ *telles que* $u \in L^p(0,T;X)$ *et* $\dot{u} \in L^p(0,T;X)$. *Notons que* $W^{1,p}(0,T;X)$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0,T;X)$ muni de la norme précédente est un espace de Hilbert.

Définition 2.3.7. *Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0,T]$, tel que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|u(b_j) - u(a_j)\|_X < \varepsilon$.*

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0,T;X)$.

Théorème 2.3.2. *Soient $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach réflexif et $u \in L^p(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) $u \in W^{1,p}(0,T;X)$.
(2) u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable ayant la dérivée forte dans $L^p(0,T;X)$.
(3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0,T;X)$ telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Il découle de la démonstration du Théorème 2.3.2 que, si X est un espace de Banach réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ est fortement dérivable p.p. sur $(0,T)$ et $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$ p.p. sur $(0,T)$. Par ailleurs $W^{1,1}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0,T] \to X$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0,T] \to X$ lipschitziennes.

Définition 2.3.8. *Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace*

$$W^{k,p}(0,T;X) = \{u \in W^{k-1,p}(0,T;X) \mid \dot{u} \in W^{k-1,p}(0,T;X)\}.$$

On vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0,T;X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, ..., g_k \in L^p(0,T;X)$ telle que

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(j)}(t)dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0,T]), \forall j = 1,2,...,k,$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ. On peut donc considérer les dérivée successives $\dot{u} = g_1$,$u^{(2)} = g_2, ..., u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Théorème 2.3.3. *Si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,p}(0,T;X)$, $p \in [1,\infty]$. Nous avons alors :*

1. $\|u(t)-u(s)\|_X \le \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \le s \le t \le T,$
2. *si de plus $p < \infty$, on a*
$$\|u(t)-u(s)\|_X^p \le (t-s)^p \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \le s \le t \le T,$$
3. *si $p = \infty$, on a*
$$\|u(t)-u(s)\|_X \le \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} \qquad 0 \le s \le t \le T.$$

Théorème 2.3.4. *Dans le cas où l'espace $\big(X,(\cdot,\cdot)_X\big)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,2}(0,T;X)$, alors*

1. *la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0,T[$,*
2. $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t),u(t))_X, \quad$ *p.p.* $t \in]0,T[$,
3. $\frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s),u(s))_X ds, \quad \forall t \in [0,T].$

Ces quelques propriétés achèvent cette section. Pour plus de détails sur les résultats dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple aux références [12, 15].

2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans un espace de Hilbert

Nous donnons quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaires et les formes bilinéaires dans un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Définition 2.4.1. *Soit $A : X \to X$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dit :*

1. *monotone si*
$$(Au-Av,u-v)_X \ge 0 \quad \forall u,v \in X,$$

2. *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \parallel u - v \parallel_X^2, \quad \forall u, v \in X,$$

3. *de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\parallel Au - Av \parallel_X \leq M \parallel u - v \parallel_X, \quad \forall u, v \in X,$$

4. *hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \to \lambda$ lorsque $n \to +\infty$ on a*

$$(A(u + \lambda_n v), w)_X \to (A(u + \lambda v), w)_X, \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant.

Proposition 2.4.1. *Soient A, B et $A + B$ trois opérateurs de X vers X.*
1. Si A est de Lipschitz, alors A est hemicontinu.
2. Si A est fortement monotone et B est monotone, alors A+B est fortement monotone.

Nous continuons avec quelques définitions portant sur les formes bilinéaires définies dans un espace de Hilbert.

Définition 2.4.2. *Soit $a : X \times X \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.*
1. On dit que a est continue s'il existe un réel $M > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq M \parallel u \parallel_X \parallel v \parallel_X, \quad \forall u, v \in X.$$

2. On dit que a est $X-$elliptique s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq m \parallel u \parallel_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 2.4.1. *(**Théorème de représentation de Riesz-Fréchet**). Soit X un espace de Hilbert et soit X' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in X'$ il existe $f \in X$ unique tel que*

$$\langle \phi, v \rangle_{X' \times X} = (f, v)_X \quad \forall v \in X.$$

De plus

$$\parallel \phi \parallel_{X'} = \parallel f \parallel_X .$$

Pour une démonstration de ce théorème voir par exemple ([15], pages 81-82). Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire. On peut considérer la forme bilinéaire $a : X \times X \to \mathbb{R}$ définie par

$$a(u, v) = (Au, v)_X \quad \forall u, v \in X.$$

En outre, en utilisant le théorème de représentation de Riez-Fréchet, si $a : X \times X \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire et continue, alors il existe un opérateur $A : X \to X$ linéaire et continu tel que

$$a(u, v) = (Au, v)_X \quad \forall u, v \in X.$$

En plus a est $X - elliptique$ si et seulement si A est fortement monotone.

Théorème 2.4.2. *(**Théorème de Lax-Milgram**).*

Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et $X - elliptique$.

Soit $l : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in X. \tag{2.23}$$

Définition 2.4.3. *Soit une fonction $j : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

1. La fonction j est dite propre si elle n'est pas identiquement à $+\infty$, c'est-à-dire s'il existe $u \in X$ tel que $j(u) < +\infty$, et si elle ne prend jamais la valeur $-\infty$.

2. La fonction j est dite convexe si

$$j(tu + (1 - t)v) \leq tj(u) + (1 - t)j(v), \quad \forall u, v \in X, \ \forall t \in [0, 1].$$

3. La fonction j est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en u de l'espace X, si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de X convergeant vers u dans X, elle vérifie

$$\liminf_{n \to \infty} j(u_n) \geq j(u). \tag{2.24}$$

4. La fonction j est dite s.c.i. sur X si elle est s.c.i. pour tout point de X.

Remarque 2.4.1. *Il convient de remarquer que dans la définition précédente, la suite d'éléments $(u_n)_n$ converge fortement vers un l'élément u. Si cette suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers un élément u et que l'inégalité (2.24) est vérifiée, alors la fonction j est dite fonction faiblement semi-continue inférieurement en point u.*

Proposition 2.4.2. *Si la fonction $j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe, propre et semi-continue inférieurement alors elle faiblement semi-continue inférieurement et réciproquement.*

Sous différentiabilité

Si X désigne un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X. Considérons la fonction ψ_K définie par

$$\psi_K(u) = \begin{cases} 0 & si \quad u \in K, \\ +\infty & si \quad u \notin K, \end{cases}$$

on appelle ψ_K fonction indicatrice. Nous savons que l'ensemble K est fermé, non vide et convexe si et seulement si sa fonction indicatrice ψ_K est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement.

Définition 2.4.4. *Soit une fonction $j : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u, noté $\partial j(u)$, est l'ensemble défini par*

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid \; j(v) \geq j(u) + \langle u', v - u \rangle_{X' \times X}, \; \forall v \in X\}.$$

Rappelons que le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ désigne le produit de dualité entre X' et X.

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous gradient de la fonction j en u. La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X.

Soit K un sous-ensemble convexe non vide de l'espace X. Considérons la fonction indicatrice ψ_K de l'ensemble K, nous avons de suite que si $u \notin K$ alors $\partial \psi_K(u) = \emptyset$. Supposons alors que $u \in K$, il vient que si $u' \in \partial \psi_K(u)$ alors $\langle u', v - u \rangle_{X' \times X} \leq 0$, pour tout $v \in K$.

Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel $\partial \psi_K(u)$ d'une fonction indicatrice ψ_K d'un ensemble convexe K non vide en $u \in K$ par

$$\partial \psi_K(u) = \{u' \in X' \mid \; \langle u', v - u \rangle_{X' \times X} \leq 0, \; \forall v \in K\}.$$

2.5 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et équations d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et les équations d'évolution.
Dans la troisième partie de ce mémoire, on va utiliser la version suivante du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 2.5.1. ***(Cauchy-Lipschitz)****. Soit* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un espace de Banach réel et soit* $\mathrm{F}(t,\cdot) : X \to X$ *un opérateur défini p.p. sur* $[0,T]$*, qui satisfait les propriétés suivantes*

$$\begin{cases} (a) \textit{ il existe } \mathrm{L_F} > 0 \textit{ tel que} \\ \| \mathrm{F}(t,x) - \mathrm{F}(t,y) \|_{\mathrm{X}} \leq \mathrm{L_F} \| x - y \|_{\mathrm{X}}, \quad \forall x, y \in \mathrm{X}, \ \textit{p.p. } t \in [0,T], \\ (b) \textit{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \textit{ tel que} \\ \mathrm{F}(\cdot, x) \in \mathrm{L}^p(0,T;\mathrm{X}), \quad \forall x \in \mathrm{X}. \end{cases}$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathrm{X}$*, il existe une fonction unique* $x \in \mathrm{W}^{1,p}(0,T;\mathrm{X})$ *tel que*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathrm{F}(t, x(t)), \quad \textit{p.p. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On peut trouver les détails de ce théorème, par exemple, dans ([59] p. 60). La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques, dans lesquelles la fonctionnelle non différentiable dépend de la solution elle même. Ces derniers sont appelées *"inégalités quasi-variationnelles"*. Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour ce type de problèmes. Pour cela, nous considérons un espaces de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$, et soit $A : X \to X$ un opérateur non linéaire et la fonctionnelle $j : X \times X \to \mathbb{R}$ et $f \in X$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasi-variationnnelle suivante

$$u \in X, \quad (Au, u - v)_X + j(u,v) - j(u,u) \geq (f, u - v)_X \qquad \forall v \in X. \tag{2.25}$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A est de Lipschitz et fortement monotone, c'est-à-dire

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } \quad L_A > 0 \quad \text{telle que} \\ ||Au_1 - Au_2||_X \leq L_A ||u_1 - u_2||_X \quad \forall u_1, u_2 \in X, \\ (b) \text{ il existe } \quad m_A > 0 \quad \text{telle que} \\ (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m_A ||u_1 - u_2||_X^2 \quad \forall u_1, u_2 \in X, \end{cases} \tag{2.26}$$

et la fonctionnelle $j : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \ j(u, \cdot) \quad \text{est convexe et s.c.i. sur } X \quad \text{pour tous} \quad u \in X, \\ (b) \text{ il existe } \quad m_j > 0 \quad \text{telle que} \\ j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \leq m_j ||u_1 - u_2||_X ||v_1 - v_2||_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{cases} \tag{2.27}$$

Enfin, nous supposons que

$$f \in C(0, T; X). \tag{2.28}$$

L'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.25) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.5.2. *Supposons que les hypothèses (2.26)-(2.28) sont satisfaites, et $m_j < m_A$.*

(i) Alors il existe une solution unique $u \in X$ du problème (2.25).

(ii) Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (2.25) *correspondant aux données $f_1, f_2 \in X$, alors il existe $c > 0$ tel que*

$$||u_1 - u_2||_X \leq c ||f_1 - f_2||_X. \tag{2.29}$$

La démonstration du théorème 2.5.2 ce trouve, par exemple, dans [58] p. 83. Nous utiliserons ce théorème dans le troisième chapitre de ce mémoire.

2.6 Triplet de Gelfand

Dans cette section nous rappelons la définition d'un Triplet de Gelfand. Pour cela on va utiliser le théorème 2.4.1 de représentation de Riesz-Fréchet, l'importance de ce théorème est que tout forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H'.

Soit maintenant V un espace de Hilbert réel tel que V dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue. On identifie H et H'. Soit V' le dual de V, on peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V, on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$\langle Tf, v\rangle_{V'\times V} = (f, v)_H, \quad \forall f \in H,\ \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \to V'$ possède les propriétés suivantes

(1) $||Tf||_{V'} \leq C||f||_H$,

(2) T est injective,

(3) $T(H)$ est dense dans V'.

En général T n'est pas surjective de H sur V'. A l'aide de T on prolonge H dans V' et on a le schéma suivant

$$V \subset H \equiv H' \subset V', \tag{2.30}$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé *Triplet de Gelfand*, on dit que H est l'espace pivot.

Nous terminons cette section par le deux théorèmes d'existence et d'unicité suivants qu'on peut trouver dans [10] p. 140.

Théorème 2.6.1. *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \to V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait*

$$\langle Av, v\rangle_{V'\times V} \geq \omega\|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \tag{2.31}$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C_1(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V, \tag{2.32}$$

pour des constantes $\omega > 0$, $C_1 > 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \ p.p.t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0.$$

Théorème 2.6.2. *Soit $V \subset H \subset V'$ est un triple de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V, et soit $A : V \to V'$ est un opérateur linéaire, symétrique et continu qui satisfait*

$$\text{il existe } C_2 \in \mathbb{R} \text{ et } C_3 > 0 \text{ telle que } \langle Av, v\rangle_{V'\times V} + C_2\|v\|_H^2 \geq C_3\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \tag{2.33}$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0,T;V')$, il existe une unique fonction u qui satisfaite

$$u \in L^2(0,T;V)) \cap C(0,T;H) \cap W^{1,2}(0,T;V') \tag{2.34}$$

$$u(t) \in K, \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} &\langle \dot{u}(t), v - u(t)\rangle_{V'\times V} + \langle Au(t), v - u(t)\rangle_{V'\times V} \\ &\geq \langle f(t), v - u(t)\rangle_{V'\times V}, \ \forall v \in K, \ p.p.t \in (0,T), \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.37}$$

Si $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0,T;H)$, alors il existe une unique fonction u qui satisfaite (2.35)-(2.37) et vérifie

$$u \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \tag{2.38}$$

2.7 Théorème de point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach va être utiliser plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité.

Théorème 2.7.1. *(**Théorème de point fixe de Banach**). Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \to K$ est une contraction, c'est-à-dire il existe $c \in]0,1[$ telle que*

$$\| \Lambda(u) - \Lambda(v) \|_X \leq c \| u - v \|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e. possède un point fixe unique dans K.

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \to K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \qquad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 2.7.2. *Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \to K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K.*

Les démonstrations du théorème 2.7.1 et du théorème 2.7.2 peuvent être trouver dans [36].

2.8 Lemmes de Gronwall

A la fin, nous passons en revue les lemmes de Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, le lecteur pourra consulter par exemple [39]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser des versions "presque partout" de ces lemmes.

Lemme 2.8.1. *Soient $m, \eta \in C(0,T;\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $\eta \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$ une constante, et soit $\psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

1. *Si*
$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \eta(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$
alors
$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp(\int_0^t \eta(s)ds), \quad \forall t \in [0,T].$$
2. *Si*
$$\psi(t) \leq m(t) + a\int_0^t \psi(t)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$
alors
$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT}\int_0^t m(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$
pour le cas particulier $m = 0$, la première partie de ce lemme devient :

Corollaire 2.8.1. *Soient $\eta \in C(0,T;\mathbb{R})$ telle que $\eta(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$ une constante. Si $\psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que*
$$\psi(t) \leq a + \int_0^t \eta(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp(\int_0^t \eta(s)ds), \quad \forall t \in [0,T].$$

Le corollaire 2.8.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t \eta(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

avec une certaine fonction $\eta \geq 0$. L'application du corollaire 2.8.1 donne immédiatement la nullité de ψ.

Lemme 2.8.2. *Soient $m, \eta \in C(0,T;\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0,\ \ \eta(t) \geq 0,\ \ \forall t \in [0,T]$ et $a \geq 0$. Soit également $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\psi(t)dt + \int_0^s \eta(t)\psi^2(t)dt, \quad \forall s \in [0,T],$$

alors

$$|\psi(s)| \leq (a + \int_0^s m(t)dt) \exp(\int_0^s \eta(t)dt), \quad s \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $\eta = 0$, le lemme devient :

Corollaire 2.8.2. *Soient $m \in C(0,T;R)$ telles que $m(t) \geq 0,\ \ t \in [0,T]$ et $a \geq 0$, soit également $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\psi(t)dt, \quad \forall s \in [0,T],$$

alors

$$|\psi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)dt, \quad s \in [0,T].$$

Deuxième partie

Problème quasi-statique de contact thérmo-électro-élastique

Chapitre 3

Contact entre deux corps thérmo-électro-élastiques avec frottement, endommagement, adhésion et compliance normale

Dans ce chapitre, qui représente la publication [19] en détails, nous étudions un problème de contact entre deux corps piézoélectriques thermo-élastiques avec frottement, endommagement adhésion et compliance normale. Le plan de ce chapitre est le suivant : Dans la première section nous commençons à proposer et décrire notre problème puis nous introduisons des hypothèses très utiles que nous utilisons dans la dernière section, ensuite dans la deuxième, en utilisant la formule de Green, on propose une formulation variationnelle du problème. Enfin, dans la troisième, nous énonçons un théorème d'existence d'une solution faible unique du problème et nous le prouvons.

3.1 Position du problème

Nous nous plaçons dans le cadre physique (voir figure 1.1). Considérons deux corps thermo-électro-élastiques à mémoire longue terme avec endommagement, occupent deux domaines bornés Ω^1, Ω^2 de l'espace $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$. Nous avons mis ℓ pour indiquer que la quantité est liée au domaine Ω^ℓ, dans se qui suit l'indice $\ell = 1, 2$. Pour chaque domaine Ω^ℓ, avec une surface frontière régulière Γ^ℓ, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1^ℓ, Γ_2^ℓ et Γ_3^ℓ, correspondant aux conditions aux limites mécanique, d'une part, et d'autre part en partitionnant $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ correspondant aux conditions aux limites électrique, telles que $mes\Gamma_1^\ell > 0$ et $mes\Gamma_a^\ell > 0$. Nous noterons par Γ_3^ℓ l'interface de contact, on a $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, noté par Γ_3 qui est supposée isolant. Alors le modèle classique pour ce processus est le suivant.

Problème $\mathcal{P}_1$. Pour $\ell = 1, 2$, trouver le champ des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{S}^d$, le champ de température $\theta^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}$, le champ d'endommagement $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}$, le champ de potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}$, le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times (0,T) \to \mathbb{R}$, ainsi que le champ des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$ tels que :

$$\begin{aligned}
&\sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) + \\
&\int_0^t \mathcal{Q}^\ell\big(t - s, \varepsilon(u^\ell(s)), \theta^\ell(s), \alpha^\ell(s)\big)\, ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell) && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), && (3.1)\\
&D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)) && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), && (3.2)\\
&\dot{\alpha}^\ell - \kappa^\ell \Delta\alpha^\ell + \partial\psi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni \phi^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), && (3.3)\\
&\dot{\theta}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta\theta^\ell = \Theta^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) + \rho^\ell && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), && (3.4)\\
&Div\sigma^\ell + f_0^\ell = 0 && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), && (3.5)\\
&divD^\ell - q_0^\ell = 0 && \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), && (3.6)\\
&u^\ell = 0 && \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0,T), && (3.7)\\
&\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell && \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0,T), && (3.8)\\
&\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_\nu([u_\nu]), R_\tau([u_\tau])) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), && (3.9)\\
&\sigma_\nu^\ell = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \text{ où } \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), && (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\
\| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\
\| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [u_\tau] = 0, \\
\| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\
\text{telle que} \quad \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(([u_\tau]) = -\lambda [u_\tau],
\end{cases} \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0,T), \tag{3.12}$$

$$\kappa_0^\ell \frac{\partial^\ell \theta^\ell}{\partial \nu^\ell} + \lambda_0^\ell \theta^\ell = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0,T), \tag{3.13}$$

$$\varphi^\ell = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0,T), \tag{3.14}$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \qquad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0,T), \tag{3.15}$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell, \quad \theta^\ell(0) = \theta_0^\ell, \quad \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell \qquad \text{dans } \Omega^\ell, \tag{3.16}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad \text{sur } \Gamma_3. \tag{3.17}$$

Les équations (3.1) et (3.2) représentent la loi de comportement thermo-électro-élastique avec une mémoire à longue terme et d'endommagement, que nous avons déjà définie dans (1.14). L'inclusion (3.3) décrit l'évolution du champ d'endommagement, qui figure dans (1.16). L'équation (3.4) représente la conservation de l'énergie où θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et ρ^ℓ est une source de chaleur volumique donnée. Les équations (3.5) et (3.6) sont les équations d'équilibre pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, respectivement. Ensuite, les équations (3.7) et (3.8) représentent respectivement la condition aux limites de déplacement et de traction. L'équation différentielle (3.9) décrit l'évolution du champ d'adhésion qui est expliqué dans (1.37), où R_ν et R_τ sont deux opérateurs de troncatures définis, respectivement, par (1.33) et (1.36), et $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$ et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, sont celles figurées par (1.21) et (1.22). La condition (3.10) traduit la continuité des contraintes normales sur l'intérface Γ_3, où la contrainte normale σ_ν satisfait la condition normale avec adhésion qui figure dans (1.32) tels que γ_ν est un coefficient d'adhérence donné et p_ν est une fonction positive donnée (pour plus des détails renvoyons le lecteur aux [35, 37]). La condition (3.11) est une condition de loi de frottement de Coulomb non locale couplée avec compliance normale et adhésion, où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement supposé être positif. La relation (3.12) représente une condition aux limites de Neumann homogène pour le champ d'endommagement sur Γ^ℓ. La relation (3.13) représente une condition aux limite de Fourier pour la température sur Γ^ℓ. La condition (3.14) affirme que le potentiel électrique s'annule sur la frontière Γ_a^ℓ et selon (3.15) une charge électrique est prescrite sur Γ_b^ℓ. Finalement, u_0^ℓ, θ_0^ℓ, α_0^ℓ et β_0 dans (3.16) et (3.17) sont des données initiales.

3.2 Formulation Variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}_1$, nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur de thérmo-élasticité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\text{ il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que } \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d,\ r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad ||\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1, r_1, d_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2, r_2, d_2)|| \leq L_{\mathcal{A}^\ell}(||\xi_1 - \xi_2|| + \\ \quad | r_1 - r_2 | + | d_1 - d_2 |), \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b)\text{ il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que } \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d \\ (\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell}||\xi_1 - \xi_2||^2,\ \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (c)\text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{A}^\ell(x, \xi, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \forall\ \xi \in \mathbb{S}^d,\ r, d \in \mathbb{R}, \\ (d)\text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{A}^\ell(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{cases} \tag{3.18}$$

La fonction de relaxation $\mathcal{Q}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\text{ il existe } L_{\mathcal{Q}^\ell} > 0 \text{ telle que } \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \quad r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad ||\mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi_1, r_1, d_1) - \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi_2, r_2, d_2)|| \leq L_{\mathcal{Q}^\ell}(||\xi_1 - \xi_2|| + \\ \quad | r_1 - r_2 | + | d_1 - d_2 |) \quad \forall t \in (0, T) \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b)\text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } t \in (0, T),\ \xi \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}, \\ (c)\text{ l'application } t \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi, r, d) \text{ est continue dans } (0, T) \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}, \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (d)\text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell, \forall t \in (0, T). \end{cases} \tag{3.19}$$

La fonction d'énergie $\Theta^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } L_{\Theta^\ell} > 0 \text{ telle que } \forall \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad |\Theta^\ell(x, \eta_1, \xi_1, \alpha_1, d_1) - \Theta^\ell(x, \eta_2, \xi_2, \alpha_2, d_2)| \leq L_{\Theta^\ell}(||\eta_1 - \eta_2|| + ||\xi_1 - \xi_2|| \\ \quad + \mid \alpha_1 - \alpha_2 \mid + \mid d_1 - d_2 \mid), \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, \eta, \xi, \alpha, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \eta, \xi \in \mathbb{S}^d \; et \; \alpha, d \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, 0, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell), \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, \eta, \xi, \alpha, d) \text{ est borné pour tout} \\ \quad \eta, \xi \in \mathbb{S}^d, \alpha, d \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{cases} \tag{3.20}$$

La fonction source d'endommagement $\phi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } L_{\phi^\ell} > 0 \text{ telle que } \forall \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad |\phi^\ell(x, \eta_1, \xi_1, \alpha_1, d_1) - \phi^\ell(x, \eta_2, \xi_2, \alpha_2, d_2)| \leq L_{\phi^\ell}(||\eta_1 - \eta_2|| + \\ \quad ||\xi_1 - \xi_2|| + \mid \alpha_1 - \alpha_2 \mid + \mid d_1 - d_2 \mid) \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \phi^\ell(x, \eta, \xi, \alpha, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \eta, \xi \in \mathbb{S}^d \; et \; \alpha, d \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \phi^\ell(x, 0, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell). \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \phi^\ell(x, \eta, \xi, \alpha, d) \text{ est borné,} \\ \quad\quad \forall \eta, \xi \in \mathbb{S}^d, \alpha, d \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{cases} \tag{3.21}$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \; \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e^\ell_{ijk}(x)\tau_{jk}), \; \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) \; e^\ell_{ijk} = e^\ell_{ikj} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{cases} \tag{3.22}$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \; \mathcal{G}^\ell(x, E) = (b^\ell_{ij}(x)E_j), \; b^\ell_{ij} = b^\ell_{ji}, \; b^\ell_{ij} \in L^\infty(\Omega^\ell) \quad , 1 \leq i, j \leq d, \\ (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ telle que } \quad \mathcal{G}^\ell E.E \geq m_{\mathcal{G}^\ell}||E||^2, \forall E = (E_{ij}) \in \mathbb{R}^d, \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{cases} \tag{3.23}$$

La fonction de taux d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } L_{H_{ad}} > 0 \text{ telle que } \forall \beta_1, \beta_2, \xi_1, \xi_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^d, \\ \quad \mid H_{ad}(x, \beta_1, \xi_1, r_1, d_1) - H_{ad}(x, \beta_2, \xi_2, r_2, d_2) \mid \leq \\ \quad L_{H_{ad}}(\mid \beta_1 - \beta_2 \mid + \mid \xi_1 - \xi_2 \mid + \mid r_1 - r_2 \mid + \|d_1 - d_2\|), \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad \text{pour tout } \beta, \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^d, \\ (c) \text{ l'application } (\beta, \xi, r, d) \longmapsto H_{ad}(\beta, \xi, r, d) \text{ est continue sur} \\ \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (d) \ H_{ad}(x, 0, \xi, r, d) = 0 \text{ pour tout } \xi, r \in \mathbb{R}, \ d \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (e) \ H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \geq 0, \forall \ \beta \leq 0, \xi, r \in \mathbb{R}, \ d \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \ \textit{et} \\ \quad H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \leq 0, \forall \ \beta \geq 1, \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{3.24}$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que } \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \\ |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) \ (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \ \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \ \text{pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (d) \ p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } \ r \leq 0, \ \text{p.p } x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{3.25}$$

Les coefficients de l'adhésion γ_ν et γ_τ satisfont aux conditions

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \gamma_\nu, \gamma_\tau \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{3.26}$$

Les forces volumiques f_0^ℓ , les tractions surfaciques f_2^ℓ, les charges électriques volumiques q_0^ℓ , les charges électriques surfaciques q_2^ℓ et la source de chaleur volumique ρ^ℓ ont la régularité

$$\begin{gathered} f_0^\ell \in C(0, T; H^\ell), \qquad f_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \\ q_0^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \qquad q_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \\ \rho^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)). \end{gathered} \tag{3.27}$$

Les coefficients d'énergie $\kappa_0^\ell, \lambda_0^\ell$ et le coefficient de diffusion des micro-fissures κ^ℓ satisfont

$$\kappa_0^\ell > 0, \qquad \lambda_0^\ell > 0, \qquad \kappa^\ell > 0. \tag{3.28}$$

Tandis que le coefficient de frottement μ satisfait

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \tag{3.29}$$

Le champ initial d'endommagement α_0^ℓ satisfait

$$\alpha_0^\ell \in K^\ell, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \tag{3.30}$$

où K^ℓ désigne l'ensemble d'endommagement admissible défini par (1.17).
Le champ initial d'adhésion β_0 satisfait

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3),\ 0 \leq \beta_0 \leq 1,\ \text{p.p. sur } \Gamma_3, \tag{3.31}$$

et le champ initial de déplacement u_0^ℓ satisfait

$$u_0^\ell \in V^\ell. \tag{3.32}$$

Finalement, le champ initial de température θ_0^ℓ satisfait

$$\theta_0^\ell \in H^1(\Omega^\ell). \tag{3.33}$$

Le théorème de représentation de Riesz nous permet de définir les fonctions

$$f = (f^1, f^2) : [0,T] \longrightarrow \mathrm{V} \ \text{ et } \ q = (q^1, q^2) : [0,T] \longrightarrow \mathrm{W},$$

comme suit

$$(f(t), v)_V = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da, \quad \forall v \in V,\ t \in [0,T], \tag{3.34}$$

$$(q(t), \zeta)_{\mathrm{W}} = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \zeta^\ell dx - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \zeta^\ell da, \quad \forall \zeta \in \mathrm{W},\ t \in [0,T]. \tag{3.35}$$

Les conditions (3.27) impliquent

$$f \in C(0,T;V), \quad q \in C(0,T;W). \tag{3.36}$$

Nous introduisons les formes bilinéaires suivantes $a_0 : E_1 \times E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$,
$a : E_1 \times E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$a_0(\zeta,\xi) = \sum_{\ell=1}^{2} \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\zeta^\ell \cdot \nabla\xi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^{2} \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \zeta^\ell \xi^\ell da, \tag{3.37}$$

$$a(\zeta,\xi) = \sum_{\ell=1}^{2} \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\zeta^\ell \cdot \nabla\xi^\ell dx. \tag{3.38}$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suite $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta,u,v) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])[v_\nu] + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])[v_\tau]) da, \tag{3.39}$$

et la fonctionnelle de compliance normale $j_{\nu c} : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ par

$$j_{\nu c}(u,v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu])[v_\nu] da, \tag{3.40}$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ par

$$j_{fr}(u,v) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [v_\tau] \| da. \tag{3.41}$$

Les conditions (3.25) et (3.29) entraînent que les intégrales dans (3.40) et (3.41) sont bien définies.

A l'aide des formules de Green (2.7) on voit directement que si u, σ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.5), (3.7), (3.10) et (3.11) avec (3.39), (3.40) et (3.41) pour tout $t \in [0,T]$ on déduit que

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t))_{\mathcal{H}^\ell} + (Div\sigma^\ell, v^\ell - u^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in \mathrm{V}^\ell.$$

On a

$$\int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell(\varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)))dx + \int_{\Omega^\ell} Div\sigma^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))dx = \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da$$
$$+ \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da + \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in \mathrm{V}^\ell.$$

D'après (3.5), (3.7) et (3.8) on a

$$\int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell(\varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)))dx - \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))dx = \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da$$
$$+ \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in \mathrm{V}^\ell.$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\int_{\Omega^1} \sigma^1(\varepsilon(v^1) - \varepsilon(u^1(t)))dx - \int_{\Omega^1} f_0^1 \cdot (v^1 - u^1(t))dx = \int_{\Gamma_2} f_2^1 \cdot (v^1 - u^1(t))da.$$

$$+ \int_{\Gamma_3^1} \sigma^1 \nu^1 \cdot (v^1 - u^1(t))da, \quad \forall v^1, u^1 \in \mathrm{V}^1. \tag{3.42}$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\int_{\Omega^2} \sigma^2(\varepsilon(v^2) - \varepsilon(u^2(t)))dx - \int_{\Omega^2} f_0^2 \cdot (v^2 - u^2(t))dx = \int_{\Gamma_2^2} f_2^1 \cdot (v^2 - u^2(t))da$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \sigma^2 \nu^2 \cdot (v^2 - u^2(t))da, \quad \forall v^2, u^2 \in \mathrm{V}^2. \tag{3.43}$$

En additionnant (3.42) et (3.43)

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell(\varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)))dx - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))dx = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in \mathrm{V}^\ell.$$

Alors

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t))\Big)_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))dx = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da +$$

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in \mathrm{V}^\ell.$$

Donc

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t))\Big)_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))dx + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da +$$

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in \mathrm{V}^\ell.$$

D'après (3.34) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t))\Big)_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), v - u(t))_{\mathrm{V}} + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da. \tag{3.44}$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t))da$

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\ell\nu^\ell\cdot(v^\ell-u^\ell(t))da &= \int_{\Gamma_3}\sigma^1\nu^1\cdot(v^1-u^1(t))da+\int_{\Gamma_3}\sigma^2\nu^2\cdot(v^2-u^2(t))da\\ &= \int_{\Gamma_3}\sigma^1_\nu(v^1_\nu-u^1_\nu(t))da+\int_{\Gamma_3}\sigma^2_\nu(v^2_\nu-u^2_\nu(t))da\\ &+\int_{\Gamma_3}\sigma^1_\tau(v^1_\tau-u^1_\tau(t))da+\int_{\Gamma_3}\sigma^2_\tau(v^2_\tau-u^2_\tau(t))da.\end{aligned}$$

Moyennant (3.10) et (3.11), on a

$$\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\ell\nu^\ell\cdot(v^\ell-u^\ell(t))da=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu([v_\nu-u_\nu(t)])da+\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau([v_\tau-u_\tau(t)])da,$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\ell\nu^\ell\cdot(v^\ell-u^\ell(t))da &= \int_{\Gamma_3}\Big(-p_\nu([u_\nu])+\gamma_\nu\beta^2R_\nu([u_\nu])\Big)([v_\nu-u_\nu(t)])da\\ &+\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau([v_\tau-u_\tau(t)])da. \qquad (3.45)\end{aligned}$$

Nous supposons que $\Gamma_3=\Gamma_3^+\cup\Gamma_3^-$, où

$\Gamma_3^+=\{x\in\Gamma_3\ /\quad \|\ \sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\ \|<\mu p_\nu([u_\nu])\}$,

$\Gamma_3^-=\{x\in\Gamma_3\ /\quad \|\ \sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\ \|=\mu p_\nu([u_\nu])\}$.

D'où

$$\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau([v_\tau-u_\tau(t)])da=\int_{\Gamma_3^+}\sigma_\tau([v_\tau-u_\tau(t)])da+\int_{\Gamma_3^-}\sigma_\tau([v_\tau-u_\tau(t)])da.$$

Pour $[u_\tau]$:

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\int_{\Gamma_3^+}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([u_\tau])da\geq-\int_{\Gamma_3^+}\|\ \sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\ \|\|\ [u_\tau]\ \|\ da.$$

Maintenant, en utilisant (3.11)

$$\int_{\Gamma_3^+}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([u_\tau])da\geq-\int_{\Gamma_3^+}\mu p_\nu([u_\nu])\ \|\ [u_\tau]\ \|\ da=0, \qquad (3.46)$$

et

$$\int_{\Gamma_3^-}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([u_\tau])da=-\int_{\Gamma_3^-}\lambda[u_\tau][u_\tau]da.$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3^-}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([u_\tau])da &= -\lambda\int_{\Gamma_3^-}\|\ [u_\tau]\ \|^2\ da\\ &= -\int_{\Gamma_3^-}\|\ \sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\ \|\|\ [u_\tau]\ \|\ da\\ &= -\int_{\Gamma_3^-}\mu p_\nu([u_\nu])\ \|\ [u_\tau]\ \|\ da,\end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Gamma_3^-}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([u_\tau])da=-\int_{\Gamma_3^-}\mu p_\nu([u_\nu])\|[u_\tau]\|da. \tag{3.47}$$

Pour $[v_\tau]$:

$$\int_{\Gamma_3^-}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([v_\tau])da=-\int_{\Gamma_3^-}\lambda[u_\tau][v_\tau]da.$$

Ainsi on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3^-}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([v_\tau])da&\geq-\lambda\int_{\Gamma_3^-}\parallel[u_\tau]\parallel\parallel[v_\tau]\parallel da\\&\geq-\int_{\Gamma_3^-}\mu p_\nu([u_\nu])\parallel[v_\tau]\parallel da.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Nous utilisons l'égalité (3.47) et l'inégalité (3.48) pour trouver

$$\int_{\Gamma_3^-}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([v_\tau-u_\tau])da\geq-\int_{\Gamma_3^-}\mu p_\nu([u_\nu])(\parallel[v_\tau]\parallel-\parallel[u_\tau]\parallel)da, \tag{3.49}$$

et de (3.46) et (3.49), il vient

$$\int_{\Gamma_3}\Big(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau])\Big)([v_\tau-u_\tau])da\geq-\int_{\Gamma_3}\mu p_\nu([u_\nu])(\parallel[v_\tau]\parallel-\parallel[u_\tau]\parallel)da. \tag{3.50}$$

En combinant les inégalités (3.45) et (3.50), d'où

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\sigma^\ell,\varepsilon(v^\ell)-\varepsilon(u^\ell(t))\Big)_{\mathcal{H}^\ell}&\geq(f(t),v-u(t))_{\mathrm{V}}+\int_{\Gamma_3}\gamma_\nu\beta^2R_\nu([u_\nu])([v_\nu-u_\nu(t)])da\\&-\int_{\Gamma_3}\gamma_\tau\beta^2R_\tau([u_\tau]))([v_\tau-u_\tau(t)])da-\int_{\Gamma_3}\mu p_\nu([u_\nu])(\parallel[v_\tau]\parallel-\parallel[u_\tau(t)]\parallel)da\\&-\int_{\Gamma_3}p_\nu([u_\nu])([v_\nu-u_\nu(t)])da,\end{aligned}$$

d'après (3.39), (3.40) et (3.41) on a

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\sigma^\ell,\varepsilon(v^\ell)-\varepsilon(u^\ell(t))\Big)_{\mathcal{H}^\ell}+j_{ad}(\beta(t),u(t),v-u(t))+j_{fr}(u(t),v)-\\&\qquad j_{fr}(u(t),u(t))+j_{\nu c}(u(t),v-u(t))\geq(f(t),v-u(t))_V,\ \forall v,u\in V.\end{aligned} \tag{3.51}$$

En utilisant la formule de Green (2.19) pour les inconnues électriques du problème, ainsi que les conditions (3.6), (3.14) et la définition (3.35) on a

$$(D^\ell,\nabla\phi^\ell)_{H^\ell}+(divD^\ell,\phi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}=\int_{\Gamma^\ell}D^\ell\cdot\nu^\ell\phi^\ell da,\quad\forall\phi^\ell\in H^1(\Omega^\ell),$$

d'où

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla\phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} divD^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H^1(\Omega^\ell). \tag{3.52}$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (3.14)

$$\int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da = 0,$$

alors

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla\phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} divD^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H^1(\Omega^\ell). \tag{3.53}$$

On a d'après (3.6) et (3.15)

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla\phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H^1(\Omega^\ell). \tag{3.54}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1 \cdot \nabla\phi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1 \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1 \cdot \phi^1 da, \quad \forall \phi^1 \in H^1(\Omega^1). \tag{3.55}$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} D^2 \cdot \nabla\phi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2 \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2 \cdot \phi^2 da, \quad \forall \phi^2 \in H^1(\Omega^2), \tag{3.56}$$

on additionnant (3.55) et (3.56) on a

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla\phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da,$$

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(D^\ell, \nabla\phi^\ell \Big)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da = 0.$$

On a d'après (3.35) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(D^\ell, \nabla\phi^\ell \Big)_{H^\ell} + (q(t), \phi)_{\mathrm{W}} = 0.$$

De (3.2), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell(t))), \nabla\phi^\ell \Big)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_{\mathrm{W}}, \quad \forall \phi \in \mathrm{W}, \ t \in [0, T]. \tag{3.57}$$

Maintenant, pour les inconnues des températures du problème, pour tout $t \in [0,T]$ et l'équation (3.4), nous obtenons

$$(\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} - (\kappa_0^\ell \Delta\theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \big(\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell\big)_{L^2(\Omega^\ell)},$$

$$\forall \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad \ell = 1,2. \tag{3.58}$$

En utilisant la formule de Green (2.8), pour $\ell = 1,2$ on trouve

$$-\kappa_0^\ell(\Delta\theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\theta^\ell(t) \cdot \nabla\xi^\ell dx - \kappa_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial^\ell \theta^\ell(t)}{\partial \nu^\ell}\, \xi^\ell da, \quad \forall \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell).$$

On a d'après (3.13)

$$-\kappa_0^\ell(\Delta\theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\theta^\ell(t) \cdot \nabla\xi^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t)\, \xi^\ell da, \quad \forall \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad \ell = 1,2. \tag{3.59}$$

En combinant les inégalités (3.58) et (3.59), on a

$$(\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\theta^\ell(t) \cdot \nabla\xi^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t) \cdot \xi^\ell da$$
$$= \big(\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell\big)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad \ell = 1,2.$$

Additionnons pour $\ell = 1,2$ d'où

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell\Big)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^{2} \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\theta^\ell(t) \cdot \nabla\xi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^{2} \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t) \cdot \xi^\ell da$$
$$= \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell\Big)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi = (\xi^1, \xi^2) \in E_1.$$

D'après (3.37), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell\Big)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta(t), \xi) = \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell\Big)_{L^2(\Omega^\ell)},$$

$$\forall \xi = (\xi^1, \xi^2) \in E_1. \tag{3.60}$$

Maintenant, pour les inconnues d'endommagements, soit $\alpha^\ell(t) \in K^\ell$, $\ell = 1,2$ et pour tout $t \in [0,T]$. La définition 2.4.4 de $\partial\psi_{K^\ell}(\alpha^\ell)$ et de (3.3), on obtient

$$\Big(\phi^\ell\big(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)\big) - \dot{\alpha}^\ell(t) + \kappa^\ell \Delta\alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)} \le 0, \quad \forall \xi^\ell \in K^\ell.$$

Donc

$$\Big(\phi^\ell\big(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)\big), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)}$$
$$\leq \left(\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\right)_{L^2(\Omega^\ell)} - \kappa^\ell \left(\Delta\alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\right)_{L^2(\Omega^\ell)}.$$

En utilisant la formule de Green (2.8) et la condition aux limites (3.12) de $\mathcal{P}_1$

$$\left(\Delta\alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \left(\nabla\alpha^\ell(t), \nabla(\xi^\ell - \alpha^\ell(t))\right)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial\alpha^\ell(t)}{\partial\nu} \cdot (\xi^\ell - \alpha^\ell(t))da,$$

$$\left(\Delta\alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\right)_{L^2(\Omega^\ell)} = -\int_{\Omega^\ell} \nabla\alpha^\ell(t) \cdot \nabla(\xi^\ell - \alpha^\ell(t))dx,$$

en suite

$$\left(\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\alpha^\ell(t) \cdot \nabla(\xi^\ell - \alpha^\ell(t))dx$$
$$\geq \Big(\phi^\ell\big(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)\big), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in K^\ell,$$

additionnons pour $\ell = 1, 2$ il vient

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^{2} \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\alpha^\ell(t) \cdot \nabla(\xi^\ell - \alpha^\ell(t))dx$$
$$\geq \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\phi^\ell\big(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)\big), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi \in K.$$

La définition (3.38) de la forme bilinéaire a permet de donner

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t))$$
$$\geq \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\phi^\ell\big(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)\big), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi \in K. \tag{3.61}$$

Finalement, de (3.1), (3.2), (3.51), (3.57), (3.60), (3.61), (3.9), (3.16) et (3.17), on obtient la formulation variationnelle suivante du problème thermo-électro-élastique $\mathcal{P}_1$.

Probléme $\mathcal{P}_1^V$. Trouver le champ des déplacements $u = (u^1, u^2) : [0, T] \to V$, le champ des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) : [0, T] \to \mathcal{H}$, le champ de potentiel électrique $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \to W$, le champ de température $\theta = (\theta^1, \theta^2) : [0, T] \to E_0$, le champ d'endommagement $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0, T] \to E_0$, le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \to L^2(\Gamma_3)$ ainsi le champ des déplacements électriques $D = (D^1, D^2) : [0, T] \to \mathcal{W}$ tels que pour tout $t \in [0, T]$

$$\sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell\big(t-s, \varepsilon(u^\ell(s), \theta^\ell(s), \alpha^\ell(s)\big)ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell(t)), \tag{3.62}$$

$$D^\ell(t) = \mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell(t))), \tag{3.63}$$

$$\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\sigma^\ell(t), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t))\Big)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v-u(t)) + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), u(t)) + j_{\nu c}(u(t), v-u(t)) \geq (f(t), v-u(t))_V, \quad \forall v \in V, \tag{3.64}$$

$$\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\dot\theta^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell\Big)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta(t), \xi) = \sum_{\ell=1}^{2}\Big(\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t), \xi^\ell\Big)_{L^2(\Omega^\ell)}, \ \forall \xi \in E_1, \tag{3.65}$$

$$\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\dot\alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha(t), \xi-\alpha(t)) \geq \sum_{\ell=1}^{2}\Big(\phi^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)}, \ \alpha(t) \in K, \forall \xi \in K, \tag{3.66}$$

$$\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell(t)), \nabla\phi^\ell\Big)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \tag{3.67}$$

$$\dot\beta(t) = H_{ad}(\beta(t), \xi_\beta(t), R_\nu([u_\nu(t)]), R_\tau([u_\tau(t)]), \tag{3.68}$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \tag{3.69}$$

On a bien que le problème $\mathcal{P}_1^V$ est formulé dans les termes, de champ des déplacements, de champ des contraintes, de champ de potentiel électrique, de champ de température, de champ d'endommagement, d'un champ d'adhésion et de champ de déplacements électriques. L'existence de la solution unique du Problème $\mathcal{P}_1^V$ est indiquée et prouvée dans la section suivante.

Remarque 3.2.1. *On remarque que, dans le problème $\mathcal{P}_1^V$, nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \beta \leq 1$, en effet, les équations (3.68) et (3.24) garantit que $\beta(x,t) \leq \beta_0(t)$ et par conséquent l'hypothèse (3.31) montre que $\beta(x,t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$, d'autre part, si $\beta(x,t_0) = 0$ à l'instant t_0, il résulte de (3.68) et (3.24) que $\dot\beta(x,t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc $\beta(x,t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ p.p. $x \in \Gamma_3$, nous concluons que $0 \leq \beta(x,t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

On note tout d'abord que les fonctions j_{ad} et $j_{\nu c}$ sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v), \quad j_{\nu c}(u, -v) = -j_{\nu c}(u, v). \tag{3.70}$$

En utilisant (3.40), on obtient

$$|j_{\nu c}(u_1, v) - j_{\nu c}(u_2, v)| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])||[v_\nu]|da,$$

et d'après (3.25.a) et (2.14) il résulte

$$|j_{\nu c}(u_1, v) - j_{\nu c}(u_2, v)| \leq c||u_1 - u_2||_V ||v||_V, \quad \forall u_1, u_2, v \in V. \tag{3.71}$$

Nous utilisons encore une fois (3.40), pour obtenir

$$j_{\nu c}(u_1, u_2 - u_1) + j_{\nu c}(u_2, u_1 - u_2) = -\int_{\Gamma_3} (p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}]))([u_{1\nu}] - [u_{2\nu}])da,$$

et alors, (3.25)(b) implique

$$j_{\nu c}(u_1, u_2 - u_1) + j_{\nu c}(u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \tag{3.72}$$

On pose $v_2 - v_1 = u_2 - u_1$

$$j_{\nu c}(u_1, v_2) - j_{\nu c}(u_1, v_1) + j_{\nu c}(u_2, v_1) - j_{\nu c}(u_2, v_2) \leq 0, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V. \tag{3.73}$$

Ainsi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans l'inégalité (3.25)(d) et (3.72) pour obtenir

$$j_{\nu c}(v, v) \geq 0.$$

Ensuite, en utilisant (3.39) et les inégalités

$$|R_\nu(u_\nu)| \leq L; \quad ||R_\tau(u_\tau)|| \leq L; \quad |\beta_1| \leq 1; \quad |\beta_2| \leq 1,$$

nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2|||u_1 - u_2||da,$$

en combinant cette inégalité avec (2.14), il résulte

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c||\beta_1 - \beta_2||_{L^2(\Gamma_3)} ||u_1 - u_2||_V, \tag{3.74}$$

en choisissons $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (3.74), nous trouvons

$$j_{ad}(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0, \tag{3.75}$$

alors que R_ν, R_τ sont des opérateurs de Lipschitz, on obtient après des manipulations semblables au dessus

$$|j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v)| \leq c||u_1 - u_2||_V ||v||_V. \tag{3.76}$$

Ainsi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (3.75), ensuite nous utilisons les égalités $R_\nu(0) = 0, R_\tau(0) = 0$ pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0.$$

Maintenant, nous utilisons (3.41) pour trouver

$$\begin{aligned} & j_{fr}(u_1, v_1) - j_{fr}(u_1, v_2) + j_{fr}(u_2, v_2) - j_{fr}(u_2, v_1) \\ & \leq \int_{\Gamma_3} \mu |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| \, ||[v_{1\tau}] - [v_{2\tau}]|| da. \end{aligned}$$

Moyennant l'hypothèse (3.25)(a) et l'inégalité (2.14), on trouve

$$j_{fr}(u_1, v_2) - j_{fr}(u_1, v_1) + j_{fr}(u_2, v_1) - j_{fr}(u_2, v_2) \leq c_0^2 L_\nu ||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)} ||u_1 - u_2||_V ||v_1 - v_2||_V. \tag{3.77}$$

Les inégalités (3.74)-(3.77) combinées avec les égalités (3.70) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre.

Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du problème $\mathcal{P}_1^V$, dont la démonstration sera détaillée dans la section suivante.

3.3 Existence et unicité de la solution

L'objectif principal dans ce paragraphe est d'obtenir le résultat suivant d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel $\mathcal{P}_1^V$.

3.3.1 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 3.3.1. *Supposons que les hypothèses (3.18)-(3.33) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, H_{ad}$ et $\mathcal{A}^\ell$, pour $\ell = 1, 2$ telle que,* *si* $||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, *alors le problème* $\mathcal{P}_1^V$ *admet une solution unique* $\{u, \sigma, \varphi, \theta, \alpha, \beta, D\}$, *de plus la solution satisfait*

$$u \in C(0,T;V), \tag{3.78}$$

$$\varphi \in C(0,T;W), \tag{3.79}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap L^\infty(0,T;Z), \tag{3.80}$$

$$\sigma \in C(0,T;\mathcal{H}_1), \tag{3.81}$$

$$\theta \in L^2(0,T;E_1) \cap C(0,T;E_0), \tag{3.82}$$

$$\alpha \in L^2(0,T;E_1) \cap W^{1,2}(0,T;E_0), \tag{3.83}$$

$$D \in C(0,T;\mathcal{W}). \tag{3.84}$$

La solution $\{u, \sigma, \varphi, \theta, \alpha, \beta, D\}$ qui satisfait le problème $\mathcal{P}_1^V$ est appelée la solution faible du problème $\mathcal{P}_1$. Nous concluons que, d'après de les hypothèses (3.18)-(3.33), le problème $\mathcal{P}_1^V$ a une solution unique qui satisfait la régularité (3.78)-(3.84). La démonstration du théorème 3.3.1 sera réalisé en plusieurs étapes et qui est basée sur des arguments des équations non linéaires avec des opérateurs monotones, un résultat d'existence et d'unicité classique sur des inégalités paraboliques et des arguments en point fixe. Nous considérons que c est une constante positive qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \mathcal{A}^\ell, \mathcal{G}^\ell, \mathcal{Q}^\ell, \mathcal{E}^\ell, \gamma_\nu, \gamma_\tau, \Theta^\ell$, et ϕ^ℓ $(\ell = 1,2)$, mais ne dépend pas ni de t ni du reste des données d'entrée et dont sa valeur peut changer d'un en droit à l'autre.

Première étape.

Soit $(g,h) \in C(0,T,E_0 \times E_0)$, nous considérons le problème auxiliaire.

Problème $\mathcal{P}_1^{(g,h)}$. Trouver $\theta_g : [0,T] \to E_0$ et $\alpha_h : [0,T] \to E_0$, tels que

$$\sum_{\ell=1}^{2} \left(\dot{\theta}_g^\ell(t) - g^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell\right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta_g^\ell(t), \xi) = 0, \quad \forall \xi \in E_0, \tag{3.85}$$

$$\alpha_h(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^{2} \left(\dot{\alpha}_h^\ell(t) - h^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_h^\ell(t)\right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha_h(t), \xi - \alpha_h(t)) \geq 0, \quad \forall \xi \in K, \tag{3.86}$$

$$\theta_g(0) = \theta_0, \quad \alpha_h(0) = \alpha_0, \tag{3.87}$$

où $K = K^1 \times K^2$.

Lemme 3.3.1. *Il existe un unique solution* $\{\theta_g, \alpha_h\}$ *au problème auxiliaire* $\mathcal{P}_1^{(g,h)}$ *satisfaisant les régularités (3.82) et (3.83).*

Démonstration. L'inclusion de la trace de $(E_1, ||.||_{E_1})$ dans $(E_0, ||.||_{E_0})$ est continue et dense, nous pouvons écrire un Triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 \subset E_1',$$

on considère l'opérateur linéaire $A_0 : E_1 \to E_1'$ défini par :

$$\langle A_0\zeta, \xi\rangle_{E_1'\times E_1} = a_0(\zeta, \xi), \quad \forall \zeta, \xi \in E_1, \tag{3.88}$$

nous utilisons (3.88) et la définition (3.37) on peut écrire pour tout $\zeta^\ell, \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell)$

$$|\langle A_0\zeta, \xi\rangle_{E_1'\times E_1}| \leq \sum_{\ell=1}^{2} \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} |\nabla\zeta^\ell.\nabla\xi^\ell| dx + \sum_{\ell=1}^{2} \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} |\zeta^\ell.\xi^\ell| da,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$|\langle A_0\zeta, \xi\rangle_{E_1'\times E_1}| \leq \sum_{\ell=1}^{2} \kappa_0^\ell ||\nabla\zeta^\ell||_{H^\ell}.||\nabla\xi^\ell||_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} \lambda_0^\ell ||\zeta^\ell||_{L^2(\Gamma^\ell)} ||\xi^\ell||_{L^2(\Gamma^\ell)}, \tag{3.89}$$

gardant en tête le théorème 2.1.6 de trace de sobolev, l'inégalité (3.89) devient

$$||A_0\zeta||_{E_1'} \leq c||\zeta||_{E_1}, \tag{3.90}$$

ce qui montre qui $A_0 : E_1 \to E_1'$ est continu et donc hemicontinu.
D'après la définition (3.88) de l'opérateur A_0, on vérifie

$$\langle A_0\zeta, \zeta\rangle_{E_1'\times E_1} \geq 0,$$

i.e. que $A_0 : E_1 \to E_1'$ est un opérateur monotone.

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Friedrichs-Poincaré, pour obtenir

$$\int_{\Omega^\ell} |\nabla\zeta^\ell|^2 dx + \frac{\lambda_0^\ell}{\kappa_0^\ell} \int_{\Gamma^\ell} |\zeta^\ell|^2 da \geq c_0^\ell \int_{\Omega^\ell} |\zeta^\ell|^2 dx, \quad \forall \zeta^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad \ell = 1, 2,$$

et d'où

$$a_0(\zeta, \zeta) \geq c_1 ||\zeta||_{E_1}^2, \quad \forall \zeta \in E_1,$$

où $c_1 = \min(\kappa_0^1 c_0^1, \kappa_0^2 c_0^2)$, a_0 est $E_1 - elliptic$.
Donc

$$\langle A_0\zeta, \zeta\rangle_{E_1'\times E_1} \geq c_1 ||\zeta||_{E_1}^2, \quad \forall \zeta \in E_1.$$

Finalement, nous remarquons toutes les conditions du théorème 2.6.1 sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction θ_g satisfait

$$\theta_g \in L^2(0,T;E_1) \cap C(0,T;E_0), \quad \dot{\theta}_g \in L^2(0,T;E_1'),$$
$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\dot{\theta}_g^\ell(t) - g^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell\Big)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta_g^\ell(t),\xi) = 0, \quad \forall \xi \in E_1, \quad \text{p.p. } t \in [0,T],$$
$$\theta_g(0) = \theta_0.$$

On sait que l'ensemble du champ d'endommagement admissible K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans E_1, ainsi, le champ initial d'endommagement $\alpha_0 \in K$, en utilisant la définition (3.38) de la forme bilinéaire a pour tout $\zeta, \xi \in E_1$, on a $a(\cdot,\cdot) : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}$ symétrique

$$a(\zeta,\xi) = a(\xi,\zeta),$$

et continue puisque

$$\begin{aligned}
|a(\zeta,\xi)| &\leq \sum_{\ell=1}^{2} \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} |\nabla\zeta^\ell \cdot \nabla\xi^\ell| dx \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{2} \kappa^\ell \Big(\int_{\Omega^\ell} |\nabla\zeta^\ell|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\Omega^\ell} |\nabla\xi^\ell|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{2} \kappa^\ell ||\zeta^\ell||_{H^1(\Omega^\ell)} ||\xi^\ell||_{H^1(\Omega^\ell)}.
\end{aligned}$$

On considère $c = \max(\kappa^1, \kappa^2)$ et en appliquant la remarque 2.1.1, il résulte

$$\begin{aligned}
|a(\zeta,\xi)| &\leq c \sum_{\ell=1}^{2} ||\zeta^\ell||_{H^1(\Omega^\ell)} ||\xi^\ell||_{H^1(\Omega^\ell)} \\
&\leq c\Big(\sum_{\ell=1}^{2} ||\zeta^\ell||^2_{H^1(\Omega^\ell)}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\ell=1}^{2} ||\xi^\ell||^2_{H^1(\Omega^\ell)}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= c||\zeta||_{E_1} ||\xi||_{E_1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\xi \in E_1$ nous avons

$$a(\xi,\xi) = k||\nabla\xi||^2_H,$$

alors

$$a(\xi,\xi) + (k+1)||\xi||^2_{E_0} \geq k(||\nabla\xi||^2_H + ||\xi||^2_{E_0}),$$

d'où

$$a(\xi,\xi)+c_2||\xi||^2_{E_0}\geq c_3||\xi||^2_{E_1},$$

$$a(\xi,\xi)+c_2||\xi||^2_{E_0}\geq c_3||\xi||^2_{E_1} \text{ avec } c_2=k+1 \text{ et } c_3=k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 2.6.2 sont vérifiées. Alors, pour tout $\alpha_0\in K$ et $h\in L^2(0,T;E_0)$, il existe une fonction unique α_h satisfait

$$\alpha_h\in L^2(0,T;E_1)\cap W^{1,2}(0,T;E_0),$$

$$\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\dot{\alpha}^\ell_h(t),\xi^\ell-\alpha^\ell_h(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)}+a(\alpha_h(t),\xi-\alpha_h(t))\geq$$
$$\sum_{\ell=1}^{2}\Big(h^\ell(t),\xi^\ell-\alpha^\ell_h(t)\Big)_{L^2(\Omega^\ell)},\quad \forall\xi\in K,\quad p.p.\ \ t\in[0,T],$$

$$\alpha_h(0)=\alpha_0.$$

□

Deuxième étape.

Soit $(g,h,\eta)\in C(0,T;E_0\times E_0\times V)$, nous utilisons les fonctions θ_g,α_h obtenues au lemme 3.3.1 et considérons le problème auxiliaire suivant.

Problème $\mathcal{P}_1^{(g,h,\eta)}$. Trouver $u_{gh\eta}:[0,T]\to V$, $\varphi_{gh\eta}:[0,T]\to W$, $\beta_{gh\eta}:[0,T]\to L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{2}\big(\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell_{gh\eta}(t)),\theta^\ell_g(t),\alpha^\ell_h(t)),\varepsilon(v^\ell)-\varepsilon(u^\ell_{gh\eta}(t))\big)_{\mathcal{H}^\ell}+\\&j_{\nu c}(u_{gh\eta}(t),v-u_{gh\eta}(t))+j_{fr}(u_{gh\eta}(t),v)-j_{fr}(u_{gh\eta}(t),u_{gh\eta}(t))+\\&(\eta(t),v-u_{gh\eta}(t))_V\geq(f(t),v-u_{gh\eta}(t))_V,\ \forall v\in V,\end{aligned}\tag{3.91}$$

$$\sum_{\ell=1}^{2}(\mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell_{gh\eta}(t))+\mathcal{G}^\ell E^\ell(\varphi^\ell_{gh\eta}(t)),\nabla\phi^\ell)_{H^\ell}=(-q(t),\phi)_W,\quad\forall\phi\in W,\tag{3.92}$$

$$\dot{\beta}_{gh\eta}(t)=H_{ad}(\beta_{gh\eta}(t),\xi_{\beta_{gh\eta}}(t),R_\nu([u_{gh\eta\nu}(t)]),R_\tau([u_{gh\eta\tau}(t)])),\tag{3.93}$$

$$u_{gh\eta}(0)=u_0,\quad \beta_{gh\eta}(0)=\beta_0.\tag{3.94}$$

Nous avons les résultats suivants

Lemme 3.3.2. *1. Il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, H_{ad}$ et $\mathcal{A}^\ell$, $\ell = 1, 2$ tel que, si $||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, le problème $\mathcal{P}_1^{(g,h,\eta)}$ a une solution unique $\{u_{gh\eta}, \varphi_{gh\eta}, \beta_{gh\eta}\}$ qui satisfait la régularité (3.78)-(3.80).*
2. Si u_1 et u_2 sont deux solutions vérifiées (3.91) et (3.94) correspondant aux données $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; V)$, alors il existe $c > 0$ telle que

$$||u_1 - u_2||_V \leq c(||\eta_1 - \eta_2||_V + ||f_1 - f_2||_V). \tag{3.95}$$

Démonstration. Nous appliquons le théorème 2.5.2 où $X = V$ avec le produit intérieur $(\cdot, \cdot)_V$ et la norme associée $||\cdot||_V$ définis par (2.11) et (2.12).
Nous utilisons le théorème 2.4.1 de représentation de Riesz-Fréchet pour ceci on va définir l'opérateur $A : V \to V$ par

$$(Au, v)_V = \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta_g^\ell, \alpha_h^\ell), \varepsilon(v^\ell)\Big)_{\mathcal{H}^\ell} \text{ pour tout } u, v \in V. \tag{3.96}$$

Soient maintenant les fonctions $f_\eta : [0, T] \to V,\ \ j : V \times V \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_\eta = f(t) - \eta(t), \tag{3.97}$$

$$j(u, v) = j_{\nu c}(u, v) + j_{fr}(u, v), \quad \forall u, v \in V. \tag{3.98}$$

D'après (3.96), on trouve

$$(Au_1 - Au_2, v)_V = \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u_1^\ell), \theta_g^\ell, \alpha_h^\ell) - \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u_2^\ell), \theta_g^\ell, \alpha_h^\ell), \varepsilon(v^\ell)\Big)_{\mathcal{H}^\ell},$$

alors

$$|(Au_1 - Au_2, v)_V| \leq \sum_{\ell=1}^{2} ||\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u_1^\ell), \theta_g^\ell, \alpha_h^\ell) - \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u_2^\ell), \theta_g^\ell, \alpha_h^\ell)||_{\mathcal{H}^\ell} ||\varepsilon(v^\ell)||_{\mathcal{H}^\ell}$$

En utilisant (3.18), il devient

$$\begin{aligned} |(Au_1 - Au_2, v)_V| &\leq \sum_{\ell=1}^{2} L_{\mathcal{A}^\ell} ||\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)||_{\mathcal{H}^\ell} ||\varepsilon(v^\ell)||_{\mathcal{H}^\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{2} L_{\mathcal{A}^\ell} ||u_1^\ell - u_2^\ell||_{V^\ell} ||v^\ell||_{V^\ell} \\ &\leq L_A \sum_{\ell=1}^{2} ||u_1^\ell - u_2^\ell||_{V^\ell} ||v^\ell||_{V^\ell}, \end{aligned}$$

où $L_A = \max(L_{\mathcal{A}^1}, L_{\mathcal{A}^2})$. On applique l'inégalité de Hölder des sommations (voir la remarque 2.1.1), il devient

$$|(Au_1 - Au_2, v)_V| \leq L_A\Big(\sum_{\ell=1}^{2} ||u_1^\ell - u_2^\ell||^2_{V^\ell}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\ell=1}^{2} ||v^\ell||^2_{V^\ell}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq L_A||u_1 - u_2||_V||v||_V,$$

pour $v = Au_1 - Au_2$, et d'après la définition d'une norme induite par un produit scalaire on obtient

$$||Au_1 - Au_2||_V \leq L_A||u_1 - u_2||_V,$$

donc A est un opérateur lipschitzien.
En appliquant (3.18)(b)

$$\begin{aligned}(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V &= \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\mathcal{A}^\ell\varepsilon(u_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell\varepsilon(u_2^\ell), \varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)\Big)_{\mathcal{H}^\ell}\\
&\geq \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} m_{\mathcal{A}^\ell}||\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)||^2 dx\\
&= \sum_{\ell=1}^{2} m_{\mathcal{A}^\ell}||\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)||^2_{\mathcal{H}^\ell}\\
&= \sum_{\ell=1}^{2} m_{\mathcal{A}^\ell}||u_1^\ell - u_2^\ell||^2_{V^\ell},\end{aligned}$$

soit $m_A = \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})$, alors

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \geq m_A||u_1 - u_2||^2_V,$$

donc A est un opérateur fortement monotone, ensuite il est satisfait les conditions (2.26).
Nous utilisons (3.40) et (3.41) pour voir que la fonctionnelle $j(u, \cdot)$ définie par (3.98) est convexe, propre et continue sur V, donc semi-continue inférieurement ; et par conséquent elle satisfait la condition (2.27)(a). Moyennant (3.25) et (3.29) encore une fois, nous utilisons (3.73), (3.77) et (3.98) pour trouver l'inégalité suivante

$$j_{\nu c}(u_1, v_2) + j_{fr}(u_1, v_2) - j_{\nu c}(u_1, v_1) - j_{fr}(u_1, v_1) + j_{\nu c}(u_2, v_1) + j_{fr}(u_2, v_1)$$
$$-j_{\nu c}(u_2, v_2) - j_{fr}(u_2, v_2) \leq c_0^2 L_\nu||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)}||u_1 - u_2||_V||v_1 - v_2||_V.$$

En utilisant la formule (3.98) de la fonctionnelle j, il devient pour $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$

$$j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq m_j ||u_1 - u_2||_V ||v_1 - v_2||_V \tag{3.99}$$

Ce qui montre que la fonctionnelle j vérifie la condition (2.27)(b) sur $X = V$, de plus en utilisant (3.36) et prenant en considération que $\eta \in C(0,T;V)$, nous concluons de (3.97) que $f_\eta \in C(0,T;V)$, et par conséquent la condition (2.28) est vérifiée, avec $m_j < m_A$ i.e. $||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)} < \dfrac{m_A}{c_0^2 L_\nu} = \mu_0$. Finalement, notons que (3.32) montre que la condition $u_0 \in X$ est satisfaite aussi.
Enfin, en utilisant (3.96)-(3.98) nous trouvons que le lemme 3.3.2 est une conséquence directe du théorème 2.5.2.

Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$, pour simplifier nous notons par $u_{gh\eta}(t_i) = u_i$, $\eta(t_i) = \eta_i$, $f(t_i) = f_i$, $i = 1,2$, en utilisant de argument basé sur (3.91), il résulte

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_2^\ell), \varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)\Big)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{\nu c}(u_1, u_1 - u_2) - j_{\nu c}(u_2, u_1 - u_2)$$
$$-[j_{fr}(u_1,u_2) - j_{fr}(u_1,u_1) + j_{fr}(u_2,u_1) - j_{fr}(u_2,u_2)] + (\eta_1 - \eta_2, u_2 - u_1)_V \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V,$$

en utilisant l'hypothèse (3.18) et les inégalités (3.71), (3.77), ce qui montre que

$$\begin{aligned} m_A ||u_1 - u_1||_V^2 \leq c_0^2 L_\nu ||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)} \big(||u_1 - u_2||_V^2 + ||\eta_1 - \eta_2||_V ||u_1 - u_1||_V \\ + ||f_1 - f_2||_V ||u_1 - u_1||_V\big). \end{aligned} \tag{3.100}$$

Ce qui montre l'inégalité suivante

$$||u_1 - u_1||_V \leq \frac{1}{m_A - c_0^2 L_\nu ||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)}} \big(||\eta_1 - \eta_2||_V + ||f_1 - f_2||_V\big),$$

ou encore

$$||u_1 - u_1||_V \leq c\big(||\eta_1 - \eta_2||_V + ||f_1 - f_2||_V\big). \tag{3.101}$$

telle que $c = \dfrac{1}{m_A - c_0^2 L_\nu ||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)}}$. Gardant à $f \in C(0,T;V)$ et rappelez vous que $\eta \in C(0,T;V)$, et sous l'hypothèse de petitesse $c_0^2 L_\nu ||\mu||_{L^\infty(\Gamma_3)} < m_A$ nous déduisons de l'inégalité (3.101) que l'application $t \longmapsto u_{gh\eta}(t) : [0,T] \longrightarrow V$ est continue, c'est-à-dire que $u_{gh\eta} \in C(0,T;V)$, d'où la régularité (3.78).

Maintenant soit $G : W \times W \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par

$$G(\varphi, \phi) = \sum_{\ell=1}^{2} (\mathcal{G}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \varphi, \phi \in W. \tag{3.102}$$

On utilise (2.18) et (3.23) pour déduire que la forme G est continue et coercive sur W. En outre en utilisant (3.92) et nous appliquons le théorème 2.4.1 de représentation de Riesz-Fréchet pour définir la fonction $w_{gh\eta} : [0,T] \to W$ tel que

$$(w_{gh\eta}(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + \sum_{\ell=1}^{2} (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell_{gh\eta}(t)), \nabla \phi^\ell))_{H^\ell}, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in [0,T].$$

Nous appliquons le théorème 2.4.2 de Lax-Milgram, on en déduire qu'il existe une fonction unique $\varphi_{gh\eta} \in W$ telle que

$$G(\varphi_{gh\eta}(t), \phi) = (w_{gh\eta}(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W. \tag{3.103}$$

De (3.103), on peut conclure que $\varphi_{gh\eta}$ est une solution de l'équation (3.92).
Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$, pour simplifier l'écriture notons par $u_{gh\eta}(t_i) = u_i$, $\varphi_{gh\eta}(t_i) = \varphi_i$, $q(t_i) = q_i$, $i = 1, 2$, en utilisant des arguments basés sur (3.92) nous trouvons

$$\sum_{\ell=1}^{2} \Big(\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell_1) - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell_2), \nabla(\varphi^\ell_1 - \varphi^\ell_2) \Big)_{H^\ell} + G(\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2) = (q_2 - q_1, \varphi_1 - \varphi_2)_W,$$

ensuite, en utilisant les hypothèses (3.22) et (3.23) pour obtenir

$$||\varphi_1 - \varphi_2||_W \le c(||u_1 - u_2||_V + ||q_1 - q_2||_W). \tag{3.104}$$

Comme $u_{gh\eta} \in C(0,T;V)$ et $q \in C(0,T;W)$ nous déduisons de l'inégalité (3.104) que $\varphi_{gh\eta} \in C(0,T;W)$.

D'autre part, nous considérons l'application $H_{gh\eta} : [0,T] \times L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$

$$H_{gh\eta}(t, \beta) = H_{ad}(\beta_{gh\eta}(t), \xi_{gh\eta}, R_\nu([u_{gh\eta\nu}(t)]), R_\tau([u_{\lambda\mu\eta\tau}(t)]).$$

Soient $t \in [0,T]$ et $\beta_1, \beta_2 \in L^2(\Gamma_3)$. On utilise l'hypothèse (3.24) nous avons

$$||H_{gh\eta}(t, \beta_1) - H_{gh\eta}(t, \beta_2)||_{L^2(\Gamma_3)} \le L_{H_{ad}} ||\beta_1 - \beta_2||_{L^2(\Gamma_3)},$$

pour tout $\beta \in L^2(\Gamma_3)$, on a bien

$$\begin{aligned} ||H_{gh\eta}(t, \beta)||_{L^2(\Gamma_3)} &\le L_{H_{ad}} ||\beta||_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\le c. \end{aligned}$$

Alors l'application $H_{gh\eta}$ vérifie toutes les conditions du théorème 2.5.1 de Cauchy-Lipschitz et comme $\beta_0 \in L^2(\Gamma_3)$ alors il existe une fonction unique $\beta_{gh\eta} \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Gamma_3))$

qui satisfait (3.93) et (3.94). Ainsi, d'après les arguments utilisés dans la remarque 3.2.1 et d'après l'hypothèse (3.31) nous déduisons que $0 \leq \beta_{gh\eta} \leq 1$ p.p. $t \in [0,T]$, il résulte d'après la définition (2.15) de l'ensemble Z, que $\beta_{gh\eta} \in Z$. Ce qui complète la preuve de lemme 3.3.2. □

Troisième étape.

On Considère l'élément $\Lambda : C(0,T; V \times E_0 \times E_0) \to C(0,T; V \times E_0 \times E_0)$ défini par

$$\Lambda(\eta, g, h)(t) = (\Lambda_1(\eta, g, h)(t), \Lambda_2(\eta, g, h)(t), \Lambda_3(\eta, g, h)(t)). \tag{3.105}$$

telles que

$$(\Lambda_1(\eta, g, h)(t), v)_V = -\sum_{\ell=1}^{2} \Big((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell_{gh\eta}), \varepsilon(v^\ell)\Big)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_{gh\eta}(t), u_{gh\eta}(t), v)$$

$$+\sum_{\ell=1}^{2} \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell_{gh\eta}(s)), \theta^\ell_g(s), \alpha^\ell_h(s))ds, \varepsilon(v^\ell)\right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v \in V. \tag{3.106}$$

$$\Lambda_2(\eta, g, h) = (\Theta^1(\sigma^1_{gh\eta}, \varepsilon(u^1_{gh\eta}), \theta^1_g, \alpha^1_h), \Theta^2(\sigma^2_{gh\eta}, \varepsilon(u^2_{gh\eta}), \theta^2_g, \alpha^2_h)), \tag{3.107}$$

$$\Lambda_3(\eta, g, h) = (\phi^1(\sigma^1_{gh\eta}, \varepsilon(u^1_{gh\eta}), \theta^1_g, \alpha^1_h), \phi^2(\sigma^2_{gh\eta}, \varepsilon(u^2_{gh\eta}), \theta^2_g, \alpha^2_h)). \tag{3.108}$$

Pour tout $(\eta, g, h) \in C(0,T; V \times E_0 \times E_0)$, où θ_g et α_h représentent le champ de température et le champ d'endommagement obtenus dans le lemme 3.3.1, et $u_{gh\eta}, \varphi_{gh\eta}$ et $\beta_{gh\eta}$ représentent le champ de déplacements, le champ de potentiel électrique et le champ d'adhésion obtenus dans le lemme 3.3.2, et $\sigma^\ell_{gh\eta}$, $D^\ell_{gh\eta}$ sont données par

$$\sigma^\ell_{gh\eta} = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell_{gh\eta}), \theta^\ell_g, \alpha^\ell_h) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell_{gh\eta}(s)), \theta^\ell_g(s), \alpha^\ell_h(s))ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell_{gh\eta}), \tag{3.109}$$

$$D^\ell_{gh\eta} = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell_{gh\eta}) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell_{gh\eta})). \tag{3.110}$$

Lemme 3.3.3. *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $(\eta_*, g_*, h_*) \in C(0,T; V \times E_0 \times E_0)$.*

Démonstration. Soient (η_1, g_1, h_1) et $(\eta_2, g_2, h_2) \in C(0,T;V \times E_0 \times E_0)$, et notée par θ_i, α_i, u_i, φ_i, β_i et σ_i les fonctions obtenue dans le lemme 3.3.1 et lemme 3.3.2, et la relation (3.109) pour $(\eta, g, h) = (\eta_i, g_i, h_i)$; $i = 1, 2$. Soit $t \in [0,T]$.
En utilisant (3.39), nous obtenons

$$||\Lambda_1(\eta_1(t), g_1(t), h_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), g_2(t), h_2(t))||_V^2 \leq \sum_{\ell=1}^{2} ||(\mathcal{E}^\ell)^* \nabla\varphi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla\varphi_2^\ell(t)||_{\mathcal{H}^\ell}^2$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{2} \int_0^t ||\mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_1^\ell(s)), \theta_1^\ell(s), \alpha_1^\ell(s)) - \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_2^\ell(s)), \theta_2^\ell(s), \alpha_2^\ell(s))||_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds$$

$$+||\gamma_\nu||_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 ||\beta_1^2(t) R_\nu([u_{1\nu}(t)]) - \beta_2^2(t) R_\nu([u_{2\nu}(t)])||_{L^2(\Gamma_3)}^2$$

$$+||\gamma_\tau||_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 ||\beta_1^2(t) R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - \beta_2^2(t) R_\tau([u_{2\tau}(t)])||_{L^2(\Gamma_3)}^2,$$

en utilisant (3.19), (3.22)

$$||\Lambda_1(\eta_1(t), g_1(t), h_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), g_2(t), h_2(t))||_V^2 \leq$$

$$\sum_{\ell=1}^{2} L_{\mathcal{Q}^\ell} \Big(\int_0^t ||u_1^\ell(s) - u_2^\ell(s)||_{V^\ell}^2 + \int_0^t ||\theta_1^\ell(s) - \theta_2^\ell(s)||_{L^2(\Omega^\ell)}^2 + \int_0^t ||\alpha_1^\ell(s) - \alpha_2^\ell(s)||_{L^2(\Omega^\ell)}^2 \Big) +$$

$$\sum_{\ell=1}^{2} ||(\mathcal{E}^\ell)^*||_{L^\infty(\Omega^\ell)}^2 ||\nabla\varphi_1^\ell(t) - \nabla\varphi_1^\ell(t)||_{H^\ell}^2 +$$

$$||\gamma_\nu||_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 ||\beta_1^2(t) R_\nu([u_{1\nu}(t)]) - \beta_2^2(t) R_\nu([u_{2\nu}(t)])||_{L^2(\Gamma_3)}^2 +$$

$$||\gamma_\tau||_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 ||\beta_1^2(t) R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - \beta_2^2(t) R_\tau([u_{2\tau}(t)])||_{L^2(\Gamma_3)}^2,$$

et en utilisant la définition de R_ν et R_τ et (2.18) on a
$||\Lambda_1(\eta_1(t), g_1(t), h_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), g_2(t), h_2(t))||_V^2 \leq$

$$\max(L_{\mathcal{Q}^1}, L_{\mathcal{Q}^2}) \Big(\int_0^t ||u_1(s) - u_2(s)||_V^2 + \int_0^t ||\theta_1(s) - \theta_2(s)||_{E_0}^2 + \int_0^t ||\alpha_1(s) - \alpha_2(s)||_{E_0}^2 \Big)$$

$$+ \max(||(\mathcal{E}^1)^*||_{L^\infty(\Omega^\ell)}^2, ||(\mathcal{E}^2)^*||_{L^\infty(\Omega^\ell)}^2) ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||_W^2 + c_0 ||\beta_1(t) - \beta_2(t)||_{L^2(\Gamma_3)}^2,$$

ou encore

$$||\Lambda_1(\eta_1(t), g_1(t), h_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), g_2(t), h_2(t))||_V^2 \leq$$

$$c\Big(\int_0^t ||u_1(s) - u_2(s)||_V^2 ds + \int_0^t ||\theta_1(s) - \theta_2(s)||_{E_0}^2 ds +$$

$$\int_0^t ||\alpha_1(s)-\alpha_2(s)||^2_{E_0} ds + ||\varphi_1(t)-\varphi_2(t)||^2_W + ||\beta_1(t)-\beta_2(t)||^2_{L^2(\Gamma_3)}\Big). \tag{3.111}$$

De même, nous utilisons (3.107), (3.109) et (3.20) pour obtenir

$$\begin{aligned}&||\Lambda_2(\eta_1(t), g_1(t), h_1(t)) - \Lambda_2(\eta_2(t), g_2(t), h_2(t))||^2_{E_0} \leq c\Big(\int_0^t (||u_1(s)-u_2(s)||^2_V + \\ &||\theta_1(s)-\theta_2(s)||^2_{E_0} + ||\alpha_1(s)-\alpha_2(s)||^2_{E_0}) ds + ||u_1(t)-u_2(t)||^2_V + \\ &||\theta_1(t)-\theta_2(t)||^2_{E_0} + ||\alpha_1(t)-\alpha_2(t)||^2_{E_0} + ||\varphi_1(t)-\varphi_2(t)||^2_W\Big).\end{aligned} \tag{3.112}$$

Ainsi d'après (3.108) et (3.21) on peut trouver

$$\begin{aligned}&||\Lambda_3(\eta_1(t), g_1(t), h_1(t)) - \Lambda_3(\eta_2(t), g_2(t), h_2(t))||^2_{E_0} \leq c\Big(\int_0^t \Big(||u_1(s)-u_2(s)||^2_V + \\ &||\theta_1(s)-\theta_2(s)||^2_{E_0} + ||\alpha_1(s)-\alpha_2(s)||^2_{E_0}\Big) ds + ||u_1(t)-u_2(t)||^2_V + \\ &||\theta_1(t)-\theta_2(t)||^2_{E_0} + ||\alpha_1(t)-\alpha_2(t)||^2_{E_0} + ||\varphi_1(t)-\varphi_2(t)||^2_W\Big),\end{aligned} \tag{3.113}$$

il découle maintenant de (3.111), (3.112) et (3.113) que

$$\begin{aligned}&||\Lambda(\eta_1(t), g_1(t), h_1(t)) - \Lambda(\eta_2(t), g_2(t), h_2(t))||^2_{V\times E_0\times E_0} \\ &\leq c\Big(\int_0^t \Big(||u_1(s)-u_2(s)||^2_V + ||\theta_1(s)-\theta_2(s)||^2_{E_0} + ||\alpha_1(s)-\alpha_2(s)||^2_{E_0}\Big) ds \\ &+ ||u_1(t)-u_2(t)||^2_V + ||\theta_1(t)-\theta_2(t)||^2_{E_0} + ||\alpha_1(t)-\alpha_2(t)||^2_{E_0} \\ &+ ||\varphi_1(t)-\varphi_2(t)||^2_W + ||\beta_1(t)-\beta_2(t)||^2_{L^2(\Gamma_3)}\Big).\end{aligned} \tag{3.114}$$

D'autre part, on peut écrire le problème de Cauchy (3.93) comme le suivant

$$\beta_i(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}\big(\beta_i(s), \xi_{\beta_i}(s), R_\nu([u_{i\nu}(s)]), R_\tau([u_{i\tau}(s)])\big) ds,$$

nous employons (3.24) pour obtenir

$$\begin{aligned}&\| \beta_1(t)-\beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leqslant c\Big(\int_0^t (\| \beta_1(s)-\beta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ &+ \int_0^t |R_\nu([u_{1\nu}(s)]) - R_\nu([u_{2\nu}(s)])| ds \\ &+ \int_0^t \| R_\tau([u_{1\tau}(s)]) - R_\tau([u_{2\tau}(s)]) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds\Big),\end{aligned}$$

en utilisant la définitions de R_ν, R_τ on obtient

$$\| \beta_1(t)-\beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leqslant c\left(\int_0^t \| \beta_1(s)-\beta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \| u_1(s)-u_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds\right), \tag{3.115}$$

ensuite, nous appliquons l'inégalité de Gronwall et l'inégalité (2.14) pour obtenir

$$\parallel \beta_1(t) - \beta_2(t) \parallel^2_{L^2(\Gamma 3)} \leq c \int_0^t \parallel u_1(s) - u_2(s) \parallel^2_V ds. \tag{3.116}$$

Nous utilisons maintenant (3.92), (2.20), (3.22) et (3.23) pour trouver

$$\parallel \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \parallel^2_W \leq c \parallel u_1(t) - u_2(t) \parallel^2_V . \tag{3.117}$$

De (3.85) on déduit que

$$(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \theta_1 - \theta_2)_{E_0} + a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) - (g_1 - g_2, \theta_1 - \theta_2)_{E_0} = 0,$$

nous intégrons cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ et l'inégalité $a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) \geq 0$ et le théorème 2.3.4 pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|^2_{E_0} \leq \int_0^t \Big(g_1(s) - g_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s)\Big)_{E_0} ds,$$

en utilisant l'inégalité de Young $2ab \leq a^2 + b^2$, pour trouver

$$\parallel \theta_1(t) - \theta_2(t) \parallel^2_{E_0} \leq \int_0^t \parallel g_1(s) - g_2(s) \parallel^2_{E_0} ds + \int_0^t \parallel \theta_1(s) - \theta_2(s) \parallel^2_{E_0} ds.$$

Cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|^2_{E_0} \leq c \int_0^t \|g_1(s) - g_2(s)\|^2_{E_0} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.118}$$

De plus, de (3.86) on en déduit que, p.p. $t \in [0, T]$.

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{E_0} + a\,(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (h_1 - h_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{E_0} .$$

Intégrons l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales, $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et l'inégalité $a\,(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$, et le théorème 2.3.4 il vient

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|^2_{E_0} \leq \int_0^t \Big(h_1(s) - h_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s)\Big)_{E_0} ds.$$

Ce qui implique que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|^2_{E_0} \leq \int_0^t \|h_1(s) - h_2(s)\|^2_{E_0} ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|^2_{E_0} ds.$$

Cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|^2_{E_0} \leq c \int_0^t \|h_1(s) - h_2(s)\|^2_{E_0} ds. \tag{3.119}$$

On substitue (3.95), (3.116)-(3.119) en (3.114) pour obtenir

$$\begin{aligned}&\|\Lambda(\eta_1,g_1,h_1)(t)-\Lambda(\eta_2,g_2,h_2)(t)\|^2_{V\times E_0\times E_0}\\&\qquad\leq c\int_0^t\|(\eta_1,g_1,h_1)(s)-(\eta_2,g_2,h_2)(s)\|^2_{V\times E_0\times E_0}ds.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^2(\eta_1,g_1,h_1)(t)-\Lambda^2(\eta_2,g_2,h_2)(t)\|^2_{V\times E_0\times E_0}\\&\qquad\leq c\int_0^t c\int_0^s ||(\eta_1,g_1,h_1)(r)-(\eta_2,g_2,h_2)(r)||^2_{V\times E_0\times E_0}drds,\\&\|\Lambda^2(\eta_1,g_1,h_1)(t)-\Lambda^2(\eta_2,g_2,h_2)(t)\|^2_{V\times E_0\times E_0}\\&\qquad\leq c^2\int_0^t\int_0^s\|(\eta_1,g_1,h_1)(r)-(\eta_2,g_2,h_2)(r)\|^2_{V\times E_0\times E_0}drds,\\&\|\Lambda^3(\eta_1,g_1,h_1)(t)-\Lambda^3(\eta_2,g_2,h_2)(t)\|^2_{V\times E_0\times E_0}\\&\qquad\leq c^3\int_0^t\int_0^s\int_0^r\|(\eta_1,g_1,h_1)(l)-(\eta_2,g_2,h_2)(l)\|^2_{V\times E_0\times E_0}dldrds,\\&\qquad\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^m(\eta_1,g_1,h_1)(t)-\Lambda^m(\eta_2,g_2,h_2)(t)\|^2_{C(0,T;V\times E_0\times E_0)}\\&\qquad\leq c^m\underbrace{\int_0^t\int_0^s\cdots\int_0^r}_{m\text{ fois}}\|(\eta_1,g_1,h_1)(l)-(\eta_2,g_2,h_2)(l)\|^2_{C(0,T;V\times E_0\times E_0)}dl\cdots drds.\end{aligned}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^r dl=r,$

et que $\displaystyle\int_0^s\int_0^r dldr=\int_0^s rdr=\frac{s^2}{2},$

et $\displaystyle\int_0^t\int_0^s\int_0^r dldrds=\int_0^t\frac{s^2}{2}=\frac{t^3}{6}.$

Enfin on a $\displaystyle\int_0^t\int_0^s\cdots\int_0^r dl\cdots drds=\frac{t^m}{m!}.$

Alors

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^m(\eta_1,g_1,h_1)-\Lambda^m(\eta_2,g_2,h_2)\|^2_{C(0,T;V\times E_0\times E_0)}\\&\qquad\leq\frac{c^mT^m}{m!}\|(\eta_1,g_1,h_1)-(\eta_2,g_2,h_2)\|^2_{C(0,T;V\times E_0\times E_0)}.\end{aligned}$$

D'après l'équivalence de Stirling $m! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi m}m^m e^{-m}$, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{c^m T^m}{m!} = 0$. Ainsi, pour m suffisamment grand, Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $C(0,T;V\times E_0\times E_0)$ et donc Λ a un point fixe unique.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients de prouver le théorème 3.3.1.

3.3.2 Démonstration du théorème 3.3.1

Soit $(\eta_*, g_*, h_*) \in C(0,T;V\times E_0\times E_0)$, le point fixe de Λ, pour simplifier l'écriture, on suppose que

$$(a)\, u_* = u_{g_* h_* \eta_*},\ (b)\, \varphi_* = \varphi_{g_* h_* \eta_*},\ (c)\, \beta_* = \beta_{g_* h_* \eta_*},\ (d)\, \theta_* = \theta_{g_*},\ (e)\, \alpha_* = \alpha_{h_*}, \tag{3.120}$$

$$\sigma_*^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon\left(u_*^\ell\right), \theta_*^\ell, \alpha_*^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon\left(u_*^\ell(s)\right), \theta_*^\ell(s), \alpha_*^\ell(s))\, ds - \left(\mathcal{E}^\ell\right)^* E^\ell\left(\varphi_*^\ell\right), \tag{3.121}$$

$$D_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi_*^\ell)). \tag{3.122}$$

On a

$$\Lambda_1\left(\eta_*, g_*, h_*\right) = \eta_*, \quad \Lambda_2\left(\eta_*, g_*, h_*\right) = g_*, \quad \Lambda_3\left(\eta_*, g_*, h_*\right) = h_*.$$

Il s'ensuit pour $\ell = 1, 2$,

$$\begin{aligned}(\eta_*(t), v)_V = &-\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\left(\mathcal{E}^\ell\right)^* E^\ell\left(\varphi_*^\ell(t)\right), \varepsilon\left(v^\ell\right)\Big)_{H^\ell} + j_{ad}\left(\beta_*(t), u_*(t), v\right)\\ &+\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell\big(t-s, \varepsilon\left(u_*^\ell(s)\right), \theta_*^\ell(s), \alpha_*^\ell(s)\big)ds, \varepsilon\left(v^\ell\right)\Big)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v \in V,\end{aligned} \tag{3.123}$$

$$g_*^\ell(t) = \Theta^\ell\left(\sigma_*^\ell(t), \varepsilon\left(u_*^\ell(t)\right), \theta_*^\ell(t), \alpha_*^\ell(t)\right), \tag{3.124}$$

$$h_*^\ell(t) = \phi^\ell\left(\sigma_*^\ell(t), \varepsilon\left(u_*^\ell(t)\right), \alpha_*^\ell(t)\right). \tag{3.125}$$

Existence de la solution.

Nous prouvons $\{u_*, \sigma_*, \varphi_*, \theta_*, \alpha_*, \beta_*, D_*\}$ satisfait le problème $\mathcal{P}_1^V$ et les régularités (3.78)-(3.84).

En effet, nous écrivons (3.91) pour $(\eta, g, h) = (\eta_*, g_*, h_*)$ et utilisons (3.120) pour trouver

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\mathcal{A}^\ell\varepsilon\left(u_*^\ell\right), \theta_*^\ell, \alpha_*^\ell, \varepsilon\left(v^\ell\right) - \varepsilon\left(u_*^\ell(t)\right)\Big)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{\nu c}\left(u_*(t), v - u_*(t)\right) + j_{fr}\left(u_*(t), v\right)\\ &-j_{fr}\left(u_*(t), u_*(t)\right) + \left(\eta_*(t), v - u_*(t)\right)_V \geq \left(f(t), v - u_*(t)\right)_V, \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0,T].\end{aligned} \tag{3.126}$$

Remplaçons (3.123) en (3.126) pour obtenir

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\mathcal{A}^{\ell}(\varepsilon(u_*^{\ell}),\theta_*^{\ell},\alpha_*^{\ell},\varepsilon(v^{\ell})-\varepsilon(u_*^{\ell}(t))\Big)_{\mathcal{H}^{\ell}}\\
&+\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\int_0^t \mathcal{Q}^{\ell}\big(t-s,\varepsilon(u_*^{\ell}(s)),\theta_*^{\ell}(s),\alpha_*^{\ell}(s)\big)ds,\varepsilon(v^{\ell})-\varepsilon(u_*^{\ell}(t))\Big)_{\mathcal{H}^{\ell}}\\
&+j_{ad}(\beta_*(t),u_*(t),v-u_*(t))+j_{\nu c}(u_*(t),v-u_*(t))+j_{fr}(u_*(t),v)\\
&-j_{fr}(u_*(t),u_*(t))-\sum_{\ell=1}^{2}\Big((\mathcal{E}^{\ell})^*E^{\ell}(\varphi_*^{\ell}(t)),\varepsilon(v^{\ell})-\varepsilon(u_*^{\ell}(t))\Big)_{\mathcal{H}^{\ell}}\\
&\geq (f(t),v-u_*(t))_V,\quad \forall v\in V,\ \text{p.p. } t\in[0,T],
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

et nous considérons (3.85) avec $g^{\ell}=g_*^{\ell}$ et en utilisant (3.120)(d) pour trouver

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\dot{\theta}_*^{\ell}(t),\xi^{\ell}\Big)_{L^2(\Omega^{\ell})}+a_0\left(\theta_*^{\ell}(t),\xi\right)=\sum_{\ell=1}^{2}\Big(g_*^{\ell}(t)+\rho^{\ell}(t),\xi^{\ell}\Big)_{L^2(\Omega^{\ell})}\\
&\text{pour tout } \xi\in E_0,\ \text{p.p. } t\in[0,T],
\end{aligned}
\tag{3.128}
$$

et nous écrivons (3.86) avec $h^{\ell}=h_*^{\ell}$ et en utilisant (3.120)(e) pour trouver

$$
\begin{aligned}
&\alpha_*(t)\in K,\ \sum_{\ell=1}^{2}\Big(\dot{\alpha}_*^{\ell}(t),\xi^{\ell}-\alpha_*^{\ell}(t)\Big)_{L^2(\Omega^{\ell})}+a(\alpha_*(t),\xi-\alpha_*(t))\\
&\geq\sum_{\ell=1}^{2}\Big(h_*^{\ell},\xi^{\ell}-\alpha_*^{\ell}(t)\Big)_{L^2(\Omega^{\ell})},\ \text{Pour tous } \xi\in K,\ \text{p.p. } t\in[0,T].
\end{aligned}
\tag{3.129}
$$

Ainsi nous écrivons (3.92) pour $(\eta,g,h)=(\eta_*,g_*,h_*)$ et en employant (3.120)(a) et (3.120)(b) de voir que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\mathcal{G}^{\ell}E^{\ell}(\varphi_*^{\ell}(t)),\nabla\phi^{\ell}\Big)_{H^{\ell}}+\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\mathcal{E}^{\ell}\varepsilon(u_*^{\ell}(t)),\nabla\phi^{\ell}\Big)_{H^{\ell}}=(-q(t),\phi)_W,\\
&\text{pour tout }\ \phi\in W,\ \ \text{p.p. } t\in[0,T].
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

Maintenant, nous considérons (3.93) et nous utilisons (3.120)(a) et (3.120)(c) pour obtenir que

$$
\dot{\beta}_*(t)=H_{ad}\left(\beta_*(t),\xi_{\beta_*}(t),R_{\nu}(\big[u_{*\nu}(t)\big]),R_{\tau}([u_{*\tau}(t)])\right),\quad \text{p.p. } t\in[0,T].
\tag{3.131}
$$

Les relations (3.126)-(3.131) nous permettent de conclure maintenant que $\{u_*,\varphi_*,\theta_*,\alpha_*,\beta_*,D_*\}$ satisfait (3.62)-(3.68), ensuite la régularité (3.78)-(3.80), (3.82) et (3.83) découlent du lemme 3.3.2 et du lemme 3.3.3.

Soient maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$ de (2.12), (2.18), (3.18), (3.19), (3.22) et (3.121), nous concluons qu'il existe une constante positive $c > 0$ vérifiant

$$||\sigma_*(t_1) - \sigma_*(t_2)||_{\mathcal{H}} \leq c(||u_*(t_1) - u_*(t_2||_V + ||\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)||_W +$$
$$||\theta_*(t_1) - \theta_*(t_2)||_{E_0} + ||\alpha_*(t_1) - \alpha_*(t_2)||_{E_0}).$$

La régularité du u_*, φ_*, θ_* et α_* et donnée par (3.78), (3.79), (3.82) et (3.83) respectivement, implique

$$\sigma_* \in C(0, T; \mathcal{H}). \tag{3.132}$$

Pour $\ell = 1, 2$ on a d'après (3.5)

$$\mathrm{Div}\, \sigma_*^\ell(t) = -f_0^\ell(t), \quad \forall t \in [0, T], \tag{3.133}$$

alors d'après (3.27) il résulte que $\mathrm{Div}\sigma_*^\ell(t) \in H^\ell$ ce qui donne la régularité (3.81).

Soient maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$ de (2.18), (3.22), (3.23) et (3.122), nous concluons qu'il existe une constante positive $c > 0$ vérifiant

$$\|D_*(t_1) - D_*(t_2)\|_{\mathcal{W}} \leq c\left(\|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_W + \|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V\right).$$

La régularité de u_* et φ_* et donnée par (3.78) et (3.79) implique

$$D_* \in C(0, T; \mathcal{W}). \tag{3.134}$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (3.6)

$$\mathrm{div D}_*^\ell = q_0^\ell(t), \quad t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2, \tag{3.135}$$

alors d'après (3.27) il résulte que $\mathrm{div} D_*^\ell(t) \in E_0^\ell$ ce qui donne la régularité (3.84). Enfin, nous concluons que la solution $\{u_*, \sigma_*, \varphi_*, \theta_*, \alpha_*, \beta_*, D_*\}$ du problème $\mathcal{P}_1^V$ ayant la régularité (3.78)-(3.84), ce qui achève la partie l'existence du théorème 3.3.1.

Unicité de la solution.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.106)-(3.108) et de la solvabilité unique des problèmes $\mathcal{P}_1^{(g,h)}$ et $\mathcal{P}_1^{(g,h,\eta)}$. Effectivement, soit $\{u_*, \sigma_*, \varphi_*, \theta_*, \alpha_*, \beta_*, D_*\}$ est une solution du problème $\mathcal{P}_1^V$ obtenu ci-dessus et soit $\{u, \sigma, \varphi, \theta, \alpha, \beta, D\}$ une autre solution du problème qui satisfait (3.78)-(3.84). On note $\eta \in C(0,T;V)$, $g \in C(0,T;E_0)$ et $h \in C(0,T;E_0)$ les opérateurs définis par

$$(\eta, v)_V = -\sum_{\ell=1}^{2}\Big((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell_{gh\eta}), \varepsilon(v^\ell)\Big)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_{gh\eta}(t), u_{gh\eta}(t), v)$$

$$+\sum_{\ell=1}^{2}\Big(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell_{gh\eta}(s)), \theta^\ell_g(s), \alpha^\ell_h(s))ds, \varepsilon(v^\ell)\Big)_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall v \in V, \tag{3.136}$$

$$g = (\Theta^1(\sigma^1_{gh\eta}, \varepsilon(u^1_{gh\eta}), \theta^1_g, \alpha^1_h), \Theta^2(\sigma^2_{gh\eta}, \varepsilon(u^2_{gh\eta}), \theta^2_g, \alpha^2_h)), \tag{3.137}$$

$$h = (\phi^1(\sigma^1_{gh\eta}, \varepsilon(u^1_{gh\eta}), \theta^1_g, \alpha^1_h), \phi^2(\sigma^2_{gh\eta}, \varepsilon(u^2_{gh\eta}), \theta^2_g, \alpha^2_h)). \tag{3.138}$$

Maintenant (3.85)-(3.87) impliquent que $\{\alpha, \theta\}$ est une solution du problème $\mathcal{P}_1^{(g,h)}$ du lemme 3.3.1 il s'ensuit que ce problème a une solution unique

$$\alpha_h \in L^2(0,T;E_1) \cap W^{1,2}(0,T;E_0), \quad \theta_g \in L^2(0,T;E_1) \cap C(0,T;E_0).$$

Alors il résulte que

$$\alpha_h = \alpha, \quad \theta_g = \theta. \tag{3.139}$$

Ensuite, (3.91)-(3.94) impliquent que $\{u, \varphi, \beta\}$ est une solution du problème $\mathcal{P}_1^{(g,h,\eta)}$ du lemme 3.3.2 il s'ensuit que ce problème a une solution unique

$$u_{gh\eta} \in C(0,T;V), \quad \varphi_{gh\eta} \in C(0,T;W) \quad \text{et } \beta_{gh\eta} \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap L^\infty(0,T;Z).$$

Pour ceci nous concluons que

$$u_{gh\eta} = u, \quad \varphi_{gh\eta} = \varphi, \quad \beta_{gh\eta} = \beta. \tag{3.140}$$

Il résulte de (3.105) et (3.136)-(3.140) et la définition de Λ on obtient $\Lambda(g,h,\eta) = (g,h,\eta)$ donc (g,h,η) est un point fixe de l'opérateur Λ, d'aprés le lemme 3.3.3 il s'ensuit que

$$g_* = g, \quad h_* = h, \quad \eta_* = \eta. \tag{3.141}$$

La partie d'unicité du théorème 3.3.1 est une conséquence de (3.139)-(3.141) avec les deux équations

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta^\ell, \alpha^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell\big(t-s, \varepsilon(u^\ell(s), \theta^\ell(s), \alpha^\ell(s)\big)ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell),$$
$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)).$$

Troisième partie

Problème dynamique de contact électro-viscoélastique

Chapitre 4

Contact entre deux corps électro-viscoélastiques avec endommagement et frottement de Tresca

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de contact dans un processus dynamique entre deux corps électro-viscoélastiques avec endommagement. Le contact est bilatéral et modélisé avec la loi (1.28) de frottement de Tresca. L'endommagement des matériaux causé par les déformations viscoélastiques et est décrite par une inclusion différentielle (1.20). Nous nous plaçons dans le cadre physique (voir figure 1.1). On considère que les deux corps sont électro-viscoélastiques, plus exactement on utilise, pour chaque corps, une loi de comportement de la forme (1.19), où les inconnues dans ce cas, sont le champ des déplacements u^ℓ, le champ des contraintes σ^ℓ, le champ de potentiel électrique φ^ℓ, le champ des déplacements électriques D^ℓ et le champ d'endommagement α^ℓ.

Notre chapitre est structuré comme suit. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous listons des hypothèses sur les données. Dans la deuxième nous proposons une formulation variationnelle du problème. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons notre résultat principal d'existence et d'unicité qui est basé sur le résultat classique des inégalités d'évolution non linéaires du premier ordre et des équations avec des opérateurs monotones et des arguments de point fixe de Banach. Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet de la publication [20].

4.1 Position du problème et hypothèses

Considérons deux corps électro-viscoélastiques qui occupent deux domaines bornés Ω^1 et Ω^2 de l'espace $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, Pour chaque domaine Ω^ℓ $(\ell = 1, 2)$ la frontière Γ^ℓ est supposée régulière, et est partitionnée en trois parties mesurables disjointes $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et nous considérons une partition de $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ en deux parties mesurables disjointes Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes\Gamma_1^\ell > 0$ et $mes\Gamma_a^\ell > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ^ℓ, et on note par Γ_3^ℓ la partie de contact du corps Ω^ℓ, les deux corps peuvent entrer en contact au long de la partie commune $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$, que nous supposons être un isolant.

Le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe et en contact avec frottement et endommagement sur la partie Γ_3. Le corps est soumis à des forces volumiques de densité f_0^ℓ et à des charges électriques volumiques de densité q_0^ℓ. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ. De plus, ce milieu est soumis à l'action de potentiel électrique nul sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière, ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ sur la partie Γ_b^ℓ.

Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Chaque corps est en contact avec frottement et endommagement avec l'autre corps sur la partie Γ_3. Nous prenons en considération les propriétés mécaniques des corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations. Sous ces considérations, le problème électro-mécanique qu'on va étudier peut être formulée de la manière suivante.

Problème $\mathcal{P}_2$. Pour $\ell = 1, 2$, Trouver un champ des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{S}^d$, un champ de potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}$, un champ des deplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, ainsi qu'un champ d'endommagement $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \alpha^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times (0,T), \tag{4.1}$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{C}^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), \tag{4.2}$$

$$\dot{\alpha}^\ell - k^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \chi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni S^\ell(\varepsilon(u^\ell), \alpha^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), \tag{4.3}$$

$$\operatorname{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{u}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), \tag{4.4}$$

$$\operatorname{div} D^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0,T), \tag{4.5}$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0,T), \tag{4.6}$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0,T), \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} [u_\nu] = 0, \\ \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \quad \|\sigma_\tau\| \le g, \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow [\dot{u}_\tau] = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \exists \delta \ge 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\delta\, [\dot{u}_\tau], \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0,T), \tag{4.9}$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0,T), \tag{4.10}$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0,T), \tag{4.11}$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell, \ \dot{u}^\ell(0) = v_0^\ell, \ \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell. \tag{4.12}$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (4.1)–(4.12) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites. D'abord, les équations (4.1) et (4.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique avec endommagement que nous avons déjà introduite dans (1.19), où $\mathcal{A}^\ell$ et $\mathcal{B}^\ell$ sont les opérateurs de viscosité et d'élasticité respectivement, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur piézoélectrique et $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est son transposé, $\mathcal{C}^\ell = (c_{ij}^\ell)$ dénote le tenseur de la permittivité électrique, l'évolution du champ d'endommagement est régi par une inclusion de type parabolique donnée par la relation (4.3), où K^ℓ désigne l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles défini par (1.17), k^ℓ est un coefficient positif, $\partial \chi_{K^\ell}$ représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble K^ℓ et S^ℓ est une fonction constitutive donnée qui décrit la source d'endommagement dans le système. Les équations (4.4) et (4.5) sont les équations du mouvement et d'équilibre écrites pour le champ des contraintes et le champ des déplacements électriques, que nous avons déjà vu dans (1.4) et (1.8). Les conditions (4.6) et (4.7) sont les conditions aux limites classiques de déplacement et de traction introduits par (1.6) et (1.7). Dans la condition (4.8), Nous supposons que le contact est bilatérale avec frottement de Tresca, où g désigne la limite de seuil de frottement, qui est supposée dépendre uniquement de chaque point de Γ_3, et $[u_\nu]$ et $[\dot{u}_\tau]$ sont le déplacement normal et la vitesse tangentielle par relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 définis, respectivement, par (1.21) et (1.22). La relation (4.9) représente un état de frontière homogène de neumann, où $\dfrac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell}$ représente la dérivée normale d'endommagement α^ℓ. Les égalités (4.10) et (4.11) sont les conditions aux limites électriques. Finalement (4.12) représente les champs de déplacement, de vitesse et d'endommagement initiales, où u_0^ℓ, v_0^ℓ et α_0^ℓ sont des champs initiales donnés de deplacement, de vitesse et d'endommagement respectivement.

Maintenant, nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \text{(a) il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad \|\mathcal{A}^\ell(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}^\ell(x,\varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}^\ell}\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|, \\ \qquad \text{pour tout } \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ \text{(b) il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad (\mathcal{A}^\ell(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}^\ell(x,\varepsilon_2)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell}\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \\ \qquad \text{pour tout } \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ \text{(c) pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x,\xi) \text{ est une application} \\ \qquad \text{Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \\ \text{(d) l'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x,0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{cases} \tag{4.13}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \text{il existe } L_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad \|\mathcal{B}^\ell(x,\varepsilon_1,\zeta_1) - \mathcal{B}^\ell(x,\varepsilon_2,\zeta_2)\| \leq L_{\mathcal{B}^\ell}(\|\varepsilon_1-\varepsilon_2\| + |\zeta_1-\zeta_2|) \\ \qquad \text{pour tout } \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d,\ \zeta_1,\ \zeta_2 \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ \text{(b) l'application } x \mapsto \mathcal{B}^\ell(x,\varepsilon,\zeta) \text{ est mesurable sur } \Omega^\ell \\ \qquad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d,\ \zeta \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) l'application } x \mapsto \mathcal{B}^\ell(x,0,0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{cases} \tag{4.14}$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses

$$\begin{cases} \text{(a) } \mathcal{E}^\ell(x,\tau) = (e^\ell_{ijk}(x)\tau_{jk}) \\ \text{(b) } e^\ell_{ijk} = e^\ell_{ikj} \in L^\infty(\Omega^\ell),\ 1 \leq i,j,k \leq d. \end{cases} \tag{4.15}$$

Rappelons aussi que le tenseur transposé du tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell$ est donné par $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e^{\ell *}_{ijk})$ où $e^{\ell *}_{ijk} = e^\ell_{kij}$ et l'égalité (1.12) est satisfaite.

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{C}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \mathcal{C}^\ell(x,E) = (c^\ell_{ij}(x)E_j),\ \text{pour tout } E = (E_i) \in \mathbb{R}^d,\ \ \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ \text{(b)} \quad c^\ell_{ij} = c^\ell_{ji},\ c^\ell_{ij} \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i,j \leq d, \\ \text{(c)} \quad \text{il existe } m_{\mathcal{C}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad \mathcal{C}^\ell E.E \geq m_{\mathcal{C}^\ell}||E||^2,\ \text{pour tout } E = (E_i) \in \mathbb{R}^d,\ \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{cases} \tag{4.16}$$

La fonction source d'endommagement $S^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \text{il existe } L_{S^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad |S^\ell(x,\xi_1,d_1) - S^\ell(x,\xi_2,d_2)| \leq L_{S^\ell}\big(\|\xi_1-\xi_2\| + |d_1-d_2|\big), \\ \qquad \text{pour tout } \ \xi_1,\xi_2 \in \mathbb{S}^d, d_1,d_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ \text{(b)} \quad \text{pour tout } \ \xi \in \mathbb{S}^d, d \in \mathbb{R}, \quad \text{l'application } x \mapsto S^\ell(x,\xi,d) \\ \qquad \text{est lebesgue measurable sur } \Omega^\ell, \\ \text{(c) l'application } x \mapsto S^\ell(x,0,0) \in \ L^2(\Omega^\ell). \end{cases} \tag{4.17}$$

La masse volumique ρ^ℓ satisfait

$$\rho^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad \min_{\ell=1,2} \inf_{x\in\Omega^\ell} \rho^\ell(x) = \rho^* > 0. \tag{4.18}$$

La seuil de frottement g satisfait

$$g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \ \text{ sur } \Gamma_3. \tag{4.19}$$

Les forces volumiques f_0^ℓ et les tractions surfaciques f_2^ℓ ont la régularité

$$f_0^\ell \in L^2(0,T;H^\ell), \quad f_2^\ell \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2^\ell)^d). \tag{4.20}$$

Les charges électriques volumiques q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont la régularité

$$q_0^\ell \in C(0,T;L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in C(0,T;L^2(\Gamma_b^\ell)). \tag{4.21}$$

Enfin, les champs initiales de déplacement, de vitesse et d'endommagement satisfont

$$u_0^\ell \in V^\ell, \ \ v_0^\ell \in H^\ell, \ \ \alpha_0^\ell \in K^\ell. \tag{4.22}$$

Enonçons maintenant quelques définitions qui vont être utilisées dans la suite de ce chapitre, d'abord nous définissons la forme bilinéaire $a : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta^\ell, \xi^\ell) = \sum_{\ell=1}^{2} k^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\zeta^\ell.\nabla\xi^\ell dx. \tag{4.23}$$

Le théorème 2.4.1 de représentation de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'une fonction $F : [0,T] \to \mathbb{V}'$ définie par

$$\langle F(t), v\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) v^\ell da, \quad \forall v \in \mathbb{V}. \tag{4.24}$$

De même, le théorème de représentation de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'une fonction $q : [0,T] \to W$ définie par

$$(q(t), \phi)_W = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t)\phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t)\phi^\ell da, \ \ \forall \phi \in W. \tag{4.25}$$

D'après (4.20) et (4.21), on a

$$F \in L^2(0,T;\mathbb{V}'), \ \ q \in C(0,T;W). \tag{4.26}$$

Ensuite, on définit la fonctionnelle $j : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ comme suit

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g \| [v_\tau] \|_{L^2(\Gamma_3)^d} da. \tag{4.27}$$

Nous utiliserons le produit scalaire modifié sur $H = H^1 \times H^2$, donné par

$$((u, v))_H = \sum_{\ell=1}^{2} (\rho^\ell u^\ell, v^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall u, v \in H, \tag{4.28}$$

c'est-à-dire qu'il est pondéré avec ρ^ℓ. Soit $|||.|||_H$ la norme associée au produit scalaire défini par (4.28), alors

$$|||v|||_H = ((v, v))_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H. \tag{4.29}$$

En utilisant l'hypothèse (4.18), il vient que $|||.|||_H$ et $\|.\|_H$ sont des normes équivalentes sur H. De plus, l'espace $\mathbb{V}$ s'injecte continument avec densité dans l'espace H. Identifiant le dual de H avec lui même, donc nous pouvons écrire le Triplet de Gelfand $\mathbb{V} \subset H \subset \mathbb{V}'$, on obtient

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} = ((u, v))_H, \quad \forall u \in H, \ \forall v \in \mathbb{V}. \tag{4.30}$$

4.2 Formulation variationnelle

Nous passons ensuite à la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}_2$. A partir de (4.4) du problème $\mathcal{P}_2$, on a

$$(\rho^\ell \ddot{u}^\ell(t), v^\ell)_{H^\ell} - (\mathrm{Div}\sigma^\ell(t), v^\ell)_{H^\ell} = (f_0^\ell(t), v^\ell)_{H^\ell}, \ \forall v^\ell \in V^\ell. \tag{4.31}$$

L'application de la formule de Green (2.7) nous permet de récrire (4.31) comme suit :

$$(\rho^\ell \ddot{u}^\ell(t), v^\ell)_{H^\ell} + (\sigma^\ell(t), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} = (f_0^\ell(t), v^\ell)_{H^\ell} + \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da, \ \forall v^\ell \in V^\ell, \tag{4.32}$$

où

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da &= \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da + \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da + \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da \\
&= \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da + \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da \\
&= \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell . v^\ell da + \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da,
\end{aligned}$$

et ceci d'après (4.6) et (4.7). Pour $v = (v^1, v^2) \in \mathbb{V}$, on a

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell da + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^\ell . v_\tau^\ell da.$$

N'oublions pas que la continuité des contraintes sur l'interface Γ_3 entraîne

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \qquad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\nu.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu [v_\nu] da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau . [v_\tau] da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau . [v_\tau] da, \end{aligned}$$

et ceci d'après (2.22). Prenons v^ℓ comme $w^\ell - \dot{u}^\ell$ dans ce dernier équation, il résulte

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell (w^\ell - \dot{u}^\ell) da &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau . [w_\tau - \dot{u}_\tau] da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau . [w_\tau] da - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau . [\dot{u}_\tau] da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3} g \|[w_\tau]\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da + \int_{\Gamma_3} g \|[\dot{u}_\tau]\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (4.27) de la fonctionnelle j on obtient l'inégalité suivante

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell (w^\ell - \dot{u}^\ell) da \geq -j(w) + j(\dot{u}). \tag{4.33}$$

Ensuite, en additionnant la formule de Green (4.31) par rapport à l'indice ℓ, et en utilisant l'équation (4.1) avec la définition (4.24) de la fonction F, puis on utilise le produit de dualité défini par (4.30) et l'inégalité (4.33) il résulte l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} + \sum\limits_{\ell=1}^{2} (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \alpha^\ell(t)), \varepsilon(w^\ell - \dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ + \sum\limits_{\ell=1}^{2} ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(w^\ell - \dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j(w) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle F(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} \\ \forall w = (w^1, w^2) \in \mathbb{V}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{cases}$$

Pour la formule variationnelle dépendante des deux variables électriques, la formule de Green (2.19) permet de donner, pour $D^\ell \in H^\ell$

$$(D^\ell, \nabla\phi^\ell)_{H^\ell} + (divD^\ell, \phi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell.\nu^\ell\phi^\ell da, \ \forall\phi^\ell \in H^1(\Omega^\ell).$$

Or pour le dire

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell\nabla\phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} divD^\ell\phi^\ell dx = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell.\nu^\ell\phi^\ell da, \ \forall\phi^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \tag{4.34}$$

où

$$\int_{\Gamma^\ell} D^\ell.\nu^\ell\phi^\ell da = \int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell.\nu^\ell\phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell.\nu^\ell\phi^\ell da.$$

Pour $\phi^\ell \in W^\ell$, on a

$$\phi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell.$$

Alors, il résulte selon (4.11)

$$\int_{\Gamma^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell\phi^\ell da = \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell\phi^\ell da.$$

Donc d'après (4.1), l'équation (4.34) devient

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell\nabla\phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell\phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell\phi^\ell da,$$

ou encore

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell\nabla\phi^\ell dx = -\int_{\Omega^\ell} q_0^\ell\phi^\ell dx + \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell\phi^\ell da.$$

En additionnant cette égalité par rapport à ℓ, on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^\ell} D^\ell\nabla\phi^\ell dx = -\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^\ell} q_0^\ell\phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell\phi^\ell da.$$

Il vient, d'après la définition (4.25) de la fonction q, pour $t \in [0, T]$

$$\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^\ell} D^\ell(t)\nabla\phi^\ell dx = -(q(t), \phi)_W.$$

On substitue D^ℓ par ce qui lui est égal selon la relation (4.2), on obtient une équation liée aux inconnues électriques

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^{2}(\mathcal{C}^\ell\nabla\varphi^\ell(t) - \mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell(t)), \nabla\phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W, \\ \quad \forall\phi = (\phi_1, \phi_2) \in W, \ \text{p.p. } t \in (0, T). \end{cases}$$

Enfin, pour obtenir une formule variationnelle dépendante de l'inconnue d'endommagement α^ℓ, il est claire que

$$S^\ell(\varepsilon(u^\ell),\alpha^\ell) - \dot{\alpha}^\ell + k^\ell\Delta\alpha^\ell \in \partial\chi_{K^\ell}(\alpha^\ell),$$

et ceci d'après (4.3). Alors la définition de sous-différentiel de la fonction indicatrice χ_{K^ℓ}, qu'on a vu dans la définition 2.4.4, donne pour tout $\xi^\ell \in K^\ell$

$$\big(S^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)),\alpha^\ell(t)) - \dot{\alpha}^\ell(t) + k^\ell\Delta\alpha^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} \leq 0,$$

ou encore

$$\big(S^\ell(\varepsilon(u^\ell(t),\alpha^\ell(t)),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} \leq \big(\dot{\alpha}^\ell(t),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} - k^\ell\big(\Delta\alpha^\ell(t),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)}.$$

En appliquant la formule de Green (2.8) pour obtenir une autre forme du terme $(\Delta\alpha^\ell(t),\xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}$. En effet

$$\big(\Delta\alpha^\ell(t),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} + \big(\nabla\alpha^\ell(t),\nabla(\xi^\ell - \alpha^\ell(t))\big)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Gamma^\ell}\frac{\partial\alpha^\ell}{\partial\nu^\ell}da.$$

Mais $\dfrac{\partial\alpha^\ell}{\partial\nu^\ell} = 0$ sur Γ^ℓ, d'après (4.9), d'où

$$-\big(\Delta\alpha^\ell(t),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} = \big(\nabla\alpha^\ell(t),\nabla(\xi^\ell - \alpha^\ell(t))\big)_{L^2(\Omega^\ell)}.$$

Ensuite on peut conclure

$$\begin{aligned}\big(S^\ell(\varepsilon(u^\ell(t),\alpha^\ell),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} \leq \big(\dot{\alpha}^\ell(t),\quad & \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} + \\ & k^\ell\big(\nabla\alpha^\ell(t),\nabla(\xi^\ell - \alpha^\ell(t))\big)_{L^2(\Omega^\ell)}.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Par addition des deux inéquations (4.35) par rapport à ℓ membre à membre, il devient

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{2}\big(S^\ell(\varepsilon(u^\ell(t),\alpha^\ell),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} \leq \sum_{\ell=1}^{2}\big(\dot{\alpha}^\ell(t),\quad & \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} + \\ & \sum_{\ell=1}^{2}k^\ell\big(\nabla\alpha^\ell(t),\nabla(\xi^\ell - \alpha^\ell(t))\big)_{L^2(\Omega^\ell)}.\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la définition (4.23) de la forme bilinéaire a, on obtient la troisième formule variationnelle dépendante de l'inconnue d'endommagement $\alpha(t) = (\alpha^1(t),\alpha^2(t)) \in K = K^1 \times K^2$ comme suit

$$\left\{\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{2}\big(S^\ell(\varepsilon(u^\ell(t),\alpha^\ell),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} &\leq \sum_{\ell=1}^{2}\big(\dot{\alpha}^\ell(t),\xi^\ell - \alpha^\ell(t)\big)_{L^2(\Omega^\ell)} + \\ & a(\alpha(t),\xi - \alpha(t)), \quad \forall\xi = (\xi^1,\xi^2) \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0,T).\end{aligned}\right.$$

Finalement, on peut résumer la formulation variationnelle du $\mathcal{P}_2$, en termes de champ des déplacements, de champ du potentiel électrique et de champ d'endommagement comme le suivant.

Problème $\mathcal{P}_2^V$. Trouver un champ des déplacements $u = (u^1, u^2) : [0, T] \to \mathbb{V}$, un champ de potentiel électrique $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \to W$ et un champ d'endommagement $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0, T] \to K$ tels que

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \sum\limits_{\ell=1}^{2}(\mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \alpha^\ell(t)), \varepsilon(w^\ell - \dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ + \sum\limits_{\ell=1}^{2}((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla\varphi^\ell(t), \varepsilon(w^\ell - \dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j(w) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle F(t), w - \dot{u}(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} \\ \forall w = (w^1, w^2) \in \mathbb{V}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{cases} \tag{4.36}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{\ell=1}^{2}(\mathcal{C}^\ell\nabla\varphi^\ell(t) - \mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell(t)), \nabla\phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W, \\ \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in W, \ \text{p.p. } t \in (0, T), \end{cases} \tag{4.37}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{\ell=1}^{2} \left(S^\ell(\varepsilon(u^\ell(t), \alpha^\ell), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\right)_{L^2(\Omega^\ell)} \leq \sum\limits_{\ell=1}^{2} \left(\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t)\right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \\ \qquad a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)), \quad \forall \xi = (\xi^1, \xi^2) \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{cases} \tag{4.38}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \tag{4.39}$$

Notre résultat principal d'existence et d'unicité est prouvé dans la section suivante.

4.3 Existence et unicité de la solution

L'existence d'une solution unique du problème variationnel $\mathcal{P}_2^V$ est donnée par le théorème suivant :

4.3.1 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 4.3.1. *Supposons que les hypothèses (4.13)-(4.22) sont vérifiées. Alors, il existe une solution unique $\{u, \varphi, \alpha\}$ au $\mathcal{P}_2^V$ ayant la régularité*

$$u \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{V}) \cap C^1(0, T; H) \cap W^{2,2}(0, T; \mathbb{V}'), \tag{4.40}$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \tag{4.41}$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1). \tag{4.42}$$

Pour préciser la régularité de $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ et $D = (D^1, D^2)$ qui satisfont (4.1), (4.2) nous notons que les hypothèses (4.13)-(4.16) et la régularité (4.40)-(4.42) montrent que $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $D \in C(0, T; H)$. Il s'ensuit des régularités (4.20), (4.21) et (4.40) que

$$\operatorname{Div} \sigma^\ell(t) = \rho^\ell \ddot{u}^\ell(t) - f_0^\ell(t), \quad \operatorname{div} D^\ell(t) = q_0^\ell(t), \qquad \forall t \in [0, T],$$

ce qui montre que

$$\operatorname{Div} \sigma^\ell \in L^2(0, T; H^\ell), \quad \operatorname{div} D^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\ell)).$$

Donc

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}_1), \tag{4.43}$$

$$D \in L^2(0, T, \mathcal{W}). \tag{4.44}$$

Un quintuple de fonctions $\{\sigma, D, u, \varphi, \alpha\}$, qui satisfont la régularité (4.40)-(4.44), s'appelle solution faible du problème de contact électro-viscoélastique $\mathcal{P}_2$. Nous concluons par le théorème 4.3.1 que sous les hypothèses (4.13)-(4.22), il existe une unique solution du problème $\mathcal{P}_2^V$ possède la régularité (4.40)-(4.44). La preuve du Théorème 4.3.1 sera réalisée en plusieurs étapes. Il est basé sur des arguments des équations et des inéquations de l'évolution non linéaires de premier ordre, et les arguments de point fixe de Banach.

Première étape.

Nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ des déplacements, dans laquelle $\eta \in L^2(0, T; \mathbb{V}')$ est donnée.

Problème $\mathcal{P}_2^{u_\eta}$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \to \mathbb{V}$ tel que

$$\begin{aligned} &\langle \ddot{u}_\eta(t), w - \dot{u}_\eta(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \sum_{\ell=1}^{2} (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(t)), \varepsilon(w^\ell - \dot{u}_\eta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j(w) - \\ &j(\dot{u}_\eta(t)) \geq \langle F(t) - \eta(t), w - \dot{u}_\eta(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}}, \ \forall w \in \mathbb{V}, \ p.p. \ t \in (0, T), \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \tag{4.46}$$

En utilisant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, nous définissons l'opérateur $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ comme suivant

$$\langle Au, v\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} = \sum_{\ell=1}^{2} (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \ \forall u = (u^1, u^2), v = (v^1, v^2) \in \mathbb{V}. \tag{4.47}$$

En utilisant le variable de vitesse $v_\eta = \dot{u}_\eta$, le problème $\mathcal{P}_2^{u_\eta}$ est écrit pour p.p. $t \in (0,T)$.

Problème $\mathcal{P}_2^{v_\eta}$. Trouver le champ des vitesses $v_\eta : [0,T] \to \mathbb{V}$ tel que

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{v}_\eta(t), w - v_\eta(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \langle A v_\eta(t), w - v_\eta(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + j(w) - \\
&j(v_\eta(t)) \geq \langle F_\eta(t), w - v_\eta(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}}, \quad \forall w = (w^1, w^2) \in \mathbb{V}, \\
&v_\eta(0) = v_0,
\end{aligned}$$

où $F_\eta = F - \eta$. Pour résoudre le problème $\mathcal{P}_2^{v_\eta}$, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 4.3.1. *Supposons que les hypothèses (4.13) et (4.19) sont vérifiées. Alors l'opérateur A et la fonctionnelle j définis respectivement par (4.47) et (4.27) satisfont*

$$\begin{cases}
(a)\ A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}' \ \textit{est un opérateur hemicontinu et fortement monotone}, \\
(b)\ \exists\, C_1 \geq 0,\ \exists\, C_2 \geq 0, \forall v \in \mathbb{V}\ \|Av\|_{\mathbb{V}'} \leq C_1\|v\|_{\mathbb{V}} + C_2, \\
(c)\ \textit{pour toute suite } (u_n) \textit{ et } u \textit{ dans } L^2(0,T;\mathbb{V}) \textit{ telle que} \\
\ u_n \rightharpoonup u \textit{ faiblement dans } L^2(0,T;\mathbb{V}) \textit{ alors} \\
\ Au_n \rightharpoonup Au \textit{ faiblement étoile dans } L^2(0,T;\mathbb{V}') \\
\ \textit{et} \quad \liminf\limits_{n\to+\infty} \int_0^T \langle Au_n(t), u_n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} dt \geq \int_0^T \langle Au(t), u(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} dt.
\end{cases} \tag{4.48}$$

$$\begin{cases}
(a)\ j : \mathbb{V} \to \mathbb{R} \ \textit{est une fonction convexe et semi-continue inférieurement}, \\
\ \textit{il existe une suite des fonctions de } C^1 \textit{ et convexe } (j_n) : \mathbb{V} \to \mathbb{R} \textit{ converge} \\
\ \textit{vers } j \textit{ tels que} \\
(b)\ \exists\, d_1 \geq 0,\ \exists\, d_2 \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \|j_n'(v)\|_{\mathbb{V}'} \leq d_1\|v\|_{\mathbb{V}} + d_2, \\
(c)\ \forall v \in L^2(0,T;\mathbb{V}),\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^T j_n(v(t))dt = \int_0^T j(v(t))dt, \\
(d)\ \textit{pour toute suite } (v_n) \textit{ et } v \textit{ dans } L^2(0,T;\mathbb{V}) \textit{ telle que} \\
\ v_n \rightharpoonup v \textit{ faiblement dans } L^2(0,T;\mathbb{V}) \textit{ alors} \\
\liminf\limits_{n\to+\infty} \int_0^T j_n(v_n(t))dt \geq \int_0^T j(v(t))dt,
\end{cases} \tag{4.49}$$

où $j_n'(v)$ désigne la dérivée au sens de Fréchet de j_n en v.

Démonstration. D'après la définition (4.47) de l'opérateur A, l'hypothèse (4.13) et l'égalité (2.12) nous pouvons vérifier que A est hemicontinu et fortement monotone et satisfait les conditions (4.48)(a)-(b), d'après la continuité de A et en appliquant le théorème de Lebesgue (voir [44]), on déduit la condition (4.48)(c).

D'autre part, en utilisant l'injection continue de V^ℓ dans $L^2(\Gamma_3)^d$, d'après (2.14), nous trouvons alors que la fonctionnelle j est continue et convexe donc (4.49)(a). Pour approcher la fonction j, nous utilisons la suite des fonctionnelles $(j_n) : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ définie par

$$j_n(v) = \int_{\Gamma_3} g\sqrt{\|[v_\tau]\|^2_{L^2(\Gamma_3)^d} + e^{-n}}\, da, \quad \forall v \in \mathbb{V}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous vérifions que la dérivée au sens de Fréchet de j'_n en v est donnée par

$$\langle j'_n(v), h\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} = \int_{\Gamma_3} g\frac{([v_\tau],[h_\tau])_{L^2(\Gamma_3)^d}}{\sqrt{\|[v_\tau]\|^2_{L^2(\Gamma_3)^d} + e^{-n}}}da, \quad \forall h \in \mathbb{V}. \tag{4.50}$$

Nous constatons que j_n est continûment différentiable. Quelques manipulations algébriques montrent que pour tous $a \geq 0$, $b \geq 0$, telle que $a + b = 1$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{(ax+by)^2 + e^{-n}} \leq a\sqrt{x^2 + e^{-n}} + b\sqrt{y^2 + e^{-n}}.$$

Alors j_n est convexe pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (4.50) il s'ensuit que

$$\exists\, C \geq 0,\ \forall v \in \mathbb{V}, \quad \|j'_n(v)\|_{\mathbb{V}'} \leq C\|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)},$$

donc (4.49)(b) est satisfaite.

D'après la définition de j_n on a

$$\lim_{n\to+\infty} j_n(v) = j(v),$$

et comme j_n est continue sur $\mathbb{V}$, en appliquant le théorème de Lebesgue, on déduit la propriété (4.49)(c).

Enfin (4.49)(d) est une conséquence du fait que

$$\forall v \in \mathbb{V},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad j_n(v) \geq j(v),$$

et de la continuité de la fonction j qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T j(v_n(t))dt = \int_0^T j(v(t))dt.$$

Nous concluons que l'opérateur A, la fonctionnelle j et la fonctionnelle j_n vérifient les conditions (4.48) et (4.49). □

Lemme 4.3.2. *Sous les hypothèses* (4.48) *et* (4.49) *et pour tout* $\eta \in L^2(0,T;\mathbb{V}')$, *le problème* $\mathcal{P}_2^{v_\eta}$ *a une solution unique ayant la régularité*

$$v_\eta \in C(0,T;H) \cap L^2(0,T;\mathbb{V}) \cap W^{1,2}(0,T;\mathbb{V}').$$

Démonstration. L'opérateur A est hemicontinu et fortement monotone d'après (4.48)(a), et comme j_n' est monotone d'après (4.50) et hemicontinu puisque $j_n \in C^1$, alors $A + j_n'$ est hemicontinu, de plus il est fortement monotone ensuite il est monotone et la condition (2.31) est vérifiée.
On a aussi d'après (4.48)(a) et (4.49)(b) la condition (2.32) est vérifiée. En utilisant le théorème 2.6.1, comme $F_\eta \in L^2(0,T;\mathbb{V}')$ et $v_0 \in H$, il résulte

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\ v_\eta^n \in L^2(0,T;\mathbb{V}) \cap C(0,T;H) \cap W^{1,2}(0,T;\mathbb{V}'),$$

tels que

$$\begin{cases} \dot{v}_\eta^n(t) + Av_\eta^n(t) + j_n'(v_\eta^n(t)) = F_\eta(t) \text{ dans } \mathbb{V}', \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \\ v_\eta^n(0) = v_0. \end{cases} \tag{4.51}$$

On a

$$\langle j_\eta'(v_\eta^n(t)), w - v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} \leq j(w) - j(v_\eta^n(t)) \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

ce qui implique, d'après (4.51) que

$$\begin{aligned} &\langle \dot{v}_\eta^n(t), w - v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \langle Av_\eta^n(t), w - v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + j(w) - j(v_\eta^n(t)) \\ &\geq \langle F_\eta(t), w - v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}},\ \forall w \in \mathbb{V}, \quad \text{p.p. } t \in (0,T). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Alors v_η^n est une solution de $\mathcal{P}_2^{v_\eta}$. On applique aussi (4.51), il résulte

$$\begin{aligned} &\langle \dot{v}_\eta^n(t), v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \langle Av_\eta^n(t), v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \langle j_n'(v_\eta^n(t)), (v_\eta^n(t))\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} \\ &= \langle F_\eta(t), v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}}, \quad \text{p.p. } t \in (0,T). \end{aligned} \tag{4.53}$$

En utilisant (4.13), la monotonie de j_n' et le théorème 2.3.4, pour déduire que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\eta^n(t)\|_H^2 + m_A\|v_\eta^n(t)\|_{\mathbb{V}}^2 = \langle F_\eta(t), v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}},$$

où $m_A = \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})$. On applique l'inégalité $ab \leq a^2 + b^2,\ a \geq 0,\ b \geq 0$, pour obtenir

$$|\langle F_\eta(t), v_\eta^n(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}}| \leq \|F_\eta(t)\|_{\mathbb{V}'}^2 + \|v_\eta^n(t)\|_{\mathbb{V}}^2.$$

On intègre l'égalité (4.53) sur $[0, t]$, $t \in [0, T]$ en utilisant le théorème 2.3.4 et $F_\eta \in L^2(0, T; \mathbb{V}')$, il résulte, après simplification d'écriture, l'inégalité

$$\|v_\eta^n(t)\|_H^2 \leq a + b \int_0^t \|v_\eta^n(t)\|_{\mathbb{V}}^2 dt,$$

où $a \geq 0$, $b \geq 0$. Alors d'après le lemme de Gronwall on obtien

$$\exists\, C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \ \|v_\eta^n(t)\|_H \leq C, \quad \int_0^T \|v_\eta^n(t)\|_{\mathbb{V}}^2 dt \leq C.$$

D'après (4.51) et (4.49)(b) nous avons

$$\exists\, C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^T \|\dot{v}_\eta^n(t)\|_{\mathbb{V}'}^2 dt \leq C.$$

Nous pouvons donc extraire une sous-suite notée encore (v_η^n) pour trouver que

$$\begin{cases} v_\eta^n \rightharpoonup v_\eta \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{V}) \text{ et faiblement étoile dans } L^\infty(0, T; H), \\ \dot{v}_\eta^n \rightharpoonup \dot{v}_\eta \text{ faiblement étoile dans } L^2(0, T; \mathbb{V}'). \end{cases} \tag{4.54}$$

Il s'ensuit que

$$v_\eta \in C([0, T]; H) \text{ et } v_\eta^n(t) \rightharpoonup v_\eta(t) \text{ faiblement étoile dans } H, \ \forall t \in [0, T]. \tag{4.55}$$

On intègre (4.52), nous avons $\forall w \in L^2(0, T; \mathbb{V})$,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \dot{v}_\eta^n(t), w \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt + \int_0^T \langle A v_\eta^n(t), w \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt + \int_0^T j_n(w) dt \\ &\geq \int_0^T \langle \dot{v}_\eta^n(t), v_\eta^n(t) \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt + \int_0^T \langle A v_\eta^n(t), v_\eta^n(t) \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt \\ &+ \int_0^T j_n(v_\eta^n(t)) dt + \int_0^T \langle F_\eta(t), w - v_\eta^n(t) \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt, \end{aligned}$$

et nous trouvons

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \dot{v}_\eta^n(t), w \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt + \int_0^T \langle A v_\eta^n(t), w \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt + \int_0^T j_n(w) dt \\ &\geq \frac{1}{2} \|v_\eta^n(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|v_\eta^n(0)\|_H^2 + \int_0^T \langle A v_\eta^n(t), v_\eta^n(t) \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt \\ &+ \int_0^T j_n(v_\eta^n(t)) dt + \int_0^T \langle F_\eta(t), w - v_\eta^n(t) \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt. \end{aligned}$$

Nous utilisons (4.49)(c)-(d), (4.54), (4.55) et la semi-continuité inférieurement faiblement, on obtient que $\forall w \in L^2(0, T; \mathbb{V})$,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \dot{v}_\eta, w - v_\eta \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt + \int_0^T \langle A v_\eta, w - v_\eta \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt + \int_0^T (j(w) - j(v_\eta)) dt \\ &\geq \int_0^T \langle F_\eta, w - v_\eta \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} dt. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente implique que

$$\begin{aligned}&\langle\dot{v}_\eta(t), w - v_\eta(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \langle A v_\eta(t), w - v_\eta(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + j(w) - j(v_\eta(t))\\ &\geq \langle F_\eta(t), w - v_\eta(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} \quad \forall w \in \mathbb{V}, \quad \text{p.p. } t \in (0,T).\end{aligned} \tag{4.56}$$

Nous concluons que $\mathcal{P}_2^{v_\eta}$ a au moins une solution $v_\eta \in C(0,T;H) \cap L^2(0,T;\mathbb{V}) \cap W^{1,2}(0,T;\mathbb{V}')$.

Pour l'unicité, soient $v_{1\eta}, v_{2\eta}$ deux solutions de $\mathcal{P}_2^{v_\eta}$. Nous utilisons (4.56) à obtenir pour p.p. $t \in (0,T)$

$$\langle\dot{v}_{2\eta}(t) - \dot{v}_{1\eta}(t), v_{2\eta}(t) - v_{1\eta}(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \langle A v_{2\eta}(t) - A v_{1\eta}(t), v_{2\eta}(t) - v_{1\eta}(t)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} \leq 0.$$

Intégrons l'inégalité précédente, en utilisant (4.48)(a), nous trouvons

$$\frac{1}{2}\|v_{2\eta}(t) - v_{1\eta}(t)\|_H^2 + m_A \int_0^t \|v_{2\eta}(s) - v_{1\eta}(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds \leq 0, \ \forall t \in [0,T],$$

ce qui implique $v_{1\eta} = v_{2\eta}$. □

On considère maintenant $u_\eta : [0,T] \to \mathbb{V}$ la fonction définie par

$$u_\eta = \int_0^t v_\eta(s)ds + u_0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.57}$$

Dans l'étude du problème $\mathcal{P}_2^{u_\eta}$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.3. *$\mathcal{P}_2^{u_\eta}$ a une solution unique ayant la régularité exprimé dans* (4.40).

Démonstration. La preuve du Lemme 4.3.3 est une conséquence du Lemme 4.3.2 et la relation (4.57). □

Deuxième étape.

Dans cette étape, nous utilisons la solution u_η obtenue dans le Lemme 4.3.3.

Problème $\mathcal{P}_2^{\varphi_\eta}$. Trouver un champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [0,T] \to W$ tel que

$$\sum_{\ell=1}^{d} (\mathcal{C}^\ell \nabla\varphi_\eta^\ell(t) - \mathcal{E}^\ell\varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \nabla\phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall\phi = (\phi^1, \phi^2) \in W, t \in [0,T]. \tag{4.58}$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 4.3.4. *Il existe une solution unique du problème $\mathcal{P}_2^{\varphi_\eta}$ et cela satisfait la régularité* (4.41).

Démonstration. Nous définissons la forme bilinéaire $b : W \times W \to \mathbb{R}$ par

$$b(\varphi, \phi) = \sum_{\ell=1}^{d} (\mathcal{C}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \varphi = (\varphi^1, \varphi^2), \phi = (\phi^1, \phi^2) \in W. \tag{4.59}$$

D'après (4.59) ,(4.16) ,(2.18) et (2.20) avec l'inégalité de Hölder, nous pouvons démonter que la forme bilinéaire b est continue, symétrique et coercive sur W. Ainsi, gardant à l'esprit l'hypothèse (4.15) sur le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$, la régularité $u_\eta \in C^1(0, T; H)$ et $q \in C([0, T]; W)$ dans (4.26), nous obtenons que la forme linéaire $L_\eta : [0, T] \to W$ définie par

$$(L_\eta(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + \sum_{\ell=1}^{d} (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \phi \in W, \; t \in [0, T],$$

est continue sur W. En appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous démontrons qu'il existe un élément unique $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$b(\varphi_\eta(t), \phi) = (L_\eta(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W. \tag{4.60}$$

Nous concluons que $\varphi_\eta(t)$ est une solution de $\mathcal{P}_2^{\varphi_\eta}$. Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, il résulte de (2.18), (2.20), (4.15), (4.16) et (4.58) que

$$\|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\|_W \leq C(\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W). \tag{4.61}$$

L'inégalité (4.61) et les régularités de u_η et q impliquent que $\varphi_\eta \in C([0, T]; W)$. □

Troisième étape.

Maintenant, soit $\mu \in L^2(0, T; E_0)$ fixé. Nous considérons le problème auxiliaire suivant, dont l'inconnue est le champ d'endommagement.

Problème $\mathcal{P}_2^{\alpha_\mu}$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\mu : [0, T] \to E_0$ tels que

$$\begin{aligned} &\alpha_\mu(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^{2} (\dot{\alpha}_\mu^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_\mu^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha_\mu(t), \xi - \alpha_\mu(t)) \\ &\geq \sum_{\ell=1}^{2} (\mu^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_\mu^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} , \quad \forall \xi \in K \quad \text{p.p.} t \in [0, T], \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\alpha_\mu(0) = \alpha_0. \tag{4.63}$$

Lemme 4.3.5. *Pour tout $\mu \in L^2(0, T; E_0)$, il existe une unique solution α_μ du problème auxiliaire $\mathcal{P}_2^{\alpha_\mu}$ satisfait (4.42).*

Démonstration. D'abord, l'inclusion de $(E_1, \|.\|_{E_1})$ dans $(E_0, \|.\|_{E_0})$ est continue et partout dense, nous pouvons écrire un Triplet de Gelfand $E_1 \subset E_0 \subset E_1'$.
En suivant les mêmes étapes que la preuve du lemme 3.3.1, notamment en ce qui concerne l'opérateur a défini par (4.23) qui est linéaire, symétrique, continu ainsi est vérifié (2.33) et comme $\alpha_0 \in K$ et $\mu \in L^2(0, T; E_0)$ il existe, d'après le théorème 2.6.2, une unique solution du problème auxiliaire $\mathcal{P}_2^{\alpha_\mu}$ satisfait (4.42). □

Quatrième étape.

Pour chaque $(\eta, \mu) \in L^2(0, T; \mathbb{V}' \times E_0)$ nous notons par u_η la solution du problème $\mathcal{P}_2^{u_\eta}$ fournie dans le Lemme 4.3.3, par φ_η la solution du problème $\mathcal{P}_2^{\varphi_\eta}$ fournie dans le Lemme 4.3.4 et par α_μ la solution du problème $\mathcal{P}_2^{\alpha_\mu}$ fournie dans le Lemme 4.3.5. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir la fonction $\Lambda(\eta, \mu) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{V}' \times E_0$ par

$$\Lambda(\eta(t), \mu(t)) = \big(\Lambda_1(\eta(t), \mu(t)), \Lambda_2(\eta(t), \mu(t))\big), \tag{4.64}$$

où Λ_1 et Λ_2 sont données par

$$\langle \Lambda_1(\eta(t), \mu(t)), v\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} = \sum_{\ell=1}^{2} \big(\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \alpha_\mu^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi_\eta^\ell(t), \varepsilon(v^\ell)\big)_{\mathcal{H}^\ell}, \tag{4.65}$$

$$\Lambda_2(\eta(t), \mu(t)) = \sum_{\ell=1}^{2} S^\ell(\varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \alpha_\mu^\ell(t)). \tag{4.66}$$

Lemme 4.3.6. *Pour chaque $(\eta, \mu) \in L^2(0, T; \mathbb{V}' \times E_0)$, la fonction $\Lambda(\eta, \mu)$ appartient à l'espace $L^2(0, T; \mathbb{V}'\times E_0)$. Par ailleurs, l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; \mathbb{V}'\times E_0) \longrightarrow L^2(0, T; \mathbb{V}'\times E_0)$ possède un point fixe (η^*, μ^*) unique.*

Démonstration. Soient $(\eta_1, \mu_1), (\eta_2, \mu_2) \in L^2(0, T; \mathbb{V}' \times E_0)$. Pour simplicité, nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ et $\alpha_{\mu_i} = \alpha_i$, pour $i = 1, 2$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\Lambda_1(\eta_1, \mu_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \mu_2)(t)\|_{\mathbb{V}'} \leq \sum_{\ell=1}^{2} \|\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_1^\ell(t)), \alpha_1^\ell(t)) - \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_2^\ell(t)), \alpha_2^\ell(t))\|_{\mathcal{H}^\ell} \\ + \sum_{\ell=1}^{2} \|(\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi_2^\ell(t)\|_{\mathcal{H}^\ell}.\end{aligned}$$

En utilisant (2.12) et les hypothèses (4.14) sur $\mathcal{B}^\ell$ et (4.15) sur $\mathcal{E}^\ell$, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\|\Lambda_1(\eta_1,\mu_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2,\mu_2)(t)\|_{\mathbb{V}'} \le C \quad & (\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathbb{V}} + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0} \\ & + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W).\end{aligned} \tag{4.67}$$

Comme u_1 et u_2 ont la même valeur initiale, il s'ensuit d'après (4.57) que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathbb{V}} \le \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}} ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.68}$$

Mettons $\eta = \eta_1, v = \dot{u}_2$ puis $\eta = \eta_2, v = \dot{u}_1$ dans (4.45), gardant à l'esprit (4.47), en combinant les inégalités résultantes, nous en trouvons

$$\langle \ddot{u}_1 - \ddot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} + \ \langle A\dot{u}_1 - A\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} \le -\langle \eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}}.$$

On a bien que l'opérateur A est fortement monotone d'après (4.48)(a), alors on intègre cette dernière inégalité par rapport au temps, nous trouvons

$$m_A \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds \le -\int_0^t \langle \eta_1(s) - \eta_2(s), \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\rangle_{\mathbb{V}'\times\mathbb{V}} ds,$$

où $m_A = \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})$. En appliquant l'inégalité de Young $|ab| \le \dfrac{2}{m_A}a^2 + \dfrac{m_A}{2}b^2$, il existe $C > 0$ vérifie

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds \le C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathbb{V}'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0,T). \tag{4.69}$$

En utilisant (4.68) et (4.69), nous concluons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathbb{V}}^2 \le C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathbb{V}'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0,T). \tag{4.70}$$

Maintenant, nous employons les hypothèses (4.15) sur le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell$ et (4.16) sur la permittivité électrique $\mathcal{C}^\ell$ avec l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (2.20), il s'ensuit de (4.58) que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \le C\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.71}$$

En outre, considérons $\mu_1, \mu_2 \in L^2(0,T;E_0)$ et pour simplifier l'écriture notons $\alpha_{\mu_i} = \alpha_i, i = 1,2$. En utilisant l'inégalité (4.62) pour $\mu = \mu_1, \xi = \alpha_2$ puis $\mu = \mu_2, \xi = \alpha_1$, en additionnant les résultats obtenus nous avons

$$\begin{aligned}&(\dot{\alpha}_1(t) - \dot{\alpha}_2(t), \alpha_1(t) - \alpha_2(t))_{E_0} + a(\alpha_1(t) - \alpha_2(t), \alpha_1(t) - \alpha_2(t)) \\ &\le (\mu_1(t) - \mu_2(t), \alpha_1(t) - \alpha_2(t))_{E_0}, \qquad \text{p.p. } t \in (0,T).\end{aligned}$$

On intègre l'inégalité précédente, en utilisant $a(\alpha_1(t)-\alpha_2(t),\alpha_1(t)-\alpha_2(t))\geq 0$ et le théorème 2.3.4, pour la première membre, et en appliquant les inégalités de Hölder et de Young, pour la deuxième membre, on déduit que

$$\|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)\|^2_{E_0}\leq C\int_0^t\|\mu_1(s)-\mu_2(s)\|^2_{E_0}ds. \tag{4.72}$$

Nous substituons (4.70)-(4.72) dans (4.67), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\Lambda_1(\eta_1(s),\mu_1(s))-&\Lambda_1(\eta_2(s),\mu_2(s))\|^2_{\mathbb{V}'}ds\\ &\leq C\int_0^t(\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|^2_{\mathbb{V}'}+\|\mu_1(s)-\mu_2(s)\|^2_{E_0})ds.\end{aligned} \tag{4.73}$$

Pour estimer Λ_2, soient $(\eta_1,\mu_1),(\eta_2,\mu_2)\in L^2(0,T;\mathbb{V}'\times E_0)$. Posons $u_{\eta_i}=u_i,\ \alpha_{\mu_i}=\alpha_i$ pour $i=1,2$, on obtient

$$\|\Lambda_2(\eta_1,\mu_1)(t)-\Lambda_2(\eta_2,\mu_2)(t)\|_{\mathbb{V}'}\leq\sum_{\ell=1}^{2}\|S^\ell(\varepsilon(u_1^\ell(t)),\alpha_1^\ell(t))-S^\ell(\varepsilon(u_2^\ell(t)),\alpha_2^\ell(t))\|_{L^2(\Omega^\ell)}.$$

En utilisant l'hypothèse (4.17) sur S^ℓ et l'égalité (2.12), il existe $C>0$ telle que

$$\|\Lambda_2(\eta_1(t),\mu_1(t))-\Lambda_2(\eta_2(t),\mu_2(t))\|_{E_0}\leq C(\|u_1(t)-u_2(t)\|_{\mathbb{V}}+\|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)\|_{E_0}),$$

ou encore, d'après l'inégalité de Young ($ab\leq\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}$)

$$\begin{aligned}\|\Lambda_2(\eta_1(t),\mu_1(t))-&\Lambda_2(\eta_2(t),\mu_2(t))\|^2_{E_0}\\ &\leq C(\|u_1(t)-u_2(t)\|^2_{\mathbb{V}}+\|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)\|^2_{E_0}).\end{aligned} \tag{4.74}$$

Alors que (4.74) devient après une intégration sur $[0,t]$, en utilisant les estimations (4.70) et (4.72)

$$\begin{aligned}\|\Lambda_2(\eta_1(s),\mu_1(s))-&\Lambda_2(\eta_2(s),\mu_2(s))\|^2_{E_0}ds\\ &\leq C\int_0^t(\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|^2_{\mathbb{V}'}+\|\mu_1(s)-\mu_2(s)\|^2_{E_0})ds.\end{aligned} \tag{4.75}$$

Nous combinons les inégalités (4.73) et (4.75) pour obtenir

$$\|\Lambda(\eta_1(s),\mu_1(s))-\Lambda(\eta_2(s),\mu_2(s))\|^2_{\mathbb{V}'\times E_0}\leq C\int_0^t\|(\eta_1(s)-\eta_2(s),\mu_1(s)-\mu_2(s))\|^2_{\mathbb{V}'\times E_0},$$

ou encore

$$\begin{aligned}\|\Lambda(\eta_1(s),\mu_1(s))-&\Lambda(\eta_2(s),\mu_2(s))\|^2_{\mathbb{V}'\times E_0}\\ &\leq C\int_0^t\|(\eta_1(s),\mu_1(s))-(\eta_2(s),\mu_2(s))\|^2_{\mathbb{V}'\times E_0}.\end{aligned} \tag{4.76}$$

En réitérant l'inégalité (4.76) m fois, on utilise la même méthode qu'on a vu dans la deuxième partie de cette thèse, il résulte

$$\|\Lambda^m(\eta_1,\mu_1)-\Lambda^m(\eta_2,\mu_2)\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{V}'\times E_0)}\le \frac{C^mT^m}{m!}\|(\eta_1,\mu_1)-(\eta_2,\mu_2)\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{V}'\times E_0)},$$

Comme $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{C^mT^m}{m!}=0$, cela implique pour m assez grand, que l'opérateur $\Lambda^m : L^2(0,T;\mathbb{V}'\times E_0)\longrightarrow L^2(0,T;\mathbb{V}'\times E_0)$ est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0,T;\mathbb{V}'\times E_0)$. Il existe donc un unique (η^*,μ^*) tel que $\Lambda^m(\eta^*,\mu^*)=(\eta^*,\mu^*)$ qui est aussi l'unique point fixe de Λ, ce qui conclut la preuve. $\square$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le Théorème 4.3.1.

4.3.2 Démonstration du Théorème 4.3.1

Existence de la solution.

Soit $(\eta^*,\mu^*)\in L^2(0,T;\mathbb{V}'\times E_0)$ le point fixe de Λ et soit u, φ et α les solutions des problèmes $\mathcal{P}_2^{u_\eta}$, $\mathcal{P}_2^{\varphi_\eta}$ et $\mathcal{P}_2^{\alpha_\mu}$ respectivement, pour $\eta=\eta^*$ et $\mu=\mu^*$, c'est-à-dire $u=u_{\eta^*}$, $\varphi=\varphi_{\eta^*}$ et $\alpha=\alpha_{\mu^*}$. Les égalités $\Lambda_1(\eta^*,\mu^*)=\eta^*$ et $\Lambda_2(\eta^*,\mu^*)=\eta^*$ combinées avec (4.65) et (4.66) montrent que (4.36), (4.37) et (4.38) sont satisfaites. Ensuite, (4.39) et la régularité (4.40)-(4.42) résulte des lemmes 4.3.3, 4.3.4 et 4.3.5. Comme $u\in W^{1,2}(0,T;\mathbb{V})$, il s'ensuit d'après l'équation (4.1) et les hypothèses (4.13)-(4.15) que $\sigma\in L^2(0,T;\mathcal{H})$, et comme $\ddot{u}\in L^2(0,T;\mathbb{V}')$ d'après la régularité (4.40), alors $\operatorname{Div}\sigma^\ell\in L^2(0,T;H^\ell)$ d'après l'équation (4.4) et l'hypothèse (4.18), ce qui est impliqué la régularité (4.43). Ainsi la relation (4.2) et les hypothèses (4.15) et (4.16) et les régularités (4.41) et (4.42) montrent que $D\in C(0,T;H)$, mais la régularité (4.21) et l'équation (4.5) d'un coté et l'hypothèse (4.20) de l'autre coté montrent que $\operatorname{div} D^\ell\in L^2(0,T;L^2(\Omega^\ell))$ d'où la régularité (4.44).

Unicité de la solution.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (4.64)-(4.66) et la résolvabilité unique des problèmes $\mathcal{P}_2^{u_\eta}$, $\mathcal{P}_2^{\varphi_\eta}$ et $\mathcal{P}_2^{\alpha_\mu}$. $\square$

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié deux problèmes de mécanique de contact, le premier est de processus quasi-statique à mémoire longue entre deux corps électro-thérmo-élastiques avec frottement, endommagement, adhésion et compliance normale, et l'autre est un problème de contact bilatérale et de processus dynamique entre deux corps électro-viscoélastique avec endommagement et frottement de Tresca.

Nous avons présenté une formulation des équations et des inéquations variationnelles de chaque problème à étudier, pour ceci en utilisant la formule de Green.

Enfin on a confirmé l'existence et l'unicité de la solution faible de chaque problème, en utilisant quelques théorèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution, théorème du Lax-Milgram, théorème de Cauchy-Lipshitz, puis les techniques de point fixe de Banach et les inégalitées du lemme de Gronwall.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction,* Math. Meth. Appl. Sci, **22** (1999), 267–284.

[3] L.E. Andersson, *A quasistatic frictional problem with normal compliance*, Nonlinear Analysis TMA, **16** (1991), 407–428.

[4] L.E. Andersson, *A global existence result for a quasistatic contact problem with friction*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, **5** (1995), 249–286.

[5] R. Arhab, *contribution à l'étude du contact piézoélectriques avec adhésion*, Thèse doctorat, Université de Perpignan, France (2008).

[6] B. Awbi, M. Shillor and M. Sofonea, *Dual formulation of a quasistatic viscoelastic contact problem with Tresca's friction law*, Applicable Analysis, **79** (2000), 1–20.

[7] Y. Ayyad, *Analyse Variationnelle de Problèmes Dynamiques*, Presses Académiques Francophones, Saarbrücken, Allemagne (2013).

[8] A. Azeb Ahmed, *Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement*, Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas, Sétif (2015).

[9] R.C. Batra and J.S.Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, J. of Elasticiy, **38** (1995), 209–218.

[10] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff, (1976).

[11] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984).

[12] V. Barbu, and T. Precupanu, *Convexity and optimisation in Banach spaces*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1986).

[13] P. Bisenga, F. Lebon and F. Maceri, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support in Contact Mechanics*, Kluwer Academic, Dordrecht Solid, **103** (2002), 47–354.

[14] S. Boutechbak, *A dynamic problem of frictionless contact for elastic-thermoviscoplastic materials with damage*, Int. J. Pure Appl. Math., **86** (2013), 173–197.

[15] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson (1987).

[16] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. of Comp. and App. Math., **159** (2003), 431–465.

[17] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), **55** (2004), 32–47.

[18] H.L. Dai and X. Wang, *Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures*, Inter. J. Sol. Struct., **42** (2005), 1151–1171.

[19] B. Douib and T. Hadj Ammar, *Frictional contact problem between thermoelastic piezoelectric bodies with damage, adhesion and normal compliance*, Palestine Journal of Mathematics, **9(1)** (2020), 493–510.

[20] B. Douib, T. Hadj Ammar and A. Azeb Ahmed, *Analyse of a dynamic contact problem for electro-viscoelastic materials with Tresca's friction*, accepted in the journal : TWMS J. App. and Eng. Math.

[21] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer-Verlag, Berlin (1976).

[22] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée, **6** (1987), 383–407.

[23] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série II, **295** (1982), 913–916.

[24] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage in concrete : the unilateral phenomenon*, Nuclear Eng. Design, **156** (1995), 323–335.

[25] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage, gradient of damage and principle of virtual work*, Int. J. Solids Structures **33** (1996), 1083–1103.

[26] M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar, and M. Shillor, *One dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl., **8** (1998), 541–570.

[27] M. Frémond, K.L. Kuttler, and M. Shillor, *Existence and uniqueness of solutions for a one-dimensinal damage model*, J. Math. Anal. Appl., **229** (1999), 271–294.

[28] T. Hadj ammar, *A dynamic problem with adhesion and damage in electro-elasto-viscoplasticity*, Palestine Journal of Mathematics, **5** (2016), 1–22.

[29] T. Hadj ammar and B, Benabderrahmane, *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, Stud. Univ. Babe, s-Bolyai Math., **57** (2012), 427–444.

[30] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, *Frictional contact problem for electro-viscoelastic materials with long-term memory, damage, and adhesion*, Elect. J. Diff. Equ., **222** (2014), 1–21.

[31] T. Hadj Ammar, S. Drabla and B. Benederrahmane, *Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion*, Georgian Math. J., **44** (2014), 1–15.

[32] T. Hadj Ammar, A. Saïdi and A. Azeb Ahmed, *Dynamic contact problem with adhesion and damage between thermo-electro-elasto-viscoplastic bodies*, C. R. Mecani., **345** (2017), 329–336.

[33] W. Han, *On the numerical approximation of a frictional contact problem with normal compliance*, Numer. Funct. Anal. et Optimiz., **17** (1996), 307–321.

[34] W. Han and M. Sofonea, *Analysis et numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance*, Applicationes Mathematicae, **26** (1999), 415–435.

[35] W. Han and M. Sofonea, *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis, **38** (2000), 556–579.

[36] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplas-ticity, Studies in Advanced Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, **30** (2002).

[37] W. Han, M. Sofonea and K. Kazmi, *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials*, Compu. Methods. Appl. Mech. Engrg., **196** (2007), 3915–3926.

[38] S. Hueber, A. Matei and B.I. Wohlmuth, *A mixed variational formulation and a optimal a priori error estimate for a frictional contact problem in elasto-piezoelectricity*, Bull. Math. Soc. Sci. Math., Roumanie, **48** (2005), 209–232.

[39] I.R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).

[40] A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, *A global existence result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance in Unilateral Problem in Structural Analysis*, International Series of Numerical Mathematics, **101** (1991), 85–111.

[41] A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, Intrnat. J. Engrg. Sci., **26** (1988), 811–832.

[42] Z. Lerguet, *Analyse de Quelque problèmes de contact avec frottement et adhésion*, Thése doctorat, Université Ferhat Abbas, Sétif, Algerie (2008).

[43] Z. Lerguet, M. Shillor and M. Sofonea, *A frictional contact problem for an electro-viscoelastic body*, Electron. J. Differ. Equat., **170** (2007), 1–16.

[44] J.L. Lions, E. Magenes, *problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, **1** 1986.

[45] J.A.C. Martins and J.T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction laws*, Nonlinear Anal., **11** (1987), 407–428.

[46] D. Mortreanu and M. Sofenea, *Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials*, Abstract and Applied Analysis, **4** (1999), 255–279.

[47] D. Mortreanu and M. Sofenea, *Quasivariational inequalites and applications in frictional contact problems with normal compliance*, Adv. Math. Sci. Appl., **10** (2000), 103–118.

[48] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris, (1967).

[49] J. Nečas and I. Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, (1981).

[50] Y. Ouafik, *Contribution à l'étude mathématique et numérique des structures piézoélectriques en contact*, Thèse doctorat, Université Perpignan, France, (2007).

[51] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, *Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage*, Adv. Math. Sci. Appl., **10** (2002), 173–189.

[52] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocou, *A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., **177** (1999), 383–399.

[53] L. Schwartz, *Théorie de Distributions*, Hermann, Paris, (1979).

[54] M. Selmani, *A dynamic problem with adhesion and damage in electro-viscoelastic body with long-term memory*, J. Ineq. Pure Appl. Math., **10** (2009), 6–19.

[55] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys., Springer, Berlin Heidelberg, **655** 2004.

[56] M. Sofonea, R. Arhab and R. Tarraf, *Analysis of Electro-elastic Frictionless Contact Problems with Adhesion*, Journal of Applied Mathematics, (2006), 1–25.

[57] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, vol. 275, Chapman-Hall/CRC Press, New York, (2006).

[58] M. Sofonea, A. Matei, *Variational inequalities with applications, A study of antiplane frictional contact problems*, Springer, New York, (2009).

[59] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1982).

[60] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristall-Physik*, Teubner, Leipzing, (1966).

[61] Z. Zellagui, *Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problémes de Contact en Mécanique des Solides Déformables*, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, Sétif, Algerie, (2012).