

Université Mohamed Khider –Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie Mécanique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة الميكانيكية
المرجع:

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat LMD en Génie Mécanique
Spécialité (Option) : Matériaux et Structures

Intitulé

**Etude numérique de l'effet de la température sur le comportement
du flambage des plaques stratifiées en utilisant un élément fini basé
sur la théorie de troisième ordre de Reddy**

Présentée par :
Khmissi BELKAID

Soutenue publiquement le 29/05/2016

Devant le jury composé de :

Dr. HECINI Mabrouk	Professeur	Président	Université de Biskra
Dr. TATI Abdelouahab	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. BELOUNAR Lamine	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Dr. REBIAI Cherif	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Batna
Dr. CHEBBAH Said	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Biskra

Dedicated

To my Family

*My dear mother, my dear brothers Ilyes, Nassro, Redha and dear
sister Fatima and her children Joulan & Khadidja*

Remerciement

Avant tout nous remercions Allah tout puissant qui nous a donné la bonne santé et le courage, la volonté et la force pour accomplir ce présent travail, merci de nous avoir éclairé le chemin de la réussite.

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse le professeur **TATI Abdelouahab** pour son encadrement scientifique très riche et le suivi efficace et dynamique, son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je désire aussi adresser mes remerciements les plus respectueux aux membres de jury, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail. Sincère remerciement à Monsieur HECINI Mabrouk, Professeur à l'Université de Biskra, d'avoir accepté de présider le jury. Je tiens à exprimer ma gratitude aux messieurs, Monsieur BELOUNAR Lamine, Professeur à l'Université de Biskra, Monsieur CHEBBAH Said, Docteur à l'Université de Biskra, Monsieur REBIAI Cherif, Docteur à l'Université de Batna, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements à la famille du département de Génie Mécanique de l'Université de Biskra, et les membres des laboratoires LGEM et LGM.

Je tiens à remercier aussi mes chers amis les Docteurs OUNIS Houdayfa et BELARBI Mohamed Ouejdi pour leurs soutiens moral et scientifique.

Nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés ne serait-ce qu'avec un mot d'encouragement.

المخلص

أصبحت المواد المركبة متعددة الطبقات مستخدمة على نطاق واسع في عديد من التطبيقات الصناعية بحيث تستلزم أدوات نمذجة دقيقة مثل طريقة العناصر المحدودة وايضا نظريات تستطيع ان تقدم تعبير جيد لمحاكاتهم من اجل فهم سلوكياتهم الميكانيكية، لا سيما الانحناء والاستقرار (الانبعاج).

في هذه الأطروحة، تم تطوير نموذجين جديدين من العناصر المحدودة (2ابعاد) قادرة على تحليل سلوك الانحناء والانبعاج للوحات موحدة الخواص و المركبة لعدة طبقات ، بما في ذلك الاخذ بعين الاعتبار التغير التريبي للقص العرضي على طول سمك اللوحة، من خلال اعتماد اتباع نهج أحادي الطبقة المعادلة استنادا إلى نظرية الدرجة الثالثة لتشو القص لريدي.

النموذج الاول هو عبارة عن عنصر محدود رباعي ذو اربع عقد من نوع لاغرانج ايزوبارامترك و الذي يلزم الدرجة الاولى للمشتق في تشكيلة النظرية مما يسهل في الحسابات. يحتوي هذا العنصر على سبع درجات حرية في كل عقدة، ثلاثة انتقال و اثنين دوران واثنين دوران من درجة عالية. تم استخدام تقنية التكامل العددي لنقاط غاوس الانتقائي والمقللة من اجل نتائج دقيقة وفعالية اكثر للنموذج خاصة عند الصفيحة الرقيقة، النموذج استطاع تخفيف و تجاوز ظاهرة القفل للقص العرضي.

النموذج الثاني هو عبارة ايضا عن عنصر محدود رباعي ذو اربع عقد من نوع لاغرانج ايزوبارامترك مقل في درجات الحرية والذي يلزم الدرجة الثانية للمشتق، يحتوي هذا العنصر سوى خمس درجات حرية في كل عقدة، ثلاثة انتقال و اثنين دوران. سبق ان ذكر في الادب ان هذا النوع من الصيغ المطبقة على العناصر المحدودة المستندة على نظرية الدرجة الثالثة لتشو القصي لريدي والذي يلزم استعمال المشتق الثاني على انها ليست مناسبة لأسباب قد تكون عددية، لهذا قمنا باضافة دالة متعلقة بنسبة طول وسمك الصفيحة الى صيغة العنصر من اجل تحسين فعالية النموذج في تحليل سلوكيات الانحناء والاستقرار (الانبعاج) للوحات موحدة الخواص و المركبة لعدة طبقات.

وفي الأخير، تمت مقارنة نتائج النماذج المقترحة مع تلك التي تم الحصول عليها تحليليا لنظريات ثلاثية الأبعاد و نماذج عددية مماثلة المتاحة في الأدب. بالإضافة إلى ذلك، اجريت دراسة بارومترية على السلوك الميكانيكي للانطواء للوحات المركبة لعدة طبقات مع تأثير تغير درجة الحرارة المتعلقة بخصائص المرونة للمادة في اتخاذ توزيعات مختلفة لدرجة الحرارة (ثابتة، على طول المحور س و ع).

الكلمات المفتاحية:

العناصر المتناهية، نظرية الدرجة الثالثة لريدي، لوحات المركبة لعدة طبقات، الانبعاج، الانحناء، تأثير درجة الحرارة على الخصائص

Abstract

The multilayer composite materials have become enormously used in several industrial fields, namely: aerospace, automotive, naval construction and civil engineering. The use of such materials requires extensive studies to understand better their behaviour. For this purpose, it is essential to develop efficient numerical modeling tools, such as the finite element method, which has shown to be a very robust numerical tool in the last decades

Using the finite element method in the study of the behaviour of composite structures induces the development of theories that can accurately represent the static, dynamic and stability behaviours of those types of structures.

In this thesis, two new finite element models (2D) have been developed (TSQ28, TSQ20) based on the theory of Reddy third-order shear deformation (TSDT). Based on the approach of the equivalent single layer, both models are intended for bending behaviour analysis and buckling of the laminated isotropic and composite plates.

TSQ28 is a quadrilateral Lagrangian isoparametric C^0 finite element, with four nodes and seven degrees of freedom per node. The element, contain five physical degrees of freedom (three displacement and two rotations) and two higher-order rotations. The reduced numerical integration technique was used to avoid any locking phenomena in transverse shear in the case of thin plates.

The finite element (TSQ20) is the modified version of (TSQ28) model, which is obtained by reducing the number of degrees of freedom to five, namely: three movements and two rotations. This reduction leads to complex calculations invoking second derivatives of the transverse component. Furthermore, in order to improve the calculation of the displacements and the nodal rotations, a correction function in terms of the length/thickness plate ratio (a/h) has been proposed.

Finally, the results obtained by the proposed finite elements models were compared to analytical and numerical solutions obtained by similar models available in the literature. On the other hand, a parametric study of the effect of temperature on the mechanical behaviour of the buckling of the laminated composite plates was considered. In this study, the temperature-dependent-materials with different temperature distributions across the plate were considered.

Keywords:

Finite element, Reddy's third order theory, Laminated composite plate, Buckling, Bending, Effect of temperature dependent properties.

Résumé

Les matériaux composites multicouches sont devenus très utilisés dans plusieurs domaines industriels, en l'occurrence: l'aéronautique, l'automobile, les constructions navals et le génie civil. L'utilisation de ce type de matériaux nécessite des études approfondis afin de mieux comprendre leur comportement. A cet effet, il est indispensable de mettre en place des outils de modélisations numériques performants, tel que, la méthode des éléments finis, où dans les dernière décennies elle s'est montrée comme étant un outil numérique très robuste.

L'utilisation de la méthode des éléments finis dans l'étude du comportement des structures en matériaux composites induit le développement de théories capable de représenter au mieux et d'une manière précise le comportement mécanique statique, dynamique et de stabilité de ce type de structures.

Dans ce travail de thèse, deux nouveaux modèles éléments finis (2D) ont été développés (TSQ28, TSQ20) en se basant sur la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy (TSDT) en adoptant l'approche de la monocouche équivalente, ces deux modèles sont destinés à l'analyse du comportement de flexion et de flambage des plaques isotrope et composites stratifiées.

L'élément fini (TSQ28) est un quadrilatère C^0 de type Lagrange isoparamétrique de quatre nœuds et à sept degrés de libertés par nœud. Ce dernier, ce manifeste par cinq degrés de liberté physique (trois déplacements et deux rotations) et deux rotations d'ordre supérieur. D'autre part, une intégration numérique réduite a été utilisée pour éviter un éventuel verrouillage en cisaillement transversal dans le cas des plaques minces.

L'élément fini (TSQ20) représente une version modifiée du modèle (TSQ28), qui consiste à réduire le nombre de degrés de liberté à cinq, à savoir: trois déplacements et deux rotations. Cette réduction a conduit à des calculs complexes invoquant des dérivées secondes de la composante transversale (C_1 .) Par ailleurs, afin d'améliorer le calcul des déplacements, une fonction de correction en termes du rapport longueur-épaisseur de la plaque (a/h) a été proposée.

Finalement, les résultats obtenus par les modèles éléments fini développés ont été comparés à ceux obtenus analytiquement et ceux obtenus numériquement par des modèles de même ordre, disponible dans la littérature. D'autre part, une étude paramétrique de l'effet de la température sur le comportement du flambage mécanique des plaques composites stratifiées a été entreprise. Dans cette étude, la dépendance des propriétés mécaniques de la température avec différentes distributions de température à travers la plaque ont été considérées.

Mots-Clés : Elément finis, Théorie de troisième ordre de Reddy, Plaque composite stratifiée, Flambage, Flexion, Effet de la température dépendante aux propriétés.

Table des matières

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	xii
Notations	xvi
Introduction générale	1

Partie 1 : Etude Bibliographique

Chapitre 1

1 Synthèse bibliographique sur les théories aux éléments finis des plaques composite stratifiées	6
1.1 Introduction	7
1.2 Modèles théoriques de plaques multicouches	9
1.2.1 Approche monocouche équivalente	10
1.2.2 Approche par couche	22
1.3 Modèles élément finis des plaques multicouches	25
1.3.1 Modèles éléments finis basés sur la théorie du premier ordre [FSDT]	26
1.3.2 Modèles éléments finis basés sur les théories d'ordre supérieur [HSDT]	28
1.4 Revue des travaux antérieurs sur le comportement du flambage des plaques multicouches	35
1.5 Conclusion	37

Partie 2 : Développement des nouveaux modèles d'éléments finis sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy

Chapitre 2

2 Proposition d'un nouveau modèle d'élément fini (TSQ28) basé sur la théorie de troisième ordre de Reddy pour l'analyse des plaques composites stratifiées	40
2.1 Introduction	41
2.2 La théorie de déformation en cisaillement de troisième ordre de Reddy	42
2.2.1 Cinématique	42
2.2.2 Loi de comportement du stratifié	43
2.2.3 Principe des travaux virtuels	45
2.3 Formulation du modèle d'élément fini (TSQ28)	49

2.3.1	Approximation nodale	49
2.3.2	Relations entre les déformations et déplacement nodaux	50
2.3.3	Les dérivées des fonctions d'interpolations géométriques	53
2.4	Calcul de contraintes à partir les équations constitutives	59
2.5	Conclusion	59

Chapitre 3

3 Validation numérique du modèle d'élément fini de plaque stratifiée (TSQ28) 61

3.1	Introduction	62
3.2	Validation numérique de l'élément (TSQ28) en flexion	62
3.2.1	Conditions aux limites adoptées et propriétés des matériaux utilisé	62
3.2.2	Test maillage de convergence	63
3.2.3	Exemples numériques	66
3.3	Plaque composite stratifiée biaise simplement appuyée [0/90/0]	85
3.4	Validation numérique sur le comportement du flambage des plaques stratifiées	87
3.4.1	Conditions aux limites adoptées et propriétés des matériaux utilisés	87
3.4.2	Test maillage de convergence	88
3.4.3	Exemples numériques	90
3.5	Plaque composite stratifiée biaise simplement appuyée [90/0/0/90]	101
3.6	Effet du non homogénéité des propriétés élastique sur le comportement du flambage	102
3.7	Conclusion	104

Chapitre 4

4 Modification de l'élément (TSQ28) de 28 ddl en un élément de 20 ddl (TSQ20) 105

4.1	Elaboration de l'élément fini (TSQ20)	106
4.1.1	Approximation nodale	106
4.1.2	Relations entre les déformations et déplacements nodaux	107
4.1.3	Les dérivées des fonctions d'interpolations géométriques	109
4.2	Conclusion	120

Chapitre 5

5 Validation numérique du modèle d'élément fini de plaque stratifiée (TSQ20) 121

5.1	Introduction	122
5.2	Validation numérique de l'élément (TSQ20) en flexion	122
5.2.1	Conditions aux limites adoptées et matériaux	122
5.2.2	Test de validation de l'élément proposé TSQ20	123
5.2.3	Proposition à améliorer la formulation de l'élément TSQ20	128
5.2.4	Test de validation de TSQ20 avec la fonction proposée	130
5.3	Plaque composite stratifiée biaise simplement appuyée [0/90/0]	145

5.4	Validation de l'élément TSQ20 sur le comportement de flambage des plaques stratifiées	146
5.4.1	Conditions aux limites adoptées et matériaux	146
5.4.2	Test de maillage de convergence	147
5.4.3	Exemples numériques	148
5.5	Plaque composite stratifiée biaise simplement appuyée [90/0/0/90]	156
5.6	Etude comparative entre les éléments développés (TSQ28, TSQ20)	157
5.7	Conclusion	161

Partie 3 : Etude Paramétrique

Chapitre 6

6	<i>Etude de l'effet de la température sur le comportement du flambage des plaques composites stratifiées dont les caractéristiques sont thermo-dépendante</i>	163
6.1	Introduction	164
6.2	Les équations constitutives en fonction de la Température	165
6.2.1	Cas de la distribution linéaire de la température dépendante le long de l'axe x	165
6.2.2	Cas de la distribution linéaire de la température dépendante le long de l'axe y	166
6.2.3	Cas de la température dépendante uniforme	167
6.3	L'effet de la température sur le comportement du flambage des plaques cross-ply (0/90..)	168
6.3.1	Résultats et discussion	168
6.4	Variation de l'orientation des fibres avec l'effet de la température sur le comportement du flambage	171
6.4.1	Résultats et discussion	171
6.5	Plaque stratifiées minces avec l'effet de la température	175
6.5.1	Résultats et discussion	175
6.6	Analyse et discussion	177
6.7	Conclusion	180
	<i>Conclusion Générale et Perspectives</i>	182
	<i>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</i>	185

Liste des figures

Chapitre 1

Figure 1-1 Structure multicouche de plaque composite [3] _____	7
Figure 1-2 Description d'un matériau composite fibreux (matrice, fibre) [4] _____	8
Figure 1-3 Les classes de base de l'analyse de matériaux composites [1] _____	9
Figure 1-4 Description de la déformation linéaire et non linéaire de la section des approches (ESL) et (LW) [4] _____	10
Figure 1-5. Cinématique de la théorie classique des plaques Kirhhoff-Love[1] _____	11
Figure 1-6 Cinématique de la théorie de premier ordre des plaques Reissner-Mindlin [1] _	12
Figure 1-7 Description de la distribution constante de déformation et contrainte à partir de la théorie du premier ordre [FSDT] [4] _____	13
Figure 1-8 Cinématique des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur des plaques (HSDT) [34] _____	15
Figure 1-9 Description de la distribution quadratique de déformation et contrainte à partir de la théorie de Reddy[TSDT] [4] _____	18
Figure 1-10 Description au principe l'approche par couche [3] _____	23
Figure 1-11 Champ de déplacement des modèles Zig-Zag [73] _____	23
Figure 1-12 Champ de déplacement du modèle couches discrètes [73] _____	24
Figure 1-13 Description de l'élément à 16 nœuds de Sheikh et al [113] _____	28
Figure 1-14 Élément fini isoparamétrique quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds _____	29
Figure 1-15 Description de l'élément triangulaire à six nœuds [132] _____	30
Figure 1-16 Description de l'élément triangulaire à trois nœuds de Raghuram [135] _____	31
Figure 1-17 Les éléments finis de REN basés sur les théories de Reddy _____	33
Figure 1-18 Description de l'élément triangulaire de 6 nœuds avant la transformation géométrique et après [145] _____	34
Figure 1-19 Description de l'élément à 13 nœuds [150] _____	35

Chapitre 2

Figure 2-1 La géométrie et système des coordonnées de la plaque composite stratifiée _____	44
Figure 2-2 Description de l'élément TSQ28 isoparamétrique normalisé _____	50

Chapitre 3

Figure 3-1 Maillage régulier de la plaque rectangulaire de $m \times n$ _____	62
Figure 3-2 Description des degrés de liberté selon le repère (x,y,z) _____	63
Figure 3-3 La convergence de la flèche du présent élément finit (TSQ28) d'une plaque carrée stratifiée $(0/90/90/0)$, rapport $a/h = 10$ et 100 . _____	65
Figure 3-4 La convergence de la flèche du présent élément finit (TSQ28) d'une plaque isotrope carrée, rapport $a/h = 10$ et 100 . _____	66
Figure 3-5 Description de la structure stratifiée de quatre couches (cross/ply) _____	68
Figure 3-6 Variation de la flèche centrale adimensionnelle d'une plaque stratifié symétrique $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ en fonction du rapport a/h _____	69

Figure 3-7 La distribution de la contrainte normale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale du rapport $a/h = 10$	70
Figure 3-8 La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$	70
Figure 3-9. La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale de rapport $a/h=10$	71
Figure 3-10 La distribution de la contrainte transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale $a/h= 10$	72
Figure 3-11 La distribution de la contrainte transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale $a/h = 10$	72
Figure 3-12 La distribution de la contrainte normal σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale $a/h = 4$	73
Figure 3-13 La distribution de la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale $a/h = 4$	73
Figure 3-14 La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale $a/h = 4$	74
Figure 3-15 La distribution de la contrainte transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale $a/h = 4$	74
Figure 3-16 La distribution de la contrainte normal σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale $a/h = 4$	75
Figure 3-17 Description de la structure stratifiée de trois couches (cross/ply)	75
Figure 3-18 La distribution de la contrainte normal σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$	78
Figure 3-19 La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$	78
Figure 3-20 La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$	79
Figure 3-21 La distribution de la contrainte transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$	79
Figure 3-22 La distribution de la contrainte transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$	80
Figure 3-23 La distribution de la contrainte normal σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$	80
Figure 3-24 La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$	81
Figure 3-25 La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$	81
Figure 3-26 La distribution de la contrainte transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$	82
Figure 3-27 La distribution de la contrainte transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$	82
Figure 3-28 Plaque biaise simplement appuyée du maillage de $m \times n$	86

Figure 3-29 Description des plaques stratifiées soumises à un chargement uniaxial et biaxial du flambage _____	88
Figure 3-30 La convergence de la charge critique uniaxial du flambage du présent élément finit (TSQ28) dans différents maillage d'une plaque carrée isotrope du rapport $a/h = 5, 10, 100$. _____	89
Figure 3-31 La convergence de la charge critique uniaxial du flambage du présent élément finit (TSQ28) pour différents maillage d'une plaque carrée stratifiée (0/90/90/0) de rapport $a/h = 5, 10$ et 100. _____	90
Figure 3-32 L'effet de l'orthotropie E_1/E_2 sur le comportement de flambage des plaques stratifiées cross-ply _____	92
Figure 3-33 La charge critique adimensionnelle en fonction de ratio a/b en différents rapport d'orthotropie E_1/E_2 de la plaques stratifiée (0/90/90/0) _____	95
Figure 3-34 Effet du ratio (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe x d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) avec la variation du rapport d'aspect d'orthotropie ____	96
Figure 3-35 Effet du rapport d'orthotropie sur la charge critique biaxial d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) en différents ration a/h . _____	99

Chapitre 4

Figure 4-1 Description de l'élément TSQ20 isoparamétrique normalisé _____	107
--	-----

Chapitre 5

Figure 5-1 Description des degrés de liberté de (TSQ20) selon le repère (x, y, z) _____	122
Figure 5-2 La distribution des contraintes transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0) _____	124
Figure 5-3 la distribution des contraintes transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0) _____	124
Figure 5-4 la distribution des contraintes transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0) _____	125
Figure 5-5 la distribution des contraintes transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0) _____	125
Figure 5-6 la distribution des contraintes transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/0) _____	126
Figure 5-7 la distribution des contraintes transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/0) _____	127
Figure 5-8 la distribution des contraintes transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/0) _____	127
Figure 5-9 La distribution des contraintes transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/0) _____	128
Figure 5-10 Représentation de la fonction proposée en termes de rapport a/h _____	129
Figure 5-11 La flèche centrale adimensionnelle d'une plaque stratifiée symétrique (0°/90°/90°/0°) en fonction du rapport a/h _____	136
Figure 5-12 La distribution de la contrainte normal σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$	137
Figure 5-13 La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$	137

- Figure 5-14.** La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur charge une sinusoidale de rapport $a/h = 10$ 138
- Figure 5-15** La distribution de la contrainte normal σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoidale de rapport $a/h = 10$ __ 141
- Figure 5-16** La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoidale de rapport $a/h = 10$ __ 141
- Figure 5-17** La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoidale de rapport $a/h = 10$ __ 142

Chapitre 6

- Figure 6-1** Description de la distribution linéaire de la température le long de l'axe x sur la plaque stratifiée _____ 166
- Figure 6-2** Description de la distribution linéaire de la température le long de l'axe y sur la plaque stratifiée _____ 167
- Figure 6-3** Description de la répartition uniforme de la température sur toute la plaque stratifiée _____ 168
- Figure 6-4** Les charges critiques du flambage d'une plaque stratifiée carrée [0/90/0] de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température _____ 169
- Figure 6-5** Les charges critiques du flambage d'une plaque stratifiée carrée [0/90/0/90/0] de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température _____ 170
- Figure 6-6** Les charges critiques du flambage d'une plaque stratifiée carrée [0/90/0/90/0/90/0/90/0] de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température __ 170
- Figure 6-7** Les charges critique normalisée du flambage des plaques composites stratifiées carrées de trois, cinq et neuf couches symétrique cross-ply de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température _____ 171
- Figure 6-8** La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [30/-30]₃ de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température _____ 172
- Figure 6-9** La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [45/-45]₃ de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température _____ 172
- Figure 6-10** La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [60/-60]₃ de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température _____ 173
- Figure 6-11** La charge critique normalisée du flambage de différentes plaques composites stratifiées carrées de ratio $a/h=10$ sous un effet constant de température _____ 173
- Figure 6-12** La charge critique normalisée du flambage de différentes plaques composites stratifiées carrées de ratio $a/h=10$ sous un champ de l'effet de température $T(y)$ _____ 174
- Figure 6-13** La charge critique normalisée du flambage de différentes plaques composites stratifiées carrées de ratio $a/h=10$ sous un champ de l'effet de température $T(x)$ _____ 175
- Figure 6-14** La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [0/90/0] de ratio $a/h=100$ sous différents effets de champ de température _____ 176
- Figure 6-15** La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [45/-45]₃ de ratio $a/h=100$ sous différents effets de champ de température _____ 176
- Figure 6-16** La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [30/-30]₃ de ratio $a/h=100$ sous différents effets de champ de température _____ 177
- Figure 6-17** La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [60/-60]₃ de ratio $a/h=100$ sous différents effets de champ de température _____ 177
- Figure 6-18** La charge critique normalisée du flambage de la plaque carrées [45/-45]₃ de ratio $a/h=10,100$ en différents champ de température _____ 178

Figure 6-19 La charge critique normalisée du flambage de la plaque carrées [60/-60]₃ de ratio a/h=10,100 en différents champ de température _____ 179

Figure 6-20 La charge critique normalisée du flambage de la plaque carrées [30/-30]₃ de ratio a/h=10,100 en différents champ de température _____ 179

Figure 6-21 La charge critique normalisée du flambage de la plaque carrées [0/90/0]₃ de ratio a/h=10,100 en différents champ de température _____ 180

Liste des tableaux

Chapitre 1

Tableau 1-1 Différents modèles de champ de déplacement similaire de la théorie de Reddy(1984)	19
--	----

Chapitre 3

Tableau 3-1 Test de convergence de la flèche d'une plaque stratifiée simplement appuyée symétrique ($0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$) sous une charge transversale sinusoïdale	64
Tableau 3-2 Test de convergence de la flèche d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée sous un chargement uniforme.	65
Tableau 3-3 La flèche maximale et contrainte de cisaillement transversal d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée	67
Tableau 3-4 La flèche adimensionnels et contraintes d'une plaque stratifiée carrée ($0/90/90/0$) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal	68
Tableau 3-5 la flèche centrale adimensionnel d'une plaque stratifiée carrée ($0/90/0$) sous un chargement uniforme	76
Tableau 3-6 la flèche adimensionnelles et contraintes d'une plaque stratifiée carrée ($0/90/0$) sous un chargement sinusoïdal	76
Tableau 3-7 Adimensionnel de la flèche et contraintes d'une plaque stratifiée carrée ($0/90/0$) sous un chargement sinusoïdal ($b/a=3$)	83
Tableau 3-8 La flèche adimensionnel d'une plaque stratifiée carrée ($45^\circ/-45^\circ$) _n simplement appuyée sous un chargement uniforme	84
Tableau 3-9 la déflexion adimensionnel et les contraintes d'une plaque stratifiée carrée ($45^\circ / -45^\circ$) ₄ simplement appuyé sous un chargement sinusoïdal	85
Tableau 3-10 la flèche adimensionnelle et contraintes normales au centre d'une plaque composite stratifiée biaise ($0/90/0$) simplement appuyée sous un chargement uniforme	86
Tableau 3-11 Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = N_{cr} a^2 / \pi^2 D$ d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée sous un chargement uniaxial $\nu = 0.3$	88
Tableau 3-12 Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [$0/90/90/0$] simplement appuyée	90
Tableau 3-13 Adimensionnelle de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [$0/90$] simplement appuyée	91
Tableau 3-14 L'effet du rapport d'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque carrée cross-ply ($a/h=10$)	92
Tableau 3-15 L'effet de l'orthotropie sur la charge critique biaxial de flambage $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque stratifiée ($0/90/0$) du ratio $a/h=10$	93
Tableau 3-16 Effet de la variation d'aspect ratio (a/b) sur la charge critique uniaxial de flambage des plaques ($0/90/90/0$)	93

Tableau 3-17 Effet de l'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage de la plaque (0/90/90/0) de ratio $a/h=10$ avec la variation d'aspect ratio (a/b)	94
Tableau 3-18 Effet du ratio (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe x d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) en différents rapport d'aspect d'orthotropie	96
Tableau 3-19 Effet du ratio (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe y d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) dans différents rapport d'orthotropie	97
Tableau 3-20 Effet du ratio (a/h) sur la charge critique biaxial du flambage d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) avec la variation du rapport d'aspect d'orthotropie	98
Tableau 3-21 Adimensionnelle de la charge critique de flambage $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply [45/-45] ₃ simplement appuyée	99
Tableau 3-22 Adimensionnel de la charge critique de flambage $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply [45/-45] _n	100
Tableau 3-23 Adimensionnelle de la charge critique de flambage $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply [45/-45/-45/45]	101
Tableau 3-24 Effet du rapport a/h sur la charge critique d'une plaque stratifiée carrée [0/45/-45/90] simplement appuyée	101
Tableau 3-25 La charge critique uniaxial $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque composite stratifiée biaise [90/0/0/90] simplement appuyée.	102
Tableau 3-26 L'effet de non homogénéité ζ sur la charge critique uniaxial du flambage des plaques carrées stratifiées cross-ply simplement appuyées dans différent rapport orthotropie et ratio $a/h = 10$	103

Chapitre 5

Tableau 5-1 La flèche adimensionnel et contraintes d'une plaque carrée stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal	123
Tableau 5-2 La flèche adimensionnel et contraintes d'une plaque carrée stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal	126
Tableau 5-3 La flèche adimensionnelle et contraintes normales d'une plaque carrée stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal.	130
Tableau 5-4 La flèche adimensionnelle et contraintes normales d'une plaque carrée stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal	131
Tableau 5-5 l'erreur relative de la flèche et contraintes normales de la plaque (0/90/90/0) avant et après utiliser la fonction	131
Tableau 5-6 l'erreur relative de la flèche et contraintes normales de la plaque (0/90/0) avant et après utiliser la fonction	132
Tableau 5-7 Test de convergence de la flèche d'une plaque stratifiée simplement appuyée symétrique (0° / 90° / 90° / 0°) sous une charge transversale sinusoïdale	133
Tableau 5-8 Test de convergence de la flèche d'une plaque stratifiée simplement appuyée symétrique (0° / 90° / 0°) sous une charge transversale sinusoïdale	134
Tableau 5-9 La flèche maximale $w = w.Dh.q$ d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée ($\nu = 0.3$)	134
Tableau 5-10 La flèche adimensionnels et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal	135

Tableau 5-11 Adimensionnelle de la flèche centrale d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement uniforme _____	139
Tableau 5-12 Adimensionnelle de la flèche centrale et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal _____	139
Tableau 5-13 Adimensionnelle de la flèche et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal ($b/a=3$) _____	142
Tableau 5-14 La flèche adimensionnelle d'une plaque stratifiée carrée ($45^\circ / -45^\circ$) _n simplement appuyée SS2 sous un chargement uniforme _____	144
Tableau 5-15 La déflexion adimensionnelle et les contraintes d'une plaque stratifiée carrée ($45^\circ/-45^\circ$) ₄ simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal _____	144
Tableau 5-16 la flèche adimensionnelle et contraintes normales d'une plaque composite stratifiée biaise (0/90/0) simplement appuyée sous un chargement uniforme _____	145
Tableau 5-17 Test de convergence de la charge critique $N_{cr} = N_{cr}a^2/\pi^2D$ d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée sous un chargement uniaxial $\nu = 0.3$ _____	147
Tableau 5-18 Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = N_{cr}a^2/E_2h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée _____	148
Tableau 5-19 Adimensionnelle de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = N_{cr}a^2/E_2h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [0/90] simplement appuyée _____	149
Tableau 5-20 L'effet de ratio d'orthotropie E_1/E_2 sur la charge critique uniaxial $N_{cr} = N_{cr}a^2/E_2h^3$, des plaques stratifiées cross-ply ($a/h=10$) _____	149
Tableau 5-21 L'effet de l'orthotropie sur la charge critique biaxial de flambage $N_{cr} = N_{cr}a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée (0/90/0)(SS1) de ratio $a/h=10$ _____	150
Tableau 5-22 Effet de la variation du rapport (a/b) sur la charge critique uniaxial de flambage des plaques (0/90/90/0) _____	151
Tableau 5-23 Effet de l'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage des plaques (0/90/90/0) du rapport $a/h=10$ dans différents rapport d'aspect (a/b) _____	151
Tableau 5-24 Effet du rapport (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe x d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) pour différents rapport d'aspect d'orthotropie _____	152
Tableau 5-25 Effet du rapport (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe y d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) dans différents rapport d'aspect d'orthotropie _____	153
Tableau 5-26 Effet du rapport (a/h) sur la charge critique biaxial de flambage d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) dans différents rapport d'aspect d'orthotropie. _____	154
Tableau 5-27 Adimensionnelle de la charge critique uniaxial de flambage $N_{cr} = N_{cr}a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply [45/-45] ₃ simplement appuyée _____	155
Tableau 5-28 Adimensionnelle de la charge critique de flambage $N_{cr} = N_{cr}a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply [45/-45] _n simplement appuyée _____	155
Tableau 5-29 Adimensionnelle de la charge critique de flambage $N_{cr} = N_{cr}a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply [45/-45/-45/45] _____	156
Tableau 5-30 Effet du rapport a/h sur la charge critique d'une plaque stratifiée carrée [0/45/-45/90] simplement appuyée _____	156
Tableau 5-31 La charge critique uniaxial $N_{cr} = N_{cr}a^2/E_2h^3$ d'une plaque composite stratifiée biaise [90/0/0/90] simplement appuyée. _____	157
Tableau 5-32 Les erreurs relatives des éléments développés de la flèche centrale et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal _____	159

Tableau 5-33 Les erreurs relatives des éléments développés sur la charge critique uniaxial suivant $N_{cr} = N_{cr} a^2 / E^2 h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée _____ 160

Notations

x, y, z	Coordonnées cartésienne
$1, 2, 3$	Axes locale de couche
ξ, η	Coordonnées intrinsèques
u_1, u_2, u_3	Composantes du vecteur de déplacements
u, v, w	Déplacements au plan médian de la plaque
ψ_x, ψ_y	Rotations autour des axes y et x respectivement
θ_x, θ_y	Rotations d'ordres supérieurs autour des axes y et x respectivement
h	Epaisseur de la plaque
h_k	Epaisseur de couche
i, j, k	Indices latins prennent des valeurs naturelles
E_{ij}	Déformations associées de l'expression Green-Lagrange
ε_{ij}	Déformations associées de l'expression Von Karman
ε_i^0	Termes de déformations membranaires
κ_i^0	Termes de déformations flexionnelles
κ_i^2	Termes de déformations flexionnelles d'ordres supérieurs
$\varepsilon_4^0, \varepsilon_5^0$	Termes de déformations de cisaillement transverse
κ_4^2, κ_5^2	Termes de déformations de cisaillement transverse d'ordre supérieur
$\bar{\sigma}_i$	Contraintes selon les axes locaux 1, 2 et 3 de la couche
$\bar{\varepsilon}_i$	Déformations selon les axes locaux 1, 2 et 3 de la couche
C_{ij}	Coefficients de rigidité
E_1, E_2, E_3	Modules d'Young dans les directions d'orthotropie 1, 2 et 3
G_{12}, G_{13}, G_{23}	Modules de cisaillement dans les plans 1-2, 1-3 et 2-3
$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	Coefficients de Poisson
$[\bar{C}]$	Matrice de coefficients de rigidité transformées au repère global x, y et z
$[T]$	Matrice de transformation
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$	Contraintes transformées au repère global x, y et z
σ_{yz}, σ_{xz}	
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$	Déformations transformées au repère global x, y et z
γ_{yz}, γ_{xz}	
δU	Travail virtuel de déformation
δV	Travail virtuel effectué par les forces appliquées
q	Charge répartie
δW	Déplacement virtuel
N_i	Effort résultants membranaire
M_i	Effort résultants flexionnel
P_i	Effort résultants flexionnel et de torsion de troisième ordre
Q_1, Q_2	Effort résultants de cisaillement
R_1, R_2	Effort résultants de cisaillement de second ordre
ε_{NL}^0	Vecteur des parties de grand déplacement
$\{N\}$	Vecteur des efforts résultants membranaire
$[B], [D], [E],$	Matrices de couplage concernent la rigidité du matériau
$[F], [G],$	
$[H], [A^s], [D^s], [F^s]$	

k	<i>Nombre de couche</i>
ε^0	<i>Vecteur de déformations membranaires</i>
κ^0	<i>Vecteur de déformations flexionnelles</i>
κ^2	<i>Vecteur de déformations flexionnelles d'ordres supérieurs</i>
γ^s ,	<i>Vecteur de déformations de cisaillement transverse</i>
κ^s	<i>Vecteur de déformations de cisaillement transverse d'ordre supérieur</i>
\bar{N}_i	<i>Fonctions d'interpolation des degrés de liberté</i>
N_i	<i>Fonctions d'interpolation des coordonnées</i>
$\{\delta\}$	<i>Vecteur des degrés de liberté élémentaire</i>
$[B_\varepsilon^0]$	<i>Matrice de déformation membranaire élémentaire</i>
$[B_\kappa^0]$	<i>Matrice de déformation flexionnelle élémentaire</i>
$[B_\kappa^2]$	<i>Matrice de déformation flexionnelle d'ordre supérieur</i>
$[B_\varepsilon^s]$	<i>Matrice de déformation de cisaillement transverse élémentaire</i>
$[B_\kappa^s]$	<i>Matrice de déformation de cisaillement transverse d'ordre supérieur élémentaire</i>
$[J]$	<i>Matrice jacobéenne</i>
$[G]$	<i>Matrice élémentaire concerne la partie des grand déplacements</i>
$[N_0]$	<i>Matrice des efforts membranaires</i>
$\{N_f\}$	<i>Vecteur élémentaire des fonctions de forme de déplacement</i>
$[K]_e$	<i>Matrice de rigidité élémentaire</i>
$[K_g]_e$	<i>Matrice géométrique élémentaire</i>
$\{F\}_e$	<i>Vecteur force élémentaire</i>
$[K]$	<i>Matrice de rigidité globale</i>
$[K_g^0]$	<i>Matrice géométrique globale</i>
λ	<i>Valeurs propre normalisées</i>
N_0	<i>Charge répartie uniaxial</i>
N_{cr}	<i>Charge critique de flambement</i>
T	<i>Fonction de Température</i>
T_0	<i>Température</i>
\bar{x}, \bar{y}	<i>Dimensions normalisées</i>
β	<i>Pente de module d'élasticité en fonction de Température</i>
E_{11}	<i>Pente de module de Young suivant x en fonction de Température</i>
E_{21}	<i>Pente de module de Young suivant y en fonction de Température</i>
G_{121}	<i>Pente de module de cisaillement dans les plans1-2 en fonction de Température</i>
G_{131}	<i>Pente de module de cisaillement dans les plans1-3 en fonction de Température</i>
G_{231}	<i>Pente de module de cisaillement dans les plans2-3 en fonction de Température</i>
$\bar{\theta}$	<i>Angle d'orientation des fibres</i>

Introduction Générale

De nos jours, les matériaux composites multicouches ont trouvé des applications de plus en plus larges pratiquement dans tous les secteurs industriels, tel que l'aéronautique, l'automobile, le génie civil et les constructions navales. Cette considérable utilisation est, sûrement due aux remarquables avantages qu'offrent ce type de matériaux à savoir; un excellent rapport rigidité poids, une bonne résistance à la corrosion, une résistance à la fatigue et bien d'autre avantage d'autant plus que leurs propriétés sont ajustables pour différentes situations.

En outre, les matériaux composites multicouches possèdent un comportement complexe et difficile à comprendre surtout lorsqu'ils sont exposés à des températures élevées, qui sont très fréquentes dans la pratique. Ce facteur de températures élevées, pourrait générer des contraintes considérables dans ces structures ou causer le changement de leurs propriétés mécaniques et physiques. Par conséquent, les structures acquièrent un comportement plus complexe (exemple: non homogène ou instable).

Donc, la modélisation des structures composites multicouches est toujours un sujet de discussion qui sollicite des théories capables de décrire leurs comportements complexes avec précision. En effet, les structures composites multicouches (épaisses,) requièrent des théories raffinées capable de donner une bonne description de la distribution de la déformation et contrainte du cisaillement à travers leurs épaisseurs et notamment aux interfaces. De plus, le cisaillement transversal joue un rôle primordial lors de la conception de la structure de multicouche car il est la cause de différents types de rupture, comme le délaminage.

Des modèles tridimensionnels sont souvent utilisés pour bien tenir en compte de l'effet de l'interface des structures en matériaux composites multicouches, cependant ces derniers sont très couteux en termes de temps de calcul, en plus, ils sont aussi limités à certains cas simples. Par conséquent leurs résultats qui en découlent ne servent que comme références.

Par définition, une plaque est un élément de structure qui possède une dimension (épaisseur) plus petite par rapport aux deux autres. Cette définition permet en termes de modélisation de réduire le problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel. De nombreuses approches bidimensionnelles (2D) simplifiées ont été développées dans la littérature pour une modélisation plus raffinée des structures multicouches, tenant en compte l'effet de cisaillement transversal notamment aux interfaces entre les couches. Les approches les plus fréquemment utilisées sont l'approche de la monocouche équivalente (ESL) (l'approximation globale) et l'approche par couche (LW) (l'approximation locale).

L'approche par couche a été développée pour permettre une analyse locale (inter-laminaires). Le principe de base consiste à considérer chaque couche comme étant une plaque indépendante, et ainsi, chaque couche possède son propre champ d'inconnues. Dans cette approche le nombre de variables dépend du nombre de couches. Les conditions de continuité des déplacements et des contraintes sont satisfaites aux interfaces. Cependant, on reproche à cette approche des critiques à cause de son coût élevé en termes de temps de calcul, du fait du nombre élevé d'inconnus.

Dans la littérature, on trouve que l'approche de la monocouche équivalente (ESL) est l'approche la plus fréquente. Cette approche considère le stratifié hétérogène comme une seule couche homogène équivalente, et permet ainsi de donner une réponse globale et précise du comportement de la multicouche (flèche transversale, fréquence propre, charge critique, etc.). De plus, cette approche est distinguée par un nombre de variables indépendant du nombre de couches. Dans l'approche monocouche équivalente, on adopte, le plus souvent des modèles en déplacement, en prenant une forme du champ de déplacement comme une combinaison des fonctions inconnues et des coordonnées concernant l'épaisseur. La théorie de la monocouche équivalente se scinde en trois grandes familles, qui sont :

- La Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT),
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT),
- Théories de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT).

La première théorie (CLPT), ne prend pas en considération les effets du cisaillement transversal, elle n'est valable que pour les structures mince, la deuxième théorie (FSDT) considère que la variation de la déformation et les contraintes de cisaillement transversal comme étant constantes à travers l'épaisseur, et par conséquent les facteurs de corrections sont nécessaires. Les théories d'ordre supérieur (HSDT) ont vu le jour afin de remédier à ce problème de cisaillement transversal, ainsi, elles sont capables de donner une meilleure représentation des déformations due au cisaillement transversal sans recourir à des facteurs de correction. Généralement, les théories d'ordre supérieur sont des modèles issus à partir d'un champ du déplacement de développement en série de puissance en fonction de la coordonnée d'épaisseur.

Parmi les théories développées d'ordre supérieur les plus connus dans la littérature, on compte la théorie de Reddy (TSDT). Cette dernière a été dérivée à partir d'un polynôme de troisième degré qui contient neuf variables indépendantes en imposant les conditions des contraintes et des déformations de cisaillement transverse nulles sur les facettes supérieure et inférieure de la plaque. Cette supposition a permis à Reddy d'obtenir une distribution cubique des déplacements en fonction des coordonnées de l'épaisseur en réduisant le nombre de variables jusqu'à cinq, ce qui a donné une bonne expression de la variation quadratique de déformation et les contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque.

D'autre part, l'utilisation des méthodes analytiques est habituellement très difficile pour la résolution des problèmes des structures composites multicouches, notamment pour les structures ayant des géométries et des conditions aux limites complexes. Afin de contourner ces obstacles, les chercheurs se sont penchés vers l'utilisation des méthodes numériques et approchées de résolution. Parmi ces méthodes on compte la méthode des éléments finis qui a été reconnue durant les dernières décennies comme un outil numérique très puissant pour l'étude du comportement des structures complexe, notamment les composites multicouches. Ainsi, l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution des structures composites a ouvert de nouveau créneau de recherche. En effet, les chercheurs tentent constamment à développer des modèles d'éléments finis efficaces, simples et moins coûteux afin de répondre aux exigences liées à la modélisation du comportement des structures complexes composites multicouches.

L'objectif principal de cette thèse est de développer deux modèles d'éléments finis basés sur la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy, en assurant le bon compromis entre la précision et le coût, et en adoptant l'approche de la monocouche équivalente. Ces éléments finis sont destinés à l'analyse du comportement de flexion et de flambage des plaques isotropes et composites stratifiées, avec différentes géométries, conditions aux limites, chargements, nombre de couches et orientation de fibres. D'autre part, une étude paramétrique est entreprise afin de mettre en évidence l'effet de la température sur le flambage mécanique des plaques stratifiées dont les propriétés mécaniques de matériaux sont dépendantes de la température.

La présente thèse se compose de trois parties :

Partie I : Etude bibliographique

Le premier chapitre est consacré à la présentation d'une analyse bibliographique sur les théories existantes des structures composites multicouches élaborées dans les dernières décennies. En premier lieu, on a présenté quelques notions générales concernant les matériaux composites multicouches fibreux, leurs définitions et leurs domaines d'utilisation. D'autre part, on a discuté sur la modélisation de ces structures à partir des approches et des théories les plus utilisées dans la littérature, capables de fournir une bonne description de l'analyse du comportement de ces structures. On a discuté également sur les différents modèles éléments finis (2D) qui sont destinés à l'étude du comportement des structures composites multicouches en se fondant sur des théories capables de tenir meilleure description de l'effet de cisaillement transversal, telles que les théories de premier ordre (FSDT) et celles de l'ordre supérieur (HSDT).

Partie II : Développement de nouveaux modèles d'éléments finis stratifiées sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy

Cette partie consiste à proposer deux nouveaux modèles d'éléments finis nommés (TSQ28, TSQ20) basés sur la théorie de troisième ordre de Reddy en adoptant l'approche de la monocouche équivalente.

Cette partie est constituée de quatre chapitres :

Le deuxième chapitre, est consacré à élaborer une nouvelle formulation théorique d'élément fini (TSQ28) en assurant le bon compromis entre la précision et le coût. Cet élément est un quadrilatère isoparamétrique à quatre nœuds de type Lagrange qui détient sept degrés de liberté par nœud (trois déplacements et deux rotations et deux rotations d'ordre supérieur).

Le troisième chapitre, on procède à la validation de l'élément fini développés (TSQ28) sur le comportement de flexion et de flambage afin d'évaluer son efficacité et sa performance, en termes de convergence de précision et de stabilité.

Le quatrième chapitre, présente une formulation théorique fondée sur l'élément fini (TSQ28) en réduisant les degrés de liberté. L'élément obtenu (TSQ20) ne possède que cinq degrés de liberté dans chaque nœud trois déplacements et deux rotations.

Le cinquième chapitre, est consacré pour la validation de l'élément fini proposé (TSQ20) également sur le comportement de flexion et de flambage afin d'évaluer son efficacité et sa performance en termes de la convergence et stabilité.

Partie III : Etude paramétrique

Le sixième chapitre, est consacré à l'étude du comportement du flambage mécanique des plaques composites stratifiées sous l'effet de la température dépendante aux propriétés élastiques du matériau en utilisant l'élément fini isoparamétrique (TSQ28) et en tenant en compte différents champs de température T_0 à travers la plaque (uniforme, linéaire le long de x et y -direction).

Finalement, cette thèse a été achevée par une conclusion générale résumant les travaux réalisés et les perspectives.

PARTIE 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Chapitre 1

1 Synthèse bibliographique sur les théories aux éléments finis des plaques composite stratifiées

1.1 Introduction

De nos jours, les matériaux composites multicouches sont devenus de plus en plus utilisés dans différents domaines industriels, particulièrement en raison de leurs légèretés, leur résistance, leur rigidité et leurs propriétés mécaniques ajustables dans de grandes proportions. Les matériaux composites sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doués d'un potentiel illimité. Ainsi, les matériaux composites se développent aujourd'hui pratiquement dans tous les domaines et sont à l'origine de formidables défis dans diverses réalisations de haute technologie.

Par définition, les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs matériaux qui produisent un ensemble de propriétés avantageuses qui ne peuvent pas être obtenus lorsque les constituants sont séparés (Figure 1-1). Cette constitution avantageuse ouvre un développement important de puissance, de légèretés, de la résistance à la fatigue et à la corrosion sur les structures composites. Pour ces raisons, ils ont plusieurs utilisations dans de nombreuses disciplines, par exemple en aéronautique, dans l'automobile, dans le naval, et dans le sport et les loisirs. Une revue scientifique a été publiée [2] concernant les applications récentes des structures composites et leurs développements sur les navires et les sous-marins.

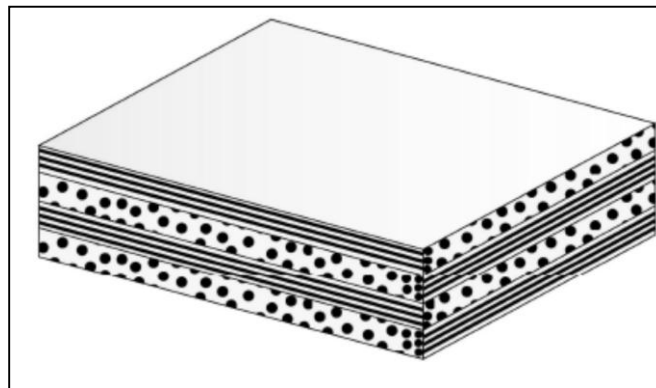


Figure 1-1 Structure multicouche de plaque composite [3]

Un matériau composite renforcé par des fibres, habituellement contient des fibres de haute résistance ou possèdent des modules d'élasticités élevés. Prenant le béton armé comme exemple de composite renforcé par des fibres (Figure 1-2) dont l'assemblage est constitué de barre d'acier et de béton, où ces derniers représentent les fibres et la matrice respectivement. Dans ce type de matériaux composites le matériau de matrice joue le rôle d'un milieu protecteur de fibres pour qu'elles ne soient pas exposées à un environnement hostile (humidité, etc.), aussi la matrice est considérée comme un milieu de transfert de charge aux fibres. Généralement, les fibres sont plus rigides et plus solides que le matériau de matrice. Géométriquement, les fibres ont un diamètre de petite taille et une longueur de très grande par rapport à leur diamètre.

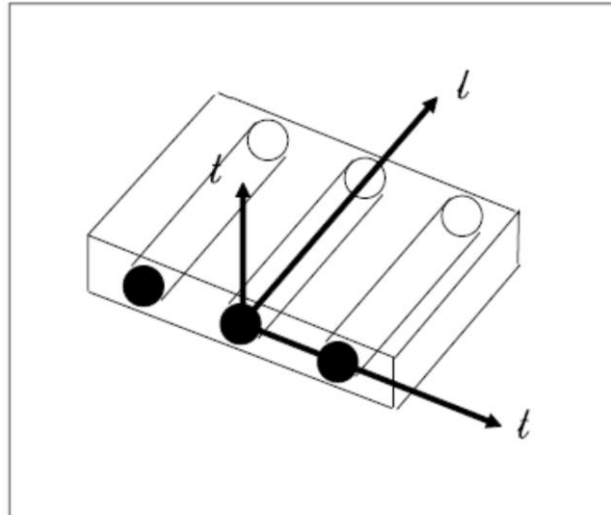


Figure 1-2 Description d'un matériau composite fibreux (matrice, fibre) [4]

En science des matériaux, on sollicite constamment le développement de meilleurs matériaux pour des applications et des situations spécifiques. Par conséquent, il existe différents niveaux d'études, à savoir, le niveau atomique, le niveau nanométrique, le niveau monocristallin, un groupe de cristaux et ainsi de suite. Dans le but d'obtenir un aperçu à un niveau macroscopique du comportement d'un matériau, il faut déterminer ses caractéristiques et ses propriétés telle que le module d'élasticité, la résistance mécanique, le coefficient de dilatation thermique, la résistance électrique, etc. Les matériaux sont généralement fabriqués d'une manière spécifique afin d'obtenir les propriétés désirées. Par conséquent, un matériau composite renforcé par des fibres possède une propriété élevée dans une direction et peut posséder des propriétés différentes dans les autres directions. De plus, les matériaux des fibres peuvent être constitués par des métaux comme l'aluminium, le cuivre, le fer, le nickel, l'acier etc... ou constitués par des matériaux organiques comme les matériaux de verre, de bore, et de graphite etc. En général, les composites structuraux stratifiés sont présentés sous forme d'un empilement de plusieurs plis. L'ensemble matrice-fibres forme le pli alors que l'ensemble des plis orientés forment ce qu'on appelle le stratifié. L'étude du comportement mécanique d'un stratifié est effectué dans le domaine de la macromécanique [5].

Les propriétés mécaniques moyennes de chaque pli sont obtenues par la loi de mélange. En outre, un stratifié est formé d'un empilement de plusieurs couches (plis), Ces couches sont orientées de façon à obtenir la résistance et la rigidité recherchées [6]. L'analyse des éléments de structure en matériaux composites stratifiés comporte plusieurs mesures, comme présenté sur le schéma de la Figure 1-3.

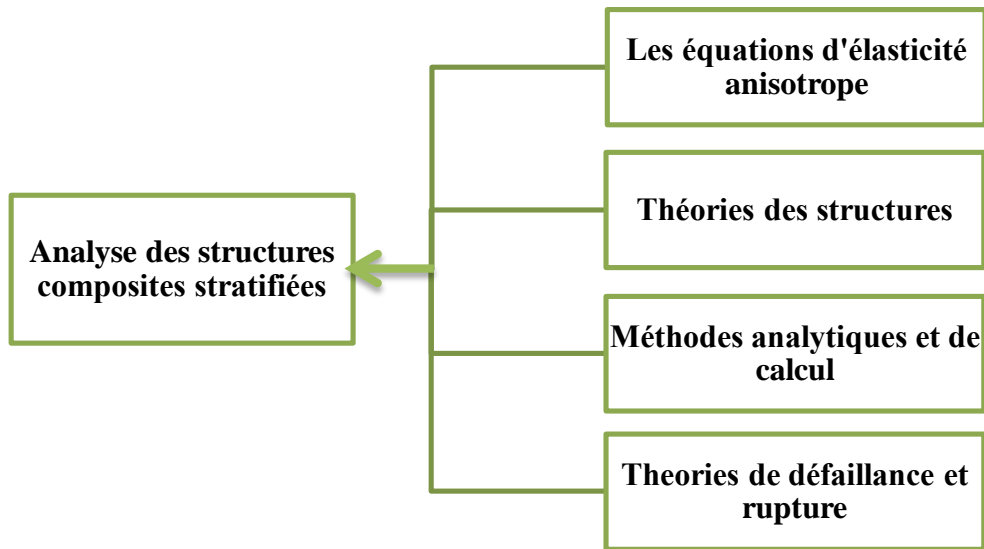


Figure 1-3 Les classes de base de l'analyse de matériaux composites [1]

1.2 Modèles théoriques de plaques multicouches

La structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un ensemble de couches homogènes anisotropes, par conséquent, les plaques composites multicouches nécessitent de mettre en place des outils efficaces de modélisation afin d'analyser et de comprendre leurs comportements compliqués. Autrement dit, l'analyse des structures composite est toujours un sujet discutabile sollicitant des théories relativement précises et capables de décrire leurs différents comportements mécaniques. En effet, la modélisation des structures multicouches épaisses, nécessite des théories raffinées tenant en compte du cisaillement transversal à travers leurs épaisseurs et notamment à l'interfaces. Ce phénomène de cisaillement transversal peut causer un gauchissement et augmenter l'amplitude des déplacements à travers la section (épaisseur) de la plaque multicouche ce qui peut conduire à des dommages considérables, comme le délaminage. Prendre en considération l'effet de cisaillement transversal est très important dans l'étude des matériaux composites multicouches, à partir des méthodes approchées ou numérique afin d'obtenir une bonne réponse comparable aux résultats analytiques. Plusieurs théories prennent en compte l'effet de cisaillement transversal pour l'analyse des structures composites multicouche. Citons quelques revues scientifiques [4, 7-9] qui contiennent les différents modèles et théories existantes dans la littérature.

Les théories tridimensionnelles 3D qui sont souvent utilisées dans l'analyse des structures composites multicouches permettent d'obtenir des résultats très précis et exacts mais elles sont limitées à certains exemples simples de géométrie, d'empilement et de chargement. Y. M. GHUGAL et R. P. SHIMPI [9] ont consacré une partie pour les méthodes exacte d'élasticité tridimensionnelle (3D), telles que celles élaborées par Pagano, Srinivas et Rao et qui ont proposé des solutions analytiques, de certains cas

simples de problèmes. Ces solutions ont considérés comme des références dans la littérature de l'analyse des plaques isotropes et stratifiées composites [10-14]. En outre, ces approches peuvent conduire à des équations différentielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement. Par conséquent, des modèles mathématiques et des méthodes numériques comme la méthode des éléments finis, ont été proposées pour la modélisation des structures multicouche.

Habituellement, les plaques composites stratifiées sont considérées comme un élément de structure qui possède une dimension (l'épaisseur) plus faible relativement par rapport aux deux autres dimensions. Ce type de géométrie permet de simplifier le problème tridimensionnel (3D) à un problème bidimensionnel (2D). Par conséquent, de nombreuses approches bidimensionnelles (2D), ont été développées pour l'analyse des structures multicouches tenant en compte l'effet de cisaillement transversal. Dans ce chapitre, on cite les approches les plus utilisées dans l'analyse des structures multicouches dans la littérature. Parmi lesquelles, l'approche monocouche équivalente (ESL) et l'approche par couche (LW). La différence entre eux réside dans la description de l'approximation de la déformation globale et locale dans la section de la plaque, selon la théorie adoptée (Figure 1 4).

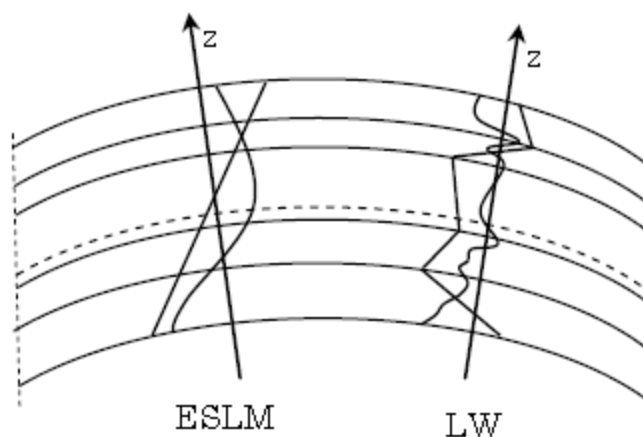


Figure 1-4 Description de la déformation linéaire et non linéaire de la section des approches (ESL) et (LW) [4]

1.2.1 Approche monocouche équivalente

L'approche monocouche équivalente (ESL) des plaques composites stratifiées est l'une des approches les plus adoptés dans la littérature, son principe de base réside dans la considération d'une hypothèse appropriée qui concerne l'état de la cinématique de déformation et des contraintes à travers l'épaisseur du multicouche en simplifiant le problème (3D) de la plaque à un problème (2D) en raison que l'épaisseur étant très petite par rapport aux deux autres dimensions. En outre, l'approche considère le multicouche hétérogène comme une seule couche homogène équivalente ayant le comportement de l'ensemble des couches. Cette approche donne une réponse globale et précise du comportement du multicouche (la flèche transversale, la fréquence propre

de vibration, la charge critique du flambement) avec un nombre d'équations qui ne dépend pas du nombre de couches [15]. L'avantage le plus important de l'approche monocouche équivalente (ESL) réside dans son faible coût en terme de temps de calcul et sa simplicité ainsi que le petit nombre des variables, indépendant du nombre de couche du multicouche.

Les théories de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin sont les modèles en déplacement classiques les plus connus dans la littérature [1]. Dans cette section nous exposons les trois catégories de théories qui sont les plus connus dans la littérature en adoptant l'approche de monocouche équivalente, il s'agit de

- La théorie classique des stratifiés (CLPT)
- La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)
- Des théories de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT)

1.2.1.1 *La théorie classique des stratifiés*

La théorie classique des plaque est une hypothèse évalué par Kirchhoff-Love au début du XXe siècle [16, 17]. Elle est l'une des théories les plus anciennes et les plus simples dans la description de la déformation des plaques. Dans cette théorie on considère que la section transversale de la plaque reste droite et perpendiculaire sur la surface moyenne après déformation (Figure 1-5), et que les déformations et les contraintes transversales sont considérées nulles ε_{xz} , ε_{yz} , ε_{zz} , σ_{xz} et σ_{yz} , σ_{zz} [1].

Le champ de déplacements de la théorie classique des plaques étant donné par l'expression suivante (Figure 1-5):

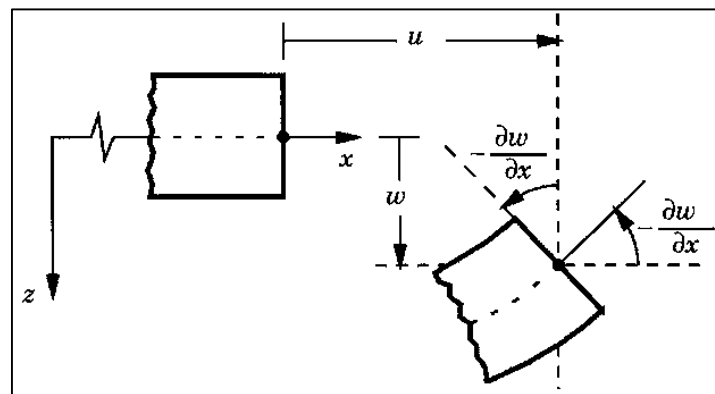


Figure 1-5. Cinématique de la théorie classique des plaques Kirchhoff-Love[1]

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Où (u, v, w) sont les déplacements d'un point sur le plan (xy) (le plan moyen de la plaque), $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ sont les rotations d'une normale transversale par rapport à l'axe y et l'axe x respectivement.

De plus, cette théorie exige la continuité C_1 dans la cinématique, c'est-à-dire qu'elle peut générer la dérivée seconde pour la composante de déplacement transversal sur le plan des solutions analytiques. Cependant, la précision de la théorie classique des plaque CLT n'est adéquate que dans le cas des plaques minces $a/h > 10$.

1.2.1.2 La théorie de premier ordre (FSDT)

La théorie la plus simple et qui tient en compte du cisaillement transverse est la théorie de premier ordre [FSDT]. Elle est l'extension de la théorie de Reissner-Mindlin aux stratifiés. Dans cette théorie, on considère que la normale qui reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne après déformation. La théorie suppose également la contrainte normale σ_{zz} estimé à zéro (Figure 1-6).

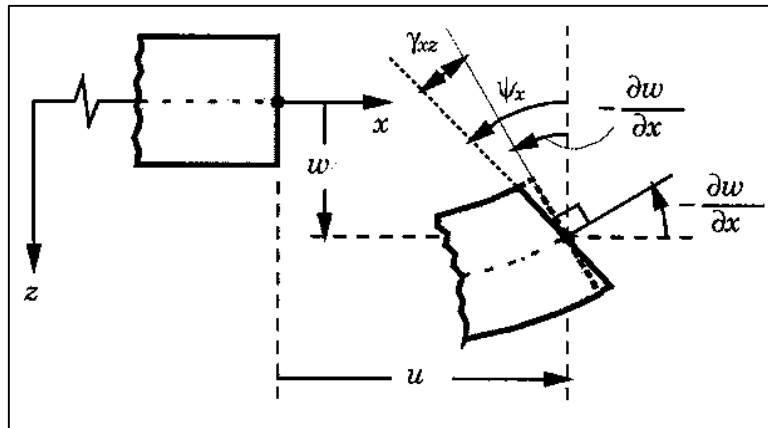


Figure 1-6 Cinématique de la théorie de premier ordre des plaques Reissner-Mindlin [1]

Le champ de déplacements de la théorie de premier ordre (FSDT) Reissner-Mindlin [18, 19] peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z \psi_x \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z \psi_y \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Où u_1, u_2, u_3 représentent les composants de déplacements d'un point de coordonnées (x, y, z) , (u, v, w) sont les déplacements sur le plan moyen, et ψ_x, ψ_y sont les rotations de la normale transversale autour des axes y et x , respectivement.

La théorie de premier ordre de déformation de cisaillement considère que les valeurs des contraintes de cisaillement transverses sont constantes à travers toute l'épaisseur de la plaque (Figure 1-7). La théorie de premier ordre nécessite l'introduction des facteurs de correction [20, 21].

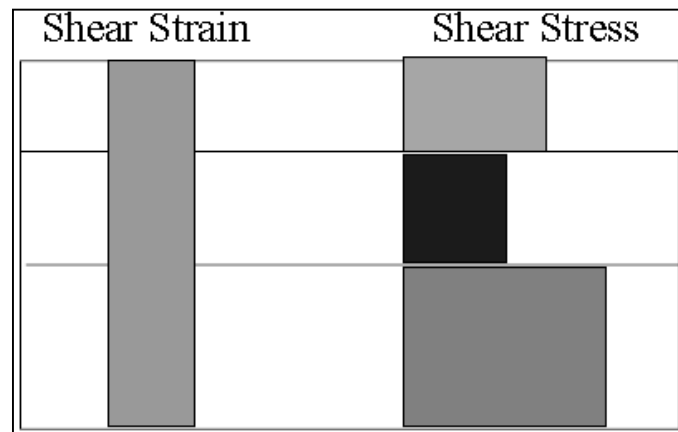


Figure 1-7 Description de la distribution constante de déformation et contrainte à partir de la théorie du premier ordre [FSDT] [4]

Les facteurs de correction de cisaillement sont des paramètres sans dimension introduits pour tenir en compte de l'écart entre l'état des contraintes cisaillement constant de la théorie du premier ordre et la distribution des contraintes de cisaillement quadratique de la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. Généralement, les théories des plaques stratifiées composites qui sont basées sur la théorie du premier ordre exigent l'utilisation des facteurs de correction en cisaillement transversal. Ces facteurs sont mesurés selon plusieurs paramètres, tels que les propriétés de couches constitutives de stratifié, la géométrie et les conditions aux limites. Pagano, 1969, Stavsky and Loewy, 1971, Whitney, 1969, Whitney, 1973 [11, 19, 20, 22] ont évalué l'effet de déformation en cisaillement de premier ordre sur la flexion et la réponse de vibration libre des stratifiés rectangulaires simplement appuyés. En outre, la théorie de premier ordre est devenue plus utilisable dans la modélisation des structures minces et modérément épaisses ainsi que dans divers logiciels commerciaux des éléments finis du fait de sa simplicité en formulation tel que l'exigence des dérivées de premier ordre C_0 . Cependant, la théorie FSDT peut conduire aux problèmes de verrouillage en cisaillement (shear locking) dans la modélisation des structures minces, ce dernier est un problème numérique issu de la rigidité excessive de la structure modélisée par éléments finis [9].

1.2.1.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

La théorie des plaques stratifiées classique et la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre sont devenues assez mal adaptées à la description du comportement du multicouche d'une manière précise.

Par conséquent, de nombreux auteurs ont développé des théories plus raffinées dans la littérature [23-33], capables d'évaluer avec plus de précision les déformations et les contraintes de cisaillement transversales des plaques multicouches à partir d'une approximation du champ de déplacement ou contraintes plus raffinées. Ces théories sont appelées, les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur. La plupart de ces dernières sont basées sur des modèles en déplacement exprimé par une fonction cubique ou non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque où la section droite peut subir un gauchissement après la déformation comme il est illustré dans la Figure 1-8,. Ces théories utilisent souvent un développement en série de puissance du champ de déplacement sous la forme suivante [4, 34, 35]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z u_1(x, y) + z^2 u_2(x, y) + z^3 u_3(x, y) + \dots \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z v_1(x, y) + z^2 v_2(x, y) + z^3 v_3(x, y) + \dots \quad (1.3) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z w_1(x, y) + z^2 w_2(x, y) + z^3 w_3(x, y) + \dots \end{aligned}$$

Où $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ sont les composantes vectoriels du déplacement, $u_i(x, y)$, $v_i(x, y)$, $w_i(x, y)$ sont des fonctions doivent être déterminés dans le plan (x, y) .

La terminologie "ordre élevé" ou "théories d'ordre supérieur", réside dans la prise d'un grand nombre de troncature avec un degré de puissance élevé de la variable z de la série (1.3).

En 1890 Basset [36] celui qui a utilisé ce type de série de puissance, En 1877, Touratier [35], Levy [37] ont publié un mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes en utilisant la série (1.3) uniquement avec les termes impairs. Hildebrand et al. [38] sont parmi les premiers à introduire ces raffinements en 1949.

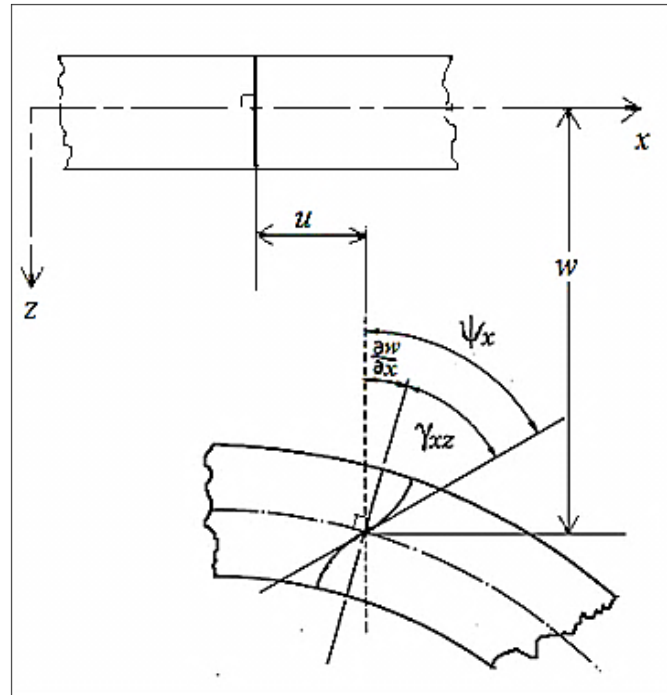


Figure 1-8 Cinématique des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur des plaques (HSDT) [34]

Généralement, ces types de théories sont très coûteuses en terme de temps de calcul et possèdent un grand nombre de variables indépendantes, ce qui a créé une sorte de concurrence entre les chercheurs pour élaborer des modèles avec un nombre réduit de variables tout en gardant le bon compromis entre la précision et le coût.. Pister et Westmann [39], Whitney et Sun [29], Nelson et Lorch [26] ont proposé des théories de seconde ordre pour l'analyse de la déformation en cisaillement de multicouche. Les résultats sont légèrement améliorés par rapport à la théorie de premier ordre FSDT. Le champ de ces théories de déplacement peut généralement être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^2\varphi_x(x, y) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^2\varphi_y(x, y) \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y) + z\psi_z(x, y) + z^2\varphi_z(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Les théories d'ordre supérieur fournissent une meilleure représentation de la cinématique de la plaque et notamment, la représentation quadratique des déformations et des contraintes de cisaillement transversal ce qui a pour avantage d'éviter le recourt à l'utilisation des facteurs de correction en cisaillement. En outre, la théorie est capable de prendre en considération les répartitions de déformations normal (ε_{zz}) et cisaillement transversales (ε_{xz} , ε_{yz}) tout au long de l'épaisseur du multicouche d'une manière semblable à la théorie tridimensionnelle d'élasticité. Toutefois, les théories d'ordre supérieur génèrent habituellement des contraintes résultantes d'ordre supérieur difficiles à interpréter physiquement, aussi elles exigent beaucoup plus d'effort en calcul. Par conséquent, ces théories doivent être utilisées uniquement quand c'est

nécessaire. De plus, il est possible de développer un champ de déplacement en fonction de l'épaisseur des coordonnées jusqu'au degré souhaité pour plus de précision. Beaucoup de modèles développés basés sur des théories d'ordre supérieur ont été proposés tels que les modèles de Reissner [40], Provan et Koeller [41], Lo et al. [24, 25, 42] et qui ont été modifiés par Levinson [21], Murthy [31], J.N. Reddy [27], Blocki [43,83] pour obtenir la bonne expression de la distribution parabolique des déformations et des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque. En outre, des articles revues ont été proposées par de Noor et Burton [44] et Kapania et Raciti [45], où les auteurs ont cité quelques théories d'ordre supérieur de déformation en cisaillement HSDT.

Lo et al. [25, 46] ont présenté un modèle de troisième ordre capable d'analyser l'effet de la déformation normale transverse en utilisant un champs qui contient onze inconnus :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^2\varphi_x(x, y) + z^3\theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^2\varphi_y(x, y) + z^3\theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) + z\psi_z(x, y) + z^2\varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (1.5)$$

où les fonctions $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ et θ_x, θ_y sont des fonctions indépendantes en termes des coordonnées (x, y) , ces fonctions n'ont pas un sens physique clair.

Par conséquent, la théorie HSDT augmente clairement le coût de calcul surtout dans son implémentation numérique. En revanche, une théorie développée par J.N. Reddy (1984) [27] a minimisé les fonctions indéterminées du champ de déplacement en améliorant au même temps la description de la variation de déformation et contraintes à travers l'épaisseur de la plaque.

1.2.1.4 *La théorie de troisième ordre de Reddy (TSDT)*

L'hypothèse de troisième ordre de déformation en cisaillement de J.N. Reddy (TSDT) a été dérivée d'un champ de déplacement de degré trois à neuf variables indépendantes indéterminées, et en imposant la condition des déformations et les contraintes transversales sont nulles aux niveaux des faces supérieure et inférieure de la plaque. Cette théorie considère que la section transversale normale prend une expansion de déplacements cubique après la déformation en fonction des coordonnées de l'épaisseur sans recourir à des facteurs de correction de cisaillement. Finalement, on obtient un champ de déplacement réduit en variable jusqu'à cinq. Nous présentons dans cette section la théorie originale de troisième ordre de déformation en cisaillement de J.N. Reddy des plaques stratifiées [27, 28].

On considère le champ d'ordre trois de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^2\varphi_x(x, y) + z^3\hat{\theta}_x(x, y) \\
u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^2\varphi_y(x, y) + z^3\hat{\theta}_y(x, y) \\
u_3(x, y, z) &= w(x, y)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Où (ψ_x, ψ_y) , (φ_x, φ_y) et $(\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y)$ et (u, v, w) sont des fonctions à déterminer.

Il existe neuf inconnus indépendants, ce nombre d'inconnues peut être réduit en imposant la nullité des déformations et contraintes de cisaillement transversales aux faces supérieure et inférieure de la plaque $\varepsilon_{xz}(x, y, \pm h/2) = \varepsilon_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0$; $\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) = \sigma_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0$. Ces conditions ont été proposées pour la première fois par Levinson [21] pour l'analyse des plaques isotropes et par Murthy [31] pour l'analyse des plaques stratifiées. On obtient:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xz}(x, y, \pm h/2) &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + (2z\varphi_x + 3z^2\hat{\theta}_x)_{z=\pm h/2} = 0 \\
\varepsilon_{yz}(x, y, \pm h/2) &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} + (2z\varphi_y + 3z^2\hat{\theta}_y)_{z=\pm h/2} = 0
\end{aligned}$$

Après on obtient quatre équations:

$$\begin{aligned}
\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + \left(-h\varphi_x + \frac{3h^2}{4}\hat{\theta}_x\right) &= 0, & \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + \left(h\varphi_x + \frac{3h^2}{4}\hat{\theta}_x\right) &= 0 \\
\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} + \left(-h\varphi_y + \frac{3h^2}{4}\hat{\theta}_y\right) &= 0, & \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} + \left(h\varphi_y + \frac{3h^2}{4}\hat{\theta}_y\right) &= 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

On peut conclure et définir que $\varphi_x = \varphi_y = 0$ et directement les relations (1.7) deviennent :

$$\begin{aligned}
\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3h^2}{4}\hat{\theta}_x &= 0, \quad \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3h^2}{4}\hat{\theta}_y = 0 \implies \hat{\theta}_x = -\frac{4}{3h^2}\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\
\hat{\theta}_y &= -\frac{4}{3h^2}\left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Le champ de déplacement de la théorie de troisième ordre de J.N. Reddy peut être réduit en l'exprimant par cinq inconnus indépendants u, v, w, ψ_x, ψ_y , et s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\psi_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}\right) \\
u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\psi_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}\right) \\
u_3(x, y, z) &= w(x, y)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

La théorie des plaques de troisième ordre de J.N. Reddy permet une distribution quadratique de déformation et contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur qui s'annulent aux niveaux des faces supérieures et inférieures de la plaque sans recourt aux facteurs de correction (Figure 1-9).

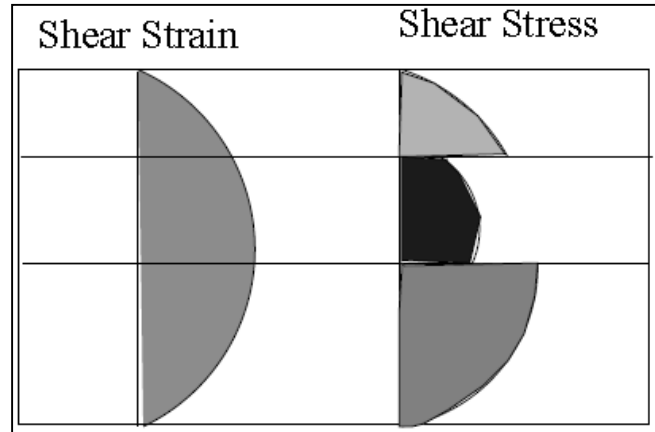


Figure 1-9 Description de la distribution quadratique de déformation et contrainte à partir de la théorie de Reddy[TSDT] [4]

Les théories des plaques de troisième ordre de J.N. Reddy contiennent le même nombre de variables indéterminés, mais la forme variationnelle de la théorie de J.N. Reddy implique des contraintes résultantes d'ordre élevé et des composantes de rigidité supplémentaires du matériau par rapport à la théorie du premier ordre. Rohwer [47] a fait une étude comparative entre les différentes théories d'ordre supérieur en montrant leurs avantages et leurs inconvénients en concluant que la théorie de Murthy [31] et de J.N. Reddy [27] sont les plus avantageuses par rapport aux autres théories d'ordre supérieur. De ce fait, la théorie de déformation en cisaillement de troisième ordre de J.N. Reddy est la plus simple dans l'analyse des composites multicouches [48]. Ce type de théories est connu dans la littérature par l'appellation de Third-order Shear Deformation Theory (TSDT).

Divers modèles similaires à celui de J.N. Reddy [27], sont rencontrés dans la littérature. En 1986 JG Ren, E Hinton ont proposé un modèle en déplacement modifié et similaire au modèle de J.N. Reddy 1984 [27] en considérant les variables indéterminés par les relations de déformation dues au cisaillement $\psi_x = \gamma_x - \frac{\partial w}{\partial x}$, $\psi_y = \gamma_y - \frac{\partial w}{\partial y}$, . Plusieurs auteurs ont affirmé que ce modèle présente quelques nouveautés [49]. Le champ de déplacement relatif à ce modèle peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \gamma_x(x, y) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \gamma_y(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y)$$

Dans le cas général, le champ de déplacement relatif aux théories d'ordre supérieur est de la forme suivante:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z)\gamma_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z)\gamma_y(x, y) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y)$$

La fonction $f(z)$ est souvent appelée la fonction de la distribution de la déformation de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. Dans la littérature la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement de J.N. Reddy a attiré l'attention par les auteurs Levinson [21] et Murthy [31] cité précédemment, lorsque ces derniers ont présenté des champs de déplacement similaires de J.N. Reddy afin d'analyser des plaques isotropes et stratifiées respectivement. J.N. Reddy a mentionné [27] que les deux auteurs ont utilisé les équations d'équilibre pour l'analyse des plaques isotropes et composites stratifiées, qui sont variationnellement incompatibles au lieu d'utiliser le principe des déplacements virtuels pour ce champ de déplacement. J.N. Reddy était le premier à utiliser le principe des déplacements virtuels et les équations d'équilibre d'une manière compatible et sans compléxité algébrique. Un article revue a été publiée en 1990 par J.N. Reddy [50]. Ce dernier décrit toutes théories concernant la déformation en cisaillement de troisième ordre, et présente ainsi les différents modèles similaires au champ de déplacement de la théorie de troisième ordre [TSDT] de J.N. Reddy [27] le Tableau 1-1 résume quelques modèles similaires à celui de J.N. Reddy (TSDT) [1, 50]:

Tableau 1-1 Différents modèles de champ de déplacement similaire de la théorie de Reddy(1984)

Références	Champ de déplacement et variables	Relation de variables
Schmidt [1]	$u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3}{2} f(z) \varepsilon_x$ $u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3}{2} f(z) \varepsilon_y$ $u_3 = w$	$\varepsilon_x = \frac{2}{3} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ $\varepsilon_y = \frac{2}{3} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$
AVK Murty [51]	$u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} - c_3 f(z) \theta_x$ $u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} - c_3 f(z) \theta_y$	$\theta_x = -\frac{1}{c_3} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ $\theta_y = -\frac{1}{c_3} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$

	$u_3 = w$	
Levinson [21]	$u_1 = u + f(z)\psi_x - c_1 z^3 \frac{\partial w}{\partial x}$ $u_2 = v + f(z)\psi_y - c_1 z^3 \frac{\partial w}{\partial y}$	-
	$u_3 = w$	
Murthy [31]	$u_1 = u - \frac{z}{4}(5\beta_x + \frac{\partial w}{\partial x}) - c_4 z^3 (\beta_x + \frac{\partial w}{\partial x})$ $u_2 = v - \frac{z}{4}(5\beta_y + \frac{\partial w}{\partial y}) - c_4 z^3 (\beta_y + \frac{\partial w}{\partial y})$	$\beta_x = \frac{4}{5}\psi_x - \frac{1}{5}\frac{\partial w}{\partial x}$ $\beta_y = \frac{4}{5}\psi_y - \frac{1}{5}\frac{\partial w}{\partial y}$
	$u_3 = w$	
J.N. Reddy [52]	$u_1 = u + f(z)\hat{\psi}_x - z \frac{\partial w^b}{\partial x} - c_1 z^3 \frac{\partial w^s}{\partial x}$ $u_2 = v + f(z)\hat{\psi}_y - z \frac{\partial w^b}{\partial y} - c_1 z^3 \frac{\partial w^s}{\partial y}$	$\hat{\psi}_x = \psi_x + \frac{\partial w^b}{\partial x}$ $\hat{\psi}_y = \psi_y + \frac{\partial w^b}{\partial y}$
	$u_3 = w$	$w = w^s + w^b$
Bhimaraddi [30]	$u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\psi_x$	
J.N. Reddy [50]	$u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\psi_y$	-
	$u_3 = w$	
	$c_1 = \frac{4}{3h^2}, c_3 = \frac{3}{4h}, c_4 = \frac{5}{3h^2}, f(z) = z(1 - c_1 z^2)$	

N. R. Senthilnathan *et al.*[53] ont proposé une autre forme de champ de déplacement à partir du modèle de la théorie de J.N. Reddy [27]. Il s'agit d'un modèle de troisième ordre de J.N. Reddy modifié en substituant la composante u_3 par $w^b(x, y) + w^s(x, y)$ et les fonctions indéterminées $\psi_x = -w_{,x}^b$ et $\psi_y = -w_{,y}^s$ où $w^b(x, y), w^s(x, y)$ sont des composants concernant le comportement flexionnel et du cisaillement respectivement. Le champ de déplacement du modèle s'écrit comme suit :

$$u_1(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w^b(x, y)}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w^s(x, y)}{\partial x} \quad (1.11)$$

$$u_2(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w^b(x, y)}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w^s(x, y)}{\partial y}$$

$$u_3(x, y, z) = w^b(x, y) + w^s(x, y)$$

J.N Reddy. a développé un autre modèle à partir du champ de déplacement (1.5) en considérant la nullité des déformations et contraintes de cisaillement transversales au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque $\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0$, $\sigma_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0$, afin d'obtenir un modèle nommé « la théorie générale de troisième ordre de Reddy » (GTTR) [54,55] Le champ de déplacement développé est donné par :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y) - z^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z(x, y)}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\psi_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{z^3}{3} \frac{\partial \varphi_z(x, y)}{\partial x} \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y) - z^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z(x, y)}{\partial y} \right) \\ &\quad - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\psi_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right) - \frac{z^3}{3} \frac{\partial \varphi_z(x, y)}{\partial y} \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) + z\psi_z + z^2 \varphi_z \end{aligned} \quad (1.12)$$

D'autres modèles dans la littérature ont traité le gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque d'une manière mathématique différente à partir de la fonction $f(z)$ qui peut donner meilleur expression de la variation quadratique de déformations et contraintes de cisaillement transversale à travers l'épaisseur. Touratier [35] a suggéré un modèle qui a été fréquemment utilisé dans l'analyse des plaques composites multicouches en utilisant une fonction $f(z)$ sinusoïdale, donnée par :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (1.13)$$

Soldatos [56] a proposé une fonction hyperbolique de cisaillement transverse pour l'analyse des plaques monocliniques homogènes, la fonction de cisaillement de ce modèle étant donnée par la forme suivante:

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (1.14)$$

Karama et al. [57] ont proposé un modèle destiné à l'analyse des structures composites multicouches qui s'appelle la théorie de plaques de la déformation en cisaillement exponentielle en utilisant une fonction $f(z)$ exponentielle, dont le champ de déplacement s'écrit comme suit:

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (1.15)$$

$f(z)$ est considérée comme la fonction de cisaillement qui permet de déterminer la distribution des déformations et les contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Plusieurs auteurs ont suggéré différentes formes de la fonction de

cisaillement $f(z)$ afin de développer ces modèles d'ordre supérieur tels que Mantari et *al.* [58,59,60], Mantari et Guedes Soares [61], Grover et *al.* [62], Sahoo et Singh [63] :

Ambarsumyan [64] :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$$

Panc [65] et Reissner [66] :

$$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

Ferreira et *al.* [67] :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

Aydogdu [68]:

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \quad \alpha > 0$$

1.2.2 Approche par couche

Les modèles basés sur l'approche monocouche équivalente donnent relativement une bonne approximation du comportement de la structure multicouche à l'échelle globale. En outre, ils se distinguent par leurs avantages de l'indépendance du nombre d'inconnus du nombre de couches. Néanmoins, en ce qui concerne le comportement local des structures multicouches, ces modèles basés sur l'approche monocouche équivalente ne sont pas capables de fournir des résultats satisfaisants au niveau local et notamment dans l'interface de la structure multicouche.

Les approches par couche ont été proposées pour plus de précision, leurs principes de base est d'écrire des champs d'inconnus au niveau local de chaque couche de multicouche séparément tout en satisfaisant les conditions de continuité aux interfaces. On dit que l'approche par couche signifie une approche au niveau de sous structure qui correspond à chaque couche ou un ensemble de couches du multicouche en appliquant à chaque sous-structure une théorie différente (Figure 1-10).

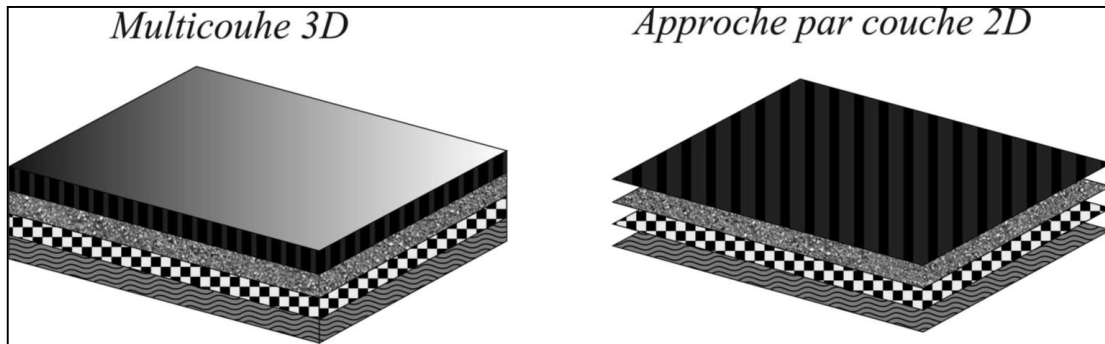


Figure 1-10 Description au principe l'approche par couche [3]

Ce types d'approches est généralement couteux en terme de temps de calcul à cause du nombre élevé des variables qui dépendent du nombre de couches du multicouche. Cependant les modèles basés sur l'approche par couche, permettent d'obtenir des résultats plus précis, notamment les contraintes aux bords et aux interfaces du multicouche. A Présent on présente quelques modèles basés sur l'approche par couche existant dans la littérature [1, 14, 69-72]. D'une manière générale, ces modèles peuvent être classés en deux catégories : la théorie de couches discrètes (layerwise), qui considère chaque couche comme une plaque en assurant les conditions de continuité des variables aux interfaces. La deuxième théorie s'appelle la théorie de zig-zag, qui se distingue par fait que le nombre de couches est indépendant du nombre de variables. Tout en satisfaisant les conditions de continuité sans pour autant augmenter le nombre des variables (Figure 1-11, Figure 1-12).

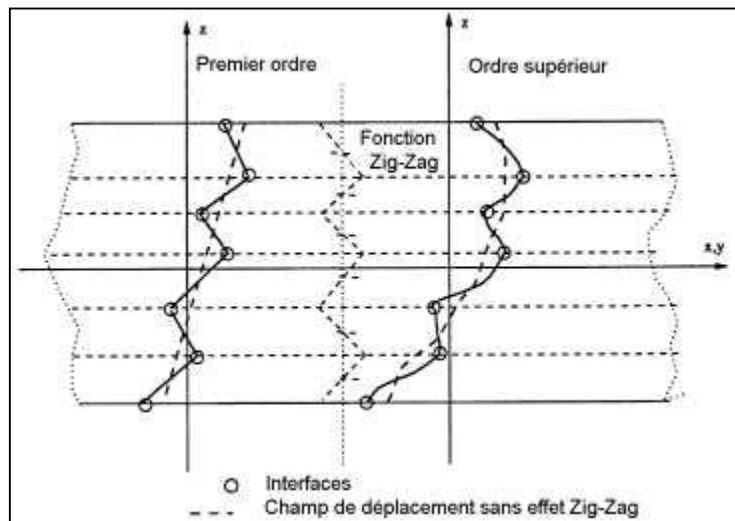


Figure 1-11 Champ de déplacement des modèles Zig-Zag [73]

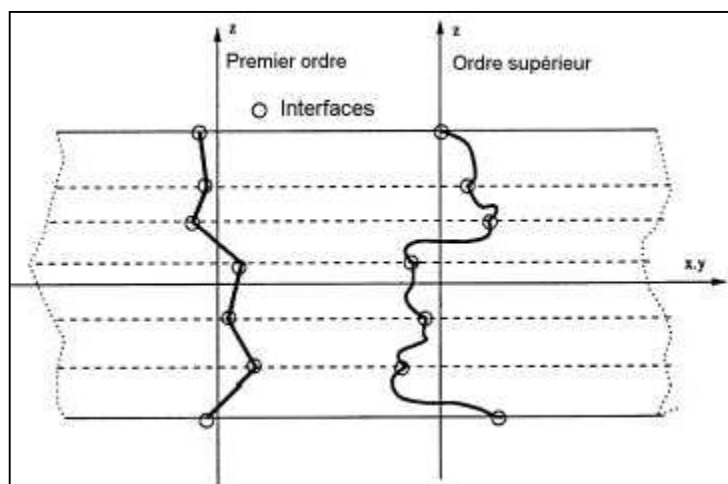


Figure 1-12 Champ de déplacement du modèle couches discrètes [73]

1.2.2.1 Les modèles Zig-Zag

Le concept des théories zigzag consiste principalement dans la considération de la variation des déplacements et des contraintes qui sont individuellement au niveau de chaque couche de la plaque assurant la continuité d'interfaces qui permet de réduire le nombre des variables.

Une revue a été proposée par Erasmo Carrera [74]. Dans laquelle il donne d'un aperçu sur l'historique du modèle zig-zag et les théories de structures multicouches développées. Le premier qui a proposé un modèle de zig-zag en l'adoptant à la théorie du premier ordre est Di Sciuva [71, 75]. Par la suite, plusieurs auteurs ont proposé des contributions significatives sur le modèle zig-zag dans la littérature [72, 74, 76-80].

En addition, Karama, et Ossadzow [81, 82] ont combiné des fonctions sinusoïdales [35] de la cinématique de Touratier en adoptant l'approche zig-zag., Afaq et al. [83] ont aussi utilisé une fonction exponentielle pour plus de précision, notamment des contraintes de cisaillement transversal. L'avantage principal du modèles zig-zag réside dans la satisfaction des conditions de continuité sans augmenter le nombre d'équations fondamentales. Le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag présentent des limitations lorsqu'il s'agit de l'analyse du délaminage. Ou lors du calcul des contraintes de cisaillement transversal par les équations constitutives, lorsque les plaques sont minces [79]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, réside dans la complexité de l'implémentation numérique en utilisant des théories d'ordre supérieur qui exigent une continuité de type C_1 [73].

1.2.2.2 Les modèles couches discrètes (Layerwise)

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs de déplacements suivant l'épaisseur du multicouche. Ces modèles considèrent l'ensemble des plaques 2D comme couplées par des efforts de l'interface, de manière que les conditions de continuité des contraintes aux interfaces sont assurées avec un nombre d'équations qui dépend du nombre de couches de la plaque composite

multicouche [84]. Plusieurs modèles basés sur l'approche des couches discrètes ont été proposés dans la littérature en adoptant des théories de premier ordre et d'ordre supérieur de la déformation en cisaillement. Par exemple, Srinivas [85], Seide [69], Reddy [86], Naciri [87] et Tahani [88], DH Robbins, JN Reddy [89], Barbero E et al. [90], Reddy [91], Epstein M, Huttelmaier H [92].

Robbins et Reddy [93] ont développé un modèle en déplacement d'élément fini de deux dimensions basé sur la théorie de Reddy en adoptant l'approche de la couche discrète (layerwise) pour l'analyse des plaques composites stratifiées en supposant une distribution continue par couche de déformations transversales à travers l'épaisseur du stratifié, où le modèle devient capable de calculer les contraintes interlaminaires et les effets localisés avec le même degré de précision qu'un modèle d'élément fini 3-D conventionnelle.

Cho KN et al. [94] ont appliqué la théorie d'ordre supérieur en adoptant l'approche de la couche discrètes afin de déterminer les fréquences naturelles et les contraintes et les déformations relatives distribuées à travers l'épaisseur des plaques rectangulaires simplement appuyés où elle a pu satisfaire la continuité au niveau des interfaces entre les couches adjacentes. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux obtenus par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle pour les cas des plaques isotropes et orthotropes stratifiés symétriques et non-symétriques.

TM Hsu, et JTS Wang [95] ont utilisé la théorie classique de Kirchhoff et adopté de l'approche par couche en utilisant l'équation de mouvement pour l'analyse des coques cylindriques stratifiées. De plus, d'autres modèles en contraintes basés sur l'approche de la couche discrète pour l'analyse interlaminaires des structures multicouche ont été proposées dans la littérature, tel que Ren [96] qui a proposé un modèle par couche contrainte et a considéré un champ de contrainte de cisaillement transversal quadratique par couche et les déplacements étant considérés cubiques par couche en assurant la continuité aux interfaces. Kassapoglou [97, 98] a proposé un champ de contrainte construit sous forme d'un produit de fonctions des variables séparées par couche à partir des équations d'équilibre des forces et moments en supposant que les contraintes planes sont constantes à travers l'épaisseur, de plus Yin [99, 100] a utilisé les fonctions de contraintes concertantes de Lekhnitskii [101] en adoptant l'approche par couche pour déterminer les contraintes interlaminaires.

1.3 Modèles élément finis des plaques multicouches

Les problèmes de structures composites multicouches sont habituellement modélisés par des équations différentiels très difficile à résoudre, notamment lorsque la structure possède une géométrie et des conditions aux limites arbitraires. Les méthodes de Rayleigh-Ritz et Galerkin [102] ont été également utilisées pour déterminer la solution analytique approchée, mais elles étaient trop limitées sauf pour des géométries simples en raison de la difficulté à construire les fonctions d'approximation pour des géométries complexes. Par conséquent, les chercheurs ont recouru à l'utilisation des méthodes numériques capables de faciliter la résolution des

équations pour des problèmes d'importance pratique. Parmi les méthodes numériques puissantes disponibles, on comptera sur la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est devenue un outil numérique très efficace dans ces dernières décennies afin d'analyser le comportement des structures complexes en l'occurrence les structures multicouches composites. De plus, la modélisation par la méthode des éléments finis a ouvert la porte à un domaine de recherche et de développement en proposant des modèles d'élément fini simple, efficace et qui assurent le bon compromis entre la précision et le coût. Ces modèles se basent généralement sur des théories capables d'analyser les plaques composites stratifiées ainsi que leurs comportements statiques, de flambement et dynamique etc. On trouve dans la littérature plusieurs types de modèles d'éléments finis qui ont été développés dans le but d'analyser des structures composites multicouches, et qui peuvent être regroupés en trois grandes catégories: modèles en déplacement, modèles mixtes et hybrides et des modèles d'équilibre. Les modèles éléments finis en déplacement sont basés sur des théories fondées à partir du principe de déplacement virtuel, où toutes les équations régissantes sont exprimées en termes de déplacements. Les modèles d'éléments finis mixtes et hybrides sont basés sur des méthodes variationnelle mixtes modifiées dans lesquelles les deux termes déplacements et contraintes sont considérés comme des variables indépendantes. En plus les modèles d'équilibre sont généralement basés sur le principe des forces virtuelles. D'autre part, les modèles d'éléments finis en déplacement sont les plus naturel et couramment utilisés dans la littérature et dans les programmes commerciaux des éléments finis. Nous citons dans cette section l'ensemble des livres les plus célèbres dans la littérature sur le concept de la méthode d'éléments finis et leurs applications dans les domaines d'analyse des structures composites multicouche. OC Zienkiewicz, RL Taylor [103, 104], Ochoa-Reddy [102], J.N. Reddy [105]

1.3.1 Modèles éléments finis basés sur la théorie du premier ordre [FSDT]

Au cours des dernières dizaines d'années, de nombreux modèles d'éléments finis ont été implémentés sur la base de la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (Reissner/Mindlin) pour l'analyse du comportement des plaques isotropes et composites multicouches avec la nécessité d'utiliser des facteurs de correction en cisaillement. En outre, ces types d'élément contiennent généralement cinq degrés de liberté par nœud à partir d'un champ de déplacement qui comporte une variation linéaire avec l'usage de la technique de l'intégration numérique réduite ou sélective pour éviter les problèmes du phénomène de blocage en cisaillement transversale [106]. L'avantage numérique de choisir un élément fini sur la base de la théorie du premier ordre réside dans sa simplicité de formulation, de plus il n'exige qu'une continuité C_0 . Ce modèle possède aussi des degrés de liberté et des conditions limites facile à interpréter physiquement. L'inconvénient majeur de ce type d'élément réside dans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement transversale. En outre, les calculs des contraintes de cisaillement transversal sont moins précisés à partir de l'utilisation

des équations constitutives. Toutefois, en utilisant les équations d'équilibre on obtient de meilleures estimations [44,107], L'expression des équations d'équilibre peuvent être données comme suit [15]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{1-16}$$

En outre, J.N. Reddy [108] a développé un élément fini C_0 quadrilatère à huit nœuds et de cinq degré de libertés par nœud., Cet élément est basé sur les équations régissantes de la théorie des plaques stratifiées de Yang, Norris et Stavsky [109] qui ont généralisé la théorie de Mindlin en la faisant étendre à l'analyse des plaques isotropes et anisotropes composites stratifiées et à l'analyse des plaques minces.

J.J. Engblom & O.O. Ochoa [110], J.M. Hamdallah & J.J. Engblom [111] ont développé un modèle d'élément fini de plaque quadrilatère à huit nœuds ayant sept degrés de liberté par nœud sur la base du champ de déplacement de Mindlin dans lequel ils ont défini les fonction indéterminées de rotations par la relaxation de l'hypothèse de Kirchhoff et la superposition d'une rotation de cisaillement lors d'une rotation de plan médian $\psi_x = w_{,x} + \gamma_x, \psi_y = w_{,y} + \gamma_y$ afin d'obtenir de très bons résultats des contraintes transversale à partir des équations d'équilibre .

M. Ganapathi & M. Touratier [112] ont formulé un élément fini C_0 non linéaire quadrilatère à huit nœuds basé sur la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement afin d'étudier le comportement du post-flambage des plaques stratifiées induites par le champ uniforme et non uniforme de température.

Sheikh et al. [113] ont proposé un élément fini triangulaire à 16 nœuds de 55 degrés de liberté (Figure 1-13) sur la base de la théorie du premier ordre pour l'analyse des plaques multicouches pour différentes géométries. Dans cet élément, le le déplacement transversal est exprimé est un polynôme de quatrième d'ordre complet alors que les déplacements membranaires sont exprimé avec des polynômes cubiques.

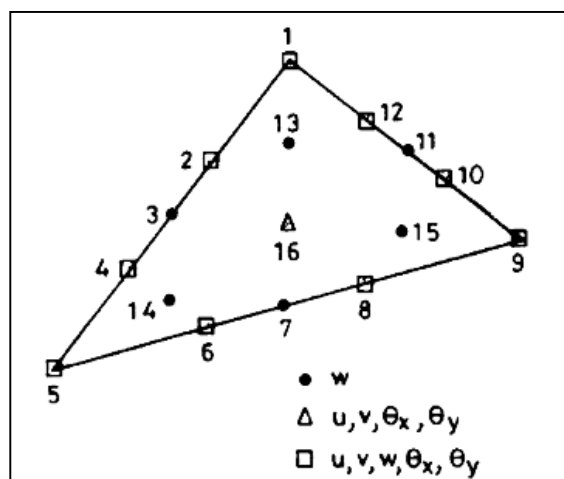


Figure 1-13 Description de l'élément à 16 nœuds de Sheikh et al [113]

D'autre part, un ensemble d'éléments finis dans la littérature basée sur la théorie du premier ordre a été adopté avec les modèles mixtes et hybrides (voir sakami [114]) les éléments de Lardeur [115] DSQ, DST qui se basent sur le modèle variationnel mixte modifié. Bouabdallah [116] a formulé un élément quadrilatère de quatre nœuds adopté au modèle mixte de type Hellinger-Reissner en contrainte. D'autres éléments de plaque et coque ont été proposés en adoptant le modèle variationnelle mixte comme Katili [117], F. Auricchio et E. Sacco [118], l'élément CTMQ20 [119], et FERDINANDO AURICCHIO, ELIO SACCO [118]. L'élément NHMiSP4/ml [120] est une coque quadrilatère Q4 courbe adoptée sur la formulation variationnelle hybride naturelle pour le comportement membranaire, ainsi que la formulation variationnelle mixte-hybride pour le comportement flexionnel et du cisaillement. Cook [121], Khatua et Cheung [122, 123] ont développé un ensemble d'éléments finis hybrides et en modèle déplacement respectivement, en incluant l'effet de déformations de cisaillement transversal pour l'analyse des plaques sandwichs minces et épaisses.

1.3.2 Modèles éléments finis basés sur les théories d'ordre supérieur [HSDT]

dans ces dernières décennies, un grand volume de recherche a été consacré au développement des modèles d'éléments finis en se basant sur la théorie d'ordre supérieur de déformation en cisaillement tentant en considération le bon compromis entre la précision et le coût afin de fournir une bonne description sur le comportement des structures multicouches sans utiliser des facteurs de correction.

En 1982 T Kant, DRJ Owen, OC Zienkiewicz [124] étaient parmi les premiers qui ont formulé des modèles d'élément finis en se basant sur la théorie d'ordre supérieur lorsque ils ont élaboré un modèle d'élément fini de type Lagrange isoparamétrique quadrilatère à neuf nœuds (Figure 1-14) contenant six degrés de liberté chaque nœuds pour l'analyse des plaques isotropes sur le comportement flexionnel en utilisant des techniques d'intégration numérique sélective et réduite afin d'obtenir de bons résultats surtout au niveau de la plaque mince. Ensuite, en 1988 Pandya, B. and T. Kant [125,

126] ont utilisé le même modèle d'élément fini pour l'analyse des plaques stratifiées symétrique en flexion. Le modèle étant basé sur le champ d'ordre supérieur suivant :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= z\psi_x(x, y) + z^3\theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= z\psi_y(x, y) + z^3\theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) + z^3\theta_z(x, y) \end{aligned} \quad (1.17)$$

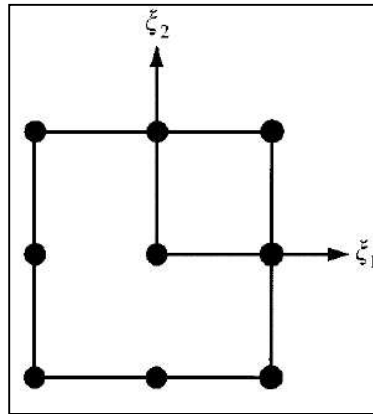


Figure 1-14 Élément fini isoparamétrique quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds

Un autre modèle a été proposé par Pandya, B. and T. Kant [127] uniquement pour l'analyse du comportement sandwich symétrique en prenant le même modèle de champ de déplacement de T Kant [124], dans lequel la variation de déplacement normal transversal est nulle. Les auteurs utilisent le même élément fini Lagrangien précédent Q9 en 5 degrés de liberté dans chaque nœud. le champ de déplacement étant le suivant :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= z\psi_x(x, y) + z^3\theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= z\psi_y(x, y) + z^3\theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Egalement, dans la même année BN Pandya, T Kant [128] ont proposé un modèle d'élément fini C_0 isoparamétrique quadrilatère basé sur un champ de déplacement d'ordre supérieur dont la variation du déplacement normal transversal est égale à zéro pour la flexion des plaques épaisses composites stratifiées. Le modèle a fournis une bonne évaluation des contraintes de cisaillement transversal et notamment dans l'interlaminaires à partir de l'utilisation des équations d'équilibre. Cet élément, est un quadrilatère de neuf nœuds Q9 qui contient neuf degrés de liberté dans chaque nœud. En 1991 Kant [129] a utilisé le même modèle pour l'analyse géométrique non-linéaire des plaques composites stratifiées et sandwich. Le champ de déplacement a été assumé comme suit :

$$u_1(x, y, z) = u(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^2\varphi_x(x, y) + z^3\theta_x(x, y) \quad (1.19)$$

$$u_2(x, y, z) = v(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^2\varphi_y(x, y) + z^3\theta_y(x, y)$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y)$$

Récemment, Tran Minh Tuet et al. [130] ont utilisé le modèle d'élément fini de BN Pandya, T Kant [128] pour l'analyse du comportement flexion et vibration des plaques composites stratifiées et sandwichs en étudiant l'effet du rapport aspect longueur épaisseur, angle d'orientation des fibres et le degré d'anisotropie.

T Kant, BS Manjunatha [131] ont élaboré un modèle d'élément fini C_0 isoparamétrique Q9 sur la base d'un champ de déplacement d'ordre trois pour l'analyse du comportement de couplage flexion-membrane des plaques composites stratifiées symétrique et sandwich asymétrique, dont le déplacement normal transversal est considéré cubique. Cet élément est un quadrilatère de neuf nœuds qui contient 12 degrés de liberté dans chaque nœud. En outre, les contraintes transversales ont été obtenues de manière précise à partir de l'utilisation des équations d'équilibre au lieu de l'utilisation des équations constitutives.

Kant, T. and J. Kommineni [129] ont proposé un modèle C_0 d'élément fini de type Lagrange isoparamétrique quadrilatère à neuf nœuds qui contient neuf degrés de liberté pour l'analyse linéaire et non linéaire des plaques stratifiées et sandwichs. Aussi, les auteurs ont utilisé des techniques d'intégration numérique sélective et complète pour une bonne description du comportement de la plaque multicouche.

Polit et Touratier [132-134] ont développé un élément fini triangulaire de six nœuds en 81 degrés de liberté en se basant sur le modèle sinusoïdal de Touratier [35]. Cet élément possède 18 degrés de liberté aux sommets et 9 degrés de liberté au milieu de chaque arête (Figure 1-15). De plus, l'élément est capable de fournir de bons résultats sur le comportement linéaire et non linéaire des plaques multicouches spécialement sur les contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur à partir des équations d'équilibre.

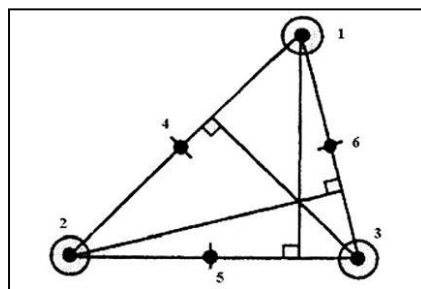


Figure 1-15 Description de l'élément triangulaire à six nœuds [132]

Raghuram et al. [135] ont développé un élément triangulaire à 18 degrés de liberté dans chaque nœud qui a été fondé sur la théorie classique des plaques en ajoutant des termes d'ordre supérieur au champ de déplacement:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) + zw_{,x}(x, y) + z^2w_{1,x}(x, y) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) + zw_{,y}(x, y) + z^2w_{1,y}(x, y)
 \end{aligned} \tag{1-20}$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y) + zw_1(x, y)$$

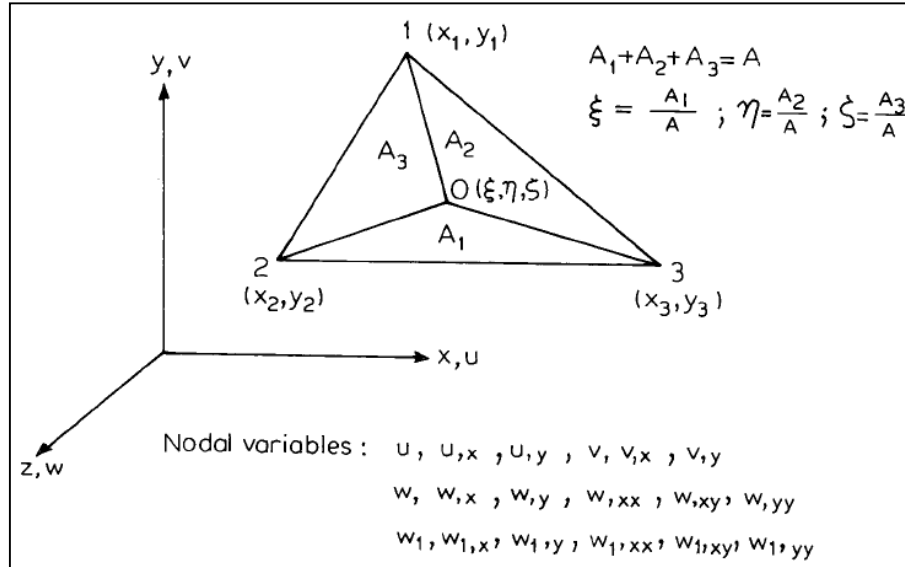


Figure 1-16 Description de l'élément triangulaire à trois nœuds de Raghuram [135]

Engblom et Ochoa [136] ont proposé un élément quadrilatère QHD40 en se basant sur la théorie d'ordre supérieur pour l'analyse des plaques multicouches. Cet élément contient huit nœuds et sept degrés de liberté pour chaque nœud aux sommets (3 déplacement, 2 rotations, 2 termes d'ordre supérieur) et trois degrés aux milieux pour chaque arête (déplacement transversal, 2 rotations). Également, les contraintes de cisaillement transversal ont été évaluées à partir de l'utilisation des équations d'équilibre, tandis que les contraintes planes ont été évaluées à partir des équations constitutives.

S Goswami, W Becker [137] ont formulé un élément fini rectangulaire de quatre nœuds à onze degrés de liberté chaque nœud pour l'analyse des plaques isotropes et composite multicouche en se basant sur la théorie d'ordre supérieur [128]. Cet élément possède neuf fonctions indéterminées au champ de déplacement et deux autres degrés de déformation en cisaillement transversal γ_{xz}, γ_{yz} .

P.Bose et J.N. Reddy [55] ont proposé un modèle d'élément fini pour la flexion et vibration naturel basé sur la théorie générale de troisième ordre (1.12) (GTTR). Le modèle possède un vecteur nodal de 13 degrés de liberté $u, v, w, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \frac{\partial \psi_z}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y}, \varphi_z, \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x \partial y}$ dans lequel l'interpolation est considérée bilinéaire C_0 pour les déplacements plans et les rotations u, v, w, ψ_x, ψ_y . Aussi une interpolation des fonctions bi cubique d'Hermite C_1 a été utilisée pour les variables ψ_z, φ_z et leurs dérivées.

Putchu and Reddy [138] ont développé un modèle d'éléments finis d'une formulation mixte pour éviter le problème de continuité C_1 (le second ordre dérivative), l'élément possède onze degrés de liberté par nœud (trois déplacements, deux rotations, six moment résultants).

C.P. Wu et al. [139, 140] ont proposé un élément fini mixte C_0 à neuf nœuds de 14 degrés de liberté dans chaque nœud (3 déplacements, 3 rotations, 5 fonctions d'ordre supérieur et 3 contraintes interlaminaires $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$). Cet élément est basé sur la théorie d'ordre supérieur qui a pu estimer les contraintes interlaminaires d'une manière précise sans recourir aux calculs supplémentaires.

En outre, certains modèles d'élément fini ont été proposés dans la littérature en se basant sur la théorie de troisième ordre de Reddy.

En 1985 N. D. PHAN et N. REDDY [141] ont développé le premier modèle déplacement d'élément fini à quatre nœuds en se basant sur la théorie de troisième ordre de Reddy pour l'analyse de flexion, de vibration et de stabilité des plaques composite stratifiées. Aussi, l'élément possède sept degrés de liberté pour chaque nœud $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \psi_x, \psi_y$. Les déplacements u, v dans le plan ainsi que les deux rotations ψ_x, ψ_y ont été interpolées sur l'élément à partir des fonctions d'interpolation bilinéaire de Lagrange. D'une part, un ensemble des fonctions d'interpolation cubique d'Hermite non conformes ont été utilisées pour la déflexion transversale w et ses dérivées. D'autre part, le modèle était utilisé dans différents types d'intégration de point de Gauss pour plus de conformité, (complète, réduite, mixte ou sélective). Les auteurs ont utilisé la technique d'intégration de points de Gauss complète sous forme 3×3 pour la contribution flexionnelle et de cisaillement, ainsi que l'intégration des points de Gauss sélective ou mixte sous forme 3×3 pour la contribution flexionnelle et 2×2 pour la contribution de cisaillement, ils ont utilisé aussi l'intégration des points de Gauss réduite sous forme 2×2 pour la contribution flexionnelle et de cisaillement. En outre, AK Ghosh, SS Dey [142] ont utilisé le même modèle d'élément fini pour l'analyse de la flexion des plaques stratifiées, lorsqu'ils ont utilisé la technique de points de Gauss complète 3×3 .

En 1986 JG Ren, E Hinton [143] ont proposé deux éléments finis simples conformes pour la flexion des plaques isotropes et stratifiées symétriques qui sont aussi des quadrilatères à quatre nœuds et qui contiennent cinq degrés de liberté dans chaque nœuds pour l'analyse du comportement flexion des plaques symétriques. Les deux éléments ont été nommés par REN1, REN2 (Figure 1-17) dont le premier se base sur la théorie modifié de Reddy (1.9) qui possède les degrés de liberté suivants $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_x, \gamma_y$ pour chaque nœud, tandis que le deuxième élément se base sur la théorie original de Reddy (1.8) qui possède les degrés de liberté $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \psi_x, \psi_y$ pour chaque nœud. De plus, l'interpolation bilinéaire de Lagrange a été utilisée pour les

fonctions de rotations $\psi_x, \psi_y, \gamma_x, \gamma_y$. D'autre part, un ensemble des fonctions d'interpolation bicubique d'Hermite non conformes ont été utilisées pour la déflexion transversale w et ses dérivées. En outre, la matrice de rigidité peut être évaluée par l'intégration numérique de points de Gauss 4×4 .

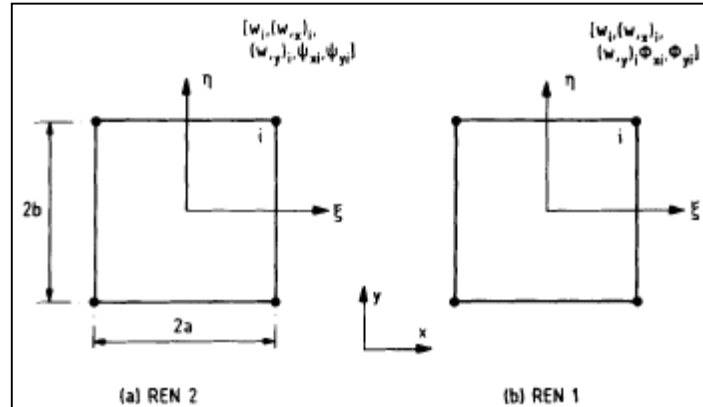


Figure 1-17 Les éléments finis de REN basés sur les théories de Reddy

Kant et pandya [144] ont formulé un modèle C_0 en déplacement d'élément fini Lagrangien quadrilatère isoparamétrique à neuf nœuds (Q9) et de sept degrés de liberté par nœud $u, v, w, \psi_x, \psi_y, \theta_x^*, \theta_y^*$ soient trois déplacements, deux rotations et deux fonctions d'ordre supérieur avec $\theta_x^* = -\frac{4}{3h^2}(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x})$, $\theta_y^* = -\frac{4}{3h^2}(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y})$. Les contraintes de cisaillement transversales ont été évaluées en utilisant les équations d'équilibre. La technique de l'intégration sélective a été utilisée pour l'établissement des matrices de rigidité

R. C. AVERILL et J. N. REDDY [49] ont proposé quatre éléments finis quadrilatères de quatre nœud basés sur les théories de Reddy, modifiée [143] et théories de Reddy originale [27], pour l'analyse de la flexion, vibration et stabilité des plaques isotropes et stratifiées symétriques Différentes techniques d'intégration numérique de Gauss ont été utilisées, (4REDC $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \psi_x, \psi_y$; 4REDNC $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \psi_x, \psi_y$; 4MREDC $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \gamma_x, \gamma_y$; 4MREDNC $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_x, \gamma_y$)

Sheikh, Chakrabarti [145] ont développé un élément fini triangulaire isoparamétrique de six nœuds (Figure 1-18) et de sept degrés de liberté par nœud $(u, v, w, \theta_x, \theta_y, \gamma_x, \gamma_y$ avec $\theta_x = (\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x})$, $\theta_y = (\gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y})$). La formulation est basée sur la théorie de Reddy modifié [49].

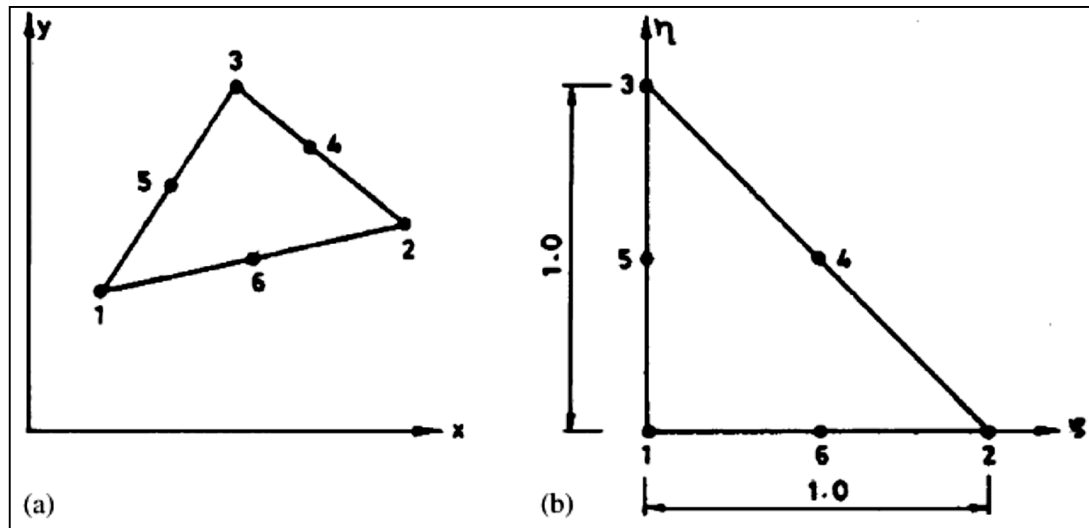


Figure 1-18 Description de l'élément triangulaire de 6 nœuds avant la transformation géométrique et après [145]

Ine-Wei Liu [146] a proposé un élément fini basé sur la théorie de Reddy, modifié [49]. L'élément est constitué de quatre nœuds de huit degrés de liberté chacun soient : $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \theta_x, \theta_y$ avec $\theta_x = \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \theta_y = \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$. Le déplacement transversal de l'élément est décrit à l'aide d'une fonction bi cubique d'interpolation d'Hermite modifiée, tandis que les déplacements dans le plan et les rotations de cisaillement ont été décrites par des fonctions bilinéaires de Lagrange. L'auteur a utilisé l'intégration 2×2 point de Gauss pour la détermination des matrices de rigidité.

Nayak et al [147] ont développé deux éléments finis Lagrangien quadrilatère Q4, et Q9 de continuité C_0 , basés sur la théorie d'ordre supérieur de Reddy [27] L'auteur a utilisé la technique des déformations naturelles de cisaillement (ANS) [148, 149] pour éviter le verrouillage en cisaillement dans le cas des plaques mince, afin d'étudier le comportement flexionnel des plaques isotropes, composites stratifiées et sandwichs. De plus, les éléments possèdent sept degrés de liberté en chaque nœud $u, v, w, \psi_x, \psi_y, \theta_x, \theta_y$ avec $\theta_x = \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \theta_y = \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$.

Rezaiee Pajand et al [150] ont proposé un nouvel élément fini triangulaire à 13 nœuds basé sur la théorie de troisième ordre de Reddy (Figure 1-19) en proposant la dérivée normale du déplacement transversal $\frac{\partial w}{\partial n}$ comme étant un degré de liberté indépendant, tous les inconnus qui sont considérés comme degrés de libertés dans ce modèle sont $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial n}$, où l'élément est défini par les cinq degrés de liberté $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ dans les nœuds (1, 2, 3, 13) respectivement, et pour les nœuds (4, 6, 7, 9, 10, 12) qui contiennent les six degrés de liberté $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial n}$ respectivement, et pour les nœuds (5, 8, 11) qui possèdent uniquement un seul degré de liberté $\frac{\partial w}{\partial n}$.

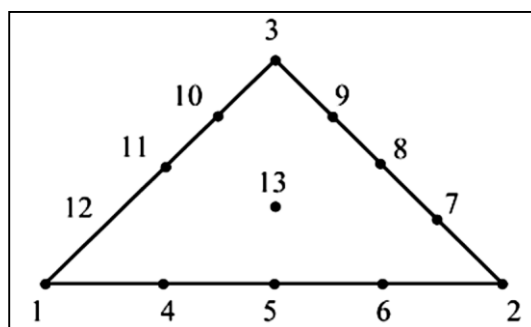


Figure 1-19 Description de l'élément à 13 nœuds [150]

Sang Jin Lee et Ha Ryong Kim [151] ont élaboré un élément fini sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy pour l'analyse du comportement des plaques composites multicouches. L'élément est un quadrilatère de type Lagrange à quatre nœuds et sept degrés de liberté par nœud $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \psi_x, \psi_y$. La méthode de déformations naturelles de cisaillement (ANS) a été utilisée pour atténuer éventuellement le problème de verrouillage en cisaillement transversal.

1.4 Revue des travaux antérieurs sur le comportement du flambage des plaques multicouches

Les expériences montrent que les structures composites qui sont largement utilisées de nos jours, deviennent instables, lorsqu'elles sont soumises à des efforts de compression. Ces efforts de compression axial sont d'origine mécanique ou thermique peuvent atteindre une valeur critique appelée force critique de flambement notamment sur les plaques multicouches minces. Par conséquent, le phénomène de flambage présente une très grande importance lors de la conception de ce type de structures. Dans la modélisation, la prise en compte de la partie non linéaire des grandes déformations permet de mettre en évidence ce phénomène.

Le flambage mécanique et le flambage thermique ont établi une branche dans la recherche sur la stabilité des structures composites multicouches.

La première analyse de flambage des plaques orthotropes et isotropes a été entreprise par Gerard et Becker [152]. Suivi d'un travail général publié en 1987 par Leissa, A. W. [153, 154] sur le flambage des plaques composites stratifiées. Par ailleurs, une revue a été publiée récemment en 2013 [155] par Jifeng Xu Qiao et al sur l'analyse du comportement de flambage et de post-flambement des éléments de structures composites.

En 1975, Noor A.K [156] a été proposée un modèle tridimensionnel qui traite les problèmes de comportement du flambage des plaques composites multicouches sur. D'autres modèles analytiques traitant les problèmes de flambage multicouches composites ont été proposés par, J.N. Reddy et N. D. Phan [34, 141], Fazzolari F et al. [157]. Khdeir A.A.(1988) [158], et M. E. Fares [159]

Des études sur la stabilité des plaques composites avec des bords encastres ont été présentées par Whitney [160], Fraser et Miller [161]. Jones et al. [5, 162] Les solutions proposées sont obtenues à l'aide de modèles analytiques du

Une solution exacte a été proposée par S Hosseini-Hashemi et al [171] pour l'analyse du comportement du flambement linéaire des plaques rectangulaires stratifiées et isotropes soumises à des charges de compression uniaxial et biaxial dans le plan en se basant sur la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy.

F.A. Fazzolari et al [157]. ont proposé une solution exacte basée sur la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy en effectuant une analyse de un ensemble des plaques composites stratifiées sur le comportement de flambement pour différentes géométries, chargements et conditions aux limites.

Par ailleurs, certains travaux ont été publiés pour l'analyse du flambage des plaques composites stratifiées à l'aide de la méthode des éléments finis. Liangxian S. and Zhiyu S. [172] ont étudié la flexion, flambage et les fréquences naturelles des plaques stratifiées symétrique à plis croisés (cross-ply) simplement appuyée, à l'aide d'un élément fini basé sur de la théorie classique des stratifiés.

Une formulation d'éléments finis a été développée par Kam TY, Chang RR. [173] sur la base de la théorie de Mindlin de la déformation de premier ordre dans laquelle les facteurs de correction de cisaillement ont été utilisés pour l'analyse de l'instabilité des plaques multicouches composites en considérant une variété de problèmes sur le flambage uniaxial et cisaillement des plaques composites stratifiées symétrique et antisymétrique et en étudiant les effets des propriétés des matériaux, plaque d'aspect ratio, rapport longueur-épaisseur, nombre de couches et l'angle de stratification.

Sundaresan P, et al. [174] ont élaboré un élément fini de type plaque à huit nœuds isoparamétrique avec 5 degrés de liberté par nœud en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre, dans lequel il est associé à des relations de déformation et déplacement non-linéaires de Von Karman pour étudier le flambage et post-flambement des plaques stratifiées modérément épaisses en différents chargements uniaxial et biaxial et conditions aux limites et rapports d'aspect.

En outre, des travaux ont été présentés concernant le flambage des structures stratifiées plaques épaisses et minces en se basant sur des théories d'ordre supérieur à l'aide de modèles d'éléments finis quadrilatères à quatre nœuds où la matrice de rigidité et géométrique ont été considérées comme Phan et Reddy [34], Reddy et Phan [141], Putcha et Reddy [138], Kozma et Ochoa [175], Ghosh et Dep [176].

Putcha N., Reddy J.N. (1986) [138] ont développé un élément fini mixte à onze degrés de liberté par nœud qui détient trois déplacements, deux rotations et six résultants de moment avec une continuité détendu sur la base de la théorie de troisième

ordre de Reddy pour l'analyse géométrique linéaire et non linéaire des plaques composite multicouche.

Chakrabarti A., Sheikh A.H., (2003) [177] ont proposé un élément triangulaire de six nœuds qui possède sept degré de liberté pour chaque nœud [145] basé sur la théorie développée de troisième ordre de Reddy [49] pour l'analyse statique et flambage des plaques composites multicouches dans différentes applications.

Singh S.K., Chakrabarti A., (2012) [178] ont proposé également un élément fini développé isoparamétrique de continue C_0 à neuf nœuds qui contient sept inconnues nodales par nœud $u, v, w, \psi_x, \psi_y, w_x, w_y$ sur la base de la théorie de zigzag d'ordre supérieur de Reddy pour l'analyse du flambage des plaques composites stratifiées.

Egalement, Ashok Kumar Ghosh , Santi Sekhar Dey [176] ont développé un élément fini rectangulaire de quatre nœuds avec sept degrés de liberté pour l'analyse des structures composites des plaques stratifiées en flambage.

SNLG Singh, GV Rao [171] ont fait une étude sur les caractéristiques de stabilité des plaques stratifiées soumises à divers types de chargement dans le plan, le rapport d'aspects et des conditions aux limites en utilisant un élément fini de quatre nœuds rectangulaire, ayant quatorze degrés de liberté par nœud en se basant sur la théorie développée d'ordre supérieur de déformation en cisaillement.

JS Moita et al.[179, 180] ont traité le flambement et vibrations libres des structures stratifiées multicouche plaques et coques en différentes géométries et charges en utilisant la monocouche équivalente sur la base de la théorie d'ordre supérieur de déformation en cisaillement. Ce modèle est développé à partir d'un élément fini C_0 sérendipe à huit nœuds avec dix degrés de liberté par nœud afin d'étudier plusieurs cas qui prennent en considération un nombre différents de couches, les angles de stratification, le rapport longueur épaisseur, ainsi que la symétrie et la non-symétrie sur les stratifiés

1.5 Conclusion

Ce premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique sur la modélisation des structures composite multicouches et l'acquisition des connaissances sur les différentes approches et modèles théoriques, en utilisant des éléments finis pour l'analyse du comportement de ces structures. En premier temps, nous avons présenté quelques notions générales et définitions concernant les matériaux multicouches fibreux composites, ainsi qu'une synthèse sur les approches, les théories et les différents modèles d'éléments finis qui servent à l'analyse du comportement des structures composites multicouches. On a aussi présenté les modèles à base de déplacement d'élément fini (2D) les plus rencontrés dans la littérature et qui se basent sur la théorie de troisième ordre de Reddy pour l'analyse du comportement de flexion et de flambage des plaques stratifiées composites.

La partie suivante sera consacrée à la proposition des nouveaux modèles d'éléments finis (2D) développés sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy en adoptant l'approche de monocouche équivalente, pour la modélisation des plaques stratifiées.

Partie 2

DEVELOPPEMENT DES NOUVEAUX
MODELE D'ELEMENTS FINIS SUR LA BASE
DE LA THEORIE DE TROISIEME ORDRE DE
REDDY

Chapitre 2

2 Proposition d'un nouveau modèle d'élément fini (TSQ28) basé sur la théorie de troisième ordre de Reddy pour l'analyse des plaques composites stratifiées

2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans la synthèse bibliographique précédente, les modèles basés sur l'approche par couche sont décrits à partir des champs d'inconnus au niveau local de chaque couche du multicouche qui sont dépendantes du nombre de couches. Par conséquent, ces types d'approches sont généralement très coûteux en termes de temps de calculs. D'autre part, on a vu également l'approche de monocouche équivalente lorsque elle fournit une réponse globale et précise du comportement du multicouche (la flèche transversale, la fréquence fondamentale de vibration, la charge critique du flambement et le moment résultant). Cette approche est couramment utilisée grâce à ses avantages tels que sa simplicité et son faible coût en termes de temps de calcul. En plus elle requiert un nombre réduit de variables indépendantes du nombre de couche du multicouche. Cependant, le seul inconvénient rencontré dans l'approche monocouche équivalente est son incapacité à évaluer les contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une manière précise, notamment aux interfaces. Tandis que, cet handicap a été contourné en utilisant les équations d'équilibres avec une bonne approximation des contraintes de cisaillement transversale. Par ailleurs, plusieurs modèles d'éléments finis à base de déplacement ont été développés et en adoptant l'approche monocouche équivalente en se basant sur différents cinématiques des théories du premier ordre ou d'ordre supérieur par lesquelles il est possible de fournir une bonne description du comportement des plaques composites multicouches, spécialement.

Habituellement, les modèles d'éléments finis en déplacement basant sur la théorie de troisième ordre de Reddy et la théorie classique utilisent l'interpolation bi cubique modifiée d'Hermite pour le déplacement transversal et ses dérivées (C1-élément) [181] ainsi que l'interpolation bilinéaire de Lagrange suivant les autres déplacements [54]. En outre, après avoir fait la recherche bibliographique sur les différents modèle d'élément finis de plaque multicouche qui sont basés sur la théorie de troisième ordre de Reddy pour l'analyse des structures multicouches composites, nous avons constaté que le nombre minimal de degrés de liberté selon les modèles d'élément fini présentés est égal à sept.

Par conséquent, le modèle proposé dans ce chapitre porte une nouvelle formulation d'élément fini (TSQ28). L'élément est un quadrilatère de quatre nœuds et sept degrés de liberté par nœud $(u, v, w, \psi_x, \psi_y, \theta_x, \theta_y)$ lorsque θ_x, θ_y sont issus à partir $\theta_x = \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \theta_y = \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$, en se basant sur la théorie originale de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy1984 [27], et en adoptant l'approche de monocouche équivalente pour l'analyse du comportement mécanique des plaques composite stratifiées.

2.2 La théorie de déformation en cisaillement de troisième ordre de Reddy

2.2.1 Cinématique

Le champ de déplacement selon la théorie original de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy (TSDT) [27] étant donné comme suit:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + z\psi_x - \frac{4z^3}{3h} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ u_2 &= v + z\psi_y - \frac{4z^3}{3h} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ u_3 &= w \end{aligned} \quad (2-1)$$

Où u, v, w, ψ_x, ψ_y sont les cinq fonctions de déplacement inconnues, où u, v, w sont les déplacements au plan médian de la plaque et ψ_x, ψ_y sont les rotations autour des axes y et x respectivement, et h est l'épaisseur de la plaque.

2.2.1.1 Champs de déformations

Les déformations associées au champ de déplacement (2-1) selon l'expression Green-Lagrange des grandes déformations non linéaires ou bien la version de Von Karman [1] étant données comme suit :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) \quad i, j = 1, 3 \quad (2-2)$$

Et l'expression de Von Karman décrite en éliminant la variation membranaire:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 3; m = 3 \quad (2-3)$$

L'expression (2-3) les déformations associées au champ de déplacement (2-1) peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \right] = \varepsilon_1^0 + z(\kappa_1^0 + z^2 \kappa_1^2) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2 \right] = \varepsilon_2^0 + z(\kappa_2^0 + z^2 \kappa_2^2) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{23} &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) = \varepsilon_4^0 + z^2 \kappa_4^2 \\ \varepsilon_{13} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) = \varepsilon_5^0 + z^2 \kappa_5^2 \\ \varepsilon_{12} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = \varepsilon_6^0 + z(\kappa_6^0 + z^2 \kappa_6^2)\end{aligned}$$

Où:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 ; \kappa_1^0 = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} ; \kappa_1^2 = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 ; \kappa_2^0 = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} ; \kappa_2^2 = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \varepsilon_4^0 &= \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} ; \kappa_4^2 = -\frac{4}{h^2} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_5^0 &= \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} ; \kappa_5^2 = -\frac{4}{h^2} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_6^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} ; \kappa_6^0 = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} ; \\ \kappa_6^2 &= -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned} \tag{2-5}$$

2.2.2 Loi de comportement du stratifié

2.2.2.1 Les équations constitutives

On considère une plaque d'épaisseur constante h du matériau orthotrope, les équations constitutives peuvent être dérivées comme étant mentionnées dans [27, 182] en négligeant les contraintes normales $\bar{\sigma}_3$. Les équations constitutives pour une couche peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{Bmatrix} \tag{2-6}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

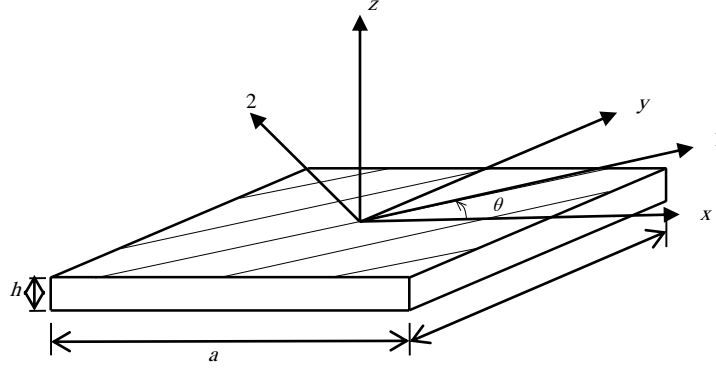


Figure 2-1 La géométrie et système des coordonnées de la plaque composite stratifiée

Où C_{ij} sont les coefficients de rigidité dans les axes du matériau orthotrope (1, 2, 3) d'une seule couche (Figure 2-1) en considérant $\bar{\sigma}_3 = 0$:

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; C_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$C_{66} = G_{12}; C_{55} = G_{13}; C_{44} = G_{23}$$

Avec E_1, E_2 représentent les modules d'Young du matériau dans les directions 1 et 2 de la plaque respectivement, et G_{12}, G_{13}, G_{23} sont les modules de cisaillement, et ν_{12}, ν_{21} sont les coefficients de Poisson.

2.2.2.2 Changement de repère

Les relations contrainte-déformation du stratifié à la k -ième couche après la transformation aux coordonnées global (x, y, z) [1] sont donnés en utilisant la matrice de transformation sous la forme suivante:

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T$$

Où :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \bar{\theta} & \sin^2 \bar{\theta} & -\sin 2\bar{\theta} & 0 & 0 \\ \sin^2 \bar{\theta} & \cos^2 \bar{\theta} & \sin 2\bar{\theta} & 0 & 0 \\ \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} & -\sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} & \cos^2 \bar{\theta} - \sin^2 \bar{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \bar{\theta} & \sin \bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

Les relations contrainte-déformation deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

On tient en compte chaque couche du stratifié doit être transformé aux coordonnées global (x, y, z) . Où \bar{C}_{ij} sont les constantes de rigidité transformées, étant données:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11}c^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})c^2s^2 + C_{22}s^4 \\ \bar{C}_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66})c^2s^2 + C_{12}(c^4 + s^4) \\ \bar{C}_{16} &= (C_{11}c^2 + (C_{12} + 2C_{66})(s^2 - c^2) - C_{22}s^2)cs \\ \bar{C}_{22} &= C_{11}s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})c^2s^2 + C_{22}c^4 \\ \bar{C}_{26} &= (C_{11}s^4 + (C_{12} + 2C_{66})(c^2 - s^2) - C_{22}c^4)cs \\ \bar{C}_{66} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{12})c^2s^2 + C_{66}(c^2 - s^2) \\ \bar{C}_{44} &= C_{44}c^2 + C_{55}s^2 \\ \bar{C}_{45} &= (C_{55} - C_{44})cs \\ \bar{C}_{55} &= C_{55}c^2 + C_{44}s^2 \end{aligned} \quad (2-9)$$

Où $c = \cos \bar{\theta}$, $s = \sin \bar{\theta}$ et $\bar{\theta}$ est l'angle entre l'axe x -global et le I -axe local de chaque couche.

2.2.3 Principe des travaux virtuels

Les équations statiques de la théorie peuvent être dérivées à partir d'utiliser le principe des travaux virtuels [27], en exprimant la variation de l'énergie de déformation comme suit:

$$\delta U - \delta V = 0 \quad (2-10)$$

δU , δV sont le travail virtuel de déformation et le travail virtuel effectué par les forces appliquées, respectivement.

L'expression des travaux virtuels (2-10) peut s'écrire comme suit:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 + \sigma_6 \delta \varepsilon_6 + \sigma_5 \delta \varepsilon_5 + \sigma_4 \delta \varepsilon_4) dAdz + \int_A q \delta W dx dy = 0 \quad (2-11)$$

D'après la substitution des relations (2-4),(2-5) dans l'équation statique (2-11) on obtient :

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \int_A [& N_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + M_1 \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + P_1 \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \right) \\
& + N_2 \frac{\partial \delta v}{\partial y} + M_2 \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \\
& + P_2 \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \right) + N_6 \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \\
& + M_6 \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \right) \\
& + P_6 \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right) \\
& + Q_2 \left(\delta \psi_y + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + R_2 \left(-\frac{4}{h^2} \left(\delta \psi_y + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right) \\
& + Q_1 \left(\delta \psi_x + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + R_1 \left(-\frac{4}{h^2} \left(\delta \psi_x + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right) \\
& + \varepsilon_{NL}^{0T} \{N\} + q \delta W] dA = 0
\end{aligned} \tag{2-12}$$

Où N_i, M_i, P_i, Q_1 et Q_2, R_1 et R_2 sont les efforts résultants à définir respectivement, résultants membranaire, résultants flexionnel et de torsion, résultants flexionnel et de torsion de troisième ordre, résultants de cisaillement, résultants de cisaillement de second ordre :

$$\begin{aligned}
(N_i, M_i, P_i) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_i(1, z, z^3) dz; \quad (i = 1, 2, 6) \\
(Q_2, R_2) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_4(1, z^2) dz \\
(Q_1, R_1) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_5(1, z^2) dz
\end{aligned} \tag{2-13}$$

$$\varepsilon_{NL}^{0T} = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]; \{N\}^T = [N_1 \quad N_2 \quad N_6]$$

Et ε_{NL}^{0T} est la partie de grand déformation de la version de Von-Karman, $\{N\}^T$ est le vecteur des efforts résultants membranaire.

Dans l'équation (2-12) il fallait de déterminer les efforts résultants obtenus à partir les équations constitutives (2-8). Par conséquent, on substitue les relations (2-4) dans (2-8), on va obtenir les relations contrainte-déformation sur la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{11z} & \bar{C}_{12z} & \bar{C}_{13z} & \bar{C}_{11z}^3 & \bar{C}_{12z}^3 & \bar{C}_{13z}^3 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{12z} & \bar{C}_{22z} & \bar{C}_{23z} & \bar{C}_{12z}^3 & \bar{C}_{22z}^3 & \bar{C}_{23z}^3 \\ \bar{C}_{61} & \bar{C}_{62} & \bar{C}_{63} & \bar{C}_{61z} & \bar{C}_{62z} & \bar{C}_{61z} & \bar{C}_{61z}^3 & \bar{C}_{62z}^3 & \bar{C}_{63z}^3 \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ \kappa_1^0 \\ \kappa_2^0 \\ \kappa_6^0 \\ \kappa_1^2 \\ \kappa_2^2 \\ \kappa_6^2 \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44z}^2 & \bar{C}_{45z}^2 \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45z}^2 & \bar{C}_{55z}^2 \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \\ \kappa_4^2 \\ \kappa_5^2 \end{Bmatrix}$$

On implique l'intégral par rapport la dimension z et en faisant la sommation pour chaque couche du stratifié $\sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k}$ sur les deux côtés de (2-14), on obtient :

-Les efforts résultants membranaires :

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{11z} & \bar{C}_{12z} & \bar{C}_{13z} & \bar{C}_{11z}^3 & \bar{C}_{12z}^3 & \bar{C}_{13z}^3 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{12z} & \bar{C}_{22z} & \bar{C}_{23z} & \bar{C}_{12z}^3 & \bar{C}_{22z}^3 & \bar{C}_{23z}^3 \\ \bar{C}_{61} & \bar{C}_{62} & \bar{C}_{63} & \bar{C}_{61z} & \bar{C}_{62z} & \bar{C}_{61z} & \bar{C}_{61z}^3 & \bar{C}_{62z}^3 & \bar{C}_{63z}^3 \end{bmatrix}_{(k)} dz \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ \kappa_1^0 \\ \kappa_2^0 \\ \kappa_6^0 \\ \kappa_1^2 \\ \kappa_2^2 \\ \kappa_6^2 \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

- Les efforts résultants flexionnels et de torsion :

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{11z} & \bar{C}_{12z} & \bar{C}_{13z} & \bar{C}_{11z}^3 & \bar{C}_{12z}^3 & \bar{C}_{13z}^3 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{12z} & \bar{C}_{22z} & \bar{C}_{23z} & \bar{C}_{12z}^3 & \bar{C}_{22z}^3 & \bar{C}_{23z}^3 \\ \bar{C}_{61} & \bar{C}_{62} & \bar{C}_{63} & \bar{C}_{61z} & \bar{C}_{62z} & \bar{C}_{61z} & \bar{C}_{61z}^3 & \bar{C}_{62z}^3 & \bar{C}_{63z}^3 \end{bmatrix}_{(k)} z dz \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ \kappa_1^0 \\ \kappa_2^0 \\ \kappa_6^0 \\ \kappa_1^2 \\ \kappa_2^2 \\ \kappa_6^2 \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

- Les efforts résultants flexionnels et de torsion de troisième ordre :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{C}_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2-21)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{C}_{ij}(1, z^2, z^4) dz, \quad (i, j = 4, 5)$$

Maintenant on substitue les efforts résultants définis dans l'équation (2-12), on obtient:

$$\int_A (\delta \varepsilon^{0T} [A] \varepsilon^0 + \delta \varepsilon^{0T} [B] \kappa^0 + \delta \varepsilon^{0T} [E] \kappa^2 + \delta \kappa^{0T} [B] \varepsilon^0 + \delta \kappa^{0T} [D] \kappa^0 + \delta \kappa^{0T} [F] \kappa^2 + \delta \kappa^{2T} [E] \varepsilon^0 + \delta \kappa^{2T} [F] \kappa^0 + \delta \kappa^{2T} [H] \kappa^2 + \delta \gamma^{sT} [A^s] \gamma^s + \delta \gamma^{sT} [D^s] \kappa^s + \delta \kappa^{sT} [D^s] \gamma^s + \delta \kappa^{sT} [F^s] \kappa^s + \varepsilon^{sT} \{N\} + q \delta w) dA = 0 \quad (2-22)$$

Où:

$$\left[\underbrace{\varepsilon_1^0 \quad \varepsilon_2^0 \quad \varepsilon_6^0}_{\varepsilon^0} \quad \underbrace{\kappa_1^0 \quad \kappa_2^0 \quad \kappa_6^0}_{\kappa^0} \quad \underbrace{\kappa_1^2 \quad \kappa_2^2 \quad \kappa_6^2}_{\kappa^2} \right]^T = \left[\varepsilon^0 \quad \kappa^0 \quad \kappa^2 \right]^T$$

$$\left[\underbrace{\varepsilon_4^0 \quad \varepsilon_5^0}_{\gamma^s} \quad \underbrace{\kappa_4^2 \quad \kappa_5^2}_{\kappa^s} \right]^T = \left[\gamma^s \quad \kappa^s \right]^T$$

2.3 Formulation du modèle d'élément fini (TSQ28)

Dans cette section, on propose d'élaborer un modèle d'élément fini de type Lagrange C_0 quadrilatère à quatre nœuds isoparamétrique basé sur la théorie de troisième ordre de Reddy (1984) [27], capable de tenir en compte d'une bonne description de l'effet de cisaillement transversale sans recourir à des facteurs de corrections pour l'analyse du comportement des plaques composite stratifiées. Ce modèle d'élément contient sept degrés de liberté dans chaque nœud $u, v, w, \psi_x, \psi_y, \theta_x, \theta_y$, trois déplacements et deux rotations et deux rotations d'ordre supérieur proposés indépendants, lorsque ces rotations d'ordre supérieur ont été considérées à partir des sommations des rotations comme suit $\theta_x = \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$, $\theta_y = \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$, De plus, ce modèle d'élément est nommé TSQ28 (Third shear quadrilateral with 28 degrees of freedom).

2.3.1 Approximation nodale

L'approximation nodale des degrés de liberté de déplacements est décrite à partir l'interpolation Lagrangienne à travers toutes coordonnées (ξ, η) pour les quatre nœuds de l'élément quadrilatère:

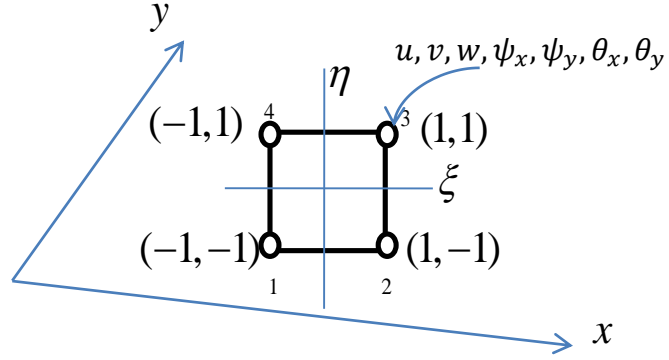


Figure 2-2 Description de l'élément TSQ28 isoparamétrique normalisé

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) u_i; & v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) v_i; \\
 w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) w_i; & \psi_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) \psi_{xi}; \\
 \psi_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) \psi_{yi}; & \theta_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) \theta_{xi}; \\
 \theta_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) \theta_{yi} & & \\
 \end{aligned} \tag{2-23}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
 \bar{N}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 \bar{N}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 \bar{N}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned}$$

$\bar{N}_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions d'interpolation bi-linéaire de type Lagrange.

2.3.2 Relations entre les déformations et déplacement nodaux

La relation d'approximation nodale du vecteur de déformation et les inconnus nodaux peuvent être pris sous les formes matricielles nodaux élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 &= [B^0_\varepsilon]^r \{\delta\} \\
\kappa^0 &= [B^0_\kappa]^r \{\delta\} \\
\kappa^2 &= [B^2_\kappa]^r \{\delta\} \\
\gamma^s &= [B^s_\varepsilon]^r \{\delta\} \\
\kappa^s &= [B^s_\kappa]^r \{\delta\}
\end{aligned} \tag{2-24}$$

Avec :

$$\{\delta\}^T = [u_i, v_i, w_i, \psi_{x_i}, \psi_{y_i}, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}]$$

$$\varepsilon^0 = [B^0_\varepsilon]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa^0 = [B^0_\kappa]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\kappa^2 &= [B_\kappa^2]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\
&= c_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \\
\gamma^s &= [B_\varepsilon^s]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & \bar{N}_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \\
\kappa^s &= [B_\kappa^s]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{h^2} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{4}{h^2} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = c_2 \begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

avec: $c_1 = -4/3h^2$, $c_2 = -4/h^2$.

2.3.2.1 Approximation nodale des coordonnées

L'interpolation géométrique de l'élément peut-être exprimé comme suit :

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i; \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i$$

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2-25)$$

2.3.3 Les dérivées des fonctions d'interpolations géométriques

Dans la formulation de l'élément proposé, les matrices déformations (2-24), exigent la première dérivée par rapport aux coordonnées réel (x, y) , autrement dit, elle nécessite le calcul des matrices de passages des dérivées (Jacobien) entre les cordonniers (x, y) et les cordonniers naturelle (ξ, η) .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2-26)$$

Les équations peuvent être écrites sur la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2-27)$$

Calcul de la matrice $[J]$:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad \text{où } (i = 1, 4)$$

2.3.3.1 Transformation du vecteur déformation membranaire ε^0

Le changement des variables au repère intrinsèque, peut être considéré comme suit :

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

La transformation a besoin d'ordre premier de dérivation :

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-29)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix}$$

La forme matricielle (2-28) devient :

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2-30)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-31)$$

La déformation membranaire peut-être prendre la convention suivante :

$$\varepsilon^0 = [B_\varepsilon^0] \{\delta\}$$

2.3.3.2 Transformation vecteur déformation flexionnel κ^0

Prenant la même procédure de transformation précédente :

$$\kappa^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2-32)$$

$$\kappa^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-33)$$

$$\kappa^0 = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-34)$$

$$\kappa^0 = [B_\kappa^0] \{\delta\}$$

2.3.3.3 Transformation du vecteur déformation flexionnel ordre supérieur κ^2

$$\kappa^2 = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2-35)$$

$$\kappa^2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-36)$$

$$\kappa^2 = \frac{c_1}{\det[J]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-37)$$

$$\kappa^2 = [B^2_{\kappa}] \{\delta\}$$

2.3.3.4 Transformation du vecteur déformation cisaillement γ^s

$$\gamma^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2-38)$$

$$\gamma^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-39)$$

$$\gamma^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\det[J]}(J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi}) & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\det[J]}(J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta}) & \bar{N}_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-40)$$

$$\gamma^s = [B^s_\varepsilon] \{\delta\}$$

2.3.3.5 Transformation du vecteur déformation cisaillement ordre supérieur κ^s

$$\kappa^s = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{h^2}(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ -\frac{4}{h^2}(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) \end{Bmatrix} = c_2 \begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-41)$$

$$\kappa^s = [B^s_\kappa] \{\delta\}$$

2.3.3.6 Transformation du vecteur de déformation non-linéaire

Les parties de grande déformation due au grand déplacement de Von-karman peuvent être écrites sous la forme matricielle comme suit en changeant les variables :

$$\int_A \varepsilon^{sT}_{NL} [N] dA = \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_6 \\ N_6 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\delta\}^T [G]^T [N_0] [G] \{\delta\} \det |J| d\xi d\eta \quad (2-42)$$

Où:

$$[G]\{\delta\} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2-43)$$

2.3.3.7 Détermination de la matrice de rigidité et de la matrice géométrique élémentaires

D'après la substitution des relations (2-31),(2-34),(2-37),(2-40),(2-41),(2-42), (2-44) dans (2-22), on obtient le système statique nodal suivant:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B^0_\varepsilon]^T [A][B^0_\varepsilon] + [B^0_\varepsilon]^T [B][B^0_\kappa] + [B^0_\varepsilon]^T [E][B^2_\kappa] + [B^0_\kappa]^T [B][B^0_\varepsilon] \\ & + [B^0_\kappa]^T [D][B^0_\kappa] + [B^0_\kappa]^T [F][B^2_\kappa] + [B^2_\kappa]^T [E][B^0_\varepsilon] + [B^2_\kappa]^T [F][B^0_\kappa] + \\ & [B^2_\kappa]^T [H][B^2_\kappa] + [B^s_\varepsilon]^T [A^s][B^s_\varepsilon] + [B^s_\varepsilon]^T [D^s][B^s_\kappa] + [B^s_\kappa]^T [D^s][B^s_\varepsilon] \\ & + [B^s_\kappa]^T [F^s][B^s_\kappa] + [G]^T [N_0][G]) \{\delta\} \det[J] d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q \{N_f\}^T \det|J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2-44)$$

$$([K]_e + [K_g]_e) \{\delta\} = \{F\}_e$$

Où le travail virtuel effectué par les forces externes est donné sous la forme suivante :

$$\int_A q \delta W dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q \delta W \det|J| d\xi d\eta = \{\delta\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q \{N_f\}^T \det|J| d\xi d\eta \quad (2-45)$$

El la matrice de rigidité élémentaire est donnée comme suit:

$$\begin{aligned} [K]_e = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B^0_\varepsilon]^T [A][B^0_\varepsilon] + [B^0_\varepsilon]^T [B][B^0_\kappa] + [B^0_\varepsilon]^T [E][B^2_\kappa] + [B^0_\kappa]^T [B][B^0_\varepsilon] \\ & + [B^0_\kappa]^T [D][B^0_\kappa] + [B^0_\kappa]^T [F][B^2_\kappa] + [B^2_\kappa]^T [E][B^0_\varepsilon] + [B^2_\kappa]^T [F][B^0_\kappa] + \\ & [B^2_\kappa]^T [H][B^2_\kappa] + [B^s_\varepsilon]^T [A^s][B^s_\varepsilon] + [B^s_\varepsilon]^T [D^s][B^s_\kappa] + [B^s_\kappa]^T [D^s][B^s_\varepsilon] \\ & + [B^s_\kappa]^T [F^s][B^s_\kappa]) \det[J] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2-46)$$

Ainsi que la matrice géométrique élémentaire :

$$[K_g]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G]^T [N_0][G] \det[J] d\xi d\eta \quad (2-47)$$

Pour un problème statique peut être utilisé la relation suivante :

$$\{F\}_e = [K]_e \{\delta\} \quad (2-48)$$

Dans l'analyse du flambement linéaire, la charge critique de flambage et les modes sont obtenus en résolvant la valeur propre de la matrice de rigidité et géométrique dans un système linéaire. L'analyse linéaire d'un problème du flambage des éléments finis pourrait être exprimée comme suit [155]:

$$\left[[K] + [K_g] \right] = \left[[K] + \lambda [K^0_g] \right] = 0 \quad (2-49)$$

Avec, $[K]$ est la matrice globale élastique de rigidité et $[K_g]$ est la matrice globale géométrique. λ représente les valeurs propre normalisées, où ($N_{cr} = \lambda N_0$). De plus, la valeur minimale de λ correspond de la charge critique normalisée du flambage de premier mode.

D'autre part, l'intégration analytique du modèle peut transformer aux techniques d'intégration numérique de points de Gauss [184]. Le présent modèle d'élément fini va utiliser l'intégration numérique de Gauss de la technique réduite pour un seul point (1×1), pour plus de performance du modèle et afin de lever le problème de verrouillage en cisaillement dans les plaques minces.

2.4 Calcul de contraintes à partir les équations constitutives

Dans cette section on prend en considération l'utilisation des équations constitutives pour l'évaluation des contraintes distribuées à travers l'épaisseur de la plaque.

Après avoir substituées les matrices déformations élémentaires obtenues précédemment (2-31), (2-34), (2-37), (2-40), (2-41) dans les relations (2-6), on peut obtenir la distribution des contraintes à travers l'épaisseur chaque fois en variant le paramètre z :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \{ [B_\varepsilon^0] + [B_\kappa^0] + [B_\kappa^2] \} \{ \delta \} \quad (2-50)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \{ [B_\varepsilon^s] + [B_\kappa^s] \} \{ \delta \}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouveau modèle d'élément fini (TSQ28) quadrilatère isoparamétrique à quatre nœuds a été développé en se basant sur la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy1984 [27] en adoptant l'approche de monocouche équivalente. Cet élément possède sept degrés de liberté en chaque nœud, trois déplacements, deux rotations, deux autres rotations d'ordre supérieur proposés $u, v, w, \psi_x, \psi_y, \theta_x, \theta_y$ dont $\theta_x = \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \theta_y = \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$. Où ces degrés ont été

décrits à partir une approximation des fonctions d'interpolation bilinéaire Lagrangienne. De plus, la formulation a été élaborée en prenant en considération l'effet de cisaillement transversal pour l'analyse du comportement flexion et de flambage des plaques composites stratifiées sans recourir à des facteurs de correction.

Le chapitre suivant sera destiné à valider l'élément proposé (TSQ28) afin de vérifier sa performance en termes de la précision et stabilité à partir d'une série d'exemples concernant les plaques isotropes et composites stratifiées sur le comportement de flexion et de flambage.

Chapitre 3

3 Validation numérique du modèle d'élément fini de plaque stratifiée (TSQ28)

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous procédons à la vérification de la performance de l'élément fini proposé en termes de convergence et de précision dans l'analyse du comportement de flexion et de flambage des plaques multicouches. La validation et la comparaison consistent à considérer un ensemble d'exemples les plus connus dans la littérature. Différentes références ont été considérées, Il s'agit des solutions analytiques et des solutions par des modèles numériques de même ordre.

3.2 Validation numérique de l'élément (TSQ28) en flexion

Dans cette section, certains tests numériques les plus connus dans la littérature ont été proposés, afin de valider et d'analyser la performance de l'élément proposé sur le comportement de flexion des plaques isotropes et stratifiées carrées et rectangulaires symétriques et antisymétriques.

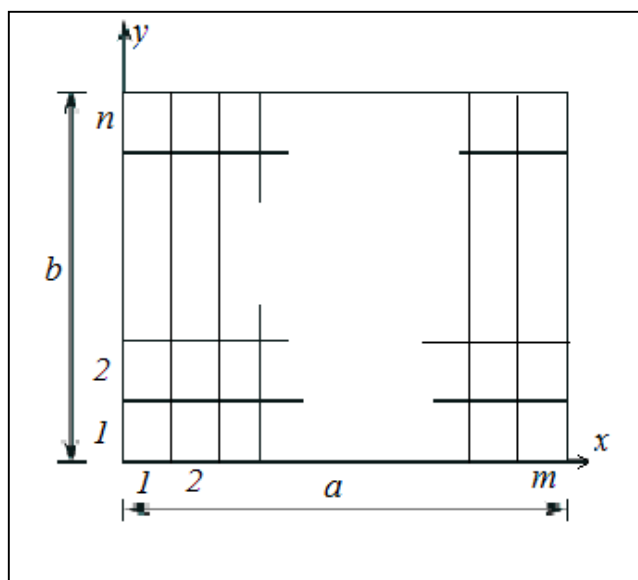


Figure 3-1 Maillage régulier de la plaque rectangulaire de $m \times n$

3.2.1 Conditions aux limites adoptées et propriétés des matériaux utilisé

Les types des conditions aux limites utilisées dans ce chapitre sont données comme suit; deux types simplement appuyées (SS1),(SS2), et un seul type encasté (En) qui sont considérées autour des bords de la plaque.

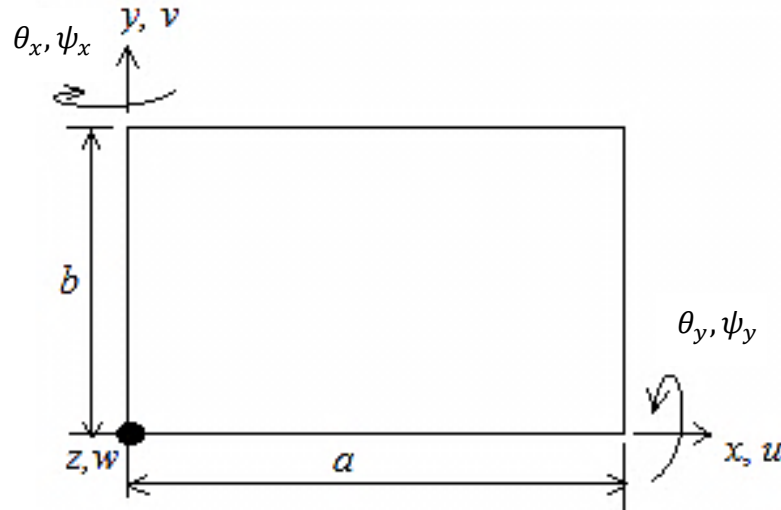


Figure 3-2 Description des degrés de liberté selon le repère (x,y,z)

SS1: $x=0, a \rightarrow v = w = \psi_y = \theta_y = 0$; $y=0, b \rightarrow u = w = \psi_x = \theta_x = 0$

SS2: $x=0, a \rightarrow u = w = \psi_x = \theta_x = 0$; $y=0, b \rightarrow v = w = \psi_y = \theta_y = 0$

En: $x=0, a \rightarrow u = v = w = \psi_x = \psi_y = \theta_x = \theta_y = 0$; $y=0, b \rightarrow u = v = w = \psi_x = \psi_y = \theta_x = \theta_y = 0$

Les propriétés de matériaux utilisées sont données comme suit :

M1 : $E_1/E_2 = 25$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$

M2 : $E_1/E_2 = 40$, $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$, $G_{23} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = 0.25$

Les chargements utilisés sont des chargements sinusoïdal et uniforme transversal de flexion sous les formules suivantes :

$$L1: q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \text{ (charge sinusoïdale);}$$

$$L2: q(x, y) = 1 \text{ (charge uniforme)}$$

3.2.2 Test maillage de convergence

3.2.2.1 Plaque stratifiée carrée (0/90/90/0)

Dans cet exemple, un test de maillage de convergence pour le présent élément proposé a été considéré, en prenant une plaque stratifiée symétrique carrée simplement appuyée (SS1) à quatre couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) épaisse et mince du rapport $a/h=10,100$ respectivement sous un chargement sinusoïdal, afin de vérifier la performance de convergence de l'élément dans différents maillages 4×4 , 8×8 , 12×12 , 16×16 en

déterminant la flèche adimensionnelle au centre de la plaque. Les résultats obtenus adimensionnels ont été comparés avec ceux obtenus analytiquement par la solution d'élasticité 3D [12] et avec ceux obtenus par la solution d'élément fini de même ordre par SJ Lee and HR Kim [151].

les formules de normalisation sont données comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{w} &= w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) (h^3 E_2 / q_0 a^4) 10^2, \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) (h^2 / q_0 a^2) \\ \bar{\sigma}_{yy} &= \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4}\right) (h^2 / q_0 a^2), \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2}\right) (h^2 / q_0 a^2) \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0\right) (h / q_0 a), \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) (h / q_0 a)\end{aligned}$$

Tableau 3-1 Test de convergence de la flèche d'une plaque stratifiée simplement appuyée symétrique (0° / 90° / 90° / 0°) sous une charge transversale sinusoïdale

a/h	Reference	Maillage	\bar{w}
10	Présent	4×4	0.7568
	Lee		0.6975
	Présent	8×8	0.7291
	Lee		0.7147
	Présent	12×12	0.7243
	Lee		0.7179
	Présent	16×16	0.7226
	Lee		0.7190
	Elasticité	-	0.7430
100	Présent	4×4	0.4369
	Lee		0.4124
	Présent	8×8	0.4348
	Lee		0.4291
	Présent	12×12	0.4345
	Lee		0.4320
	Présent	16×16	0.4344
	Lee		0.4331
	Elasticité	-	0.4347

Le modèle fournit des résultats d'excellent accord ceux qui figurent sur le Tableau 3-1 et la Figure 3-3, on remarque que le présent modèle d'élément fini développé (TSQ28) fournit des réponses très satisfaisantes en termes de stabilité et rapidité de convergence, mieux que celui de l'élément quadrilatère de Lee relativement que celle de la solution 3D.

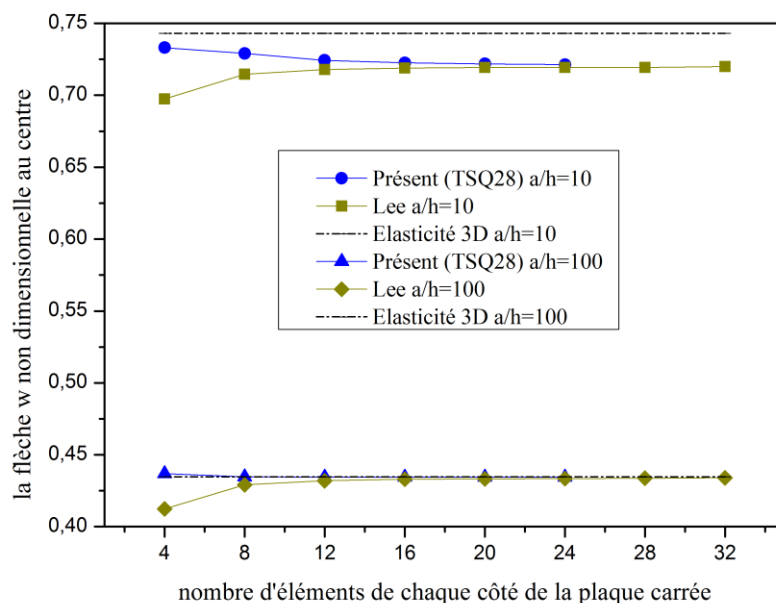


Figure 3-3 La convergence de la flèche du présent élément fini (TSQ28) d'une plaque carrée stratifiée (0/90/90/0), rapport $a/h = 10$ et 100 .

3.2.2.2 Plaque isotrope carrée

Un autre test de maillage de convergence pour le présent élément a été considéré en prenant une plaque isotrope carrée simplement appuyé SS1 épaisse et mince du rapport $a/h=10,100$ respectivement, afin de vérifier la convergence de l'élément dans différents maillages 4×4 , 8×8 , 12×12 , 16×16 , en déterminant la flèche adimensionnelle au centre de la plaque. Les résultats obtenus ont été montrés dans le Tableau 3-2 et la Figure 3-4 lorsque dans lesquels le présent élément offre un bon accord et bonne convergence comparable à ceux obtenus analytiquement par Reddy [145] et à ceux obtenus numériquement par le modèle d'élément fini triangulaire de Sheikh [145].

La valeur adimensionnelle de la flèche est décrite à partir : $\bar{w} = 100wD/qa^4$ où $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$.

Tableau 3-2 Test de convergence de la flèche d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée sous un chargement uniforme.

a/h	Reference	Maillage	\bar{w}
10	Présent	4×4	0,4245
	Sheikh		0.4298
	Présent	8×8	0.4293
	Sheikh		0.4280
	Présent	12×12	0.4282

	<i>Sheikh</i>		0.4275
	<i>Présent</i>	16×16	0.4278
	<i>Sheikh</i>		0.4274
	<i>Présent</i>	20×20	0.4275
	<i>Reddy</i>	-	0.4273
100	<i>Présent</i>	4×4	0.4027
	<i>Sheikh</i>		0.4089
	<i>Présent</i>	8×8	0.4079
	<i>Sheikh</i>		0.4071
	<i>Présent</i>	12×12	0.4071
	<i>Sheikh</i>		0.4067
	<i>Présent</i>	16×16	0.4068
	<i>Sheikh</i>		0.4066
	<i>Présent</i>	20×20	0.4067
	<i>Reddy</i>	-	0.4064

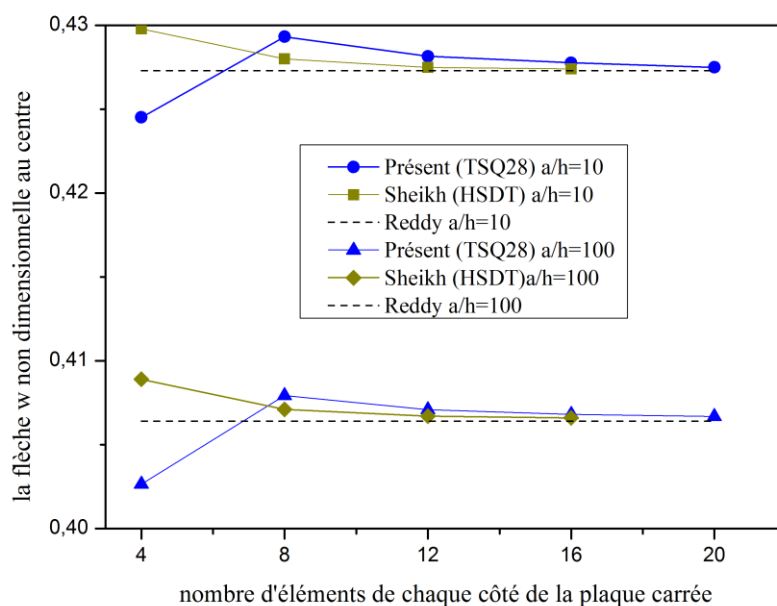


Figure 3-4 La convergence de la flèche du présent élément fini (TSQ28) d'une plaque isotrope carrée, rapport $a/h = 10$ et 100 .

3.2.3 Exemples numériques

Après avoir vérifié la performance du présent élément fini développé en termes de convergence et la précision en flexion des plaques isotrope et stratifiée à partir de l'utilisation de l'intégration numérique réduite (R) de points de Gauss, nous ferons une

extension du modèle à partir d'un ensemble d'exemples de validation et comparaison connus dans la littérature afin de mettre en évidence la performance du présent modèle (TSQ28) sur le comportement de flexion des plaques stratifiées dans différentes applications.

3.2.3.1 *Plaques isotropes rectangulaire simplement appuyée*

Dans cet exemple, une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée (SS1) a été considérée dans différents rapport d'aspects a/h et a/b et ν et soumise à un chargement uniforme pour déterminer la flèche maximal et contraintes de cisaillement transversal de la plaque, afin de vérifier la performance du présent modèle (TSQ28) sur le comportement flexionnel des plaques isotrope rectangulaire.

De bons résultats ont été obtenus (Tableau 3-3) à partir du présent modèle en comparant à ceux obtenus analytiquement par Kant et *al.*[191].

Tableau 3-3 La flèche maximale et contrainte de cisaillement transversal d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée

ν	a/b	a/h	$\bar{w} = w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) \frac{D}{h \cdot q_0}$		$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right) \frac{1}{q_0}$		
			Présent(16×16)	Elasticity	Présent(16×16)	Elasticity	
0.2	0.2	20	8736.4	8770,72	15.16	14.71	
		10	557.3	558,175	6.445	7.313	
		7,14	148.59	148,39	4.279	5.183	
	0.5	20	6867.1	6855,07	12.528	13.615	
		10	437.83	437,52	6.244	6.765	
		7,14	117.32	116,73	4.455	4.792	
	0.3	1	20	2767.9	2761,31	9.4	9.8
			10	179.66	178,446	4.66	4.85
			7,14	48.913	48,446	3.315	3.422
2	20	437.85	437,52	4.901	5.190		
	10	29.99	29,604	2.438	2.552		
	7,14	8.65	8,44	1.727	1.785		
0.2	1	10	204.06	203.15	4.669	4.846	
0.4	1	10	155.27	153.76	4.648	4.846	

3.2.3.2 *Plaque stratifiée carrée symétrique (0/90/90/0) sous un chargement*

sinusoïdal

On considère une plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply (0/90/90/0) simplement appuyée (SS1) soumise à une charge sinusoïdale L1 afin d'analyser son comportement en flexion et notamment à travers l'épaisseur, en calculant la flèche adimensionnel centrale et les contraintes de la plaque chaque fois en augmentant le rapport longueur/épaisseur ($a/h=100,20,10,4$).

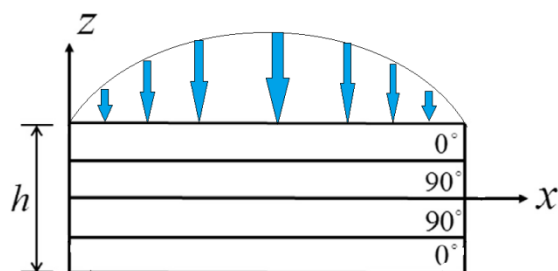


Figure 3-5 Description de la structure stratifiée de quatre couches (cross/ply)

Dans le Tableau 3-4, des résultats très satisfaisants ont été obtenus en prenant le maillage 16×16 du présent élément en comparant à ceux obtenus par l'élément HSA4 de Lee [151] et avec ceux obtenus analytiquement par la solution d'élasticité 3D [12] et Reddy TSDT, FSDT [27].

Tableau 3-4 La flèche adimensionnels et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
FSDT (Reddy)		1.7100	0.4059	0.5765	0.0308	0.1398	0.1963
HSDT (Reddy)		1.8937	0.6651	0.6322	0.0440	0.2064	0.2389
Elasticity (Pagano)	4	1.954	0.72	0.666	0.0467	0.219	0.292
HSA4(16×16)		1.9014	0.6973	0.6245	0.0456	0.2112	0.2439
Présent(16×16)		1.9116	0.7046	0.6298	0.0457	0.2126	0.2460
FSDT (Reddy)		0.6628	0.4989	0.3615	0.0241	0.1667	0.1292
HSDT (Reddy)		0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	0.1531
Elasticity (Pagano)	10	0.743	0.559	0.401	0.0275	0.301	0.196
HSA4(16×16)		0.7190	0.5547	0.3872	0.0270	0.2807	0.1580
Présent(16×16)		0.7226	0.5594	0.3905	0.0270	0.283	0.1588
FSDT (Reddy)		0.4912	0.5273	0.2957	0.0221	0.1749	0.1087
HSDT (Reddy)		0.506	0.5393	0.3043	0.0228	0.2825	0.1234
Elasticity (Pagano)	20	0.517	0.543	0.308	0.0230	0.328	0.156
HSA4(16×16)		0.5065	0.5379	0.3021	0.0227	0.3028	0.1267

<i>Présent(16×16)</i>		0.5086	0.5421	0.3045	0.0227	0.3053	0.1274
<i>FSDT (Reddy)</i>		0.4337	0.5382	0.2705	0.0213	0.178	0.139
<i>HSDT (Reddy)</i>		0.4343	0.5387	0.2708	0.0213	0.2897	0.139
<i>Elasticity (Pagano)</i>	100	0.4347	0.539	0.271	0.0214	0.339	0.141
<i>HSA4(16×16)</i>		0.4331	0.5333	0.2681	0.0211	0.3114	0.1142
<i>Présent(16×16)</i>		0.4345	0.5373	0.270	0.0211	0.3141	0.1148

3.2.3.2.1 Effet du rapport longueur/épaisseur (a/h)

On reprend les résultats obtenus de la flèche du dernier exemple pour chaque cas du ratio ($a/h=100,20,10,4$) sous forme une courbe (Figure 3-6), afin montrer la convergence des résultats du présent élément sont comparable avec ceux obtenus analytiquement par la solution d'Elasticité de Pagano [12] et ceux obtenus par des modèle d'élément fini de même ordre de Lee [151].

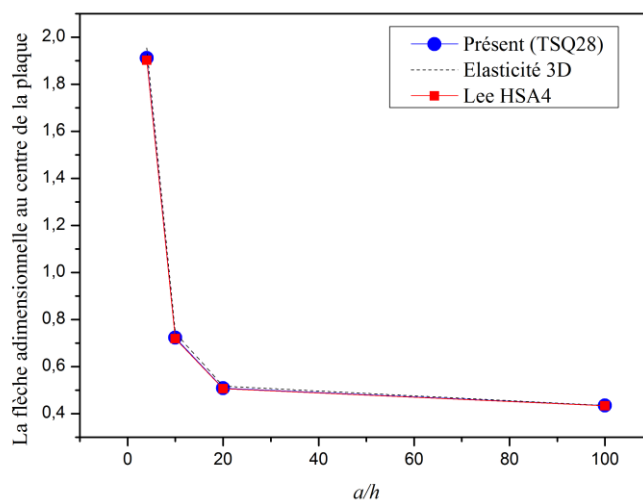


Figure 3-6 Variation de la flèche centrale adimensionnelle d'une plaque stratifiée symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) en fonction du rapport a/h

3.2.3.2.2 La distribution des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque ($0/90/90/0$)

Le modèle présente aux Figures (3-7, 3-8, 3-9, 3-12, 3-13, 3-14) des bonnes distributions des contraintes normal à travers l'épaisseur de la même plaque précédente stratifiée cross-ply ($0/90/90/0$) pour le rapport $a/h=10,4$. Les résultats ont été calculés à partir les équations constitutive en comparant à ceux obtenus par des modèles numérique basés sur des théories d'ordre supérieur et de premier ordre [HSDT], [FSDT]

[187], et avec ceux obtenus par des théories hyperbolique de déformation en cisaillement (HSDPT) Soldatos [56].

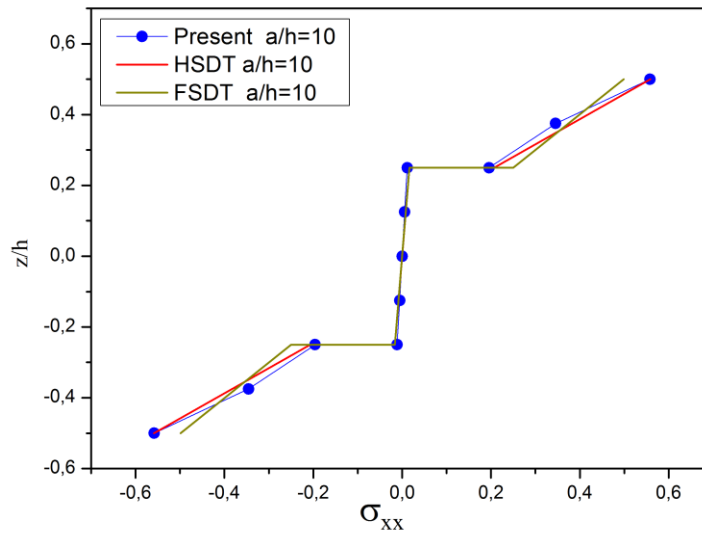


Figure 3-7 La distribution de la contrainte normale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale du rapport $a/h = 10$

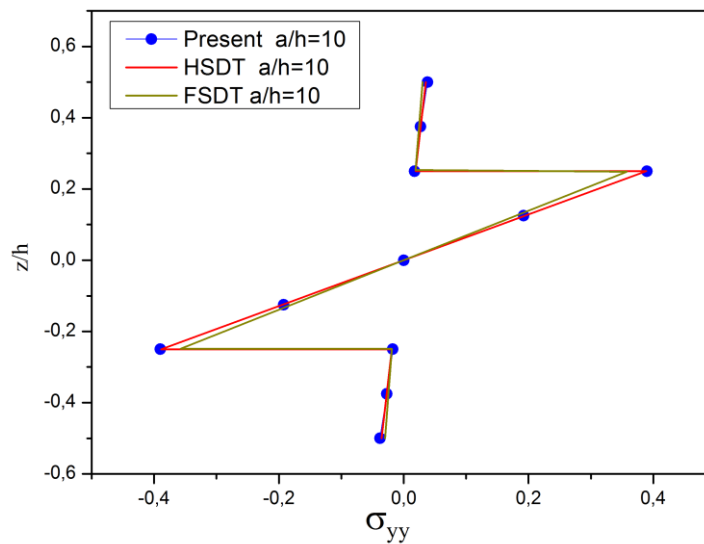


Figure 3-8 La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

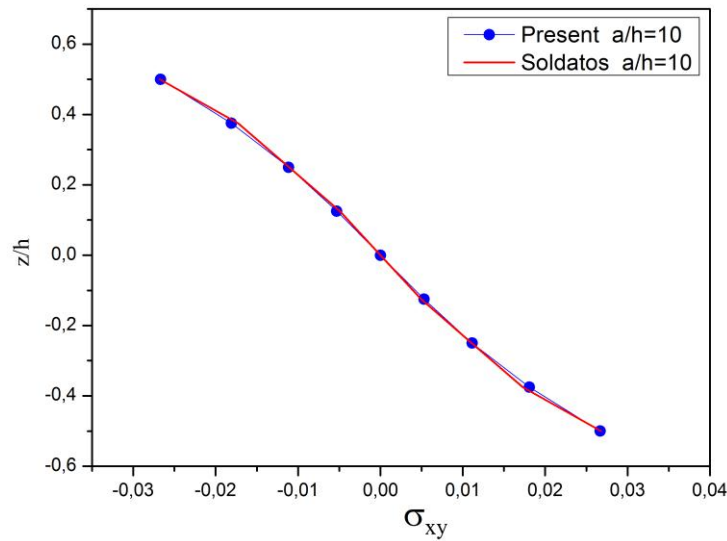


Figure 3-9. La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale de rapport $a/h=10$

De plus, les Figures (3-15, 3-16) présentent de bonnes distributions paraboliques de cisaillements transversales σ_{yz} , σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0) pour les rapports $a/h=10,4$ sans recourir à des facteurs de correction. Cependant, la distribution a été évaluée discontinues aux interfaces du stratifié comparable avec ceux obtenus analytiquement par la théorie de troisième ordre de Reddy et la théorie de premier ordre [27].

Par conséquent, les modèles qui sont basés sur les équations constitutives sont souvent moins précis aux contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée, ainsi qu'ils n'assurent pas la continuité au niveau d'interfaces lorsque les orientations des couches sont différentes, comparable à ceux obtenu analytiquement par l'Elasticité 3D de Pagano [28].

En addition, cette dernière nous amène peut être à recourir dans le future scientifique à intégrer les équations d'équilibre pour obtenir des valeurs améliorées de cisaillement transversal à partir du modèle proposé d'élément fini, ainsi que pour assurer la continuité au niveau d'interfaces et notamment la nullité aux conditions limites des surfaces supérieures et inférieures de la plaque. En revanche, les équations d'équilibre exigent beaucoup de calcul en comparant avec l'utilisation des équations constitutives.

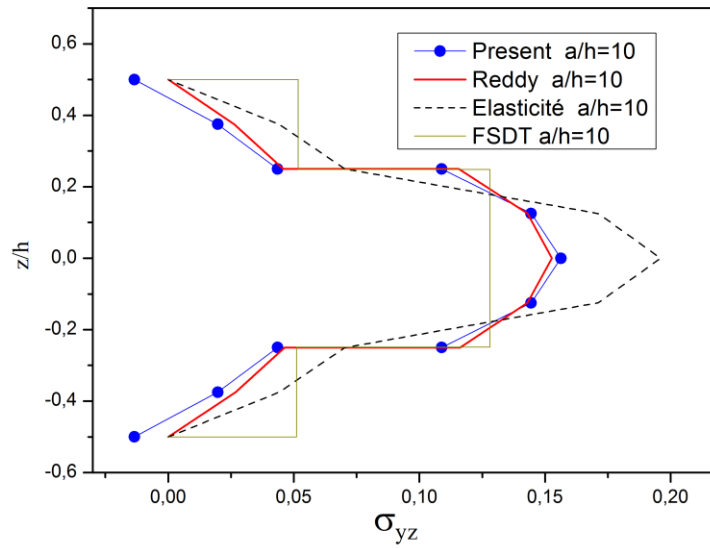


Figure 3-10 La distribution de la contrainte transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale $a/h = 10$

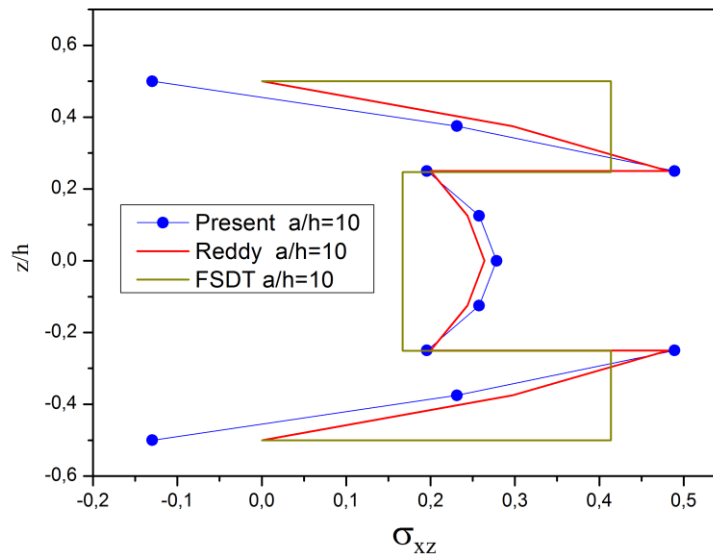


Figure 3-11 La distribution de la contrainte transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale $a/h = 10$

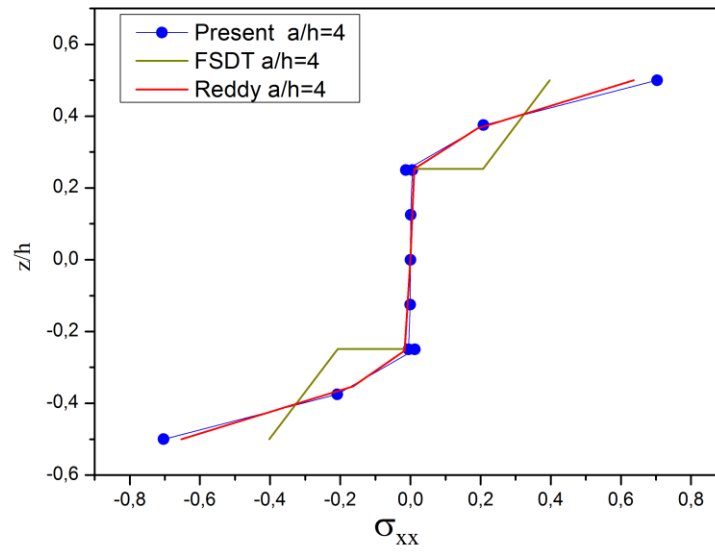


Figure 3-12 La distribution de la contrainte normale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous une charge sinusoïdale $a/h = 4$

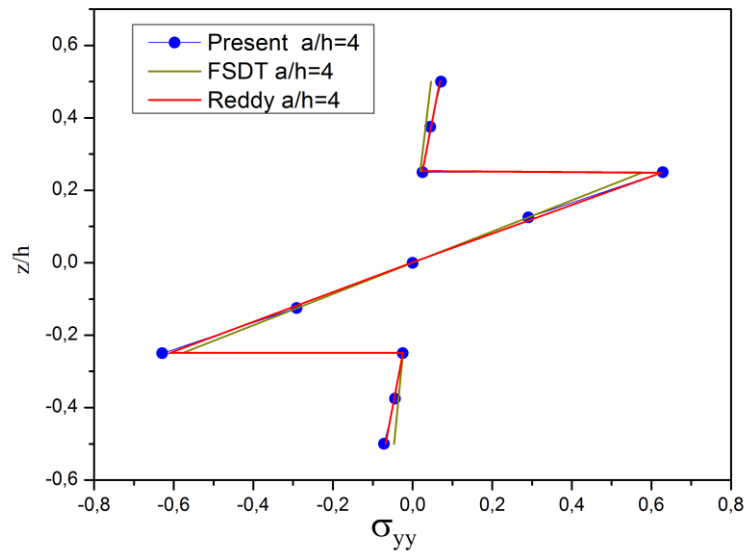


Figure 3-13 La distribution de la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale $a/h = 4$

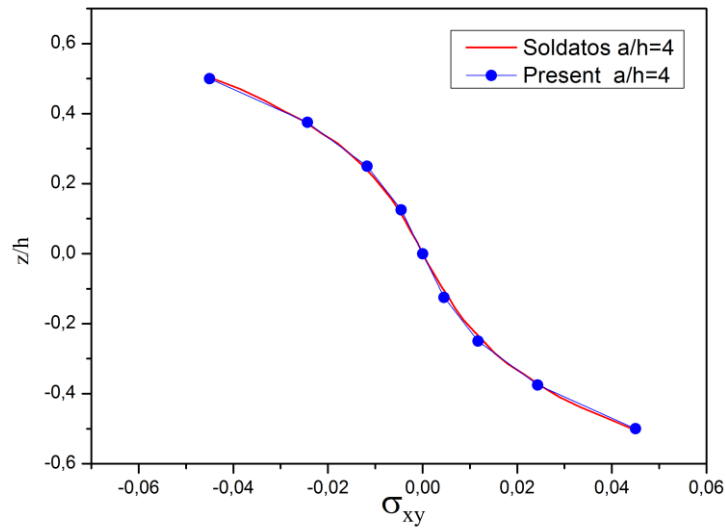


Figure 3-14 La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale $a/h = 4$

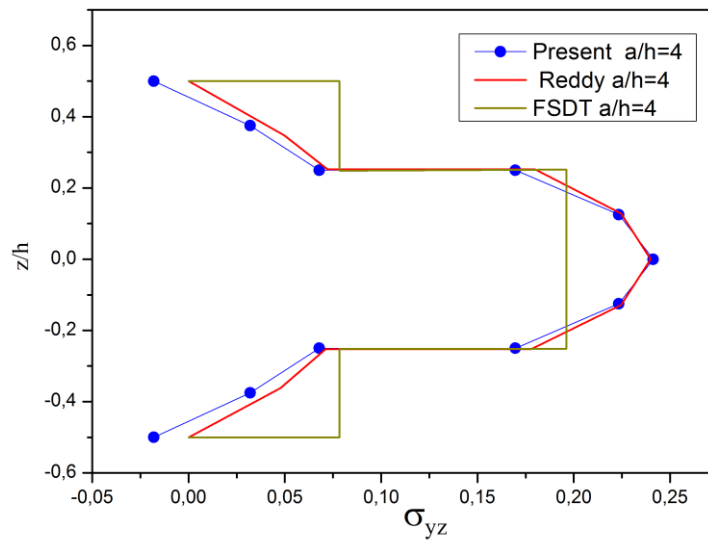


Figure 3-15 La distribution de la contrainte transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale $a/h = 4$

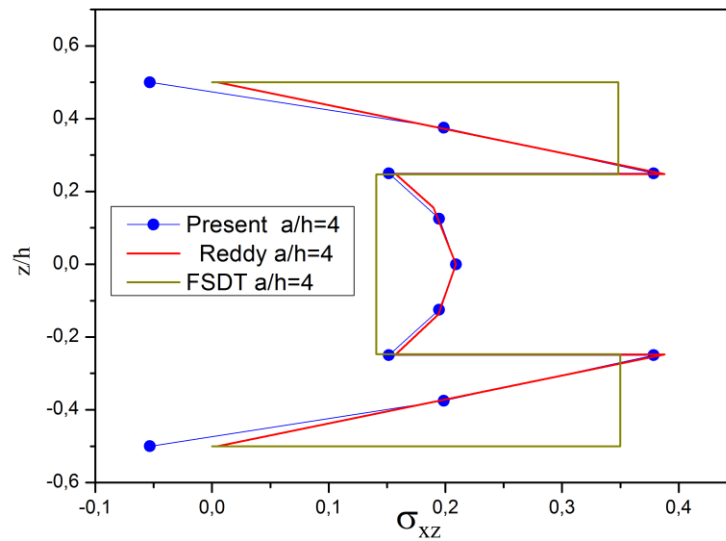


Figure 3-16 La distribution de la contrainte normal σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale $a/h = 4$

3.2.3.3 Plaque stratifiée carrée symétrique (0/90/0) soumise à une charge uniforme

Dans cet exemple, une plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique à trois couches (0/90/0) a été considérée pour déterminer la flèche centrale dans différents ratio d'aspect a/h , dont la plaque possède sur ses quatre côtés des conditions aux limites type simplement appuyée (SS1) et soumise à un chargement uniforme L2, propriétés du matériau M1.

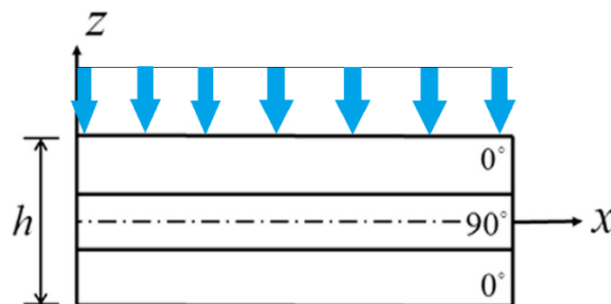


Figure 3-17 Description de la structure stratifiée de trois couches (cross-ply)

Des résultats satisfaisants ont été obtenus de la flèche centrale par le présent modèle d'élément fini, ainsi qu'il fournit un bon accord en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy [27] et à ceux obtenus numériquement par Sheikh and Chakrabarti [145].

Tableau 3-5 la flèche centrale adimensionnel d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement uniforme

Références	(a/h) thickness ratio		
	4	10	100
Present Mesh:8×8	2. 9606	1. 1076	0.6753
Present Mesh:12×12	2. 9314	1. 1021	0.6726
Present Mesh:16×16	2. 9217	1. 1003	0.6717
Present Mesh:20×20	2. 9164	1.0992	0.6712
Sheikh&Chakrabarti	2.9103	1.0910	0.6720
Reddy	2.9091	1.0900	0.6705

3.2.3.4 Plaque stratifiée carrée symétrique (0/90/0) soumise à une charge sinusoïdale

Dans cet exemple, on considère une plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique à trois couches (0/90/0) simplement appuyée sur les quatre côtés (SS1) et soumise à un chargement sinusoïdal L1, ayant des propriétés du matériau M1, afin de déterminer la flèche adimensionnelle centrale et les contraintes maximal de la plaque dans différents ratio aspect a/h . Des résultats très satisfaisants ont été obtenus en comparant à ceux obtenus analytiquement par la solution d'Elasticité 3D Pagano [10] et de Reddy [27] et à ceux obtenu par des modèles d'éléments finis de même ordre [HSDT] et le premier ordre [FSDT] par Sheikh [145].

Tableau 3-6 la flèche adimensionnelles et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
FSDT (16×16) (Sheikh)	4	1.777	0.4430	0.4843	0.0371	0.1440	0.1569
HSDT (16×16)(Sheikh)		1.923	0.7500	0.5080	0.0499	0.2023	0.1831
Reddy		1.9218	0.7345	-	-	-	0.1832
Elasticity(Pagano)		2.006	0.755	0.556	0.0505	0.282	0.2172
Present(16×16)		1. 936	0.7657	0.5073	0.0495	0.2061	0.1797
FSDT (16×16) (Sheikh)	10	0.6700	0.5219	0.2582	0.025	0.1623	0.0918

<i>HSDT</i> (16×16)(<i>Sheikh</i>)		0.7140	0.5806	0.2722	0.0279	0.2437	0.1015
<i>Reddy</i>		0.7125	0.5684	-	-	-	0.1033
<i>Elasticity</i> (<i>Pagano</i>)		0.7405	0.5900	0.288	0.0289	0.3570	0.1228
<i>Present</i> (16×16)		0.7198	0.5833	0.2709	0.0278	0.2610	0.1017
<i>Elasticity</i> (<i>Pagano</i>)	20	0.5142	0.552	0.210	0.0234	0.3850	0.0938
<i>Present</i> (16×16)		0.5065	0.5492	0.2046	0.0229	0.2745	0.0808
<i>FSDT</i> (16×16) (<i>Sheikh</i>)	100	0.4350	0.5490	0.1825	0.0202	0.1568	0.0709
<i>HSDT</i> (16×16)(<i>Sheikh</i>)		0.4350	0.5496	0.1828	0.0215	0.2401	0.0749
<i>Reddy</i>		0.4342	0.5390	-	-	-	0.0750
<i>Elasticity</i> (<i>Pagano</i>)		0.4368	0.5390	0.1810	0.0213	0.3950	0.0828
<i>Present</i> (16×16)		0.4344	0.5376	0.1801	0.0211	0.2794	0.0731

De plus, les valeurs fournissent aux tableaux et figures pour la plaque (0/90/0) sont décrites en utilisant les formules de normalisation ci-dessous:

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) (h^3 E_2 / q_0 a^4) 10^2, \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{6} \right) (h^2 / q_0 a^2), \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) (h / q_0 a), \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) (h / q_0 a)$$

3.2.3.4.1 Distribution des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque (0/90/0)

La structure de type plaque cross-ply symétrique (0/90/0) l'une des exemples les plus utilisés dans la littérature pour la validation. D'autre part, cette structure a été traitée par la solution exacte de Pagano [10] et elle est considérée comme une référence essentielle dans la littérature.

Aux Figures (3-18, 3-19, 3-20, 3-25, 3-26, 3-27) les courbes présentent des bonnes distributions obtenues des contraintes normal à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) sous une charge sinusoïdale du rapport $a/h=10,4$ en comparant à ceux obtenus analytiquement par l'Elasticité de Pagano et à ceux obtenus par la théorie (HSDPT) de Soldatos [56].

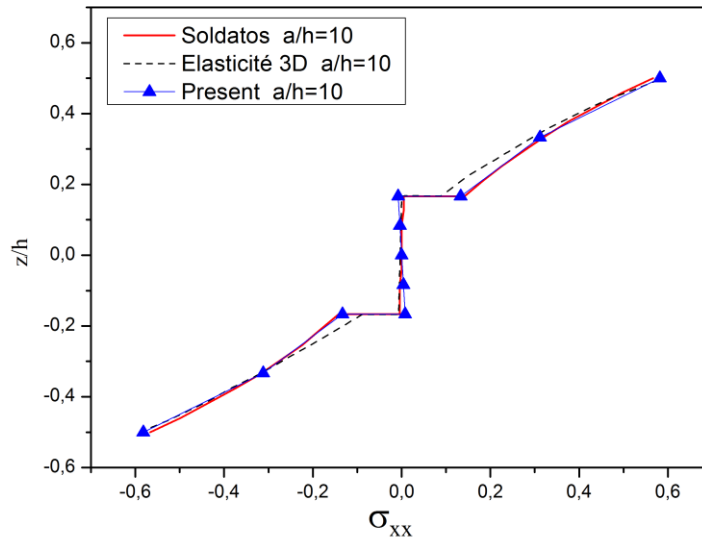


Figure 3-18 La distribution de la contrainte normale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

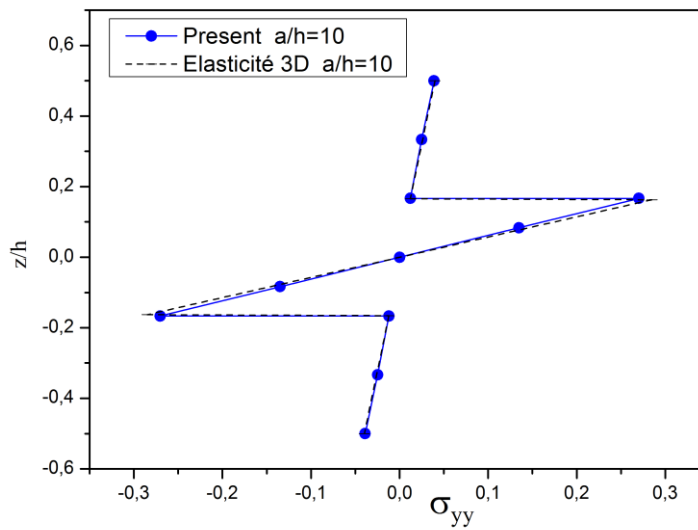


Figure 3-19 La distribution de la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

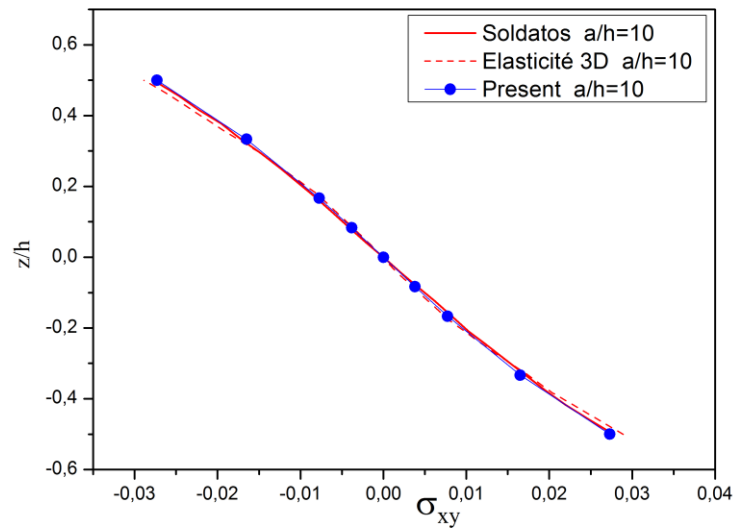


Figure 3-20 La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

En addition, à partir des Figures (3-21, 3-24, 3-26, 3-27) le présent élément fournit une bonne distribution parabolique des contraintes de cisaillements transversal σ_{yz} , σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque sans recourir à des facteurs de correction en comparant à ceux obtenus analytiquement par la solution 3D d'Elasticité de Pagano [10] et la théorie (HSDPT) de Soldatos [56].

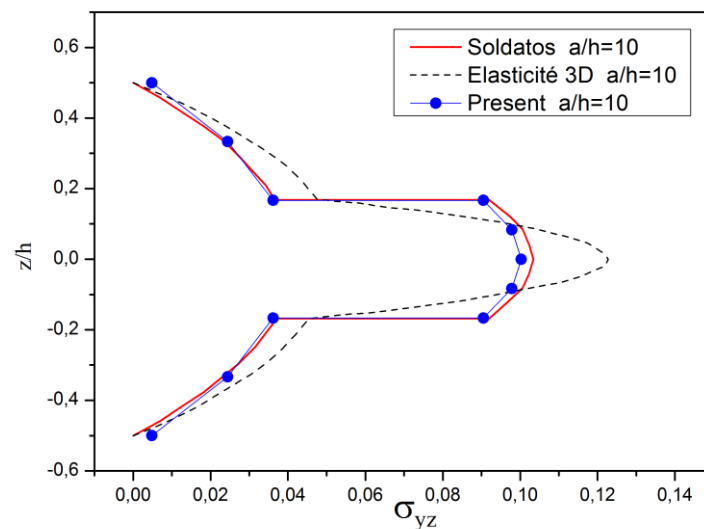


Figure 3-21 La distribution de la contrainte transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

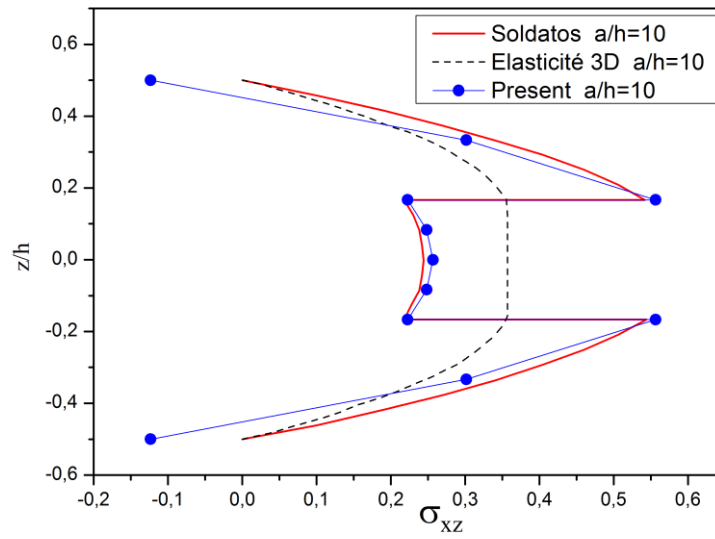


Figure 3-22 La distribution de la contrainte transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

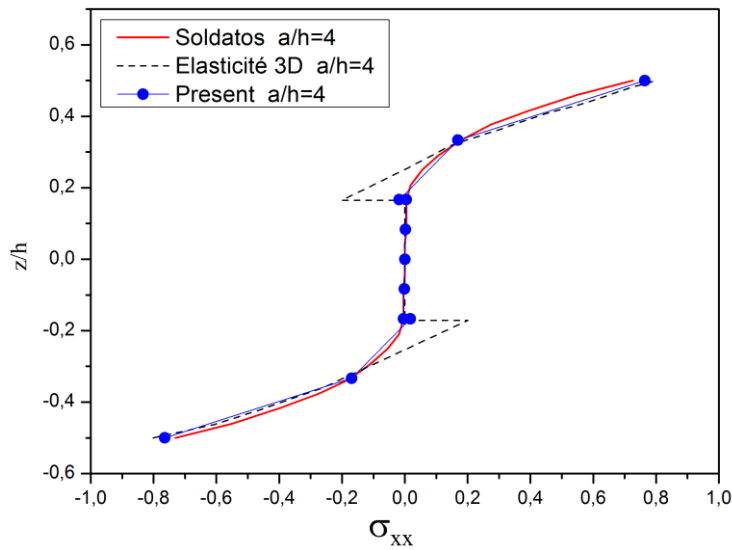


Figure 3-23 La distribution de la contrainte normale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$

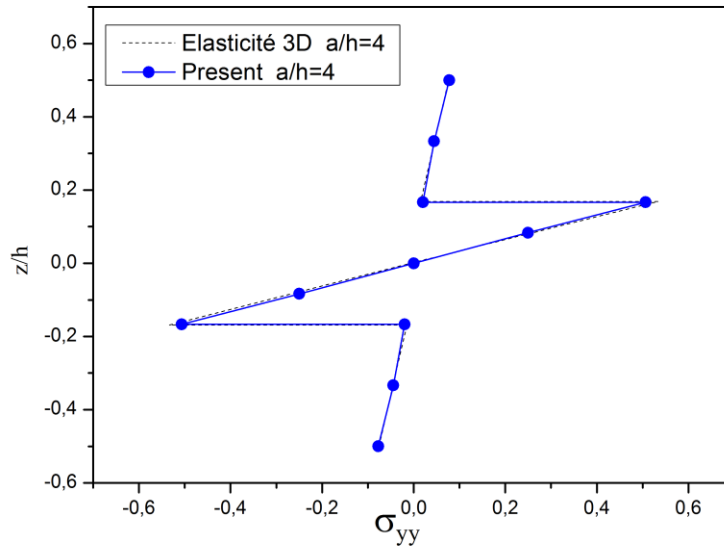


Figure 3-24 La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$

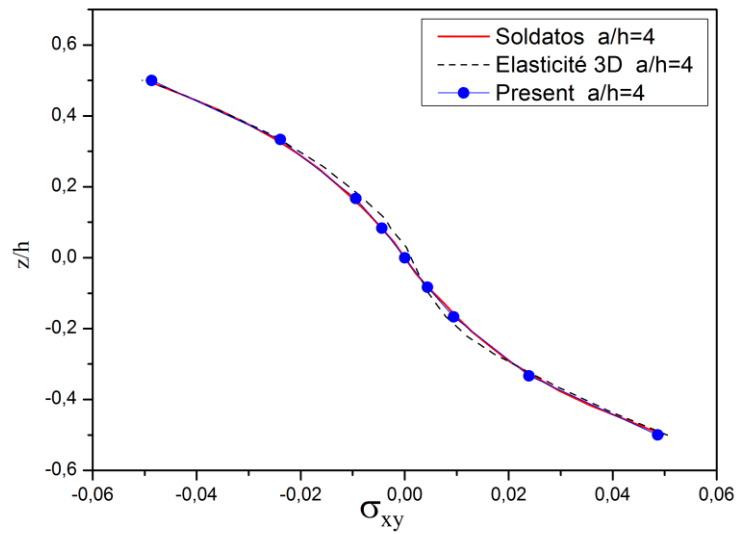


Figure 3-25 La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$

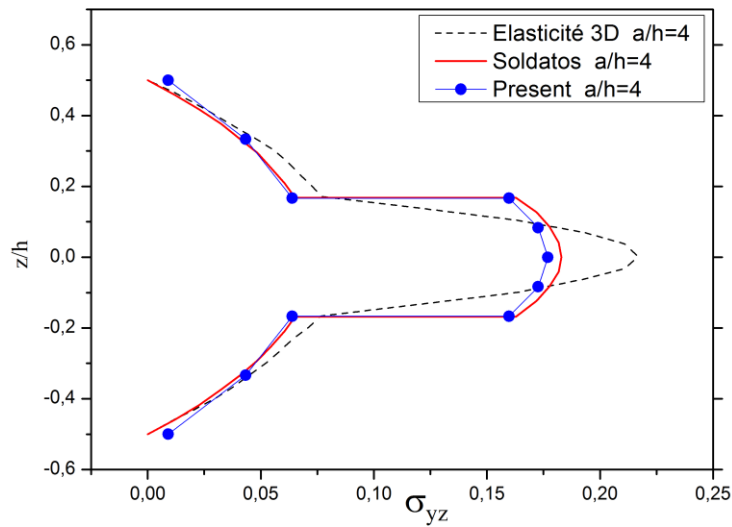


Figure 3-26 La distribution de la contrainte transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$

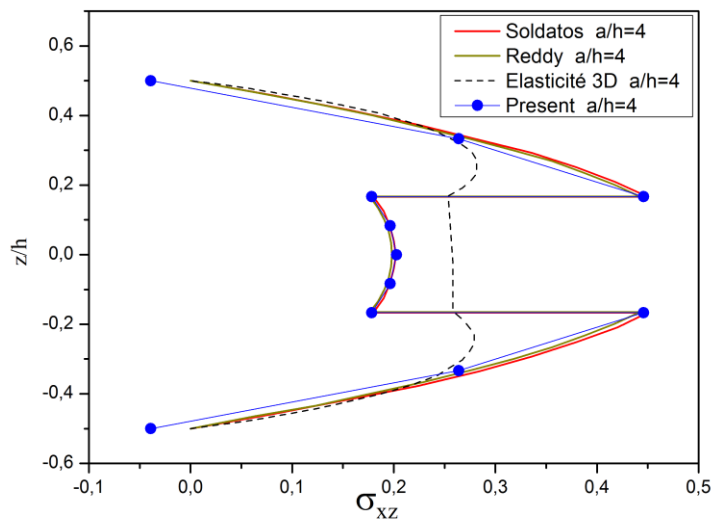


Figure 3-27 La distribution de la contrainte transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 4$

3.2.3.5 Plaque stratifiée rectangulaire symétrique (0 /90 /0) soumise à une charge sinusoïdale du rapport ($b/a=3$)

Dans cet exemple, on propose parmi les exemples les plus connus dans la littérature, la plaque stratifiée rectangulaire cross-ply symétrique à trois couches (0/90/0) simplement appuyée sur les quatre côtés (SS1) et soumise à un chargement

sinusoïdal L1, et possède les propriétés du matériau M1 pour le rapport ($b/a=3$), afin de déterminer l'adimensionnelle de la flèche centrale et les contraintes maximal de la plaque dans différents rapport d'aspect a/h .

Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini [TSQ28] en comparant à ceux obtenus analytiquement par la solution d'Elasticité 3D Pagano [10] et de Reddy [27] et avec ceux obtenu par des modèles d'éléments finis de même ordre [HSDT] par Shikh [145].

Tableau 3-7 Adimensionnel de la flèche et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal ($b/a=3$)

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$
Reddy	4	2.6411	1.0356	0.1028	0.2724	0.0348	0.0263
Pagano		2.8200	1.1000	0.1190	0.3870	0.0334	0.0281
sheikh		2.6437	1.0650	0.1209	0.2723	0.0320	0.0264
Present		2.6430	1.0101	0.1012	0.2799	0.0324	0.0268
Reddy	10	0.8622	0.6924	0.0398	0.2859	0.0170	0.0115
Pagano		0.9190	0.7250	0.0435	0.4200	0.0152	0.0123
sheikh		0.8649	0.7164	0.0383	0.2851	0.0106	0.0117
Present		0.862	0.6910	0.039	0.3036	0.01504	0.0116
Reddy	20	0.5937	0.6407	0.0289	0.2880	0.0139	0.0091
Pagano		0.6100	0.6500	0.0299	0.4340	0.0119	0.0093
sheikh		0.5965	0.6634	0.0274	0.2859	0.0135	0.0092
Present		0.5987	0.6363	0.02776	0.3077	0.0137	0.0092
Reddy	100	0.5070	0.6240	0.0253	0.2886	0.0129	0.0083
Pagano		0.5080	0.6240	0.0253	0.4390	0.0108	0.0083
sheikh		0.5097	0.6457	0.0253	0.2847	0.0129	0.0084
Present		0.5098	0.6180	0.0257	0.3091	0.0123	0.0083

3.2.3.6 *Plaque stratifiée antisymétrique angle pli (équilibrée) [45/-45]_n*

3.2.3.6.1 *Plaque stratifiée carrée [45/-45]_n sous un chargement uniforme*

Dans cet exemple, une plaque stratifiée angle-ply antisymétrique $(45^\circ/-45^\circ)_n$ a été considérée sous un chargement uniforme (L2) pour différents nombre de couches $n = 1, 2, 4$ où la plaque garde la même épaisseur totale dans différents rapports $a/h = 4, 10, 20, 100$ pour déterminer la flèche central adimensionnelle. Les propriétés de matériau et condition aux limites de la plaque sont M2, SS2, respectivement. Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini en comparant à ceux obtenus analytiquement par Kabir [186] et avec ceux obtenus numériquement par Lee [151] et Akhras & Li [185]. De plus, les résultats numériques adimensionnels ont été résumés dans le Tableau 3-8.

D'autre part, on constate que l'augmentation du nombre de couches de stratification antisymétrique a un effet sur la valeur de la flèche, où la plaque devient plus rigide et avoir une tendance à réduire la flèche chaque fois, lorsque la plaque stratifiée garde la même épaisseur.

Tableau 3-8 *La flèche adimensionnel d'une plaque stratifiée carrée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ simplement appuyée sous un chargement uniforme*

a/h	Nombre de couches	Présent (18×18)	Lee (18×18)	Akhras & Li	Kabir
4	2	1.6028	1.5999	1.5398	-
	4	1.3028	1.2997	1.2986	-
	8	1.2304	1.2274	1.2223	-
10	2	0.87232	0.8710	0.8645	0.9406
	4	0.45075	0.4499	0.4493	-
	8	0.40739	0.4065	0.4062	-
20	2	0.76928	0.7666	0.7656	-
	4	0.32585	0.3247	0.3246	-
	8	0.28677	0.2856	0.2856	-
100	2	0.73473	0.7332	0.7338	0.73444
	4	0.28508	0.2845	0.2847	-
	8	0.24735	0.2468	0.2470	-

3.2.3.7 Plaque stratifiée carrée $[45/-45]_4$ sous un chargement sinusoïdal

Dans cet exemple, une plaque stratifiée antisymétriques angle plis $(45/-45)_4$ sous un chargement sinusoïdale a été considérée pour deux rapports d'aspect $a/h = 10, 100$. La plaque possède les propriétés de matériau, conditions aux limites M1, SS2 respectivement. Le présent modèle d'élément fini fournit une bonne convergence et précision des résultats (Tableau 3-9) sur le comportement de flexion des plaques antisymétriques angle plis en comparant à ceux obtenus numériquement par des modèles d'éléments finis de Lee [151] et Latheswary et al [151] et Kant and Pandya [144].

Tableau 3-9 la déflexion adimensionnel et les contraintes d'une plaque stratifiée carrée $(45^\circ / -45^\circ)_4$ simplement appuyé sous un chargement sinusoïdal

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
Lee	10	0.4206	0.1612	0.1612	0.1545	0.2361	0.2361
Latheswary et al		0.4208	0.1627	0.1627	0.1547	0.2400	0.2400
Kant and Pandya		0.4193	0.1633	0.1633	0.1601	0.2347	0.2347
Présent (18×18)		0.4212	0.1617	0.1617	0.1548	0.2371	0.2371
Lee	100	0.2475	0.1439	0.1439	0.1379	0.2398	0.2398
Latheswary et al		0.2479	0.1456	0.1456	0.1377	0.2395	0.2395
Kant and Pandya		0.2469	0.1462	0.1462	0.1430	0.2344	0.2344
Présent (18×18)		0.2476	0.1443	0.1443	0.1380	0.2409	0.2409

Les résultats fournis au Tableau 3-8, Tableau 3-9 sont décrites en utilisant les formules de normalisation ci-dessous :

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) (h^3 E_2 / q_0 a^4) 10^2, \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2), \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) (h / q_0 a), \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) (h / q_0 a)$$

3.3 Plaque composite starifiée biaise simplement appuyée [0/90/0]

Dans cet exemple, une plaque stratifiée symétrique (0/90/0) biaisé carrée (inclinée) pour trois angles $30^\circ, 45^\circ$ et 60° (Figure 3-28) a été considérée pour différents

rapport a/h pour déterminer la flèche adimensionnelle au centre de la plaque et les contraintes normales. Cet exemple a été pris en considération afin de vérifier la performance du modèle distortu géométriquement en termes de la précision. La plaque possède les conditions aux limites simplement appuyée sur les quatre côtés où tous les degrés de libertés sont libres sauf w et dont les caractéristiques mécaniques sont M1. Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini au (Tableau 3-10) en comparant à ceux obtenus par Sheikh [145, 177] et Kabir [192] et Haldar [177].

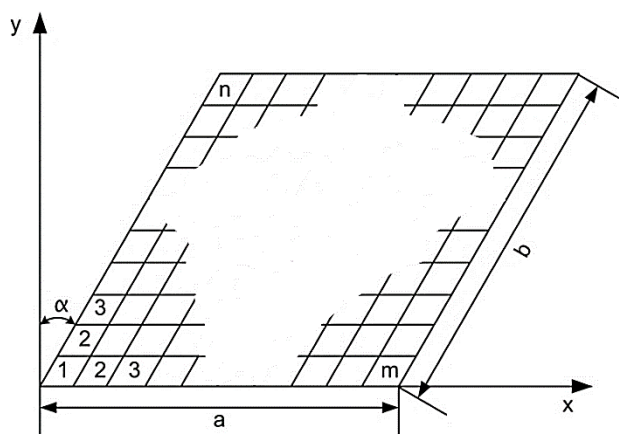


Figure 3-28 Plaque biaise simplement appuyée du maillage de $m \times n$

Tableau 3-10 la flèche adimensionnelle et contraintes normales au centre d'une plaque composite stratifiée biaise (0/90/0) simplement appuyée sous un chargement uniforme

a/h	Angle biaise	Références	w	σ_{xx}	σ_{yy}
5	30°	Présent (16×16)	1.7694	0.8282	0.64515
		Sheikh	1.6811	0.8549	-
		Présent (16×16)	1.1970	0.576	0.60071
	45°	Sheikh	1.1790	0.5920	-
		Présent (16×16)	0.5564	0.2880	0.42273
		Sheikh	0.5196	0.2906	-
10	30°	Présent (16×16)	0.896	0.7048	0.4090
		Sheikh (16×16)	0.8814	0.7125	0.3709
		Haldar	0.8193	0.6005	-
	45°	Présent (16×16)	0.6169	0.5074	0.43774
		Sheikh (16×16)	0.5707	0.4861	0.3786
		Présent (16×16)	0.2754	0.2521	0.3659
	60°	Sheikh (16×16)	0.2505	0.2201	0.3023
		Haldar	0.2455	-	-
		Kabir	0.2600	-	-
100	30°	Présent (16×16)	0.5486	0.6369	0.1771
		Sheikh (16×16)	0.5452	0.6444	0.2629
		Haldar	0.5458	0.6348	-
	45°	Présent (16×16)	0.3686	0.4541	0.3209
		Sheikh (16×16)	0.3631	0.4421	0.3007
		Haldar	0.3621	0.4319	-
	60°	Présent (16×16)	0.1535	0.2151	0.27326
		Sheikh (16×16)	0.1455	0.2011	0.2572

	<i>Haldar</i>	0.1455	-	-
	<i>Kabir</i>	0.1520	-	-

3.4 Validation numérique sur le comportement du flambage des plaques stratifiées

Dans cette section, certains exemples numériques les plus connus dans la littérature ont été proposés sur le comportement du flambage des plaques isotrope et stratifiées carrées, rectangulaire symétriques et antisymétriques, afin de valider et vérifier la performance du présent élément proposé (TSQ28) sur le comportement stabilité.

3.4.1 Conditions aux limites adoptées et propriétés des matériaux utilisés

Les types des conditions aux limites utilisées dans cette étude sont données comme suit ; deux cas simplement appuyées (SS1) et (SS2) et un seul cas encasté (En) sur toutes les arrêtes de la plaque:

$$SS1: x=0, a \rightarrow w = \psi_y = \theta_y = 0 ; y=0, b \rightarrow w = \psi_x = \theta_x = 0$$

$$SS2: x=0 \rightarrow v = \psi_x = \theta_x = 0 ; x=a \rightarrow u = w = \psi_y = \theta_y = 0$$

$$y=0 \rightarrow u = \psi_y = \theta_y = 0 ; y=b \rightarrow v = w = \psi_x = \theta_x = 0 \text{ [138]}$$

$$En: x=0 \rightarrow v = w = \psi_x = \psi_y = \theta_x = \theta_y = 0 ; x=a \rightarrow u = v = w = \psi_x = \psi_y = \theta_x = \theta_y = 0$$

$$y=0, b \rightarrow u = v = w = \psi_x = \psi_y = \theta_x = \theta_y = 0$$

Les propriétés utilisées du matériau sont données comme suit :

$$M1 : E_1/E_2 = 25 , G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

$$M2 : E_1/E_2 = 40 , G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

Les chargements considérés dans cette étude, sont les chargements uniaxiaux et biaxiaux.

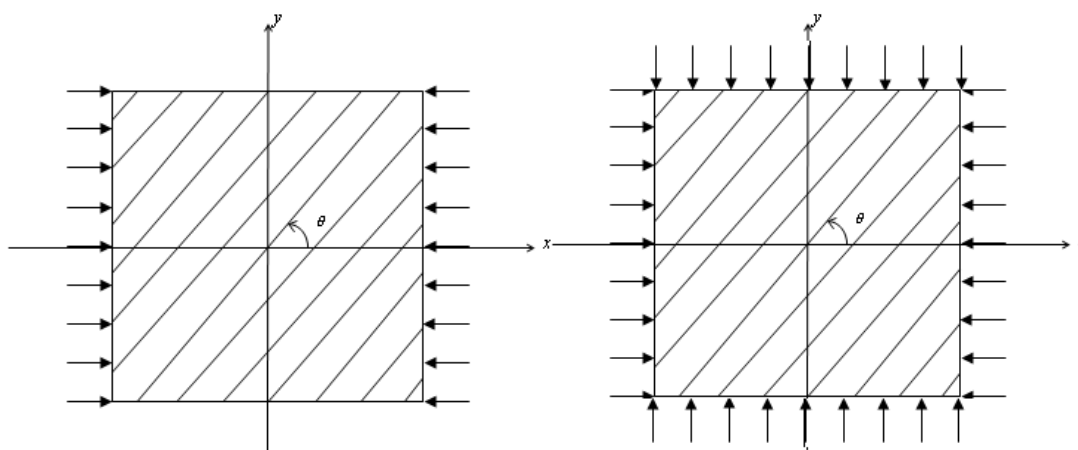


Figure 3-29 Description des plaques stratifiées soumises à un chargement uniaxial et biaxial du flambage

3.4.2 Test maillage de convergence

3.4.2.1 Plaque isotrope carrée

Dans cette section, un test de maillage de convergence pour le présent élément (TSQ28) a été considéré en prenant une plaque isotrope carrée simplement appuyées SS1 épaisse et mince du rapport $a/h=5,10,100$, afin de vérifier la performance du modèle en termes de convergence et la précision dans différents maillages 4×4 , 8×8 , 12×12 , 16×16 , en déterminant la charge critique adimensionnelle suivant l'axe d'abscisse x . Les résultats obtenus au Tableau 3-11 et Figure 3-30, montrent la stabilité de convergences et la précision du présent élément, ainsi qu'il fournit un bon accord en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy and Phan [141] et à ceux obtenus numériquement par le modèle d'élément fini triangulaire de Chakrabarti & Cheikh [177].

Tableau 3-11 Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})\alpha^2 / \pi^2 D$ d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée sous un chargement uniaxial $\mathbf{v} = \mathbf{0.3}$

a/h	Reference	Maillage	N_{cr}	
5	Présent	4×4	3.342	
	Sheikh		3.231	
	Présent		3.251	
	Sheikh	8×8	3.250	
			Présent	3.251
			Sheikh	3.257
	Présent	16×16	3.255	
Sheikh			3.260	
	Reddy and Phan	-	3.265	
10	Présent	4×4	3.999	
	Sheikh		3.753	
	Présent	8×8	3.808	
	Sheikh		3.775	
	Présent		3.785	
	Sheikh	12×12	3.780	

100	<i>Présent</i>	16×16	3.781
	<i>Sheikh</i>		3.782
	<i>Reddy and Phan</i>	-	3.787
	<i>Présent</i>	4×4	4.155
	<i>Sheikh</i>		3.973
	<i>Présent</i>	8×8	4.087
	<i>Sheikh</i>		3.991
	<i>Présent</i>	12×12	4.037
	<i>Sheikh</i>		3.995
	<i>Présent</i>	16×16	4.019
	<i>Sheikh</i>		3.996
	<i>Reddy and Phan</i>	-	3.998

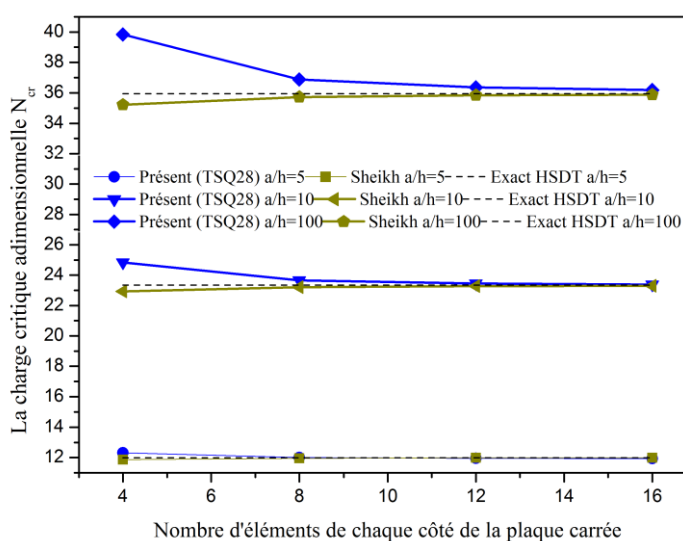


Figure 3-30 La convergence de la charge critique uniaxiale du flambage du présent élément finit (TSQ28) dans différents maillage d'une plaque carrée isotrope du rapport $a/h = 5, 10, 100$.

3.4.2.2 Plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique (0/90/90/0)

Un deuxième test de maillage de convergence a été considéré pour le présent élément afin de déterminer la charge critique uniaxiale du flambage suivant l'axe d'abscisse en prenant une plaque stratifiée symétrique carrée de quatre couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) épaisse et mince du rapport $a/h = 5, 10, 100$ respectivement, ayant des propriétés matérielle M2 et conditions aux limite simplement appuyée SS1. Des résultats satisfaisants ont été obtenus en les présentant aux Tableau 3-12, Figure 3-31 en illustrant la précision et la rapidité de convergence du présent élément dans différents maillages $4 \times 4, 8 \times 8, 12 \times 12, 16 \times 16$, ainsi que pour différents rapport $a/h = 5, 10, 100$ en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy et Phan [141] et Exacte HSDT [157] et à celui obtenus numériquement par le modèle d'élément fini de Chakrabarti & Cheikh [177].

Tableau 3-12 Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée

Reference	(a/h) thickness ratio		
	5	10	100
Present Mesh:4×4	12. 324	24. 836	39. 832
Present Mesh:8×8	12. 011	23. 663	36. 87
Present Mesh:12×12	11. 957	23.459	36. 355
Present Mesh:16×16	11.938	23. 389	36. 177
Sheikh&Chakrabarti[164]16×16	11.988	23.303	35.889
Reddy &Phan [141]	12.156	23.349	35.971
Exacte HSDT [161]	11.997	23.340	35.953

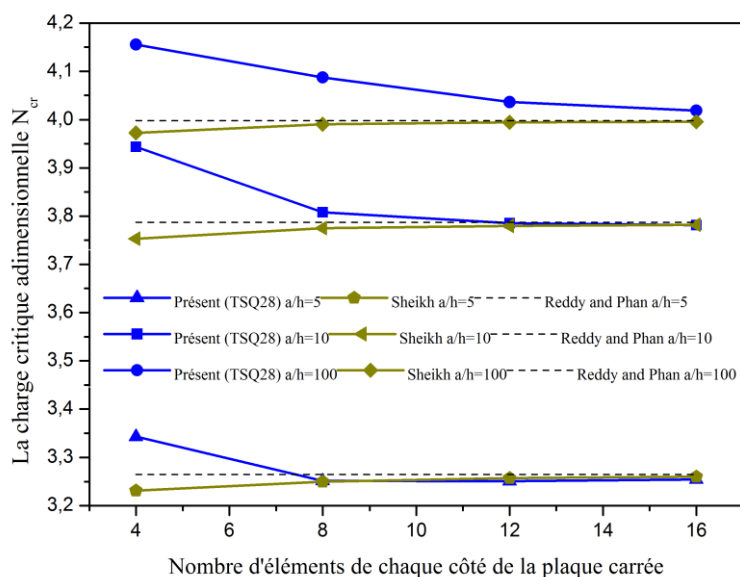


Figure 3-31 La convergence de la charge critique uniaxial du flambage du présent élément finit (TSQ28) pour différents maillage d'une plaque carrée stratifiée (0/90/90/0) de rapport $a/h = 5, 10$ et 100 .

3.4.3 Exemples numériques

3.4.3.1 Plaque carrée cross-ply (0/90)

Dans cet exemple, une plaque carrée stratifiée cross-ply (0/90) antisymétrique a été considérée pour l'étudier au comportement du flambage en déterminant la charge critique uniaxial dans différents rapport $a/h=5, 10, 20, 50, 100$. La plaque possède des conditions aux limites de type simplement appuyée (SS2) et de propriétés du matériau

M2. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'éléments finis (Tableau 3-13) en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy et Phan [141], et à ceux obtenus numériquement par Chakrabarti et Cheikh [177].

Tableau 3-13 Adimensionnelle de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = (\overline{N_{cr}})a^2/E_2h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [0/90] simplement appuyée

Reference	(a/h) thickness ratio				
	5	10	20	50	100
<i>Présent (16×16)</i>	8.758	11.435	12.483	12.893	12.978
<i>Sheikh&Chakrabarti(16×16)</i>	8.765	11.556	12.571	12.890	12.938
<i>Reddy and Phan</i>	8.769	11.563	12.577	12.895	12.942

3.4.3.2 L'effet de l'orthotropie sur les plaques carrées cross-ply (0/90...)

Dans cet exemple, on considère différentes plaques stratifiées cross-ply du nombre de couche 2, 3, 4, 5 et 9 simplement appuyées du ratio $a/h=10$, pour déterminer la charge critique uniaxial suivant l'axe x dans différents rapport d'orthotropie E_1/E_2 . Des résultats satisfaisants ont été obtenus à partir le présent élément [TSQ28] (Tableau 3-14) en comparant à ceux obtenus analytiquement par Noor Elasticité 3D [156] et Putcha N., Reddy J.N [138] et avec des modèles numériquement par Ferreira [170].

D'autre part, on constate que le rapport d'orthotropie et le nombre de couche ont des effets significatifs sur la charge critique du flambement, où plus le rapport d'orthotropie augmente, plus la charge critique du flambement sera agrandie pour chaque plaque cross-ply, à cause cela revient peut être à des raisons que la plaque possède une rigidité augmentée suivant le sens du module E_1 . Ainsi que, la stabilité du flambage augmente aussi lorsque le nombre de couche cross-ply augmente, à cause peut-être que la plaque être plus renforcée en fibres, Finalement à partir de cet exemple où dans lequel on peut conclure que plus le rapport d'orthotropie et le nombre de couche sont augmentés, plus la plaque est stable sur le comportement de flambage. En addition, la Figure 3-32 démontre que, la plaque la plus stable est celle de neuf couches.

Tableau 3-14 L'effet du rapport d'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque carrée cross-ply ($a/h=10$)

Référence	Nombre de couche	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
Noor Elasticité		4.6948	6.1181	7.8196	9.3746	10.8167
Putcha&Reddy	[0/90]	4.7149	6.2721	8.1151	9.8695	11.5630
Présent		3.7633	5.1543	7.3472	9.4666	11.435
Putcha&Reddy		5.3933	9.9406	15.2980	19.6740	23.34
Ferreira	[0/90/0]	5.3872	9.8331	14.8975	18.8942	22.1513
Présent		5.4088	9.8833	14.965	18.965	22.213
Ferreira		5.3933	9.9406	15.298	-	23.340
Present	[0/90/90/0]	5.3870	9.969	15.348	19.729	23.389
Putcha&Reddy		5.4096	10.15	16.008	20.999	25.08
Ferreira	[0/90/0/90/0]	5.4041	10.0888	15.7913	20.5914	24.6901
Présent		5.4265	10.138	15.842	20.615	24.68
Putcha&Reddy		5.4313	10.197	16.172	21.315	25.79
Ferreira	[0/90/0/90/0/90/0/90/0]	5.4092	10.1767	16.1063	21.1918	25.6088
Présent		5.4325	10.231	16.172	21.248	25.643

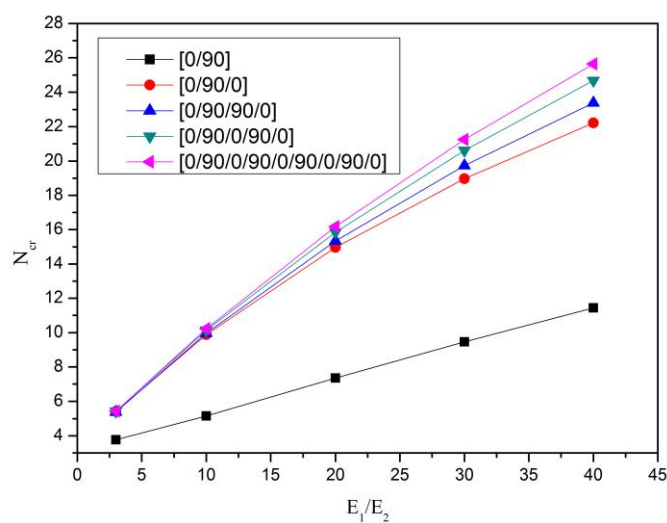


Figure 3-32 L'effet de l'orthotropie E_1/E_2 sur le comportement de flambage des plaques stratifiées cross-ply

3.4.3.3 *Plaque stratifiée (0/90/0) sous un chargement biaxial*

Dans cet exemple une étude de l'effet du rapport de l'orthotropie $E1/E2$ sur la charge critique du flambage d'une plaque carrée cross-ply symétrique (0/90/0) soumise à un chargement biaxial critique de compression (N_x, N_y), simplement appuyée (SS1) sur les quatre bords pour le rapport $a/h=10$, les propriétés de matériau sont M2. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini [TSQ28] au Tableau 3-15 en comparant à ceux obtenus par Khdeir [158] et Nguyen-Van [193] et Fares [159]. En outre, d'un côté mécanique on remarque que, plus le rapport d'orthotropie $E1/E2$ est augmenté, plus la stabilité de plaque en flambement est importante.

Tableau 3-15 L'effet de l'orthotropie sur la charge critique biaxial de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée (0/90/0) du ratio $a/h=10$

Reference	E1/E2			
	10	20	30	40
Present(16×16)	4.9947	7.5467	9.0241	10.165
Fares	4.963	7.588	8.575	10.202
Nguyen-Van	4.939	7.488	9.016	10.252
Khdeir	4.963	7.516	9.056	10.259

3.4.3.4 *Effet de la variation d'aspect ratio (a/b) sur le flambage des plaques (0/90/90/0)*

Dans cet exemple, une étude de l'effet du rapport d'aspect (a/b) a été considérée sur la charge uniaxial critique de flambement suivant l'axe x d'une plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique (0/90/90/0) simplement appuyée (SS1), de propriétés du matériau M2. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus par le modèle proposé [TSQ28] au Tableau 3-16, en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy et Phan [141] et à ceux obtenus numériquement par Singh [178].

Tableau 3-16 Effet de la variation d'aspect ratio (a/b) sur la charge critique uniaxial de flambage des plaques (0/90/90/0)

a/b	Référence	a/h			
		5	10	20	100
0.5	Présent	8.7960	18.611	26.151	30.122
	Singh	8.739	18.347	25.746	29.657

1	<i>Présent</i>	11.956	23.444	31.813	36.177
	<i>Reddy&Phan</i>	12.156	23.349	31.637	35.971
	<i>Singh</i>	11.858	23.134	31.517	35.923
2	<i>Présent</i>	13.751	47.391	94.173	117.66
	<i>Singh</i>	15.000	47.368	92.847	115.029

Le même exemple précédent a été étudié avec l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la charge uniaxial critique de flambement dans différents ratio d'orthotropie $E1/E2$ d'une plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique (0/90/90/0) sous un chargement uniaxial suivant l'axe x au ratio $a/h=10$ simplement appuyée (SS1) du matériau M2. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus par le modèle [TSQ28] au Tableau 3-17 en comparant à ceux obtenus analytiquement par F.A. Fazzolari et al [157].

Tableau 3-17 Effet de l'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage de la plaque (0/90/90/0) de ratio $a/h=10$ avec la variation d'aspect ratio (a/b)

a/b	Reference	$E1/E2$			
		3	10	20	40
2	<i>Présent(16×16)</i>	18.259	28.821	37.862	47.262
	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	18.183	28.622	37.688	47.531
1	<i>Présent(16×16)</i>	5.3870	9.969	15.348	23.389
	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	5.3933	9.9406	15.298	23.340
0.5	<i>Présent(16×16)</i>	2.8455	7.0202	11.782	18.584
	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	2.8193	6.9366	11.650	18.414
1/3	<i>Présent(16×16)</i>	2.4907	6.6605	11.406	18.157
	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	2.4587	6.5724	11.270	17.982

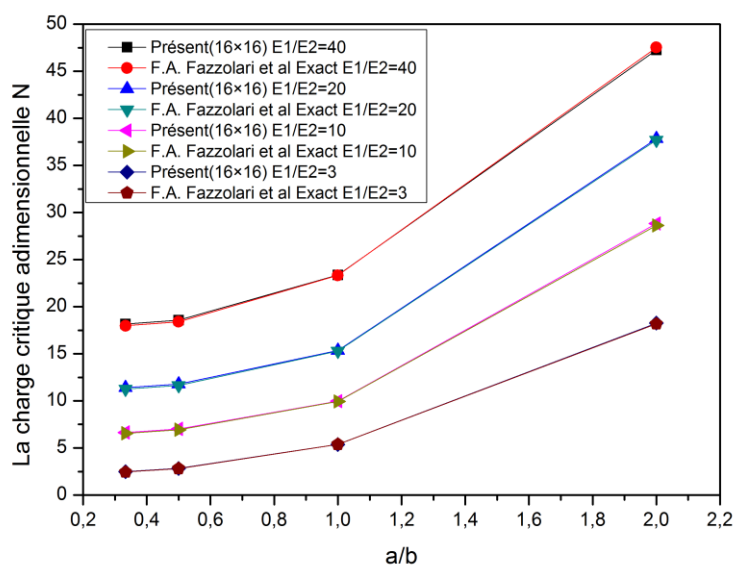


Figure 3-33 La charge critique adimensionnelle en fonction de ratio a/b en différents rapport d'orthotropie $E1/E2$ de la plaques stratifiée (0/90/90/0)

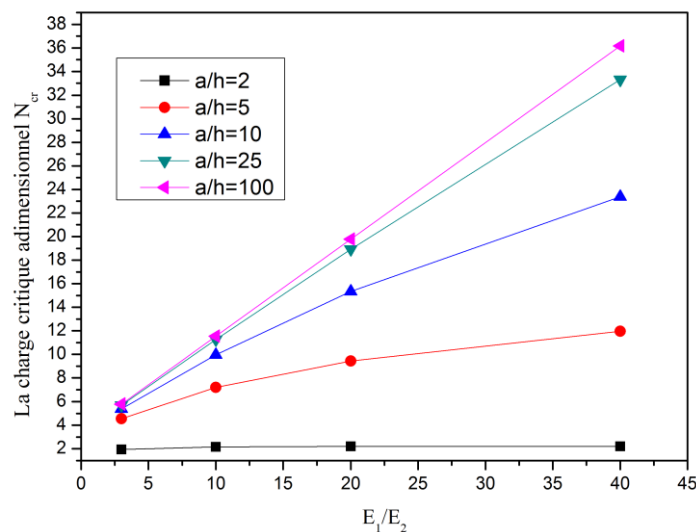
3.4.3.5 Effet d'orthotropie sur la charge critique uniaxial suivant l'axe x avec la variation du ratio a/h d'une plaque (0/90/90/0)

Dans cet exemple, une étude de l'effet d'orthotropie d'une plaque stratifiée carrée cross-ply (0/90/90/0) a été considérée sur le comportement du flambage pour différents rapports longueur-épaisseur (a/h) et elle est soumise d'un chargement uniaxial suivant l'axe d'abscisses et repose sur des conditions aux limites simplement appuyée (SS1). Les propriétés de matériau du stratifiée sont données par: $E1 / E2 = ouvert$, $G12 = G13 = 0.6E2$, $G23 = 0.5E2$, $\nu12 = \nu13 = 0,25$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus au Tableau 3-23 dans différents rapport d'orthotropie par le présent d'élément en comparant à ceux obtenus analytiquement par F.A. Fazzolari et al [157].

Dans le Tableau 3-18 et Figure 3-34 on constate que y avait une croissance de la charge critique du flambage, lorsque le rapport d'orthotropie augmente, ainsi que le changement d'augmentation se varient selon le ratio d'épaisseur (a/h). Par conséquent, on constate que la courbe est linéaire tant que la plaque être mince, tandis que non-linéaire pour la plaque épaisse.

Tableau 3-18 Effet du ratio (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe x d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) en différents rapport d'aspect d'orthotropie

E_1/E_2	Référence	a/h				
		2	5	10	25	100
40	Présent(16×16)	2.2141	11.956	23.389	33.306	36.177
	F.A. Fazzolari et al Exact	3.0749	11.997	23.340	33.131	35.953
20	Présent(16×16)	2.2001	9.44	15.348	18.923	19.774
	F.A. Fazzolari et al Exact	2.5689	9.4219	15.298	18.825	19.654
10	Présent(16×16)	2.1598	7.1856	9.969	11.260	11.541
	F.A. Fazzolari et al Exact	2.2810	7.1554	9.9406	11.209	11.473
3	Présent(16×16)	1.9542	4.5614	5.3870	5.7056	5.7802
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.9557	4.5458	5.3933	5.6928	5.7499

**Figure 3-34** Effet du ratio (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe x d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) avec la variation du rapport d'aspect d'orthotropie

3.4.3.6 Effet d'orthotropie sur la charge critique uniaxial suivant l'axe y avec la variation de ratio a/h d'une plaque (0/90/90/0)

Dans cet exemple, également prenant la même étude précédente de l'effet d'orthotropie d'une plaque stratifiée carrée cross-ply (0/90/90/0) sur le comportement

du flambage dans différents rapports longueur-épaisseur (a/h) et soumise à un chargement de flambement uniaxial suivant l'axe y d'ordonner, et conditions aux limite simplement appuyée (SSI). Les propriétés de matériau du stratifiée sont données par: $E1 / E2 =$ ouvert, $G12 = G13 = 0.6E2$, $G23 = 0.5E2$, $\nu12 = \nu13 = 0,25$. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini au Tableau 3-19 pour différents rapports d'orthotropie en comparant à ceux obtenus analytiquement par F.A. Fazzolari et al [157]. A partir des résultats obtenus, on rencontre la même description précédente, autrement dit y a une croissance de la charge critique du flambement lorsque le rapport d'orthotropie augmente, De plus, le changement d'augmentation se varier selon le ratio d'épaisseur (a/h), on observe que la courbe également est linéaire tant que la plaque est mince, et non-linéaire dans la plaque épaisse.

Tableau 3-19 Effet du ratio (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe y d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) dans différents rapport d'orthotropie

$E1/E2$	Référence	a/h				
		2	5	10	25	100
40	Présent (16×16)	1.8859	8.3654	17.929	26.624	29.212
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.9744	8.5588	18.034	26.395	28.801
20	Présent (16×16)	1.8683	7.1756	12.807	16.440	17.351
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.9042	7.2304	12.728	16.249	17.100
10	Présent (16×16)	1.8535	6.0583	9.3561	11.017	11.404
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.8421	6.0365	9.2387	10.877	11.234
3	Présent (16×16)	1.7729	4.5614	5.4189	5.7055	5.7801
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.7611	4.5458	5.3933	5.6928	5.7499

En addition, on constate que la plaque stratifiée (0/90/90/0) qui soumise à un chargement uniaxial suivant l'axe x abscisses est la plus stable que la plaque mise un chargement suivant l'axe y d'ordonner.

3.4.3.7 Effet d'orthotropie sur la charge critique biaxial suivant l'axe x, y d'une plaque (0/90/90/0)

Dans cet exemple, une étude de l'effet d'orthotropie d'une plaque stratifiée carrée cross-ply (0/90/90/0) sur le comportement du flambage pour différents rapport longueur-épaisseur (a/h) et qui soumise à un chargement du flambement biaxial suivant l'axe x, y et des conditions aux limites simplement appuyée (SSI) sur les quatre bords. Les propriétés de matériau du stratifiée étant données par: $E1 / E2 =$ ouvert, $G12 = G13 = 0.6E2$, $G23 = 0.5E2$, $\nu12 = \nu13 = 0,25$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le modèle proposé d'élément au Tableau 3-20 dans différents rapports d'orthotropie en comparant à ceux obtenus analytiquement par F.A. Fazzolari et al [157].

Dans le Tableau 3-20 et Figure 3-35 on observe la même description précédente de la croissance de la charge critique du flambage, où la courbe est linéaire tant que la plaque être mince, et non-linéaire dans la plaque épaisse.

Tableau 3-20 Effet du ratio (a/h) sur la charge critique biaxial du flambage d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) avec la variation du rapport d'aspect d'orthotropie

$E1/E2$	Références	a/h				
		2	5	10	25	100
40	PrésentTSQ28 (16×16)	1.5295	5.9583	11.732	16.585	18.018
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.5757	2.8554	11.670	16.566	17.976
20	PrésentTSQ28 (16×16)	1.4251	4.7518	7.7463	9.1553	9.5751
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.4291	4.7109	7.6492	9.4124	9.8271
10	PrésentTSQ28 (16×16)	1.3116	3.5918	5.012	5.6981	5.8406
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.2983	3.5777	4.9703	5.6045	5.7368
3	PrésentTSQ28 (16×16)	1.1222	2.2918	2.7271	2.9513	2.9909
	F.A. Fazzolari et al Exact	1.1023	2.2729	2.6967	2.8464	2.8750

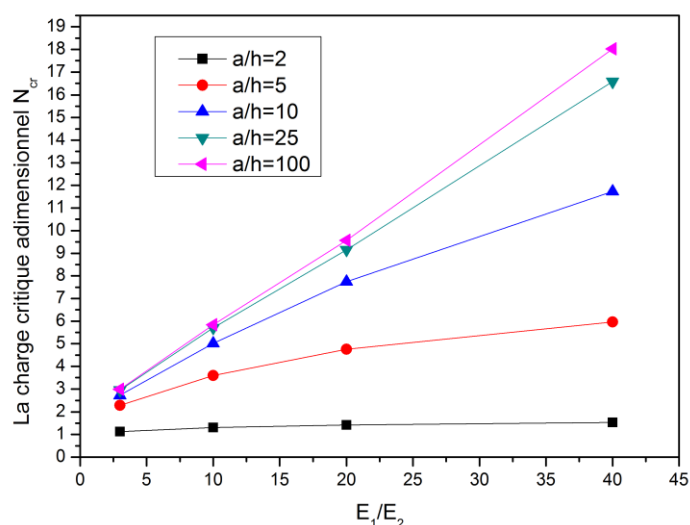


Figure 3-35 Effet du rapport d'orthotropie sur la charge critique biaxial d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) en différents ratios a/h .

3.4.3.8 Plaque stratifiée angle-ply (équilibrée) $(45/-45)_n$

Nous traitons au présent titre quelques exemples qui appartiennent aux plaques stratifiées angle-ply (équilibré) symétrique et antisymétrique pour l'analyse de la stabilité du comportement du flambage sous un chargement de compression uniaxial et biaxial.

Le premier exemple il s'agit d'une plaque angle-ply stratifiée antisymétrique $(45/-45)$ simplement appuyée (SS1) de matériau M2 pour déterminer la charge critique de flambement uniaxial (N_x) pour différents rapports longueur-épaisseur $a/h = 5, 10, 20, 100$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus au Tableau 3-21 par le présent modèle d'élément fini [TSQ28] en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy [1] et à ceux obtenus numériquement par Ferreira [170].

Tableau 3-21 Adimensionnelle de la charge critique de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle-ply $[45/-45]_3$ simplement appuyée

Référence	(a/h) thickness ratio			
	5	10	20	100
Présent	12.195	33.929	55.935	63.997
Ferreira	12.1905	32.4036	53.1966	61.9858
Reddy	12.1690	32.4050	53.1980	62.0220

Dans le deuxième exemple, différentes plaques angle-ply stratifiées antisymétrique $[45/-45]$, $[45/-45]_2$ ont été considérées, de matériau M1 et simplement appuyée (SS2), ainsi que encastéré (En) pour la plaque $[45/-45]_2$ afin de déterminer la charge critique de flambement de compression uniaxial (N_x) dans différents rapports longueur-épaisseur $a/h = 5, 10, 20, 100$. Le présent modèle d'élément fini [TSQ28] fournit des résultats satisfaisants au Tableau 3-22 en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy and Phan [34] et à ceux obtenus numériquement par Sheikh [177]. De plus, Dans cet exemple on constate que meilleur stabilité obtenu en flambement est estimée lorsque la plaque stratifiée cross-ply antisymétrique repose sur la condition au limite type encastrement.

Tableau 3-22 Adimensionnel de la charge critique de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply $[45/-45]_n$

Structure	Référence	(a/h)thickness ratio a/h			
		5	10	20	100
	Présent(TSQ28)(16×16)	6.5587	12.85	15.406	16.422
$[45/45]$ (SS2)	Sheikh(16×16)	6.333	12.608	14.633	15.437
	Phan&Reddy	6.538	12.622	14.644	15.441
	Présent(TSQ28)(16×16)	7.1853	21.672	28.012	33.032
$[45/45]_2$ (SS2)	Sheikh(16×16)	7.260	19.632	30.970	35.779
	Phan&Reddy	7.2587	21.125	29.15	36.645
$[45/45]_2$ (En)	Présent(TSQ28)(16×16)	7.6924	29.553	-	-
	Phan&Reddy	7.4099	31.0778	-	-

Le troisième exemple, il s'agit d'une plaques angle-ply stratifiée symétrique $[45/-45/-45/45]$, repose sur conditions aux limites type simplement appuyée (SS1) et de matériau M2. deux cas du chargement ont été considérés: compression uniaxial uniforme (N_x) et compression biaxial (N_x, N_y). Afin de déterminer la charge critique de flambement dans différents rapport longueur-épaisseur $a/h = 5, 10, 20, 100$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus au Tableau 3-23 par le présent modèle d'élément fini [TSQ28] en comparant à ceux obtenus numériquement par Ferreira [170]. On constate dans ce cas-là que meilleur cas de stabilité du flambage est estimée lorsque la plaque stratifiée cross-ply symétrique être mise à position du chargement uniaxial.

Tableau 3-23 Adimensionnelle de la charge critique de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply [45/-45/-45/45]

Chargement	Reference	(a/h) thickness ratio			
		5	10	20	100
Uniaxial	Présent(16×16)	10.116	25.894	39.169	47.288
	Ferreira	10.4453	26.4266	40.6858	45.0994
Biaxial	Présent(16×16)	6.8452	14.747	20.489	22.921
	Ferreira	6.9890	14.5900	20.4246	22.5857

3.4.3.9 Plaque stratifiée (0/45/-45/90)

Dans cet exemple, une plaque stratifiée carrée d'orientation différente dans chaque couche [0/45/-45/90] a été considérée, simplement appuyée (SS1) sur les quatre bords, du matériau M2, afin de déterminer la charge de compression uniaxial (N_x) critique du flambement pour différents rapports longueur-épaisseur $a/h = 5, 10, 20, 50, 100$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus au Tableau 3-21 par le présent modèle d'élément fini [TSQ28] en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy and Phan [141].

Tableau 3-24 Effet du rapport a/h sur la charge critique d'une plaque stratifiée carrée [0/45/-45/90] simplement appuyée

Référence	(a/h) thickness ratio				
	5	10	20	50	100
Présent TSQ28(16×16)	11.419	28.834	37.76	41.384	41.979
Phan, N. D. & Reddy	9.3323	26.799	37.115	41.877	42.819

3.5 Plaque composite stratifiée biaisée simplement appuyée [90/0/0/90]

Dans cet exemple, une plaque stratifiée biaisée (inclinaison) a été considérée pour différents angles de biaisés $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ et 40° et de quatre couches symétriques (90/0/0/90) dans différents rapport a/h en déterminant la charge critique uniaxial suivant l'axe x de flambage. Afin de vérifier la performance du modèle distordu géométriquement en termes de la précision et convergence. La plaque a les conditions aux limites simplement appuyée sur les quatre côtés (SS1) et dont les caractéristiques mécaniques sont $E_1 = 128$ GPa, $E_2 = 11$ GPa, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = G_{13} = 4.48$ GPa, $G_{23} = 1.53$ GPa.

Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini au (Tableau 3-25) en comparant à ceux obtenus numériquement par Sheikh [177] et Hu and Tzeng [194].

Tableau 3-25 La charge critique uniaxial $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque composite stratifiée biaise [90/0/0/90] simplement appuyée.

Angle d'inclinaison	Références	Thickness ratio (a/h)		
		100	50	20
0°	Présent	12.109	11.945	10.919
	Sheikh	12.138	12.029	11.324
	Hu and Tzeng	12.045	-	-
10°	Présent	13.876	13.12	11.51
	Sheikh	13.020	12.888	12.057
	Hu and Tzeng	13.00	-	-
20°	Présent	16.369	15.546	13.454
	Sheikh	15.915	16.701	14.441
	Hu and Tzeng	15.636	-	-
30°	Présent	20.909	19.895	16.584
	Sheikh	21.605	20.188	18.920
	Hu and Tzeng	21.500	-	-
40°	Présent	25.455	23.572	23.738
	Sheikh	25.917	23.879	21.680
	Hu and Tzeng	25.500	-	-

3.6 Effet du non homogénéité des propriétés élastique sur le comportement du flambage

Dans cette section, des plaques carrées stratifiées composite cross-ply (0/90...) non homogène aux propriétés élastique du matériau ont été considérées sur le comportement du flambage où les propriétés élastique prennent une distribution exponentiel suivant les axes x - y à travers la plaque, $E_1(x) = E_1 e^{\zeta x/a}$; $E_2(y) = E_2 e^{\zeta y/b}$; $G_{12}(x, y) = G_{12} e^{\zeta(x/a+y/b)}$. Ce travail a été réalisé par M.E. Fares, A.M. Zenkour [159] dans le but d'analyser l'effet de la non homogénéité des propriétés élastique sur le comportement de flambage et vibration des plaques cross-ply stratifiée, avec ζ est le coefficient de la non homogénéité.

Au Tableau 3-26 présente la charge critique uniaxial adimensionnelle du flambement des plaques carrées cross-ply trois, cinq et neuf couches symétriques pour différents rapports orthotropie (E_1/E_2) et dans différentes valeurs du coefficient de non-homogénéité ζ . Les plaques reposent sur des bords simplement appuyées. Par conséquent, on constate que plus le coefficient ζ est augmenté, plus la stabilité en flambement est importante, ce dernier dépend de l'augmentation de la rigidité à travers la plaque.

Les propriétés des matériaux du stratifiés étant données comme suit :

$$\frac{E_1}{E_2} = open; \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6; \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5; \nu = 0.25; a/h=10$$

Tableau 3-26 L'effet de non homogénéité ζ sur la charge critique uniaxial du flambage des plaques carrées stratifiées cross-ply simplement appuyées dans différent rapport orthotropie et ratio $a/h = 10$

Reference	Number of layer	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
<i>Exact</i> [138] $\xi = 0$		5.3933	9.9406	15.2980	19.6740	23.34
<i>Present</i> $\xi = 0$	3	5.4088	9.8833	14.965	18.965	22.213
<i>Present</i> $\xi = 0.5$		7.412	12.7	18.407	22.713	26.107
<i>Present</i> $\xi = 1$		10.121	16.215	22.392	26.853	30.267
<i>HPT</i> [159] $\xi = 0$		5.3899	9.8325	14.8896	18.8776	22.1207
<i>HPT</i> [159] $\xi = 0.5$		7.5208	12.7876	18.4884	22.7919	26.1848
<i>HPT</i> [159] $\xi = 1$		10.9059	16.9540	23.1327	27.5860	30.9937
<i>Exact</i> [138] $\xi = 0$		5.4096	10.15	16.008	20.999	25.08
<i>Present</i> $\xi = 0$	5	5.4265	10.138	15.842	20.615	24.68
<i>Present</i> $\xi = 0.5$		7.447	13.083	19.637	24.925	29.3
<i>Present</i> $\xi = 1$		10.188	16.77	23.995	29.58	34.04
<i>HPT</i> [159] $\xi = 0$		5.4066	10.0897	15.7879	20.5781	24.6755
<i>HPT</i> [159] $\xi = 0.5$		7.5475	13.1738	19.7712	25.1280	29.5865
<i>HPT</i> [159] $\xi = 1$		10.9477	17.5186	24.9013	30.6723	35.3405
<i>Exact</i> [138] $\xi = 0$		5.4313	10.197	16.172	21.315	25.79
<i>Present</i> $\xi = 0$	9	5.4325	10.231	16.172	21.248	25.643
<i>Present</i> $\xi = 0.5$		7.4585	13.218	20.09	25.763	30.527
<i>Present</i> $\xi = 1$		10.201	16.93	24.518	30.498	35.3
<i>HPT</i> [159] $\xi = 0$		5.412	10.1772	16.1009	21.1783	25.5845
<i>HPT</i> [159] $\xi = 0.5$		7.556	13.3066	20.2237	25.9631	30.8116
<i>HPT</i> [159] $\xi = 1$		10.9611	17.7155	25.5365	31.7957	36.9338

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une série d'applications concernent le comportement de flexion et de flambage des plaques carrées, rectangulaires isotropes, composites stratifiées symétriques et non symétriques ont été considérées, avec différents cas de chargement, géométrie et de conditions aux limites, dans le but à vérifier la performance, la fiabilité et la polyvalence de l'élément développé (TSQ28) en utilisant l'intégration numériquement des points du Gauss réduite pour obtenir des résultats précis et sans des blocage numérique notamment dans les structures des plaques minces.

Les résultats obtenus ont été comparés avec des résultats donnés analytiquement et à ceux obtenus numériquement par des modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. La validation numérique a montré la simplicité, la stabilité et le moindre coût en termes de temps du calcul de l'élément développé (TSQ28). D'autant plus, le modèle a pu offrir excellents résultats, notamment en ce qui concerne les contraintes de cisaillement transversal. De plus, le modèle également a pu tenir en compte une bonne distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur sans recourir à des facteurs de correction.

En addition, des exemples des plaques carrées stratifiées composite cross-ply non homogène aux propriétés élastique ont été considérées sur le comportement de flambage où les propriétés élastique prennent une distribution exponentiel suivant les axes x - y de la plaque. En outre, ce type d'exemple des plaques non homogènes a été choisi à cause il est similaire beaucoup du problème du comportement de non homogénéité due à l'effet de la température et ce qui viendra au chapitre 6, et pour nous aider à construire un code en FORTRAN capable d'analyser les problèmes du non homogénéité des propriétés mécanique à travers la plaque.

Chapitre 4

4 Modification de l'élément (TSQ28) de 28
ddl en un élément de 20 ddl (TSQ20)

4.1 Elaboration de l'élément fini (TSQ20)

Dans ce chapitre, on propose une élaboration d'un modèle d'élément fini fondé sur la formulation de l'élément proposé précédemment (TSQ28) en réduisant ses degrés de liberté jusqu'à 20, et ce qui prendra la convention (TSQ20, Third shear quadrilateral with 20 degrees of freedom). Cet élément est un quadrilatère isoparamétrique de type Lagrange également à quatre nœuds possède seulement cinq degrés de déplacements de liberté chacun u, v, w, ψ_x, ψ_y et basé sur la théorie de troisième ordre de Reddy1984 [27] en adoptant l'approche monocouche équivalente pour l'analyse du comportement de flexion et du flambage des plaques composite stratifiées.

Cependant, la formulation devient exiger des expressions mathématique de la dérivée de seconde ordre sur la composante transversal w difficile à calculer.

4.1.1 Approximation nodale

L'approximation nodale des degrés de liberté de déplacements est décrite à partir l'interpolation Lagrangienne à travers toutes coordonnées (ξ, η) pour les quatre nœuds de l'élément quadrilatère:

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) u_i; & v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) v_i; \\
 w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) w_i; & \psi_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) \psi_{xi}; \\
 \psi_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\xi, \eta) \psi_{yi}; \\
 \bar{N}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & (4-1) \\
 \bar{N}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 \bar{N}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 \bar{N}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned}$$

$\bar{N}_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions d'interpolation bilinéaire de type Lagrange.

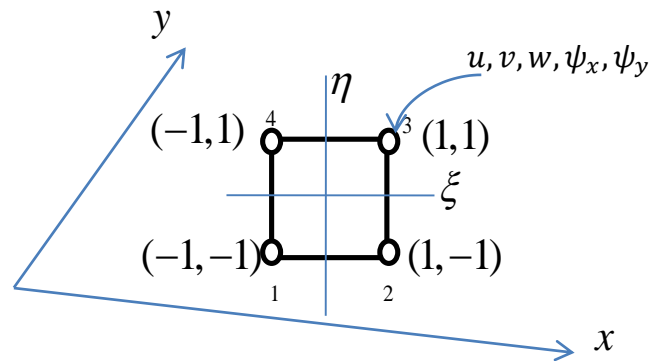


Figure 4-1 Description de l'élément TSQ20 isoparamétrique normalisé

4.1.2 Relations entre les déformations et déplacements nodaux

L'approximation nodale du vecteur de déformation et les inconnus nodal peuvent être prennent les formes matriciel nodale élémentaire suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^0 &= [B^0_\varepsilon]^r \{\delta\} \\
 \kappa^0 &= [B^0_\kappa]^r \{\delta\} \\
 \kappa^2 &= [B^2_\kappa]^r \{\delta\} \\
 \gamma^s &= [B^s_\varepsilon]^r \{\delta\} \\
 \kappa^s &= [B^s_\kappa]^r \{\delta\}
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

Avec :

$$\{\delta\}^T = [u_i, v_i, w_i, \psi_{x_i}, \psi_{y_i}]$$

$$\varepsilon^0 = [B^0_\varepsilon]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa^0 = [B_\kappa^0]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x i} \\ \psi_{y i} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa^2 = [B_\kappa^2]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial y^2} & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x i} \\ \psi_{y i} \end{Bmatrix}$$

$$\gamma^s = [B_\varepsilon^s]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & \bar{N}_i \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & \bar{N}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x i} \\ \psi_{y i} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa^s = [B_\kappa^s]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{h^2} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{4}{h^2} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & \bar{N}_i \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & \bar{N}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x i} \\ \psi_{y i} \end{Bmatrix}$$

avec: $c_1 = -4/3h^2$, $c_2 = -4/h^2$.

4.1.2.1 Approximation nodale des coordonnées

L'interpolation géométrique de l'élément peut-être exprimé comme suit :

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i; \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i$$

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (4-3)$$

4.1.3 Les dérivées des fonctions d'interpolations géométriques

Dans la formulation du présent élément (TSQ20), on constate que les vecteurs de déformations (4-2) s'exigent la première dérivée et la deuxième par rapport les coordonnées réelles (x, y) et le présent élément isoparamétrique est défini à partir de la référence normalisée (ξ, η) , alors la formulation exige une transformation géométrique sur la base de la position des nœuds dans l'espace réel (x, y) en calculant les matrices de passages des dérivées (Jacobien) entre l'élément réel (x, y) et référence normalisée (ξ, η) , à partir des relations de la différentielle suivantes [105, 195, 196]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4-4)$$

4.1.3.1 Le premier ordre dérivatif

Le premier ordre dérivatif est une première variation entre le repère local (ξ, η) et global (x, y) , lorsque y a une matrice de passage (jacobéenne) entre les repères. Cette transformation géométrique était très utile dans la littérature de la méthode des éléments finis [181].

On considère une fonction $N(\xi, \eta)$ possède une variation bilinéaire par rapport un autre repère (x, y) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \xi} &= \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} &= \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (4-5)$$

Les relations (4-5) peuvent-être écrites sur la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-6)$$

Calcul de la matrice jacobéenne $[J]$:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad \text{avec : } (i = 1, 4)$$

4.1.3.2 Le second ordre dérivatif

Le second ordre dérivatif est une deuxième variation entre le repère local normalisé (ξ, η) et global (x, y) , où y avait une matrice de passage (jacobéenne) [105, 195, 196] entre les repères.

Par conséquent, on considère une fonction $w(\xi, \eta)$ possède une deuxième variation par rapport au repère global (x, y) , on peut exécuter le changement à partir les relations suivante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)\end{aligned}\quad (4-7)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{4-8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{4-9}$$

Les relations (4-7), (4-8), (4-9) peuvent-être prises la forme matricielle comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)
\end{aligned} \tag{4-10}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{4-11}$$

Dans ce cas, nous avons obtenu une matrice de passage difficile à inverser à partir des méthodes mathématique classique car la matrice de passage n'est pas carrée (singulière). Par conséquent, nous recourons aux autres méthodes approchées ou des méthodes numériques pour calculer la matrice inverse.

On revient aux relations (4-10) et faire la transition suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (4-12)$$

Après peuvent être se prises la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4-13)$$

En substituant la matrice de premier ordre dérivatif pour la variation de w_x, w_y , on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} - \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4-14)$$

On inverse la matrice carrée de seconde ordre dérivatif à l'autre côté pour déterminer le changement des variable par rapport au repère global, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [J^B]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} - \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-15)$$

Après avoir simplifié la forme matricielle changée en variable au repère globale, on obtient la transformation géométrique suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & J_{14}^* & J_{15}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{24}^* & J_{25}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{34}^* & J_{35}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-16)$$

4.1.3.3 Transformation du vecteur déformation membranaire ε^0

Pour transformer les vecteurs nodaux de déformations en changeant les variables au repère normalisé, on fait les opérations matricielles suivantes:

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4-17)$$

Le changement des variables a besoin de la transformation d'ordre premier de dérivation.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} &= [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} &= [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-18)$$

La forme matricielle (4-17) devient :

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-19)$$

$$\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 \\ J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (4-20)$$

Finalement la déformation membranaire peut être prendre la convention suivante :

$$\varepsilon^0 = [B_\varepsilon^0] \{\delta\}$$

4.1.3.4 Transformation du vecteur déformation flexionnel κ^0

On prend la même procédure précédente pour le vecteur déformation flexionnelle κ^0 :

$$\kappa^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4-21)$$

Le changement des variables a besoin également de la transformation d'ordre premier de dérivation.

$$\kappa^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (4-22)$$

Finalemment on obtient :

$$\kappa^0 = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi} & J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x_i} \\ \psi_{y_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (4-23)$$

$$\kappa^0 = [B^0_{\kappa}] \{\delta\}$$

4.1.3.5 Transformation vecteur déformation flexionnel ordre supérieur κ^2

Dans le vecteur de déformation du comportement flexionnel d'ordre supérieur κ^2 on trouve des variations de second ordre de dérivation. Par conséquent, on fait les opérations matricielles suivantes:

$$\kappa^2 = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right\} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4-24)$$

On constate les relations (4-24) ont besoin de trois transformations géométriques, pour les variables ψ_x, ψ_y, w

- les variables ψ_x, ψ_y exigent le premier ordre dérivatif (4-6):

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-25)$$

Tandis que w exige le second ordre dérivatif (4-16) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & J_{14}^* & J_{15}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{24}^* & J_{25}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{34}^* & J_{35}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-26)$$

On substitut les relations (4-25), (4-26) dans les relations (4-24), on obtient :

$$\kappa^2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & J_{14}^* & J_{15}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{24}^* & J_{25}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{34}^* & J_{35}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-27)$$

Où :

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi,\eta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{array} \right\} \quad (4-28)$$

Donc, la forme matricielle final transformée du vecteur déformation κ^2 , est donnée comme suit :

$$\kappa^2 = c_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & (J_{11}^* \bar{N}_{i,\xi} + J_{12}^* \bar{N}_{i,\eta} + J_{13}^* \bar{N}_{i,\xi,\xi} + J_{14}^* \bar{N}_{i,\eta,\eta} + J_{15}^* \bar{N}_{i,\xi,\eta}) & \frac{1}{\det[J]} (J_{22} \bar{N}_{i,\xi} - J_{12} \bar{N}_{i,\eta}) & 0 \\ 0 & 0 & (J_{21}^* \bar{N}_{i,\xi} + J_{22}^* \bar{N}_{i,\eta} + J_{23}^* \bar{N}_{i,\xi,\xi} + J_{24}^* \bar{N}_{i,\eta,\eta} + J_{25}^* \bar{N}_{i,\xi,\eta}) & 0 & \frac{1}{\det[J]} (J_{11} \bar{N}_{i,\eta} - J_{21} \bar{N}_{i,\xi}) \\ 0 & 0 & 2(J_{31}^* \bar{N}_{i,\xi} + J_{32}^* \bar{N}_{i,\eta} + J_{33}^* \bar{N}_{i,\xi,\xi} + J_{34}^* \bar{N}_{i,\eta,\eta} + J_{35}^* \bar{N}_{i,\xi,\eta}) & \frac{1}{\det[J]} (J_{11} \bar{N}_{i,\eta} - J_{21} \bar{N}_{i,\xi}) & \frac{1}{\det[J]} (J_{22} \bar{N}_{i,\xi} - J_{12} \bar{N}_{i,\eta}) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{array} \right\} \quad (4-29)$$

$$\kappa^2 = [B^2_{\kappa}] \{\delta\}$$

4.1.3.6 Transformation du vecteur déformation cisaillement γ^s

Dans le changement des variables au vecteur de déformation γ^s , il exige uniquement le premier ordre dérivatif pour la variable w , pour cela se prend la transformation suivante :

$$\gamma^s = \left\{ \begin{array}{l} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \psi_x \\ \psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (4-30)$$

$$\gamma^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-31)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{Bmatrix}$$

$$\gamma^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4-32)$$

Finalement on obtient la forme suivante:

$$\gamma^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\det[J]}(J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi}) & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\det[J]}(J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta}) & \bar{N}_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4-33)$$

$$\gamma^s = [B^s_\varepsilon] \{\delta\}$$

4.1.3.7 Transformation du vecteur déformation cisaillement ordre supérieur κ^s

Le vecteur de déformation κ^s , il exige également le premier ordre dérivatif pour la variable w seulement, donc se prend la transformation suivante :

$$\kappa^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-34)$$

$$\kappa^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-35)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4-36)$$

Finalement on obtient la forme suivante:

$$\kappa^s = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\det[J]}(J_{11}\bar{N}_{i,\eta} - J_{21}\bar{N}_{i,\xi}) & 0 & \bar{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\det[J]}(J_{22}\bar{N}_{i,\xi} - J_{12}\bar{N}_{i,\eta}) & \bar{N}_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4-37)$$

$$\kappa^s = [B^s_{\kappa}] \{\delta\}$$

4.1.3.8 Transformation du vecteur de déformation non-linéaire

Les parties de grande déformation due au grand déplacement de Von-karman peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\int_A \varepsilon^{sT} [N] dA = \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_6 \\ N_6 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\delta\}^T [G]^T [N_0] [G] \{\delta\} \det[J] d\xi d\eta \quad (4-38)$$

Où:

$$[G]\{\delta\} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4-39)$$

4.1.3.9 Détermination de la matrice de rigidité et de la matrice géométrique élémentaires

La matrice de rigidité $[K]_e$ et la matrice géométrique $[K_g]_e$ seront déterminées de la même manière celle qu'a été effectuée dans le chapitre 2 précédent.

D'autre part, Le présent modèle d'élément fini (TSQ20) va utiliser l'intégration numérique de Gauss de la technique sélective ((2×2) pour la contribution membranaire et flexionnel, (1×1) pour la contribution cisaillement) pour plus de performance et afin de surmonter le problème de verrouillage en cisaillement dans les plaques minces.

4.2 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle d'élément fini (TSQ20) quadrilatère de type Lagrange isoparamétrique à quatre nœuds a été élaboré sur la base de la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy1984 [27] en adoptant l'approche de monocouche équivalente pour l'analyser du comportement flexionnel et de flambage des plaques composite stratifiées. Cet élément possède cinq degrés de liberté dans chaque nœud u, v, w, ψ_x, ψ_y qui sont décrits à partir des fonctions d'interpolation bilinéaire de Lagrange. Cependant, la formulation devient difficile à implémenter à cause de l'exigence des expressions de la dérivée seconde sur la composante transversal w .

Le chapitre suivant sera destiné à valider l'élément proposé (TSQ20) afin de vérifier sa performance à partir d'un ensemble d'exemples qui concernent les plaques composites stratifiées sur le comportement flexion et flambage.

Chapitre 5

5 Validation numérique du modèle d'élément fini de plaque stratifiée (TSQ20)

5.1 Introduction

D'après la littérature, ces types de formulations d'éléments finis ont été déjà mentionnés qu'ils ont des problèmes et difficulté en résolution. La théorie du troisième ordre de Reddy [TSDT] exigent des dérivées de second ordre ce qui devient la formulation d'élément fini difficile à implémenté. D'autre part, il est identique dans le développement d'éléments finis des plaques minces basés sur la théorie classique [197]. De nombreux auteurs ont rencontré ce problème et ils ont mentionné que la théorie possède de difficulté lors de l'exigence des dérivées du second ordre sur la méthode des éléments finis [187, 184, 144, 198]

L'objectif de ce chapitre vise à valider la formulation d'élément fini proposé (TSQ20) qui contient cinq degrés de liberté dans chaque nœud sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy. Et afin de vérifier sa performance en termes de convergence et précision sur le comportement de flexion et de flambage des structures multicouches composites. La validation consiste à considérer un ensemble d'exemples connus dans la littérature.

5.2 Validation numérique de l'élément (TSQ20) en flexion

On prend les même tests numériques qui sont proposés précédemment dans le chapitre trois afin de valider et d'analyser la performance de l'élément proposé (TSQ20) sur le comportement flexion des plaques isotropes et stratifiées carrées et rectangulaire symétriques et antisymétriques.

5.2.1 Conditions aux limites adoptées et matériaux

Les types de conditions aux limites utilisées dans ce chapitre sont donnés comme suit ; deux cas de plaques simplement appuyées (SS1) et (SS2) et un seul cas encastré (En) qui sont considérées autour les bords de la plaque.

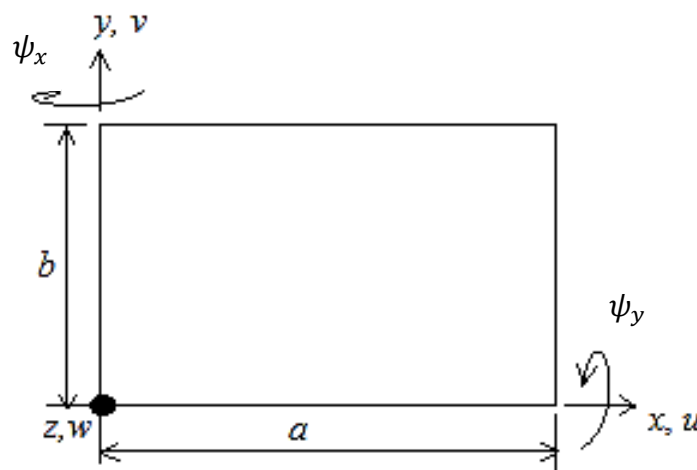


Figure 5-1 Description des degrés de liberté de (TSQ20) selon le repère (x, y, z)

$$SS1: x=0, a \rightarrow v = w = \psi_y = 0 ; y=0, b \rightarrow u = w = \psi_x = 0$$

$$SS2: x=0, a \rightarrow u = w = \psi_x = 0 ; y=0, b \rightarrow v = w = \psi_y = 0$$

$$En: x=0, a \rightarrow u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 ; y=0, a \rightarrow u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0$$

Les propriétés des matériaux utilisées sont données comme suit :

$$M1 : E_1/E_2 = 25 , G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

$$M2 : E_1/E_2 = 40 , G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

Les chargements utilisés de la flexion, sont le chargement sinusoïdal et uniforme sous les formules suivantes :

$$L1: q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \text{ (charge sinusoïdale);}$$

$$L2: q(x, y) = 1 \text{ (charge uniforme)}$$

5.2.2 Test de validation de l'élément proposé TSQ20

Un test de validation de l'élément proposé TSQ20 a été considéré en prenant deux structures des plaques stratifiées carrées symétriques cross-ply (0/90/90/0) et (0/90/0) pour déterminer les valeurs maximales du déplacement transversal (la flèche) et les contraintes dans différents rapport (a/h) pour les plaques minces et épaisse.

Les types choisis des propriétés du matériau, conditions aux limites et la charge réparti sont M1,S1,L1 respectivement, les valeurs adimensionnelles sont décrites en utilisant les formules ci-dessous :

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) (h^3 E_2 / q_0 a^4) 10^2, \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right) (h^2 / q_0 a^2), \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) (h / q_0 a), \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) (h / q_0 a)$$

Tableau 5-1 La flèche adimensionnel et contraintes d'une plaque carrée stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
Present(10×10)	4	2.654	0.309	0.778	0.0695	0.2253	0.3123
Elasticity [12]		1.954	0.72	0.666	0.0467	0.219	0.292
Present(10×10)	10	1.04	0.4563	0.5120	0.03922	0.30182	0.2079
Elasticity [12]		0.743	0.559	0.401	0.0275	0.301	0.196
Present(10×10)	20	0.7453	0.5068	0.4075	0.0326	0.3287	0.1698
Elasticity [12]		0.517	0.543	0.308	0.0230	0.328	0.156

<i>Present</i> (10×10)	100	0.6419	0.5271	0.3644	0.3027	0.339	0.1452
<i>Elasticity</i> [12]	100	0.4347	0.539	0.271	0.0214	0.339	0.141

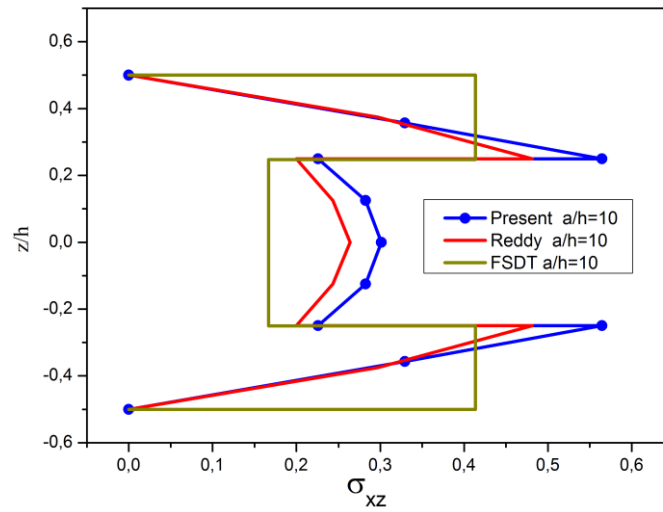


Figure 5-2 La distribution des contraintes transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0)

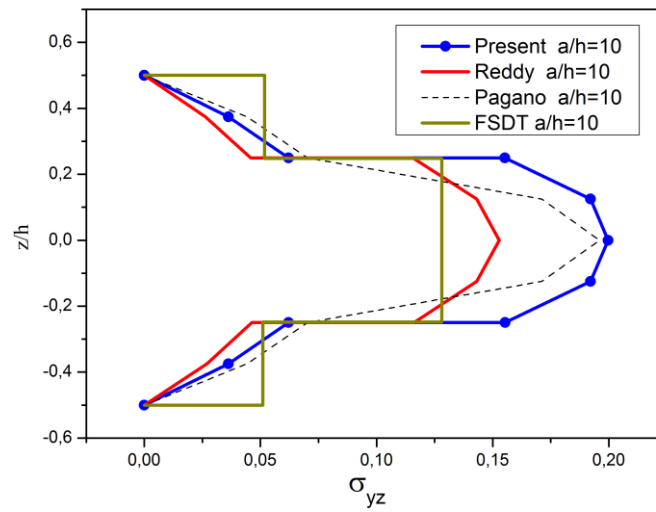


Figure 5-3 la distribution des contraintes transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0)

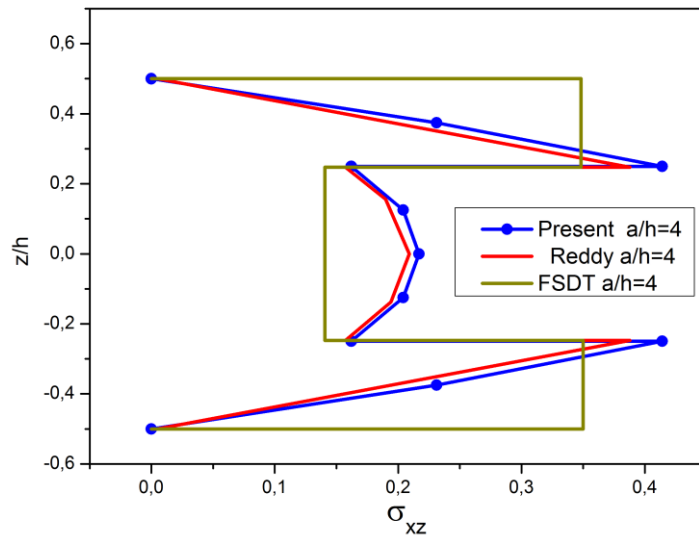


Figure 5-4 la distribution des contraintes transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0)

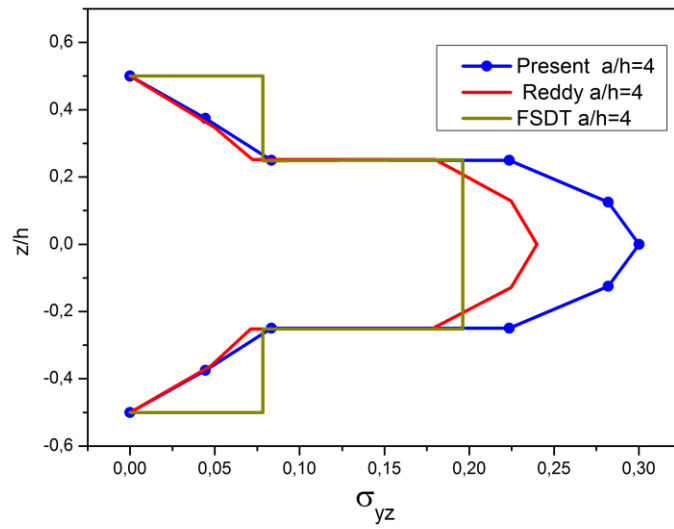


Figure 5-5 la distribution des contraintes transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/90/0)

Tableau 5-2 La flèche adimensionnel et contraintes d'une plaque carrée stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
Present(10×10)	4	2.786	0.3564	0.6986	0.0786	0.23273	0.24932
Elasticity [10]		2.006	0.755	0.556	0.0505	0.282	0.2172
Present(10×10)	10	1.051	0.4832	0.3796801	0.040859	0.28862	0.142523
Elasticity [10]		0.7405	0.5900	0.288	0.0289	0.3570	0.1228
Present(10×10)	20	0.745	0.5157	0.28862	0.03298	0.30312	0.11426
Elasticity [10]		0.5142	0.552	0.210	0.0234	0.3850	0.0938
Present(10×10)	100	0.641	0.5273	0.2549	0.0304	0.3083	0.099
Elasticity [10]		0.4368	0.5390	0.1810	0.0213	0.3950	0.0828

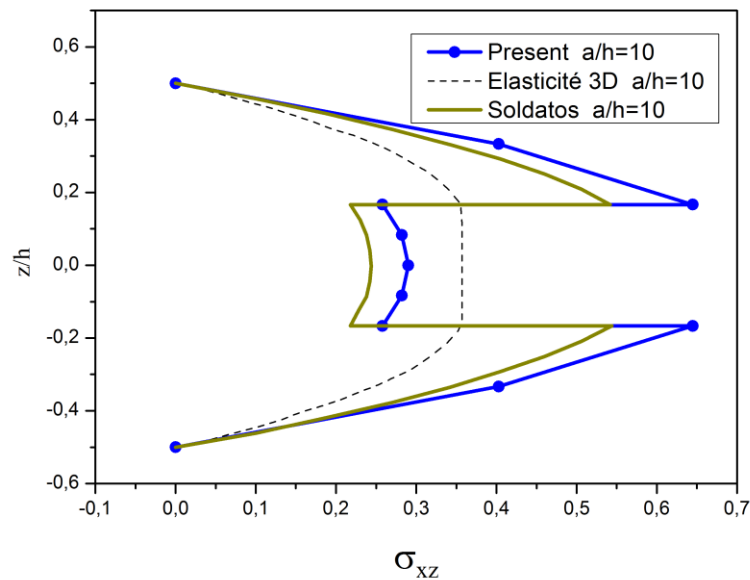


Figure 5-6 la distribution des contraintes transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/0)

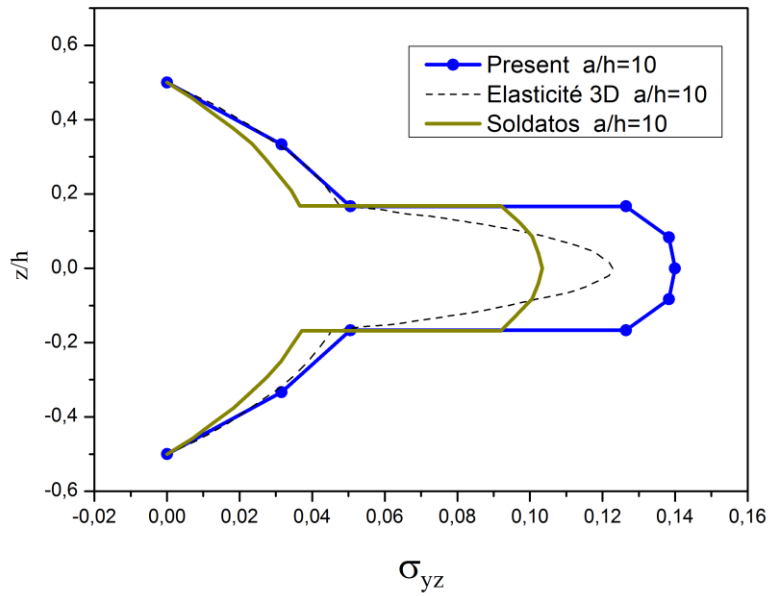


Figure 5-7 la distribution des contraintes transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/0)

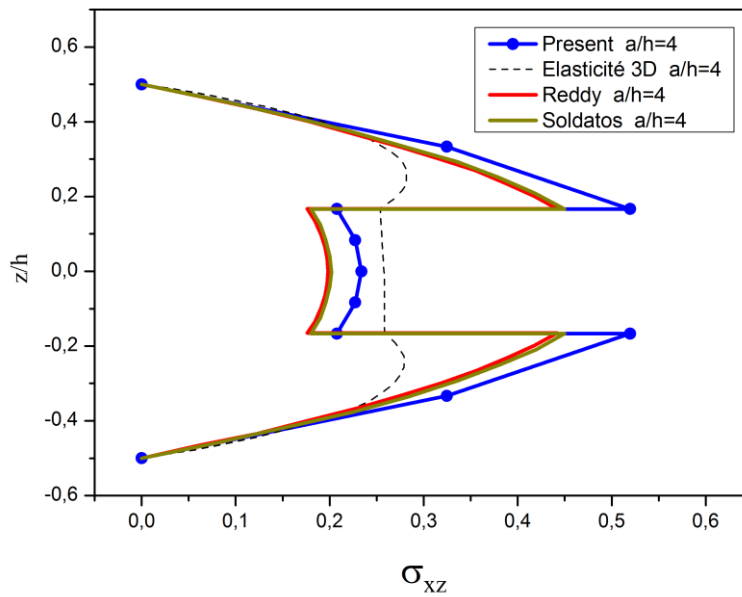


Figure 5-8 la distribution des contraintes transversale σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/0)

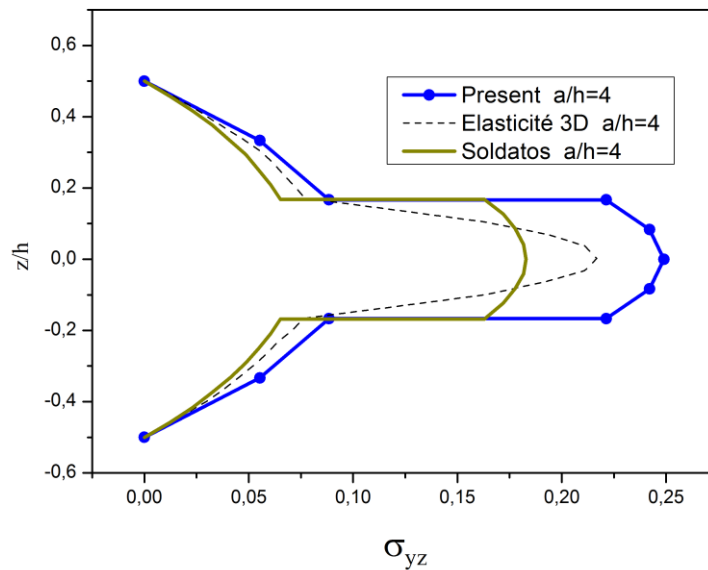


Figure 5-9 La distribution des contraintes transversale σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée (0/90/0)

D'après avoir obtenus les résultats aux Tableaux (5-1, 5-2) du comportement de flexion des plaques stratifiées composites (0/90/90/0),(0/90/0), on constate que l'élément ne fournit aucun résultat satisfaisant et la formulation est inefficace comme étant mentionnée dans la littérature. Cependant, on constate que la formulation est insatisfaisante uniquement dans le comportement flexionnel de la plaque, tandis que elle fournit de très bons résultats sur le comportement de cisaillement transversal, Ainsi que, à partir des Figures (5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, 5-7 5,8, 5-9) la formulation présente une bonne distribution parabolique des contraintes de cisaillements transversal σ_{yz} , σ_{xz} à travers l'épaisseur sans recourir à des facteurs de correction et capables d'assurer la nullité sur les faces supérieur et l'inférieur de la plaque en comparant à ceux obtenus analytiquement par Elasticité [10, 12] et la théorie de troisième ordre de Reddy et la théorie de premier ordre [27] et ceux obtenus par (HSDPT) Soldatos [56].

5.2.3 Proposition à améliorer la formulation de l'élément TSQ20

A partir de l'expérience précédente, nous avons confirmé que ce type de formulation d'élément fini (TSQ20) n'était pas approprié comme il avait été mentionné dans la littérature, mais uniquement dans le comportement flexionnel. Tandis qu'elle fournit de bons résultats sur le comportement de cisaillement transversal. Cependant, cela ne suffit pas pour l'analyse des structures composites multicouches.

Par conséquent, nous proposons dans le but d'améliorer les résultats du comportement flexionnel du modèle proposé. La formulation nous a amène à chercher une méthode ou modification afin d'obtenir des réponses satisfaisantes et convergentes sur le comportement flexionnel pour ce modèle. La formulation de présent élément fini elle constitué par cinq vecteurs représente l'état de la déformation $\varepsilon^0, \kappa^0, \kappa^2, \gamma^s, \kappa^s$, la déformation membranaire, flexionnel, flexionnel d'ordre supérieur, cisaillement

transversal et cisaillement transversal d'ordre supérieur, respectivement. De plus, ce qui nous a intéressé dans la formulation de présent élément c'est que la formulation s'améliore ses résultats du comportement flexionnel lorsque on réduit les vecteurs de déformations d'ordre supérieur κ^2, κ^s en les multipliant par des valeurs positives inférieure à un $0 \leq x < 1$. A partir de cette modification avantageuse dans la formulation, plusieurs tests ont été fait au niveau de chaque rapport $a/h=4, 10, 20, 100$ pour obtenir des valeurs optimales entre l'intervalle $0 \leq x < 1$ celles qui seront multipliées aux vecteurs déformations κ^2, κ^s afin de nous donner meilleur résultats sur le comportement flexionnel pour les plaques stratifiées composites. Par conséquent, on a choisi les valeurs optimales 0.4, 0.35, 0.2, 0.1 qui sont capables de diminuer l'erreur des résultats flexionnels des plaques stratifiées en fonction du ratio $a/h=4, 10, 20, 100$ respectivement.

En outre, nous essayons d'atteindre une fonction interpolée à partir les valeurs proposées en termes du rapport (a/h), cette fonction sera multipliée aux vecteurs de déformation d'ordre supérieur $f(\frac{a}{h})\kappa^2, f(\frac{a}{h})\kappa^s$ afin d'améliorer la performance de la formulation de l'élément proposé sur le comportement flexionnel des plaques isotropes et composite stratifiées. De plus, il existe de nombreuses méthodes numériques disponibles afin d'interpoler la fonction proposée à partir des valeurs $y_i=0.4, 0.35, 0.2, 0.1$ en fonction des valeurs du rapport $x_i = a/h = 4, 10, 20, 100$ telle que la méthode de Lagrange, pour déterminer le polynôme convenable.

$$f(x) = \sum_{j=0}^n y_j \left(\prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

Il existe plusieurs moyens disponible afin d'obtenir une interpolation plus précise au lieu de l'interpolation de Lagrange. Par conséquent, nous choisissons l'option de courbe de tendance de type puissance par logiciel Excel Figure 5-10.

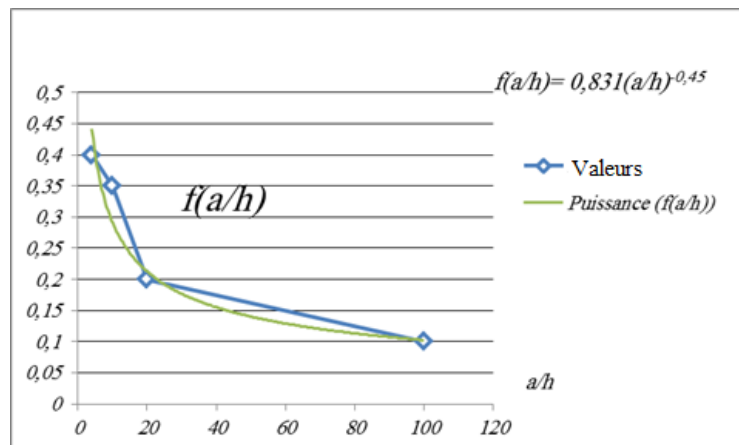


Figure 5-10 Représentation de la fonction proposée en termes de rapport a/h

K.BELKAID et A.TATI [199] ont publié un article concerne une formulation d'élément fini isoparamétrique quadrilatère à quatre nœuds ne possède que cinq degrés

de liberté dans chaque nœud et sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy où la formulation exige des dérivées secondes de la composante transversale du vecteur déplacement C_1 .

La fonction $f(a/h)$ sera ajoutée aux matrices nodales de déformation d'ordre supérieur $([B_\kappa^2]^r, [B_\kappa^s]^r)$

$$\kappa^2 = [B_\kappa^2]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} = c_1 \times f(a/h) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial y^2} & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x i} \\ \psi_{y i} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa^s = [B_\kappa^s]^r \{\delta\} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{h^2} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{4}{h^2} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = c_2 \times f(a/h) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & \bar{N}_i \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & \bar{N}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{x i} \\ \psi_{y i} \end{Bmatrix}$$

avec: $c_1 = -4/3h^2$, $c_2 = -4/h^2$.

La prochaine étape consiste à vérifier et analyser la performance de la formulation de l'élément proposé (TSQ20) en ajoutant la fonction proposée $f(a/h)$.

5.2.4 Test de validation de TSQ20 avec la fonction proposée

Dans cette section, nous allons prendre les deux exemples précédentes de structures des plaques stratifiées carrées symétriques cross-ply (0/90/90/0) et (0/90/0) dans différents rapport (a/h) en testant le modèle avec la fonction proposée, afin de démontrer l'optimisation de la performance de l'élément et la réduction des erreurs. Rappelons les type choisis des propriétés de matériau et les conditions aux limites et la charge réparti sont M1,S1,L1. Les résultats numériques sont présentés aux Tableau 5-3, Tableau 5-4 et sont décrits comme des valeurs adimensionnelles.

Tableau 5-3 La flèche adimensionnelle et contraintes normales d'une plaque carrée stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal.

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$
Present(10×10)	4	1.9831	0.4551	0.6475	0.0451
Elasticity [12]		1.954	0.72	0.666	0.0467
Present(10×10)	10	0.7251	0.4931	0.3868	0.0262
Elasticity [12]		0.743	0.559	0.401	0.0275

<i>Present</i> (10×10)	20	0.5287	0.5278	0.3112	0.021
<i>Elasticity</i> [12]		0.517	0.543	0.308	0.0230
<i>Present</i> (10×10)	100	0.4398	0.5368	0.2768	0.021
<i>Elasticity</i> [12]		0.4347	0.539	0.271	0.0214

Tableau 5-4 La flèche adimensionnelle et contraintes normales d'une plaque carrée stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$
<i>Present</i> (10×10)	4	2.0652	0.48387	0.5487	0.050306
<i>Elasticity</i> [10]		2.006	0.755	0.556	0.0505
<i>Present</i> (10×10)	10	0.73143	0.5094	0.274	0.027292
<i>Elasticity</i> [10]		0.7405	0.5900	0.288	0.0289
<i>Present</i> (10×10)	20	0.52943	0.53246	0.21184	0.021398
<i>Elasticity</i> [10]		0.5142	0.552	0.210	0.0234
<i>Present</i> (10×10)	100	0.43952	0.536935	0.18543	0.20886
<i>Elasticity</i> [10]		0.4368	0.5390	0.1810	0.0213

D'après avoir obtenus les résultats, nous constatons que les résultats s'améliorent et convergent en diminuant l'erreur sur le comportement flexionnel des plaques stratifiées cross-ply, par exemple les erreurs relatives de la flèche pour les rapports $a/h=4, 10, 20, 100$ au Tableau 5-1 ont été mesurés de 35%, 36%, 45%, 48% respectivement. Et après avoir utilisé la fonction $f(a/h)$ au Tableau 5-3 les erreurs ont été diminuées relativement de 7% , 5%, 8%, 0.6%, On Abrège les détails des erreurs relatives sur les tableaux suivants :

Tableau 5-5 l'erreur relative de la flèche et contraintes normales de la plaque (0/90/90/0) avant et après utiliser la fonction

Plaque (0/90/90/0)	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$
L'erreur avant%	4	35	-57	16	48
	10	36	-18	27	42
	20	45	-5	32	32
	100	48	-1	35	38

<i>L'erreur après%</i>	4	1.4893	-37.5	-2.7808	-3.3533
	10	-2.4038	-11.784	-3.5441	-4.6182
	20	1.4855	-3.4972	0.3961	-1.3
	100	0.6	-1.0631	1.4579	-1.5187

Tableau 5-6 l'erreur relative de la flèche et contraintes normales de la plaque (0/90/0) avant et après utiliser la fonction

Plaque (0/90/0)	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$
<i>L'erreur avant%</i>	4	38	-52	25	55
	10	41	-18	31	41
	20	46	-5	38	32
	100	47	-1	41	40
<i>L'erreur après%</i>	4	2.9511	-35.91	-1.3129	-0.38416
	10	-1.2248	-13.661	-4.8611	-5.564
	20	2.1859	-4.2246	0.20952	-1.7949
	100	0.622	-1.0386	1.7680	-0.78873

On constate que les résultats du comportement flexionnel ont été améliorés après avoir utilisée la fonction proposée en comparant à ceux obtenus analytiquement par la solution d'Elasticité [12]. Cependant, les erreurs des contraintes de cisaillement transversal ont été augmentés un peu malheureusement mais ils restent considérable et comparable par apport certains modèle et théories dans la littérature telle que la théorie de [FSDT]. Également la contrainte normale σ_{xx} a été légèrement améliorée seulement au rapport $a/h=4$.

5.2.4.1 Test de maillage de convergence

5.2.4.1.1 Plaque stratifiée carrée (0/90/90/0)

Dans cet exemple, un test de maillage de convergence a été considéré pour le présent élément en prenant une plaque stratifiée symétrique carrée simplement appuyée (SS1) de quatre couches (0°/ 90°/ 90°/ 0°) épaisse et mince du rapport $a/h=10,100$ respectivement, afin de vérifier la performance de convergence et stabilité de l'élément dans différents maillages 4×4 , 8×8 , 12×12 , 16×16 en déterminant la flèche au centre de la plaque. Des résultats adimensionnels satisfaisants ont été obtenus au Tableau 5-7 en montrant la précision de convergence et stabilité du présent élément en comparant à

ceux obtenus par la solution d'élasticité 3D [12] et ceux obtenus par un modèle d'élément fini de même ordre de SJ Lee and HR Kim [151].

Tableau 5-7 Test de convergence de la flèche d'une plaque stratifiée simplement appuyée symétrique ($0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$) sous une charge transversale sinusoïdale

a/h	Reference	Maillage	\bar{w}
10	Présent	4×4	0.7328
	Lee		0.6975
	Présent	8×8	0.7256
	Lee		0.7147
	Présent	12×12	0.7249
	Lee		0.7179
	Présent	16×16	0.7247
	Lee		0.7190
	Présent	20×20	0.7246
	Elasticité	-	0.7430
100	Présent	4×4	0.4498
	Lee		0.4124
	Présent	8×8	0.4423
	Lee		0.4291
	Présent	12×12	0.4393
	Lee		0.4320
	Présent	16×16	0.4387
	Lee		0.4331
	Présent	20×20	0.4363
	Elasticité	-	0.4347

Les valeurs adimensionnelles fournis au Tableau 5-7 et Figure 5.11 sont décrites en utilisant les formules ci-dessous :

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) (h^3 E_2 / q_0 a^4) 10^2, \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right) (h^2 / q_0 a^2), \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) (h / q_0 a), \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) (h / q_0 a)$$

5.2.4.1.2 Plaque stratifiée (0/90/0)

Dans cet exemple, un autre test de maillage de convergence a été considéré en prenant une structure de plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyé SS1 épaisse et mince du rapport $a/h=10,100$ respectivement, afin de vérifier la convergence de l'élément dans différents maillages 8×8 , 12×12 , 16×16 , en déterminant la flèche adimensionnelle au centre de la plaque. Des résultats satisfaisants ont été obtenus au Tableau 5-8 en comparant à ceux obtenus analytiquement par 3D Pagano [10] et à ceux obtenus numériquement par le modèle d'élément fini triangulaire de Sheikh [145].

Tableau 5-8 Test de convergence de la flèche d'une plaque stratifiée simplement appuyée symétrique ($0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$) sous une charge transversale sinusoïdale

a/h	Reference	Maillage	\bar{w}
10	Présent	8×8	0.7322
	Sheikh		0.7163
	Présent	12×12	0.7311
	Sheikh		0.7142
	Présent	16×16	0.7307
	Sheikh		0.7140
	Présent	20×20	0.7306
	Pagano	-	0.7405
100	Présent	8×8	0,4427
	Sheikh		0.4381
	Présent	12×12	0,4391
	Sheikh		0.4360
	Présent	16×16	0,4388
	Sheikh		0.4350
	Présent	20×20	0,4373
	Pagano	-	0.4368

5.2.4.2 Exemples numériques

Après avoir vérifié la performance de convergence et de la précision du présent élément fini développé (TSQ20) sur le comportement flexionnel, certains exemples de validation connus dans la littérature ont été proposés sur le comportement de flexion des plaques stratifiées.

5.2.4.2.1 Plaques isotropes rectangulaire simplement appuyées

Dans cet exemple, une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée (SS1) a été considérée dans différents rapport d'aspects a/h et a/b et soumise à un chargement uniforme, en déterminant la flèche maximal de la plaque, et afin de vérifier le présent modèle (TSQ20) sur le comportement flexionnel des plaques isotropes carrées et rectangulaires. Des bons résultats ont été obtenus (Tableau 5-9) à partir le présent modèle en comparant à ceux obtenus analytiquement par Kant et *al.*[191]

Tableau 5-9 La flèche maximale $\bar{w} = \frac{w \cdot D}{h \cdot q}$ d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée ($\nu = 0.3$)

a/b	a/h	Présent(16×16)	Elasticity
0.2	20	8851,7	8770,72
	10	571,56	558,175
	7,14	153,84	148,39
0.5	20	6937,7	6855,07
	10	453,99	437,52
	7,14	120,54	116,73
1	20	2826,2	2761,31

	10	180,41	178,446
	7,14	50,156	48,446
2	20	441,72	437,52
	10	31,628	29,604
	7,14	8,5958	8,44

5.2.4.2.2 Plaque stratifiée carrée symétrique (0/90/90/0) sous un chargement sinusoidal

On considère une plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply (0/90/90/0) simplement appuyée (SS1) soumise à une charge sinusoidale L1, afin d'analyser le comportement flexionnel de la plaque, notamment à travers l'épaisseur en calculant la flèche centrale et les contraintes maximal dans différents rapport longueur/épaisseur ($a/h=100,20,10,4$). Des résultats satisfaisants ont été obtenus au Tableau 5-10 en comparant à ceux obtenus par l'élément de Lee (HSA4) [151] et avec ceux obtenus analytiquement par la solution d'élasticité 3D [12] et par Reddy HSDT, FSDT [27].

Tableau 5-10 La flèche adimensionnels et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/90/0) simplement appuyée sous un chargement sinusoidal

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
FSDT (Reddy)	4	1.7100	0.4059	0.5765	0.0308	0.1398	0.1963
HSDT (Reddy)		1.8937	0.6651	0.6322	0.0440	0.2064	0.2389
Elasticity (Pagano)		1.954	0.72	0.666	0.0467	0.219	0.292
HSA4(16×16)		1.9014	0.6973	0.6245	0.0456	0.2112	0.2439
Present(16×16)		1.9689	0.42108	0.65088	0.04817	0.16146	0.21875
FSDT (Reddy)	10	0.6628	0.4989	0.3615	0.0241	0.1667	0.1292
HSDT (Reddy)		0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	0.1531
Elasticity (Pagano)		0.743	0.559	0.401	0.0275	0.301	0.196
HSA4(16×16)		0.7190	0.5547	0.3872	0.0270	0.2807	0.1580
Present(16×16)		0.72467	0.49776	0.3890	0.02621	0.176679	0.1288
FSDT (Reddy)	20	0.4912	0.5273	0.2957	0.0221	0.1749	0.1087
HSDT (Reddy)		0.506	0.5393	0.3043	0.0228	0.2825	0.1234
Elasticity (Pagano)		0.517	0.543	0.308	0.0230	0.328	0.156

<i>HSA4(16×16)</i>	100	0.5065	0.5379	0.3021	0.0227	0.3028	0.1267
<i>Present(16×16)</i>		0.52468	0.52902	0.30584	0.0233	0.17403	0.1030
<i>FSDT (Reddy)</i>		0.4337	0.5382	0.2705	0.0213	0.178	0.139
<i>HSDT (Reddy)</i>		0.4343	0.5387	0.2708	0.0213	0.2897	0.139
<i>Elasticity (Pagano)</i>		0.4347	0.539	0.271	0.0214	0.339	0.141
<i>HSA4(16×16)</i>		0.4331	0.5333	0.2681	0.0211	0.3114	0.1142
<i>Present(16×16)</i>		0,4387	0.5373	0.2771	0.0214	0.16151	0.1442

5.2.4.2.3 Effet du rapport longueur/épaisseur (a/h)

A partir de la Figure 5-11, elle montre une très bonne convergence de la flèche centrale adimensionnelle dans différents rapport ($a/h=100,20,10,4$) de la plaque stratifiée symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) en comparant à ceux obtenus analytiquement par la solution d'Elasticité de Pagano [12] et à ceux obtenus numériquement par des modèles des éléments finis de même ordre de Lee [151].

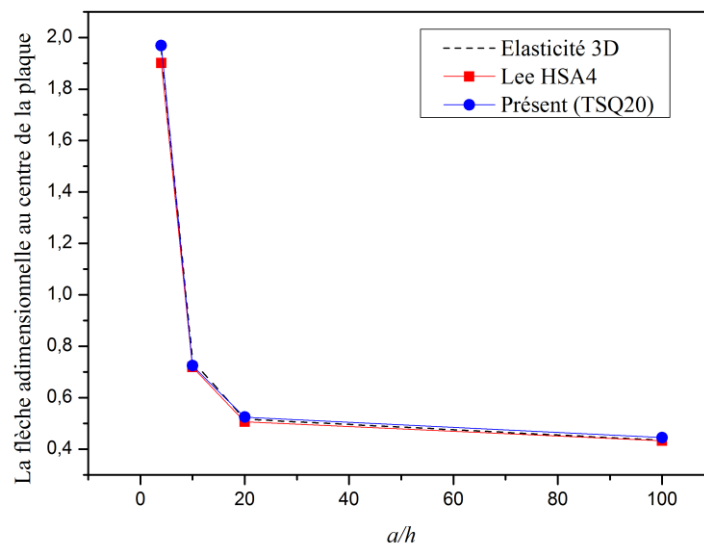


Figure 5-11 La flèche centrale adimensionnelle d'une plaque stratifiée symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) en fonction du rapport a/h

5.2.4.2.4 La distribution des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque ($0/90/90/0$)

A partir des Figures (5-12, 5-13, 5-14) le modèle présente des bonnes distributions des contraintes normal à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée cross-

ply (0/90/90/0) sous une charge sinusoïdale du rapport $a/h=10$. Les résultats ont été calculés à partir de l'utilisation des équations constitutive en comparant à ceux obtenus par des théories d'ordre supérieur et du premier ordre [HSDT], [FSDT] [187], et la théorie de (HSDPT) Soldatos [56].

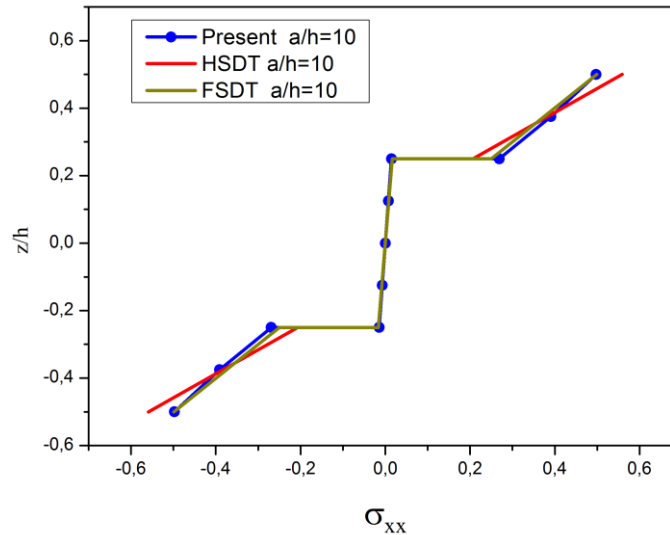


Figure 5-12 La distribution de la contrainte normal σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

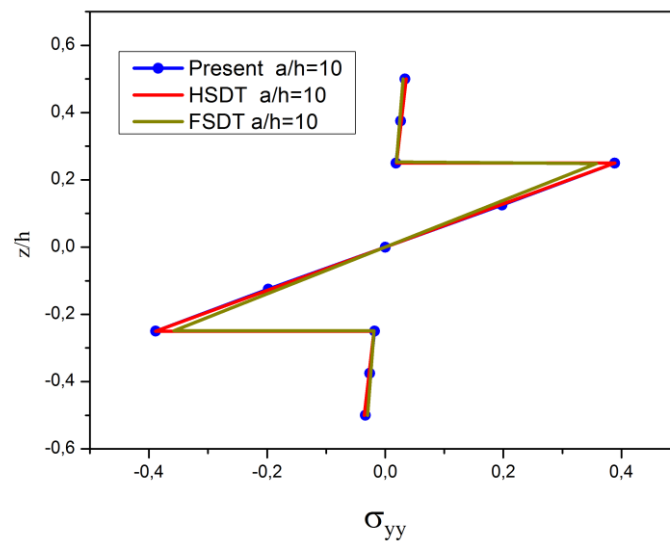


Figure 5-13 La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

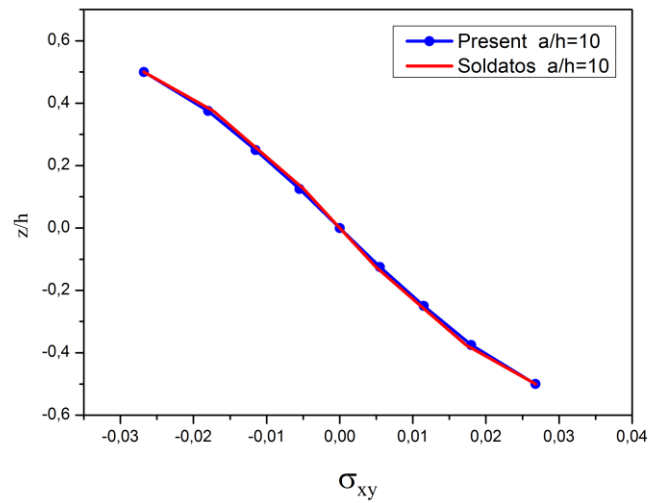


Figure 5-14. La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) simplement appuyée sur charge une sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

5.2.4.2.5 Plaque stratifiée carrée symétrique (0/90/0) soumise à une charge uniforme

Dans cet exemple, une plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique de trois couches (0/90/0) a été considérée afin de déterminer la flèche centrale dans différents rapport d'aspect a/h et en différent maillages dont la plaque ayant les conditions aux limites de type simplement appuyée (SS1) sur ses quatre arrêtes et soumise à un chargement uniforme L2, de propriété du matériau M1. Des résultats satisfaisants ont été obtenus de la flèche centrale au Tableau 5-11 par le présent modèle d'élément fini en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy [27] et ceux obtenus numériquement par Sheikh and Chakrabarti [145]

Tableau 5-11 Adimensionnelle de la flèche centrale d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement uniforme

Reference	(a/h) thickness ratio		
	4	10	100
Present Mesh:8×8	3. 1289	1. 1264	0.6928
Present Mesh:12×12	3. 0965	1. 1215	0.6948
Present Mesh:16×16	3. 0857	1. 120	0.6955
Present Mesh:20×20	3. 0807	1. 1193	0.6958
Sheikh and Chakrabarti	2.9103	1.0910	0.6720
Reddy	2.9091	1.0900	0.6705

5.2.4.2.6 Plaque stratifiée carrée symétrique (0/90/0) soumise à une charge sinusoïdale

Dans cet exemple, une plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique à trois couches (0/90/0) a été considérée, simplement appuyée sur les quatre côtés (SS1) et soumise à un chargement sinusoïdal L1, de propriétés du matériau M1, pour déterminer la flèche centrale et les contraintes maximal de la plaque dans différents ratio d'aspect a/h . des résultats très satisfaisants ont été obtenus en comparant à ceux obtenus analytiquement par la solution d'Elasticité 3D Pagano [10] et de Reddy [27] et à ceux obtenu par des modèle d'éléments finis basés sur la théorie d'ordre supérieur [HSDT] et du premier ordre [FSDT] par Shikh [145].

Tableau 5-12 Adimensionnelle de la flèche centrale et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal

Reference	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
FSDT(16×16)(Sheikh)	4	1.777	0.4430	0.4843	0.0371	0.1440	0.1569
HSDT(16×16)(Sheikh)		1.923	0.7500	0.5080	0.0499	0.2023	0.1831
Reddy		1.9218	0.7345	-	-	-	0.1832
Elasticity (Pagano)		2.006	0.755	0.556	0.0505	0.282	0.2172

<i>Present(16×16)</i>		2.0491	0.4601	0.5505	0.0552	0.1660	0.1728
<i>FSDT(16×16)(Sheikh)</i>		0.6700	0.5219	0.2582	0.025	0.1623	0.0918
<i>HSDT(16×16)(Sheikh)</i>		0.7140	0.5806	0.2722	0.0279	0.2437	0.1015
<i>Reddy</i>	10	0.7125	0.5684	-	-	-	0.1033
<i>Elasticity (Pagano)</i>		0.7405	0.5900	0.288	0.0289	0.3570	0.1228
<i>Present(16×16)</i>		0.7314	0.5139	0.2755	0.0279	0.1715	0.0903
<i>Elasticity (Pagano)</i>	20	0.5142	0.552	0.210	0.0234	0.3850	0.0938
<i>Present(16×16)</i>		0.5254	0.5332	0.2121	0.0236	0.1658	0.07151
<i>FSDT(16×16)(Sheikh)</i>		0.4350	0.5490	0.1825	0.0202	0.1568	0.0709
<i>HSDT(16×16)(Sheikh)</i>		0.4350	0.5496	0.1828	0.0215	0.2401	0.0749
<i>Reddy</i>	100	0.4342	0.5390	-	-	-	0.0750
<i>Elasticity (Pagano)</i>		0.4368	0.5390	0.1810	0.0213	0.3950	0.0828
<i>Present(16×16)</i>		0.4388	0.5381	0.18591	0.02152	0.15315	0.07816

Les valeurs adimensionnelles fournis aux tableaux et figures pour la plaque (0/90/0) sont décrites en utilisant les formules ci-dessous :

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) (h^3 E_2 / q_0 a^4) 10^2, \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{6} \right) (h^2 / q_0 a^2), \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) (h / q_0 a), \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) (h / q_0 a)$$

5.2.4.2.7 La distribution des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque (0/90/0)

Aux Figures (5-15, 5-16, 5-17) présentent des bonnes distributions des contraintes normal obtenus à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) sous une charge sinusoïdale du rapport $a/h=10$ les résultats ont été comparés avec ceux obtenus analytiquement par l'Elasticité de Pagano et à ceux obtenus par la théorie (HSDPT) de Soldatos [56].

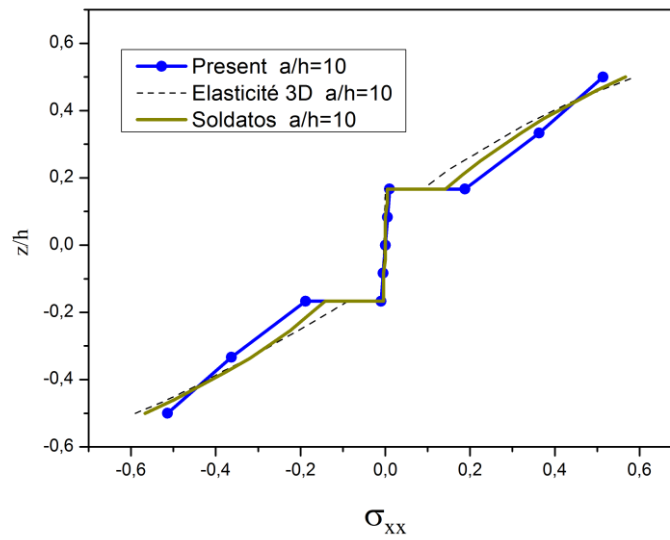


Figure 5-15 La distribution de la contrainte normal σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

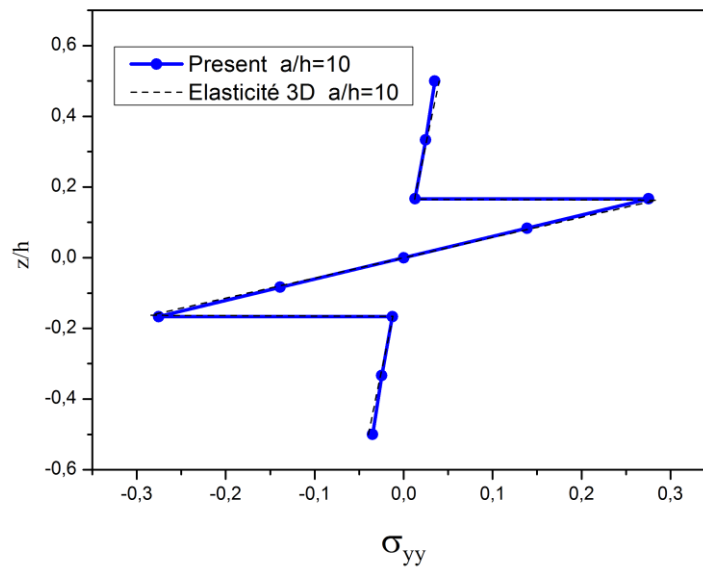


Figure 5-16 La distribution de la contrainte normal σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

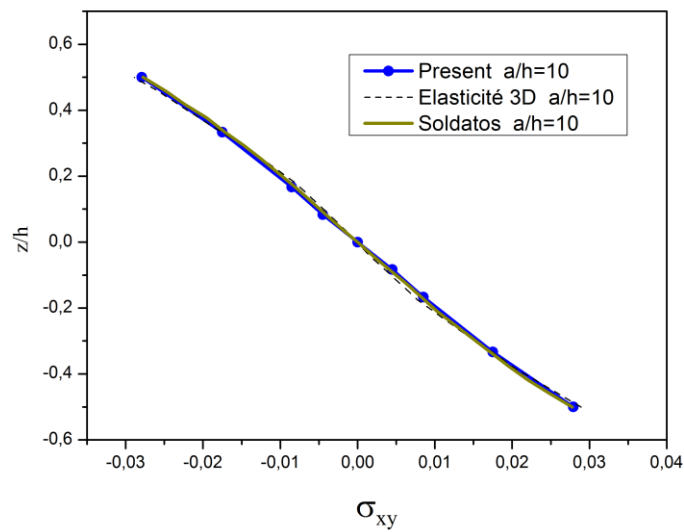


Figure 5-17 La distribution de la contrainte normal σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée (0/90/0) simplement appuyée sur une charge sinusoïdale de rapport $a/h = 10$

5.2.4.2.8 Plaque stratifiée rectangulaire symétrique (0/90/0) soumise à une charge sinusoïdale du rapport ($b/a=3$)

Dans cet exemple, on propose une application de comparaison très connu dans la littérature, il s'agit d'une plaque stratifiée rectangulaire cross-ply symétrique à trois couches (0/90/0) simplement appuyée sur les quatre côtés (SS1) et soumise à un chargement sinusoïdal L1, de propriétés du matériau M1 pour le rapport ($b/a=3$), afin de déterminer la flèche centrale et les contraintes maximal de la plaque dans différents rapport d'aspect a/h . Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini [TSQ20] en comparant à ceux obtenus analytiquement par la solution d'Elasticité 3D Pagano [10] et de Reddy [27] et à ceux obtenu par des modèle d'éléments finis basés sur la théorie d'ordre supérieur [HSDT] de Shikh [145].

Tableau 5-13 Adimensionnelle de la flèche et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal ($b/a=3$)

Référence	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$
Reddy		2.6411	1.0356	0.1028	0.2724	0.0348	0.0263
Pagano	4	2.8200	1.1000	0.1190	0.3870	0.0334	0.0281
sheikh		2.6437	1.0650	0.1209	0.2723	0.0320	0.0264

<i>Présent</i>		2.4226	0.8430	0.0984	0.1879	0.0308	0.0235
<i>Reddy</i>		0.8622	0.6924	0.0398	0.2859	0.0170	0.0115
<i>Pagano</i>		0.9190	0.7250	0.0435	0.4200	0.0152	0.0123
<i>sheikh</i>	10	0.8649	0.7164	0.0383	0.2851	0.0106	0.0117
<i>Présent</i>		0.8349	0.6664	0.0374	0.1851	0.0166	0.0107
<i>Reddy</i>		0.8030	0.6214	0.0375	0.1894	0.0159	0.0105
<i>Pagano</i>		0.880451	0.62581	0.06318	0.49201	0.041786	0.011660
<i>sheikh</i>	20	0.5937	0.6407	0.0289	0.2880	0.0139	0.0091
<i>Présent</i>		0.6100	0.6500	0.0299	0.4340	0.0119	0.0093
<i>Reddy</i>		0.5965	0.6634	0.0274	0.2859	0.0135	0.0092
<i>Pagano</i>		0.5784	0.6228	0.0283	0.1896	0.0135	0.0088
<i>sheikh</i>	100	0.61716	0.62434	0.032663	0.18488	0.014052	0.0096357
<i>Présent</i>		0.5470	0.6240	0.0253	0.2886	0.0129	0.0083

5.2.4.2.9 Plaque stratifiée antisymétrique angle pli (équilibré) $[45/-45]_n$

Dans cet exemple, une plaque stratifiée angle-ply antisymétrique $(45^\circ/-45^\circ)_n$ a été considérée sous un chargement uniforme ($L2$) pour différents nombre de couches $n = 1, 2, 4$ où la plaque garde la même épaisseur totale dans différents rapports $a/h = 4, 10, 20, 100$ pour déterminer la flèche central adimensionnel. En addition, les propriétés du matériau et conditions aux limites de la plaque sont $M2, SS2$, respectivement. Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini en comparant à ceux obtenus analytiquement par Kabir [186] à ceux obtenus numériquement par Lee [151] et Akhras & Li [185], de plus les résultats numériques adimensionnelles ont été résumés dans le Tableau 5-14.

Tableau 5-14 La flèche adimensionnelle d'une plaque stratifiée carrée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ simplement appuyée SS2 sous un chargement uniforme

a/h	Nombre de couches	Présent(TSQ20)	Lee	Akhras & Li	Kabir
4	2	1.5334	1.5999	1.5398	-
	4	1.3025	1.2997	1.2986	-
	8	1.2772	1.2274	1.2223	-
10	2	0.94922	0.8710	0.8645	0.9406
	4	0.45538	0.4499	0.4493	-
	8	0.41563	0.4065	0.4062	-
20	2	0.81838	0.7666	0.7656	-
	4	0.33403	0.3247	0.3246	-
	8	0.29521	0.2856	0.2856	-
100	2	0.75661	0.7332	0.7338	0.73444
	4	0.29088	0.2845	0.2847	-
	8	0.252791	0.2468	0.2470	-

5.2.4.3 Plaque stratifiée carrée $[45/-45]_4$ sous un chargement sinusoïdal

Dans cet exemple, une plaque stratifiée antisymétriques angle plis $(45/-45)_4$ sous un chargement sinusoïdale a été considérée pour deux cas de rapports d'aspect $a/h = 10, 100$. La plaque possède des propriétés de matériau, conditions aux limites M1, SS2, respectivement. Le présent modèle d'élément fini fournit une bonne convergence et précision des résultats (Tableau 5-15) sur le comportement de flexion en comparant à ceux obtenus numériquement par des modèles d'éléments finis de Lee [151] et Latheswary et al [151] et Kant and Pandya [144].

Tableau 5-15 La déflexion adimensionnelle et les contraintes d'une plaque stratifiée carrée $(45^\circ/-45^\circ)_4$ simplement appuyée sous un chargement sinusoïdal

Référence	a/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$-\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
Lee	10	0.4206	0.1612	0.1612	0.1545	0.2361	0.2361
Latheswary et al		0.4208	0.1627	0.1627	0.1547	0.2400	0.2400
Kant and Pandya		0.4193	0.1633	0.1633	0.1601	0.2347	0.2347

<i>Présent</i>		0.4201	0.1612	0.1612	0.1535	0.2351	0.2351
<i>Lee</i>		0.426931	0.1456	0.1456	0.1803	0.18971	0.1897
<i>Latheswary et al</i>	100	0.2475	0.1439	0.1439	0.1379	0.2398	0.2398
<i>Kant and Pandya</i>		0.2479	0.1456	0.1456	0.1377	0.2395	0.2395
<i>Présent</i>		0.2469	0.1462	0.1462	0.1430	0.2344	0.2344

Les valeurs adimensionnelles fournis dans cet exemple sont décrites en utilisant les formules ci-dessous :

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) (h^3 E_2 / q_0 a^4) 10^2, \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2), \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) (h^2 / q_0 a^2)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) (h / q_0 a), \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) (h / q_0 a)$$

5.3 Plaque composite stratifiée biaise simplement appuyée [0/90/0]

Dans cet exemple, le modèle (TSQ20) a été vérifié en termes de la performance et la précision en distordant sa géométrie en considérant une plaque stratifiée symétriques biaisé (incliné) pour trois angles 30°, 45° et 60° et de trois couches (0/90/0) dans différents ratio a/h pour déterminer la flèche adimensionnelle au centre de la plaque et ses contraintes normales. La plaque repose sur ses quatre côtés, conditions aux limites simplement appuyée où tous les degrés de libertés sont libres sauf w ainsi que les caractéristiques mécaniques sont M1.

Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini au (Tableau 5-16) en comparant avec ceux obtenus par Sheikh [145, 177] et Kabir [192] et Haldar [177].

Tableau 5-16 la flèche adimensionnelle et contraintes normales d'une plaque composite stratifiée biaise (0/90/0) simplement appuyée sous un chargement uniforme

a/h	Angle biaise	Références	w	σ_{xx}	σ_{yy}
5	30°	<i>Présent</i> (16×16)	1.8592	0.78231	0.67609
		<i>Sheikh</i>	1.6811	0.8549	-
	45°	<i>Présent</i> (16×16)	1.2751	0.52082	0.64283
		<i>Sheikh</i>	1.1790	0.5920	-
	60°	<i>Présent</i> (16×16)	0.6058	0.25191	0.48483
		<i>Sheikh</i>	0.5196	0.2906	-
10	30°	<i>Présent</i> (16×16)	0.92991	0.6546502	0.4152692
		<i>Sheikh</i> (16×16)	0.8814	0.7125	0.3709

	45°	<i>Haldar</i>	0.8193	0.6005	-	
		<i>Présent(16×16)</i>	0.6164358	0.452207	0.44585891	
	60°	<i>Sheikh(16×16)</i>	0.5707	0.4861	0.3786	
		<i>Présent(16×16)</i>	0.285908	0.2145	0.378262	
		<i>Sheikh(16×16)</i>	0.2505	0.2201	0.3023	
		<i>Haldar</i>	0.2455	-	-	
100	30°	<i>Kabir</i>	0.2600	-	-	
		<i>Présent(16×16)</i>	0.567267	0.6599625	0.2883897	
		<i>Sheikh(16×16)</i>	0.5452	0.6444	0.2629	
	45°	<i>Haldar</i>	0.5458	0.6348	-	
		<i>Présent(16×16)</i>	0.3788	0.450298	0.3274918	
		<i>Sheikh(16×16)</i>	0.3631	0.4421	0.3007	
	60°	<i>Haldar</i>	0.3621	0.4319	-	
		<i>Présent(16×16)</i>	0.15671	0.2102773	0.27647852	
		<i>Sheikh(16×16)</i>	0.1455	0.2011	0.2572	
		<i>Haldar</i>	0.1455	-	-	
			<i>Kabir</i>	0.1520	-	-

5.4 Validation de l'élément TSQ20 sur le comportement de flambage des plaques stratifiées

Dans cette section, certains exemples numériques les plus connus dans la littérature ont été proposés afin valider et vérifier la performance du présent élément proposé (TSQ20) en termes de convergence et précision sur le comportement de flambage des plaques isotropes et stratifiées carrées, rectangulaire, symétriques et antisymétriques.

5.4.1 Conditions aux limites adoptées et matériaux

Les types de conditions aux limites utilisées dans ce chapitre sont données comme suit; deux cas de plaques simplement appuyées désignés par (SS1),(SS2), et un seul cas de plaques encastree désigné (En) qui sont considérées autour les bords de la plaque.

$$SS1: x=0, a \rightarrow w = \psi_y = 0 ; y=0, b \rightarrow w = \psi_x = 0$$

$$SS2: x=0 \rightarrow v = \psi_x = 0 ; x=a \rightarrow u = w = \psi_y = 0$$

$$y=0 \rightarrow u = \psi_y = 0 ; y=b \rightarrow v = w = \psi_x = 0 [138]$$

$$En: x=0 \rightarrow v = w = \psi_x = \psi_y = 0 ; x=a \rightarrow u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0$$

$$y=0, b \rightarrow u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0$$

En addition, les propriétés du matériau utilisées sont données comme suit :

$$M1 : E_1/E_2 = 25 , G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

$$M2 : E_1/E_2 = 40, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

Les chargements considérés dans cette étude sont les chargements critiques uniaxiaux et biaxiaux.

5.4.2 Test de maillage de convergence

5.4.2.1 Plaque isotrope carrée

Dans cet exemple, un test de maillage de convergence a été considéré pour le présent élément (TSQ20) en prenant une plaque isotrope carrée simplement appuyée SS1 épaisse et mince du rapport $a/h=5,10,100$ afin de vérifier la performance de convergence du présent élément dans différents maillages $4 \times 4, 8 \times 8, 12 \times 12, 16 \times 16$, en déterminant la charge critique adimensionnelle suivant la coordonnée d'abscisse x . Des résultats très satisfaisants ont été obtenus dans le Tableau 5-17 où dans lequel il montre la convergences et stabilité du modèle, en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy and Phan [141] et à ceux obtenus numériquement par l'élément fini triangulaire de Chakrabarti & Cheikh [177].

Tableau 5-17 Test de convergence de la charge critique $N_{cr} = (\overline{N_{cr}})\alpha^2/\pi^2 D$ d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée sous un chargement uniaxial $\mathbf{v} = \mathbf{0.3}$

a/h	Référence	Maillage	N_{cr}
5	Présent	4×4	3.0247
	Sheikh		3.231
	Présent	8×8	3.0607
	Sheikh		3.250
	Présent	12×12	3.1715
	Sheikh		3.257
	Présent	16×16	3.251
	Sheikh		3.260
	Reddy and Phan	-	3.265
10	Présent	4×4	4.014
	Sheikh		3.753
	Présent	8×8	3.86977
	Sheikh		3.775
	Présent	12×12	3.8257
	Sheikh		3.780
	Présent	16×16	3.793
	Sheikh		3.782
	Reddy and Phan	-	3.787
100	Présent	4×4	3.869
	Sheikh		3.973
	Présent	8×8	3.8928
	Sheikh		3.991
	Présent	12×12	3.9622
	Sheikh		3.995
	Présent	16×16	3.991
	Sheikh		3.996
	Reddy and Phan	-	3.998

5.4.2.2 Plaque stratifiée cross-ply symétrique (0/90/90/0)

Dans cet exemple, un deuxième test de maillage de convergence a été considéré également en prenant une plaque stratifiée symétrique carrée à quatre couches (0°/90°/90°/0°) pour différents rapports $a/h=5,10,100$ et de propriété matérielle M2 ainsi que les conditions aux limites simplement appuyées SS1, afin de vérifier la performance de convergence et stabilité de présent élément dans différents maillages $4 \times 4, 8 \times 8, 12 \times 12, 16 \times 16$ en déterminant la charge critique de flambage suivant l'axe x de la plaque. Des résultats satisfaisants ont été obtenus, où dans lesquels ils montrent la précision et la convergence du présent élément au Tableau 5-18 pour les rapports de $a/h = 5,10,100$ en comparant avec ceux obtenus analytiquement par Reddy et Phan [141] et Exacte HSDT [157] et à ceux obtenus numériquement par le modèle d'élément fini de Chakrabarti & Cheikh [177]

Tableau 5-18 Test de convergence de la charge critique uniaxiale suivant x $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée

Référence	(a/h) thickness ratio		
	5	10	100
Présent :4×4	10.24	21.84	34.581
Présent :8×8	10.571	22.071	34.904
Présent:12×12	10.829	22.333	35.16
Présent:16×16	11.482	23.0945	35.917
Sheikh&Chakrabarti[163]16×16	11.988	23.303	35.889
Reddy &Phan [141]	12.156	23.349	35.971
Exacte HSDT [168]	11.997	23.340	35.953

5.4.3 Exemples numériques

5.4.3.1 Plaque carrée cross-ply (0/90)

Dans cet exemple, une plaque carrée stratifiée cross-ply (0/90) antisymétrique a été considérée à l'étude du comportement du flambage en déterminant la charge critique uniaxiale dans différents rapports $a/h=5, 10, 20, 50, 100$. La plaque repose sur des conditions aux limites simplement appuyées (SS2) et de propriétés du matériau M2. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'éléments finis (TSQ20) (Tableau 5-19) en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy et Phan [141] et avec ceux obtenus numériquement par Chakrabarti et Cheikh [177].

Tableau 5-19 Adimensionnelle de la charge critique uniaxial suivant x $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [0/90] simplement appuyée

Référence	(a/h)thickness ratio				
	5	10	20	50	100
Présent (16×16)	8.476	11.435	12.412	12.458	12.787
Sheikh&Chakrabarti(16×16)	8.765	11.556	12.571	12.890	12.938
Reddy &Phan	8.769	11.563	12.577	12.895	12.942

5.4.3.2 L'effet de l'orthotropie sur les plaque carrées cross-ply (croisée) (0/90...)

Dans cet exemple, on considère différentes plaques stratifiées cross-ply au nombre de couche 2, 3, 4, 5 et 9 simplement appuyée (SSI) du rapport $a/h=10$, pour déterminer la charge critique uniaxial le long de l'axe x dans différents rapports d'orthotropie E_1/E_2 . Des résultats satisfaisants ont été obtenus à partir le présent élément [TSQ20] (Tableau 5-20) en comparant à ceux obtenus analytiquement par Noor Elasticité 3D [156] et Putcha N., Reddy J.N [138] et avec des modèles numériquement par Ferreira [170].

Tableau 5-20 L'effet de ratio d'orthotropie E_1/E_2 sur la charge critique uniaxial $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$, des plaques stratifiées cross-ply($a/h=10$)

Référence	Nombre de couche	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
Noor Elasticité		4.6948	6.1181	7.8196	9.3746	10.8167
Putcha&Reddy	[0/90]	4.7149	6.2721	8.1151	9.8695	11.5630
Present		3.7633	5.1543	7.3472	9.4666	11.435
Reddy		3.9333	5.087	7.0244	8.87	10.60
Ferreira		5.3933	9.9406	15.2980	19.6740	23.34
Present	[0/90/0]	5.3872	9.8331	14.8975	18.8942	22.1513
Exact		5.4088	9.8833	14.965	18.965	22.213
Reddy		6.212	10.312	15.070	18.888	22.0338
Putcha&Reddy	[0/90/90/0]	5.3933	9.9406	15.298	-	23.340
Ferreira		5.3870	9.969	15.348	19.729	23.389
Present		6.2154	10.40	15.409	19.566	23.0946

<i>Putch&Reddy</i>		5.4096	10.15	16.008	20.999	25.08
<i>Ferreira</i>	[0/90/0/90/0]	5.4041	10.0888	15.7913	20.5914	24.6901
<i>Present</i>		5.4265	10.138	15.842	20.615	24.68
<i>Noor Elasticité</i>		6.22	10.50	15.761	20.236	24.10
<i>Putch&Reddy</i>		5.4313	10.197	16.172	21.315	25.79
<i>Present</i>	[0/90/0/90/0/9 0/0/90/0]	5.4092	10.1767	16.1063	21.1918	25.6088
<i>Reddy</i>		5.4325	10.231	16.172	21.248	25.643
<i>Ferreira</i>		6.22	10.575	16.026	20.74	24.87

5.4.3.3 Plaque stratifiée (0/90/0) sous un chargement biaxial

Dans cet exemple une étude de l'effet du rapport de l'orthotropie $E1/E2$ a été considéré sur la charge critique du flambage d'une plaque carrée cross-ply symétrique (0/90/0) soumise à un chargement biaxial de compression (N_x , N_y) simplement appuyée (SS1) pour un rapport $a/h=10$, les propriétés de matériau utilisés sont M2. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini [TSQ20] ceux qu'ils sont présentés au Tableau 5-21 en comparant à ceux obtenus par Khdeir [158] et Nguyen-Van [193] et Fares [159].

Tableau 5-21 L'effet de l'orthotropie sur la charge critique biaxial de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée (0/90/0)(SS1) de ratio $a/h=10$

Référence	E1/E2			
	10	20	30	40
<i>Présent(TSQ20)</i>	4.8459	7.4756	9.111	10.375
<i>Fares</i>	4.963	7.588	8.575	10.202
<i>Nguyen-Van</i>	4.939	7.488	9.016	10.252
<i>Khdeir</i>	4.963	7.516	9.056	10.259

5.4.3.4 Effet de la variation d'aspect ratio (a/b) sur le flambage des plaques (0/90/90/0)

Dans cet exemple, une étude de l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la charge uniaxial critique du flambement d'une plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique (0/90/90/0) simplement appuyée (SS1) de propriétés de matériau M2. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus par le modèle proposé [TSQ20] au Tableau 5-22 en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy et Phan [141] et à ceux obtenus numériquement par Singh [178].

Tableau 5-22 Effet de la variation du rapport (a/b) sur la charge critique uniaxial de flambage des plaques (0/90/90/0)

a/b	Référence	(a/h) thickness ratio			
		5	10	20	100
0.5	Présent(TSQ20)	7.8442	17.83588	24.922	29.823
	Singh	8.739	18.347	25.746	29.657
1	Présent(TSQ20)	11.582	23.0945	31.237	35.917
	Reddy&Phan	12.156	23.349	31.637	35.971
	Singh	11.858	23.134	31.517	35.923
2	Présent(TSQ20)	13.869	46.47602	94.422	121.1139
	Singh	15.000	47.368	92.847	115.029

Reprenons, le même exemple précédent de plaque a été considéré à l'étudier avec l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur le comportement du flambement de la plaques stratifiée carrée cross-ply symétrique (0/90/90/0) du ratio $a/h=10$ simplement appuyée (SS1) soumise à un chargement uniaxial suivant l'axe d'abscisses dans différents rapport d'orthotropie $E1/E2$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le modèle [TSQ20] au Tableau 5-23 en comparant à ceux obtenus analytiquement par F.A. Fazzolari et al [157].

Tableau 5-23 Effet de l'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage des plaques (0/90/90/0) du rapport $a/h=10$ dans différents rapport d'aspect (a/b)

a/b	Références	$E1/E2$			
		3	10	20	40
2	Présent(TSQ20)	17.889	28.220	37.314	46.476
	F.A. Fazzolari et al Exact	18.183	28.622	37.688	47.531
1	Présent(TSQ20)	6.2154	10.40	15.409	23.095
	F.A. Fazzolari et al Exact	5.3933	9.9406	15.298	23.340
1/2	Présent(TSQ20)	2.6437	7.2327	11.6035	17.836
	F.A. Fazzolari et al Exact	2.8193	6.9366	11.650	18.414

	<i>Présent(TSQ20)</i>	2.414	6.4347	11.013	18.514
1/3	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	2.4587	6.5724	11.270	17.982

5.4.3.5 Effet d'orthotropie sur la charge critique uniaxial suivant l'axe x dans différents rapport a/h d'une plaque (0/90/90/0)

Dans cet exemple, une étude de l'effet d'orthotropie d'une plaque stratifiée carrée cross-ply (0/90/90/0) sur le comportement du flambage dans différents rapports longueur-épaisseur (a/h) et soumise à un chargement uniaxial suivant l'axe d'abscisses, simplement appuyée(SS1). Les propriétés de matériau du stratifiée sont données par: $E1 / E2 = ouvert$, $G12 = G13 = 0.6E2$, $G23 = 0.5E2$, $\nu12 = \nu13 = 0,25$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus de la charge critique par le présent élément proposé au Tableau 5-24 pour différents rapports d'orthotropie en comparant à ceux obtenus analytiquement par F.A. Fazzolari et al [157].

Tableau 5-24 Effet du rapport (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe x d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) pour différents rapport d'aspect d'orthotropie

$E1/E2$	Références	a/h			
		5	10	25	100
40	<i>Présent(TSQ20)</i>	11.582	23.0945	32. 203	35.917
	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	11.997	23.340	33.131	35.953
20	<i>Présent(TSQ20)</i>	8. 8867	15.409	18. 270	19.652
	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	9.4219	15.298	18.825	19.654
10	<i>Présent(TSQ20)</i>	6. 782	10.400	10. 894	11.4907
	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	7.1554	9.9406	11.209	11.473
30	<i>Présent(TSQ20)</i>	4. 4153	6.215	5. 565	5.7798
	<i>F.A. Fazzolari et al Exact</i>	4.5458	5.3933	5.6928	5.7499

5.4.3.6 Effet d'orthotropie sur la charge critique uniaxial suivant l'axe y dans différents rapport a/h d'une plaque (0/90/90/0)

Dans cet exemple, également reprenant le même exemple précédente de l'effet d'orthotropie de la plaque stratifiée carrée cross-ply (0/90/90/0) sur le comportement du flambage dans différents rapports longueur-épaisseur et soumise à un chargement uniaxial de compression suivant l'axe y d'ordonner, où la plaque repose sur des conditions aux limites simplement appuyée (SSI) et les propriétés de matériau du stratifiée étant données par: $E1 / E2 = \text{ouvert}$, $G12 = G13 = 0.6E2$, $G23 = 0.5E2$, $\nu12 = \nu13 = 0,25$. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus de la charge critique par le modèle d'élément fini proposé au Tableau 5-25 dans différents rapport d'orthotropie en comparant à ceux obtenus analytiquement par F.A. Fazzolari et al [157].

Tableau 5-25 Effet du rapport (a/h) sur la charge critique uniaxial de flambage suivant l'axe y d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) dans différents rapport d'aspect d'orthotropie

E1/E2	Références	a/h			
		5	10	25	100
40	Présent(TSQ20)	9.0257	19.2801	27.912	30.687
	F.A. Fazzolari et al Exact	8.5588	18.034	26.395	28.801
20	Présent(TSQ20)	7.4243	13.2726	17.019	18.1832
	F.A. Fazzolari et al Exact	7.2304	12.728	16.249	17.100
10	Présent(TSQ20)	6.0325	9.4059	10.894	11.49
	F.A. Fazzolari et al Exact	6.0365	9.2387	10.877	11.234
30	Présent(TSQ20)	4.2103	5.1236	5.5649	5.7797
	F.A. Fazzolari et al Exact	4.5458	5.3933	5.6928	5.7499

5.4.3.7 Effet d'orthotropie sur la charge critique biaxial suivant l'axe x, y d'une plaque (0/90/90/0)

Dans cet exemple, une étude de l'effet d'orthotropie d'une plaque stratifiée carrée cross-ply (0/90/90/0) sur le comportement du flambage pour différents rapports longueur-épaisseur et soumise à un chargement du flambement biaxial suivant l'axe x, y. ainsi que, la plaque repose sur des condition aux limites de type simplement appuyée (SSI) et les propriétés de matériau du stratifiée sont données par: $E1 / E2 = \text{ouvert}$, $G12 = G13 = 0.6E2$, $G23 = 0.5E2$, $\nu12 = \nu13 = 0,25$. Des résultats satisfaisants ont été

obtenus au Tableau 5-26 de la charge critique par le présent modèle d'élément dans différents rapports d'orthotropie en comparant également à ceux obtenus analytiquement par F.A. Fazzolari et al [157].

Tableau 5-26 Effet du rapport (a/h) sur la charge critique biaxial de flambage d'une plaque stratifiée (0/90/90/0) dans différents rapport d'aspect d'orthotropie.

$E1/E2$	Références	a/h			
		5	10	25	100
40	Present(TSQ20)	5.6643	11.29324	16.314	18.19
	F.A. Fazzolari et al Exact	5.8554	11.670	16.566	17.976
20	Present(TSQ20)	4.4461	7.3940	9.3114	10.01
	F.A. Fazzolari et al Exact	4.7109	7.6492	9.4124	9.8271
10	Present(TSQ20)	3.3899	4.8261	5.5884	5.89466
	F.A. Fazzolari et al Exact	3.5777	4.9703	5.6045	5.7368
30	Present(TSQ20)	2.1821	2.65568	2.65568	2.99610
	F.A. Fazzolari et al Exact	2.2729	2.6967	2.8464	2.8750

5.4.3.8 Plaque stratifiée angle-ply (équilibré) (45/-45)_n

Dans cette section prenant quelques exemples qui appartiennent aux structures plaques stratifiées angle-ply (équilibré) symétrique et antisymétrique pour l'analyse du comportement de la stabilité du flambage sous un chargement de compression uniaxial, biaxial.

Le premier exemple il s'agit d'une plaque angle-ply stratifiée antisymétrique (45/-45) a été considéré simplement appuyée (SS1) sur les quatre bords, du matériau M2 afin de déterminer la charge de compression uniaxial (N_x) critique du flambement dans différents rapports longueur-épaisseur $a/h= 5, 10, 20, 100$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini [TSQ20] (Tableau 5-27) en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy [1] et à ceux obtenus numériquement par Ferreira [170].

Tableau 5-27 Adimensionnelle de la charge critique uniaxial de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply $[45/-45]_3$ simplement appuyée

Référence	(a/h)thickness ratio			
	5	10	20	100
Présent(TSQ20)	11.739	34.313	55.023	63.01
Ferreira	12.1905	32.4036	53.1966	61.9858
Reddy	12.1690	32.4050	53.1980	62.0220

Dans le deuxième exemple, différentes plaques angle-ply stratifiées antisymétrique $[45/-45]$, $[45/-45]_2$ ont été considérées, qui reposent sur des conditions aux limites simplement appuyée (SS2), du matériau M1. Ainsi que, une autre plaque encastree a été considérée $[45/-45]_2$ (En). Afin de déterminer la charge critique de compression uniaxial (N_x) du flambement dans différents rapports longueur-épaisseur $a/h = 5, 10, 20, 100$. Le présent modèle d'élément fini [TSQ20] fournit des résultats satisfaisants obtenus au Tableau 5-28 en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy and Phan [34] et à ceux obtenus numériquement par Sheikh [177].

Tableau 5-28 Adimensionnelle de la charge critique de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply $[45/-45]_n$ simplement appuyée

Conditions aux limites	Référence	(a/h)thickness ratio a/h			
		5	10	20	100
(SS2) [45/45]	Présent(TSQ20)(16×16)	6.1992	12.724	15.455	16.6841
	Sheikh(16×16)	6.333	12.608	14.633	15.437
	Phan&Reddy	6.538	12.622	14.644	15.441
(SS1) [45/45] ₂	Présent(TSQ20)(16×16)	6.9058	21.9108	32.962	35.54466
	Sheikh(16×16)	7.260	19.632	30.970	35.779
	Phan&Reddy	7.2587	21.125	29.15	36.645
Encastree(En) [45/-45] ₂	Présent(TSQ20)(16×16)	8.6675	33.927	-	-
	Phan&Reddy	7.4099	31.0778	-	-

Le troisième exemple il s'agit d'une plaques angle-ply stratifiée symétrique $[45/-45/-45/45]$, simplement appuyée (SS1) sur ses quatre bords et du matériau M2, la plaque soumise à un cas du chargement de compression uniaxial uniforme (N_x) et un autre cas biaxial (N_x, N_y) afin de déterminer la charge critique de flambement dans différents rapports longueur-épaisseur $a/h = 5, 10, 20, 100$. Des résultats satisfaisants

ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini [TSQ20] au Tableau 5-29 en comparant à ceux obtenus numériquement par Ferreira [170].

Tableau 5-29 Adimensionnelle de la charge critique de flambage $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque stratifiée angle -ply [45/-45/-45/45]

Chargement	Référence	(a/h) thickness ratio			
		5	10	20	100
Uniaxial	Présent(TSQ20)(16×16	10.343	27.70	40.373	46.995
	Phan&Reddy	10.4453	26.4266	40.6858	45.0994
Biaxial	Présent(TSQ20)(16×16	7.6123	15.6431	21.576	23.1736
	Phan&Reddy	6.9890	14.5900	20.4246	22.5857

5.4.3.9 Plaque stratifiée (0/45/-45/90)

Dans cet exemple, une plaque stratifiée carrée d'orientation différente dans chaque couche [0/45/-45/90] a été considérée, simplement appuyée (SS1) sur les quatre bords, du matériau M2. Afin de déterminer la charge uniaxial (N_x) critique de flambement pour différents rapport longueur-épaisseur $a/h = 5, 10, 20, 50, 100$. Des résultats satisfaisants ont été obtenus au Tableau 5-30 par le présent modèle d'élément fini [TSQ20] en comparant à ceux obtenus analytiquement par Reddy and Phan [141].

Tableau 5-30 Effet du rapport a/h sur la charge critique d'une plaque stratifiée carrée [0/45/-45/90] simplement appuyée

Référence	(a/h) thickness ratio				
	5	10	20	50	100
Présent(TSQ20)	10.526	27.7546	36.719	40.907	41.9822
Phan, N. D. & Reddy	9.3323	26.799	37.115	41.877	42.819

5.5 Plaque composite stratifiée biaisée simplement appuyée [90/0/0/90]

Dans cet exemple, une plaque stratifiée symétriques biaisée (incliné) a été considérée de quatre couches (90/0/0/90) pour différents angles de biaisés $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ et 40° , afin de déterminer la charge critique uniaxial suivant l'axe x de flambage pour différents ratio a/h . La plaque repose sur des conditions simplement appuyée (SS1) et dont les caractéristiques mécaniques sont $E_1 = 128$ GPa, $E_2 = 11$ GPa, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = G_{13} = 4.48$ GPa, $G_{23} = 1.53$ GPa.

Des résultats satisfaisants ont été obtenus par le présent modèle d'élément fini au (Tableau 5-31) en comparant à ceux obtenus numériquement par Sheikh [177] et Hu and Tzeng [194].

Tableau 5-31 La charge critique uniaxial $N_{cr} = (\overline{N}_{cr})a^2/E_2h^3$ d'une plaque composite stratifiée biaise [90/0/0/90] simplement appuyée.

Angle d'inclinaison	Références	Thickness ratio (a/h)		
		100	50	20
0°	Présent	13.01	11.253	10.250
	Sheikh	12.138	12.029	11.324
	Hu and Tzeng	12.045	-	-
10°	Présent	14.66033	12.422	11.821
	Sheikh	13.020	12.888	12.057
	Hu and Tzeng	13.00	-	-
20°	Présent	17.588	15.048	13.617
	Sheikh	15.915	16.701	14.441
	Hu and Tzeng	15.636	-	-
30°	Présent	20.32642	19.406	17.362
	Sheikh	21.605	20.188	18.920
	Hu and Tzeng	21.500	-	-
40°	Présent	24.40617	22.639	19.127
	Sheikh	25.917	23.879	21.680
	Hu and Tzeng	25.500	-	-

5.6 Etude comparative entre les éléments développés (TSQ28, TSQ20)

Dans cette section, une étude de comparaison a été considérée entre les deux éléments développés afin de présenter meilleur élément performant proposé en termes de précision et le temps d'exécution en calcul sur le comportement de flexion et flambage, à partir une analyse de leurs erreurs relative en prenant deux applications déjà appliqués précédemment des plaques stratifiées.

Par conséquent, nous avons remarqué que le modèle TSQ20 prend un temps d'exécution petit en calcul comparable au modèle TSQ28, en utilisant un code de programmation en Fortran77.

D'autre part, dans le tableau (Tableau 5-32) ci-dessous on présente les erreurs relatives des résultats obtenus précédemment comparable avec la solution d'Elasticité d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal dans différents ratio a/h pour les deux modèles développés sur le comportement de flexion (le déplacement transversale et les contraintes normales et transverse). Par conséquent, on a fait un calcul des erreurs moyennes pour chaque paramètre pour différents ration a/h . On observe par exemple que le modèle TSQ20 a acquis moins d'erreurs relatives que TSQ28 pour le déplacement transversal w et la contrainte

normale $\bar{\sigma}_{yy}$, contrairement pour les autres paramètres. Ainsi, pour savoir lequel de ces modèles est le plus performant, il faudra calculer l'erreur moyenne totale pour tous les paramètres des modèles. Finalement, on obtient une valeur d'erreur 9.449% inférieure que 17.032% pour les deux modèles TSQ28 TSQ20 respectivement.

Tableau 5-32 Les erreurs relatives des éléments développés de la flèche centrale et contraintes d'une plaque stratifiée carrée (0/90/0) sous un chargement sinusoïdal

Reference	a/h	\bar{w}	Erreur%	$\bar{\sigma}_{xx}$	Erreur%	$\bar{\sigma}_{yy}$	Erreur%	$-\bar{\sigma}_{xy}$	Erreur%	$\bar{\sigma}_{xz}$	Erreur%	$\bar{\sigma}_{yz}$	Erreur%
Elasticity (Pagano)	4	2.006	-	0.755	-	0.556	-	0.0505	-	0.282	-	0.2172	-
Present (TSQ28)(16×16)		1.9360	3.4895	0.76575	1.4039	0.50729	9.602	0.049469	2.0416	0.20607	26.926	0.17970	20.868
Present (TSQ20)(16×16)		2.0491	2.1486	0.42012	43.732	0.55051	1.0822	0.05516	9.2277	0.16603	41.124	0.17283	24.691
Elasticity (Pagano)	10	0.7405	-	0.5900	-	0.288	-	0.0289	-	0.3570	-	0.1228	-
Present (TSQ28)(16×16)		0.71984	2.79	0.58332	1.1322	0.27091	5.934	0.027789	3.8443	0.26104	26.880	0.10176	17.134
Present (TSQ20)(16×16)		0.73143	1.2248	0.51394	12.892	0.27546	4.3542	0.02793	3.3564	0.17155	51.947	0.09029	26.474
Elasticity (Pagano)	20	0.5142	-	0.552	-	0.210	-	0.0234	-	0.3850	-	0.0938	-
Present (TSQ28)(16×16)		0.50649	1.4994	0.54921	0.50543	0.20456	2.6594	0.022865	2.2863	0.27455	28.688	0.080795	13.865
Present (TSQ20)(16×16)		0.52544	2.1859	0.53324	3.3986	0.21215	1.051	0.02356	0.68376	0.16582	56.930	0.071507	23.767
Elasticity (Pagano)	100	0.4368	-	0.5390	-	0.1810	-	0.0213	-	0.3950	-	0.0828	-
Present (TSQ28)(16×16)		0.43436	0.55861	0.53765	0.25046	0.18011	0.49171	0.021115	0.86854	0.27942	41.364	0.073117	11.694
Present (TSQ20)(16×16)		0.44734	2.413	0.53808	0.17069	0.18591	2.7127	0.02152	1.0329	0.15315	86.554	0.07816	5.6039
Erreur moyenne%	TSQ28	2.0844		0.823		4.6718		2.2602		30.965		15.89	
	TSQ20	1.9931		15.048		2.3		3.5753		59.14		20.134	
Erreur moyenne total %	TSQ28	9.449%											
	TSQ20	17.032%											

Egalement, on présente encore dans le Tableau 5-33 ci-dessous les erreurs relatives des résultats obtenus précédemment de la charge critiques uniaxial suivant l'axe x en les comparant avec la solution d'Elasticité pour les deux modèles développés sur le comportement de flambage pour différents ratio a/h d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée (0/90/90/0). Par conséquent, on a fait un calcul des erreurs moyennes de la charge critique dans différents ratios a/h et différents maillages afin de trouver le modèle le plus performant en précision. Finalement, on obtient la valeur d'erreur moyenne 0.4416% du modèle TSQ28 et la valeur 1.8149% du TSQ20 lorsqu'on prend le maillage le plus précis 16×16 dans lesquelles on constate que le modèle TSQ28 a acquis moins d'erreurs que le modèle TSQ20.

Tableau 5-33 Les erreurs relatives des éléments développés sur la charge critique uniaxial suivant $x N_{cr} = (\overline{N}_{cr}) a^2 / E_2 h^3$ d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée

Reference	Maillage	(a/h) thickness ratio					
		5	Erreur%	10	Erreur%	100	Erreur%
Présent(TSQ28)	4×4	12.324	2.7257	24.836	6.4096	39.832	10.789
Présent(TSQ20)		10.24	14.645	21.84	6.4267	34.581	3.8161
Présent(TSQ28)	8×8	12.011	0.11670	23.663	1.3839	36.87	2.5506
Présent(TSQ20)		10.571	11.886	22.071	5.437	34.904	2.9177
Présent(TSQ28)	12×12	11.957	0.33342	23.459	0.50985	36.355	1.1181
Présent(TSQ20)		10.829	9.7358	22.333	4.3145	35.16	2.2057
Présent(TSQ28)	16×16	11.938	0.49179	23.389	0.20994	36.177	0.62304
Présent(TSQ20)		11.482	4.2927	23.0945	1.0518	35.917	0.10013
Exacte HSDT [161]	-	11.997	-	23.340	-	35.953	-
Erreur moyenne 16×16 %	TSQ28	0.4416%					
	TSQ20	1.8149%					

5.7 Conclusion

D'après la formulation de l'élément proposé en cinq degrés de liberté pour chaque nœud (TSQ20), un test de validation a été appliqué sur l'élément proposé et après avoir affirmé que ce type d'élément n'est pas approprié comme étant mentionné dans la littérature. En outre, l'élément n'est efficace que sur le comportement flexionnel, tandis qu'il fournit de très bonnes réponses sur le comportement de cisaillement transversal en présentant la distribution parabolique de cisaillements transversal σ_{yz} , σ_{xz} à travers l'épaisseur sans recourir à des facteurs de correction et qui assure également la nullité sur les faces supérieures et inférieures de la plaque. Par conséquent, afin d'améliorer la performance du modèle dans l'analyse du comportement flexionnel des plaques stratifiées, une fonction géométrique en termes du rapport a/h a été proposée lorsque en l'ajoute dans la formulation de l'élément (TSQ20).

Une série d'applications en flexion et flambage a été proposée pour les plaques isotropes, composites stratifiées symétriques et non symétriques, avec différents cas de chargement, de géométrie et de conditions aux limites. Afin de valider la performance, la fiabilité et la polyvalence de l'élément développé (TSQ20) en utilisant l'intégration numériquement des points du Gauss sélective pour obtenir des résultats précis et sans blocage numérique notamment où la plaque est mince. Les résultats obtenus ont été comparés avec les résultats obtenus analytiquement et à ceux obtenus numériquement par des modèles d'éléments finis de même ordre disponibles dans la littérature.

D'autre part, une étude de comparaison a été considérée entre les éléments développés, afin de montrer meilleur élément performant proposé en termes de précision et de temps d'exécution en calcul sur le comportement de flexion et flambage. Finalement, on a conclu que meilleur modèle proposé en précision est TSQ28 au lieu du modèle TSQ20, malgré que TSQ20 possède un temps d'exécution de calcul petit que TSQ28

PARTIE 3

ETUDE PARAMETRIQUE

Chapitre 6

6 Etude de l'effet de la température sur le comportement du flambage des plaques composites stratifiées dont les caractéristiques sont thermo-dépendante

6.1 Introduction

Au cours de certains intervalles de température, les propriétés thermoélastiques de certains matériaux de structure varient considérablement avec la température. Par exemple, le module d'élasticité des alliages de titane à 1000 ° F peut être la moitié de sa valeur dans la température ambiante [200]. Dans de tels cas, la sensibilité à la température des matériaux doit être prise en compte lors de l'évaluation de la déformation et les contraintes [201]. Cependant, la température a un effet significatif sur le comportement des structures composites multicouche et notamment sur leurs propriétés, cette influence due à la température peut être variée et répartie le long de la structure. Par conséquent, ces structures peuvent également être non homogènes en raison de l'effet de la température dépendante aux propriétés du matériau.

Le phénomène mécanique de flambage et flambage thermique avec l'effet de la température dépendante aux propriétés élastique est devenu une branche établie à la recherche aux stabilités des structures composites multicouche. Cet effet peut provoquer la stabilité des structures composite et il peut causer leurs effondrements et destructions. Certains travaux pertinentes concernant le flambage et le flambage thermique des plaques composites ont été cités dans la littérature, inclure ceux de Wang et al. [166] Kitipornchai et al. [167], Liew et al. [168, 169], et Reddy et al. [138, 141]. Leissa, A. W. [153, 154].

Certains travaux ont été réalisés pour l'analyse des plaques stratifiées composites tenant en compte l'effet de la température dépendantes aux propriétés élastique du matériau. Shariyat M. and Chen L.W. et al ont fait une analyse du flambage thermique des plaques composites multicouches rectangulaires avec un effet uniforme de la température dépendantes aux propriétés thermiques et élastiques [202, 203]. Ainsi que Shen [204] a utilisé la théorie d'ordre supérieur de déformation du cisaillement de Reddy afin d'étudier le comportement post-flambage des plaques composites multicouches avec l'effet de la température dépendante aux propriétés. G. Fauconneau and R. D. Marangoni [205] ont étudié l'effet d'un gradient thermique sur les fréquences propres d'une plaque rectangulaire soumise à une répartition régulière d'une dimension linéaire de la température suivant l'axe x , en prise en considérant la dépendance de la température sur les modules d'élasticité du matériau. Arun K. Gupta, Jain Mamta [206] ont fait une étude de l'effet de la température dépend aux modules d'élasticité sur la vibration des plaques rectangulaires, où la température est distribuée exponentiellement le long de l'axe x . En outre, des plaques stratifiées composites non-homogène ont été analysées par Fares M., Zenkour [159] sur le comportement du flambage en utilisant une variation exponentielle des propriétés élastiques à travers la plaque.

L'objectif de ce chapitre consiste à étudier le comportement du flambage mécanique des plaques composites stratifiées avec l'effet de la température dépendante aux propriétés élastiques de matériaux à l'aide de l'élément fini isoparamétrique (TSQ28) tenant en compte différents champs de température T_0 à travers la plaque (uniforme, linéaire le long de x et y -direction).

6.2 Les équations constitutives en fonction de la Température

Les équations constitutives peuvent être écrites en ajoutant la dépendance du paramètre concerne la température T aux constantes du matériau C_{ij} , où les propriétés élastique deviennent en fonction de température T .

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(T) & C_{12}(T) & 0 \\ C_{12}(T) & C_{22}(T) & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}(T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{Bmatrix} \quad (6-1)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}(T) & 0 \\ 0 & C_{55}(T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \end{Bmatrix}$$

Où C_{ij} sont les constantes matérielles selon les axes du matériau d'une seule couche, qui sont données en fonction de température:

$$C_{11} = E_1(T) / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), C_{12} = (\nu_{12}E_2(T)) / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ C_{22} = E_2(T) / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), C_{66} = G_{12}(T), C_{55} = G_{13}(T), C_{44} = G_{23}(T)$$

Dans cette section, nous étudions le comportement mécanique du flambage des plaques composites stratifiées carrées simplement appuyées avec l'effet de la température dépendante aux propriétés du matériau en proposant différents cas de distribution du paramètre de Température le long du stratifié.

6.2.1 Cas de la distribution linéaire de la température dépendante le long de

l'axe x

Considérant un champ de température distribué linéairement le long de la longueur x -direction d'une dimension $T = T_0(1 - \bar{x})$ où T représente la variation linéaire le long de x -direction à partir de la température maximal T_0 au début de la plaque $x = 0$ jusqu'à la température de référence (ambiante) au bout $x = a$ où $x/a = \bar{x}$ est normalisé [205].

De plus, la température dépendante aux modules d'élasticité de la plupart des matériaux d'ingénierie a été approximée par Nowacki sous forme d'une relation de la variation linéaire du module d'élasticité selon la température [206, 207]:

$$E(T) = E_0(1 - \beta T) \quad (6-2)$$

Où E_0 représente la valeur de modules de propriétés du matériau dans la température de référence (ambiante), et β est la pente (slope) de la variation entre E en fonction de T . Par conséquent, les propriétés des matériaux de chaque couche de la plaque composite stratifiée sont supposées des fonctions linéaires en termes du paramètre température T . Cependant, la seule exception qui peut raisonnablement être supposée constante est le coefficient de Poisson [202].

$$E_1(T) = E_1(1 + E_{11}T), \quad E_2(T) = E_2(1 + E_{21}T)$$

$$G_{12}(T) = G_{12}(1 + G_{121}T), \quad G_{13}(T) = G_{13}(1 + G_{131}T)$$

$$G_{23}(T) = G_{23}(1 + G_{231}T)$$

Dans ce cas, la plaque stratifiée avec l'effet de la température dépendante aux propriétés soumise à un champ de distribution de température linéaire d'une seule dimension $T = T_0(1 - x)$ le long de x -direction, où les propriétés deviennent:

$$E_1(T) = E_1(1 + E_{11}T_0(1 - \bar{x})), \quad E_2(T) = E_2(1 + E_{21}T_0(1 - \bar{x}))$$

$$G_{12}(T) = G_{12}(1 + G_{121}T_0(1 - \bar{x})), \quad G_{13}(T) = G_{13}(1 + G_{131}T_0(1 - \bar{x}))$$

$$G_{23}(T) = G_{23}(1 + G_{231}T_0(1 - \bar{x}))$$

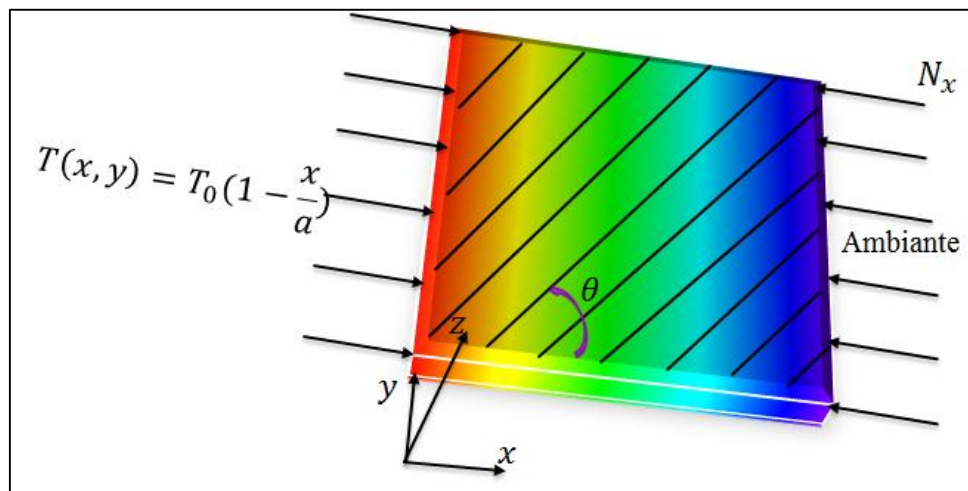


Figure 6-1 Description de la distribution linéaire de la température le long de l'axe x sur la plaque stratifiée

6.2.2 Cas de la distribution linéaire de la température dépendante le long de l'axe y

Dans cette partie, on considère un champ de température distribué linéaire le long de y -direction d'une dimension $T = T_0(1 - \bar{y})$ où T représente la variation linéaire le long de y -direction à partir de la température maximal T_0 au début $y = 0$ jusqu'à la température de référence (ambiante) au bout $y = b$ où $y/b = \bar{y}$ est une valeur normalisée. Dans ce cas-là, la plaque stratifiée est considérée avec l'effet de la température dépendante aux propriétés où elle est soumise à un champ de distribution de température linéaire d'une seule dimension $T = T_0(1 - \bar{y})$ le long de y -direction, où les propriétés deviennent:

$$E_1(T) = E_1(1 + E_{11}T_0(1 - \bar{y})), \quad E_2(T) = E_2(1 + E_{21}T_0(1 - \bar{y}))$$

$$G_{12}(T) = G_{12}(1 + G_{121}T_0(1 - \bar{y})), \quad G_{13}(T) = G_{13}(1 + G_{131}\Delta T_0(1 - \bar{y}))$$

$$G_{23}(T) = G_{23}(1 + G_{231}T_0(1 - \bar{y}))$$

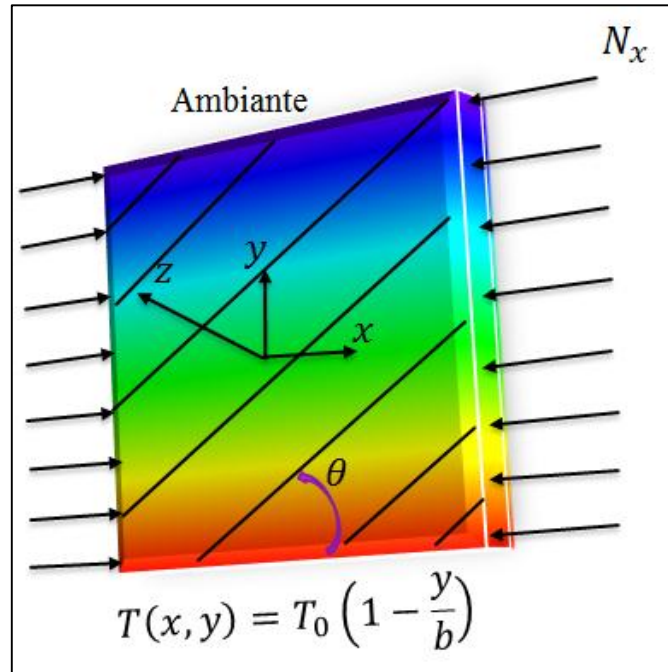


Figure 6-2 Description de la distribution linéaire de la température le long de l'axe y sur la plaque stratifiée

6.2.3 Cas de la température dépendante uniforme

Dans ce cas, la plaque stratifiée est soumise à un champ de distribution de température uniforme à travers toutes les dimensions de la plaque $T = T_0$, où les propriétés deviennent:

$$E_1(T) = E_1(1 + E_{11}T_0), \quad E_2(T) = E_2(1 + E_{21}T_0)$$

$$G_{12}(T) = G_{12}(1 + G_{121}T_0), \quad G_{13}(T) = G_{13}(1 + G_{131}T_0), \quad G_{23}(T) = G_{23}(1 + G_{231}T_0)$$

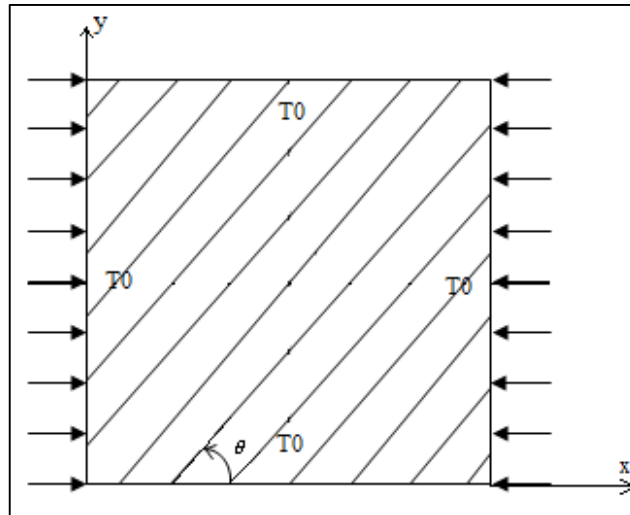


Figure 6-3 Description de la répartition uniforme de la température sur toute la plaque stratifiée

6.3 L'effet de la température sur le comportement du flambage des plaques cross-ply (0/90..)

Dans cet exemple, différentes plaques carrées stratifiées composites à plis croisés (cross-ply) symétrique de trois, cinq et neuf couche [0/90 ...] ont été considérées du ratio $a/h = 10$ pour les étudier dans chaque cas proposé de distribution de température sur le comportement du flambage en considérant la température de référence (ambiante) est égale à 20 °C où T_0 prend $T_0 - 20$. De plus, dans cette étude l'intervalle considéré de la variation du paramètre de température est limitée entre $20^\circ \leq T_0 \leq 1000^\circ$ afin d'analyser la réponse du comportement du flambage des plaques stratifiées dans cet intervalle.

En addition, les plaques choisies se sont constituées du matériau de graphite/époxy [208], et les plaque reposent sur des conditions aux limites simplement appuyées (SS1).

$$E_1 / E_2 = 40, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu = 0.25$$

Et les pentes (slope) de chaque propriété élastique du matériau sont données comme suit [208] :

$$E_{11} = E_{21} = G_{121} = G_{131} = G_{231} = -0.2 \times 10^{-3}$$

6.3.1 Résultats et discussion

Dans les Figures (6-4, 6-5, 6-6), ils présentent l'effet du paramètres de température T_0 dépendante aux propriétés élastique du matériau sur les charges critiques uniaxial (direction x) des plaques composites stratifiées cross-ply symétrique de trois, cinq et neuf couches pour chaque cas de champ de distribution de température proposé.

De plus, le maillage pris dans cette étude est la division du 16×16 à partir de l'élément proposé (TSQ28).

Nous voyons que l'effet de la température a une influence évidente sur la charge critique de flambement, où chaque fois la charge de flambage critique décroît lorsqu'on augmente le paramètre de la température pour tous les cas de distribution (uniforme, champ linéaire le long de la direction x et y).

Par conséquent, les courbes montrent également que le meilleur état de stabilité élastique se prend dans le cas où le champ de température est réparti linéairement le long de la direction y en comparant aux autres cas (uniforme et champ de température linéaire le long de la direction x). Et en indiquant également que la pire stabilité élastique se prend dans le cas où la distribution est uniforme, il apparaît clairement et logiquement, que la plaque est faible en rigidité, relativement à cause que les propriétés élastiques étant réduites dans tous les points de la plaque. Ainsi que, nous observons que l'état de la stabilité de la plaque avec le changement de température varie selon la position de la direction de la variation de la non-homogénéité des propriétés élastiques le long de la plaque en raison de l'effet de la température, et la direction de la charge uniaxiale du flambage. Quand, les directions sont perpendiculaires, la plaque devient plus stable que celles qui sont parallèles.

« A partir de ces tests nous concluons que la meilleure stabilité élastique du flambage pour une plaque carrée est lorsque la position de la direction de la variation (non-homogénéité) des propriétés élastiques à travers la plaque et la direction de la charge uniaxiale du flambage sont perpendiculaires. »

En outre, dans la Figure 6-7 qui illustre la charge critique du flambement normalisée pour les dernières Figures (6-4, 6-5, 6-6) des plaques stratifiées composites carrées de trois, cinq et neuf couches symétriques à plis croisés (cross-ply) [0/90 ...], Nous constatons que la plaque stratifiée a le même effet de température, quel que soit le nombre de couches en gardant la même mesure de l'épaisseur.

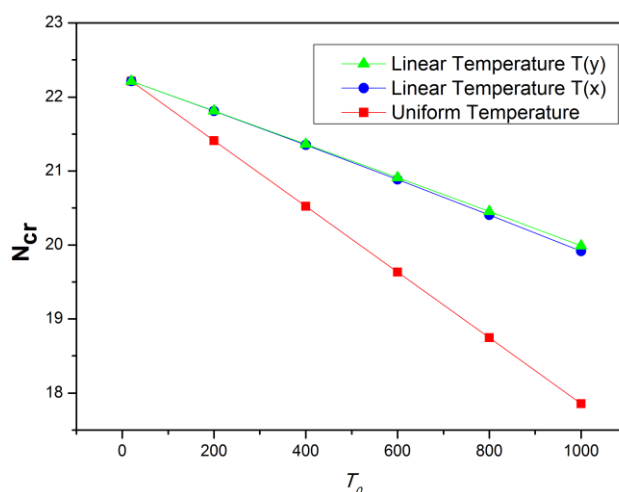


Figure 6-4 Les charges critiques du flambage d'une plaque stratifiée carrée [0/90/0] de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température

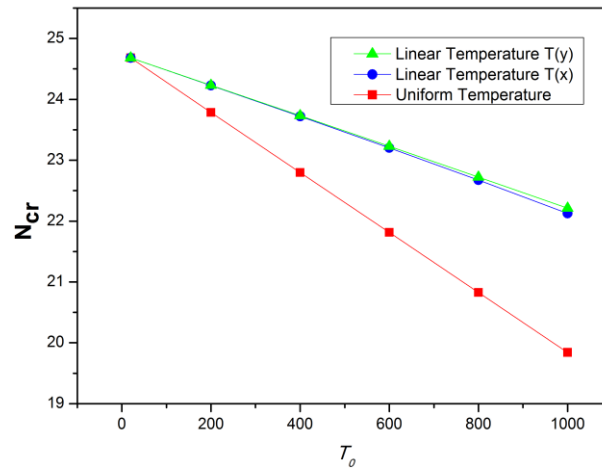


Figure 6-5 Les charges critiques du flambage d'une plaque stratifiée carrée [0/90/0/90/0] de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température

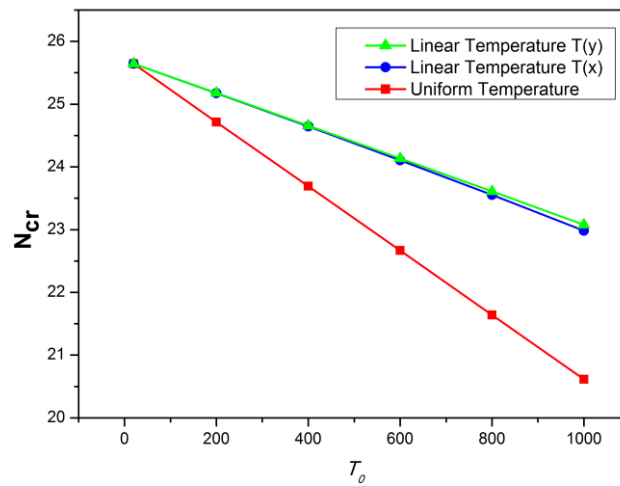


Figure 6-6 Les charges critiques du flambage d'une plaque stratifiée carrée [0/90/0/90/0/90/0/90/0] de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température

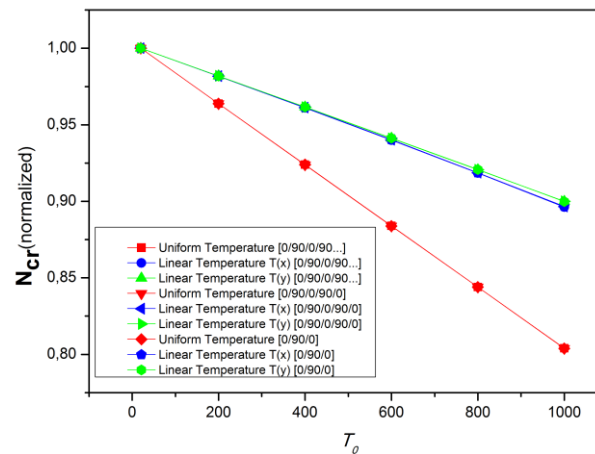


Figure 6-7 Les charges critique normalisée du flambage des plaques composites stratifiées carrées de trois, cinq et neuf couches symétrique cross-ply de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température

« Nous avons conclu à partir de ces expériences que l'effet de la température est constant, quel que soit le nombre de couches cross-ply pour une épaisseur fixée d'une plaque carrée en flambement. Ainsi que, meilleur état de stabilité au flambage d'une plaque non homogène être lorsque la direction de variation des propriétés élastiques et la direction de la charge uniaxial du flambement sont perpendiculaires. »

Nous passons aux autres expériences pour étudier l'effet de la température des plaques carrées stratifiées prenant en considération les paramètres de variation d'orientation des fibres et l'épaisseur.

6.4 Variation de l'orientation des fibres avec l'effet de la température sur le comportement du flambage

On compte dans cette section, une étude de la variation d'orientation des fibres avec l'effet de la distribution de température dans chaque cas proposé sur le comportement du flambage mécanique en proposant différentes plaques carrées stratifiées composites angle-ply anti-symétrique et simplement appuyée (SS1) du même matériau ce qui ayant utilisé précédemment [208] pour six couches $[45/-45]_3$, $[30/-30]_3$, $[60/-60]_3$ sous un chargement uniaxial (le long de la direction x), du ratio $a/h=10$.

6.4.1 Résultats et discussion

Dans les Figures (6-8, 6-9, 6-10), on présente l'effet du paramètre de température T_0 dépendante aux propriétés élastique du matériau sur les charges critiques du flambement des plaques composites stratifiées antisymétrique $[45/-45]_3$, $[30/-30]_3$, $[60/-60]_3$ dans chaque cas de champ de distribution de la température.

Ils présentent également les mêmes conséquences et allures ceux qui sont traitées précédemment, où on voit meilleur état de stabilité élastique se prend dans le cas où le

champ de température est réparti linéairement le long de la direction y en comparant aux autres cas (uniforme et la distribution de champ de température linéaire le long de la direction x). Et ils indiquent également que la pire stabilité élastique se prend dans le cas où la distribution est uniforme, relativement.

« À partir de ces tests nous pouvons déduire que meilleure stabilité élastique du flambage pour une plaque non homogène carrée épaisse est lorsque la position de la direction de la variation (non-homogénéité) des propriétés élastiques et la direction de la charge uniaxial du flambage sont perpendiculaires quel que soit le nombre de couches ou l'orientation des fibres. »

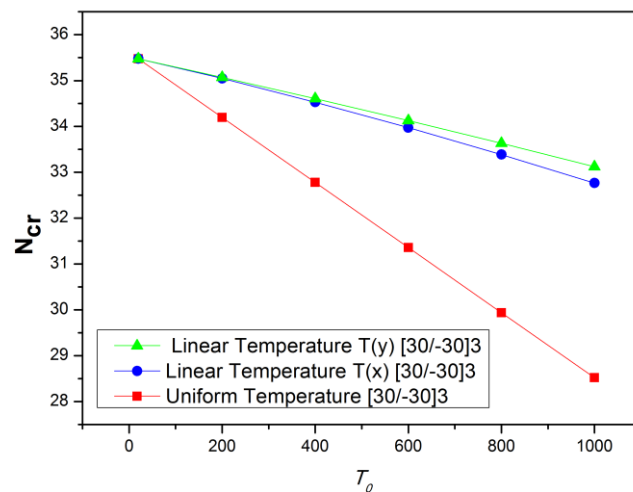


Figure 6-8 La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [30/-30]₃ de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température

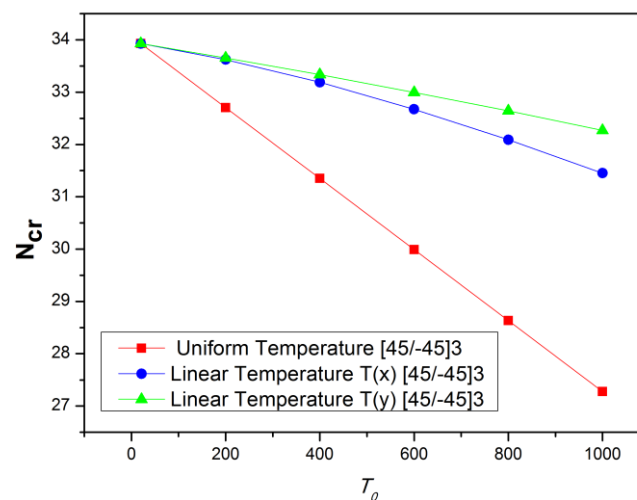


Figure 6-9 La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [45/-45]₃ de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température

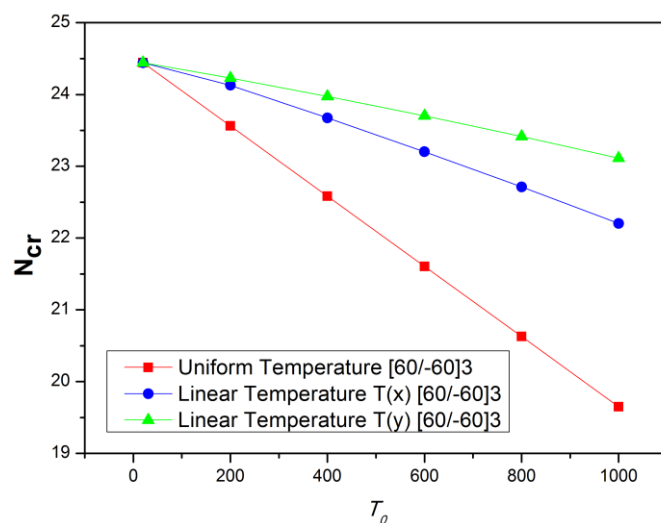


Figure 6-10 La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [60/-60]₃ de ratio $a/h=10$ sous différents effets de champ de température

De plus, les Figures (6-11, 6-12, 6-13) présentent la charge critique du flambement normalisée pour les plaques stratifiées composites suivantes [45/-45]₃, [30/-30]₃, [60/-60]₃ et [0/90/0/90/0] à partir des Figures (6-8, 6-9, 6-10, 6-5) respectivement, pour chaque cas de champ de distribution de température.

La Figure 6-11 présente la charge critique normalisée où la température est distribuée constante sur les différentes plaques stratifiées [45/-45]₃, [30/-30]₃, [60/-60]₃ et [0/90/0/90/0]. On constate que l'effet de la température est constant dans toute plaque proposée quel que soit le nombre de couches ou l'orientation des fibres dans une épaisseur fixée.

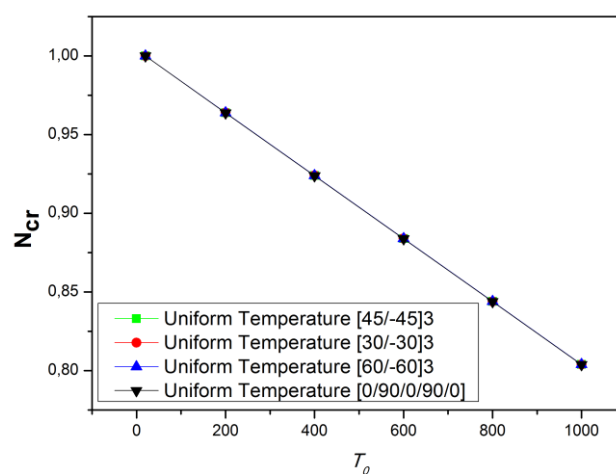


Figure 6-11 La charge critique normalisée du flambage de différentes plaques composites stratifiées carrées de ratio $a/h=10$ sous un effet constant de température

Et dans la Figure 6-12 qui présente la charge critique normalisée également où la température est variée linéairement $T(y)$ suivant la direction de l'axe y sur les différentes plaques stratifiées proposées $[45/-45]_3$, $[30/-30]_3$, $[60/-60]_3$ et $[0/90/0/90/0]$. On constate que l'effet de la température $T(y)$ suivant l'axe y est varié et dépend de l'orientation des fibres dans une épaisseur donnée. Par conséquent, on trouve la plaque stratifiée de l'orientation 45° a acquis un effet de température plus léger relativement, puis ensuite vient la plaque stratifiée de l'orientation 60° , puis ensuite vient la plaque stratifiée d'orientation 30° , puis ensuite vient la plaque stratifiée la plus influencé de la température est de l'orientation 90° .

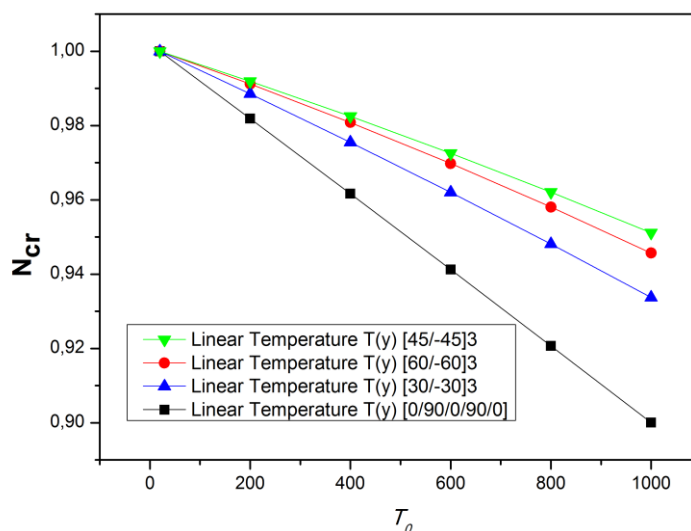


Figure 6-12 La charge critique normalisée du flambage de différentes plaques composites stratifiées carrées de ratio $a/h=10$ sous un champ de l'effet de température $T(y)$

Ainsi que, dans la Figure 6-13 qui présente la charge critique normalisée où la température est variée linéairement $T(x)$ suivant la direction de l'axe x sur les mêmes plaques stratifiées proposées $[45/-45]_3$, $[30/-30]_3$, $[60/-60]_3$ et $[0/90/0/90/0]$, on constate que l'effet de la température $T(x)$ suivant l'axe x varie également sur les plaques stratifiées lorsque en changeant l'orientation des fibres dans une épaisseur donnée. On observe que la plaque stratifiée de l'orientation 45° a acquis un effet de température plus léger également relativement, puis ensuite vient la plaque stratifiée de l'orientation 30° , puis ensuite vient la plaque stratifiée de l'orientation 60° , puis ensuite vient la plaque stratifiée la plus influencé de la température est de l'orientation 90° .

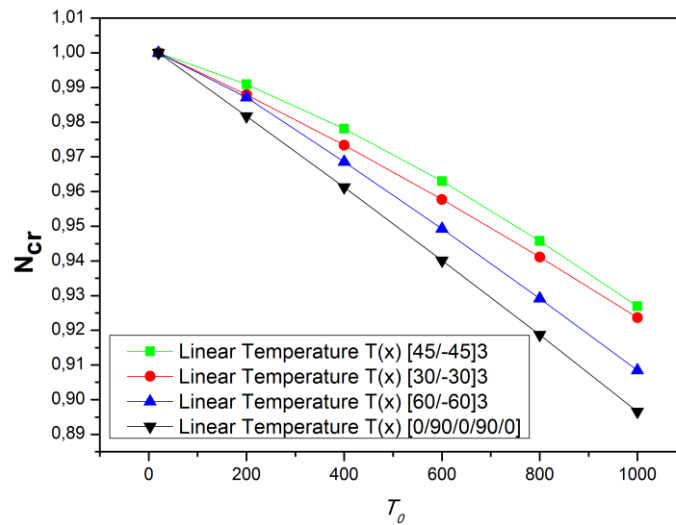


Figure 6-13 La charge critique normalisée du flambage de différentes plaques composites stratifiées carrées de ratio $a/h=10$ sous un champ de l'effet de température $T(x)$

« À partir de ces expériences on conclut que meilleur état de stabilité d'une plaque non homogène carrée épaisse toujours reste dépend de l'orthogonal des directions de la charge uniaxial et la direction de variation des propriétés élastiques (non homogénéité) du matériau, quelle que soit l'orientation des fibres ou le nombre de couches. Ainsi que, l'effet de la température varie selon l'orientation des fibres sur le comportement de flambage uniquement quand la température est variée le long de la plaque carrée. Tandis que l'effet est constant tant que la plaque carrée est homogène»

6.5 Plaque stratifiées minces avec l'effet de la température

Dans cette section, on considère des plaques stratifiées carrées minces du ratio $a/h=100$ qui prennent différentes orientations et couches [45/-45]₃, [30/-30]₃, [60/-60]₃, [0/90/0] du matériau graphite/époxy simplement appuyées, sous l'effet de la distribution de température dans chaque cas proposé sur le comportement de flambage mécanique. De plus, et afin de savoir. Est-ce que l'effet de température sera varié sur la charge critique des plaques composites minces comparable aux plaques épaisses celles qui sont traitées précédemment ?

Rappelons les propriétés matérielles et pentes (slope) sont données:

$$E_1 / E_2 = 40, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu = 0.25$$

$$E_{11} = E_{21} = G_{121} = G_{131} = G_{231} = -0.2 \times 10^{-3}$$

6.5.1 Résultats et discussion

Aux Figures (6-14, 6-15, 6-16, 6-17), qui présentent la décroissance de la charge critique de flambement en fonction de l'augmentation de l'effet du paramètres de la

température T_0 dépendante aux propriétés pour chaque cas de champ de distribution de la température des plaques composites stratifiées antisymétrique $[45/-45]_3$, $[30/-30]_3$, $[60/-60]_3$, $[0/90/0]$. On constate que la variation de la charge critique avec le champ de température qui est réparti linéairement le long de la direction x et y sont devenus presque identiques comparable aux plaques épaisses, à l'exception lors de la plaques de l'orientation 60° .

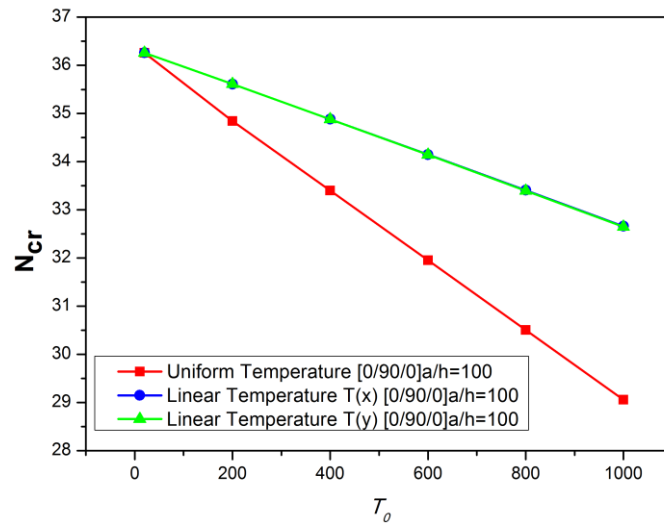


Figure 6-14 La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée $[0/90/0]$ de ratio $a/h=100$ sous différents effets de champ de température

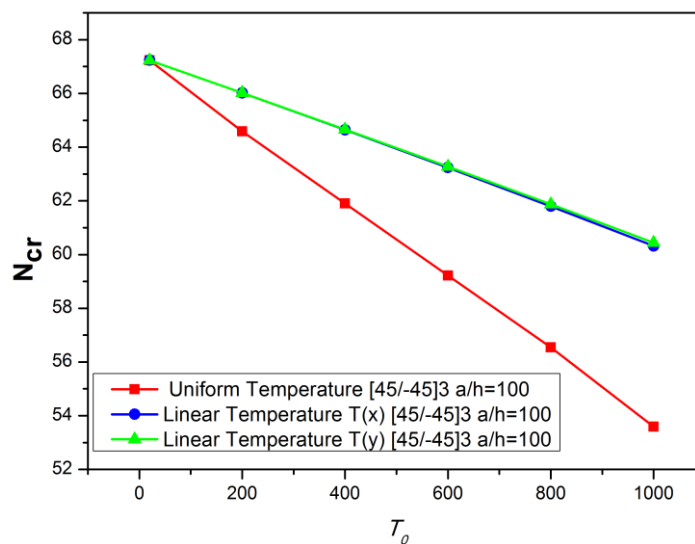


Figure 6-15 La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée $[45/-45]_3$ de ratio $a/h=100$ sous différents effets de champ de température

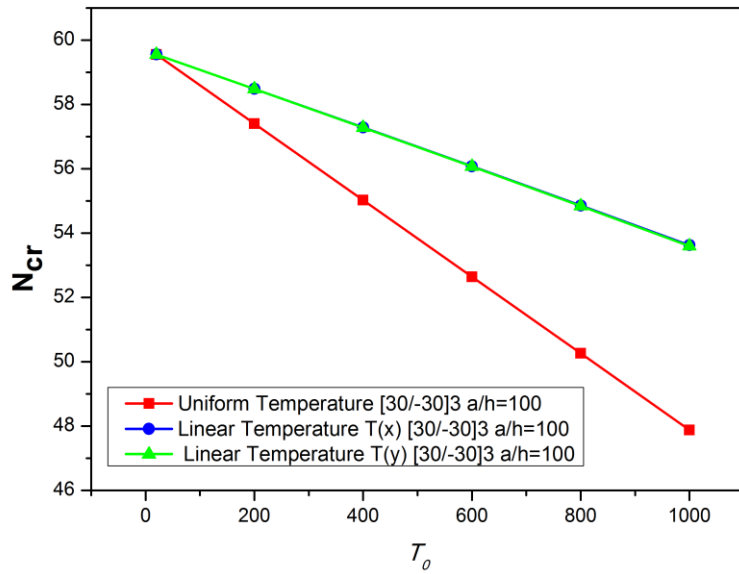


Figure 6-16 La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [30/-30]₃ de ratio $a/h=100$ sous différents effets de champ de température

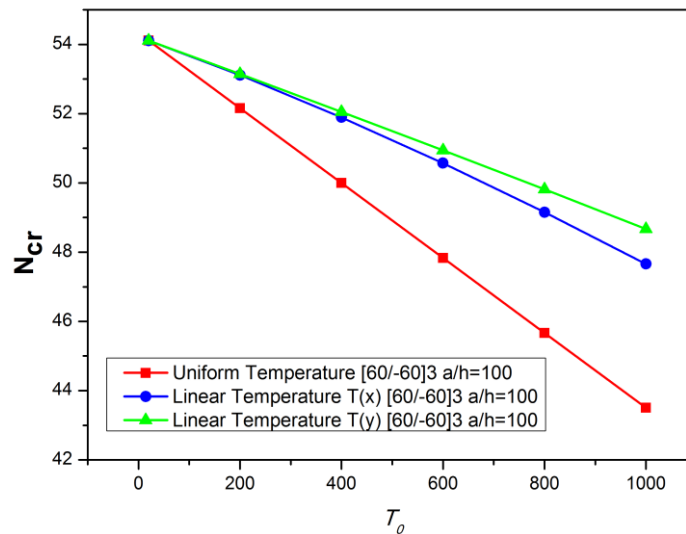


Figure 6-17 La charge critique du flambage d'une plaque stratifiée carrée [60/-60]₃ de ratio $a/h=100$ sous différents effets de champ de température

6.6 Analyse et discussion

Dans cette partie, on prend les résultats des plaques composites stratifiées épaisse et mince $a/h=10,100$ celles qui sont considérées précédemment dans des graphes où les charges critiques du flambage sont normalisées, afin de savoir et de répondre à la question, est ce que l'effet de température varie si la plaque variera d'épaisseur ?

Dans les Figures (6-18, 6-19, 6-20, 6-21) qui présentent la charge critique normalisée pour les plaques composites stratifiées (45/-45)₃, (30/-30)₃, (60/-60)₃, (0/90/0) épaisse

et mince du ratio $a/h=10,100$ dans différents champs proposés. Nous apercevons que la plaque mince s'influence plus que la plaque épaisse lors de la distribution de température linéaire suivant x ou y sur la charge critique. Tandis que la plaque acquies le même effet lors de la distribution uniforme de la température.

«On dit que l'épaisseur est un paramètre important qui peut varier l'effet de la température sur le comportement de flambage lors de la variation de température, où la charge critique des plaques minces peut s'influence plus que les plaques épaisse. Par conséquent, plus l'épaisseur est petite, plus l'effet de température est augmenté. D'autre part, tandis que l'effet de température uniforme sur toute la plaque reste constant quelle que soit la variation d'épaisseur.»

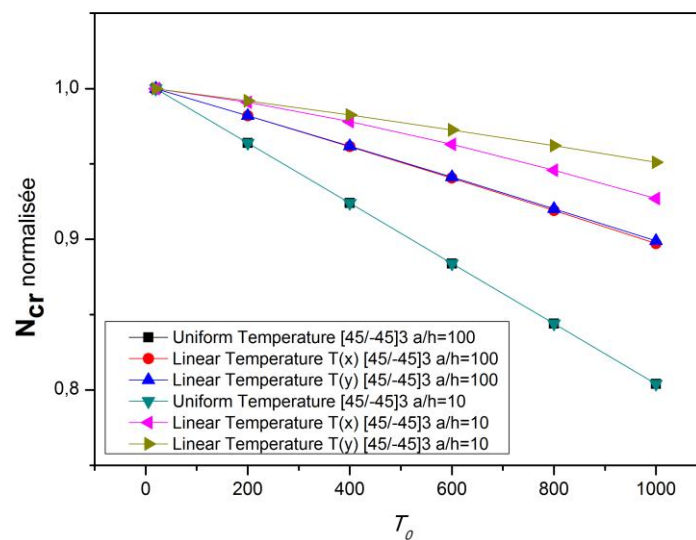


Figure 6-18 La charge critique normalisée du flambage de la plaque carrées [45/-45]₃ de ratio $a/h=10,100$ en différents champ de température

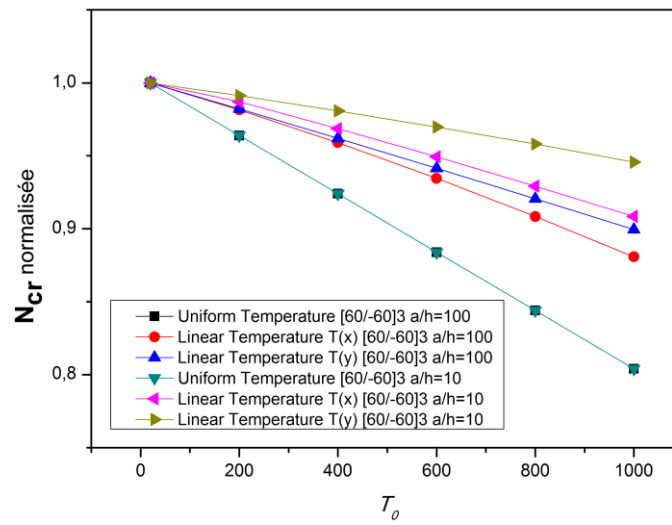


Figure 6-19 La charge critique normalisée du flambage de la plaque carrées [60/-60]₃ de ratio a/h=10,100 en différents champ de température

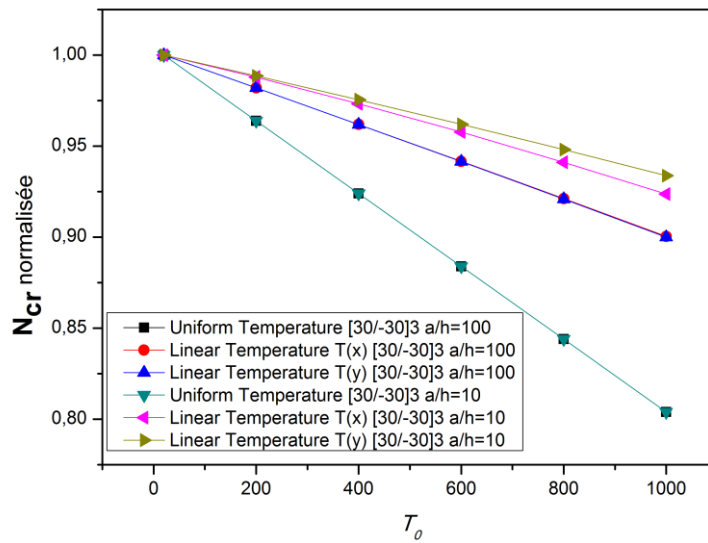


Figure 6-20 La charge critique normalisée du flambage de la plaque carrées [30/-30]₃ de ratio a/h=10,100 en différents champ de température

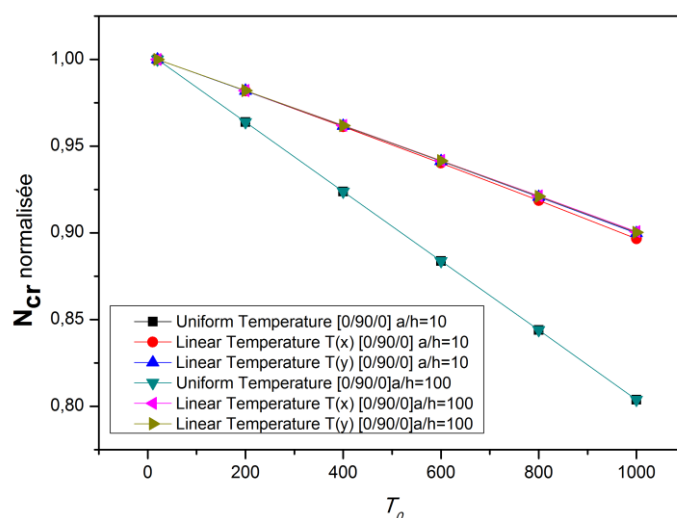


Figure 6-21 La charge critique normalisée du flambage de la plaque carrées [0/90/0]₃ de ratio $a/h=10,100$ en différents champ de température

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude paramétrique a été considérée sur le comportement du flambage mécanique des plaques stratifiées composites avec l'effet de la température dépendante aux propriétés élastiques à l'aide de l'élément fini isoparamétrique (TSQ28).

Différents champs de température T_0 ont été proposés afin d'étudier leurs effets de distributions dépendantes aux propriétés élastiques dans le plan (xy) des plaques stratifiées carrées simplement appuyées épaisses et minces $a/h=10,100$ sur le comportement du flambage mécanique dans différentes orientation et couches. Cependant, chaque champ de température dispose une distribution différente à travers la plaque dont: le premier étant un champ uniforme $T = T_0$, le second est un champ linéaire unidimensionnel le long de l'axe x $T = T_0(1 - x)$, et le troisième est un champ linéaire le long de l'axe y $T = T_0(1 - y)$.

Finalement, on a déduit que :

« La stabilité élastique du flambage pour une plaque carrée est importante lorsque la position de la direction de la variation (non-homogénéité) des propriétés élastiques à travers la plaque, et la direction de la charge uniaxial du flambage sont perpendiculaires au lieu d'être parallèles, notamment à l'endroit où la plaque stratifiée est épaisse quel que soit le nombre de couche et les orientations des fibres»

«Aussi, l'effet de la température est constant, quel que soit le nombre de couches pour une épaisseur fixée d'une plaque carrée en flambement »

« L'effet de la température varie, selon l'orientation des fibres sur le comportement du flambage uniquement lorsque la plaque épaisse carrée est non homogène due de l'effet. Tandis que l'effet uniforme sur toute la plaque (homogène) reste constant quel que soit l'orientation des fibres»

« La stabilité de la plaque mince non homogène due à l'effet de température, sur le comportement de flambage s'influence plus que la plaque épaisse, tandis que elle acquiert la même influence lorsque l'effet de température est uniforme sur toute la plaque. »

Conclusion Générale et Perspectives

Dans cette étude, deux modèles d'éléments finis (2D) baptisés (TSQ28,TSQ20) ont été développés en se basant sur la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement de Reddy à l'aide de l'approche monocouche équivalente pour l'analyse du comportement flexion et flambage des plaques isotropes et composites stratifiées.

Le premier modèle d'élément fini (TSQ28) est un élément quadrilatère isoparamétrique C_0 Lagrangien de quatre nœuds qui contient sept degrés de liberté pour chaque nœud, (trois déplacements, deux rotations et deux variables d'ordre supérieur). Les matrices de rigidité et géométriques sont élaborées en adoptant des techniques d'intégration numérique de points Gauss. Cependant, afin de prévenir le phénomène du verrouillage, l'intégration réduite a été employée. La validation des éléments a été effectuée à travers une série d'applications en flexion et flambage des plaques isotropes et composites stratifiées symétriques et antisymétriques. Les réponses obtenues, concernant le comportement de flexion sont les valeurs adimensionnelles maximales de la flèche et les contraintes normales et de cisaillement transverses, quant au comportement de flambage, ils sont des charges critiques du flambement adimensionnelle pour différents cas de chargement, de géométrie et des conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux obtenus analytiquement et avec ceux obtenus par des modèles d'éléments finis de même ordre basés sur différentes théories disponible dans la littérature. En outre, l'élément est capable de prendre en compte la description quadratique des contraintes de cisaillement transverse avec toutefois une discontinuité entre les couches à cause de l'utilisation des équations constitutives. Les raisons qui nous ont poussées à utiliser les équations constitutives pour le calcul des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur sont ; la simplicité du calcul, et le faible coût par comparaison à l'utilisation les équations d'équilibre.

Le second modèle d'élément fini (TSQ20) est la version modifiée du modèle (TSQ28), il s'agit d'un élément quadrilatère isoparamétrique C_1 de type Lagrange qui possède quatre nœud et contient cinq degrés de liberté par nœuds, (trois déplacements et deux rotations autour les axes y , x respectivement). Cette réduction du nombre de degrés de liberté exige des expressions difficiles à résoudre de second ordre de la dérivation, en raison de l'apparition des dérivées secondes. Cependant, comme on l'a mentionné précédemment dans la littérature concernant les difficultés rencontrées par certains chercheurs dans ce type d'éléments finis en exigeant des expressions de dérivées secondes. En fait, les premiers tests ont montrés que le modèle a été vérifié et qu'il n'est pas aussi efficace seulement pour le calcul des flèches et des contraintes normales (comportement flexionnel). Tandis qu'il fournit de bons résultats pour les contraintes de cisaillement transverses. Par conséquent, et afin de remédier ce problème, des fonctions de correction en termes de rapport longueur épaisseur de la

plaque (a/h) ont été introduites. Aussi, pour plus de performance en précision, et pour lever d'éventuel blocage par cisaillement transverse, la technique d'intégration sélective a été utilisée pour le calcul des matrices de rigidité et géométriques. Une série d'applications de flexion et de flambage des plaques isotropes et composites stratifiées symétrique et antisymétrique ont été proposées pour valider et évaluer l'efficacité et la performance de l'élément fini proposé (TSQ20). Les résultats ont été présentés en termes de valeurs adimensionnelles maximales de la flèche et des contraintes normales et des contraintes de cisaillement transverses. Des tests ont été aussi proposés pour vérifier la performance de l'élément au comportement de flambage des plaques stratifiées. Les résultats ont été présentés en termes de valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambage pour différents cas de chargement, de géométrie et de conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés avec des résultats analytiques, et avec ceux obtenus par des modèles d'éléments finis disponibles de même ordre basés sur différentes théories pour l'analyse des plaques composite stratifiées.

D'autre part, une étude paramétrique a été menée pour mettre en évidence l'effet des dépendances thermomécaniques des propriétés élastiques des matériaux sur le comportement du flambage mécanique des plaques stratifiées en matériaux composites à l'aide d'utiliser le modèle d'élément fini (TSQ28). Dans cette étude, différents champs de distribution de la température T_0 à travers la plaque ont été considérés (uniforme, non-uniforme unidirectionnelle, et non uniforme bidirectionnelle). Les plaques étudiées sont carrées, simplement appuyées et avec différentes épaisseurs

L'étude paramétrique nous a permis de relever les remarques suivantes :

- La charge critique de flambement est la plus importante dans le cas où la charge est perpendiculaire au sens de la variation de la température, et spécialement lorsque la plaque est épaisse pour n'importe quelle orientation des fibres et pour n'importe quel nombre de couches.
- L'effet de la température est constant sur la charge critique du flambement pour les plaques carrées corss-ply ou angle-ply d'une épaisseur constante quel que soit le nombre de couches.
- L'effet de la température varie selon l'orientation des fibres sur le comportement du flambage seulement si la température est distribuée variationnellement à travers la plaque. Tandis que l'effet reste constant lorsque la température est distribuée uniformément.
- La plaque stratifiée mince non homogène due à l'effet de la température s'influence plus que la plaque épaisse sur le comportement de flambage, tandis qu'elles acquièrent la même influence si la température est distribuée uniformément.

Perspective

Les résultats obtenus par les modèles d'éléments finis développés dans ce travail de recherche nous encouragent à proposer l'extension de ces modèles à l'analyse des plaques stratifiées en matériaux composites à d'autres comportements, à savoir :

- Le comportement dynamique (vibration) des plaques multicouches.
- On propose d'étudier l'analyse du comportement flambage thermique des plaques multicouches ayant des caractéristiques mécaniques thermo-dépendantes
- Modifier les modèles (TSQ28,TSQ20) qui sont des éléments plaques en éléments coques pour l'analyse des structures courbes.
- Utiliser les modèles développés sur l'analyse des structures sandwich.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Reddy J.N., 2004, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, by CRC press.
- [2] Mouritz A., et al., 2001, Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Composite Structures*, **53**, 1, 21-42
- [3] Saeedi N., 2012, Une approche très efficace pour l'analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues, *Thèse de Doctorat*, Laboratoire Navier (Paris-Est)
- [4] Carrera E., 2002, Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells, *Archives of Computational Methods in Engineering*, **9**, 2, 87-140
- [5] Jones R.M., 1998, *Mechanics of composite materials*, by Crc Press
- [6] Daniel I.M., et al., 1994, *Engineering mechanics of composite materials*, Vol. 3. Oxford university press New York
- [7] Kant T., Swaminathan K., 2000, Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites—a selective review and survey of current developments, *Composite Structures*, **49**, 1, 65-75
- [8] Zhang Y., Yang C., 2009, Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates, *Composite Structures*, **88**, 1, 147-157
- [9] Ghugal Y., Shimpi R., 2002, A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **21**, 9, 775-813
- [10] Pagano N., 1970, Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *Journal of Composite Materials*, **4**, 1, 20-34
- [11] Pagano N., 1969, Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending, *Journal of Composite Materials*, **3**, 3, 398-411
- [12] Pagano N., Hatfield H.J., 1972, Elastic behavior of multilayered bidirectional composites, *AIAA Journal*, **10**, 7, 931-933
- [13] Srinivas S., Rao A., 1970, Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *International Journal of Solids and Structures*, **6**, 11, 1463-1481
- [14] Srinivas S., Rao A., 1973, Flexure of thick rectangular plates, *Journal of Applied Mechanics*, **40**, 1, 298-299
- [15] Reddy J., 1993, An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates, *Composite Structures*, **25**, 1, 21-35
- [16] Kirchhoff G., 1850, Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe, *Annalen der Physik*, **157**, 10, 258-264
- [17] Love A.E.H., 2013, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge University Press
- [18] Reissner E., 1945, The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **12**, A69-A77
- [19] Whitney J.M., 1969, The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates, *Journal of Composite Materials*, **3**, 3, 534-547
- [20] Whitney J., 1973, Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, *Journal of Applied Mechanics*, **40**, 1, 302-304
- [21] Levinson M., 1980, An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, *Mechanics Research Communications*, **7**, 6, 343-350

- [22] Stavsky Y., Loewy R., 1971, On vibrations of heterogeneous orthotropic cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, **15**, 2, 235-256
- [23] Murty A.K., Vellaichamy S., 1987, On higher order shear deformation theory of laminated composite panels, *Composite Structures*, **8**, 4, 247-270
- [24] Lo K., Christensen R., Wu E., 1977, A high-order theory of plate deformation—Part 1: Homogeneous plates, *Journal of Applied Mechanics*, **44**, 4, 663-668
- [25] Lo K., Christensen R., Wu E., 1977, A high-order theory of plate deformation—part 2: laminated plates, *Journal of Applied Mechanics*, **44**, 4, 669-676
- [26] Nelson R., Lorch D., 1974, A refined theory for laminated orthotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **41**, 1, 177-183
- [27] Reddy J.N., 1984(a), A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, **51**, 4, 745-752
- [28] Reddy J.N., 1984(c), A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, *International Journal of Solids and Structures*, **20**, 9, 881-896
- [29] Whitney J., Sun C., 1973, A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *Journal of Sound and Vibration*, **30**, 1, 85-97
- [30] Bhimaraddi A., Stevens L., 1984, A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates, *Journal of Applied Mechanics*, **51**, 1, 195-198
- [31] Murthy M., 1981, An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates,
- [32] Ren-Huai L., Ling-Hui H., 1991, A simple theory for non-linear bending of laminated composite rectangular plates including higher-order effects, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **26**, 5, 537-545
- [33] Kant T., 1982, Numerical analysis of thick plates, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **31**, 1, 1-18
- [34] Phan N., Reddy J., 1985, Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 12, 2201-2219
- [35] Touratier M., 1991, An efficient standard plate theory, *International journal of engineering science*, **29**, 8, 901-916
- [36] Basset A.B., 1890, On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 433-480
- [37] Levy M., 1877, Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 219-306
- [38] Hildebrand F., Reissner E., Thomas G., 1949, *Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells*, National Advisory Committee for Aeronautics Washington, DC
- [39] Pister K., Westmann R., 1962, Bending of plates on an elastic foundation, *Journal of Applied Mechanics*, **29**, 2, 369-374
- [40] Reissner E. On the derivation of boundary conditions for plate theory, in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1963. The Royal Society.
- [41] Provan J., Koeller R., 1970, On the theory of elastic plates, *International Journal of Solids and Structures*, **6**, 7, 933-950
- [42] Lo K., Christensen R., Wu E., 1978, Stress solution determination for high order plate theory, *International Journal of Solids and Structures*, **14**, 8, 655-662
- [43] Błocki J., 1992, A higher-order linear theory for isotropic plates—I. Theoretical considerations, *International Journal of Solids and Structures*, **29**, 7, 825-836

- [44] Noor A.K., Burton W.S., 1989, Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates, *Applied Mechanics Reviews*, **42**, 1, 1-13
- [45] Kapania R.K., Raciti S., 1989, Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I-Sheareffects and buckling, *AIAA Journal*, **27**, 7, 923-935
- [46] Christensen R., Lo K., Wu E., 1977, A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates, *Journal of Applied Mechanics*, **44**, 7, 663-668
- [47] Rohwer K., 1992, Application of higher order theories to the bending analysis of layered composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, **29**, 1, 105-119
- [48] Ferreira A., Roque C., Jorge R., 2006, Static and free vibration analysis of composite shells by radial basis functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **30**, 9, 719-733
- [49] Averill R., Reddy J., 1992, An assessment of four-noded plate finite elements based on a generalized third-order theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 8, 1553-1572
- [50] Reddy J., 1990, A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **25**, 6, 677-686
- [51] Murty A.K., 1977, Higher order theory for vibrations of thick plates, *AIAA Journal*, **15**, 12, 1823-1824
- [52] Reddy J., 1987, A small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **54**, 3, 623-626
- [53] Senthilnathan N., et al., 1987, Buckling of shear-deformable plates, *AIAA Journal*, **25**, 9, 1268-1271
- [54] Reddy J., Robbins D., 1994, Theories and computational models for composite laminates, *Applied Mechanics Reviews*, **47**, 6, 147-169
- [55] Bose P., Reddy J., 1998, Analysis of composite plates using various plate theories-Part 1: Formulation and analytical solutions, *Structural Engineering and Mechanics*, **6**, 6, 583-612
- [56] Soldatos K., 1992, A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, *Acta Mechanica*, **94**, 3-4, 195-220
- [57] Karama M., Afaq K., Mistou S., 2003, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 6, 1525-1546
- [58] Mantari J., Oktem A., Soares C.G., 2011, Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, **94**, 1, 37-49
- [59] Mantari J., Oktem A., Soares C.G., 2012, A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates, *International Journal of Solids and Structures*, **49**, 1, 43-53
- [60] Mantari J., Oktem A., Soares C.G., 2012, A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates, *Composites Part B: Engineering*, **43**, 3, 1489-1499
- [61] Mantari J., Soares C.G., 2012, Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, **94**, 8, 2640-2656
- [62] Grover N., Maiti D., Singh B., 2013, A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates, *Composite Structures*, **95**, 667-675

- [63] Sahoo R., Singh B., 2013, A new shear deformation theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, **75**, 324-336
- [64] Ambartsumian S., 1958, On a general theory of anisotropic shells, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **22**, 2, 305-319
- [65] Panc V., 1975, *Theories of elastic plates*, Springer Science & Business Media
- [66] Reissner E., 1975, On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, *International Journal of Solids and Structures*, **11**, 5, 569-573
- [67] Ferreira A., Roque C., Jorge R., 2005, Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics, *Computers & structures*, **83**, 27, 2225-2237
- [68] Aydogdu M., 2009, A new shear deformation theory for laminated composite plates, *Composite Structures*, **89**, 1, 94-101
- [69] Seide P., 1980, An improved approximate theory for the bending of laminated plates, *Mechanics today*, **5**, 451-465
- [70] Pagano N., 1978, Stress fields in composite laminates, *International Journal of Solids and Structures*, **14**, 5, 385-400
- [71] Di Sciuva M., 1986, Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model, *Journal of Sound and Vibration*, **105**, 3, 425-442
- [72] Murakami H., 1986, Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, *Journal of Applied Mechanics*, **53**, 3, 661-666
- [73] Nguyen V.T., 2004, Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque, *Thèse de Doctorat*, Ecole des Ponts ParisTech
- [74] Carrera E., 2004, On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells, *Computers & structures*, **82**, 7, 541-554
- [75] Di Sciuva M., 1987, An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates, *Journal of Applied Mechanics*, **54**, 3, 589-596
- [76] Cho M., Parmerter R., 1993, Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations, *AIAA Journal*, **31**, 7, 1299-1306
- [77] Averill R.C., 1994, Static and dynamic response of moderately thick laminated beams with damage, *Composites Engineering*, **4**, 4, 381-395
- [78] He L.-H., 1994, A linear theory of laminated shells accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at layer interfaces, *International Journal of Solids and Structures*, **31**, 5, 613-627
- [79] Icardi U., 2001, Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations, *Composites Part B: Engineering*, **32**, 4, 343-354
- [80] Icardi U., 2001, A three-dimensional zig-zag theory for analysis of thick laminated beams, *Composite Structures*, **52**, 1, 123-135
- [81] Karama M., et al., 1998, Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model, *Composites Part B: Engineering*, **29**, 3, 223-234
- [82] Ossadzew C., Touratier M., 2001, An improved shear-membrane theory for multilayered shells, *Composite Structures*, **52**, 1, 85-95
- [83] Afaq K.S., 2003, Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites "multicouches et sandwichs" avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord, *Thèse de Doctorat*, Toulouse .

- [84] Duong V.A., 2008, Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites, *Thèse de Doctorat*, École nationale des ponts et chaussées (France).
- [85] Srinivas S., 1973, A refined analysis of composite laminates, *Journal of Sound and Vibration*, **30**, 4, 495-507
- [86] Reddy J., 1987, A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates, *Communications in Applied Numerical Methods*, **3**, 3, 173-180
- [87] Naciri T., Ehrlacher A., Chabot A., 1998, Interlaminar stress analysis with a new multiparticle modelization of multilayered materials (M4), *Composites Science and Technology*, **58**, 3, 337-343
- [88] Tahani M., Nosier A., 2003, Edge effects of uniformly loaded cross-ply composite laminates, *Materials & design*, **24**, 8, 647-658
- [89] Robbins D., Reddy J., 1991, Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory, *Computers & structures*, **41**, 2, 265-279
- [90] Barbero E., Reddy J., Teply J., 1990, An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory, DOI: 10.1002/nme.1620290103
- [91] Reddy J., 1989, On the generalization of displacement-based laminate theories, *Applied Mechanics Reviews*, **42**, 11S, S213-S222
- [92] Epstein M., Huttelmaier H.-P., 1983, A finite element formulation for multilayered and thick plates, *Computers & structures*, **16**, 5, 645-650
- [93] Robbins D., Reddy J., 1993, Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 4, 655-677
- [94] Cho K., Bert C., Striz A., 1991, Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory, *Journal of Sound and Vibration*, **145**, 3, 429-442
- [95] Hsu T.-M., Wang J.-S., 1970, A theory of laminated cylindrical shells consisting of layers of orthotropic laminae, *AIAA Journal*, **8**, 12, 2141-2146
- [96] Ren J., 1986, A new theory of laminated plate, *Composites Science and Technology*, **26**, 3, 225-239
- [97] Kassapoglou C., Lagace P., 1986, An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials, *Journal of Applied Mechanics*, **53**, 4, 744-750
- [98] Kassapoglou C., Lagace P.A., 1987, Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates, *Journal of Composite Materials*, **21**, 4, 292-308
- [99] Yin W.-L., 1994, Free-edge effects in anisotropic laminates under extension, bending and twisting, Part I: A stress-function-based variational approach, *Journal of Applied Mechanics*, **61**, 2, 410-415
- [100] Wan-Lee Y., 1994, Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer model, *International Journal of Solids and Structures*, **31**, 11, 1549-1564
- [101] Lekhnitskii S., 1963, *Of an anisotropic elastic body*, San Francisco: Holden-Day
- [102] Ochoa O.O., Reddy J.N., 1992, *Finite element analysis of composite laminates*, Springer
- [103] Zienkiewicz O., Taylor R., 1994, *The finite element method*, ; volume 1: basic formulation and linear problems,

- [104] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., 2000, *The finite element method: Solid mechanics*, Vol. 2. Butterworth-heinemann
- [105] Reddy J.N., 1993, *An introduction to the finite element method*, Vol. 2. McGraw-Hill New York
- [106] Kerber T., 1990, Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes, *La Recherche Aérospatiale*, 3, 45-76
- [107] Rolfes R., Noor A., Sparr H., 1998, Evaluation of transverse thermal stresses in composite plates based on first-order shear deformation theory, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **167**, 3, 355-368
- [108] Reddy J., 1980, A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **15**, 8, 1187-1206
- [109] Yang P.C., Norris C.H., Stavsky Y., 1966, Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *International Journal of Solids and Structures*, **2**, 4, 665-684
- [110] Engblom J.J., Ochoa O.O., 1986, Finite element formulation including interlaminar stress calculations, *Computers & structures*, **23**, 2, 241-249
- [111] Hamdallah J.M., Engblom J.J., 1990, Finite element plate formulation including transverse shear effects for representing composite shell structures, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **9**, 3, 226-239
- [112] Ganapathi M., Touratier M., 1997, A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-flexible finite element, *Finite Elements in Analysis and Design*, **28**, 2, 115-135
- [113] Sheikh A., Haldar S., Sengupta D., 2002, A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes, *Composite Structures*, **55**, 3, 329-336
- [114] Sakami S., 2008, Modélisation numérique des structures composites multicouches à l'aide d'une approche discrète au sens de Mindlin. Le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin), *Thèse de Doctorat*, France
- [115] Lardeur P., 1990, Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal, *Thèse de Doctorat*, Compiègne, France
- [116] Bouabdallah M., 1992, Modélisation de coques cylindriques raidies, isotropes et composites, *Thèse de Doctorat*, Compiègne.
- [117] Katili I., 1993, Formulation et évaluation de nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque, *Thèse de Doctorat*, France.
- [118] Auricchio F., Sacco E., 1999, A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **44**, 10, 1481-1504
- [119] Cen S., Long Y., Yao Z., 2002, A new hybrid-enhanced displacement-based element for the analysis of laminated composite plates, *Computers & structures*, **80**, 9, 819-833
- [120] Tafla A., 2007, Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches, *Thèse de Doctorat*, Reims,
- [121] Cook R.D., 1972, Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **5**, 2, 277-288

- [122] Khatua T.P., Cheung Y.K., 1972, Triangular element for multilayer sandwich plates, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **98**, 5, 1225-1238
- [123] Khatua T., Cheung Y., 1973, Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **6**, 1, 11-24
- [124] Kant T., Owen D., Zienkiewicz O., 1982, A refined higher-order C^0 plate bending element, *Computers & structures*, **15**, 2, 177-183
- [125] Pandya B., Kant T., 1988, Flexural analysis of laminated composites using refined higher-order C^0 plate bending elements, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **66**, 2, 173-198
- [126] Pandya B., Kant T., 1988, A refined higher-order generally orthotropic C^0 plate bending element, *Computers & structures*, **28**, 2, 119-133
- [127] Pandya B., Kant T., 1988, Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations, *International Journal of Solids and Structures*, **24**, 12, 1267-1286
- [128] Pandya B., Kant T., 1988, Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model, *Composites Science and Technology*, **32**, 2, 137-155
- [129] Kant T., Kommineni J., 1992, C^0 finite element geometrically non-linear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on a higher-order theory, *Computers & structures*, **45**, 3, 511-520
- [130] Tu T.M., Quoc T.H., 2010, Finite element modeling for bending and vibration analysis of laminated and sandwich composite plates based on higher-order theory, *Computational Materials Science*, **49**, 4, S390-S394
- [131] Kant T., Manjunatha B., 1988, An unsymmetric FRC laminate C^0 finite element model with 12 degrees of freedom per node, *Engineering computations*, **5**, 4, 300-308
- [132] Polit O., Touratier M., 1997, A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses, *Composite Structures*, **38**, 1, 37-44
- [133] Polit O., Touratier M., 2000, High-order triangular sandwich plate finite element for linear and non-linear analyses, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **185**, 2, 305-324
- [134] Polit O., Touratier M., 2002, A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses, *Composite Structures*, **58**, 1, 121-128
- [135] Raghuram P., Murty A.K., 1999, A high precision coupled bending-extension triangular finite element for laminated plates, *Computers & structures*, **72**, 6, 763-777
- [136] Engblom J.J., Ochoa O.O., 1985, Through-the-thickness stress predictions for laminated plates of advanced composite materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 10, 1759-1776
- [137] Goswami S., Becker W., 2013, A New Rectangular Finite Element Formulation Based on Higher Order Displacement Theory for Thick and Thin Composite and Sandwich Plates, *World Journal of Mechanics*, **3**, 03, 194
- [138] Putcha N., Reddy J., 1986, Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory, *Journal of Sound and Vibration*, **104**, 2, 285-300

- [139] Wu C.-P., Kuo H.-C., 1993, An interlaminar stress mixed finite element method for the analysis of thick laminated composite plates, *Composite Structures*, **24**, 1, 29-42
- [140] Chih-Ping W., Chung-Bing Y., 1993, Interlaminar stress mixed finite element analysis of unsymmetrically laminated composite plates, *Computers & structures*, **49**, 3, 411-419
- [141] Reddy J., Phan N., 1985, Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory, *Journal of Sound and Vibration*, **98**, 2, 157-170
- [142] Ghosh A., Dey S., 1992, A simple finite element for the analysis of laminated plates, *Computers & structures*, **44**, 3, 585-596
- [143] Ren J., Hinton E., 1986, The finite element analysis of homogeneous and laminated composite plates using a simple higher order theory, *Communications in Applied Numerical Methods*, **2**, 2, 217-228
- [144] Kant T., Pandya B., 1988, A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates, *Composite Structures*, **9**, 3, 215-246
- [145] Sheikh A.H., Chakrabarti A., 2003, A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, **39**, 9, 883-903
- [146] Liu I.-W., 1996, An element for static, vibration and buckling analysis of thick laminated plates, *Computers & structures*, **59**, 6, 1051-1058
- [147] Nayak A., Moy S., Shenoj R., 2002, Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory, *Composites Part B: Engineering*, **33**, 7, 505-519
- [148] Dvorkin E.N., Bathe K.-J., 1984, A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis, *Engineering computations*, **1**, 1, 77-88
- [149] Huang H., Hinton E., 1984, A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation, *Engineering computations*, **1**, 4, 369-379
- [150] Rezaiee-Pajand M., Shahabian F., Tavakoli F., 2012, A new higher-order triangular plate bending element for the analysis of laminated composite and sandwich plates, *Structural Engineering and Mechanics*, **43**, 2, 253-271
- [151] Lee S.J., Kim H.R., 2013, FE analysis of laminated composite plates using a higher order shear deformation theory with assumed strains, *Latin American Journal of Solids and Structures*, **10**, 3, 523-547
- [152] Gerard G., Becker H., 1957, Handbook of structural stability part III: buckling of curved plates and shells, New York University.
- [153] Leissa A.W., 1987, A review of laminated composite plate buckling, *Applied Mechanics Reviews*, **40**, 5, 575-591
- [154] Leissa A.W., 1987, An overview of composite plate buckling, in *Composite Structures 4* Springer. p. 1-29.
- [155] Xu J., Zhao Q., Qiao P., 2013, A Critical Review on Buckling and Post-Buckling Analysis of Composite Structures,
- [156] Noor A.K., 1975, Stability of multilayered composite plates, *Fibre Science and Technology*, **8**, 2, 81-89
- [157] Fazzolari F., Banerjee J., Boscolo M., 2013, Buckling of composite plate assemblies using higher order shear deformation theory—An exact method of solution, *Thin-Walled Structures*, **71**, 18-34

- [158] Khdeir A.A., Librescu L., 1988, Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: Part II—Buckling and free vibration, *Composite Structures*, **9**, 4, 259-277
- [159] Fares M., Zenkour A., 1999, Buckling and free vibration of non-homogeneous composite cross-ply laminated plates with various plate theories, *Composite Structures*, **44**, 4, 279-287
- [160] Whitney J.M., 1971, Fourier analysis of clamped anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **38**, 2, 530-532
- [161] FRASER J., HARVEY R., MILLER R., 1970, Bifurcation type buckling of generally orthotropic clamped plates, *AIAA Journal*, **8**, 4, 707-712
- [162] Jones R.M., Morgan H.S., Whitney J.M., 1973, Buckling and vibration of antisymmetrically laminated angle-ply rectangular plates, *Journal of Applied Mechanics*, **40**, 4, 1143-1144
- [163] Whitney J., 1969, Shear buckling of unsymmetrical cross-ply plates, *Journal of Composite Materials*, **3**, 2, 359-363
- [164] Narita Y., Leissa A.W., 1990, Buckling studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, **32**, 11, 909-924
- [165] Kumar A., Kishore B., 1991, Buckling of antisymmetric angle-and cross-ply rectangular plates under shear and compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, **33**, 1, 31-39
- [166] Wang C., et al., 1993, Buckling of rectangular Mindlin plates with internal line supports, *International Journal of Solids and Structures*, **30**, 1, 1-17
- [167] Kitipornchai S., et al., 1993, Buckling of thick skew plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 8, 1299-1310
- [168] Liew K., et al., 2004, Free vibration and buckling analyses of shear-deformable plates based on FSDT meshfree method, *Journal of Sound and Vibration*, **276**, 3, 997-1017
- [169] Liew K., Huang Y., 2003, Bending and buckling of thick symmetric rectangular laminates using the moving least-squares differential quadrature method, *International Journal of Mechanical Sciences*, **45**, 1, 95-114
- [170] Ferreira A.J.M., et al., 2011, Buckling analysis of isotropic and laminated plates by radial basis functions according to a higher-order shear deformation theory, *Thin-Walled Structures*, **49**, 7, 804-811
- [171] Hosseini-Hashemi S., Atashipour S.R., Fadaee M., 2012, On the buckling analysis of isotropic, transversely isotropic, and laminated rectangular plates via Reddy plate theory: an exact closed-form procedure, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **226**, 5, 1210-1224
- [172] Liangxin S., Zhiyu S., 1992, The analysis of laminated composite plates based on the simple higher-order theory, *Computers & structures*, **43**, 5, 831-837
- [173] Kam T., Chang R., 1992, Buckling of shear deformable laminated composite plates, *Composite Structures*, **22**, 4, 223-234
- [174] Sundaresan P., Singh G., Rao G.V., 1996, Buckling and post-buckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates, *Computers & structures*, **61**, 1, 79-86
- [175] Kozma F., Ochoa O., 1986, Buckling of composite plates using shear deformable finite elements, *AIAA Journal*, **24**, 10, 1721-1723

- [176] Ghosh A.K., Dey S.S., 1994, Buckling of laminated plates-A simple finite element based on higher-order theory, *Finite Elements in Analysis and Design*, **15**, 4, 289-302
- [177] Chakrabarti A., Sheikh A.H., 2003, Buckling of laminated composite plates by a new element based on higher order shear deformation theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **10**, 4, 303-317
- [178] Singh S.K., Chakrabarti A., 2012, Buckling analysis of laminated composite plates using an efficient C0 FE model, *Latin American Journal of Solids and Structures*, **9**, 1-13
- [179] Moita J.S., Soares C.M.M., Soares C.A.M., 1999, Buckling and dynamic behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model, *Computers & structures*, **73**, 1, 407-423
- [180] Moita J., Soares C.M.M., Soares C.A.M., 1996, Buckling behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model, *Composite Structures*, **35**, 1, 75-92
- [181] Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K. The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, in ICE Proceedings. 1964. Thomas Telford.
- [182] Whitney J., Pagano N., 1970, Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **37**, 4, 1031-1036
- [183] Ergatoudis I., Irons B., Zienkiewicz O., 1968, Curved, isoparametric, "quadrilateral" elements for finite element analysis, *International Journal of Solids and Structures*, **4**, 1, 31-42
- [184] Fukunaga H., Hu N., Ren G., 2001, FEM modeling of adaptive composite structures using a reduced higher-order plate theory via penalty functions, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 48, 8735-8752
- [185] Akhras G., Li W., 2005, Static and free vibration analysis of composite plates using spline finite strips with higher-order shear deformation, *Composites Part B: Engineering*, **36**, 6-7, 496-503
- [186] Kabir H.R.H., 1992, A double fourier series approach to the solution of a moderately thick simply supported plate with antisymmetric angle-ply laminations, *Computers & structures*, **43**, 4, 769-774
- [187] Thai C.H., et al., 2012, Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method, *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 11, 5657-5677
- [188] Hughes T.J., Cohen M., Haroun M., 1978, Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates, *Nuclear Engineering and Design*, **46**, 1, 203-222
- [189] Smith I.M., Griffiths D.V., 2005, *Programming the finite element method*, John Wiley & Sons
- [190] Ferreira A.J., 2008, *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*, Vol. 157. Springer
- [191] Kant T., et al., 2008, Elasticity solution for cross-ply composite and sandwich laminates, *Composite Structures*, **83**, 1, 13-24
- [192] Kabir H., 1995, A shear-locking free robust isoparametric three-node triangular finite element for moderately-thick and thin arbitrarily laminated plates, *Computers & structures*, **57**, 4, 589-597
- [193] Nguyen-Van H., et al., 2011, Buckling and vibration analysis of laminated composite plate/shell structures via a smoothed quadrilateral flat shell element with in-plane rotations, *Computers & structures*, **89**, 7-8, 612-625

- [194] Hu H.-T., Tzeng W.-L., 2000, Buckling analysis of skew laminate plates subjected to uniaxial inplane loads, *Thin-Walled Structures*, **38**, 1, 53-77
- [195] Kouri J.V., 1991, Improved Finite Element Analysis of Thick Laminated Composite Plates by the Predictor Corrector Technique and Approximation of C (1) Continuity with a New Least Squares Element, DTIC Document.
- [196] Reddy J., Barbero E., Teply J., 1989, A plate bending element based on a generalized laminate plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 10, 2275-2292
- [197] Batoz J.L., Tahar M.B., 1982, Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **18**, 11, 1655-1677
- [198] Tran L.V., Thai C.H., Nguyen-Xuan H., 2013, An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, **73**, 65-76
- [199] Belkaid K., TATI A., 2015, Analysis of laminated composite plates bending using a new simple finite element based on Reddy's third order theory, *Revue Des Composites Et Des Materiaux Avances*, **25**, 1, 89-106
- [200] Hoff N.J., 1958, *High temperature effects in aircraft structures*, Published for and on behalf of Advisory Group for Aeronautical Research and Development, North Atlantic Treaty Organization by Pergamon Press
- [201] Tauchert T., 2014, Plates with Temperature-Dependent Properties, in *Encyclopedia of Thermal Stresses*, R. Hetnarski, Editor Springer Netherlands. p. 3953-3957.
- [202] Shariyat M., 2007, Thermal buckling analysis of rectangular composite plates with temperature-dependent properties based on a layerwise theory, *Thin-Walled Structures*, **45**, 4, 439-452
- [203] Chen L.-W., Chen L.-Y., 1989, Thermal buckling behavior of laminated composite plates with temperature-dependent properties, *Composite Structures*, **13**, 4, 275-287
- [204] Shen H.-S., 2001, Thermal postbuckling behavior of imperfect shear deformable laminated plates with temperature-dependent properties, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **190**, 40, 5377-5390
- [205] Fauconneau G., Marangoni R., 1970, Effect of a thermal gradient on the natural frequencies of a rectangular plate, *International Journal of Mechanical Sciences*, **12**, 2, 113-122
- [206] Gupta A.K., Mamta J., 2014, Exponential temperature effect on frequencies of a rectangular plate of non-linear varying thickness: A quintic spline technique, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **52**, 1, 15-24p
- [207] Nowacki W., 1962, *Thermoelasticity*, By W. Nowacki,
- [208] Shen H.-S., Xiang Y., 2006, Thermomechanical postbuckling of unilaterally constrained shear deformable laminated plates with temperature-dependent properties, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **41**, 10, 1161-1173