RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **ANALYSE**

Intitulé :

ÉTUDE DE CERTAINS OPÉRATEURS SUR LES ESPACES DE BERGMAN

Par : **TOUMACHE Kamel**

Devant le jury composé de :

HAFAYAD Mokhtar	Professeur	Université de Biskra	Président
YAGOUB Ameur	Maître de conférences	Université de Laghouat	Encadreur
KUPIN Stanislas	Professeur	Université de Bordeaux	Co-Encadreur
BERBICHE Mohamed	Professeur	Université de Biskra	Examinateur
BELACEL Amar	Professeur	Université de Laghouat	Examinateur
RAHMOUNE Abdelaziz	Maître de conférences	Université de Laghouat	Examinateur

Soutenue le : 20/02/2022

Dédicace.

Je dédie ce travail

À la mémoire de mon père,

À ma chère mère,

À ma femme et mes enfants,

À mes frères, mes soeurs et toute ma famille.

Remerciements.

Je tiens avant tout à exprimer mes remerciements à mon ex-directeur de recherches, le Docteur ***BENDAOUD Zohra*** pour avoir accepté de diriger cette thèse jusqu'à presque la fin, mal-heureusement son état médical et l'envoi à la retraite l'ont empêché de l'achever.

Mes profonds remerciements vont aussi à mon co-directeur le Professeur ***KUPIN Stanislas*** de *l'Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB)* pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de me co-encadrer et me diriger, par ses précieux conseils et son aide qui m'ont guidé et motivé. J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de la réalisation de ce travail.

Je souhaite aussi adresser ma gratitude à mon directeur de recherches le Docteur ***YAGOUB Ameur*** de l'université *Amar Telidji de Laghouat* pour avoir accepté la finalisation de cette thèse, sa disponibilité et ses précieux conseils m'ont été d'une grande aide, en particulier dans mes moments de doutes. Je le remercie vivement.

J'adresse également mes remerciements au Professeur ***HAFAYAD Mokhtar*** de l'université *Mohamed Khider de Biskra*, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse, me faisant ainsi un grand honneur.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury : le Professeur ***BERBICHE Mohamed*** de l'université *Mohamed Khider de Biskra*, le Professeur ***BELACEL Amar*** de l'université *Amar Telidji de Laghouat* et le Docteur ***RAHMOUNE Abdelaziz*** de l'université *Amar Telidji de Laghouat.*

Finalement, je remercie ma famille pour son soutien moral, ainsi que tous mes amis et mes collègues de travail.

TOUMACHE Kamel.

Table des matières

Notations.

$\mathbb{C}$ le plan complexe.

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$.

$d\mu(z) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité $\mathbb{T}$.

$L^p(\mathbb{T}, d\mu)$ l'espace de Lebesgue usuel.

$\widehat{f}(n)$ le n-ième coefficient de Fourier de f.

$H^p(\mathbb{T}) \simeq H^p(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy.

$\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$.

$\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{D}$.

$dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrd\theta$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$.

$L^p(\mathbb{D}, dA)$ l'espace des fonctions p-intégrables sur $\mathbb{D}$ par rapport à la mesure $dA(z)$.

$||f||_p = (\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z))^{\frac{1}{p}}$ la norme sur $L^p(\mathbb{D}, dA)$.

$< f, g >= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} \, dA(z)$ le produit scalaire sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{D}, dA)$.

$L^p_a(\mathbb{D}, dA)$ l'espace de Bergman.

P_+ la projection orthogonale.

$dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$ la mesure de Lebesgue à poids sur $\mathbb{D}$.

$L^p_a(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ l'espace de Bergman pondéré.

$\tilde{f}$ la transformée de Berezin de la fonction f.

M_ϕ l'opérateur de Laurent (de multiplication).

M_z l'opérateur de translation bilatère (de shift bilatère) dans $L^2(\mathbb{T})$.

$\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes.

T_φ l'opérateur de Toeplitz à symbole φ.

$\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ la classe de Schatten-von Neumann.

$\mathcal{L}(H_1, H_2)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de H_1 dans H_2.

$\hat{\varphi}_r$ la fonction moyenne de φ.

Introduction.

L'étude des opérateurs de Toeplitz est un sujet important dans la théorie moderne des opérateurs. Dans les années quarante du dernier siècle, la recherche était concentrée sur les opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Hardy (voir Nikolski [30]). Depuis le milieu des années quatre-vingt, l'intérêt s'est déplacé vers des opérateurs définis sur différents espaces de fonctions analytiques, comme les espaces de Bergman,les espaces de Fock et d'autres espaces. Par exemple, nous citons les articles de Axler [5], Luecking [28, 29], Zhu [40] et en suite des travaux de Ahern-Cuckovic [3], Cuckovic-Rao [10], Grudsky-Vasilevski [21], Grudsky-Karapetyants-Vasilevski [22], Stroethoff [36], Korenblum-Zhu [24] et Zorboska [38]. Ces articles ont porté sur l'étude des caractéristiques analytiques de l'opérateur de Toeplitz (voir (2.5.1)), (*i.e.,* sa bornitude, compacité, etc..) liée aux propriétés de son symbole.

Le présent travail s'intéresse à la détermination d'une série de conditions suffisantes pour que les opérateurs de Toeplitz à symboles complexes radiaux appartiennent aux classes dites de Schatten-Von Neumann. En particulier, nous nous intéressons aux symboles qui ne sont ni réels ni de signe-défini, et n'ayant pas été étudiées auparavant. Notre contribution porte sur la proposition d'une méthode pour résoudre des problèmes spectraux (*direct* et *inverse*) pour ces opérateurs. La méthode proposée se base sur des techniques de la théorie d'approximation en utilisant les polynômes orthogonaux de Legendre sur un intervalle convenable.

Plus précisément, nous introduisons les notations suivantes et donnons quelques définitions. Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité et

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$$

la mesure de probabilité sur $\mathbb{D}$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, considérons

$$L^p(\mathbb{D}) = L^p(\mathbb{D}, dA) = \{f : ||f||_p^p = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) < +\infty\},$$

et les sous-espaces correspondants des fonctions analytiques

$$L^p_a(\mathbb{D}) = L^p_a(\mathbb{D}, dA) = \{f \ \text{ analytique sur } \mathbb{D}, \ ||f||^p_p = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) < +\infty\}.$$

Ces espaces $L^p_a(\mathbb{D})$ sont appelés espaces de Bergman, (voir Hedenmalm-Korenblum-Zhu [17] et Zhu [39]).

Nous sommes principalement concernés par le cas Hilbert avec $p = 2$. Comme d'habitude, le produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$ est défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\bar{g}(z)\, dA(z), \qquad f, g \in L^2(\mathbb{D}).$$

Il est bien connu qu'il existe une projection orthogonale bornée (appelée projection de Bergman) $P_+ : L^2(\mathbb{D}) \to L^2_a(\mathbb{D})$. Cette projection possède la représentation intégrale

$$(P_+f)(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{(1 - \bar{z}w)^2}\, dA(z), \quad f \in L^2(\mathbb{D}),$$

(voir [17]).

Il est facile de voir que les polynômes par rapport à z (notés $\mathcal{P}$) forment un sous-ensemble dense de $L^2_a(\mathbb{D})$.

Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{D})$. On définit l'opérateur de Toeplitz à symbole φ par

$$T_\varphi : L^2_a(\mathbb{D}) \to L^2_a(\mathbb{D}), \quad T_\varphi p = P_+(\varphi p), \quad p \in \mathcal{P}.$$

Nous disons que l'opérateur T_φ est borné si l'on peut le prolonger par continuité dans l'ensemble $L^2_a(\mathbb{D})$ et l'opérateur résultant reste toujours borné. On note l'opérateur prolongé aussi par T_φ.

Les classes de Schatten-Von Neumann sont définies comme suit :

$$\mathcal{S}_p = \{A \in \mathcal{S}_\infty : ||A||^p_{\mathcal{S}_p} = \sum_k s_k(A)^p < \infty\}, \ 0 < p < \infty,$$

où $\mathcal{S}_\infty$ est la classe des opérateurs compacts, et $\{s_k(A)\}$ sont les nombres singuliers de l'opérateur A. Pour plus d'informations nous nous référons à Simon [35], Gohberg-Goldberg-Kaashoek [20].

On note $z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. On dit que le symbole φ de l'opérateur de Toeplitz T_φ est radial (ou homogène), si $\varphi(z) = \varphi(|z|) = \varphi(r)$, *i.e.*, φ est symétrique par rapport à l'origine. On dit que le symbole est quasi-radial (ou quasi-homogène), si $\varphi(z) = \varphi(|z|)e^{im\theta}$ pour certains $m \in \mathbb{Z}$ fixes.

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous souhaitons comprendre quand un opérateur de Toeplitz T_φ avec un symbole radial appartient à la classe Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p, 0 < p < \infty$. Nous portons une attention particulière à l'étude des symboles à valeurs complexes ou de signe quelconque. Le cas de symbole quasi-homogène se traite de la même façon.

Le spectre d'un opérateur de Toeplitz à symbole radial est facile à calculer. En effet, en prenant la base orthonormale canonique $e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n$ pour $L^2_a(\mathbb{D})$, on voit que les éléments de la matrice $(T_\varphi)_{nm} = \langle T_\varphi e_n, e_m\rangle$ sont donnés par (3.1.1), et donc le spectre $\sigma(T_\varphi)$ est donné par $\overline{\{c_n(\varphi)\}}$, où

$$c_n(\varphi) := (T_\varphi)_{nn} = 2(n+1)\int_0^1 x^{2n+1}\varphi(x)\,dx.$$

Nous donnons un schéma ou bien une idée sur la construction des fonctions spectrales pour les opérateurs de Toeplitz radiaux, voir les sections 4.1, 4.2 pour plus de détails. A cet effet, nous considérons les polynômes de Legendre $\{P_n(x)\}_n$, *i.e.,* les polynômes qui sont orthogonaux dans $L^2[-1,1] = L^2([-1,1], ds)$, voir aussi la section 1.1.

Soit $\varphi \in L^2([0,1], xdx)$ le symbole d'un opérateur de Toeplitz radial. On pose $\psi(s) = \varphi(\sqrt{s}),\ s \in [0,1]$ et

$$\psi_e(s) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [0,1], \\ \psi(-x), & x \in [-1,0], \end{cases} \qquad \psi_o(s) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [0,1], \\ -\psi(-x), & x \in [-1,0). \end{cases}$$

Il est clair que $\psi_e, \psi_o \in L^2([-1,1], ds)$ et on peut écrire aussi

$$\psi_e(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}P_{2k}(s), \quad \psi_o(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}P_{2k+1}(s),$$

où

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{||P_{2k}||^2_{L^2[-1,1]}}(\psi_e, P_{2k})_{L^2[-1,1]} = \frac{(4k+1)}{2}(\psi_e, P_{2k})_{L^2[-1,1]}, \\ a_{2k+1} &= \frac{1}{||P_{2k+1}||^2_{L^2[-1,1]}}(\psi_0, P_{2k+1})_{L^2[-1,1]} = \frac{(4k+3)}{2}(\psi_0, P_{2k+1})_{L^2[-1,1]}. \end{aligned}$$

Ici, $||.||_{L^2[-1,1]}$ et $(.\,,.)_{L^2[-1,1]}$ sont la norme usuelle et le produit scalaire sur $L^2[-1,1]$, respectivement.

Nous avons alors

$$\{c_n(\varphi)\} = \mathcal{D}(\{a_k\}), \quad \{a_k\} = \mathcal{I}(\{c_n(\varphi)\}),$$

où les applications $\mathcal{D}$ et $\mathcal{I}$ sont données par 4.1.5, 4.1.6, voir 4.1.2, 4.1.4 pour les définitions des coefficients correspondants.

En application de cette construction, nous prouvons le théorème suivant.

Théorème. (=**Théorème** 4.1) Soit $\delta_0 > 0$ arbitraire. Il existe $\varphi \in L^2([0,1], xdx)$ tels que

1. $\varphi' \notin L^2([0,1])$,
2. l'opérateur de Toeplitz T_φ à symbole radial φ appartient à $\mathcal{S}_{\delta_0}$.

Notons que ce théorème donne un point de vue différent des résultats dans la Proposition 3.2, la Proposition 3.4 et les exemples associés.

Le travail est organisé comme suit. Le premièr chapitre contient un rappel sur les notions liées aux espaces de Hardy et les espaces de Bergman, et un résumé des propriétés sur les polynômes de Legendre. Le chapitre 2 est consacré aux notions des opérateurs de Toeplitz, en particulier les calculs de base sur les opérateurs radiaux de Toeplitz sur l'espace de Bergman. Pour mettre ces notions en perspective, nous donnons également un bref compte rendu des résultats connus sur le sujet. Le chapitre 3 présente certaines conditions suffisantes pour que les opérateurs de Toeplitz radiaux se situent dans les classes $\mathcal{S}_p$, $0 < p < \infty$ et un exemple en particulier. La section 4.1 du chapitre 4 explique la construction des fonctions spectrales 4.1.5, 4.1.6, et 4.2 traite la preuve du théorème 4.1. A la fin de ce mémoire, nous faisons une discussion des questions ouvertes qui découlent de notre travail.

Chapitre 1

Préliminaires.

1.1 Polynômes de Legendre.

Les polynômes de Legendre constituent la suite la plus simple des polynômes orthogonaux sur un intervalle donné $[a, b]$, de nombreux problèmes font intervenir tout naturellement des suites de cette nature. Le théorème de Weierstrass (voir [34], [23]) montre que l'espace des fonctions polynômiales est dense dans l'espace de Hilbert $L^2([a, b],\, dx)$. Une famille orthogonale de polynômes $\{p_n\}_{n\geq 0}$, avec p_n de degré n, est alors une base hilbertienne de $L^2([a, b],\, dx)$.

Définition 1.1. *Soit $L^2([a, b],\, dx)$ l'espace de Hilbert de fonctions réelles définies sur l'ensemble $[a, b]$, muni de produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$, et $w(x)$ une fonction strictement positive et intégrable sur cet intervalle. Une suite de polynômes $\{p_n(x)\}_{n=0,1,\ldots}$, est dite orthogonale par rapport à la "fonction poids" $w(x)$, si*

$$\langle p_n, p_m\rangle = \int_\Omega w(x)p_n(x)\overline{p_m(x)}dx = 0, \qquad \forall n \neq m.$$

Autrement dit, pour tout n

$$\langle p_n, p_k\rangle = 0, \qquad \forall k < n.$$

Considérons maintenant l'espace $L^2[-1, 1] = L^2([-1, 1],\, dx)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2[-1,1]} = \int_{-1}^{1} w(x)f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Nous allons chercher des polynômes p_n de degré n sur $[-1, 1]$, orthogonaux à tous les polynômes de de degré k inférieur à n. Alors p_n est orthogonal à x^k, $\forall k < n$, il en suit que

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)w(x)x^k dx = 0.$$

Par intégration par parties en posant $f^{(n)}(x) = p_n(x)w(x)$, on obtient

$$f^{(n-1)}(1) + (-1)^k f^{(n-1)}(-1) - k\int_{-1}^{1} f^{(n-1)}(x)x^{k-1}dx = 0.$$

Il en suit que 1 et -1 sont des racines de $f^{(n-1)}$, ainsi $f^{(n-1)}$ s'écrit sous forme $(1-x^2)w(x)$.

De plus

$$p_n(x)w(x) = \left[(1-x^2)w(x)\right]' = -2xw(x) + (1-x^2)w'(x),$$

alors

$$p_n(x) = (1-x^2)\frac{w'(x)}{w(x)} - 2x.$$

Pour $n = 1$, on a $p_1(x)$ de degré 1, on résoud l'équation

$$(1-x^2)\frac{w'(x)}{w(x)} - 2x = Ax + B,$$

et on obtient la solution sous la forme

$$w(x) = \lambda(1+x)^\alpha(1-x)^\beta,$$

avec α, β, et λ des constantes arbitraires.

En posant $p_0(x) = \frac{\mu}{\lambda}$, on obtient

$$f(x) = \mu w(x) = \mu(1+x)^\alpha(1-x)^\beta.$$

Cherchons maintenant $p_n(x)$. Le calcul de la dérivée d'ordre n de f par la formule de Leibniz donne

$$f^{(n)}(x) = \mu\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left[\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^\alpha\right]\left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^\beta\right].$$

Remarquons qu'on ne peut mettre $(1-x^2)$ et $w(x)$ en facteur de $f^{(n)}(x)$ que si α et β soient supérieurs à n, avec n un entier strictement positif.

Posons alors $\alpha = n + \alpha'$ et $\beta = n + \beta'$; avec $\alpha', \beta' \geq -1$, on a

$$f(x) = (1-x^2)^n(1+x)^{\alpha'}(1-x)^{\beta'} = (1-x^2)^n w(x).$$

Finalement, on obtient la formule de Rodrigues

$$p_n(x) = \mu\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n w(x)\right]. \tag{1.1.1}$$

Définition 1.2. *La suite des polynômes de Legendre notée* $\{P_n(x)\}_n$ *dans l'espace* $L^2([-1,1], dx)$, *est caractérisée par la formule de Rodrigues quand* $\alpha' = \beta' = 0$, *dans ce cas* $w(x) = 1$, $\mu = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$. *Chaque polynôme s'écrit sous la forme*

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n\right].$$

On peut aussi écrit $P_n(x)$ *sous la forme*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n\right].$$

Nous donnons maintenant les premiers polynômes suivant le degré $n = 0, 1, ...$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^2 - 3x), ... \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que $P_n(1) = 1$, pour tout n.

Théorème 1.1. *Pour tout entier* $n \geq 0$, *on a* $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

Démonstration. En utilisant la formule de Rodrigues 1.1.1 et par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left[(x^2-1)^n\right] dx, \end{aligned}$$

la dérivée d'ordre $2n$ de $(x^2-1)^n$ est $(2n)!$ car $(x^2-1)^n$ est de degré $2n$. Alors,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx.$$

En faisant le changement de variable $s = \frac{1+x}{2}$, et on obtient le résultat

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (s-1)^n s^n ds \\ &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Comme on a $\langle P_n, P_m\rangle_{L^2[-1,1]} = 0$, pour tout $n \neq m$, alors

$$\langle P_n, P_m\rangle_{L^2[-1,1]} = \int_{-1}^{1} P_n(x)\overline{P_m}(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}, \tag{1.1.2}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

L'équation 1.1.2 montre que les polynômes $\{p_n\}_{n\geq 0}$

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}P_n(x)$$

forment une base orthonormée de $L^2([-1,1], dx)$. $\square$

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème d'approximation de Weierstras (voir [34], [23]), qui affirme que l'ensemble des polynômes définis sur $[-1,1]$ est dense dans $C([-1,1])$. Et est aussi dense dans $L^2([-1,1], dx)$.

Théorème 1.2. *La famille des polynômes de Legendre $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une base orthogonale de l'espace $L^2([-1,1], dx)$. Toute fonction f de $L^2([-1,1], dx)$ se développe de façon unique sous la forme*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)P_n,$$

avec

$$c_n(f) = \frac{2n+1}{2}\langle f, P_n\rangle_{L^2[-1,1]},$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n(f)P_n \right\| = 0.$$

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (voir [14, Ch. 3]) permet de construire à partir de la base canonique $\{x^n\}_{n\geq 0}$ de l'ensemble des polynômes, une famille orthogonale de polynômes $\{p_n\}_{n\geq 0}$. Ces polynômes vérifient la relation de récurrence suivante

$$\alpha_n p_{n+1}(x) = (x - \beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x).$$

Pour montrer ce résultat on remarque que $xp_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ et admet donc un développement sous la forme

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,j}p_j(x),$$

avec

$$\begin{aligned} a_{n,j}\left\|p_j\right\|^2 &= \langle xp_n, p_j\rangle \\ &= \langle p_n, xp_j\rangle \\ &= a_{j,n}\left\|p_n\right\|^2, \end{aligned}$$

alors $a_{n,j} = 0$, pour $j < n-1$. En posant $a_{n,n+1} = \alpha_n$, $a_{n,n} = \beta_n$ et $a_{n,n-1} = \gamma_n$, nous obtenons

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x). \tag{1.1.4}$$

d'où le résultat.

En examinant ce résultat pour les polynômes de Legendre en faisant $x = 1$, on obtient $\beta_n = 0$, et $\alpha_n + \gamma_n = 1$, et par simple comparaison des termes des deux membres de l'équation (1.1.4) on trouve

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2n+1}, \qquad \gamma_n = \frac{n}{2n+1}.$$

On obtien la relation de récurrence pour les polynômes de Legendre

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{1.1.5}$$

Nous avons aussi pour les dérivés $P_n'(x)$ (voir [14, Sect. 10.10])

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= \sum_{k\geq 0,\ n-2k\geq 0} \frac{2}{||P_{n-2k}||^2} P_{n-2k}(x) \qquad (1.1.6)\\ &= \sum_{k\geq 0,\ n-2k\geq 0} (2(n-2k)+1)P_{n-2k}(x). \end{aligned}$$

Il est important de mentionner que les systèmes $\{x^n\}_{n\geq 0}$ et $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ peuvent être recalculés l'un en termes de l'autre, de manière simple.

Soit $E(x)$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$, et soit $m!!$ le factoriel impair (ou pair), *i.e.* ,

$$(2m+1)!! = (2m+1)(2m-1)\ldots 1, \qquad (2m)!! = (2m)(2m-2)\ldots 2.$$

Proposition. 1.3 ([14, Sect. 10.10]). *On a*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}, \tag{1.1.7}$$

et

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k. \tag{1.1.8}$$

Il est assez remarquable que ces formules puissent être inversées *explicitement*. Malgré sa forme élégante, nous n'avons pas pu trouver ce résultat dans la littérature, et pour cette raison nous préférons en apporter la preuve ; voir aussi une brève note Hui [18] et Schmied [32] sur cette question.

Proposition. 1.4 ([18],[32]). *Pour $n \geq 1$, on a*

$$x^n = \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{(n-k)/2}((n-k)/2)!(k+n+1)!!} P_k(x). \tag{1.1.9}$$

Démonstration. La relation (1.1.9) donne évidemment $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$. Par récurrence, nous supposons que la formule (1.1.9) est vrai. Nous voulons montrer que

$$x^{n+1} = \sum_{k=n+1,n-1,\ldots} \frac{(2k+1)(n+1)!}{2^{(n+1-k)/2}((n+1-k)/2)!(k+n+2)!!} P_k(x).$$

Rappelant (1.1.5), on voit que

$$xP_k(x) = \frac{k}{2k+1} P_{k-1}(x) + \frac{k+1}{2k+1} P_{k+1}(x).$$

Écrivons $x^{n+1} = x(x^n)$ et remplaçons x^n ci-dessus ; par sa valeur de (1.1.9), on obtient

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{(n-k)/2}((n-k)/2)!(k+n+1)!!} xP_k(x) \\
&= \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{(n-k)/2}((n-k)/2)!(k+n+1)!!} \frac{k+1}{2k+1}(P_{k+1}(x) \\
&\quad + \frac{k}{2k+1} P_{k-1}(x)) \\
&= \sum_{k=n+1,n-1,\ldots} \frac{kn!(k+n+2)}{2^{(n+1-k)/2}((n+1-k)/2)!(k+n+2)!!} P_k(x) \\
&\quad + \sum_{k=n-1,n-3,\ldots} \frac{(k+1)n!(n+1-k)}{2^{(n-1-k)/2}((n+1-k)/2)!(k+n+2)!!} P_k(x) \\
&= \frac{(n+1)n!(2n+3)}{(2n+3)!!} P_{n+1} \\
&\quad + \sum_{k=n-1,n-3,\ldots} \frac{(2k+1)(n+1)!}{2^{(n-1-k)/2}((n+1-k)/2)!(k+n+2)!!} P_k(x).
\end{aligned}$$

après une série de transformations élémentaires. La proposition est prouvée. □

Pour la suite, il sera utile de spécifier la formule de la proposition ci-dessus au cas où n est pair et impair. Autrement dit, pour $n = 2m$, nous avons

$$x^{2m} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+1)(2m)!}{2^{m-k}(m-k)!(2k+2m+1)!!} P_{2k}(x)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+1)(2m)!}{(2m-2k)!!(2k+2m+1)!!} P_{2k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} b_{2m,2k} P_{2k}(x), \end{aligned}$$

où

$$b_{2m,2k} = \frac{(4k+1)(2m)!}{(2m-2k)!!(2k+2m+1)!!}, \qquad k = 0, ..., m.$$

De même, pour $n = 2m+1$,

$$\begin{aligned} x^{2m+1} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+3)(2m+1)!}{2^{m-k}(m-k)!(2k+2m+3)!!} P_{2k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+3)(2m+1)!}{(2m-2k)!!(2k+2m+3)!!} P_{2k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} b_{2m+1,2k+1} P_{2k+1}(x), \end{aligned}$$

où

$$b_{2m+1,2k+1} = \frac{(4k+3)(2m+1)!}{(2m-2k)!!(2k+2m+3)!!}, \qquad k = 0, ..., m.$$

1.2 Espaces de Hardy.

On considère le plan complexe $\mathbb{C}$. Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$, la mesure de Lebesgue normalisée μ sur le cercle unité $\mathbb{T}$ est définie par : $d\mu(z) = \frac{d\theta}{2\pi}$, pour $1 \leq p < +\infty$. On note par $L^p(\mathbb{T}, d\mu)$ l'espace de Lebesgue usuel

$$L^p(\mathbb{T}, d\mu) = \{f : ||f||_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^p d\mu(z) < +\infty\},$$

et

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \{f : ||f||_{L^\infty(\mathbb{T})} = \operatorname*{ess\,sup}_{|z|=1} |f(z)| < +\infty\}.$$

Pour $f \in L^p(\mathbb{T}, d\mu), 1 \leq p \leq +\infty$ nous notons

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{z}^n d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{t\theta}) e^{-in\theta} d\theta, n \in \mathbb{Z},$$

le n-ième coefficient de Fourier de f.

On note par $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, et par $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions analytiques bornées dans $\mathbb{D}$. On définit les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ par

$$H^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, \text{ pour tout } n < 0 \right\}; \; 1 \leq p \leq \infty,$$

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \sup_{0<r<1} \|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})} < \infty \right\};\ 1 \leq p \leq \infty,$$

où $f_r(z) = f(rz)$ pour $|z| < \frac{1}{r}$.

Les travaux de Fatou et de Riesz (voir [13], [30], [31]) montrent que pour $1 \leq p < \infty$ les espaces $H^p(\mathbb{T})$, $H^p(\mathbb{D})$ sont isomorphes, $\forall f \in H^p(\mathbb{D})$, il existe $bf \in H^p(\mathbb{T})$, telle que :

$$f_r(\xi) = (bf) * P_r(\xi) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n \xi^n, \forall \xi \in \mathbb{T},$$

et

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r \mid_{\mathbb{T}} - bf\| = 0,\ \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

où P_r le noyau de Poisson donné par la fonction suivante :

$$P_r(x) = P(re^{ix}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1-r^2}{|1-re^{ix}|^2},\ \text{pour } 0 \leq r < 1,\ \text{et } x \text{ réel},$$

et

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy, \quad \forall x \in (0, 2\pi), \quad (\text{la convolution de } f \text{ et } g).$$

Pour $p = \infty$ la limite est faible* pour la topologie-faible* $\sigma(L^\infty, L^1)$. L'application $f \to bf$ est donc une bijection isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$. Ainsi, lorsque $f \in H^p(\mathbb{D})$, nous pouvons voir f comme une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ et aussi comme une fonction dans $H^p(\mathbb{T})$, (voir [30, Ch. 3]).

Dans la suite, nous identifions $f \in H^p(\mathbb{D})$ et sa limite $bf \in H^p(\mathbb{T})$ par

$$f_r = f * P_r, \quad f = \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n) z^n.$$

Proposition. 1.5. *Soient $z \in \mathbb{D}$, et $f : H^p(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$. L'évaluation ponctuelle $f \mapsto f(z)$ dans $\mathbb{D}$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $H^1(\mathbb{D})$ (et par conséquent sur $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq \infty$).*

Démonstration. Si $z = re^{i\theta}, 0 \leq r < 1$, on a

$$|f(z)| = \left|f(re^{i\theta})\right| = \left|f * P_r(e^{i\theta})\right| \leq \|f\|_1 \|P_r\|_\infty \leq \|f\|_1 \frac{1+r}{1-r}.$$

□

La propostion précidente montre que l'espace $H^p(\mathbb{D})$ est un sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et donc Banach, en particulier l'espace $H^2(\mathbb{D})$ est un Hilbert, alors la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^2(\mathbb{D})$ est bien définie. On la note par P_+.

Le produit scalaire de $H^2(\mathbb{D})$ est donc induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$, et défini par :

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n},\end{aligned}$$

pour $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Il est clair que la famille $(e_n(z))_{n\geq 0} = (z^n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $H^2(\mathbb{D})$, le théorème de représentation de Riesz (voir [34, 1]), montre alors que $H^2(\mathbb{D})$ possède un noyau reproduisant appelé le noyau de Cauchy ou le noyau de Cauchy-Szegö K_z tel que $f(z) = \langle f, K_z\rangle$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. Nous donnons maintenant la formule du noyau K_z.

Si $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors

$$\begin{aligned}P_+f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\langle f(\xi), e_n(\xi)\rangle\, e_n(z) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\langle f(\xi), \xi^n\rangle\, z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{T}} f(\xi)\overline{\xi}^n z^n d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\overline{\xi}z)^n\right) d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\frac{1}{1-\overline{\xi}z}d\mu(\xi).\end{aligned}$$

Donc

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{z}^n w^n = \frac{1}{1-\overline{z}w}, \forall w \in \mathbb{D}.$$

1.3 Espaces de Bergman.

Un exposé détaillé sur les espaces de Bergman peut être trouvé dans Hedenmalm-Korenblum-Zhu [17] and Zhu [39].

On note dans la suite par $dA(z)$ la mesure normalisée sur $\mathbb{C}$. Cette mesure s'écrit en coordonnées rectangulaires et polaires pour $z = x + iy = re^{i\theta}$ comme suit

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrd\theta.$$

Pour $0 < p < \infty$, on considère l'espace des fonctions p-intégrables sur $\mathbb{D}$ par rapport à la mesure $dA(z)$

$$L^p(\mathbb{D}, dA) = \{f : ||f||_p^p = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) < +\infty\}.$$

L'espace $L^p(\mathbb{D}, dA)$, pour $1 \leq p < +\infty$ est un espace de Banach muni de la norme $||f||_p = (\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z))^{\frac{1}{p}}$. Et pour $0 < p < 1$, l'espace $L^p(\mathbb{D}, dA)$ est un espace métrique complet muni de la distance

$$d(f, g) = ||f - g||_p^p.$$

Comme $d(f, g) = d(f - g, 0)$, la métrique d est invariante. Elle est également homogène, c'est-à-dire

$$d(\lambda f, 0) = |\lambda|^p \, d(f, 0), \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pour le cas $p = 2$ l'espace $L^2(\mathbb{D}, dA)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire

$$< f, g >= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} dA(z), \;\text{ pour tous }\; f, g \in L^2(\mathbb{D}, dA).$$

On note par $L^\infty(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions bornées par la norme essentielle $||.||_\infty$ sur $\mathbb{D}$,

$$||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup} \{|f(z)| : |z| < 1\}.$$

L'espace $L^\infty(\mathbb{D})$ est donc un espace de Banach.

Définition 1.6. *L'espace de Bergman noté $L_a^p(\mathbb{D}, dA)$ est le sous espace de $L^p(\mathbb{D}, dA)$ des fonctions analytiques*

$$\begin{aligned} L_a^p(\mathbb{D}, dA) &= \{f : f \text{ analytiques sur } \mathbb{D}, \; \|f\|_p^p = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) < +\infty\} \\ &= \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}, dA). \end{aligned}$$

Proposition. 1.7. *Soit f une fonction de $L_a^p(\mathbb{D}, dA)$, et soit K un compact de $\mathbb{D}$. Alors, il existe une constante positive C telle que*

$$\sup \left\{ \left| f^{(n)}(z) \right|, z \in K \right\} \leq C||f||_p.$$

Démonstration. Soit $r \in (0, 1)$, on pose $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Montrons le résultat pour $n = 0$. Soit $\sigma = \frac{1-r}{2}$, et soit $B(z, \sigma)$ la boule de centre z et de rayon σ.

La formule intégrale de Cauchy donne

$$f(z) \;\; = \;\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,\sigma)} \frac{f(z + w)}{w - z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(z,\sigma)} f(z+se^{i\theta})d\theta.$$

Alors

$$\int_0^\sigma f(z)sds = \frac{1}{2\pi}\int_0^\sigma (\int_0^{2\pi} f(z+se^{i\theta})d\theta)sds,$$

et

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\sigma f(z+se^{i\theta})sdsd\theta \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\int_{B(z,\sigma)} f(w)dA(w). \end{aligned}$$

IL en résulte que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\frac{1}{\sigma^2}\int_{B(z,\sigma)} f(w)dA(w)\right| \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2}\int_{B(z,\sigma)} |f(w)|\, dA(w). \end{aligned}$$

Soit q le conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Par l'inégalité de Hôlder

$$\begin{aligned} |f(z)|^p &\leq \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\int_{B(z,\sigma)} |f(x+iy)|\, dxdy\right)^p \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^p \left[\left(\int_{B(z,\sigma)} |f(x+iy)|^p\, dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(z,\sigma)} dxdy\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p \\ &\leq \frac{1}{(\pi\sigma^2)^p} \left[\left(\int_{B(z,\sigma)} |f(x+iy)|^p\, dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(z,\sigma)} dxdy\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p \\ &\leq \frac{1}{(\pi\sigma^2)^p}\left(\pi\sigma^2\right)^{\frac{p}{q}} \int_{B(z,\sigma)} |f(x+iy)|^p\, dxdy. \end{aligned}$$

Comme $p-\frac{p}{q}=1$, alors

$$\begin{aligned} |f(z)|^p &\leq \frac{1}{\sigma^2}\int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p\, dA(w) \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p\, dA(w). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $z\in K$, il existe $M>0$ tel que

$$|f(z)| \leq M||f||_p.$$

D'après le cas ($n=0$), il existe $M>0$ tel que : $|f(\zeta)|\leq M||f||_p$, $\forall\,|\zeta|=R$ avec $R=\frac{1+r}{2}$, ainssi si $z\in K$, et par la formule intégrale de Cauchy on a :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,$$

on obtient alors

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!MR}{\sigma^{n+1}}||f||_p, \forall z \in K \text{ et } \forall f \in L^p_a(\mathbb{D}, dA).$$

$\square$

Proposition. 1.8. *Pour tout $1 < p < +\infty$, l'espace de Bergman $L^p_a(\mathbb{D}, dA)$ est un sous espace fermé de $L^p(\mathbb{D}, dA)$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^p_a(\mathbb{D}, dA)$ convergente vers f dans $L^p(\mathbb{D}, dA)$, d'après la proposition 1.7 on a pour tout $r \in (0,1)$, et pour tout z tel que $|z| < r$, il existe une constante M positive, telle que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq M||f_n(x) - f_m(x)||_p,$$

mais la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{D}, dA)$, c'est à dire $||f_n(x) - f_m(x)||_p \to 0$ quand $n, m \to +\infty$, alors la suite $(f_n)_n$ est convergente uniformément vers f sur tout compact K de $\mathbb{D}$, ainsi f est analytique sur $\mathbb{D}$, et $f \in L^p_a(\mathbb{D}, dA)$. $\square$

Cette proposition montre que l'espace $L^p_a(\mathbb{D}, dA)$ est un espace de Banach, en particulier l'espace $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$ est un Hilbert. Et chaque évaluation ponctuelle $f \mapsto f(z)$ dans $\mathbb{D}$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $L^p_a(\mathbb{D}, dA)$. Le théorème de représentation de Riesz (voir [34, 1]), montre alors que $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$ possède un noyau reproduisant $K_z \in L^p_a(\mathbb{D}, dA)$ tel que $f(z) = \langle f, K_z \rangle$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. Dans la suite nous allons donner sa formule.

Lemme 1.9. *Les fonctions $e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n$, $(n \in \mathbb{N})$, constituent une base orthonormale de $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$.*

Démonstration. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \left(\sqrt{n+1}z^n\right) \overline{\left(\sqrt{m+1}z^m\right)} dA(z) \\
&= \sqrt{n+1}\sqrt{m+1} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^n e^{in\theta} r^m e^{-im\theta} \frac{1}{\pi} r dr d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} dr d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}} \frac{1}{n+m+2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)^2}{\pi^2}} \frac{2\pi}{2m+2} \delta_{n,m} \\
&= \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

où δ_{nm} est le delta de Kronecker (1.1.3). $\square$

Comme $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$ est fermé dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$, alors la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ sur $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$ est bien définie. On note par P_+ cette projection.

Soit $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, d'après le lemme (1.9) on a :

$$\begin{aligned}
P_+f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f(w), e_n(w)\rangle\, e_n(z) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\langle f(w), \sqrt{n+1}w^n \right\rangle \sqrt{n+1}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, \langle f(w), w^n\rangle\, z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{w}^n z^n dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, (\overline{w}z)^n \right) dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w) \frac{1}{(1-\overline{w}z)^2} dA(w).
\end{aligned}$$

Dans ce cas, pour toute fonction f de $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$, on a

$$\begin{aligned}
f(z) &= \int_{\mathbb{D}} f(w) \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} dA(w) \qquad \forall z \in \mathbb{D} \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{K(z,w)} dA(w) \qquad \forall z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

La fonction $K_z(w) = K(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}$ s'appelle le noyau de reproduction de l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$, ou simplement noyau de Bergman au point z de $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$.

On peut vérifier facilement que le noyau de Bergman vérifie les propriétés suvantes :

1. $K_z(w) = \overline{K_w(z)}$, pour tout $z, w \in \mathbb{D}$.
2. $K_z(z) = \|K_z\|^2_{L^2_a}$.

Le noyau normalisé est alors

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|} = \frac{K_z(w)}{\sqrt{\langle K_z, K_z\rangle}} = \frac{K_z(w)}{\sqrt{K_z(z)}} = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}, \forall z, w \in \mathbb{D}.$$

De la même façon on peut définir pour $-1 < \alpha < +\infty$, l'espace de Bergman pondéré ou à poids, c'est l'espace des fonctions analytiques, p-integrables par rapport à la mesure dA_α

$$L^p_a(\mathbb{D}, dA_\alpha) \;=\; \{f : f \text{ analytiques sur } \mathbb{D},\ ||f||_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$$

$$= \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha).$$

où

$$dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z).$$

On peut montrer, de la même façon que dans la proposition 1.8, que l'espace $L_a^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ est un sous espace fermé de $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ et il est donc un espace de Banach. En particulier $L_a^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ est un espace de Hilbert.

Une base orthonormée de $L_a^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ est donnée par

$$e_n = \left(\frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{n!}\right)^{1/2} z^n.$$

Le noyau reproduisant de $L_a^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ est donné par la formule (voir [36], [39]).

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^{\alpha+2}}.$$

1.4 Transformée de Berezin.

1.4.1 Transformation homographique.

Définition 1.10. *Une transformation de Möbius (transformation homographique), est une fonction ratinnelle $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ avec $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ définie comme suit*

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$. On écrit par convention

$$\varphi(-\frac{d}{c}) = \infty, \qquad \varphi(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Notons que si $ad - bc = 0$, alors

$$\varphi(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = 0, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

i.e., φ est constante et φ n'est pas une transformation. Pour cela on donne la condition $ad - bc \neq 0$.

Notons aussi que la fonction φ a un pôle simple $z = \frac{-d}{c}$, et $\lim_{|z|\to+\infty} \varphi(z) = \frac{a}{c}$, *i.e.*, $(\varphi(\infty) = \frac{a}{c})$, et φ a un zéro $z = \frac{-b}{a}$.

Proposition. 1.11. *Soit $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une transformation M*
"obius. Alors, φ est la composée de la translation $(z \mapsto z+a)$, la dilatation $(z \mapsto \rho z, \rho > 0, \rho \in \mathbb{R})$, la rotation $(z \mapsto e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R})$ et de l'inversion $(z \mapsto \frac{1}{z})$.

Démonstration. 1) Si $c = 0$ alors $ad = 0$ et $\varphi(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. *i.e.*, $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, avec $\varphi_1(z) = \frac{a}{d}z$ une rotation ou dilatation et $\varphi_2(z) = z + \frac{b}{d}$ une translation.

2) Si $c \neq 0$ on a :

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c})\frac{1}{cz+d},$$

et $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ avec $\varphi_1(z) = cz + d$, $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ et $\varphi_3(z) = (b - \frac{ad}{c})z + \frac{a}{c}$. □

Proposition. 1.12. *Soit $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une transformation de Möbius, alors φ possède le caractère circulaire : elle transforme les cercles-droites en cercles-droites.*

Démonstration. Notons que les translations, les dilatations, les rotations et les inversions elles possèdent toutes ce caractère. Alors la composition d'une fonction de ce type possède également ce caractère. □

Définition 1.13. *On dit que $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ sont symétriques par rapport au cercle $\mathcal{C}$*

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\},$$

s'il existe $\rho, \theta \in \mathbb{R} : 0 < \rho < r$ tel que : $(z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_0)} = r^2$.

Remarque 1. *Le centre z_0 du cercle $\mathcal{C}$ et le point ∞ sont symétriques par rapport à $\mathcal{C}$.*

Proposition. 1.14. *Soit $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une transformation Möbius, et soit le cercle*

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\}.$$

Les deux points $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ sont symétriques par rapport au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\varphi(z_1)$ et $\varphi(z_2)$ sont symétriques par rapport à $\varphi(\mathcal{C})$.

Démonstration. Notons que φ transforme les cercles-droites en cercles-droites d'après la proposition précédente, et préserve ainsi l'orthogonalité. □

Proposition. 1.15. *Toute fonction Möbius qui transforme le disque $\mathbb{D}$ en lui même et le le cercle $\mathbb{T}$ en lui même est de la forme :*

$$\varphi(w) = \lambda\frac{w-a}{\bar{a}w-1} = \lambda\frac{a-w}{1-\bar{a}w},$$

avec $|\lambda| = 1$, et $|a| < 1$.

Démonstration. 1) Soit φ une transformation de Möbius de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ telle que $\varphi(w) = \lambda\frac{a-w}{1-\bar{a}w}$, avec $|\lambda| = 1$ et $|a| < 1$.

Si $|w| = 1$ alors

$$\begin{aligned} |\varphi(w)|^2 &= |\lambda| \frac{(a-w)(\overline{a}-\overline{w})}{(1-\overline{a}w)(1-a\overline{w})} \\ &= |\lambda| \frac{|a|^2 - a\overline{w} - \overline{a}w + 1}{1 - a\overline{w} - \overline{a}w + |a|^2} = 1. \end{aligned}$$

De même si $|\varphi(w)| = 1$ on obtient $|w| = 1$ d'où

$$\varphi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}.$$

Et on a :

$$\begin{aligned} |\varphi(w)| &< 1 \Leftrightarrow |\lambda| \frac{|a|^2 - a\overline{w} - \overline{a}w + |w|^2}{1 - a\overline{w} - \overline{a}w + |a|^2 |w|^2} < 1 \\ &\Leftrightarrow |a|^2 + |w|^2 < 1 + |a|^2 |w|^2 \\ &\Leftrightarrow |a|^2 (1 - |w|^2) - (1 - |w|^2) < 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - |w|^2)(1 - |a|^2) > 0 \\ &\Leftrightarrow |w| < 1. \end{aligned}$$

car $|a|^2 < 1$. Donc $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2) Soit a l'unique point (φ est une bijection) de $\overline{\mathbb{C}}$ tel que $\varphi(a) = 0$. Alors $|a| < 1$ (car $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$), et soit $b \in \overline{\mathbb{C}}$ tel que a et b sont symétriques par rapport à $\mathbb{T}$. Alors $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont symétriques par rapport à $\varphi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, en plus $\varphi(a) = 0$ (*i.e.* $\varphi(b) = \infty$ le symétrique par rapport à $\varphi(\mathbb{T})$) (d'après (1.14)), d'où a est un zéro de φ et b est un pôle de φ, on résulte que

$$\varphi(w) = \lambda' \frac{w-a}{w-b}.$$

Notons que la symétrie de a et b par rapport à $\mathbb{T}$ affirme que $a\overline{b} = 1$ *i.e.*, $b = \frac{1}{\overline{a}}$. Et donc

$$\varphi(w) = \lambda' \overline{a} \frac{w-a}{wz-1} = \lambda \frac{a-w}{1-\overline{a}w}.$$

Rappelons que si $|\varphi(w)| = 1$ alors $|w| = 1$, donc pour $z = 1$ on obtient

$$|\varphi(1)| = \left| \lambda \frac{a-w}{1-\overline{a}w} \right| = |\lambda| = 1.$$

$\square$

L'ensemble des transformations de la forme précédente forme un groupe par la loi des compositions des fonctions, noté $Aut(\mathbb{D})$ (respectivement $Aut(\mathbb{T})$), et appelé groupe des automorphismes de $\mathbb{D}$ (respectivement de $\mathbb{T}$), dont l'élément neutre est la fonction identique $Id : z \mapsto z$. Et appelé aussi groupe des Möbius.

En particulier la fonction définie par :

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w},$$

qui transforme $\mathbb{D}$ en lui même et $\mathbb{T}$ en lui même, et le point z en 0 et 0 en z, est une transformation de Möbius.

Dans la suite, nous allons présenter quelques propriétés de cette dérniers fonction sur le disque $\mathbb{D}$, qui à un rôle important dans la notion de transformation de Berzin.

Proposition. 1.16. *La fonction Möbius φ_z définie sur $\mathbb{D}$ (ou sur $\mathbb{T}$) par $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}$ à les propriétés suivantes :*

1. $\varphi_z^{-1} = \varphi_z$,
2. *Le déterminant réel Jacobien de φ_z en w est*
$$|J_{\varphi_z}(w)| = |\dot{\varphi}_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4},$$
3. $1 - |\varphi_z(w)|^2 = \dfrac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}$.

Démonstration. 1) On a

$$\begin{aligned}(\varphi_z \circ \varphi_z)(w) &= \frac{z-\varphi_z(w)}{1-\overline{z}\varphi_z(w)} \\ &= \frac{z - \dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}}{1-\overline{z}\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}} \\ &= w.\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_z(w) &= \frac{-(1-\overline{z}w)+\overline{z}(z-w)}{(1-\overline{z}w)^2} \\ &= \frac{-1+\overline{z}w+|z|^2-\overline{z}w}{(1-\overline{z}w)^2} \\ &= -\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$|\dot{\varphi}_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.$$

De plus si on pose $\varphi_z(w) = P(x,y) + iQ(x,y)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_z}{\partial y}(w) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -i\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}, \\
\frac{\partial \varphi_z}{\partial x}(w) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial x}(w) = i\frac{\partial \varphi_z}{\partial y}(w),$$

les conditions de Cauchy-Riemann étant satisfaites, alors la matrice réelle Jacobienne de φ_z est donnée par :

$$J_{\varphi_z}(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned}
|J_{\varphi_z}(w)| &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\overline{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)} \\
&= \left(-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right)\overline{\left(-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right)} \\
&= \left|\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.
\end{aligned}$$

3/ On a

$$\begin{aligned}
1 - \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} &= \frac{|1-\overline{z}w|^2 - (1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{(1-\overline{z}w)(1-z\overline{w}) - (1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{|w|^2 + |z|^2 - \overline{z}w - z\overline{w}}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= |\varphi_z(w)|^2.
\end{aligned}$$

□

Dons la suite on donne une transformée analogique dans l'espace de Bergman à celle de Poisson, appellée transformée de Berzin.

1.4.2 Transformée de Berezin.

Définition 1.17. *Soit $f \in L^1(\mathbb{D})$. La transformée de Berezin de la fonction f notée $\tilde{f}$ est la fonction donnée par :*

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \langle f k_z, k_z \rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4} dA(w), \forall z \in \mathbb{D}.\end{aligned}$$

Soit $\varphi_z \in Aut(\mathbb{D})$, telle que

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}, \quad \forall w \in \mathbb{D}.$$

Daprès la proposition (1.16) on a

$$|J_{\varphi_z}(w)| = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4},$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \int_{\mathbb{D}} f(w)|J_{\varphi_z}(w)| dA(w), \forall z \in \mathbb{D} \\ &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_z)(w) dA(w), \forall z \in \mathbb{D}.\end{aligned}$$

Le résultat suivant est une propriété fondamentale qui fait le lien entre les fonctions harmoniques et la transformée de Berezin.

Lemme 1.18. *Si $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ est harmonique, alors*

$$\tilde{f} = f.$$

Démonstration. Si $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$, alors $f \circ \varphi_z$ est aussi harmonique pour tout $\varphi_z \in Aut(\mathbb{D})$. Ainsi $f \circ \varphi_z$ est harmonique, avec $\varphi_z(w) = \dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}$. La propriété de la valeur moyenne donne

$$(f \circ \varphi_z)(0) = \int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_z)(w) dA(w)$$

Et comme

$$z = \varphi_z(0)$$

On obtient

$$f(z) = f(\varphi_z(0)) = \int_{\mathbb{D}} f(\varphi_z(w)) dA(w)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{D}} f(w)|J_{\varphi_z}(w)|dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}dA(w). \end{aligned}$$

Donc

$$f = \tilde{f}.$$

$\square$

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz.

2.1 Matrice d'un opérateur.

Soient $\mathcal{E} = (e_j)_{j\in J}$ et $\mathcal{E}' = (e'_i)_{i\in I}$ des bases orthonormales dans les espaces de Hilbert H et H', respectivement (les ensembles d'indices ne sont pas nécessairement les mêmes), et soit

$$T : Vect(\mathcal{E}) \longrightarrow H'$$

une application linéaire. La matrice de T par rapport à $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ est

$$(t_{ij})_{i,j} = (\langle Te_j, e'_i\rangle)_{i,j},$$

de sorte que la j-ième colonne représente les coefficients de la décomposition

$$Te_j = \sum_i \langle Te_j, e'_i\rangle\, e'_i \tag{2.1.1}$$

dans la base $\mathcal{E}'$. Si $H = H'$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, on parle de la matrice de T par rapport à $\mathcal{E}$.

Réciproquement, une matrice $(t_{ij})_{ij}$ sur $I \times J$ telle que, pour tout $j \in J$,

$$\sum_i |t_{ij}|^2 < +\infty,$$

engendre une application linéaire de l'enveloppe vectorielle $Vect(\mathcal{E})$ dans H',

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad Vect(\mathcal{E}) \longrightarrow H' \\ T\left(\sum a_j e_j\right) \quad &= \quad \sum_i \left(\sum_j a_j t_{ij}\right) e'_i. \end{aligned}$$

Il est clair que la continuité et la norme de l'opérateur T,

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in Vect(\mathcal{E}), \|x\| \leq 1\}$$

ne dépendent que de la matrice $(t_{ij})_{ij}$, et non du choix des bases orthonormales $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$.

De plus, si $U : Vect(\mathcal{E}) \longrightarrow H'$ est une autre application linéaire, alors $T = U$ si et seulement si leurs matrices coïncident ($t_{ij} = u_{ij}$ pour tous i, j).

2.2 Matrices et opérateurs de Laurent.

Définition 2.1. *Soit ϕ une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$, l'opérateur de multiplication par ϕ, notée par M_ϕ (ou encore opérateur de Laurent) sur l'espace $L^2(\mathbb{T})$, est l'opérateur défini par $M_\phi(f) = \phi f$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$.*

Notons que cet opérateur est bien défini si le produit ϕf est dans $L^2(\mathbb{T})$. On note par $D(M_\phi)$ le domaine de définition de M_ϕ

$$D(M_\phi) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \phi f \in L^2(\mathbb{T}) \right\}.$$

Et on écrit

$$\begin{aligned} M_\phi \quad &: \quad D(M_\phi) \subset L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) \\ f \quad &\mapsto \quad M_\phi(f) = \phi f. \end{aligned}$$

Notons aussi que l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}$ est un sous ensemble de $D(M_\phi)$ dense dans $L^2(\mathbb{T})$ (voir [31]), donc $D(M_\phi)$ est lui aussi dense dans $L^2(\mathbb{T})$.

On peut aussi définir l'opérateur de Laurent sur l'espace des polynômes trigonométriques $\mathcal{P} = Vect(\mathcal{E} = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}), e_k = z^k, (k \in \mathbb{Z})$ ($\mathcal{P}$ étant muni de la norme $\|.\|_2$), si $\phi \in L^2(\mathbb{T})$ par :

$$\begin{aligned} M_\phi \quad &: \quad \mathcal{P} \to L^2(\mathbb{T}) \\ f \quad &\mapsto \quad M_\phi(f) = \phi f. \end{aligned}$$

Proposition. 2.2. *Soit $\phi \in L^2(\mathbb{T})$ et soit $M_\phi : D(M_\phi) \subset L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur de Laurent, $M_\phi(f) = \phi f, \forall f \in L^2(\mathbb{T})$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
1. $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$.
2. M_ϕ est borné.
De plus, on a $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Démonstration. Si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $\phi f \in L^2(\mathbb{T})$ et

$$\|M_\phi f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |\phi(\zeta) f(\zeta)|^2 \, d\mu(\zeta) \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2, \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Et $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Supposons que M_ϕ est borné, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|M_\phi\|_2 \leq C \|f\|_2, \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

En particulier, pour $f = \mathbf{1}$ on obtient

$$\|M_\phi 1\|_2 = \|\phi 1\|_2 \leq C \|1\|_2 = C,$$

et pour $f = \phi$ on obtient

$$\|M_\phi \phi\|_2 = \left\|\phi^2\right\|_2 \leq C \|\phi\|_2 = C^2.$$

Alors

$$\left\|M_\phi \phi^{n-1}\right\|_2 = \|\phi^n\|_2 \leq C^{n-1} \|\phi\|_2 = C^n,$$

ce qui donne $\|\phi^n\|_2 \leq C^n, \forall n \in \mathbb{N}$, et

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{|\phi(\zeta)|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) \leq 1.$$

On obtient donc

$$\mu(\{\zeta \in \mathbb{T} : \frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1\}) = 0.$$

En effet, supposons le contraire. on a alors

$$\{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1 + \frac{1}{m}\},$$

et

$$\{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1 + \frac{1}{m_1}\} \subset \{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1 + \frac{1}{m_2}\}, \forall m_2 \geq m_1.$$

D'où

$$\mu(\{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1\}) = \lim_{m\to\infty} \mu(\{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1 + \frac{1}{m}\}).$$

Alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1 + \frac{1}{m_0}\}) > 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{|\phi(\zeta)|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) &\geq \int\limits_{\{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1 + \frac{1}{m_0}\}} \left(\frac{|\phi(\zeta)|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) \\
&= (1 + \frac{1}{m_0})^{2n} \mu(\{\frac{|\phi(\zeta)|}{C} > 1 + \frac{1}{m_0}\}).
\end{aligned}$$

Quand $n \to \infty$, on obtient $\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{|\phi(\zeta)|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) \to \infty$, ce qui fait une contradiction avec le fait que $\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{|\phi(\zeta)|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) \leq 1$.

Donc $|\phi(\zeta)| \leq C$ *p.p.* sur $\mathbb{T}$, et ϕ est bornée.

Soit l'ensemble $E_n = \left\{|\phi(\zeta)| > \|\phi\|_\infty - \frac{1}{n}\right\}, n \in \mathbb{N}$, et soit $\mathcal{X}_{E_n}$ sa fonction caractéristique. Il est clair que $\mu(E_n) > 0$, et pour n assez grand tel que $\|\phi\|_\infty - \frac{1}{n} > 0$, on a

$$\begin{aligned}\|M_\phi \mathcal{X}_{E_n}\|_2^2 &= \int\limits_{E_n} |\phi(\zeta)|^2 \, d\mu(\zeta) \\ &\geq \int\limits_{E_n} (\|\phi\|_\infty - \frac{1}{n})^2 d\mu(\zeta) = (\|\phi\|_\infty - \frac{1}{n})^2 \mu(E_n).\end{aligned}$$

Comme $\mu(E_n) = \|\mathcal{X}_{E_n}\|_2$, on pose $f_n = \frac{\mathcal{X}_{E_n}}{\|\mathcal{X}_{E_n}\|_2}$. On a $\|M_\phi f_n\|_2 \geq \|\phi\|_\infty - \frac{1}{n}$, pour n assez grand. Il s'ensuit alors que

$$\|M_\phi\|_2 \geq \|\phi\|_\infty .$$

□

Théorème 2.1. *([9]) Soit T un opérateur linéaire sur $L^2(\mathbb{T})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
1/ T est un opérateur de Laurent.
2/ $M_z T = T M_z$, où M_z est l'opérateur de translation bilatère (de shift bilatère) dans $L^2(\mathbb{T})$.

Démonstration. Supposons que $T = M_\phi$ avec $\phi \in L^2(\mathbb{T})$. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a

$$M_\phi M_z f = \phi z f = z \phi f = M_z M_\phi f.$$

Réciproquement, supposons que $M_z T = T M_z$. On pose $\phi = T1$. Par définition on a $\phi \in L^2(\mathbb{T})$. Et par suite

1/ Si $n \geq 0$ alors

$$Tz^n = TM_z z^{n-1} = TM_z^n 1 = M_z^n T1 = M_z^n \phi = z^n \phi = \phi z^n = M_\phi z^n.$$

2/ Si $n < 0$ alors

$$Tz^n = TM_z^{*^{-n}} 1 = M_z^{*^{-n}} T1 = M_{\overline{z}}^{-n} \phi = \overline{z}^{-n} \phi = z^n \phi = \phi z^n = M_\phi z^n.$$

Et comme T et M_ϕ sont linéaires on résulte que pour tout $p \in \mathcal{P} = Vect(\mathcal{E} = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}), e_k = z^k, (k \in \mathbb{Z})$ on a $Tp = M_\phi p$.

Et puisque l'espace des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}$ dense dans $L^2(\mathbb{T})$, il s'ensuit que $Tf = M_\phi f$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, $T = M_\phi$ sur $L^2(\mathbb{T})$. □

Définition 2.3. *Une matrice de Laurent est une matrice A de coefficients complexes bilatéralement infinie de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

c'est-à-dire : les coefficients d'une même diagonale sont égaux.

Comme dans la section 2.1, et pour $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ de l'opérateur de Laurent M_ϕ par rapport à la base $\mathcal{E} = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}, e_k = z^k, (k \in \mathbb{Z})$ est de la forme (2.2.1), et on a :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \langle M_\phi e_j, e_i\rangle = \left\langle M_\phi z^j, z^i\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{T}} \phi(z) z^j z^{-i} d\mu(z) \\ &= \widehat{\phi}(i-j), \end{aligned}$$

où $\widehat{\phi}(i-j)$ définе le $(i-j)^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de ϕ. Et aussi les coefficients d'une même diagonale sont égaux c'est-à-dire $a_{i,j} = a_{i+k,j+k}$.

Si on suppose que $A = (a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}} = (\langle Te_j, e_i\rangle)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ la matrice de T, avec T borné dans $L^2(\mathbb{T})$, et A est de Laurent $(a_{i,j} = a_{i+k,j+k})$, c'est à dire $\langle Te_j, e_i\rangle = \langle Te_{j+k}, e_{i+k}\rangle$, on a

$$\begin{aligned} \langle TM_z e_j, e_i\rangle &= \left\langle Tz^{j+1}, z^i\right\rangle = \left\langle Tz^j, z^{i-1}\right\rangle = \left\langle Tz^j, M_z^* z^i\right\rangle \\ &= \langle M_z T e_j, e_i\rangle . \end{aligned}$$

Donc $M_z T = TM_z$, et T est bien un opérateur de Laurent. On a le théorème (voir [9]) suivant.

Théorème 2.2. *Un opérateur linéaire sur $L^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de Laurent si et seulement si sa matrice par raport à la base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent.*

2.3 Matrices de Toeplitz.

Définition 2.4. *Une matrice de Toeplitz est une matrice unilatéralement infinie $(t_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$ (ne dépend que de la différence des indices c'est à dire : $t_{i,j} = t_{i\text{-}j}$). Autrement dit, une* *matrice de Toeplitz est une matrice de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & t_{-4} & \cdots \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & \ddots \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \ddots \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots \\ t_4 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

Comme dans la cas de la matrice de Laurnet, les coefficients d'une matrice $(t_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$ de Toeplitz, d'une même diagonale sont égaux ($t_{i,j} = t_{i+1,j+1}, \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$).

2.4 Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy.

Définition 2.5. *Soit M_ϕ un opérateur de Laurent borné sur $L^2(\mathbb{T})$. On appelle opérateur de Toeplitz de symbole ϕ et on note T_ϕ, l'opérateur défini sur $H^2(\mathbb{T})$ par :*

$$\begin{array}{rcl} T_\phi & : & H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}) \\ f & \mapsto & T_\phi(f) = P_+(M_\phi f) = P_+(\phi f). \end{array}$$

L'opérateur T_ϕ est donc la compression de l'opérateur de Laurent M_ϕ sur $H^2(\mathbb{T})$ (on dit aussi que M_ϕ est une dilatation de T_ϕ).

Proposition. 2.6. *Soit $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors*
1/ $\forall f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a : $\langle M_\phi f, g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle$.
2/ T_ϕ est positif si et seulement si M_ϕ est positif.

Démonstration. 1) Soit $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a

$$\langle M_\phi f, g\rangle = \langle M_\phi f, P_+ g\rangle = \left\langle P_+^* M_\phi f, g\right\rangle = \langle P_+ M_\phi f, g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle .$$

2) Soit $f \in H^2(\mathbb{T})$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rcl} \langle T_\phi f, f\rangle & = & \langle M_\phi f, f\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle M_z^n M_\phi f, M_z^n f\rangle \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & \langle M_\phi M_z^n f, M_z^n f\rangle \geq 0, \text{ pour tout } f \in H^2(\mathbb{T}). \end{array}$$

En particulier pour $f = \mathbf{1}$ on obtient

$$\langle M_\phi M_z^n \mathbf{1}, M_z^n \mathbf{1}\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle M_\phi z^n, z^n\rangle \geq 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Et comme l'ensemble des polynômes $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$, il en résulte que

$$\langle M_\phi f, f\rangle \geq 0, \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

□

Proposition. 2.7. *Soit $\varphi, \phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. on a alors les propriétés suivantes.*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $T_{\alpha\varphi+\beta\phi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\phi$*
2. *$\|T_\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty$.*
3. *$T_{\overline{\varphi}}$ est l'adjoint de T_φ.*
4. *$T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*
5. *Si $\phi \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, alors $T_\phi T_\varphi = T_{\phi\varphi}$ et $T_{\overline{\phi}} T_\varphi = T_{\overline{\phi}\varphi}$.*

Démonstration. La propriété 1) découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale.

2) On a pour tout $f \in H^2(\mathbb{T})$

$$\|T_\phi(f)\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|P_+(M_\phi f)\| = \|P_+(\varphi f)\| \leq \|P_+\| \, \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{H^2(\mathbb{T})},$$

donc

$$\|T_\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty .$$

3) On a pour tout $f, g \in H^2(\mathbb{T})$

$$\langle f, T_\phi g\rangle = \langle f, M_\phi g\rangle = \left\langle M_\phi^* f, g\right\rangle = \left\langle M_{\overline{\phi}} f, g\right\rangle = \left\langle T_{\overline{\phi}} f, g\right\rangle .$$

4) Si T_φ est nul, alors pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi z^n, z^m\rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle T_\varphi z^n, z^m\rangle = \langle P_+(\varphi z^n), z^m\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle T_\varphi z^n, z^m\rangle = \langle \varphi z^n, z^m\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle T_\varphi z^n, z^m\rangle = \langle \varphi, \overline{z}^n z^m\rangle , \end{aligned}$$

mais la famille des polynômes en $(z, \overline{z})$ est dense dans $H^2(\mathbb{T})$ donc φ est orthogonale à $\overline{z}^n z^m$, c'est à dire φ est nulle.

Il est clair que si φ est nulle l'opérateur T_φ est nul.

5) Pour tout $f \in H^2(\mathbb{T})$, il est clair que ϕf est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et ϕ étant bornée, et $\phi f \in H^2(\mathbb{T})$, alors $T_\phi(f) = P_+(\phi f) = \phi f$ ainsi

$$T_\varphi T_\phi = T_\varphi(\phi f) = P_+(\varphi\phi f) = T_{\phi\varphi}(f).$$

La deuxième partie est une conséquence immédiate de la première. □

Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ la matrice de l'opérateur de Toeplitz par rapport à la base orthonormée $\mathcal{E} = (e_n(z))_{n\geq 0} = (z^n)_{n\geq 0}$ de $H^2(\mathbb{T})$. Alors pour tout entier positif k, on a :

$$a_{i+k,j+k} = \left\langle T_\varphi z^{j+k}, z^{i+k}\right\rangle = \left\langle \varphi z^{j+k}, z^{i+k}\right\rangle = \left\langle \varphi z^j, z^i\right\rangle = a_{i,j}.$$

Donc $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une matrice de Toeplitz.

Théorème 2.3. *Soit T un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$ dont sa matrice par rapport à la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est de Toeplitz. Alors T est un opérateur de Toeplitz.*

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère sur $L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur T_n défini par

$$T_n = M_z^{*n} T P_+ M_z^n.$$

On a alors

$$\|T_n\| = \|T\|.$$

Ainsi, T_n est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$.

On a aussi, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\langle T_n z^j, z^i\right\rangle &= \left\langle M_z^{*n} T P_+ M_z^n z^j, z^i\right\rangle = \left\langle T P_+ M_z^n z^j, M_z^n z^i\right\rangle \\ &= \left\langle T P_+ z^{j+n}, z^{i+n}\right\rangle = \left\langle T z^{j+n}, z^{i+n}\right\rangle = \left\langle T z^j, z^i\right\rangle. \end{aligned}$$

Et pour $i, j \in \mathbb{Z}$, il existe toujours un entier positif N tel que pour tout $n \geq N$, $i+n$ et $j+n$ sont tous les deux positifs donc,

$$\left\langle T_n z^j, z^i\right\rangle = \left\langle T P_+ z^{j+n}, z^{i+n}\right\rangle = \left\langle T z^{j+n}, z^{i+n}\right\rangle.$$

Il en résulte que la suite $(\langle T_n z^j, z^i\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang donc convergente (car $\langle T z^{j+n}, z^{i+n}\rangle$ ne dépend pas de n). Ainsi la suite $(\langle T_n p, q\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout p, q dans $\mathcal{P}$, et comme $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ alors la suite $(\langle T_n f, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout f, g dans $L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, la suite $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{T})$. On note par $T_\infty f$ la limite faible de $T_n f$, donc

$$\begin{aligned} T_\infty \quad &: \quad L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) \\ f \quad &\mapsto \quad T_\infty f \end{aligned}$$

est un opérateur borné car

$$\|T_\infty f\|_2 \leq \liminf_n \|T_n f\|_2 \leq \|T\| \, \|f\|_2.$$

Et sa matrice est de Laurent, donc T_∞ est un opérateur de Laurent.

En plus pour tout $i, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\langle P_+ T_\infty z^j, z^i \right\rangle &= \left\langle T_\infty z^j, z^i \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle T_n z^j, z^i \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle M_z^{*n} T P_+ M_z^n z^j, z^i \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle T z^{j+n}, z^{i+n} \right\rangle \\
&= \left\langle T z^j, z^i \right\rangle .
\end{aligned}$$

Et comme $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $H^2(\mathbb{T})$ on résulte que

$$P_+ T_\infty f = Tf, \forall f \in H^2(\mathbb{T}).$$

C'est à dire T est la compression de l'opérateur de Laurent T_∞ sur $H^2(\mathbb{T})$. Donc T est un opérateur de Toeplitz. □

Nous pouvons déduire le symbole φ à partir des coefficients de la matrice de Toeplitz $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$. En effet, on a

$$a_{ij} = \left\langle T_\varphi z^j, z^i \right\rangle = \left\langle \varphi z^j, z^i \right\rangle = \left\langle \varphi, z^{j-i} \right\rangle = \widehat{\varphi}(i-j).$$

Alors

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}(i) = \langle T_\varphi z^0, z^i \rangle = \langle T_\varphi 1, z^i \rangle = a_{i0} \\ \widehat{\varphi}(-j) = \langle T_\varphi z^j, z^0 \rangle = \langle T_\varphi z^j, 1 \rangle = a_{0j}. \end{cases}$$

L'unicité du symbole φ est assurée par l'unicité des coefficients de Fourier donnés par la formule précédente.

La proposition 2.2 nous permet de dire (comme dans le cas de l'opérateur de Laurent), qu'un opérateur de Toeplitz est borné si et seulement si son symbol est borné.

Théorème 2.4. *Un opérateur de Toeplitz T_φ est compact si et seulement si φ est nul.*

2.5 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman.

On rappelle que $L_a^p(\mathbb{D})$ est un espace fermé dans $L^p(\mathbb{D})$. Alors la projection orthogonale de $L^p(\mathbb{D})$ dans $L_a^p(\mathbb{D})$ est bien définie, et on la note encore P_+

$$\begin{aligned}
P_+ \quad &: \quad L^p(\mathbb{D}) \to L_a^p(\mathbb{D}) \\
f \quad &\mapsto \quad P_+(f).
\end{aligned}$$

Définition 2.8. *Soit φ une fonction bornée sur $\mathbb{D}$. On définit l'opérateur de Toeplitz à symbole φ sur l'espace $L^2_a(\mathbb{D})$ par*

$$\begin{aligned} T_\varphi \quad &: \quad L^2_a(\mathbb{D}) \to L^2_a(\mathbb{D}) \\ f \quad &\mapsto \quad P_+(\varphi f). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

En utilisant la représentation intégrale de P_+, nous pouvons voir T_φ comme un opérateur intègrale donné par :

$$T_\varphi f(z) = P_+(\varphi f)(z) = \langle \varphi f, K_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w), \forall z \in \mathbb{D}.$$

De la définition on résume les propriétés suivantes

Proposition. 2.9. *[39] Soit $\varphi, \phi \in L^\infty(\mathbb{D})$*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $T_{\alpha\varphi+\beta\phi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\phi$.*
2. *$\|T_\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty$.*
3. *$T_{\overline{\varphi}}$ est l'adjoint de T_φ.*
4. *$T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*
5. *Si $\phi \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ alors $T_\phi T_\varphi = T_{\phi\varphi}$ et $T_{\overline{\phi}} T_\varphi = T_{\overline{\phi}\varphi}$.*

Démonstration. 1) Soit $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, on a

$$\begin{aligned} T_{\alpha\varphi+\beta\phi}(f) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(\alpha\varphi + \beta\phi)(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} \, dA(w) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} \, dA(w) + \beta \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} \, dA(w) \\ &= \alpha T_\varphi(f) + \beta T_\phi(f). \end{aligned}$$

2) On a pour $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, alors

$$\|P_+(f)\| = f,$$

i.e.

$$\|P_+\| = 1,$$

et aussi

$$\|T_\varphi(f)\| = \|P_+(\varphi f)\| \leq \|P_+\| \, \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|f\| \, ,$$

donc $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

3) Soient $f, g \in L^2_a(\mathbb{D})$, on a

$$\langle T_\varphi f, g \rangle \quad = \quad \langle P_+(\varphi f), g \rangle = \left\langle \varphi f, P_+^*(g) \right\rangle = \langle \varphi f, P_+(g) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \langle \varphi f, g\rangle = \langle f, \overline{\varphi} g\rangle = \langle P_+(f), \overline{\varphi} g\rangle \\ &= \left\langle f, P_+^*(\overline{\varphi} g)\right\rangle \\ &= \langle f, T_{\overline{\varphi}} g\rangle . \end{aligned}$$

4) Si T_φ est nul alors pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi z^n, z^m\rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle T_\varphi z^n, z^m\rangle = \langle P_+(\varphi z^n), z^m\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle T_\varphi z^n, z^m\rangle = \langle \varphi z^n, z^m\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle T_\varphi z^n, z^m\rangle = \langle \varphi, \overline{z}^n z^m\rangle , \end{aligned}$$

mais la famille des polynômes en $(z, \overline{z})$ est dense dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ donc φ est orthogonale à $\overline{z}^n z^m$, c'est à dire φ est nulle.

5) Pour tout $f \in L^2_a(\mathbb{D}, dA)$, $\phi \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ vient de dire que ϕf est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et ϕ étant bornée, ainsi $\phi f \in L^2_a(\mathbb{D}, dA)$, alors $T_\phi(f) = P_+(\phi f) = \phi f$ et

$$T_\varphi T_\phi = T_\varphi(\phi f) = P_+(\varphi\phi f) = T_{\phi\varphi}(f).$$

Par la même façon on peut montrer la deuxième partie. $\square$

La propriété 2/ de la proposition précedente nous a affirmé que si le symbole φ de l'opérateur T_φ est supposé borné comme dans la définition, l'opérateur T_φ est lui aussi borné. En réalité l'opérateur de Toeplitz T_φ sur l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ peut être borné sans que son symbole le soit. Au contraire de l'opérateur de Toeplitz T_φ sur l'espace de Hardy (voir [7]) qui est borné si et seulement si son symbole est borné. Une autre propriété est satisfaisante pour T_φ sur l'espace de Hardy et n'est pas dans l'espace de Bergman est la suivante (T_φ est compact si et seulement si φ est nul) (voire [7]).

Proposition. 2.10. *[36] Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a*

$$T_\varphi(k_z) = (P_+(\varphi \circ \varphi_z) \circ \varphi_z)k_z.$$

Définition 2.11. *La transformée de Berezin de l'opérateur de Toeplitz T_φ est définie par*

$$\widetilde{T_\varphi}(z) = \langle T_\varphi k_z, k_z\rangle = \langle \varphi k_z, k_z\rangle = \widetilde{\varphi}(z).$$

Ainsi, la transformée de Berezin de φ et de T_φ coïncidents.

2.6 Opérateur de Toeplitz à symbole quasihomogène ou radial.

Définition 2.12. *Soit $m \in \mathbb{Z}$. Une fonction $\phi \in L^{\infty}(\mathbb{D}, dA)$ est dite m quasihomogène s'il existe $\varphi \in L^{\infty}([0,1])$ telle que pour tout $z = re^{i\theta}$ de $\mathbb{D}$, on a*

$$\phi(re^{i\theta}) = e^{im\theta}\varphi(r).$$

On dit alors que φ est la partie radiale de ϕ et m le coefficient de quasihomogènéité de ϕ.

Dans ce cas, on dit que l'opérateur de Toeplitz T_{ϕ} est quasihomogène de degré m ou tout simplement m-quasihomogène.

Et si $m = 0$, alors ϕ est dite radiale, et T_{ϕ} s'appel opérateur radial.

Par exemple la fonction $z^n\overline{z}^m$ est quasihomogène de degré $(n-m)$. Sa partie radiale est la fonction définie par $\varphi(r) = r^{(n-m)}$.

En outre les polynômes de la forme z^m avec $m \in \mathbb{Z}$ denses dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$, et pour tout $m_1 \neq m_2$ on a $e^{im_1\theta}L^2([0,1], rdr)$ est orthogonale à $e^{im_2\theta}L^2([0,1], rdr)$. On peut alors décomposer $L^2(\mathbb{D}, dA)$ sous la forme

$$L^2(\mathbb{D}, dA) = \underset{m\in\mathbb{Z}}{\otimes} e^{im\theta}L^2([0,1], rdr). \tag{2.6.1}$$

Ainsi, toute fonction f de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ admet une décomposition sous la forme

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{im\theta}f_m(r), \qquad f_m(r) \in L^2([0,1], rdr).$$

La décomposition de l'espace $L^2(\mathbb{D}, dA)$ sous la forme (2.6.1) nous mène à dire que beaucoup de problèmes liées aux opérateurs de Toeplitz se ramènent aux études des opérateurs de Toeplitz à symboles quasihomogènes ou radiaux. on cite par exemple les travaux de I. Louhichi, E. Strouse et de L. Zakariasy [25], [26], [27].

Lemme 2.13. *Soit ϕ un symbole m-quasihomogène borné, et soit la base orthonormale $\{e_n\}_n = \left\{\sqrt{n+1}z^n\right\}_n$ de $L_a^2(\mathbb{D}, dA)$, alors*

$$T_{\phi}e_n = \begin{cases} 0 & si\ n+m<0 \\ c_n(\varphi)e_{n+m} & si\ non, \end{cases}$$

où

$$c_n(\varphi) = 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 \varphi(r)r^{2n+m+1}dr,$$

telle que φ est la partie radial de ϕ.

Démonstration. Il suffit de calculer $\langle T_\phi e_n, e_p\rangle = \langle \phi e_n, e_p\rangle$ pour tous $p, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\langle T_\phi e_n, e_p\rangle &= \sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_D \phi(z) z^n \bar{z}^p \, dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{im\theta}\varphi(r) r^n e^{in\theta} r^p e^{-ip\theta} r dr d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+n-p)\theta} d\theta \int_0^1 \varphi(r) r^{n+p+1}\, dr \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } m+n-p \neq 0 \\ 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+m+1} dr, & \text{si } m+n = p \end{cases} \\
&= 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\left(\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+m+1} dr\right)\delta_{m+n,p}.
\end{aligned}$$

D'ou

$$T_\phi e_n = \begin{cases} 0, & \text{si } m+n-p \neq 0 \\ \left(2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+m+1} dr\right) e_{m+n}, & \text{si } m+n = p. \end{cases}$$

□

Soit maintenant φ une fonction radiale telle que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ (*i.e.* $\varphi \in L^\infty([0,1])$), alors

$$T_\varphi e_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq p \\ \left(2(n+1)\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+1} dr\right) e_n, & \text{si } n = p. \end{cases}$$

Et donc

$$\langle T_\varphi e_n, e_n\rangle = 2(n+1)\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+1} dr.$$

On note encore

$$c_n(\varphi) = \langle T_\varphi e_n, e_n\rangle = 2(n+1)\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+1} dr. \tag{2.6.2}$$

Il est clair maintenant, d'après (2.6.2) que si φ est radiale l'opérateur T_φ est diagonal.

Chapitre 3

Classes de Schatten-von Neumann.

Les notions et les propriétés suivantes se trouve dans Böttcher-Silbermann-Karlovich [8], voir aussi Nikolski [30].

Soit A un opérateur d'un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2, et soit le module de A défini par

$$|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}} : H_1 \to H_1.$$

Soit $s_n(A)$, $n = 0, 1, 2, ...$les valeurs propres de l'opérateur $|A|$.

Définition 3.1. *Les nombres $s_n(A)$, $n = 0, 1, 2, ...$ sont appelés les nombres singuliers de A. On défini les classes de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ par*

$$\mathcal{S}_p(H_1, H_2) = \{A \in \mathcal{S}_\infty(H_1, H_2) : ||A||_{\mathcal{S}_p}^p = \sum_k s_k(A)^p < \infty\},\ 0 < p < \infty, \tag{3.0.1}$$

$$\mathcal{S}_\infty(H_1, H_2) = \textit{la classe des opérateurs compacts.}$$

avec

$$||A||_\infty = \max_{n \geq 0} s_n(A).$$

On note par $\mathcal{S}_0(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs de rang fini de H_1 dans H_2.

Il est clair que si A est compact, alors $|A|$ est également compact et donc son spectre est donné par une suite tendant vers zéro (s'il est infini). Autrement dit

$$\mathcal{S}_\infty(H_1, H_2) = \left\{A \in \mathcal{L}_\infty(H_1, H_2), \lim_{n \to \infty} s_n(A) = 0\right\},$$

où $\mathcal{L}_\infty(H_1, H_2)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de H_1 dans H_2.

Voici quelques propriétés des classes $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$:

1. $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ est un espace Banach muni de la norme

$$||A||_{\mathcal{S}_p} = \left(\sum_k s_k(A)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   et pour $1 \leq r < s \leq \infty$, $\mathcal{S}_r(H_1, H_2) \subset \mathcal{S}_s(H_1, H_2)$, et $\mathcal{S}_0(H_1, H_2)$ est dense dans $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

2. Si $1 \leq p \leq \infty$, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $K \in \mathcal{S}_p(H_2, H_3)$ et $B \in \mathcal{L}(H_3, H_4)$ alors $BKA \in \mathcal{S}_p(H_1, H_4)$.

3. Soit $(B_n)_n \subset \mathcal{L}(H_3, H_4)$ convergent fortement vers $B \in \mathcal{L}(H_3, H_4)$ et soit $(C_n)_n \subset \mathcal{L}^*(H_2^*, H_1^*)$ convergent fortement vers $C \in \mathcal{L}^*(H_2^*, H_1^*)$. Alors si $K \in \mathcal{S}_p(H_2, H_3)$ $(1 \leq p \leq \infty)$,

$$\|B_n K C_n - BKC\|_p \to 0, \text{ qaund } n \to \infty.$$

   Si $K \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint positif et si $\{e_n\}_n$ est une base orthonormale de $\mathcal{L}(H)$, alors $\sum_n (Ke_n, e_n)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormale $\{e_n\}_n$. Cette somme est appelée trace de K, et notée trK.

4. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors $K \in \mathcal{S}_p(H)$ si et seulement si $tr(|K|^p) < \infty$. Dans ce cas

$$||K||_{\mathcal{S}_p}^p = \sum_k s_k(K)^p = tr(|K|^p).$$

La classe $\mathcal{S}_1(H)$ s'appelle la classe des opérateurs trace, et $\mathcal{S}_2(H)$ celle de Hilbert-Schmidt.

Dans la suite, la classe de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H)$ sera notée par $\mathcal{S}_p$.

3.1 Quelques résultats sur les opérateurs de Toeplitz.

Rappelons que les espaces $L^p(\mathbb{D})$ et $L^p_a(\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq \infty$, ont été définis dans la section (1.3).

Une propriété importante de l'espace $L^2_a(\mathbb{D})$ est que pour tout $w \in \mathbb{D}$, il existe ce qu'on appelle le noyau reproduisant, voir(1.3), *i.e.*, $k_w \in L^2_a(\mathbb{D})$ donné par

$$k(z, w) = k_w(z) = \frac{(1 - |w|^2)}{(1 - \bar{w}z)^2}, \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

On a pour tout $f \in L^2_a(\mathbb{D})$

$$(1 - |w|^2) f(w) = \langle f, k_w \rangle,$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{D})$. voir [17, Sect. 1.1], [39, Ch. 4].

Pour une fonction $g \in L^1(\mathbb{D})$, on considère sa transformation de Berezin (section (1.4.2)), voire aussi [17, Ch. 2], [39, Ch. 6] définie par

$$\tilde{g}(w) = \langle g k_w, k_w \rangle \,, \quad w \in \mathbb{D}.$$

De même, pour l'opérateur de Toeplitz T_φ (2.5.1), on définit

$$\tilde{T}_\varphi(w) = \tilde{\varphi}(w) = \langle T_\varphi k_w, k_w \rangle = \langle P_+ \varphi k_w, k_w \rangle = \langle \varphi k_w, k_w \rangle \,, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Comme nous le verrons dans la suite, de nombreuses propriétés de T_φ peuvent être exprimé en termes de $\tilde{\varphi}$.

Les deux résultats suivants sont valables pour les opérateurs de Toeplitz T_φ (*i.e.*, les symboles φ ne sont pas nécessairement radiaux). Soit (z, w), $z, w \in \mathbb{D}$, comme l'espace de Bergman est métrique (ou, de manière équivalente, hyperbolique) sur $\mathbb{D}$, voir [39, Ch. 4], et

$$D(w, r) = \{z \in \mathbb{D} : d(z, w) < r\},$$

où $r \geq 0$. Pour r fixe, on définit la moyenne de φ comme

$$\hat{\varphi}_r(w) = \frac{1}{A(D(w,r))} \int_{D(w,r)} \varphi(z)\, dA(z),$$

où $A(D(w,r)) = \int_{D(w,r)} dA(z)$.

Théorème 3.1 ([39, Ch. 7]). *1. (voir [39, Ch. 7, Prop. 7.3]) Soit $\varphi \in C(\bar{\mathbb{D}})$ (i.e., φ est continu sur $\bar{\mathbb{D}}$). Alors T_φ est compact (i.e., $T_\varphi \in \mathcal{S}_\infty$) si et seulement si*

$$\lim_{|z| \to 1-} \varphi(z) = 0.$$

2. (voir [39, Ch. 7, Cor. 7.9]) Soit $\varphi(z) \geq 0$ sur $\mathbb{D}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $T_\varphi \in \mathcal{S}_\infty$,
- $\lim_{|z| \to 1-} \tilde{\varphi}(z) = 0$,
- *pour tout $r > 0$ fixe*, $\lim_{|z| \to 1-} \hat{\varphi}_r(z) = 0$.

Mettons aussi $d\lambda(z) = dA(z)/(1 - |z|^2)^2$.

Théorème 3.2 ([39, Ch. 7]). *Soit $\varphi(z) \geq 0$ et $p \geq 1$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $T_\varphi \in \mathcal{S}_p$,

– $\tilde{\varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$,
– *pour tout* $r > 0$ *fixe,* $\hat{\varphi}_r \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.

A partir de maintenant, nous supposons le symbole φ *radial.* Alors, la matrice de l'opérateur de Toeplitz T_φ est simple à calculer. En prenant la base canonique $e_n(z) = \sqrt{n+1}\, z^n$ de $L_a^2(\mathbb{D})$, on a

$$(T_\varphi)_{nm} = \frac{(n+1)^{1/2}(m+1)^{1/2}}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}\, d\theta \int_0^1 r^{n+m+1}\varphi(r)\, dr.$$

Donc

$$(T_\varphi)_{nm} = \begin{cases} 2(n+1)\int_0^1 r^{2n+1}\varphi(r)\, dr, & m = n, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

et la matrice de l'opérateur est diagonale.

Il est convenable de poser

$$c_n(\varphi) := (T_\varphi)_{nn} = 2(n+1)\int_0^1 r^{2n+1}\varphi(r)\, dr. \tag{3.1.2}$$

Pour un symbole radial φ, sa transformée de Berezin est également radiale et elle est calculée comme suit

$$\tilde{\varphi}(z) = (1-|z|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_n(\varphi) |z|^{2n},$$

(voir Zorboska [38].)

Notons que dans le théorème suivant le symbole φ n'est pas supposé de signe-défini.

Théorème 3.3 (Korenblum-Zhu [24])**.** *Soit* T_φ *un opérateur de Toeplitz à symbole radial borné* φ. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $T_\varphi \in \mathcal{S}_\infty$,
2. $\lim_{n\to+\infty} 2(n+1)\int_0^1 \varphi(x) x^{2n+1}\, dx = 0$.
3. $\lim_{t\to 1-} \frac{1}{1-t}\int_t^1 \varphi(x)\, dx = 0$.

Nous terminons cette section en mentionnant des articles intéressants de Louhichi-Zakariasy [25], Louhichi-Strouse-Zakariasy [26].

3.2 Quelques conditions suffisantes pour que l'opérateur de Toeplitz radial soit dans la classes de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p, 0 < p < \infty$.

Soit la fonction φ définie sur $I = [0,1]$. Le théorème 3.3 affirme que si le symbole φ est continu dans un voisinage (à gauche) du point $x = 1$ et $\varphi(1) = 0$, alors évidemment $\lim_{n\to+\infty} c_n(\varphi) = 0$.

Supposons maintenant que φ est l fois continument différentiables sur $I, l \in \mathbb{N}$. On voit facilement que les conditions $\varphi^{(k)}(1) = 0,\ k = 0, \ldots, l-1$, impliquent une décroissance plus rapide de $c_n(\varphi)$ quand $n \to +\infty$.

Pour formuler la proposition suivante, notons $W^{l,p}(I)$ l'espace de Sobolev sur l'intervalle I, *i.e.*, $f \in W^{l,p}(I)$ si et seulement si

$$||f||_{W^{l,p}} = \sum_{j=0}^{l} ||f^{(j)}||_p < \infty,$$

où les dérivés $f^{(j)}$ sont au sens distributions, et $||.||_p$ sont les normes sur $L^p(I), p \geq 1$. Voir Adams [1] pour plus d'informations sur le sujet.

La proposition est tout à fait élémentaire, et nous la donnons par souci d'exhaustivité.

Proposition. 3.2. *Soit $l \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Soit $\varphi \in W^{l,p}(I)$ et $\varphi^{(k)}(1) = 0, k = 0, \ldots, l-1$. Alors*

$$|c_n(\varphi)| \leq \frac{C}{n^{l-1/p}} ||\varphi||_{W^{l,p}},$$

où $C = C(l,p)$.

Démonstration. Comme d'habitude, pour $p \geq 1$, nous fixons $q = \frac{p}{(p-1)}, q \geq 1$. En commençant par $l = 1$, on voit que :

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= 2(n+1)\int_0^1 \varphi(x)x^{2n+1}dx = \int_0^1 \varphi(x)d(x^{2(n+1)}) \\ &= -\int_0^1 \varphi'(x)x^{2(n+1)}dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder

$$|c_n(\varphi)| \leq ||\varphi'||_p||x^{2(n+1)}||_q \leq C||\varphi||_{W^{1,p}}\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}},$$

où $C = C(l,p)$. Pour $l = 1$, on a $1/q = 1 - 1/p = l - 1/p$.

Pour le cas général de l, l'intégration par parties appliquées $(l-1)$ fois à l'intégrale ci-dessus donne

$$c_n(\varphi) = \frac{(-1)^l}{(2n+3)(2n+4)...(2n+1+l)} \int_0^1 \varphi^{(l)}(x) x^{2n+1+l} dx.$$

Par conséquent, nous obtenons par l'inégalité de Hölder

$$|c_n(\varphi)| \leq \frac{C}{n^{l-1+1/q}} ||\varphi^{(l)}||_p \leq C||\varphi||_{W^{1,p}} \frac{1}{n^{l-1/p}},$$

où $C = C(l,p)$.

$\square$

Supposons que $l - 1/p > 0$. Il en résulte immédiatement que $T_\varphi \in \mathcal{S}_\alpha, \alpha > 1/(l-1/p)$, pour les symboles φ de la proposition ci-dessus, et aussi,

$$||T_\varphi||_{\mathcal{S}_\alpha} \leq C||\varphi||_{W^{l,p}}.$$

Notons aussi que la proposition 3.2 donne une condition suffisante pour que $\{c_n(\varphi)\}$ soit proche de 0 , mais la condition n'est pas nécessaire. Par exemple, elle explique comment les coefficients $\{c_n(\varphi)\}$ s'annulent quand $\varphi \geq 0$ alors qu'aucune annulation dans l'intégrale 3.1.2 définissant $c_n(\varphi)$ n'est possible. Quand φ est complexe (ou réel de signe indéfinie), l'intégrale qui donne $c_n(\varphi)$ devient plus petite au voisinage (à gauche) de $x = 1$, à cause des oscillations très rapides de φ, (voir Proposition 3.4).

Le lemme suivant est un calcul simple basé sur des propriétés bien connues de la fonction Γ.

Lemme 3.3. *Soit $\delta > -1$. Alors*

$$I_\delta(n) = \int_0^1 s^n(1-s)^\delta ds \leq \frac{C\Gamma(\delta+1)}{n^{\delta+1}},$$

où C est une constante.

Démonstration. Nous donnons un bref aperçu de la preuve. On pose $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. En faisant le changement de variable $s = e^{-t}$ sur $I_\delta(n)$ et on réécrire l'intégrale sur $[0, a_n[$ et $[a_n, +\infty[$, on a

$$\int_0^1 s^n(1-s)^\delta ds \quad = \quad \int_0^{+\infty} e^{-nt}(1-e^{-t})^\delta dt = I_1 + I_2$$

$$= \int_0^{a_n} e^{-nt}(1-e^{-t})^\delta dt + \int_{a_n}^{+\infty} e^{-nt}(1-e^{-t})^\delta dt.$$

On voit facilement que

$$I_2 \leq \frac{C}{\sqrt{n+1}} e^{-(n+1)a_n}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ et t assez petit, nous avons $(1-e^{-t}) \leq (1+\epsilon)t$, et donc

$$I_1 \leq (1+\epsilon)^\delta \int_0^{a_n} e^{-nt} t^\delta dt = \frac{(1+\epsilon)^\delta}{(n+1)^\delta} \int_0^{(n+1)a_n} e^{-u} u^\delta dt$$

où $u = (n+1)^t$ et $n \to +\infty$. Le lemme est prouvé. $\square$

Bien sûr, on peut prouver avec un peu plus d'efforts que $I_\delta(n) \asymp \Gamma(\delta+1)/n^{\delta+1}$ pour $n \to +\infty$.

Les deux premiers points de la proposition suivante sont des résultats de Grudsky-Vasilevski [21, Théorème 3.3]. Le troisième point concerne le fait que l'opérateur Toeplitz T_φ est dans $\mathcal{S}_p, 0 < p < \infty$, et il est obtenu à l'aide de techniques similaires à celles de [21]. Notons que la continuité et la bornitude du symbole φ au voisinage de $x = 1$ ne sont obligatoires.

On pose $\Phi(x) = \int_x^1 \varphi(s) ds$. Nous avons la proposition suivante.

Proposition. 3.4. *Supposons que $\varphi \in L^1[0,1]$. Nous avons (quand $s \to 1-0$) les implications suivantes*

1. *Si $|\Phi(s)| \leq C(1-s)$, alors $\sup_n |c_n(\varphi)| < +\infty$ (i.e., l'opérateur T_φ est borné).*

2. *Si*

$$\lim_{s \to 1-0} \frac{|\Phi(s)|}{(1-s)} = 0,$$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |c_n(\varphi)| = 0$ (i.e., l'opérateur T_φ est compact).

3. *Soit*

$$|\Phi(s)| \leq C(1-s)^\delta, \tag{3.2.1}$$

pour $\delta > 1$. Alors

$$|c_n(\varphi)| \leq \frac{C}{n^{(\delta-1)}}, \tag{3.2.2}$$

(i.e., l'opérateur T_φ est dans la classe de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_{p+\epsilon}$, $p = \frac{1}{(\delta-1)}$, pour tout $\epsilon > 0$).

Démonstration. Pour (1), (2), voir Grudsky-Vasilevski [21] [Théorème 3.3]. Passant à (3), nous faisons l'intégration par parties dans (3.1.2)

$$c_n(\varphi) = (2n+2)(2n+1)\int_0^1 \Phi(x)x^{2n}dx.$$

Par l'hypothèse de (3), il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|\Phi(x)| \leq C(1-x)^\delta$ pour $1-\delta_0 \leq x < 1$. Nous réécrivons cette dernière intégrale comme

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= (2n+2)(2n+1)\int_0^1 \Phi(x)x^{2n}dx \\ &= (2n+2)(2n+1)\left(\int_0^{1-\delta_0} \Phi(x)x^{2n}dx + \int_{1-\delta_0}^1 \Phi(x)x^{2n}dx\right) \\ &= : I_1 + I_2, \end{aligned}$$

le facteur $(2n+2)(2n+1)$ étant absorbé dans les intégrales. Puisque $\varphi \in L^1[0,1]$ et Φ est borné, I_1 ainsi décroît avec un taux exponentiel, *i.e.*,

$$I_1 \leq C(2n+2)(2n+1)(1-\delta_0)^{2n}.$$

Passant à I_2, on voit que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C(2n+2)(2n+1)\int_{1-\delta_0}^1 (1-x)^\delta x^{2n}dx \\ &\leq C(2n+2)(2n+1)\int_0^1 (1-x)^\delta x^{2n}dx \\ &\leq \frac{C\Gamma(\delta+1)n^2}{n^{\delta+1}} \\ &\leq \frac{C}{n^{\delta-1}}, \end{aligned}$$

où à la dernière étape, nous avons utilisé le lemme ci-dessus. □

Nous considérons maintenant comme exemple, le cas à symbole particulier :

$$\varphi(x) = \varphi_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{-\beta}sin(1-x)^{-\alpha}, \tag{3.2.3}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta < 1$. Évidemment, la condition sur β garantit que $\varphi \in L^1[0,1]$. Les calculs de [21], (p. 23 voir l'équation (3.3)) donne

$$\Phi(x) = \frac{1}{\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta+1}cos(1-x)^{-\alpha} + O((1-x)^{2\alpha-\beta+1}),$$

donc la condition 3.2.2 est satisfaite avec $\delta = \alpha-\beta+1 > 0$, et, par conséquent, le point (3) de la proposition 3.4 est prouvé.

Corollaire 3.5. *Il existe un symbole $\varphi = \varphi_{\alpha,\beta}$ (3.2.3) avec un choix de paramètres α, β ayant les propriétés suivantes :*

1. $\varphi \in L^1[0,1]$,
2. *l'opérateur T_φ est compact,*
3. *pour tout $\delta_0 > 0$, $\sup_{[1-\delta_0,1[} |\varphi(x)| = +\infty$,*
4. *de plus, pour tout $p > 0$, il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$, tels que $T_{\varphi_{\alpha,\beta}} \in \mathcal{S}_p$.*

Chapitre 4

Solution du problème spectral pour les opérateurs de Toeplitz radiaux et polynômes de Legendre.

4.1 Problèmes spectraux direct et inverse pour les opérateurs de Toeplitz radiaux.

Rappelons que pour une fonction radiale donnée $\varphi \in L^1([0,1], xdx)$, l'opérateur de Toeplitz 2.5.1 a une matrice diagonale avec des coefficients $\{c_n(\varphi)\}$ 3.1.2 dans la base canonique de $L^2_a(\mathbb{D})$. Donc, le spectre $\sigma(T_\varphi)$ coïncide avec $\overline{\{c_n(\varphi)\}}$.

Le problème spectral pour ces opérateurs se compose de deux parties : la première partie (*i.e.,* le problème spectral direct) est de comprendre les propriétés de $\sigma(T_\varphi)$ (pour calculer le spectre d'une manière assez explicite) pour une donnée φ. La deuxième partie (*i.e.,* le problème direct inverse) est de reconstruire le symbole φ (si possible), à partir du spectre $\sigma(T_\varphi)$ de l'opérateur de Toeplitz.

Comme nous le montrons, ce problème admet une solution élégante en termes de polynômes de Legendre $\{P_n(x)\}_n$ sur $L^2[-1,1]$.

Avant de donner la construction, nous faisons quelques réductions. Tout d'abord, rappelant la formule 3.1.2, on fait le changement de variable $x = \sqrt{s}$ et on définit $\psi(s) = \varphi(\sqrt{s})$, donc

$$C_n(\psi) := c_n(\varphi) = 2(n+1)\int_0^1 \varphi(x)x^{2n+1}\,dx = (n+1)\int_0^1 \psi(s)s^n\,ds. \tag{4.1.1}$$

Nous acceptons la notation de la relation ci-dessus pour le reste du travail.

Deuxièmement, nous souhaitons représenter la fonction ψ comme une série de polynômes de Legendre sur $[-1,1]$. Le redimensionnement des polynômes $\{P_n\}$ à l'intervalle $[-1,1]$ conduit à des relations lourdes ; pour garder les formules avec lesquelles nous travaillons raisonnablement simples, nous préférons étendre la fonction ψ sur $[-1,1]$ de manière appropriée.

Pour une fonction $\psi \in L^p[0,1],\ p \geq 1$, On pose

$$\psi_e(s) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad \psi_o(s) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Bien sûr, nous avons $\psi = \psi_e + \psi_o$ sur $[-1,1]$, où ψ est étendu de zéro à $[-1,0)$, et $||\psi_e||^p_{L^p[-1,1]} = ||\psi_o||^p_{L^p[-1,1]} = 2||\psi||^p_{L^p[0,1]}$. il s'ensuit que

$$C_n(\psi) = (n+1)\int_0^1 \psi(s)s^n\,ds = \frac{(n+1)}{2}\int_{-1}^1 \psi_e(s)s^n\,ds =: C_n(\psi_e)$$

pour n pair et $C_n(\psi_e) = 0$ pour n impair. De même,

$$C_n(\psi) = (n+1)\int_0^1 \psi(s)s^n\,ds = \frac{(n+1)}{2}\int_{-1}^1 \psi_o(s)s^n\,ds =: C_n(\psi_o)$$

pour n impair et $C_n(\psi_o) = 0$ pour n pair. En particulier, $C_n(\psi) = C_n(\psi_e)$ pour n pair, et $C_n(\psi) = C_n(\psi_o)$ pour n impair.

Supposons maintenant que $\psi(s) = \sum_{k=0}^N a_k P_k(s)$ sur $[-1,1]$. Alors, on a pour $m = 2n$ pair

$$\begin{aligned} C_{2n}(\psi) &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^1 \psi_e(x)x^{2n}\,dx \qquad (4.1.2) \\ &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^1 \left(\sum_{j=0}^N a_j P_j(x)\right)\left(\sum_{k=0}^n b_{2n,2k}P_{2k}(x)\right)dx \\ &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^1 \sum_{j=0}^{E(N/2)}\sum_{k=0}^n b_{2n,2k}a_{2j}P_{2j}(x)P_{2k}(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{n,E(N/2)\}} \left(\frac{2n+1}{4k+1}b_{2n,2k}\right)a_{2k} =: \sum_{k=0}^{\min\{n,E(N/2)\}} d_{2n,2k}a_{2k}, \end{aligned}$$

où

$$d_{2n,2k} = \frac{(2n+1)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+1)!!}. \qquad (4.1.3)$$

Pour $m = 2n+1$ impair, on obtient

$$C_{2n+1}(\psi) = \frac{(2n+2)}{2}\int_{-1}^1 \psi_o(x)x^{2n+1}\,dx \qquad (4.1.4)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2n+2)}{2} \int_{-1}^{1} \left(\sum_{j=0}^{N} a_j P_j(x) \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_{2n+1,2k+1} P_{2k+1}(x) \right) dx \\
&= \frac{(2n+2)}{2} \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{E(N/2)} \sum_{k=0}^{n} b_{2n+1,2k+1} a_{2j+1} P_{2j+1}(x) P_{2k+1}(x)\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{\min\{n,[N/2]\}} \left(\frac{2n+2}{4k+3} b_{2n+1,2k+1} \right) a_{2k+1} =: \sum_{k=0}^{\min\{n,E(N/2)\}} d_{2n+1,2k+1} a_{2k+1},
\end{aligned}
$$

où

$$d_{2n+1,2k+1} = \frac{(2n+2)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+3)!!}.$$

Dans la suite, nous nous intéresserons aux limites des coefficients $C_n(\psi)$ pour différentes fonctions ψ. Remarquons que les coefficients $C_{2n}(\psi)$ 4.1.2 dépendent de $d_{2n,2k}$ et a_{2k} seulement, et de même pour $C_{2n+1}(\psi)$ 4.1.4 et $d_{2n+1,2k+1}$, a_{2k+1}, respectivement. Par conséquent, nous avons une séparation des variables. Étant donné que les calculs de $\{C_n(\psi)\}$ pour n pair ou impair sont similaires, nous nous concentrons sur le cas de n pair.

Soit $\psi(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k P_k(s),\ s \in [-1,1]$. Considérons l'application donnée par

$$\{c_n(\varphi)\} = \{C_{2n}(\psi); C_{2n+1}(\psi)\} = \mathcal{D}(\{a_k\}), \tag{4.1.5}$$

où $\mathcal{D}(.)$ est la multiplication par $\mathcal{D} = [d_{n,k}]_{n,k}$, voir 4.1.2 et 4.1.4 pour la définition de $d_{n,k}$.

On l'appelle *l'application spectrale directe* pour l'opérateur T_φ ; pour garder la notation simple, nous désignons l'application et sa matrice (dans la base fixe $\{P_n\}$) par la même lettre $\mathcal{D}$. *L'application spectrale inverse* pour l'opérateur T_φ est

$$\{a_k\} = \mathcal{I}(\{c_n(\varphi)\}) = \mathcal{I}(\{C_{2n}(\psi); C_{2n+1}(\psi)\}), \tag{4.1.6}$$

qui peut être facilement écrit au moyen des formules 1.1.7, 1.1.8.

L'un des principaux points de la présente section est d'étudier l'application spectrale directe $\mathcal{D}$; les propriétés de l'application spectrale inverse $\mathcal{I}$ peuvent être traitées d'un point de vue similaire, mais ici nous n'allons pas dans ce sens.

On suppose que $\psi \in L^2[-1,1]$, ou, de manière équivalente,

$$||\psi||^2_{L^2[-1,1]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} |a_k|^2 < +\infty.$$

L'espace pondéré l^2 correspondant est désigné par $l^2(\{2/(2k+1)\})$. Il découle immédiatement de la définition de $\mathcal{S}_p,\ p > 0$, ($T_\varphi \in \mathcal{S}_p$ si et seulement si $\{c_n(\varphi)\} \in l^p,\ p > 0$).

Nous souhaitons comprendre quelles suites $\{c_n(\varphi)\}_n$ peuvent être générées par les fonctions $\psi \in L^2[-1,1]$ à l'aide de l'application $\mathcal{D}$, voir 4.1.5.

4.2 Quelques résultats auxiliaires et la preuve du théorème 4.1.

Comme il est expliqué ci-dessus, nous faisons les calculs pour la suite $\{c_n(\varphi)\}_n$ avec des indices pairs, *i.e.*, on suppose $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}P_{2k}$. On désigne par $\mathcal{D}_e$ la restriction de l'application $\mathcal{D}$ sur la sous-suite de $\{c_n(\varphi)\}_n$ paires, *i.e.*,

$$\{C_{2n}(\psi)\}_n = \mathcal{D}_e(\{a_{2k}\}_k).$$

Notons également que, pour tout n,

$$d_{2n,0} = 1, \quad d_{2n,2n} = \frac{(2n+1)!}{(4n+1)!!} \to 0 \ (n \to \infty),$$

et

$$d_{2n,2k+2} = d_{2n,2k}\,\frac{2n-2k}{2n+2k+3}. \tag{4.2.1}$$

Lemme 4.1. *On a :*

1. *la matrice de $\mathcal{D}_e$ est triangulaire inférieure,* i.e., $d_{2n,2k} = 0,\ k > n$, *et* $d_{2n,2k} > 0$ *pour* $0 \le k \le n$. *En outre :*
   (a) *pour tout n fixe, $d_{2n,2k}$ est en décroissement par rapport à k,*
   (b) *pour tout k fixe,* $\lim_{n\to+\infty} d_{2n,2k} = 1$.
2. *On a*
$$d_{2n,2k} \le \exp(-Ck^2/n) \tag{4.2.2}$$
   où $C > 0$ une constante.

Démonstration. L'assertion (1) du lemme est clair d'après 4.1.3. Et (2) est également facile à prouver ; et il résulte de 4.2.1. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} d_{2n,2k} &= \prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{2n-2j}{2n+2j+3}\right) = \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1}\log\left(\frac{2n-2j}{2n+2j+3}\right)\right) \\ &\le \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{4j+3}{2n+2j+3}\right) \le \exp\left(-\frac{1}{2n+2k+1}\sum_{j=0}^{k-1}(4j+3)\right) \\ &\le \exp\left(-C\,\frac{k^2}{n}\right), \end{aligned}$$

du faite que $0 \le j \le k \le n$. □

La forme de l'application $\mathcal{D}_e$ suggère qu'il pourrait avoir de très bonnes propriétés d'annulation, c'est-à-dire, pour un choix approprié, une suite $\{a_{2k}\} \in l^2(\{2/(2k+1)\})$, leur suite correspondante $\{C_{2n}(\psi)\} = \mathcal{D}_e(\{a_{2k}\})$ pourrait être dans $l^p,\ 0 < p < \infty$.

Lemme 4.2. *Soit $p \in \mathbb{N}$ fixe. Il existe un ensemble de coefficients $(A_j(.))_{j=0,\dots,p}, A_j(.) = A_{p,j}(.)$ en fonctions de k, satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout n, k, on a*
$$\sum_{j=0}^{p} d_{2n,2(k+j)} A_j(k) = d_{2n,2k} \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(2n + 2(k+j) + 1)}. \tag{4.2.3}$$
2. *$A_j(k) = S_j(k)/T_p(k)$, où $S_j = S_{j,p}, T_p$ sont des polynômes par rapport à k, $j = 0, \dots, p$, $\deg T_p = p(p+1)/2$ et*
$$\deg S_0 = \deg S_1 = p(p+1)/2 - 1, \quad \deg S_j = p(p+1)/2 - j,$$
où $j = 2, \dots, p$. En particulier, les fonctions rationnelles $\{A_j(.)\}_{j=0,\dots,p}$ ont les degrés $\deg A_0 = \deg A_1 = -1$, $\deg A_j = -j,\ j = 2, \dots, p$.
3. *Les zéros des polynômes $\{S_j\}_{j=0,\dots,p}, T_p$ dépendent uniquement de p ; en particulier, ils ne dépendent ni de k, ni de n.*
4. *Il en résulte que, pour n fixe, et k assez grand*
$$C_1 \leq k|A_0(k)| \leq C_2,\ C_1 \leq k|A_1(k)| \leq C_2,\ C_1 \leq k^j|A_j(k)| \leq C_2,$$
où $j = 2, \dots, p$ et $C_1, C_2 > 0$.

Démonstration. Pour illustrer la conclusion du lemme, prenons d'abord $p = 1$. Donc, nous voulons prendre $A_0(k)$ et $A_1(k)$ avec la propriété
$$d_{2n,2k} A_0(k) + d_{2n,2(k+1)} A_1(k) = d_{2n,2k} \frac{1}{2n + 2k + 3}.$$
Réécrivons le premier membre de cette équation comme
$$\dots = d_{2n,2k} \left(A_0(k) + A_1(k) \frac{(2n - 2k)}{(2n + 2k + 3)} \right),$$
on voit que
$$A_0(k) = \frac{1}{4k + 3},\ A_1(k) = -\frac{1}{4k + 3},$$
et ces A_0, A_1 satisfont la revendication du lemme.

Le calcul de $p \in \mathbb{N}$ général est assez long, bien qu'il est complètement élémentaire. Nous donnons un aperçu de la preuve en laissant les détails techniques au lecteur.

On choisit $p \in \mathbb{N},\ p > 1$ arbitraire. A la première étape de la construction, nous recherchons des coefficients $\{B_j\}_{j=1,\ldots,p}$, en fonction de p uniquement, tel que

$$F_p(n) := F_{p,k}(n) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{p}(2n+2(k+j)+1)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{B_j}{(2n+2(k+j)+1)}. \tag{4.2.4}$$

On considère la fonction F_p comme une fonction (rationnelle) de n ; k et p sont des paramètres fixes. En égalisant les résidus aux pôles sur la partie de gauche et de droite respectivement de 4.2.4, nous exprimons les coefficients B_j comme

$$B_j = Res_{(-2(k+j)-1)/2} F_p(n) = \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j-1}(j-1)!} \cdot \frac{1}{2^{p-j}(p-j)!},$$

où $j = 1, \ldots, p$.

Au *deuxième étape* du calcul, on cherche les coefficients $\{A_j(.)\}_{j=1,\ldots,p}$ avec la propriété

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p} d_{2n,2(k+j)} A_j(k) &= d_{2n,2k} \frac{1}{\prod_{j=1}^{p}(2n+2(k+j)+1)} \\ &= d_{2n,2k} \sum_{s=1}^{p} \frac{B_s}{(2n+2(k+s)+1)}. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Nous définissons la fonction $G_p(n) := G_{p,k}(n)$ comme

$$G_p(n) = \frac{1}{d_{2n,2k}} \sum_{j=0}^{p} d_{2n,2(k+j)} A_j(k). \tag{4.2.6}$$

La relation 4.2.5 se lit comme suit :

$$G_p(n) = \sum_{j=0}^{p} A_j(k) \prod_{s=1}^{j} \left(\frac{2n-2(k+s-1)}{2n+2(k+s)+1} \right). \tag{4.2.7}$$

Bien sûr,

$$\frac{2n-2(k+s-1)}{2n+2(k+s)+1} = 1 - \frac{4(k+s)-1}{2n+2(k+s)+1},$$

et donc

$$\text{LHS de 4.2.5} = \sum_{j=0}^{p} A_j \left(\prod_{s=1}^{j} \left(1 - \frac{4(k+s)-1}{(2n+2(k+s)+1)} \right) \right).$$

Comme à la première étape de la preuve du lemme, en égalisant les résidus aux pôles sur le premier et second membre de 4.2.7. Autrement dit, nous avons

$$Res_{-(2(k+j)+1)/2}\, G_p(n) \quad = \quad A_j \left\{ (-1)^j \left(\frac{4(k+j)-1}{2} \right) \prod_{s=1, s\neq j}^{j} \left(\frac{4k+2(s+j)-1}{2(s-j)} \right) \right\}$$

$$
\begin{aligned}
+ \quad \ldots \quad &+A_r\left\{(-1)^r\left(\frac{4(k+j)-1}{2}\right)\prod_{s=1,s\neq j}^{r}\left(\frac{4k+2(s+j)-1}{2(s-j)}\right)\right\}\\
+ \quad \ldots \quad &+A_p\left\{(-1)^p\left(\frac{4(k+j)-1}{2}\right)\prod_{s=1,s\neq j}^{p}\left(\frac{4k+2(s+j)-1}{2(s-j)}\right)\right\}\\
= \quad &\frac{B_j}{2},
\end{aligned}
$$

où $j=1,\ldots,p$, et $j\leq r\leq p$.

Maintenant, il est convenable de poser

$$\mathcal{A}=[A_1,A_2,\ldots,A_p]^t,\quad \mathcal{B}=[B_1,\ldots,B_p]^t,$$

et la matrice $\mathcal{C}$, d'ordre p de composants

$$\mathcal{C}_{j,r}=\begin{cases}(-1)^r(4(k+j)-1)\ \prod_{s=0,s\neq j}^{r}\left(\frac{4k+2(s+j)-1}{2(s-j)}\right) & ,\quad r\geq j,\\ 0 & ,\quad r<j.\end{cases}\tag{4.2.8}$$

Notons que la matrice $\mathcal{C}$ est triangulaire supérieure ; en particulier, on a

$$T_p(k):=\det\mathcal{C}=\prod_{j=1}^{p}\mathcal{C}_{jj}\neq 0,$$

pour k assez grand. Comme la relation 4.2.8 l'indique clairement, chaque composant $\mathcal{C}_{jj}=\mathcal{C}_{jj}(k)$ est un polynôme par rapport à k de degré $j,\ j=1,\ldots,p$. Donc, $\deg T_p=p(p+1)/2$, comme affirme le lemme.

Le système d'équations $\{A_j\}_{j=1,\ldots,p}$, voir 4.2.5, se lit comme $\mathcal{C}\cdot\mathcal{A}=\mathcal{B}$ et il faut y ajouter l'équation $A_0=-\sum_{j=1}^{p}A_j$ définissant A_0. Trivialement, nous résolvons ce système à l'aide de la règle de Cramer, *i.e.*,

$$A_j(k)=\frac{\det\mathcal{C}_{j\mathcal{B}}}{\det\mathcal{C}}=:\frac{S_{j,p}(k)}{T_p(k)},$$

où $S_j(k)=S_{j,p}(k)=\det\mathcal{C}_{j\mathcal{B}}$ est un polynôme de k, et $\mathcal{C}_{j\mathcal{B}}$ est la matrice $p\times p$ obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en remplaçant la j-ème colonne par $\mathcal{B}$. Il est facile de voir que $\deg S_j=p(p+1)/2-j$.

L'assertion (3) du lemme découle à la fois de (1) et (2). $\square$

Théorème 4.1. *On pose $\delta_0>0$ arbitraire. il existe $\varphi\in L^2([0,1],xdx)$ tel que*

1. $\varphi'\notin\ L^2([0,1])$,
2. *l'opérateur de Toeplitz T_φ (2.5.1) a symbole radial φ appartient à $\mathcal{S}_{\delta_0}$.*

Démonstration. Pour une donnée $\delta_0 > 0$, on choisit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1/(p-1) < \delta_0$. Prenons N_0 suffisamment grand pour garantir que les coefficients $(A_j(k))_{j=0,\dots,p}$ sont bien définis pour $k \geq (p+1)N_0$, voir le lemme 4.2, et notamment ses assertions (2) et (3).

Nous définissons la suite $\{a_{2k}\}_k$ en utilisant les coefficients $\{A_j(k)\}_{j=0,\dots,p}$ du lemme ci-dessus. On a $k = (p+1)s + r$, où $0 \leq r < p+1$. On pose

$$a_{2k} := A_r((p+1)s), \quad k \geq (p+1)N_0. \tag{4.2.9}$$

ou de manière équivalente, on a

$$(a_{2(p+1)s}, a_{2((p+1)s+1)}, \dots a_{2((p+1)s+p)}) \tag{4.2.10}$$

$$: \ = \begin{cases} (0,\dots,0) & , \quad s < N_0, \\ (A_0((p+1)s), A_1((p+1)s), \dots A_p((p+1)s) & , \quad s \geq N_0. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

On pose maintenant

$$\psi_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} P_{2n}(x).$$

Rappelons que ψ définit la fonction φ sur $[0,1]$ d'après 4.1.1. Nous affirmons que ψ (et donc φ) possède les propriétés énoncées dans le théorème. En effet,

$$\begin{aligned} ||\psi||^2_{L^2[0,1]} &= \frac{1}{2}||\psi_e||^2_{L^2[-1,1]} = \frac{1}{2}\sum_n |a_{2n}|^2 ||P_{2n}||^2 \\ &\leq C\sum_n \frac{2}{n^2(2n+1)} \leq C\sum_n \frac{1}{n^3} < +\infty, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé, pour $(s+1)p \leq k \leq (s+1)p + p$

$$|a_{2k}| \leq \max_{j=0,\dots,p} |A_j((p+1)s)| \leq \frac{C_2}{k},$$

voir le lemme 4.2, (3).

D'autre part, on a pour ψ'_e d'après 1.1.6

$$\begin{aligned} \psi' &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} P'_{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \left(\sum_{j=1}^{k} (4j-1) P_{2j-1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (4j-1) P_{2j-1} \left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{2k} \right). \end{aligned}$$

Par souci de simplicité d'écriture, on pose $R_j = \sum_{k=j}^{\infty} a_{2k}$. Rappelant la définition de la suite $\{a_{2k}\}_k$ 4.2.9, 4.2.10, on a

$$\sum_{k=(p+1)s}^{(p+1)s+p} a_{2k} = 0.$$

Par conséquent, pour k assez grand $k = (p+1)s + r,\ 0 \le r \le p$, on pose

$$\sum_{j=k}^{\infty} a_{2k} = \sum_{j=k}^{(p+1)s+p} a_{2k}.$$

En particulier, les propriétés énoncées dans le lemme 4.2 indiquent que

$$\sum_{j=(p+1)s+1}^{(p+1)s+p} a_{2k} = -A_0((p+1)s),$$

et donc

$$\left| \sum_{j=(p+1)s+1}^{(p+1)s+p} a_{2k} \right| = |A_0((p+1)s)| \ge \frac{C}{(p+1)s}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} ||\psi_e'||^2_{L^2[-1,1]} &= \sum_{j=1}^{\infty} (4j-1)^2 ||P_{2j-1}||^2 |R_j|^2 \\ &\ge \sum_{s=N_0+1}^{\infty} (4(p+1)s+3)^2 ||P_{2(p+1)s+1}||^2 |D_{(p+1)s+1}|^2 \\ &\ge C \sum_{s=N_0+1}^{\infty} \frac{(4(p+1)s+3)}{((p+1)s)^2} = +\infty. \end{aligned}$$

Reste à montrer que $T_\psi \in \mathcal{S}_{\delta_0}$. Pour cela, nous devons estimer $C_{2n}(\psi)$ pour n assez grand. Encore une fois, on écrit $n = (p+1)l + r,\ 0 \le r \le p$, et $l = [n/(p+1)]$. Nous continuons comme 4.1.2

$$\begin{aligned} C_{2n}(\psi) &= \sum_{k=0}^{n} d_{2n,2k} a_{2k} = \sum_{s=0}^{l-1} \left(\sum_{j=0}^{p} d_{2n,2((p+1)s+j)} a_{2((p+1)s+j)} \right) \\ &+ \sum_{j=0}^{r} d_{2n,2((p+1)l+j)} a_{2((p+1)l+j)} =: (I) + (II). \end{aligned}$$

Puisque $d_{2n,2k} \le \exp(-C\,k^2/n)$, voir 4.2.2, on obtient facilement $|(II)| \le e^{-Cn}$. Rappelant la définition de $\{a_{2k}\}_k$ 4.2.9, 4.2.10, et la relation 4.2.3 du lemme 4.2, nous arrivons à

$$\begin{aligned} (I) &= \sum_{s=0}^{l-1} \left(\sum_{j=0}^{p} d_{2n,2((p+1)s+j)} a_{2((p+1)s+j)} \right) \\ &= \sum_{s=0}^{l-1} \left(\sum_{j=0}^{p} d_{2n,2((p+1)s+j)} A_j((p+1)s) \right) \\ &= \sum_{s=0}^{[n/(p+1)]-1} d_{2n,2(p+1)s} \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(2n+2((p+1)s+j)+1)}. \end{aligned}$$

Prenons $0 < \delta' < 1/2$ un petit, et coupons la somme ci-dessus en deux morceaux : la première somme est prise pour $s = 0, \ldots, [n^{1/2+'}/(p+1)]$, et la seconde est prise pour $s = [n^{1/2+'}/(p+1)] + 1, \ldots, [n/(p+1)] - 1$. On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{s=0}^{[n^{1/2+\delta'}/(p+1)]} \cdots \right| &\leq C \sum_{s=0}^{[n^{1/2+\delta'}/(p+1)]} 1 \cdot \frac{1}{n^p} \\ &\leq \frac{n^{1/2+\delta'}}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1/2-\delta'}}, \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{s=[n^{1/2+\delta'}/(p+1)]+1}^{[n/(p+1)]-1} \cdots \right| &\leq C \sum_{s=[n^{1/2+\delta'}/(p+1)]+1}^{[n/(p+1)]-1} \frac{e^{-Cs^2/n}}{n^p} \\ &\leq C \sum_{s=[n^{1/2+\delta'}/(p+1)]+1}^{[n/(p+1)]-1} \frac{e^{-Cn^{2\delta'}}}{n^p} \leq C_\epsilon e^{-Cn^{2\delta'+\epsilon}} \end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$ petit. Par conséquent, nous obtenons

$$|C_{2n}(\psi)| \leq \frac{C}{n^{p-1/2-\delta'}}.$$

Puisque $0 < \delta' < 1/2$, cela implique que $T_\varphi \in \mathcal{S}_{1/(p-1)}$; par le choix de p nous avons $1/(p-1) < \delta_0$ et donc $T_\varphi \in \mathcal{S}_{\delta_0}$. Le théorème est prouvé. □

Quelques remarques s'imposent. Tout d'abord, en utilisant l'asymptotique des polynômes de Legendre $\{P_n\}$ [14, 4], on peut montrer que la fonction φ construite dans le théorème ci-dessus, est dans $L^\infty[0,1]$. Deuxièmement, on peut évidemment obtenir "un nombre plus important" de fonctions φ satisfaisantes les propriétés du théorème 4.1. Autrement dit, au lieu des définitions 4.2.9, 4.2.10, on peut définir les coefficients $\{a_{2k}\}_k$ comme

$$\begin{aligned} &(a_{2(p+1)s}, a_{2((p+1)s+1)}, \ldots a_{2((p+1)s+p)}) \\ :&= \begin{cases} (0, \ldots, 0) & , \quad s < N_0, \\ ((p+1)s)\,(A_0((p+1)s), A_1((p+1)s), \ldots A_p((p+1)s) & , \quad s \geq N_0, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

avec $0 \leq \delta < 2$. En effet, les calculs montrent que

$$\begin{aligned} ||\psi_e||^2_{L^2[-1,1]} &\leq C \sum_n \frac{1}{n^{3-\delta}}, \\ ||\psi_e'||^2_{L^2[-1,1]} &\geq C \sum_n \frac{1}{n^{1-2\delta}}, \\ |C_{2n}(\psi)| &\leq \frac{C}{n^{p-(1/2+\delta')(1+\delta)}}. \end{aligned}$$

Conclusion et perspectives.

Enfin, nous voulons mentionner ici plusieurs questions ouvertes liées au sujet du présent thèse. Suárez [37] a prouvé que le C^*-algèbre généré par les valeurs propres $\{c_n(\varphi)\}$ 3.1.2 des opérateurs de Toeplitz radiaux a symboles bornés φ, est dense dans C^*-algèbre des suites bornées et oscillant logarithmiquement. Étant donné une suite bornée oscillant logarithmiquement $\{\alpha_n\}$, est-il possible d'utiliser la méthode du chapitre 4 pour construire un symbole φ borné tel que $\{\alpha_n\} = \{c_n(\varphi)\}$? Il est probable que la réponse à cette dernière question soit non ; dans ce cas, peut-on décrire des suites bornées oscillant logarithmiquement venant comme des suites de valeurs propres $\{c_n(\varphi)\}$ pour un opérateur T_φ avec un symbole borné φ ? Il semble intéressant d'effectuer une analyse similaire pour les opérateurs de Toeplitz radiaux sur les espaces de Bergman pondérés $L_a^2(\mathbb{D}, dA_\alpha),\ dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA,\ \alpha > -1$. Il est possible que l'on doive utiliser des polynômes orthogonaux de Gegenbauer (ou, plus généralement, de Jacobi) au lieu des polynômes de Legendre dans la construction en chapitre 4.

Bibliographie

[1] Adams, R. Sobolev spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975 ; exists also as : Adams, R. ; Fournier, J. Sobolev spaces. Second edition. Pure and Applied Mathematics, Vol. 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] Abramowitz, M. ; Stegun, I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. U.S. Government Printing Office, Washington D.C., 1964.

[3] Ahern, P. ; Cuckovic, Z. Products of Toeplitz operators on the Bergman space. Illinois J. Math. 45 (2001), no. 1, 113-121.

[4] Arfken, G. ; Weber, H. Mathematical methods for physicists. Fifth edition. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, 2001.

[5] Axler, S. Bergman spaces and their operators, Surveys of some recent results in operator theory, I, Pitman Res. Not. Math. Ser. Vol. 171, 1988, p. 1-50.

[6] Z. Bendaoud, S. Kupin, K. Toumache, B. Touré, and R. Zarouf. Toeplitz Operators with Radial Symbols on Bergman Space and Schatten-von Neumann Classes. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2020, Vol. 16, No. 1, pp. 3-26.

[7] Böttcher A. and Grudsky S. M. Toeplitz matrices, asymptotic linear algebra, and functional analysis. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[8] Böttcher A. Silbermann B. Karlovich A. Y. Analysis of Toeplitz Operators. Springer. Springer monographs in mathematics. 2006.

[9] Brown, A. et Halmos, P. : Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 123 :89–102, 1964.

[10] Cuckovic, Z, Rao, N. Mellin transform, monomial symbols, and commuting Toeplitz operators. J. Funct. Anal. 154 (1998), no. 1, 195-214.

[11] Douglas, R. Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972.

[12] Dunham J. Fourier series and orthogonal polynomials. Dover Publications. MAA. 2004.

[13] Duren, P. : Theory of H^p spaces. A series of Monographs and Textbooks. Academic Press, London, 1970.

[14] Erdélyi, A. ; Magnus, W. ; Oberhettinger, F. ; Tricomi, F. Higher transcendental functions. Vol. II. Based on notes left by Harry Bateman. Reprint of the 1953 original. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla., 1981.

[15] Gohberg, I.C., and Krein, M.G. Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 1969.

[16] Hasi Wulan, Kehe Zhu (auth.), Mobius Invariant QK Spaces, Springer International Publishing, 2017.

[17] Hedenmalm, H. ; Korenblum, B. ; Zhu, K. Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics, 199. Springer-Verlag, New York, 2000.

[18] Hui, A. Monomials in terms of Legendre polynomials, https ://math.stackexchange.com/questions/1586202/monomials-in-terms-of-legendre-polynomials/1586525#1586525, 2015.

[19] Gabor Toth (auth.), Finite Möbius Groups, Minimal Immersions of Spheres, and Moduli, Springer-Verlag New York, 2002.

[20] Gohberg, I. ; Goldberg, S. ; Kaashoek, M. Basic classes of linear operators. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[21] Grudsky, S. ; Vasilevski, V. Bergman-Toeplitz operators : radial component influence. Integr. Eq. Oper. Theory 40 (2001), 16-33.

[22] Grudsky, S. ; Karapetyants, A. ; Vasilevski, N. Dynamics of properties of Toeplitz operators with radial symbols. Integr. Eq. Oper. Theory 50 (2004), no. 2, 217-253.

[23] Karen Saxe, Beginning functional analysis, Springer, Undergraduate texts in mathematics, ed. 1, 2002.

[24] Korenblum, B. ; Zhu, K. An application of Tauberian theorems to Toeplitz operators. J. Operator Theory 33 (1995), no. 2, 353-361.

[25] Louhichi, I. ; Zakariasy, L. On Toeplitz operators with quasi-homogeneous symbols. Arch. Math. (Basel) 85 (2005), no. 3, 248-257.

[26] Louhichi, I. ; Strouse, E. ; Zakariasy, L. Products of Toeplitz operators on the Bergman space. Integr. Eq. Oper. Theory 54 (2006), no. 4, 525-539.

[27] Louhichi, I. ; Randriamahaleo, F. ; Zakariasy, L. On the commutativity of a certain class of Toeplitz operators. Concr. Oper. 2 (2015), 1-7.

[28] Luecking, D. Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives. Amer. J. Math. 107 (1985), no. 1, 85-111.

[29] Luecking, D. Trace ideal criteria for Toeplitz operators. J. Funct. Anal. 73 (1987), no. 2, 345-368.

[30] Nikolski, N. Operators, functions, and systems : an easy reading, I, II. AMS Mathematical Surveys and Monographs, Vols. 92, 93. AMS, Providence, RI, 2002.

[31] Rudin, W. : Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 3e édition, 1987.

[32] R. Schmied, personal communication, 27/02/2005 ; see also http ://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html.

[33] Ringrose, J.R. Compact non-self-adjoint operators, Van Nostrand Reinhold Co, Van Nostrand Reinhold mathematical studies 35, 1971.

[34] Serge L. (auth.), Real and Functional Analysis, Springer-Verlag New York, Graduate Texts in Mathematics 142, 1993.

[35] Simon, B. Trace ideals and their applications. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 120. AMS, Providence, RI, 2005.

[36] Stroethoff, K. Compact Toeplitz operators on Bergman spaces. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 124 (1998), no. 1, 151-160.

[37] Suárez, D. The eigenvalues of limits of radial Toeplitz operators. Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), no. 4, 631–641.

[38] Zorboska, N. The Berezin transform and radial operators. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 3, 793-800 (electronic).

[39] Zhu, K. Operator theory in function spaces. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[40] Zhu, K. Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains. J. Operator Theory 20 (1988), no. 2, 329-357.

Résumé.

Dans la présente thèse, nous étudions les propriétés spectrales des opérateurs de Toeplitz a symboles (quasi-) radiaux sur l'espace de Bergman. Plus précisément, le problème qui nous intéresse est de comprendre quand un opérateur Toeplitz donné appartient à une classe de Schatten-von Neumann. Les méthodes de la théorie d'approximation (c'est-à-dire les polynômes de Legendre) sont utilisées pour avancer dans cette direction.

Mots clés :
Opérateurs de Toeplitz, symboles (quasi-) radiaux, espaces de Bergman, classes de Schatten-von Neumann, polynômes de Legendre.

ملخّص.

في هذه الأطروحة ندرس الخصائص الطيفية لمؤثرات طوبليتز ذات رموز (شبه) اشعاعية على فضاء برگمن. بدقة اكثر، المشكلة التي تهمنا هي ان نفهم متى ينتمي مؤثر معين لتوبليتز الى فئة شاتن فن نيومن. تستخدم طرق نضريات التقريب (كثيرات الحدود المتعامدة ل لجندر) للتقدم في هذا الاتجاه.

المفاتيح.
مؤثرات طوبليتز، الرموز (شبه) اشعاعية ، فضاءت برگمن، فئات شاتن فن نيومن، كثيرات حدود لجندر.

Abstract.

In the present thesis, we study spectral properties of Toeplitz operators with (quasi-) radial symbols on Bergman space. More precisely, the problem we are interested in is to understand when a given Toeplitz operator belongs to a Schatten-von Neumann class. The methods of the approximation theory (i.e., Legendre polynomials) are used to advance in this direction.

Key words :
Toeplitz operators, (quasi-) radial symbols, Bergman spaces, Schatten-von Neumann classes, Legendre polynomials.