

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et recherche scientifique

Université Mohamed Khider –Biskra  
Faculté Des Sciences et de la Technologie  
Département: génie mécanique  
Réf :



جامعة محمد خيضر –بسكرة  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
المرجع :

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du diplôme de

## Magister en génie mécanique

OPTION : DYNAMIQUE ET CONTROL DES STRUCTURES  
ET DES SYSTEMES

**DYNAMIQUE DES STRUCTURES COMPOSITES SANDWICHES**

Présenté par:

**Teguia Mohamed Salah**

Soutenu publiquement le :17/06/2015

**Devant le jury composé de :**

<b>Dr. Boumerzoug Zakaria</b>	Professeur	Président	Université Biskra
<b>Dr. Amrane Mohamed Nadir</b>	Professeur	Encadreur	Université Biskra
<b>Dr. Belounar Mohamed Lamine</b>	Professeur	Examineur	Université Biskra
<b>Dr. Tati Abdelwaheb</b>	Professeur	Examineur	Université Biskra

## Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier mon Dieu tout puissant ALLAH qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail.*

*J'exprime toutes mes profondes reconnaissances à mon encadreur Pr. AMRANE MOHAMED NADIR pour le temps consacré à m'écouter, à m'orienter et me corriger tout le long de ce mémoire.*

*Je tiens à remercier particulièrement Pr. Boumerzoug Zakaria, Pr. Belounar Mohamed Lamine, et Pr. Tati abdelwahab, qui ont acceptés d'être membres du jury de ce mémoire.*

*Je souhaite exprimer mes profondes gratitude à tous les enseignants qui m'ont formé dès la 1<sup>ère</sup> année jusqu'à la fin de ce travail.*

*Mes remerciements vont également à Mrs. Ounis Hodayfa et Bensahal Djamel doctorants à l'institut de génie mécanique pour leur aide.*

*En dernier, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.*

## Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail aux êtres qui sont les plus chers, ma mère, mon père, mes frères et ma sœur qui sans leur soutiens, je n'ai pu arriver à ce niveau, sans oublier toute ma grande famille.*

*Une spéciale dédicace à ma femme pour ses encouragements, ainsi qu'à mon petit Aissa Mohamed Louai*

*Une spéciale dédicace à tous mes meilleurs amis : Djiridi Boualem, Belkacem Lamamra, Abd Rahim Achouri, Hakim Ounas, Wajdi Belarbi Sans oublier mon patron Lachouri Mehdi et toute l'équipe de travail au bureau, et aussi à tous ceux qui ne sont pas nommés et toute la promo de magistère 2009.*

*Une spéciale dédicace à Mrs. Zidani Mosbah et Batka Achour et tout le personnel du génie mécanique pour leur aide précieuse.*

*TEQUA MOHAMED SALAH  
juin 2015*

## الملخص

إن الاستعمال المكثف للهياكل المتألفة من نوع ساندويتش في الصناعات الحديثة يستوجب على الباحثين و مهندسي حساب الهياكل البحث واستحداث طرق جديدة من اجل تسهيل طرق الحساب و الرفع من دقة نتائجها. أثناء دراستنا قمنا بتأهيل إستراتيجية دويل الخاصة بحساب الاهتزازات بالهياكل المتجانسة في حساب اهتزازات الهياكل المتألفة من نوع ساندويتش. الدراسة التي قمنا بها تهتم بتطبيق هذا المبدأ في حساب اهتزازات روافد وصفائح الساندويتش باستعمال طريقة العناصر المتناهية و ملاحظة مدى قابلية تطبيق هذا المبدأ عند تطبيق مختلف الشروط الميكانيكية وعند تغيير درجات الحرارة المؤثرة على الهيكل.

**الكلمات المفتاحية:** ديناميكا الهياكل ، الهياكل المتألفة ، هياكل الساندويتش، مبدأ دويل ، حساب هياكل الساندويتش، الاهتزازات الميكانيكية،الروافد المتألفة،الصفائح المتألفة ،ديناميكا الهياكل المستمرة، الاهتزازات المخمدة.

## Résumé

*Les structures composites sandwichées sont très utilisées dans l'industrie moderne, ce qui pousse les chercheurs et les ingénieurs de calcul des structures à développer de nouvelles stratégies pour simplifier et augmenter la précision des méthodes de calcul. Dans notre travail nous avons développé une stratégie pour calculer les fréquences des structures sandwichées basée sur le principe de Dowell initialement conçue pour les structures homogènes isotropes.*

*Notre travail consiste à appliquer ce principe en utilisant la méthode des éléments finis dans le cas des poutres et des plaques sandwichées.*

*Ce principe est appliqué pour ce type de structures dans différentes conditions mécaniques et thermiques.*

**Mots clés :** *Dynamique des structures, structures composites, structures sandwichées, principe de Dowell, vibration des poutres composites, vibration des plaques composites, vibrations amorties.*

## **Abstract**

*The composite sandwich structures are most used in the modern industry, which pushes the structural engineers and researchers to develop new strategies to facilitate the calculus of such structures. In our work, we extend the Dowell's method initially dedicate to calculate frequencies of homogeneous and isotropic structures to calculate frequencies of sandwiches structures.*

*Our study consists in applying this strategy by using the finite element method in the case of beams and sandwich plates.*

*In this work, we applied this law when the mechanical and thermal conditions have to be changed.*

**Key words:** *Structural vibration, composite structures, sandwich structures, Dowell law, calculus of sandwich structures, mechanical vibration, composites beams, composites plates, damped vibrations.*

## Quelques notations utilisées

### symbole

### signification

MEF :	<i>Méthode des éléments finis.</i>
$x, y, z$ :	<i>Coordonnées cartésiennes.</i>
$u, v, w$ :	<i>Déplacements suivant les directions <math>x, y</math> et <math>z</math> respectivement.</i>
$\theta_z$ :	<i>Rotation dans le plan.</i>
$\beta_x$ :	<i>Rotation du plan <math>yz</math> autour de <math>y</math>.</i>
$\beta_y$ :	<i>Rotation du plan <math>xz</math> autour de <math>x</math>.</i>
$K$ :	<i>Courbure de flexion.</i>
$M_x, M_y, M_{xy}$ :	<i>Moments de flexion et de torsion.</i>
$T_x, T_y$ :	<i>Forces de cisaillement.</i>
$t$ :	<i>Épaisseur des membranes.</i>
$h$ :	<i>Épaisseur de la plaque en flexion.</i>
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ :	<i>Déformations directes suivant <math>x, y</math> et <math>z</math> respectivement.</i>
$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_{xy}$ :	<i>Déformations tangentielles.</i>
$\zeta_x, \zeta_y, \zeta_{xy}$ :	<i>Contraintes tangentielles.</i>
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ :	<i>Contraintes normales suivant les directions <math>x, y</math> et <math>z</math>.</i>
$\nu$ :	<i>Coefficient de poisson.</i>
$E$ :	<i>Module de Young.</i>
$I$ :	<i>Inertie.</i>
$a_1, a_2$ :	<i>Paramètre des mouvements du corps rigide.</i>
$a_3$ :	<i>Paramètres de la rotation dans le plan.</i>
$[X]$ :	<i>Matrice des fonctions de base de l'interpolation.</i>
$[N]$ :	<i>Matrice des fonctions de formes.</i>
$\{q\}$ :	<i>Vecteur de déplacement.</i>
$[A]$ :	<i>Matrice des coordonnées.</i>
$[B]$ :	<i>Matrice des déformations.</i>
$\{F\}$ :	<i>Vecteur des forces.</i>
$[K]$ :	<i>Matrice de rigidité.</i>
$[H]$ :	<i>Matrice de rigidité <math>[H]</math> qui relie les contraintes aux déplacements.</i>

## Liste des figures

<u>Fig. N°</u>	<u>Titre</u>	<u>Page</u>
1.1	<i>Constituants des matériaux composites ...</i>	03
1.2	<i>Matériaux de base pour les renforts ...</i>	09
1.3	<i>Les principaux types de matrices ...</i>	09
1.4	<i>Taffetas ...</i>	10
1.5	<i>Satin ...</i>	10
1.6	<i>Tissu multiaxial ...</i>	10
1.7	<i>Tissu 3D ou tresse ...</i>	10
1.8	<i>Tissu hybride carbone – aramide... ..</i>	11
1.9	<i>Interface ... ..</i>	11
1.10	<i>Structure composites stratifié ... ..</i>	12
1.11	<i>Disposition des fibres... ..</i>	13
1.12	<i>Désignations du stratifié... ..</i>	14
1.13	<i>Désignations d'une âme nid d'abeilles... ..</i>	14
1.14	<i>Constitutions d'une sandwich... ..</i>	15
1.15	<i>Présentation des constituants du matériau composite sandwich... ..</i>	16
1.16	<i>Panneaux réalisés par collage à partir de divers profils ... ..</i>	17
1.17	<i>Pliage des panneaux sandwiches... ..</i>	17
2.1	<i>Résultantes de l'action exercée sur un élément de surface d'un stratifié ...</i>	22
2.2	<i>Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés... ..</i>	23
4.1	<i>Découpage d'une structure par des éléments finis... ..</i>	45
4.2	<i>Etapes suivies pour étudier les comportements mécaniques des structures par la méthode des éléments finis... ..</i>	46
4.3	<i>Schéma des types d'éléments... ..</i>	47
4.4	<i>Exemple d'un maillage en élément fini triangulaire... ..</i>	47
4.5	<i>Quelques exemples d'éléments issus de la librairie d'Abaqus... ..</i>	49
4.6	<i>structure sandwich à cœur viscoélastique... ..</i>	50
4.7	<i>Représentation schématique de la poutre sandwich avec cœur visco - élastique... ..</i>	53
4.8	<i>Les cinq premiers modes de la poutre sandwich ... ..</i>	54
4.9	<i>Variation des fréquences de la poutre sandwich en fonction du type d'élément... ..</i>	55
4.10	<i>Influence du nombre d'éléments sur les fréquences de la poutre sandwich</i>	56
4.11	<i>Géométrie de la poutre sandwich avec cœur viscoélastique... ..</i>	57
4.12	<i>Les cinq premiers modes de la poutre sandwich par la méthode proposée... ..</i>	59
4.13	<i>Comparaison des fréquences calculée par Abaqus et la méthode proposée pour la poutre sandwich... ..</i>	60
4.14	<i>Comparaison des fréquences calculée par Abaqus et la méthode proposée pour la poutre sandwich -cas 1- .....</i>	61
4.15	<i>Comparaison des fréquences calculée par Abaqus et la méthode proposée pour la poutre sandwich -cas 2- .....</i>	62
4.16	<i>Comparaison de l'erreur calculée entre Abaqus et la méthode proposée de la</i>	

	<i>poutre sandwich</i> .....	62
4.17	<i>Variation de fréquences de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans les cinq premiers modes</i> .....	65
4.18	<i>Variation de l'erreur en fonction de l'épaisseur du cœur viscoélastique</i> .....	66
4.19	<i>Fréquences de 5 premiers modes pour les deux type du cœur à T=20°C</i> .....	68
4.20	<i>Variation des fréquences du premier mode en fonction de la température pour les deux types du cœur</i> .....	68
4.21	<i>Variation des fréquences de la poutre sandwich en fonction de la variation de la température dans les cinq premiers modes</i> .....	71
4.22	<i>Variation de l'erreur des premiers 5 modes de la poutre sandwich en fonction de la température</i> .....	71
4.23	<i>Effet de la variation de la température sur la vibration d'une poutre sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égal à 0,001 m</i> .....	73
4.24	<i>Effet de la variation de la température sur la vibration d'une poutre sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,01m</i> .....	74
4.25	<i>Effet de la variation de la température sur la vibration d'une poutre sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,025m</i> .....	74
4.26	<i>Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique dans les différentes températures</i> .....	77
4.27	<i>Variation des fréquences du premier mode de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur pour différentes températures</i> .....	79
4.28	<i>Variation des fréquences du deuxième mode de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur pour différentes températures</i> .....	79
4.29	<i>Variation des fréquences du troisième mode de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur de cœur pour différentes températures</i> .....	80
4.30	<i>Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,001m</i> .....	81
4.31	<i>Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m</i>	81
4.32	<i>Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,025m</i>	82
4.33	<i>Schéma d'une plaque sandwich</i> .....	83
4.34	<i>Les cinq premiers modes de la plaque sandwich par Abaqus et la méthode proposée</i> .....	84
4.35	<i>Fréquences de la plaque sandwich par Abaqus et la méthode proposée</i> .....	84
4.36	<i>Variation des fréquences d'une plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du coeur dans les cinq premiers modes</i> .....	86
4.37	<i>Variation des fréquences de la plaque sandwich en fonction de la variation de la température dans les cinq premiers modes</i> .....	88
4.38	<i>Variation de l'erreur des premiers 5 modes de la plaque sandwich en fonction de la température</i> .....	89
4.39	<i>Effet de la variation de la température sur la vibration d'une plaque sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,001 m</i> .....	90
4.40	<i>Effet de la variation de la température sur la vibration d'une plaque sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,01 m</i> .....	91
4.41	<i>Effet de la variation de la température sur la vibration d'une plaque sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,025 m</i> .....	91

4.42	<i>Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique sur la vibration d'une plaque sandwiche dans différentes températures.....</i>	94
4.43	<i>Variation des fréquences des 5 premiers modes de la plaque sandwiche en fonction de variation de la température (<math>h_c=0,001m</math>) .....</i>	94
4.44	<i>Variation des fréquences du premier mode de la plaque sandwiche en fonction de l'épaisseur du cœur dans différentes températures.....</i>	95
4.45	<i>Variation des fréquences du deuxième mode de la plaque sandwiche en fonction de l'épaisseur du cœur dans différentes températures.....</i>	96
4.46	<i>Variation des fréquences du troisième mode de la plaque sandwiche en fonction de l'épaisseur du cœur dans différentes températures.....</i>	97
4.47	<i>Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwiche d'épaisseur de cœur égale à <math>0,001m</math>.....</i>	98
4.48	<i>Variation du décrétement logarithmique en fonction de température pour la plaque sandwiche d'épaisseur du cœur égale à <math>0,01m</math>.....</i>	99
4.49	<i>Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwiche d'épaisseur de cœur égale à <math>0,025m</math></i>	100

## Liste des tableaux

<u>Tab N°</u>	<u>Titre</u>	<u>Page</u>
1.1	Type de matrices utilisées dans les composites courants .....	05
4.1	Mots clés des propriétés des matériaux (mécaniques, physiques) utilisées sous Abaqus.....	49
4.2	Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre composite sandwich.....	53
4.3	Influence du type d'élément sur les fréquences de la poutre sandwich.....	54
4.4	Influence du nombre des éléments sur les fréquences de la poutre sandwich.....	55
4.5	Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich (cas 1).....	57
4.6	Résumé des résultats de la poutre sandwich par la méthode proposée..	58
4.7	Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich (cas N°1).....	60
4.8	Résumé des résultats calculés par la méthode proposée (cas 1).....	60
4.9	Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich (cas 2).....	61
4.10	Résumé des résultats calculés par la méthode proposée (cas 2).....	61
4.11	Variations des caractéristiques mécaniques de l'aluminium (Al) en fonction des températures.....	67
4.12	Variations des caractéristiques mécaniques du (C 64 D) en fonction des températures.....	67
4.13	Variations des caractéristiques mécaniques du (1164d) en fonction des températures.....	67
4.14	Fréquences des cinq premiers modes dans les deux cas.....	67
4.15	Variation des fréquences du premier mode en fonction de la température pour les deux types du cœur.....	68
4.16	Résumé d'erreurs des fréquences de la poutre en fonction de températures.....	71
4.17	Géométrie de la poutre sandwich modélisée.....	72
4.18	Effet de variation de l'épaisseur du cœur de la poutre sandwich à T=20°C.	78
4.19	fréquences des cinq premiers modes en fonction de la température (hc=0,001 m) .....	78
4.20	Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,001m.....	80
4.21	Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m.....	81
4.22	Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,025m.....	82
4.23	Caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque sandwich...	83
4.24	Variation de l'erreur en fonction de la température obtenue par les différents tests de la plaque sandwich.....	89
4.25	Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque sandwich modélisée.....	90
4.26	Variation de l'épaisseur de l'âme sur les fréquences du premier mode modes de la plaque sandwich dans différentes température.....	95

4.27	<i>Variation des fréquences du deuxième mode de la plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans différentes températures.....</i>	96
4.28	<i>Variation des fréquences du troisième mode de la plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans des différentes températures.....</i>	97
4.29	<i>Variation du décréement logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,001m.....</i>	98
4.30	<i>Variation du décréement logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m.....</i>	99
4.31	<i>Variation du décréement logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,025m.....</i>	99

# Sommaire

<i>Remerciement</i> .....	<i>I</i>
<i>Dédicace</i> .....	<i>II</i>
<i>المخلص</i> .....	<i>III</i>
<i>Résumés</i> .....	<i>IV</i>
<i>Abstract</i> .....	<i>V</i>
<i>Quelques notations utilisées</i> .....	<i>VI</i>
<i>Liste des figures</i> .....	<i>VII</i>
<i>Liste des tableaux</i> .....	<i>X</i>
<i>Sommaire</i> .....	<i>XII</i>
<i>Introduction générale</i> .....	<i>XVI</i>
<b>CHAPITRE 1 : Etude bibliographique sur les composites</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1. Historique</b> .....	<b>2</b>
<b>1.2. Matériaux composites ; intérêts et propriétés</b> .....	<b>2</b>
<b>1.3. Définitions</b> .....	<b>2</b>
<b>1.3.1. Les matrices et fibres Principales utilisées</b> .....	<b>3</b>
<b>1.3.1.1. Matrices</b> .....	<b>4</b>
<b>1.3.1.1.1. Résines thermodurcissable</b> .....	<b>4</b>
<b>1.3.1.1.2. Résines thermoplastiques</b> .....	<b>4</b>
<b>1.3.1.1.3. Matrices métalliques</b> .....	<b>4</b>
<b>1.3.1.1.4. Autres types de résines</b> .....	<b>5</b>
<b>1.3.1.2. Les fibres et tissus</b> .....	<b>5</b>
<b>1.3.1.2.1. Généralités</b> .....	<b>5</b>
<b>1.3.1.2.2. Fibres de Forme linéique</b> .....	<b>5</b>
<b>1.3.1.2.3. Fibres de forme surfacique</b> .....	<b>6</b>
<b>1.3.1.2.4. Structures tissées unidirectionnelles</b> .....	<b>6</b>
<b>1.3.1.2.5. Les différents types des fibres selon la nature des composantes</b> ...	<b>7</b>
<b>1.3.1.2.6. Autres fibres</b> .....	<b>8</b>
<b>1.4. Classifications</b> .....	<b>8</b>
<b>1.4.1. Classification selon la nature des constituants</b> .....	<b>8</b>
<b>1.4.2. Classification suivant performance et diffusion</b> .....	<b>9</b>
<b>1.5. Principaux constituants des composites à matrices organiques</b> .....	<b>9</b>
<b>1.6. plis composites</b> .....	<b>9</b>
<b>1.6.1. plis unidirectionnels (Monocouches)</b> .....	<b>10</b>
<b>1.6.2. plis équilibrés (tissés équilibrés)</b> .....	<b>10</b>
<b>1.7. L'interface</b> ..	<b>10</b>
<b>1.8. Charges et additifs</b> .....	<b>11</b>
<b>1.8.1. Charges</b> .....	<b>11</b>
<b>1.8.2. Additifs</b> .....	<b>12</b>
<b>1.9. Structures composites stratifiées</b> .....	<b>12</b>
<b>1.9.1. Désignation des structures stratifiées</b> .....	<b>12</b>
<b>1.9.2. Structures composites tissées multidirectionnelles</b> .....	<b>13</b>

<b>1.10. Structure sandwich.....</b>	<b>14</b>
<b>1.10.1. Introductions: .....</b>	<b>15</b>
1.10.1.1. Sandwichs de type-1.....	15
1.10.1.2. Sandwichs de type-2 .....	15
1.10.2. Différents constituants .....	15
1.10.3. Rôle des constituants des structures sandwiches .....	15
1.10.4. Technique d'assemblage des structures sandwiches .....	16
1.10.4.1. Le collage de peau sur l'âme .....	16
1.10.4.2. Techniques de pliage .....	16
1.10.5. Domaines d'applications des matériaux sandwiches .....	17
1.10.5.1. Construction aérospatiale.....	17
1.10.5.2. Construction automobile et ferroviaire.....	18
<b>1.11. Conclusions : avantages / limitations .....</b>	<b>18</b>
<b>CHAPITRE 2 : Comportements mécaniques des composites stratifiés.....</b>	<b>20</b>
<b>2.1. Théories utilisées dans la formulation numérique de structures composites.</b>	<b>21</b>
<b>2.2. Théorie Classique des Stratifiés (CLT) .....</b>	<b>22</b>
2.2.1. Hypothèses de la théorie classique des stratifiés.....	22
2.2.2. Expression du champ des déformations.....	22
2.2.3. Champ des contraintes.....	23
2.2.3.1. Forme du champ des contraintes.....	23
2.2.3.2. Expression des contraintes.....	25
2.2.4. Expression des résultantes et moments.....	26
2.2.4.1. Résultantes en membrane.....	26
2.2.4.2. Moments de flexion et de torsion.....	27
2.2.5. Equation du comportement mécanique d'un stratifié.....	27
2.2.5.1. Equation constitutive.....	28
2.2.5.2. Matrice de rigidité.....	29
<b>CHAPITRE 3 : Dynamique des structures composites.....</b>	<b>30</b>
<b>3.1. Introduction .....</b>	<b>31</b>
<b>3.2. Théorème de l'énergie.....</b>	<b>35</b>
3.2.1. Variation d'une fonctionnelle.....	35
3.2.2. Théorème des travaux virtuels.....	35
<b>3.3. Formulation énergétique de la théorie des stratifiés.....</b>	<b>38</b>
3.3.1. Introduction.....	38
3.3.2. Énergie de déformation d'un stratifié.....	38
3.3.3. Énergie cinétique d'un stratifié.....	40
3.3.4. Travail des actions exercées sur le stratifié.....	40
<b>3.4. Résolution du système dynamique.....</b>	<b>41</b>
<b>CHAPITRE 4 : Modélisation des structures composites sandwiches par la MEF.....</b>	<b>44</b>
<b>4.1. Méthode des éléments finis.....</b>	<b>45</b>

4.1.1. Présentation de la méthode des éléments finis.....	45
4.1.1.1. Introduction.....	45
4.1.1.2. Etapes suivies pour calcul du comportement mécanique des structures par la méthode des éléments finis.....	46
4.1.1.3. Classement des éléments finis.....	46
4.1.1.4. Les attributs d'un élément fini.....	47
4.1.1.5. Modélisation d'un problème mécanique sous Abaqus.....	48
4.1.1.6. Etudes vibratoires sur les structures composites sandwiches .....	50
4.2. Modélisation dynamique d'une poutre composite sandwich .....	53
4.2.1. Choix de l'élément et du nombre de discrétisation.....	53
4.2.1.1. Modélisation des Vibrations de flexion d'une poutre sandwich (cas d'étude)	53
4.2.1.2. Influence du type d'élément .....	53
4.2.1.3. Influence de nombre des éléments .....	55
4.2.2. Application de la méthode proposée pour les poutres sandwiches basée sur la loi de Dowell .....	57
4.2.2.1. Modélisation du comportement modale des structures sandwiches à cœur viscoélastique mince .....	57
4.2.2.2. Présentation des étapes suivies pour la modélisation et l'analyse de la poutre sandwich .....	57
4.2.2.3. Résultats de l'application de la méthode proposée .....	58
4.2.2.4. Influence du type du cœur de la poutre sandwich .....	60
4.2.2.5. Influence de l'épaisseur du cœur viscoélastique.....	62
4.2.2.6. Effet de la température sur les caractéristiques dynamique de la poutre sandwich.....	67
4.2.2.6.1. Effet de la température sur les fréquences de la poutre sandwich à différents cœurs (Choix de la couche viscoélastique).....	67
4.2.2.6.2. Effet de températures sur les fréquences des poutres sandwiches .....	69
4.2.3. Représentation fréquentielle de l'effet de température sur la vibration des poutres sandwiches .....	72
4.2.3.1. Variation des fréquences des poutres sandwiches en fonction de la température .....	72
4.2.3.2. Vibration de la poutre sandwich sous l'effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique dans différentes températures .....	75
4.2.4. Effet de variation de l'épaisseur du cœur sur les fréquences de la poutre sandwich à $T=20^{\circ}\text{C}$ .....	77
4.2.5. Variation des fréquences des cinq premiers modes en fonction de la température ( $h_c=0,001\text{m}$ ) .....	78
4.2.6. Variation des fréquences des trois premiers modes en fonction de l'épaisseur du cœur pour différentes températures.....	79
4.2.7. Effet de variation de la température sur le décrétement logarithmique.....	80
4.3. Extension de la méthode proposées aux plaques sandwiches.....	83
4.3.1. Modélisation d'une plaque sandwich composite .....	83
4.3.2. Effet de l'épaisseur du cœur de la plaque sandwich.....	84
4.3.3. Effet de la température sur les caractéristiques dynamique de la plaque sandwich.....	86

4.3.3.1.	<i>Variation des fréquences de la plaque sandwich par la méthode proposée.</i>	86
4.3.3.2.	<i>Variation de l'erreur en fonction des températures.....</i>	89
4.3.4.	<i>Représentation fréquentielles de la réponse des plaques sandwiches en fonction de la température.....</i>	89
4.3.4.1.	<i>Effet de l'épaisseur du cœur viscoélastique.....</i>	90
4.3.4.2.	<i>Vibration des plaques sandwiches sous l'effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique dans les différentes températures .....</i>	92
4.3.5.	<i>Variation des fréquences de la plaques sandwich en fonction de la variation des températures (hc=0,001m) .....</i>	94
4.3.6.	<i>Effet de variation de l'épaisseur de l'âme sur les fréquences des trois premiers modes de la plaque sandwich dans différentes température.....</i>	95
4.3.7.	<i>Effet de variation de la température sur le décrétement logarithmique de la plaque sandwich .....</i>	98
4.4.	<i>Conclusion générale.....</i>	101
4.5.	<i>Références.....</i>	103
4.6.	<i>Annexes.....</i>	106

## *Introduction générale*

Les matériaux composites évoluent jour après jour. En effet, le développement et les changements rapides des produits, des pratiques technologiques et industrielles sont accompagnés par de nouvelles générations de matériaux. Parmi ces nouveaux composites, les matériaux appelés « sandwichs », ils possèdent une bonne résistance aux différents types de sollicitations mécaniques causées par les mouvements vibratoires des structures, les rotations des moteurs et les mouvements appliqués par les composantes de la structure.

Pour réduire les effets indésirables de ces mouvements, il faut modéliser le comportement dynamique des structures. Pour cela, différentes méthodes peuvent être utilisées. Parmi ces méthodes nous choisissons la méthode des éléments finis.

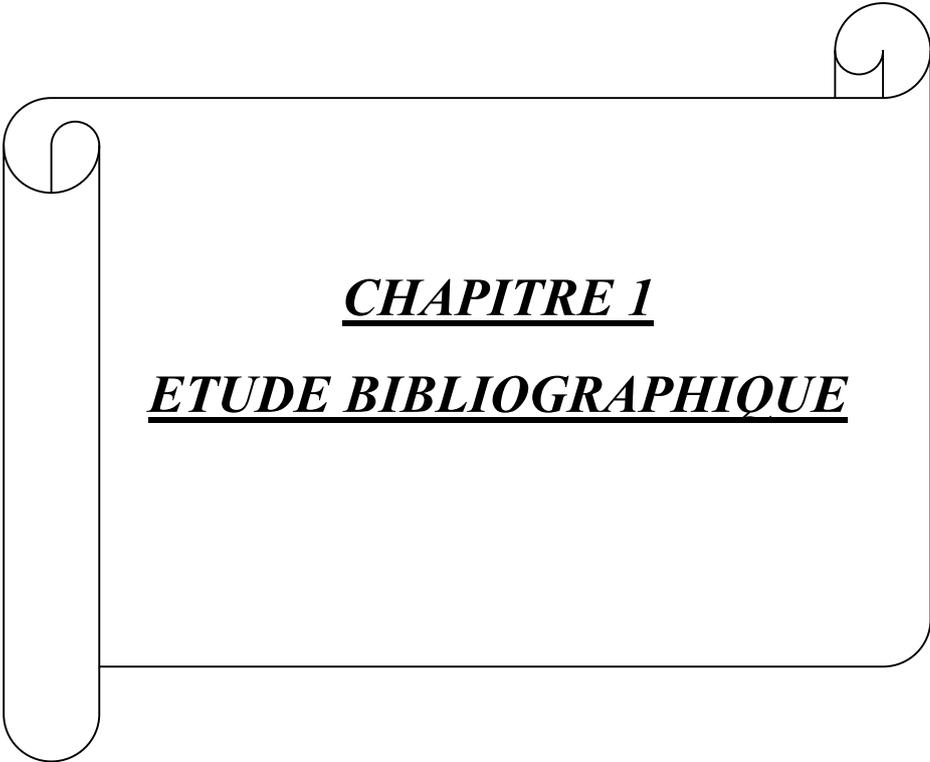
Plusieurs principes ont été obtenus pour calculer le comportement mécanique et principalement le comportement dynamique des structures. Pour simplifier ces calculs, et se rapprocher du comportement réel de ces structures (structures sandwichs). Plusieurs méthodes ont été développées entre autres celle de Dowell pour les structures homogènes et isotropes. Notre travail consiste à étendre ce principe aux cas des sandwichs à cœurs viscoélastiques.

Notre travail comporte cinq chapitres, nous commencerons dans le premier chapitre par une description générale des matériaux composites, ses différentes composantes et ses différents types, à la fin du chapitre nous donnerons une introduction sur les structures sandwichs et le rôle de chaque composant de ces structures.

Dans le deuxième chapitre nous mènerons une discussion générale sur les différentes théories appliquées sur les structures stratifiées.

Le troisième chapitre détaillera les étapes suivies pour résoudre le problème des structures continues telles que les poutres et les plaques stratifiées.

Enfin, le quatrième chapitre que nous partagerons en deux parties ; la première contient une brève introduction sur la méthode des éléments finis, quelques types d'éléments trouvés dans la bibliothèque d'Abaqus, ainsi que quelques modélisations sur les structures sandwichs par la MEF. Dans la deuxième partie nous modéliserons les structures sandwichs sous différentes conditions mécaniques et thermiques et ce, pour étudier l'effet de ces conditions sur les fréquences, les déplacements vibratoires et les décrets logarithmiques. À la fin de ce travail nous dresserons une conclusion générale sur les cas étudiés.



**CHAPITRE 1**

**ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

## **CHAPITRE 1 : Etude bibliographique sur les composites**

### **1.1. Historique**

Les matériaux naturels sont utilisés dans les temps préhistoriques (bois, pierre, peau, laine, etc.), après avoir extrait les métaux des minerais, après avoir créé des alliages métalliques, l'homme a commencé à créer des matériaux de synthèse à partir de composants organiques. C'est ainsi que sont apparus les premiers polymères de synthèse (fin XIXe siècle) [1]. Alors on peut dire que Les matériaux composites ne sont pas nouveaux, elles sont utilisées pendant l'antiquité. Le bois et le cob ont été toujours composites, les composites ont également été utilisés pour optimiser les performances de certaines armes classiques, par exemple dans les arcs des mongoliens, les parties comprimés sont à base de bois, et les parties tendus sont faits ensemble de bois et de tendons de vache collés [2]. Les sabres japonais ou les lames des sabres sont en acier en fer doux : la partie de fer est stratifiée comme de feuilles de pâte, avec orientation des défauts et impuretés de long direction; et après le formée dans un forme de U dans la quelle le fer doux est placé, l'épée à alors une bonne résistance en flexion et en impact [2].

On peut regarder que cette période est une période de la distinction entre les communes composites utilisées universellement et les composites des hautes performances.

Les premières matières plastiques. Plus récemment encore (années quarante), l'idée est venue d'améliorer les caractéristiques mécaniques en y incorporant des fibres ce que l'on appelle depuis les années 60-70, les matériaux composites [1].

### **1.2. Matériaux composites : intérêts et propriété**

Il existe différentes familles des matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, les matériaux sandwichs, les matériaux intelligents, etc.... Le développement et les changements rapides des produits, des pratiques technologiques et industrielles sont accompagnés par de nouvelles générations des matériaux[3]. Parmi ces matériaux, les composites :

#### **Qu'est ce qu' un matériau composite?**

Comme le terme est indiqué, matériau composites montre que ce matériau est différent de commune des matériaux hétérogène, actuellement le matériau composite signifie que ce matériau ayant des fibres robustes continues ou discontinues couvré par un matériau plus faible de la matrice, la matrice sert à distribuer les fibres et de transmettre les charges sur les fibres. Les matériaux composites sont :

-Très hétérogène

-Très anisotropie cette notion de anisotropie en d'autres termes cela signifie que la propriété mécanique du matériau dépendant de la direction des fibres(1).

### 1.3. Définitions [4]

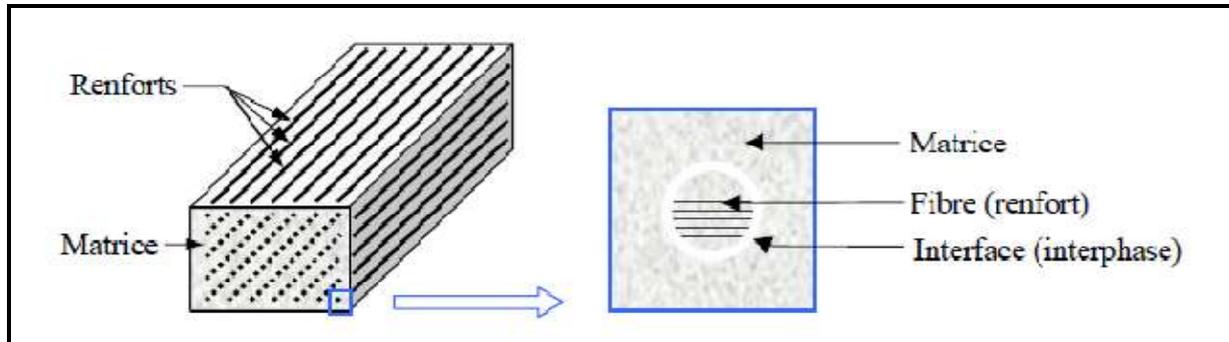


Figure 1.1. Constituants des matériaux composites [5].

Un composite est un mélange de deux ou plusieurs composants distincts ou phases. En outre, trois autres critères sont normalement remplis avant que nous appelons un matériau composite ; tout d'abord les deux constituants doivent être présents dans les proportions raisonnables ; deuxième les phases constitutives devrait avoir nettement différentes propriétés telle que les propriétés du composites sont sensiblement de différentes des propriétés des constituants ; en fin ,un composites est généralement synthèse produit de mélange délibérément et combinant les électeurs par des moyen divers .

Nous savons que les matériaux composites ont deux ou plus phases distinctes chimiquement à l'échelle microscopique, séparés par une interface distincte et il est important d'être en mesure de préciser ces constituant. Le constituant qui est continue est souvent mais pas toujours présent dans la plus grande quantité dans le composites est appelée la matrice.

Le mode normale est les propriétés de la matrice qui sont améliorées lors de l'incorporation a un autre constituant produire un composite , la matrice de composite peut être on céramique , métallique ou bien on polymérie les propriété mécanique de ces trois classes des matériaux est considérée différent ,et généralement ,le polymère ayant une faible résistance et module de Young ; le céramique est solide rigide et fragile ; et les métaux ont des forces et des modules intermédiaires ,avec une bonne ductilité c'est-à-dire qu'ils ne sont pas fragile .Le deuxième constituant est connu par la phase de renforcement et d'amélioration des propriété mécanique des matrices dans la plus parts la renforcement était plus fort plus résistant et rigide que la matrice mais toujours il y à quel que exception, par exemple, renfort on métal maniable avec matrice on céramique et renfort on caoutchouc avec une matrice de polymère fragile.

### 1.3.1. Les matrices et fibres Principales utilisées

#### 1.3.1.1. Matrices

Pour lier les fibres ensemble, on utilise généralement des matrices qui se classent en trois grandes catégories : les résines thermodurcissables, les résines thermoplastiques et les matrices métalliques.

##### 1.3.1.1.1. Résines thermodurcissables

Une résine thermodurcissable est une formulation de différents produits appartenant essentiellement à la chimie organique, qui possède la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à un état solide.

###### A Résine polyester

Elle présente un bon accrochage sur les fibres, un prix bas, mais a un retrait important et une tenue réduite à la chaleur humide.

###### B Résine époxyde

C'est la plus utilisée dans l'industrie aéronautique. Elle présente un bon accrochage sur les fibres, un faible retrait au moulage (de l'ordre de 0,5 %) et de bonnes propriétés mécaniques. Elle garde d'excellentes caractéristiques jusqu'à une température de 170 °C.

###### C Résine phénolique

Ayant de moins bonnes propriétés mécaniques que les résines époxydes, elle n'est utilisée que lorsqu'il y a des exigences vis-à-vis de la tenue au feu (toxicité).

###### D Résine polyamide

D'un emploi relativement difficile, chère, elle a l'avantage de garder de bonnes caractéristiques sur une large plage de température (de - 100 à + 260° C).

##### 1.3.1.1.2. Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques présentent la propriété de passer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux. Elles présentent plusieurs avantages provenant directement de leur définition :

- ❖ mise en œuvre rapide par thermo soudage.
- ❖ possibilité de retransformations : il est possible de créer des semi-produits (tôle par exemple) qui seront transformables à chaud.

Elles ont, de plus, une meilleure ténacité que les résines thermodurcissables.

Elles devraient donc permettre d'améliorer la tenue au choc des composites.

Les résines thermoplastiques avaient au départ deux graves défauts : une faible tenue en température et peu de résistance aux solvants.

Des produits ont été étudiés pour pallier ces défauts :

- les polyéther-sulfones (PES).
- les polyéther-imides (PEI).
- les polyéther-éther cétones (PEEK).
- les polysulfures de phényle (PPS).

L'imprégnation de fibres à l'aide de ces produits est assez complexe et leur rigidité à température ambiante rend assez difficile le drapage des pièces. Il faut remarquer que l'industrialisation n'en est qu'à son début et l'on peut penser que ces résines auront un développement important.

### 1.3.1.1.3. Matrices métalliques

Malgré une densité importante, elles présentent des propriétés intéressantes pour la réalisation de pièces soumises à des frottements.

La voie aluminium – fibres de bore ou fibres de carbone est encore au stade du développement pilote. L'utilisation d'alliage de magnésium est également envisagée afin d'optimiser la densité de ces matériaux. Il ne faut pas confondre ces composites faits de fibres longues et ayant un pourcentage important de fibres, avec les matériaux métalliques renforcés par des renforts discontinus (< 30 %). Dans ce dernier cas, on obtient principalement une augmentation du module d'Young.

### 1.3.1.1.4. Autres types de résines

En plus des thermoplastiques et des thermodurcissables, il existe deux autres classes de résines à usages spécifiques :

- A. Les résines thermostables:** On les retrouve aussi bien parmi les résines thermodurcissables que thermoplastiques, elles se distinguent par leurs performances thermiques (stabilité thermique jusqu'à 300 °C). Elles sont développées essentiellement dans les domaines aéronautique et spatial ;
- B. Les élastomères :** renforcés de fibres, ils sont utilisés dans diverses applications du domaine de l'automobile [01].

Type de matrice	Exemples	Propriétés
Polymère	résine époxyde, polyester, PEEK, PEKK, PPS etc....	Matériaux pouvant être de type thermodurcis ou thermoplastiques, faible résistance à la température, légers et facilement moulables, généralement ductiles.
Métaux	aluminium, magnésium, tungstène	Matériaux mis en oeuvre par fonderie ou par métallurgie des poudres de moyenne à haute température de fusion, à bonne résistance mécanique intrinsèque, à densité moyenne à très élevée, généralement ductiles mais parfois fragiles.
Céramiques	carbure de Silicium (SiC)	Matériaux généralement mis en oeuvre par frittage de poudres, à très haute température de fonctionnement, à densité élevée, mais fragiles.

Tab 1.1 : Type de matrices utilisées dans les composites courants [6].

### 1.3.1.2. Les fibres et tissu

#### 1.3.1.2.1. Généralités

Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques des matériaux de renfort : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.

Le choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques d'un composite : comportement thermique, tenue à la température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Pour élaborer des composites performants, les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : caractéristiques mécaniques élevées,

masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en œuvre, faible coût, etc. La nature des renforts (organique, minérale, synthétique..) et leurs formes sont fonctions de l'application. Toutefois les plus utilisés sont sous formes de fibres et se présentent sous différentes formes commerciales :

- sous forme linéique (fils, mèches, etc.) ;
- sous forme de tissu surfacique (tissus simples, mats, etc.).
- sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

Les renforts les plus performants développés à ce jour sont des fibres courtes particulières appelées Trichites ou Whiskies, formées à base de monocristaux.

#### **1.3.1.2.2. Fibres de Formes linéiques**

Les fibres sont élaborées en filaments unitaires de 5 à 15  $\mu\text{m}$  de diamètre, appelés mono-filaments. Ces filaments sont ensuite réunis en fils ou en mèches pour faciliter leur utilisation. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéique dont l'unité est le tex qui représente la masse en gramme d'un fil de 1 Km de longueur, soit :

$$1 \text{ tex} = 1 \text{ g/km} \text{ ou } 1 \text{ tex} = 10^{-6} \text{ kg/m}$$

L'utilisation directe des formes linéiques pour la mise en œuvre de composites est limitée à quelques procédés particuliers tels que l'enroulement filamentaire et la pultrusion.

#### **1.3.1.2.3. Fibres de formes surfaciques**

Les fils sont transformés par les techniques de l'industrie papetière et de tissage pour réaliser des formes surfaciques : mats, tissus ou rubans, qui facilitent la manipulation et la mise en œuvre des renforts.

##### **A. Les mats**

Se sont des nappes de fils continus ou discontinus dispersés dans un plan et assemblés par un liant soluble ou non dans la résine, l'absence d'orientations préférentielles des fibres conduit à un comportement isotrope du mat dans son plan.

Les mats de fils coupés, plus déformables, permettent d'obtenir des formes embouties.

Les mats de fils continus sont utilisés pour réaliser des formes complexes par moulage.

##### **B. Les tissus et rubans**

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. L'ensemble est maintenu par l'entrecroisement des fils suivant deux directions (figure 1.6).

- Une direction chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu ;

- Une direction trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés, donc par la masse linéique du fil, et par le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et des fils de trame.

Les armures classiques utilisées sont : toile (ou taffetas), satin, sergé, armure haut module, armure unidirectionnelle. Ces deux dernières donnent les meilleures performances (l'absence d'entrecroisement supprime les effets d'ondulation et de cisaillement des fils). Les mats et tissus sont caractérisés par leur masse surfacique en  $\text{gr/m}^2$ .

#### **1.3.1.2.4. Structures tissées unidirectionnel**

##### **A. Tresses et préformes**

Des tissus tabulaires (tresses ou préformes) peuvent être obtenus par tissage cylindrique ou conique : les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation de pas permet d'ajuster la tresse à

la forme qu'elle doit couvrir. On peut ainsi réaliser une pièce de révolution ayant un diamètre variable le long de son arc, ce qui permet d'obtenir divers tissus en forme de « chaussettes » coniques, ogivales ou hémisphériques. Ces tissus sont utilisés dans les constructions aéronautiques (cône de rentrée, tuyères, etc.).

### **B. Tissus multidirectionnels**

Des tissages volumiques sont également utilisés. Ils se caractérisent par le nombre de directions de tissage 3D et 4D. La structure la plus simple est celle du tissage 3D où les fils sont disposés suivant trois directions orthogonales.

#### **1.3.1.2.5. Les différents types des fibres selon la nature des composantes**

**A. Fibres de verre** Elles sont fabriquées par étirage rapide de baguettes de verre de quelques dixièmes de millimètre de diamètre, sortant d'une filière chauffée par effet Joule. L'étirage peut être produit suivant les deux méthodes suivantes :

- a. **procédé mécanique**, dénommé *Silienne*, dans lequel l'étirage est réalisé par la traction due à l'enroulement du fil sur une broche tournant à grande vitesse ; on obtient des fils continus ;
- b. **le procédé pneumatique**, dénommé *Verranne*, dans lequel l'étirage est produit par entraînement des fibres sous l'action d'un jet d'air sous pression ; on obtient des fibres de faible longueur.

Seul le premier procédé permet d'obtenir des matériaux présentant des caractéristiques mécaniques élevées. Il existe, dans chaque procédé, suivant les compositions chimiques, plusieurs types de verre dont les propriétés caractéristiques sont les suivantes :

- **verre E** : usage général, bonnes propriétés électriques ;
- **verre D** : hautes propriétés diélectriques
- **verre C** : bonne résistance chimique ;
- **verres R ou S** : haute résistance mécanique.

La fibre de verre R ou S a une résistance mécanique élevée et une rigidité moyenne. Sa densité relativement élevée par rapport aux autres fibres.

**B. Fibres de carbone** : Elles peuvent être réalisées par carbonisation de fibres polyacrylonitriles (PAN) ou de Bray [11]. Le précurseur est oxydé à une température de l'ordre de 300°C puis ensuite chauffé en atmosphère neutre. Les propriétés mécaniques dépendent de la température finale de fabrication. Le module d'Young augmente régulièrement avec la température tandis que la résistance en traction atteint un pic pour une température de l'ordre de 1500°C, puis décroît si l'on continue à augmenter la température de fabrication. On obtient ainsi des fibres haute résistance, haut module, et même très haut module. Il existe sur le marché des fibres de première génération (apparues dans les années 1970) et des fibres de deuxième génération (apparues autour de 1984) qui présentent des résistances très supérieures à celles des fibres de première génération. De part leur méthode de fabrication, les fibres de carbone sont très anisotropes. Les propriétés mécaniques transversales sont beaucoup plus faibles que les propriétés longitudinales. Les fibres de carbone sont des fibres conductrices, de masse volumique faible, ayant de très bonnes propriétés mécaniques et un coefficient de dilatation négatif.

### C. Fibres de bore

La fabrication de ces fibres est réalisée par un dépôt en phase vapeur du bore sur un filament de tungstène. Ces fibres, qui sont chères, ont de très bonnes caractéristiques mécaniques. Leur utilisation se restreint au profit des fibres de carbone.

### D. Fibres aramides

Les plus connues sont les fibres commercialisées par Du Pont de Nemours (États-Unis) sous le nom de Kevlar. Ces fibres sont des polyamides aromatiques. Elles présentent une masse volumique très faible, de très bonnes caractéristiques spécifiques en traction, un coefficient de dilatation négatif. Elles ont l'inconvénient d'avoir une faible résistance en compression, une forte reprise d'humidité et d'être sensibles aux rayons ultraviolets

#### 1.3.1.2.6. Autres fibres

Il existe d'autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques, et dont l'utilisation est réservée à la recherche de :

- produits à bas prix de revient ;
- produits à haute isolation thermique ;
- produits de bonne conductivité thermique ou électrique.

Parmi ces fibres nous avons :

#### A. *fibres d'origine végétale*

- bois, utilisé sous forme de fibres orientées, feutres, papiers imprégnés, etc.
- sisal, le jute, le lin, de moins en moins utilisés au profit des fibres de verre.

#### B. *fibres d'origine minérale*

- amiante (interdite dans certaines utilisations) ;
- silice.

#### C. *fibres synthétiques*

- fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.) ;
- fibres polyamides

#### D. *fibres métalliques*

- acier ;
- cuivre ;
- aluminium.

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques afin d'obtenir des composites:

- de bonne conductivité thermique et électrique,
- de caractéristiques thermomécaniques élevées.

## 1.4. Classification des composites [6]

### 1.4.1 Classification selon la nature des constituants

Selon la nature de la matrice et du renfort on rencontre plusieurs combinaisons possibles :

#### a) *Composites à matrice organique*

- résines et charges associées à :
  - Des fibres minérales : verre, carbone, etc. ;
  - Des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc. ;
  - Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

#### b) *Composites à matrice métallique*

- métaux légers et leurs alliages associés à :

- Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC) ;
- Des fibres métalliques : bore ;
- Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de SiC.

**c) Composites à matrice minérale**

- céramiques associées à :

- Des fibres métalliques : bore ;
- Des particules métalliques : cermets ;
- Des particules minérales : carbone, nitrures, etc.

Les figures (1.2) et (1.3) récapitulent les principaux matériaux utilisés comme renforts et matrices.

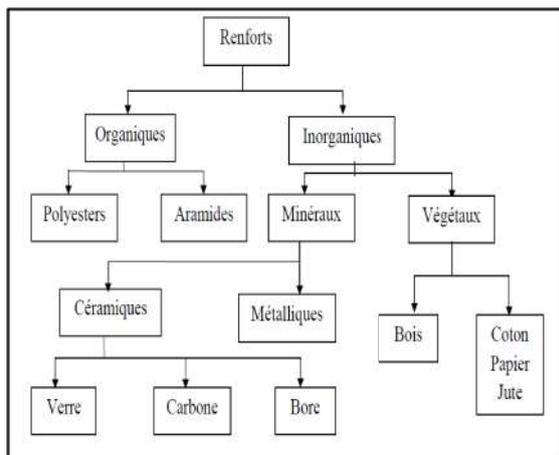


Figure 1.2 : Matériaux de base pour les renforts [1]

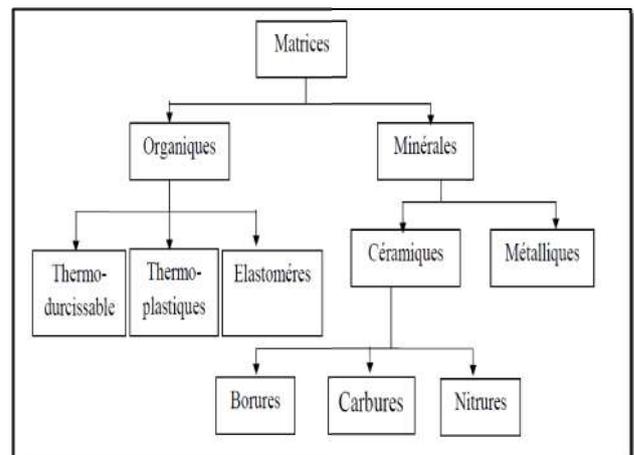


Figure 1.3 : Les principaux types de matrices [1]

**1.4.2. Classification suivant performance et diffusion**

**a) Les composites grandes diffusions**

De caractéristiques moyennes, ils sont orientés vers l'optimisation des coûts. Ils représentent 95% des composites utilisés et ont un domaine d'application très large : capotage, conserveries, décoration, etc.

**b) Les composites hautes performances**

Ils sont orientés vers l'optimisation des caractéristiques mécaniques et thermiques tout en diminuant le poids au maximum. Leurs coûts sont très élevés, ils sont réservés aux applications de pointe tel que l'aéronautique et l'espace, l'armement, le sport de haut niveau, etc.

**1.5. Principaux constituants des composites à matrices organiques**

Nous avons vu qu'un matériau composite est essentiellement constitué d'une matrice et d'un renfort. Le choix de ces deux constituants obéit aux exigences et contraintes de service (caractéristiques mécaniques élevées, tenue en température, résistance à la corrosion, etc.) tout en s'assurant de la compatibilité entre les éléments associés. A cet effet, les matrices organiques constituées de résines polymères associées à différentes charges et additifs sont celles qui offrent le plus de flexibilité du point de vue développement (synthèse de nouvelles résines) et conception (compatibilité avec différents renforts grâce à leur déformabilité et à la diversité de leurs compositions et propriétés mécaniques et physico-chimiques). De plus la

légèreté, le faible coût de fabrication et la facilité de mise en œuvre de ce type de résines font des composites à matrices organiques la principale catégorie de composites utilisés dans l'industrie.

## 1.6. Plis composites

### 1.6.1. Plis unidirectionnels (Monocouches)

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort ; à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement) ; à fibres tissées ; à fibres courtes. Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère (Taux de déséquilibre très grand).

### 1.6.2. Plis équilibrés (tissés équilibrés)

Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entres eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise. Dans l'industrie en peut trouver plusieurs types de ces tissés parmi eux on distinguer.

#### A. Toile ou taffetas

Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Les tissus présentent une bonne planéité et une relative rigidité, mais sont peu déformables pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.

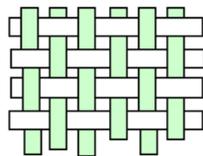


Figure I.4 : Taffetas [4]

#### B. Satin

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n-1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique

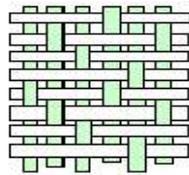


Figure I.5 : Satin [4]

Comme un tissu est difficilement déformable sur une surface gauche, on réalise également pour des utilisations spécifiques de l'armure bi ou tridimensionnelle.



Figure I.6: Tissu multiaxial [4]



Figure I.7: Tissu 3D ou tresse [4]

Il est également possible de réaliser des structures de renforts hybrides en tissant des fibres de natures différentes ou, en superposant des tissus ou nappes de renforts de fibres différentes.



Figure I.8 : Tissu hybride carbone – aramide [4]

### 1.7. L'interface

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Ces produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

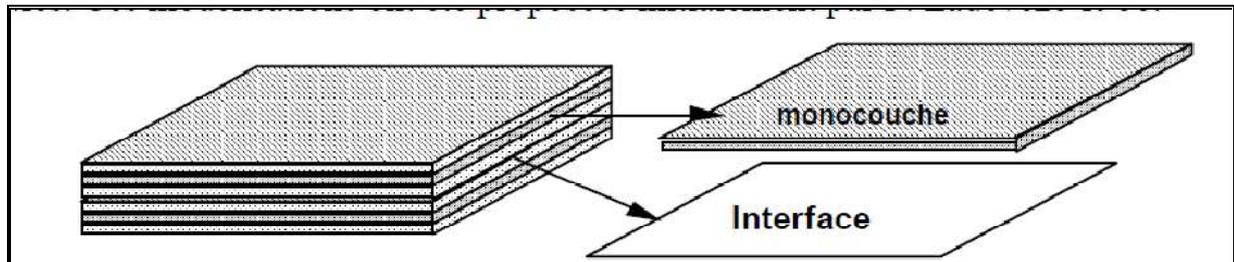


Figure I.9: Interface [7].

### 1.8. Charges et additifs

Différents produits peuvent être ajoutés à la résine pour améliorer ses caractéristiques mécaniques et physiques, faciliter sa mise en œuvre ou simplement pour en diminuer le coût. On parlera de charges quand la quantité ajoutée est de quelques dizaines de %, et d'additifs lorsque cette quantité ne dépasse pas quelques %.

#### 1.8.1. Charges

##### 1.8.1.1. charges renforçant

Elles sont incorporées aux résines pour améliorer leurs caractéristiques mécaniques, selon leur forme géométrique elles sont classées en :

- A. Charges sphériques** : sphères de faible diamètre, de 10 à 150  $\mu\text{m}$  généralement, appelées aussi microbilles. La forme sphérique évite les concentrations de contraintes dans la matrice et diminue par conséquent sa sensibilité à la fissuration. Les microbilles de verre creuses représentent 99% des charges sphériques utilisées.
- B. Charges non sphériques** : le mica sous forme d'écaillés est le matériau le plus utilisé. Des écaillés de dimensions allant de 100 à 500  $\mu\text{m}$  et d'une épaisseur de 1 à 20  $\mu\text{m}$  sont incorporées à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables pour des applications électriques et électroniques.

**1.8.1.2. Charges non renforçant** : Les charges non renforçant sont ajoutées pour diminuer le coût de la résine sans altérer ses performances, ou bien pour améliorer certaines de ses propriétés :

- ◆ Charges de faible coût : extraites de roches ou de minerais (carbonates, silicates, silices, etc.), leur incorporation augmente le module d'élasticité, la dureté, la viscosité et la stabilité dimensionnelle mais diminue la résistance à la traction et à la flexion.

- ◆ Charges ignifugeantes : ont pour rôle de réduire ou d'empêcher la combustion de la résine.
- ◆ Charges conductrices et antistatiques : ces charges sont utilisées pour rendre la matrice conductrice de chaleur et d'électricité dans certaines applications.

## 1.8.2. Additifs

**1.8.2.1. Lubrifiants et agents de démoulage** Ils sont utilisés pour faciliter le façonnage de la résine et réduire sa tendance à adhérer aux moules et mandrins.

### 1.8.2.2. Pigments et colorants

En fonction de la nature de la résine et de l'utilisation du matériau composite, ce dernier est coloré soit par des pigments (particules insolubles d'oxydes ou de sels métalliques) dispersés dans une pâte, soit par des colorants (composés organiques solubles dans l'eau ou dans un solvant).

### 1.8.2.3. Agents anti-retrait et les agents de fluage

Le retrait de la résine après polymérisation peut aboutir à un mauvais état de surface, à un gauchissement ou à des microfissurations des pièces moulées. L'ajout de produits spécifiques anti-retrait, à base de thermoplastiques ou d'élastomères, permet de diminuer ou même d'annuler le phénomène.

### 1.8.2.4. Agents anti-ultraviolet

Ils ont pour rôle de protéger la résine des rayons ultraviolets contenus dans le rayonnement solaire. En les absorbant, ils évitent une dégradation prématurée de la résine par rupture de liaisons atomiques ou par photo-oxydation.

## 1.9. Structures composites stratifiées

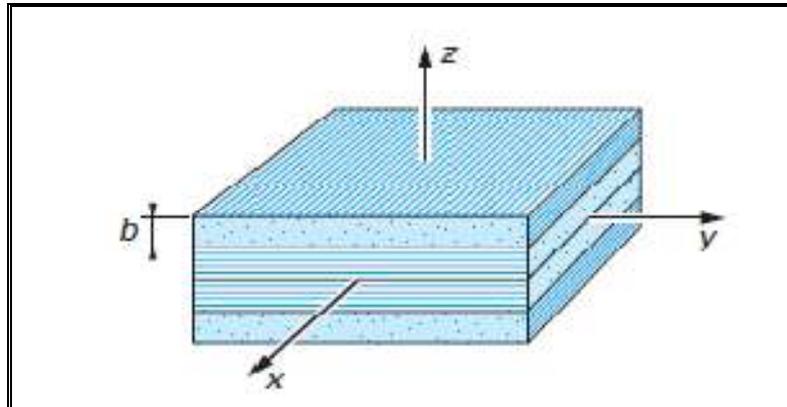


Fig. 1.10 : Structure composites stratifié [8].

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure. À cette échelle, appelée méso échelle, une

structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter laminaires. La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso constituants, comme illustré sur la figure 1.3, qui forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées. L'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre.

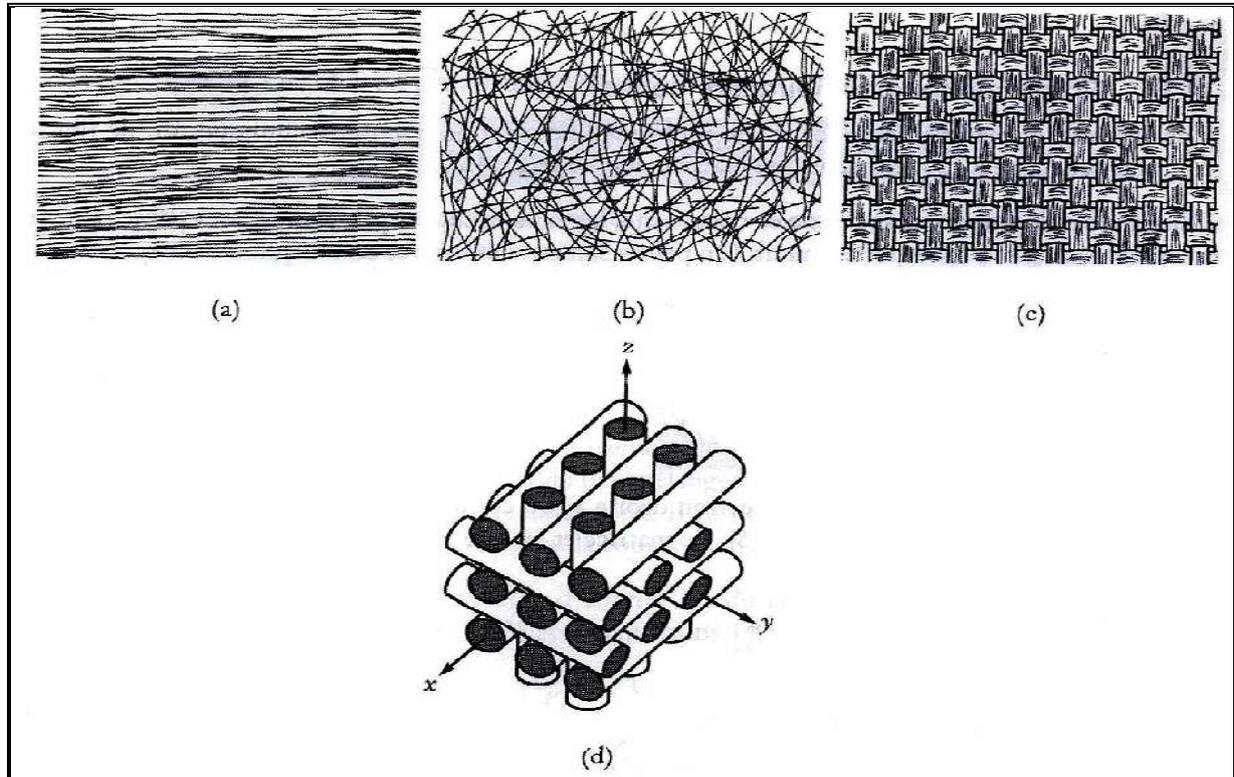


Figure 1. 11. Disposition des fibres : **a)** fibres unidirectionnelles ; **b)** mat ; **c)** tissu ; **d)** tissage tridimensionnel orthogonal [9].

### 1.9.1. Désignation des structures stratifiées[10]

Les structures stratifiées à base de tissus unidirectionnels figure précédente sont constituées d'un grand nombre des couches ou plis. L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible, de l'ordre de 0,125 mm pour un matériau carbone époxy de type Aéronautique et 0,3 mm pour ceux qui sont utilisés dans l'Industrie Nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale. La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence. Un stratifié est codifié de la façon suivante :

- E.** chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence  $x$ . Sur les figures 1.4(a) et 1.4(b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;

- F. les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la figure 1.4(a) :  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$  ;
- G. les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la figure 1.4(b) :  $[0/452/90/-452/0]$  ;
- H. en cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;
- I. en cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole  $s$  indique la symétrie:  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$  devient  $[-45/45/-45]_s$  et  $[0/45/45/90/-45/-45/0]$  devient  $[0/452/90/-452/0]$ .

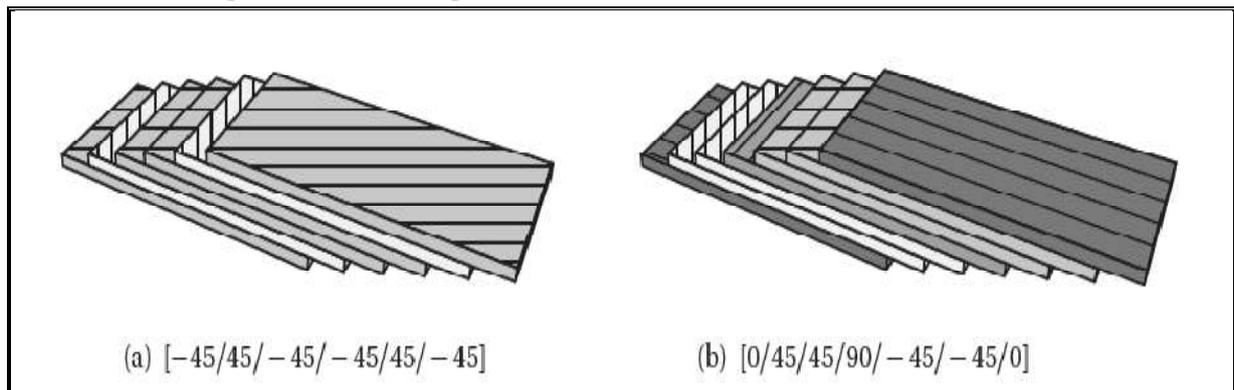


Figure 1.12 - Désignations du stratifié [10].

### 1.9.2. Structures composites tissées multidirectionnelles[9]

Il est possible de créer des pièces en matériaux composites de type tridimensionnelles massives ou des formes de révolution. Des tissages volumiques de type 2D (deux directions de renfort), 3D-Evolutif (deux directions de renfort et un piquage dans la troisième direction), 3D (trois directions de renfort), 4D (quatre directions de renfort), ou plus sont élaborés dans l'industrie aéronautique. Il est également possible de tisser des cylindres ou des cônes afin de réaliser des réservoirs ou des tuyères. Dans ces derniers cas, les fils de renforts s'entrecroisent en hélice. Quelques exemples de matériaux composites multidirectionnels sont maintenant présentés. Les structures massives sont principalement utilisées dans le domaine aéronautique et restent très marginales en raison de leur coût de production très élevé.

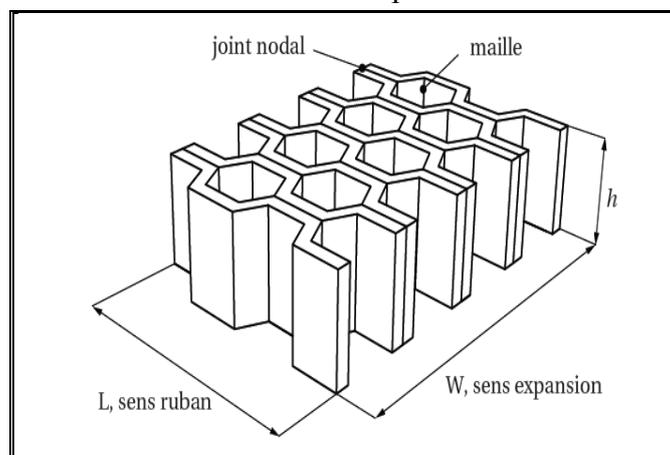


Figure 1.13- Désignations d'une âme nid d'abeilles [10].

## 1.10. Structure sandwich

### 1.10.1. Introductions

Les structures sandwichs se présentent généralement sous la forme d'une couche relativement légère et molle, constituant le cœur, intercalée entre deux parements rigides appelés peaux ou faces. Les faces sont souvent des tôles métalliques ou des composites stratifiés. Le matériau composant le cœur peut être polymère, nids d'abeilles, bois ou mousse, etc. suivant leurs types:

#### 1.10.1.1. Sandwichs de type-1

conçus principalement pour supporter des charges transversales. Dans cette configuration, le cœur est souvent épais pour permettre d'obtenir de fortes rigidités en flexion avec de faibles augmentations de masse. Ce type de sandwichs est très utilisé dans le domaine aérospatial.

#### 1.10.1.2. Sandwichs de type-2

utilisés principalement dans les applications nécessitant la suppression ou l'atténuation des vibrations. Dans cette configuration, une fine couche viscoélastique est intercalée entre deux faces élastiques. La présence du matériau viscoélastique permet d'introduire un fort pouvoir amortissant du principalement à l'écart entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques et la faible rigidité de la couche centrale. Du point de vue de l'ingénieur, les propriétés amortissantes de ces tôles sont caractérisées par deux quantités modales, à savoir le facteur de perte et la fréquence amortie.

On peut dire aussi que la structure sandwich obtenue à partir de deux peaux ou semelles, réalisées dans un matériau ayant de très bonnes caractéristiques mécaniques, collées sur une âme réalisée avec un matériau très léger et ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Une telle structure présente en flexion des rapports résistance/ masse et rigidité/masse très importants.

### 1.10.2. Différences constituants

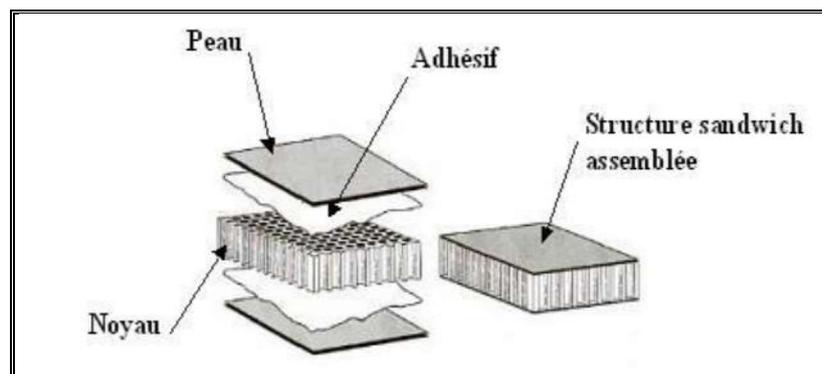


Fig.1.14: Constitutions d'une sandwich [6].

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constitué d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression). Deux "feuilles", appelées *peaux*, possédant de bonnes caractéristiques en traction. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier *légèreté* et *rigidité*.

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.).

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

Pour les âmes pleines :

- le balsa ou bois cellulaire ;
- diverses mousses cellulaires ;
- des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses synthétiques; etc.

Pour les âmes creuses : essentiellement nid d'abeilles et profilés :

- des alliages métalliques légers ;
- du papier kraft (enduit ou non de résine) ;
- du papier polyamide, type papier Nomex ; etc.;

Des âmes mixtes peuvent être utilisées.

Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou des feuilles d'alliages légers.

Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

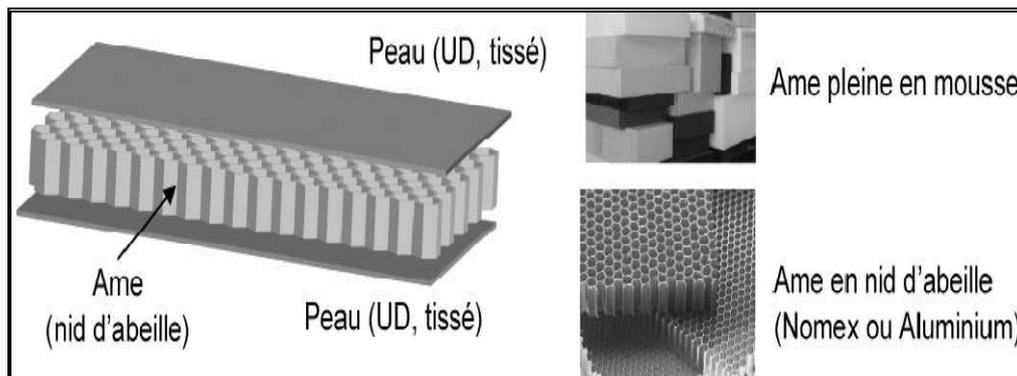


Figure.1.15 : Présentation des constituants d'un matériau composite sandwich [7].

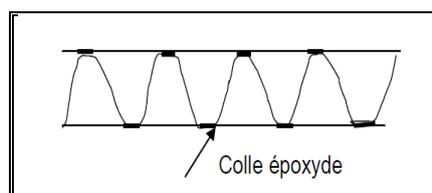
### 1.10.3. Rôle des constituantes des structures sandwichs

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan [11].

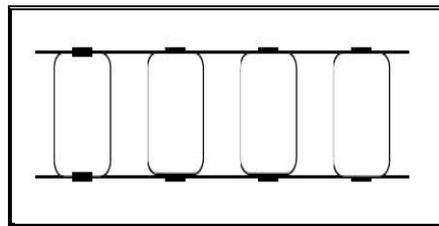
### 1.10.4. Techniques d'assemblages des matériaux sandwichs [11]

#### 1.10.4.1. Le collage de peau sur l'âme

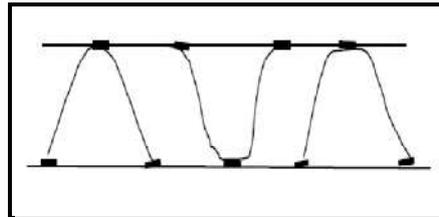
Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé selon la (Figure 1.16) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.



(a) : collage de tôle ondulée ou raidisseurs  $\omega$  sur tôle



(b) : panneaux avec tubes carrés



(c): panneaux avec  $\omega$  inverses

**Figure 1.16 : panneaux réalisés par collage à partir de divers profils**

**1.10.4.2. Technique de pliage**

Après mise en œuvre les panneaux sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure 1.17).

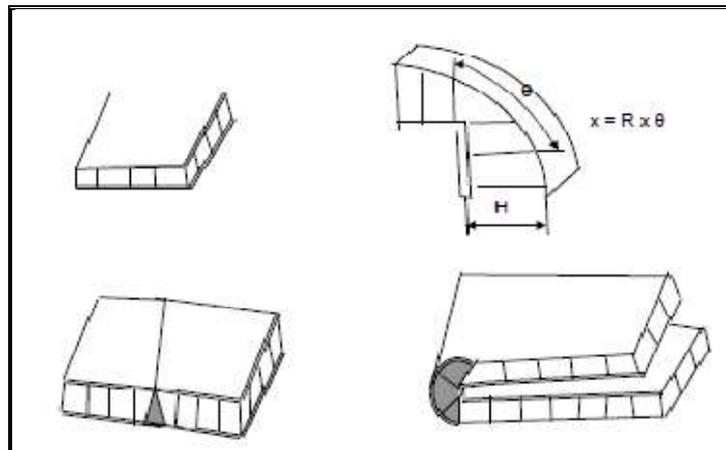


Figure 1.17: Pliage des panneaux sandwichs

On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.

**1.10.5. Domaines d'applications des matériaux sandwichs [11]**

Les panneaux sandwichs sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire.

### 1.10.5.1. Construction aérospatiale

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwichs et par cuisson de stratifiés composites (carbone/ époxyde, kevlar/époxyde) sur nida nomex ou aluminium collés avec des adhésifs époxydes en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwichs constitués de peaux en carbone / époxyde collés sur des âmes en nida aluminium. Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxydes phénoliques ou polyamides. Les panneaux acoustiques sont des structures sandwichs dont la peau intérieure, coté moteur est constituée d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux. Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwichs avec peaux en composites collées sur nida .Dans les domaines astronautique et d'armement, on à besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone / epoxyde et l'âme en nida nomex.

### 1.10.5.2.Construction automobile et ferroviaire

Les matériaux sandwichs sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction de camions, d'autobus, dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé. Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwichs. Les portes d'accès sont en panneaux sandwichs avec des peaux en composites verre/ polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwichs avec âme en nid d'Aluminium ou nomex[48].

#### 1.11. Conclusions : avantages / limitations[7]

L'usage des matériaux composites ne cesse de croître dans différents domaines : automobile, naval, pétrolier, aéronautique et aérospatial. Grace a ces matériaux présentent de nombreux avantages telle que :

1. Importantes rigidités et résistances spécifiques afin de concevoir des structures hautes performances tout en réalisant des gains de masse par rapport aux solutions métalliques précédentes.
2. Faible sensibilité a la fatigue.
3. Faible sensibilité a la corrosion.
4. Possibilité de réaliser des structures de formes complexes (one shot) réduisant ainsi les couts d'assemblages.
5. Possibilité de dimensionner les structures (au juste besoin) avec des propriétés élevées uniquement dans les axes de chargement.
6. Possibilité de fabriquer des matériaux avec des propriétés particulières (coefficient de Poisson négatif, dilatation quasi-nulle...).

Toutefois, un certain nombre de désavantages sont associés aux matériaux composites :

1. Cout important du passage matériau métallique a matériau composite, prenant en compte le cout matériau (des constituants) et le cout associé au procédé de fabrication.
2. Dispersion matériaux plus importante que les matériaux métalliques induisant un surcout des campagnes de qualification matériau due aux nombres de répétitions d'essais imposées.
3. Forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure.

4. Faible tenue a l'impact pour les stratifiés d'unidirectionnels ou de tisses 2D, ce qui constitue en revanche l'atout majeur des tisses 3D.
5. Sensibilité a l'environnement des matrices organiques entraînant une perte de propriétés mécaniques notables après vieillissement thermique ou hydrique ...
6. Faible conductivité électrique des composites a matrice organique, ce qui constitue un problème important pour la résistance aux impacts de foudres des fuselages composites.



**CHAPITRE 2**

**Comportement mécanique des matériaux**

**composites stratifiés**

## ***Théorie classique des stratifiés***

### ***2.1. Théories utilisées dans la formulation numérique de structures composites [12]***

Différentes théories, utilisées pour l'approximation du déplacement et de la déformation mécanique, ont été initialement utilisées pour la modélisation de structures métalliques (en matériau isotrope), puis étendues à l'étude de structures composites (en matériau anisotrope orthotrope ou transversalement isotrope). Ces théories sont essentiellement divisées en deux catégories:

- Celles formulées tenant pour base la notion d'une seule couche équivalente, appelées *théorie en couche équivalente unique (equivalent single layer theory)*;
- Celles formulées sur le concept de couches distinctes (discrètes), appelées *théorie en couches équivalentes discrètes (discrete layer theory)*, ou simplement *théorie layerwise (layerwise theory)*.

La première catégorie inclue la *théorie classique des stratifiés (CLT)*, la *théorie de la déformation de cisaillement de premier-ordre (FSDT)*, la *théorie de la déformation de cisaillement de troisième-ordre* ou simplement *théorie de déformations de cisaillement de l'haute-ordre (HSDT)* et d'autres. D'autre part, la deuxième catégorie inclue la *théorie en couches indépendantes (TCI)* et la *théorie de couches dépendantes (TCD)*. On peut citer les publications de Berthelot (1992), de Reddy (1997) et de Kollar et Springer (2003) qui présentent ces différentes théories.

Selon Reddy (1997), si le but de l'étude est la détermination de la réponse globale de la structure composite, telles que déflexions, charges critiques de flambage, fréquences et modes propres, l'étude peut être réalisée de manière assez précise en utilisant les théories *fondées sur l'hypothèse en une seule couche équivalente (CLT, FSDT, HSDT...)*. Par contre, lorsque le but de l'étude est associé aux réponses locales, tels que à l'identification des zones plus critiques en relation au niveau des contraintes selon l'épaisseur du stratifié, ou la localisation des zones d'incidence probable d'endommagement, on recommande l'emploi de théories *fondées en couches discrètes (TCI, TCD, ...)*.

Dans les sections subséquentes, les caractéristiques des théories en couche équivalente unique de types (*CLT, FSDT et HSDT*) et de celles formulées en couches équivalentes distinctes (*théorie layer wise*) sont fournies.

Dans notre étude nous sommes intéressés par la théorie classique des stratifiés comme se

présente ultérieurement parce qu'elle est la base de la théorie de Dowell.

### 2.2. Théorie classique des stratifiés (CLT) [5]

La *théorie classique des stratifiés* est basée sur les *hypothèses cinématiques de Kirchhoff*, employées pour l'étude de structures du type plaque, et sur les hypothèses cinématiques de *Kirchhoff-Love*, utilisées pour l'étude de structures du type coques courbes. D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure connue comme (*surface de référence ou surface neutre*), reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction.

#### 2.2.1. Hypothèses de la théorie classique des stratifiés

-Les hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie *CLT*, sont:

- (1) les plis sont parfaitement liés les uns aux autres, c'est-à-dire que, entre eux il n'existe pas de glissement, ou décollement ;
- (2) les déplacements selon des plis sont continus ;
- (3) le matériau de chaque pli présente un comportement élastique ;
- (4) le stratifié est considéré mince, c'est-à-dire, que les plis de la structure sont relativement minces par rapport aux dimensions planes (largeur et longueur) de la structure ;
- (5) les déformations, les déplacements et les rotations sont petits [6].

La théorie classique des stratifiés utilise le schéma de déformation du premier degré suivant :

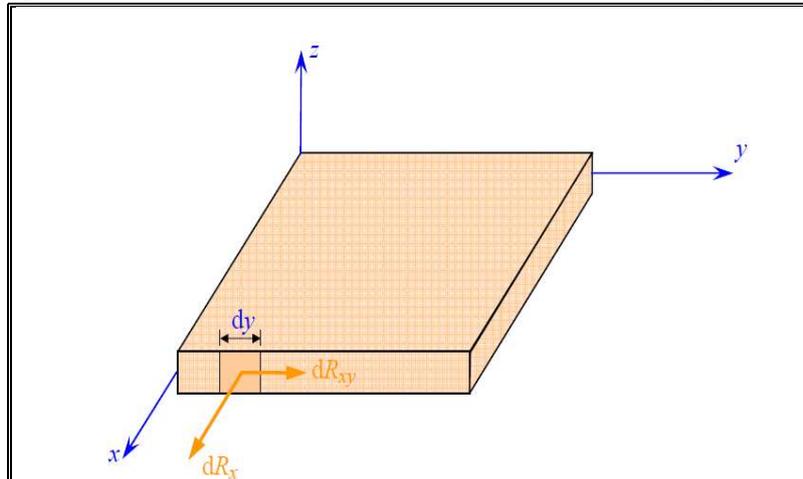


Fig. 2.1 : Résultantes de l'action exercée sur un élément de surface d'un stratifié [5].

Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont donc nulles, soit:

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (1)$$

Cette hypothèse implique, d'après :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3)$$

Le champ des déplacements s'écrit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (4)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (5)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (6)$$

La déformée de la normale au plan moyen  $(o, x, y)$  est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen. L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sur la figure 01.

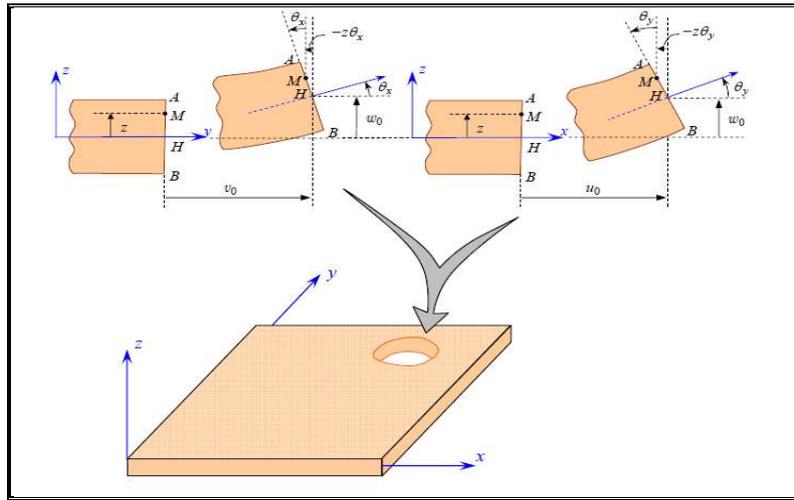


Fig.2.2: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés[5].

### 2.2.2. Expression du champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (10)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (11)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (12)$$

Et en tenant compte des expressions (2) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad (15)$$

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial x_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

Le tenseur des déformations en un point  $M$  est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Le champ des déformations est la superposition :

— *déformations en membrane* :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (19)$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements ( $u_0, v_0$ ) dans le plan ( $oxy$ ) des points de ce plan ;

— *déformations en flexion et torsion* :

$$\varepsilon_x(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (20)$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote  $z$

du point  $M$ . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y) \quad (21)$$

En pose:

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (22)$$

La matrice  $k(x, y)$  est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion. Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point  $H(x, y, 0)$  s'expriment (figure 2) en fonction du déplacement transversal  $w_0(x, y)$  de ce point par :

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ suivant la direction } \quad (23)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ suivant la direction } \vec{j} \quad (24)$$

Le champ des déplacements (3) s'écrit alors :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\theta_y \quad (25)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\theta_x \quad (26)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (27)$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \quad (28)$$

$$\varepsilon[M] = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \quad (29)$$

Ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Avec

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y) \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (31)$$

$$k_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) \quad k_y = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (32)$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\varepsilon[M] = \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + zk(x, y) \quad (33)$$

Les déformations en membrane  $\varepsilon_m(x, y)$  et courbures  $\kappa(x, y)$  ne dépendent que des

coordonnées  $(x, y)$  du point  $H$  du plan moyen du stratifié.

### 2.2.3. Champ des contraintes

#### 2.2.3.1. Forme du champ des contraintes

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Et dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche  $k$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q'_{11}\varepsilon_{xx} + Q'_{12}\varepsilon_{yy} + Q'_{16}\gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} &= Q'_{12}\varepsilon_{xx} + Q'_{22}\varepsilon_{yy} + Q'_{26}\gamma_{xy} \\ \sigma_{xy} &= Q'_{16}\varepsilon_{xx} + Q'_{26}\varepsilon_{yy} + Q'_{66}\gamma_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 0 \\ \sigma_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Le tenseur des contraintes en  $M$  est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$

#### 2.2.3.2. Expression des contraintes

Les relations (19) montrent que les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment suivant:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Avec :

$$Q'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Où  $Q'_k$  est la matrice de rigidité réduite de la couche  $k$  introduite dans la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Et dont les termes sont exprimés en fonction des modules par les relations.

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \quad (40)$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \quad (41)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT}Q_{22} \quad (42)$$

$$Q_{66} = G_{LT} \quad (43)$$

En tenant compte de (35), les contraintes dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Ou

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y) \quad (45)$$

La matrice  $\sigma_k(M)$  représente la matrice des contraintes dans la couche  $k$  :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ . La matrice d'élasticité  $Q'_k$  varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

### 2.2.4. Expression des résultantes et moments

#### 2.2.4.1. Résultantes en membrane

L'expression suivante:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (46)$$

Cette expression est associée à la relation (34) ou (45) conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y)] dz \quad (47)$$

Soit :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[ Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + Q'_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (48)$$

Ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$N(x, y) = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x, y) \quad (49)$$

L'expression précédente de la matrice des résultantes peut finalement s'écrire sous la forme :

$$N(x, y) = A\varepsilon_m(x, y) + Bk(x, y) \quad (50)$$

En introduisant les matrices:

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \quad (51)$$

$$A = [A_{ij}] \text{ avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k \quad (52)$$

Et

$$B = [B_{ij}] \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right]_k \quad (53)$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane ( $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ ) (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion ( $k_x, k_y, k_{xy}$ )

#### 2.2.4.2. Moments de flexion et de torsion

Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (45) des contraintes dans cette expression :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (55)$$

Soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q'_k k(x, y)] dz \quad (56)$$

Ce qui conduit à :

$$M_f(x, y) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] k(x, y) \quad (57)$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$M_f(x, y) = B\varepsilon_m(x, y) + Dk(x, y) \quad (58)$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k$$

$$D = [D_{ij}] \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3)(Q'_k) \quad (59)$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Les moments de flexion et torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

### 2.2.5. Equation du comportement mécanique d'un stratifié

#### 2.2.5.1. Equation constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (54) et (60) suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ k \end{bmatrix} \quad (62)$$

Les termes des matrices introduites **A**, **B** et **D** sont donnés par les expressions (52), (53) et (59). Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur  $e_k$  et la cote  $z_k$  du centre de la couche  $k$ , sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \quad (63)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k \quad (64)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad (65)$$

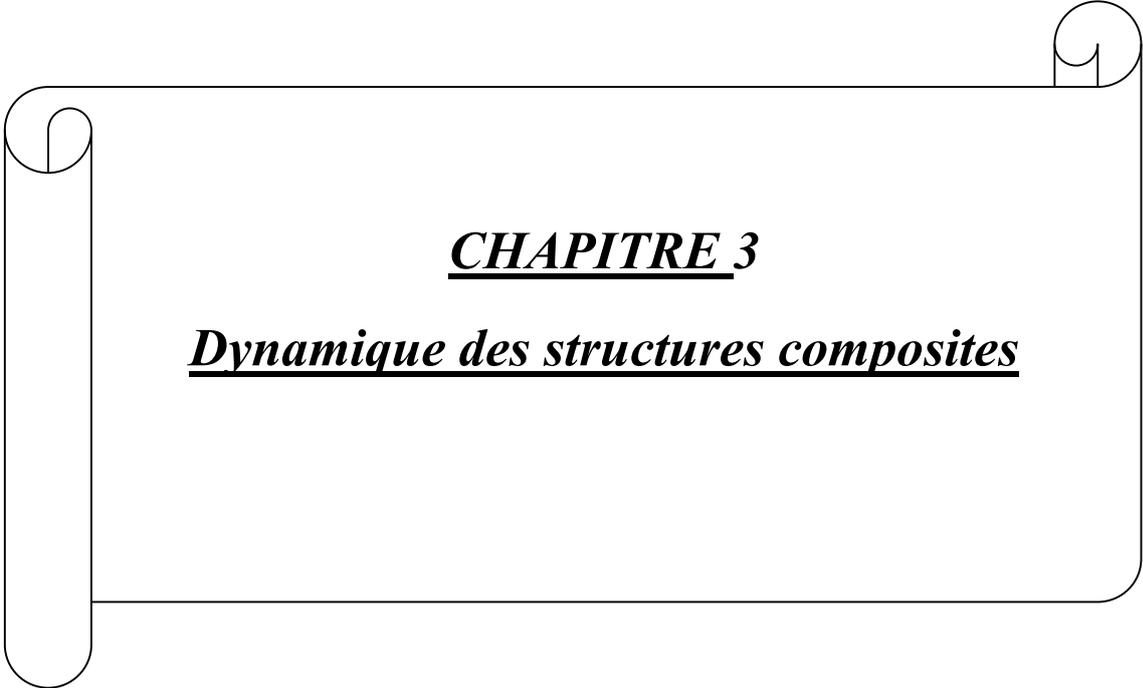
Les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  de l'équation constitutive (29 – 35') d'un stratifié s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues, pour chaque couche,

#### 2.2.5.2. Matrice d'élasticité

La matrice intervenant dans l'expression (61) est la matrice de rigidité réduite du stratifié, décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point

$$M_0(x, y) = M(x, y, 0).$$

La matrice **A** est la *matrice de rigidité en membrane*, **D** est la *matrice de rigidité en flexion* et **B** la *matrice de couplage membrane-flexion-torsion*. Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes. Le couplage est nul (**B** = 0), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une symétrie des propriétés des couches, de leurs cotes et de leurs orientations. Le couplage traction-cisaillement provient des termes  $A_{11}$  et  $A_{26}$ . Le couplage membrane-flexion résulte des termes  $B_{11}$ ,  $B_{12}$  et  $B_{22}$ , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes  $B_{16}$  et  $B_{26}$ . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients  $D_{16}$  et  $D_{26}$ .



**CHAPITRE 3**

***Dynamique des structures composites***

### 3.1. Introduction

Historiquement parlant, les premières études sur les structures sandwichs à cœur viscoélastiques ont été entreprises vers les années 1959 par Kerwin et Ross. Ils ont considéré une poutre de base sur montée d'une couche viscoélastique pour l'amortissement et d'une couche précontrainte. Pour la poutre en appui simple, ils considèrent un amortissement faible pour la couche viscoélastique et la rigidité en flexion de la couche précontrainte est supposée négligeable par rapport à celle de la structure de base. Ainsi, en considérant les effets de membrane dans les trois couches et l'effet de cisaillement uniquement dans la couche centrale, ils remplacent par analogie dans l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 du mouvement transversal des poutres les rigidités réelles par les rigidités complexes équivalentes :

$$B^* = B_0(1 + i\eta) \quad (1)$$

Puis établissent une expression analytique relativement simple du facteur de perte en fonction des caractéristiques de la structure.

Par suite, Ungar en se basant sur les travaux de Kerwin et Ross s'intéresse à établir l'expression générale du facteur de perte des structures composites en fonction des facteurs de perte en traction et en cisaillement des sous-structures constitutives. Il applique son étude au cas pratique des poutres sandwichs trois couches à cœur viscoélastique pour établir l'expression du facteur de perte en fonction des propriétés de chaque couche ou il considère négligeables les facteurs de perte dans les couches élastiques et la rigidité de la couche viscoélastique.

Pour améliorer l'approche analogique de Kerwin et Ross dont l'analyse ne reposait que sur les équations classiques de mouvement des poutres, Yu propose une approche basée sur l'élaboration des équations du mouvement adaptées aux structures sandwichs. Ainsi, il effectue une reformulation générale du problème dans le cas bidimensionnel puis établit une équation différentielle d'ordre 4 relative à la flèche et régissant le mouvement des sandwichs en utilisant la théorie des plaques. Dans son analyse, les effets d'inertie et le cisaillement sont pris en compte dans chaque couche et il ne fait aucune restriction sur le rapport entre les densités, les modules et les épaisseurs des trois couches. Ce qui rend sa théorie applicable aux sandwichs trois couches symétriques [13].

Di Taranto s'intéresse à la description du mouvement des poutres sandwichs en vibration libre soumises à des conditions aux limites arbitraires. Il utilise les hypothèses de base de Kerwin puis établit une équation différentielle complexe d'ordre 6 sur le déplacement longitudinal du plan moyen des couches élastique externes lui permettant de définir indépendamment des conditions aux limites la pulsation propre complexe de la structure sous la forme générale :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \quad (2)$$

Il conclut que la relation entre le facteur de perte et la pulsation amortie ne dépend pas des conditions aux limites mais plutôt de la géométrie et des propriétés de la structure.

En adoptant la même méthodologie que Di Taranto, Mead et Markus [42] établissent une équation différentielle d'ordre 6 mais plutôt relative à la flèche. En considérant un chargement harmonique relatif aux modes normaux, ils montrent à l'issue de cette équation différentielle relative à la flèche que la pulsation complexe définie par la formule de Di Taranto est obtenue non pas en vibration libre mais plutôt grâce à une forme particulière

de vibration forcée pour laquelle le chargement est harmonique et parallèle aux modes normaux de la structure amortie. Ils ont établi des équations auxquelles obéit la flèche selon diverses conditions aux limites. En combinant l'équation différentielle de mouvement avec les équations de conditions aux limites, Mead et Markus dans leur travaux suivants [43] se sont intéressés à déterminer l'équation caractéristique dont les solutions permettent d'estimer les propriétés amortissant (pulsation amortie et facteur de perte). Les solutions sont alors cherchées à l'aide d'une méthode itérative qui est une sorte de méthode de Newton-Raphson modifiée avec correction à chaque pas. Ils proposent ensuite une méthode approchée pour estimer la pulsation amortie et le facteur de perte pour un sandwich encastré à ses deux extrémités et une méthode exacte pour un sandwich en appui simple. En effectuant des études paramétriques pour les deux cas de conditions aux limites, ils montrent l'influence des propriétés du sandwich et des conditions aux limites sur la pulsation amortie et le facteur de perte, d'où ils contredirent l'assertion de DiTaranto selon laquelle la pulsation amortie et le facteur de perte ne dépendraient que des propriétés physiques et non des conditions aux limites.[13]

Yan et Dowell s'intéressent à établir une forme simplifiée de l'équation différentielle du mouvement des poutres et plaques sandwichs asymétriques constituées de matériaux homogènes, linéaires et isotropes. Ils considèrent l'hypothèse de contrainte plane, la continuité du champ de déplacement et de la contrainte de cisaillement aux interfaces.

La différence entre les 2 approches provient de la prise en compte du cisaillement:

- Yan et Dowell supposent une distribution uniforme des contraintes de cisaillements tel on l'épaisseur du sandwich.
- D.T.M.M.( DiTaranto, Mead, Markus) obtiennent une distribution parabolique des contraintes de cisaillement mais non continue aux interfaces.[14]

En appliquant le principe des travaux virtuels, l'équation dynamique obtenue pour les poutres est d'ordre 4 et relative à la flèche grâce à la simplification introduite sur la rigidité du cœur supposée faible par rapport celle des peaux. Ils déduisent les relations associées à diverses conditions aux limites. La fréquence de résonance et le facteur de perte prédits par leur équation sont similaires à ceux obtenus par les équations de Mead et Markus mais observent une différence de 5% sur la fréquence de résonance et 19% sur le facteur de perte par comparaison des résultats expérimentaux issus des essais sur une poutre en appui simple. Rao et Nakra effectuent une étude des poutres et plaques sandwichs asymétriques mais en prenant en compte en plus de l'inertie transversale, les inerties longitudinale et rotationnelle. Ils montrent l'apport des effets d'inertie longitudinale et rotationnelle sur la réponse forcée de la structure sandwich soumise à une excitation harmonique.

Ovasky et al. Proposent une méthode approchée pour le calcul des fréquences propres et des facteurs de perte des sandwichs. Cette méthode est une technique de perturbation qui consiste à linéariser les équations des poutres sandwichs amorties autour de celles de poutres sandwichs non amorties (facteur de perte du cœur nul). Cette méthode est appliquée pour déterminer de façon approchée les propriétés amortissant pour une poutre sandwich encastrée-libre.

Afin de fournir une base de données pour une conception optimisée des structures sandwichs, Rao a mené une étude paramétrique pour déterminer les caractéristiques des sandwichs en termes de masse, propriétés mécaniques, dimensions, conditions aux limites qui donneraient une valeur maximale pour le facteur de perte de la structure. Il utilise une approche énergétique et le principe de Hamilton pour établir les équations différentielles de mouvement des poutres sandwichs relatives au déplacement longitudinal et au déplacement transversal. L'équation relative à la flèche est résolue de façon exacte et il en déduit pour diverses conditions aux limites symétriques et non symétriques une expression analytique du

facteur de perte et de la pulsation amortie en fonction des propriétés mécaniques et géométriques de la poutre sandwich.

Mead compare les théories de vibration des sandwichs établies par Yan et Dowell, DiTaranto et Mead et Markus et déduit que l'équation différentielle du mouvement relative à la flèche est d'ordre 4 ou 6 selon l'hypothèse sur le cisaillement.

En incluant le cisaillement dans les faces et en prenant en compte les effets d'inertie longitudinale, l'équation du mouvement demeure d'ordre 6 pour un sandwich symétrique mais passe à l'ordre 8 pour un sandwich asymétrique.

He et Ma présentent des équations simplifiées gouvernant les vibrations transversales des plaques sandwichs asymétriques. Pour parvenir à cette forme simplifiée, ils supposent dans leur analyse que les matériaux des faces ont des coefficients de Poisson voisins et que les effets d'inertie plane étaient négligeables. En utilisant la formulation énergétique et le principe de Hamilton, les équations différentielles relatives aux déplacements longitudinaux sont d'ordre 4 dans le plan et l'équation différentielle relative à la flèche est d'ordre 8 dans le plan. Ils établissent ensuite les équations associées aux différentes conditions aux limites. En utilisant la méthode de perturbation initialement proposée par Ovarsky, ils effectuent un développement asymptotique des inconnues intervenant dans l'équation différentielle relative à la flèche. En résolvant les systèmes linéaires résultant au regard des conditions aux limites et d'orthogonalité des modes propres, ils obtiennent les termes asymptotiques pour la pulsation amortie et le facteur de perte. Pour un développement asymptotique au premier ordre, ils montrent que l'approche est similaire à la méthode d'énergie de déformation modale. Ainsi un développement d'ordre élevé permet d'augmenter la précision de la méthode.

Au regard des différents travaux analytiques, on peut répertorier les hypothèses communes suivantes :

- le sandwich est constitué de matériaux homogènes, linéaires et isotropes ;
- les faces sont purement élastiques et ne supportent pas de déformation de cisaillement alors que le cœur est viscoélastique non vieillissant et se déforme principalement en cisaillement. Son module d'Young ou de cisaillement est supposé complexe et constant, donc ne dépendant pas de la fréquence ;
- la linéarité au sens géométrique du champ de déformation est admise, les études sont alors faites dans l'hypothèse des petites perturbations ;
- les inerties longitudinales et rotationnelles sont négligeables vis-à-vis des inerties transversales de flexion ;
- tous les points sur une normale à la poutre ou à la plaque ont le même déplacement transverse.
- aucun glissement entre les couches n'est permis, assurant ainsi la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peaux [15].

### **3.2. Théorème d'énergie [5]**

#### **3.2.1. Variation d'une fonctionnelle**

D'une manière générale, une fonctionnelle  $F$  peut être définie comme étant une fonction d'un ensemble de fonctions :  $u(x, y, \dots)$ ,  $v(x, y, \dots)$ , et de leurs dérivées par rapport à l'ensemble des variables  $(x, y, \dots)$ , soit :

$$F = \left( u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \dots \dots v, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \dots \dots \right) \quad (3)$$

La première variation de  $F$  est définie par :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \dots \quad (4)$$

Ou  $\delta u, \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \dots \dots \delta v, \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right), \delta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \dots$  sont des variations quelconques des fonctions  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \dots, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \dots$

La dérivée  $\frac{\partial F}{\partial u}$  est obtenue par dérivation formelle de  $F$  par rapport à la variable  $u$ .

La dérivée  $\frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)}$  est obtenue par dérivation formelle de  $F$  par rapport à la variable  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Il en est de même des autres dérivées. L'opérateur  $\delta$  a les propriétés de l'opérateur variation d'usuel.

#### **3.2.2. Théorème des travaux virtuels**

Nous revenons au problème de la mécanique, en nous limitant pour l'instant à un problème de statique. Soit  $\vec{u}(M)$  le champ des déplacements solution du problème qui s'écrit dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{u}(M) = u_i \vec{e}_i \quad (5)$$

Considérons maintenant le champ des déplacements obtenu en prenant la première variation de  $u$  :

$$\vec{\delta u}(M) = \delta u_i \vec{e}_i \quad (6)$$

Et tel que ce champ vérifie les conditions imposées sur la frontière  $(S)$ ; soit :

$$\vec{\delta u} = 0, \quad \text{ou } \delta u_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{sur } (S_u)$$

Puisque les déplacements sont imposés sur  $(S_u)$ . Ce champ est appelé champ des déplacements *virtuels*. Calculons alors le travail effectué lors de ce déplacement, travail appelé *travail virtuel*

Le travail des forces surfaciques se réduit à :

$$\delta W_s = \int \vec{t} \cdot \vec{\delta u} ds = \int_{S_\sigma} \vec{t} \cdot \vec{\delta u} ds \quad (7)$$

Soit:

$$\delta W_s = \int_{s_\sigma} t_i \delta u_i ds = \int_{s_\sigma} \sigma_{ij} n_{ij} \delta u_i ds \quad (8)$$

Le travail des forces volumiques s'écrit :

$$\delta W_v = \int_v \vec{f} \cdot \vec{\delta u} dV = \int_v f_i \cdot \delta u_i dV \quad (9)$$

Ou en tenant compte dans le cas d'un problème statique :

$$\delta W_v = \int_v \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \cdot \delta u_i dV \quad (10)$$

En remarque que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \delta u_i + \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i \quad (11)$$

La relation (9) s'écrit:

$$\delta W_v = \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i dV - \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) dV \quad (11)$$

La deuxième intégrale peut être transformée en une intégrale de surface à l'aide de la relation de Gauss, ce qui conduit à :

$$\delta W_v = \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i dV - \int_s \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \quad (12)$$

En tenant compte de (8), nous obtenons :

$$\delta W_v = \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i dV - \int_{s_\sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \quad (13)$$

Les relations (12) et (13) montrent que la variation totale  $\delta W$  du travail des forces volumiques et surfaciques exercées (travail virtuel) s'écrit finalement :

$$\delta W = \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i dV \quad (14)$$

Avec:

$$\delta W = \delta W_s + \delta W_v = \int_{s_\sigma} \vec{t} \vec{\delta u} dS + \int_v \vec{f} \vec{\delta u} dV \quad (15)$$

La relation (15) traduit sous sa forme la plus générale le théorème dit des travaux virtuels pour un ensemble déformable.

Dans le cas de l'hypothèse des petites déformations, et en tenant compte des symétries de  $\sigma_{ij}$  et  $\epsilon_{ij}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i + \sigma_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j &= \sigma_{ij} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (16) \\ &= 2\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \end{aligned}$$

Et la relation (14) s'écrit :

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (17)$$

L'écriture de cette relation peut être transformée dans le cas où  $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$  peut s'exprimer comme la variation d'une fonction  $\delta U_d(\varepsilon_{ij})$  des déformations :

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \delta U_d \quad (18)$$

La fonction  $U_d$  est l'énergie de déformation par unité de volume. Elle peut également être interprétée comme la fonction de contrainte du champ des contraintes, suivant la relation :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u_d}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (19)$$

Puisque:

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_d}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \delta U_d \quad (20)$$

L'intégrale de volume s'écrit alors :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta U_d dV = \delta \int_V U_d dV = \delta U_d \quad (21)$$

En pose:

$$U_d = \int_V u_d dV \quad (22)$$

Où  $U_d$  est l'énergie de déformation totale. Le théorème (17) s'écrit dans ce cas :

$$\delta W = \delta U_d \quad (23)$$

Le travail virtuel est égal à la variation de l'énergie de déformation totale.

Généralement, cette dernière forme du théorème des travaux virtuels s'écrit sous la forme équivalente :

$$\delta U_d = 0 \quad (24)$$

En introduisant l'énergie potentielle totale :

$$U = U_d - W \quad (25)$$

Le théorème des travaux virtuels équivaut sous cette forme à rendre stationnaire (extrémale) la fonctionnelle énergie potentielle totale.

Pour un matériau ayant un comportement élastique linéaire, l'énergie de déformation est définie par:

$$\sigma_i = \frac{\partial U_d}{\partial \varepsilon_i} = c_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1.2.3.4.5.6 \quad (26)$$

En utilisant, pour les contraintes et déformations, la notation matricielle à un seul indice. Nous en déduisons que  $u_d$  est une forme quadratique linéaire et symétrique des déformations (puisque  $C_{ij} = C_{ji}$ ), qui s'écrit à une constante près :

$$U_d(\varepsilon_i) = \frac{1}{2} c_{ij} \varepsilon_j \varepsilon_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_j \quad i, j = 1.2.3.4.5.6 \quad (27)$$

Ou sous la forme de la notation tensorielle à deux indices :

$$U_d(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (28)$$

L'énergie totale de déformation s'écrit alors :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (29)$$

### **3.3. Formulation énergétique de la théorie des stratifiés [16]**

#### **3.3.1. Introduction**

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche de solutions approchées du comportement mécanique des stratifiés. Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse du comportement mécanique des stratifiés à l'aide des éléments finis.

#### **3.3.2. Énergie de déformation d'un stratifié**

L'énergie de déformation (29) d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant:

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (30)$$

Où l'intégration est étendue à l'ensemble du volume du solide. En tenant compte des hypothèses de la théorie des stratifiés:  $\sigma_{zz} = 0$  et  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  et des relations (3,39) exprimant les contraintes en fonction des déformations, l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (Q_{11}^k \varepsilon_{xx} + Q_{22}^k \varepsilon_{yy} + Q_{66}^k \varepsilon_{zz} + 2Q_{12}^k \gamma_{yz} + 2Q_{16}^k \gamma_{xz} + 2Q_{26}^k \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (31)$$

Cette relation peut être exprimée en fonction des déplacements  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ , en introduisant dans l'expression précédente les relations déformations-déplacements (39) et (41), établies au chapitre 02. En intégrant ensuite en  $z$  suivant l'épaisseur du stratifié, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 U_d = \frac{1}{2} \iint \left\{ & A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 & - 2B_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - B_{22} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 & - 2B_{16} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\
 & - 2B_{26} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] - 4B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
 & + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \\
 & \left. + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (32)
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, l'intégration doit se faire dans le plan de la plaque du matériau stratifié. Cette expression introduit les coefficients de rigidité  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  exprimés respectivement par les relations (2,52), (2,53) et (2,59).

L'expression de l'énergie de déformation fait apparaître une énergie de déformation en membrane introduite par les coefficients de rigidité en membrane  $A_{ij}$  et une énergie de déformation en flexion associée aux coefficients de rigidité en flexion  $D_{ij}$ . L'expression de l'énergie de déformation contient également des termes de couplage entre les déplacements en membrane  $u_0$ ,  $v_0$  et les déplacements transverses  $w_0$ . Ces termes de couplage sont introduits, comme dans le cas des relations fondamentales, par la présence des coefficients de rigidité  $B_{ij}$ . Dans le cas de stratifiés symétriques, les termes  $B_{ij}$  de couplage membrane-flexion sont nuls, et l'expression (32) de l'énergie de déformation se réduit suivant :

$$\begin{aligned}
 U_d = \frac{1}{2} \iint \left[ & A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (33)
 \end{aligned}$$

L'énergie de déformation apparaît comme la somme de deux termes : l'une fonction uniquement des déplacements  $u_0$  et  $v_0$  de membrane, l'autre fonction uniquement des déplacements transverses  $w_0$ . Dans le cas des problèmes de flexion pure, le premier terme est réduit à une constante  $C$ , et l'énergie de déformation s'écrit suivant :

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C \quad (44)$$

De plus, si le stratifié est tel que  $D_{16} = D_{26} = 0$  (stratifié orthotrope d'axes confondus avec les axes  $x$  et  $y$ ), l'énergie de déformation est encore simplifiée selon :

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C \quad (45)$$

### 3.3.3. Énergie cinétique d'un stratifié

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (46)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique en un point et l'intégration est étendue à l'ensemble du solide.

Dans le cas de la théorie classique des stratifiés, le champ des déplacements (3), (4), (5) s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned}$$

Où  $w_0$  est indépendant de  $z$ . En substituant ces relations dans l'expression (16.39), l'énergie cinétique du stratifié s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (47)$$

En négligeant les dérivées par rapport au temps des rotations (négligeant donc les termes d'inertie de rotation), puis en intégrant en  $z$  suivant l'épaisseur, l'énergie cinétique du stratifié se réduit à :

$$E_c = \frac{1}{2} \iint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (48)$$

En introduisant la masse surfacique  $\rho$  du stratifié au point  $(x, y)$ .

### 3.3.4. Travail des actions exercées sur le stratifié

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges transverses exercées sur les faces inférieure et supérieure du stratifié. La variation du travail de ces actions s'écrit :

$$\delta W_f = \iint \left[ \sigma_{zz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] \delta w_0 dx dy \quad (49)$$

Soit en introduisant les charges (forces)  $q$  définies en :

$$\delta W_f = \iint q \delta w_0 dx dy \quad (50)$$

La fonction énergie  $W_f$  s'écrit donc :

$$W_f = \iint q w_0 dx dy \quad (51)$$

### 3.3.4. Résolution du système dynamique

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes limités au cas d'un problème statique. Dans le cas d'un ensemble déformable en mouvement, l'expression (8.34) du travail des forces volumiques est modifiée, conformément à la relation (8.12).

En reprenant les résultats établis précédemment, nous trouvons aisément que le travail des forces volumiques et surfaciques s'exprime suivant :

$$\delta W = \delta W_V + \delta W_S = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV \quad (52)$$

Pour faire apparaître une fonctionnelle, la relation précédente est intégrée entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , tels que les variations  $\delta u_i$  satisfassent aux conditions aux limites :

$$\delta u_i = 0 \text{ sur } (S_u) \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t_2$$

En intégrant par parties, on montre que :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV dt = -\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} E_c dt \right] \quad (53)$$

Où  $E_c$  est l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \quad i = 1.2.3 \quad (54)$$

L'intégration entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  de la relation (53) conduit finalement à :

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} (E_c + W) dt \right] = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV dt \quad (55)$$

Cette relation constitue l'expression variationnelle sous sa forme la plus générale, du mouvement d'un ensemble déformable.

L'intégrale  $\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$  représente l'énergie mise en jeu lors de la déformation. Son expression dépend de la loi de comportement du matériau, loi qui fait éventuellement intervenir le temps. Dans le cas où il existe une fonction énergie de déformation (45), la relation (55) s'écrit sous la forme :

$$\delta \left[ \int_{t_2}^{t_1} (E_c + W - U_d) dt \right] = 0 \quad (56)$$

Généralement, cette relation est écrite sous la forme :

$$\delta \left[ \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L} dt \right] = 0 \quad (57)$$

En introduisant le Lagrangien:

$$\mathcal{L} = E_c + W - U_d = E_c - U \quad (58)$$

La relation (57) constitue la formulation variationnelle du problème du mouvement d'un corps

déformable [5].

L'équation du mouvement de la plaque en vibration libre peut être obtenue du principe de Hamilton, lequel est une généralisation de principe des déplacements dans la dynamique des corps déformables, l'équation différentielle d'équilibre du mouvement est obtenue en utilisant le principe de Hamilton comme suit :

$$\delta \left[ \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L} dt \right] = \delta \int_{t_2}^{t_1} (E_c - U) dt = 0 \quad (59)$$

Où  $\delta$ : est l'opérateur variationnel,  $L$  : est la fonction de Lagrange de la plaque,  $t_1$  et  $t_2$  sont les bornes artichautières du temps.  $E_c$  est l'énergie cinétique,  $U$  est l'énergie potentielle les équations de Lagrange deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{u}_i\}_e} \right] - \frac{\partial E_c}{\partial \{u_i\}_e} + \frac{\partial U}{\partial \{u_i\}_e} = 0 \quad (60)$$

Où  $\{\partial u_i\}$  et  $\{\partial \dot{u}_i\}$  sont les vecteurs de déplacement et vitesses des coordonnées généralisées pour l'analyse de la vibration libre, les équations différentielles pour une plaque isotrope s'écrit :

$$[[K] - \omega^2 [M]]\{w\} = \{0\} \quad (61)$$

Où :

$[k]$ : Matrice rigidité globale de la rigidité obtenue par assemblage les matrices élémentaires.

$[M]$ : Matrice masse rigidité obtenue par assemblage élémentaire.

$\{w\}$  : le vecteur global de déplacements.

Pré multiplions cette équation (61) par  $[m]^{-1}$  on obtient:

$$[[K][M]^{-1} - \omega^2 [M][M]^{-1}]\{w\} = \{0\} \quad (62)$$

On appelle noyau du système le produit

$$[A] = [K][M]^{-1} \quad (63)$$

On recherche donc, pour le vecteur de déplacement, une solution du type

$$\{w\}(t) = Q \cos(\omega t - \varphi) \quad (64)$$

Il vient, par introduction dans (4)

$$[[A] - \omega^2 [I]] Q \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (65)$$

En adoptant la convention d'écriture  $\lambda = \omega^2$

On obtient, après simplification par  $\cos(\omega t - \varphi)$

$$[[A] - \lambda [I]] Q = 0 \quad (66)$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes qui admet des solutions non nulles si son déterminant est nul

$$\det([A] - \lambda [I]) = 0 \quad (67)$$

Après développement

$$\begin{bmatrix} [a_{11} - \lambda] & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nn} - \lambda] \end{bmatrix} = 0 \quad (68)$$

Les scalaires  $\lambda = \omega^2$  sont ainsi les valeurs propres de la matrice noyau  $[A]$ . Cette équation est appelée équation aux pulsations propres du système oscillant, l'équation caractéristique, est de la forme :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (69)$$

En classant ces solutions par ordre croissant on peut écrire

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p < \dots < \lambda_n \quad (70)$$

Soit, en revenant aux pulsations propres

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_p < \dots < \omega_n \quad (71)$$

A chaque pulsation propre  $\omega_p$  correspond une solution particulière du système différentiel[17].

**CHAPITRE 4**  
**Modélisation des structures composites**  
**sandwiches par la M.E.F**

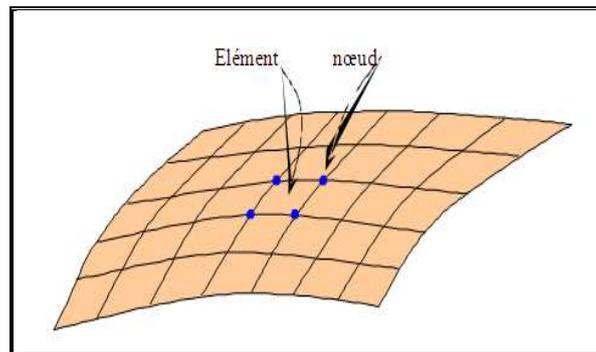
## 4.1. Méthode des éléments finis

### 4.1.1. Présentation de la méthode des éléments finis

#### 4.1.1.1. Introduction

Si la structure présente un comportement trop complexe ou un système continu défini par un nombre infini de paramètres, il devient très difficile d'analyser ou de trouver la solution analytiquement. Cependant, la méthode des éléments finis pousse la possibilité de trouver la solution la plus parfaite possible, en remplaçant le système continu par un système discret, caractérisé par un nombre fini de paramètres [5].

Alors la MEF base sur une idée simple: subdiviser (**discrétiser**) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de formes géométriques simples (**éléments finis**) interconnectés en des points appelés **nœuds** [18].



**Fig.4.1 : Découpage d'une structure par des éléments finis [5].**

L'analyse du comportement d'une structure par la méthode des éléments finis consiste à découper (mailler ou discrétiser) la structure considérée en éléments (**Fig.4.1**) et à établir aux nœuds du maillage les relations force-déplacement, en tenant compte des conditions de charges et d'appuis imposées à la structure. On obtient alors un système d'équations linéaires de grande dimension, dont la résolution numérique conduit à la valeur du déplacement en chacun des nœuds. Le champ des contraintes est ensuite déterminé à partir du champ des déplacements.

Pour définir "géométriquement" ces petits supports (les mailles), on est donc amené à subdiviser □ en petits morceaux polygonaux en faisant attention de ne créer *ni de recouvrement ni de trou*, ce qui donne une *discrétisation* ou un *maillage*. De manière plus précise, un maillage est un ensemble des sous-domaines fermés de formes géométriques polygonales [18].

#### 4.1.1.2. Etapes suivies pour le calcul du comportement mécanique des structures par la méthode des éléments finis

Les principales étapes de la méthode des éléments finis sont :

- A. La géométrie est décomposée en domaines de formes géométriques simples. Les éléments sont reliés entre eux en des points appelés (*nœuds*). Élémentairement, il peut être un élément *barre* ou *poutre*.
- B. Le champ de déplacements dans chaque élément est défini en fonction des déplacements des nœuds de l'élément ainsi que l'énergie de *déformation* et sa *matrice de rigidité*.
- C. La *matrice de rigidité globale* est construite à partir des matrices de *rigidité élémentaires*.
- D. Après la mise en place des *conditions aux limites* et des *charges*, on calcule les déplacements inconnus dans chaque nœud, les déformations et les *contraintes* dans chaque élément.

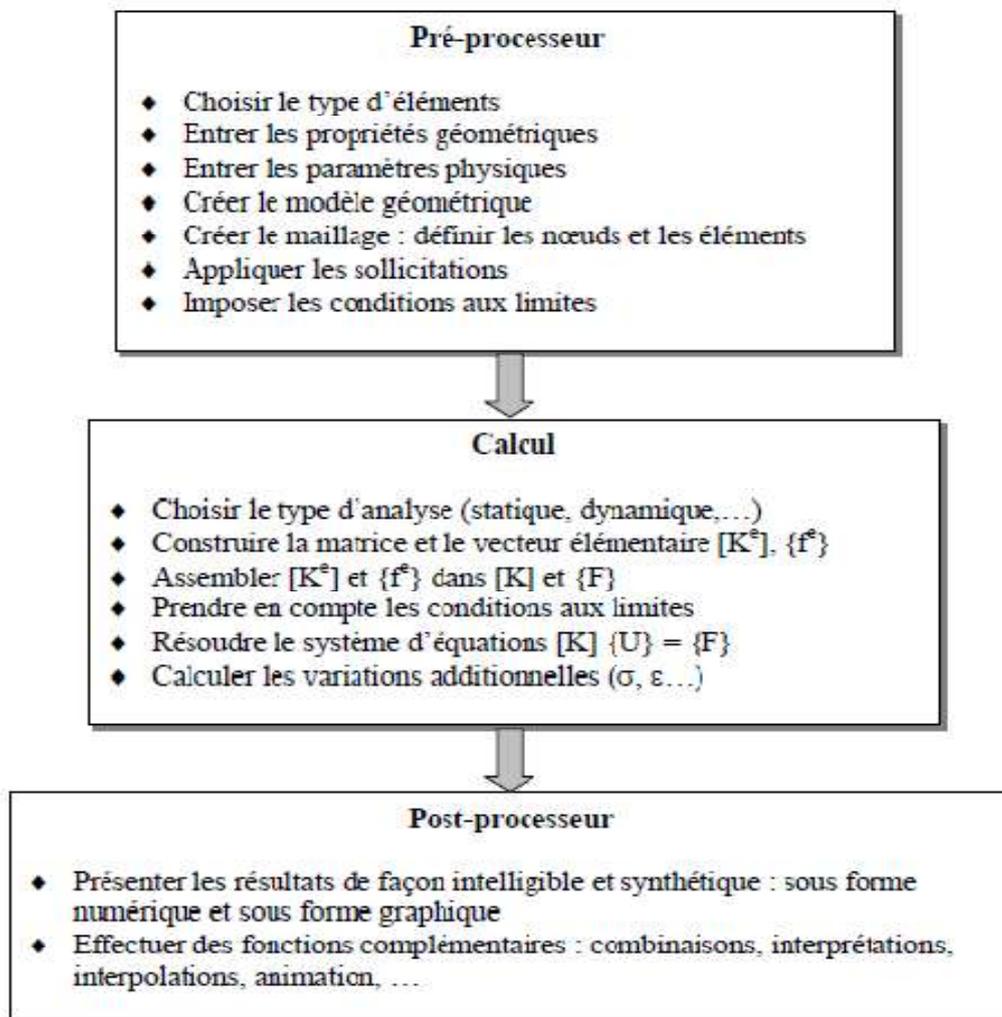


Fig.4.2 : Etapes suivies pour étudier les comportements mécaniques des structures par la méthode des éléments finis [18]

#### 4.1.1.3. Classement d'éléments finis [17]

- Les éléments unidimensionnels : barre, poutres
- les éléments bidimensionnels : élément plan, plaques, coques.

- les éléments tridimensionnels : tores à sections triangulaire ou rectangulaire

**4.1.1.4. les attributs d'un élément fini**

Le découpage en *éléments finis* permet d'isoler un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques.

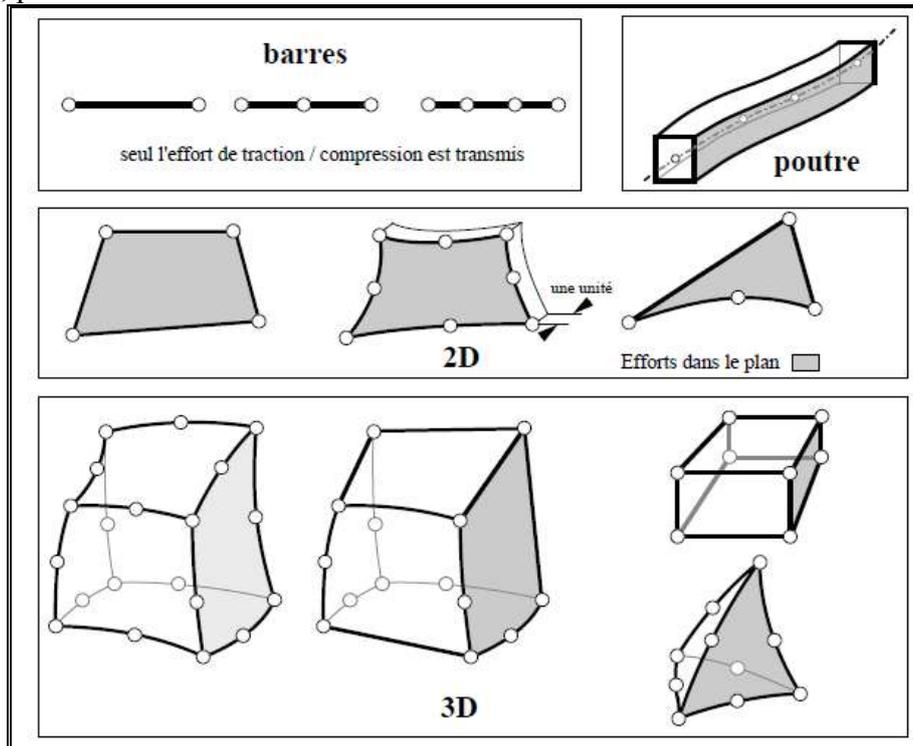
**4.1.1.4.1. Signalement d'un élément fini**

Le signalement d'un élément fini comprend les points suivants :

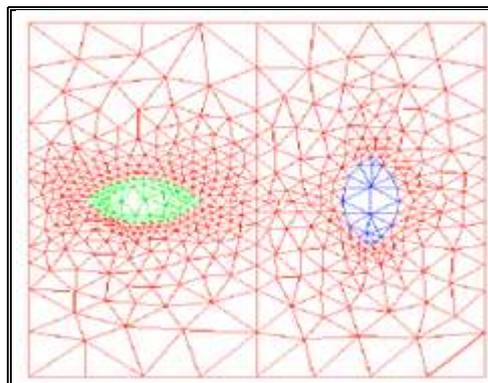
**A. Géométrie**

Un élément fini peut être 1D, 2D ou 3D sa forme est simple.

- Segment d'une droite ou de courbe (plan ou courbe)
- Triangle ou quadrilatère
- Tétraèdre, prisme ou hexaèdre



**Fig.4.3 : schéma des types d'éléments [18]**



**Fig.4.4 : Exemple d'un maillage en élément fini triangulaire [19]**

**B. Les frontières**

- Les points (extrémités du segment)
- Des segments de droite ou de courbe.
- Des faces planes ou courbes

**C. Le matériau**

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope et ses propriétés mécaniques  $E$  et  $\gamma$  etc....)

**D. Les nœuds**

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres, ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces...etc.

**E. Les forces nodales**

A travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, Les unes sont les réactions internes, les autres les forces  $F$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température ...)

**F. Les degrés de liberté**

Pour tout *élément fini*, on doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en générale le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds valeurs qui deviennent les inconnues nodaux. L'union par leurs degrés de liberté nodaux communs permet de reconstituer, pièce par pièce, la solution complète (ASSEMBLAGE).

Le signalement précédent permet de construire les deux caractéristiques d'un élément fini qui sont :

- sa matrice de rigidité  $K$
- Son vecteur force  $F$

**4.1.1.5. Modélisation d'un problème mécanique sous Abaqus**

Notre calcul est fait par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel Abaqus, il utilise la même méthode pour le calcul des différentes structures. Abaqus est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978 qui traite plusieurs domaines.

Pour les applications courantes, la modélisation d'un problème mécanique sous Abaqus peut distinguer aux phases suivantes :

**Phase 1** : définition de domaine étudié.

**Phase 2** : Propriétés des matériaux (mécanique, physique, thermique) [21].

**a. Domaines physiques**

- Mécanique
- Thermique
- électriques (pièzo et thermique)
- Problèmes couplés

**b. Problèmes étudiés**

- Statique et dynamique
- Linéaires et non linéaires

Mots-clés	Fonction	Ligne	Arguments/Type(1)
SOLID SECTION	Définition de l'épaisseur T d'un élément de type solide (2D).	1 2	*SOLID SECTION, ELSET=, MATERIAL= T / R
BEAM SECTION	Définition de la géométrie de la section d'un élément de type poutre.	1 2	*BEAM SECTION, ELSET, MATERIAL=, SECTION=(RECT, BOX, CIR, PIPE) (3) / R
SHELL SECTION	Définition de la géométrie de la section d'un élément de type coque.	1 2	*SHELL SECTION, ELSET=, MATERIAL= T, NI / R, I
MATERIAL	Définition d'un nom pour les propriétés de matériau définies ci-après.	1	*MATERIAL, NAME=
ELASTIC	Définition des propriétés E, NU d'un matériau élastique isotrope.	1 2	*ELASTIC E, NU / R, R
EXPANSION	Coefficient de dilatation linéaire $\alpha$ d'un matériau.	1 2	*EXPANSION $\alpha$ / R
DENSITY	Densité D d'un matériau.	1 2	*DENSITY D / R
CONDUCTIVITY	Coefficient de conduction k d'un matériau.	1 2	*CONDUCTIVITY k / R
SPECIFIC HEAT	Capacité calorifique Cp d'un matériau.	1 2	*SPECIFIC HEAT Cp / R

Tab.4.1 : Mots clés des propriétés des matériaux (mécanique, physique) utilisées sous Abaqus [20].

**Phase3:** Conditions aux limites.

**Phase 4:** Génération du maillage (chargement, nœuds, éléments).

**Types et choix des éléments**

Abaqus est un Logiciel qui contient plusieurs types d'éléments de maillage qui sont classifiés dans des différentes familles d'éléments de maillage comme présentées sur la figure suivante :

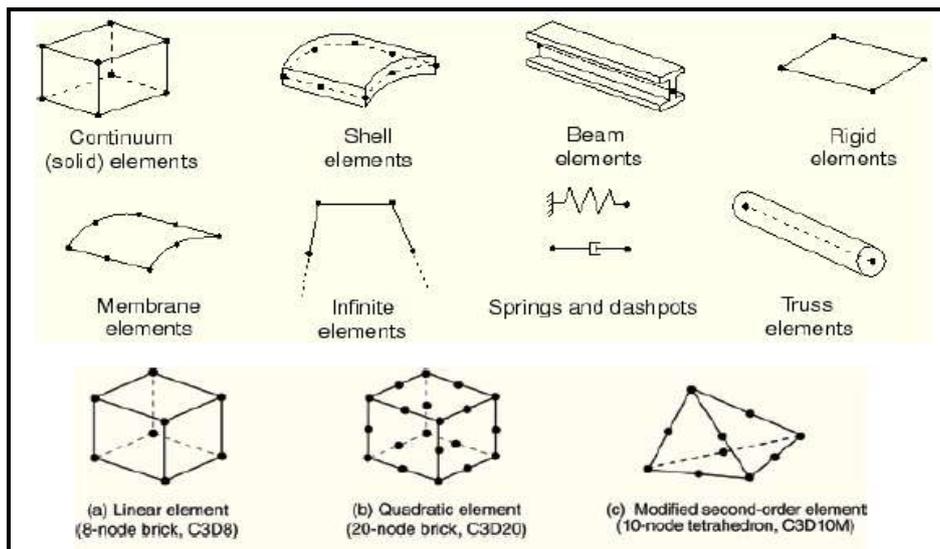


Fig.4.5 : Quelques exemples d'éléments issus de la librairie d'Abaqus [21].

**Phase 5 :** Etape de calcul (calcul et affichage des résultats)

#### 4.1.1.6. Etudes vibratoires sur les structures composites sandwiches

Les poutres sont des structures élancées, le rapport de leur dimensions (largeur /longueur) est supérieure à 0.1. L'importance de développement d'une stratégie d'analyse sur le comportement en flexion des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme élément de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux [39].



**Fig.4.6: structure sandwichée à cœur viscoélastique [49].**

Depuis les années cinquante les études sur la vibration des plaques ou des poutres sandwiches se sont développées. Kerwin présenta la première analyse du problème. Il fut suivi par Yu, Mead, DiTaranto, Yim, Kelly et Barry et Mead et Markus. Leurs études, excepté celle de Yu, sont basées sur les mêmes hypothèses [14]:

- a.** Le polymère est considéré viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope.
- b.** Les caractéristiques de l'acier sont élastiques isotropes et ne subissent pas de déformation de cisaillement.
- c.** Les forces d'inerties du mouvement de flexion transverse ont prépondérance alors que les inerties longitudinale et rotationnelle sont négligeables.
- d.** Tous les points sur une normale à la plaque ont un mouvement dont le déplacement transverse est identique.
- e.** Il n'y a pas de glissement aux interfaces.

En se basant sur ces hypothèses et en éliminant les effets du cisaillement transverse et les inerties rotationnelles et longitudinales, DiTaranto, Mead et Markus (modèle de D.T.M.M.) ont obtenu une équation différentielle gouvernant le mouvement transverse d'une plaque et d'une poutre du 6<sup>ème</sup> ordre (du 8<sup>ème</sup> ordre dans le cas de la dissymétrie).

Yan et Dowell ont obtenu à partir des mêmes hypothèses une équation du 4<sup>ème</sup> ordre.

La différence entre les 2 approches provient de la prise en compte du cisaillement:

- Yan et Dowell supposent une distribution uniforme des contraintes de cisaillement selon l'épaisseur du sandwich [14].

- D.T.M.M. obtiennent une distribution parabolique des contraintes de cisaillement mais non continues aux interfaces.

Les propriétés amortissantes sont obtenues à partir de la résolution de ces équations. DiTaranto a obtenu l'amortissement d'une poutre en appui à ses extrémités. Mead et Markus ont résolu le problème d'une poutre encastrée à chaque extrémité.

Dans des cas plus compliqués (chargement non symétrique) la méthode de perturbation est utilisée pour obtenir approximativement l'amortissement, ainsi, Oravsky et al. ont étudié une poutre encadrée-libre. Markus, Oravsky, Simkova ont étudié d'autres conditions. Rao a utilisé une approche énergétique pour obtenir et résoudre dans de nombreux cas de chargement l'équation du mouvement d'une poutre sandwich on vibrations.

D'autres chercheurs ont étudié le comportement des plaques multicouches élastiques (stratifiés) en dehors donc du cas particulier sandwich. Reissner et Stavsky ont repris l'hypothèse classique en théorie des Plaques de Love Kirchhoff : contrainte de cisaillement nulles. Yan, Norris et Stavsky ont introduit l'effet du cisaillement et ont montré son importance [14].

L'inconvénient de ces approches est qu'elles ne respectent pas la condition de continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces.

Des études plus compliquées ont été élaborées pour vérifier ces conditions, mais elles nécessitent un grand nombre de paramètres à prendre en compte. Chow, Chou et Carléone ont formulé des théories de plaques incluant le cisaillement transverse et l'inertie rotationnelle en se basant sur la théorie des poutres de Timoshenko qui a été étendue au cas des plaques isotropes par Reissner et Mindlin[14].

La poutre sandwich fléchit sous l'effet de différents types de chargement (charge concentrée, charge uniforme répartie, charge non uniforme répartie ou couple des charges), cette déformation impose des tensions en différentes parties de cette poutre, ainsi sa partie supérieure se trouve comprimée alors que sa partie inférieure est tendue, en conséquence, la partie centrale subit un effort de cisaillement. On peut donc constater que seules les parties supérieures et inférieures de la poutre travaillent en flexion.

Alors on peut conclure que les champs des contraintes et déformations dans les poutres composites stratifiées peu épaisses, excepté dans les régions peu étendues près des bords des stratifiés. Dans le cas d'une structure sollicitée en flexion, la rigidité et la résistance en flexion augmentent rapidement avec l'épaisseur des stratifiés constituant la structure. Toutefois, pratiquement seules les couches externes supportent les charges imposées à la structure.

Par contre dans le cas des stratifiés épais (rapport largeur sur épaisseur inférieur à 10), la théorie des poutres Euler-Bernoulli devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique : flèche du stratifié, répartition des contraintes, etc. Dans le cas où le cisaillement transverse est pris en compte, une introduction des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse du stratifié devient nécessaire. Cette analyse a été initialement développée par la théorie de Timoshenko.

Nous allons étendre. Le principe de Dowell spécifique aux poutres homogènes isotropes sous sollicitations couplées (flexion et traction) aux cas des vibrations des poutres sandwiches à cœurs viscoélastiques. Dans le cas d'une vibration d'une poutre composite sandwich en flexion, principe de Dowell énonce que [22]:

$$\frac{1}{\omega_{si}^2} \approx \frac{1}{\omega_{fi}^2} + \frac{1}{\omega_{ti}^2} \quad (72.a)$$

Où :

$\omega_{si}$  : La fréquence propre de toute la poutre pour le  $i^{em}$  mode.

$\omega_{fi}$  : La fréquence propre de la poutre en flexion simple pour le  $i^{\text{em}}$  mode.

$\omega_{ti}$  : La fréquence propre de toute la poutre pour le  $i^{\text{em}}$  mode.

A partir des hypothèses de Dowell pour les structures homogènes isotropes, nous proposons une méthode, qui suppose que le problème vibratoire des structures sandwiches peut être assimilé à celui de deux problèmes découplés soient; un problème vibratoire de la structure sandwich globale en flexion et celui d'un problème de mouvement membranaire du cœur comme ci-dessous:

$$\frac{1}{\omega_{si}^2} \approx \frac{1}{\omega_{pfi}^2} + \frac{1}{\omega_{cti}^2} \quad (72.b)$$

Tel que;

$\omega_{si}$ : La fréquence propre de toute la poutre pour le  $i$  ème mode.

$\omega_{pfi}$ : La fréquence propre des peaux en flexion pour le  $i$  ème mode.

$\omega_{cti}$ : La fréquence propre du cœur en traction pour le  $i$  ème mode.

Dans cette section, Nous proposons l'application cette stratégie basée sur principe de Dowell aux poutres sandwiches avec une couche viscoélastique contrainte. Ensuite faire une extension vers les plaques sandwiches.

La couche viscoélastique utilisée comme un dissipant d'énergie, elle permet d'atténuer les vibrations de la structure sans changer ses propriétés de résistance mécanique. On trouve deux types de traitement :

1. Les couches viscoélastiques non contraintes (sans plaque de contrainte)
2. Les couches viscoélastiques contraintes (avec plaque de contrainte).

Dans le premier cas, seul le matériau viscoélastique est collé sur la plaque. Lorsque la plaque vibre en flexion la couche viscoélastique travaille principalement en traction et compression. Pour être efficace, cette solution nécessite souvent une épaisseur importante de matériau viscoélastique.

Dans le deuxième cas l'ajout d'une couche collée de l'autre coté de la couche viscoélastique permet de faire travailler le matériau viscoélastique en cisaillement, situation dans laquelle il est bien plus efficace. L'épaisseur nécessaire pour obtenir un amortissement équivalent est alors beaucoup plus faible que pour une couche sans contrainte [22].

## 4.2. Modélisation dynamique d'une poutre composite sandwich

### 4.2.1. Choix de l'élément et du nombre de discrétisation

#### 4.2.1.1. Modélisation des Vibrations de flexion d'une poutre sandwich (cas d'étude)[23]

➤ But de ce test

Ce test représente une modélisation dynamique modale d'une poutre sandwich simplement appuyée. Ce test permet de valider :

- i. La modélisation en élément de Kirchhoff STRI65, qui est un élément Shell triangulaire à 6 nœuds.
- ii. La modélisation avec des éléments de Mindlin : S3, S4, S4R et S8R.
- iii. La prise en compte de matériau composite sandwich

On considère une poutre sandwich simplement appuyée en ses extrémités, de longueur  $L$ , de largeur  $d$ , d'épaisseur total de la poutre sandwich  $h_t$ , l'épaisseur de la peau  $h_p$ ,  $h_c$  est l'épaisseur du cœur.

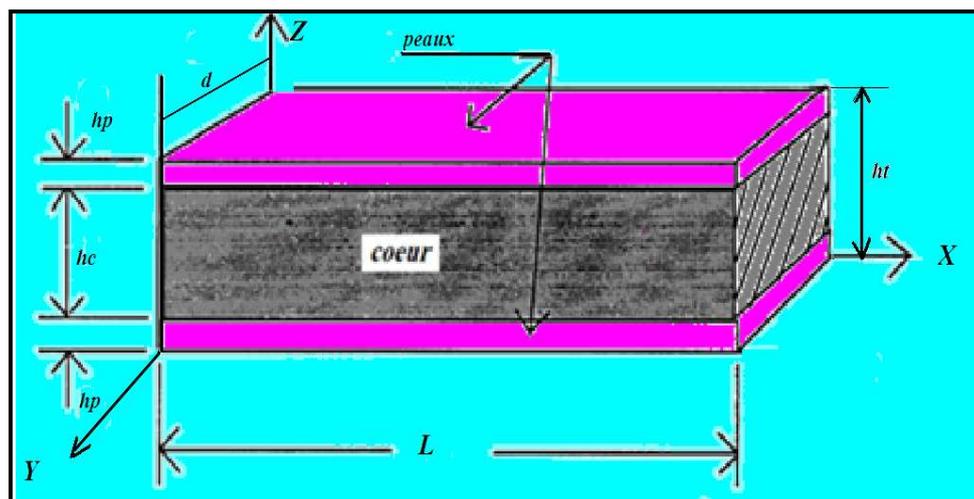


Fig.4.7 : Représentation schématique de la poutre sandwich avec cœur viscoélastique

	L(m)	$h_t$ (m)	d(m)	h(m)	E (Pa)	G (Pa)	$\nu$	P (kg/m <sup>3</sup> )
Peau	1	0.1	0.1	0.025	$4.10^{10}$	$4.10^9$	0,3	2000
Cœur				0,05	$4.10^7$	$1.5.10^7$	0,3	50

Tab 4.2 : Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre composite sandwich

➤ -conditions aux limites

La poutre est simplement appuyée sur les deux côtés.

#### 4.2.1.2. Influence du type d'élément

Dans ce test, nous nous intéressons aux fréquences propres de la structure (poutre) pour cela nous choisissons « **FREQUENCY** » comme type d'analyse (annexe N°01). Nous fixons le nombre des éléments de maillage à 10 éléments, et à chaque fois nous changeons le type d'élément puis on remarque l'influence de ces éléments sur les fréquences de la poutre.

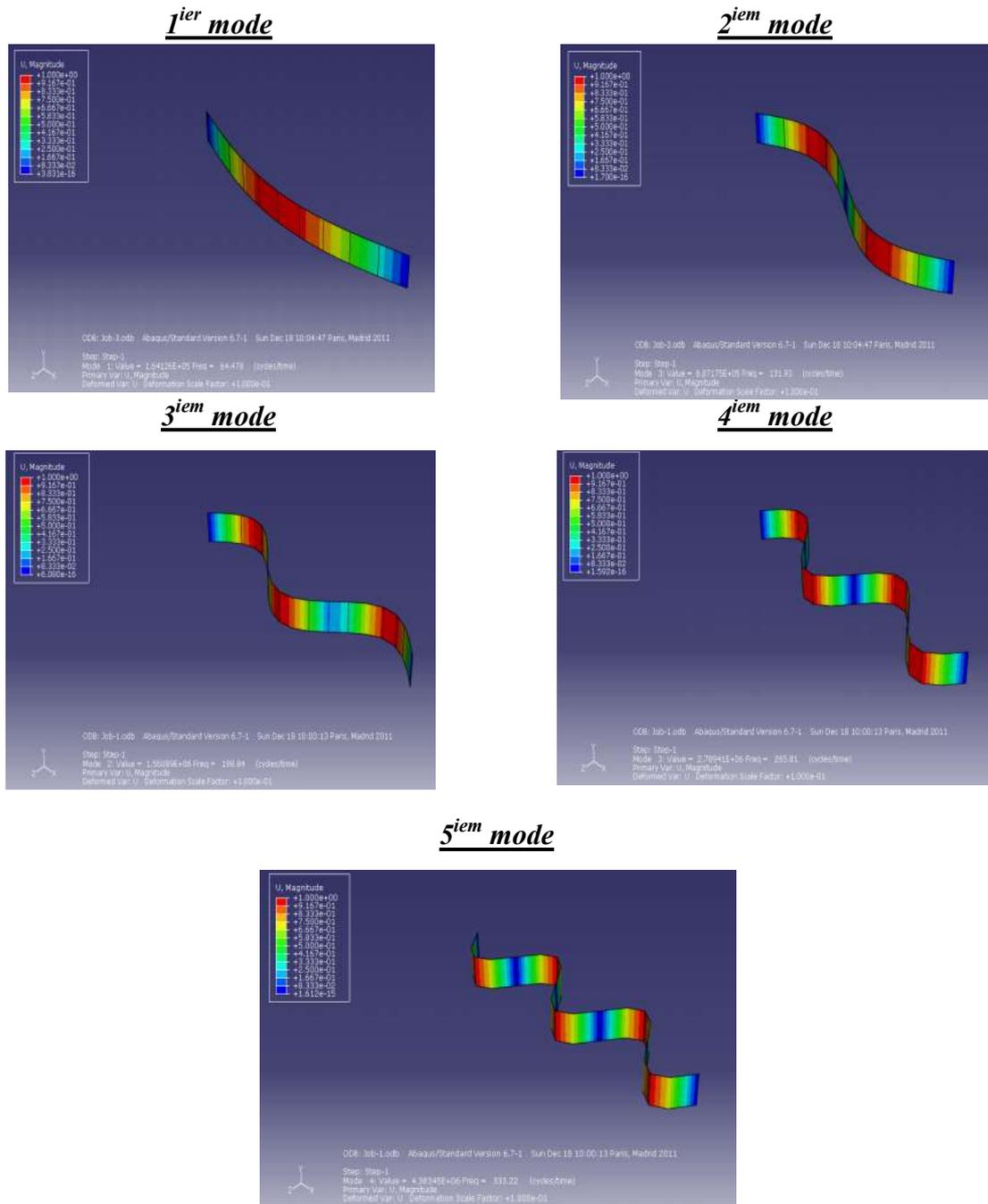


Fig.4.8 : Les cinq premiers modes de la poutre sandwich

Mode n° (Hz)	Type d'élément					Aster [23]	Analytique [23]
	Elément S3	Elément STRI65	Elément S4	Elément S4R	Elément S8R		
1	64.227	200.90	64.775	64.774	64.478	64.595	64.476
2	132.09	530.42	134.17	134.16	131.93	131.495	131.918
3	202.32	853.36	206.25	206.25	198.84	196.861	198.734
4	344.14	1142.00	283.13	283.12	265.81	260.247	265.383
5	414.60	1260.80	366.22	366.22	333.22	320.409	331.963

Tab 4.3 : Influence du type d'élément sur les fréquences de la poutre sandwich

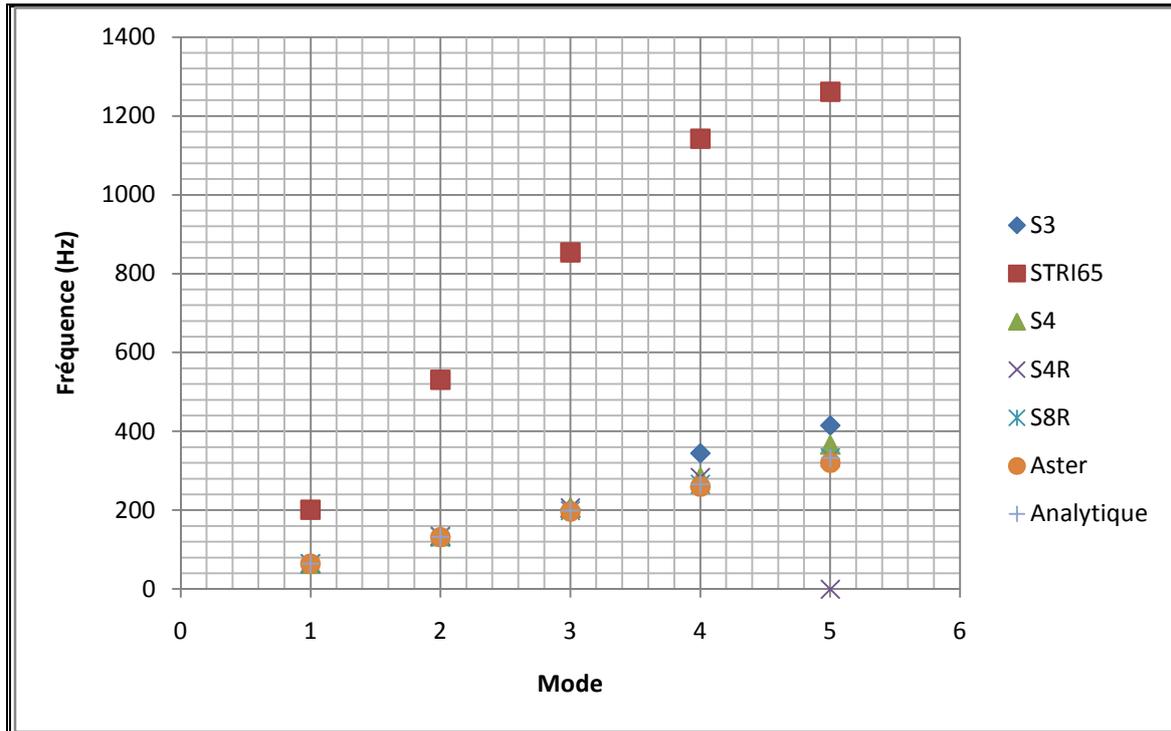


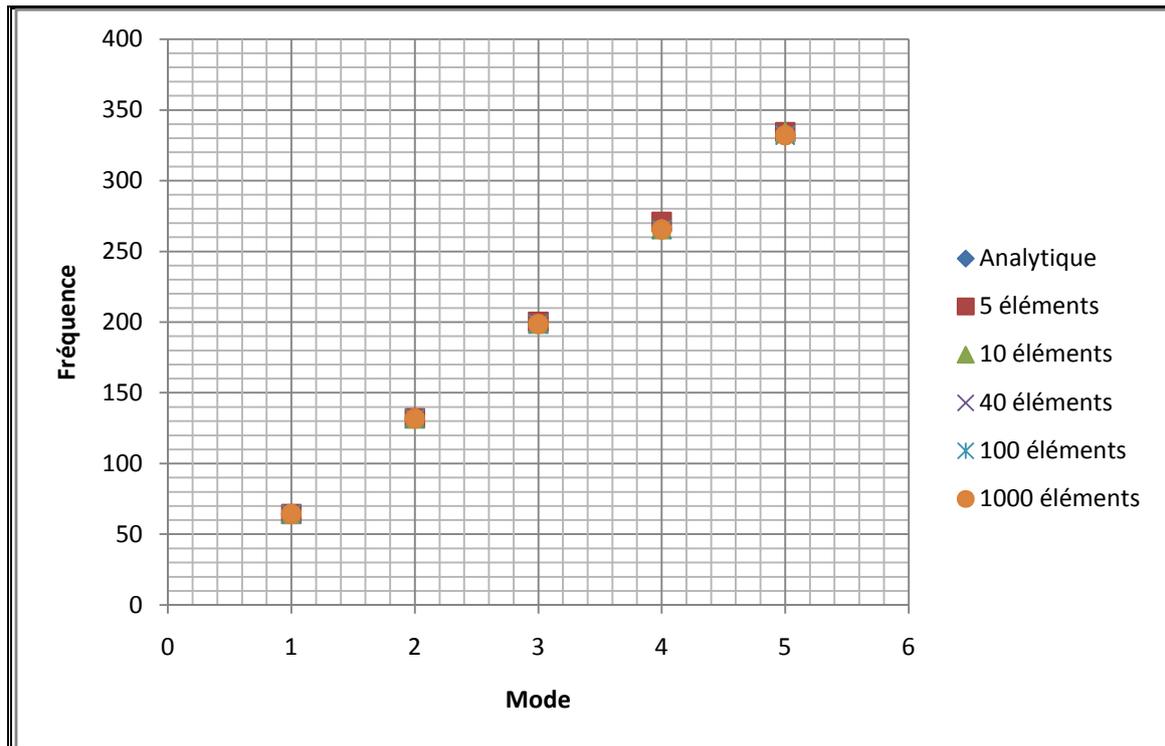
fig.4.9 : Variation des fréquences de la poutre sandwich en fonction du type d'élément

**4.2.1.3. Influence du nombre d'éléments:**

Ce test consiste à étudier l'influence du nombre des éléments sur les fréquences de la structure. Nous suivons les étapes du test précédant. À partir des résultats du test modélisé précédemment, nous choisissons l'élément S8R comme élément pour modéliser la poutre, on change le nombre des éléments du maillage puis nous les comparons aux résultats analytiques.

Nombre des éléments	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
<b>Analytique [23]</b>	<b>64,476</b>	<b>131,918</b>	<b>198,734</b>	<b>265,383</b>	<b>331,963</b>
5 éléments	64,485	132,14	200,23	270,87	334,22
10 éléments	64,478	131,91	198,84	265,81	333,22
40 éléments	64,477	131,92	198,74	265,41	332,05
100 éléments	64,477	131,92	198,74	265,39	331,98
1000 éléments	64,477	131,92	198,74	265,39	331,97

Tab.4.4: Influence du nombre des éléments sur les fréquences de la poutre sandwich



**Fig.4.10 : Influence du nombre d'éléments sur les fréquences de la poutre sandwich**

### 1) Conclusion

- ◆ Nous remarquons que le type des éléments a une grande influence sur les résultats obtenus et l'élément le plus adéquat est l'élément S8R.
- ◆ On remarque aussi que le nombre des éléments du maillage a une grande influence sur les fréquences de la poutre et on remarque qu'à partir de 10 éléments, les résultats sont acceptables comparativement aux résultats analytiques.

**4.2.2. Application de la méthode proposée pour les poutres sandwichs basée sur la loi de Dowell**

**4.2.2.1. Modélisation du comportement modale de la poutre sandwich à cœur viscoélastique mince**

**A. Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich**

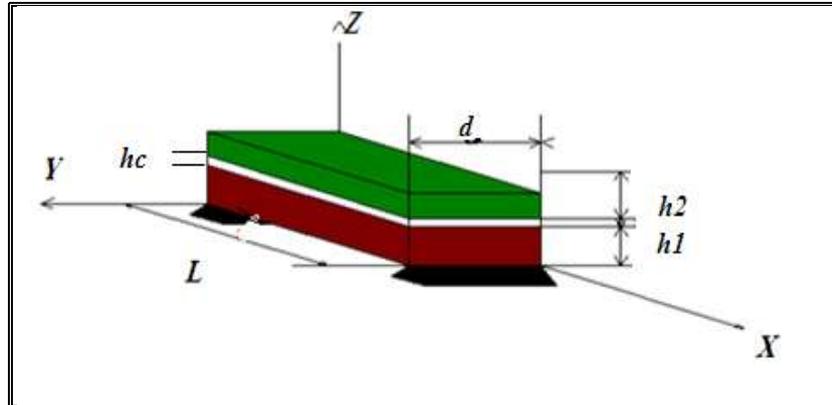


Fig.4.11 : géométrie de la poutre sandwich avec cœur viscoélastique.

	L(m)	ht(m)	d(m)	h(m)	E (Pa)	v	P (kg/m <sup>3</sup> )
Cœur (C64D) [24]	1	0.016	0.1	0.001	0,4x10 <sup>9</sup>	0.49	1240
Peau 1 (aluminium)				0.01	72x10 <sup>9</sup>	0.32	2685
Peau 2 (aluminium)				0.005	72x10 <sup>9</sup>	0.32	2685

Tab .4.5: Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich (cas 1)

**B. Conditions aux limites**

La poutre est simplement appuyés sur les deux côtés.

**4.2.2.2. Présentation des étapes suivies pour la modélisation et l'analyse de la poutre sandwich**

**A. Etape 1**

- ◆ Modélisation du comportement dynamique de toute la poutre sandwich en flexion, avec l'élément S8R et un maillage de 10 éléments.
- ◆ Extraction des fréquences propre de la structure  $\omega_{si}$

**B. Etape 2**

- ◆ Modélisation du comportement dynamique de la poutre sans cœur viscoélastique en flexion, avec l'élément S8R avec un maillage de 10 éléments.
- ◆ Extraction des fréquences propre de la structure  $\omega_{pi}$

**C. Etape 3**

- ◆ Modélisation du comportement dynamique du cœur viscoélastique en traction-compression, avec l'élément S8R avec un maillage de 10 éléments.
- ◆ Extraction des fréquences propre de la structure  $\omega_{ci}$

**D. Etape 4**

◆ Application de la méthode proposée et analyse des résultats.

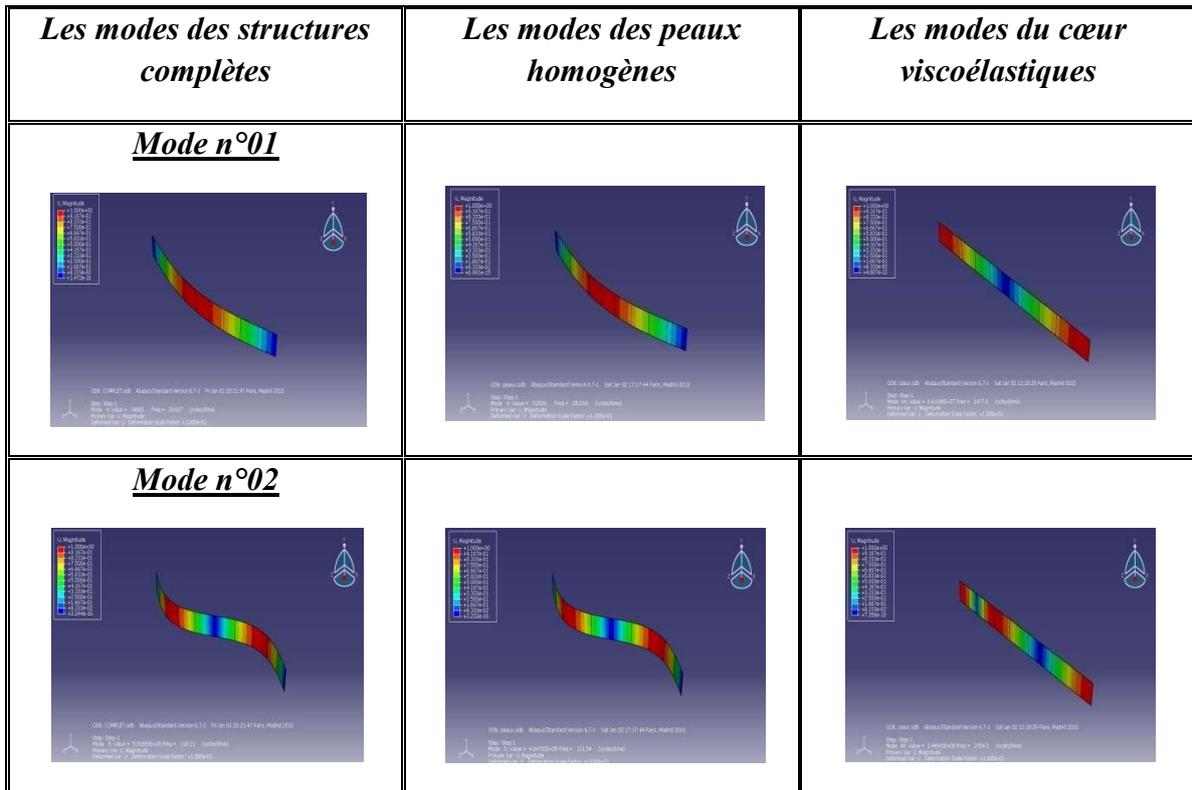
❖ **N.B:** les propriétés du cœur viscoélastique sont prises indépendantes des températures.

**4.2.2.3. Résultats de l'application de la méthode proposée**

Après la réalisation des étapes précédentes, nous avons conclus les résultats suivants :

<i>Etape 01</i>	<i>Etape02</i>	<i>Etape03</i>	<i>Etape 04</i>	<i>Erreur</i>
<i>FREQUENCE DE STRUCTURE COMPLETE ABAQUS</i> $\omega_s$	<i>FREQUENCES DES PEAUX</i> $\omega_{pi}$	<i>FREQUENCE DU CŒUR</i> $\omega_{ci}$	<i>FREQUENCES DE LA STRUCTURE PAR LA METHODE PROPOSEE</i> $\omega_{spro} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_{pi}^2} + \frac{1}{\omega_{ci}^2}}}$	%
37,55	37,55	325,77	37.3030	0.7635
150,06	150,06	651,61	146.2324	0.8459
337,34	337,34	977,82	318.8960	0.9855
599,92	599,92	1305,2	545.0964	1.1522
940,35	940,35	1635	815.1469	1.3199

**Tab.4.6: Résumé des résultats de la poutre sandwich par la méthode proposée en (Hz)**



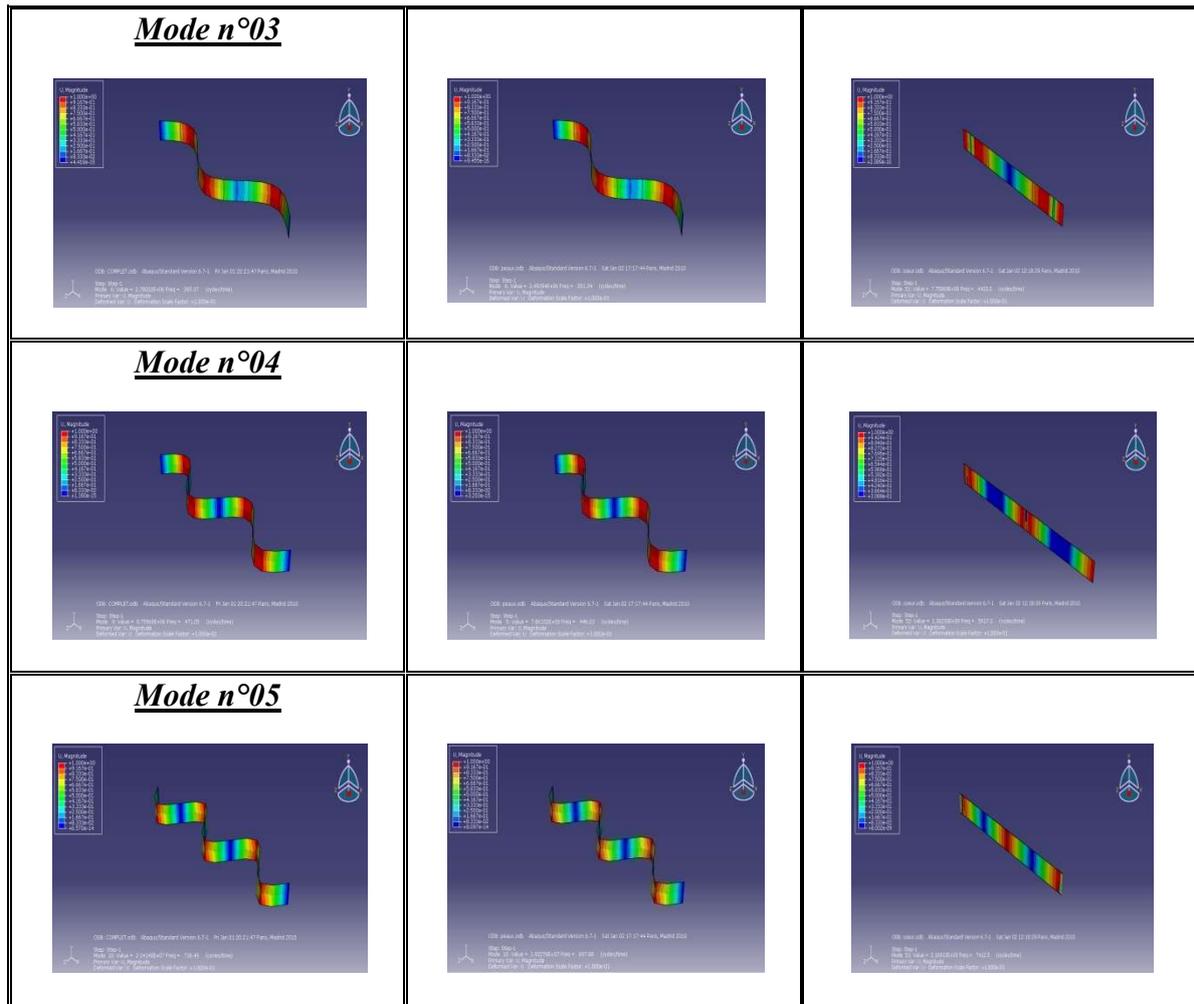


Fig.4.12 : les cinq premiers modes de la poutre sandwich par la méthode proposée

<u>Etape 1</u>	<u>Etape 2</u>	<u>Etape 3</u>	<u>Etape 4</u>	<u>ERREUR (%)</u>
37,55	37,55	325,77	37.3030	0.7635
150,06	150,06	651,61	146.2324	0.8459
337,34	337,34	977,82	318.8960	0.9855
599,92	599,92	1305,2	545.0964	1.1522
940,35	940,35	1635	815.1469	1.3199

Fréquences de la poutre sandwich par la méthode proposée.

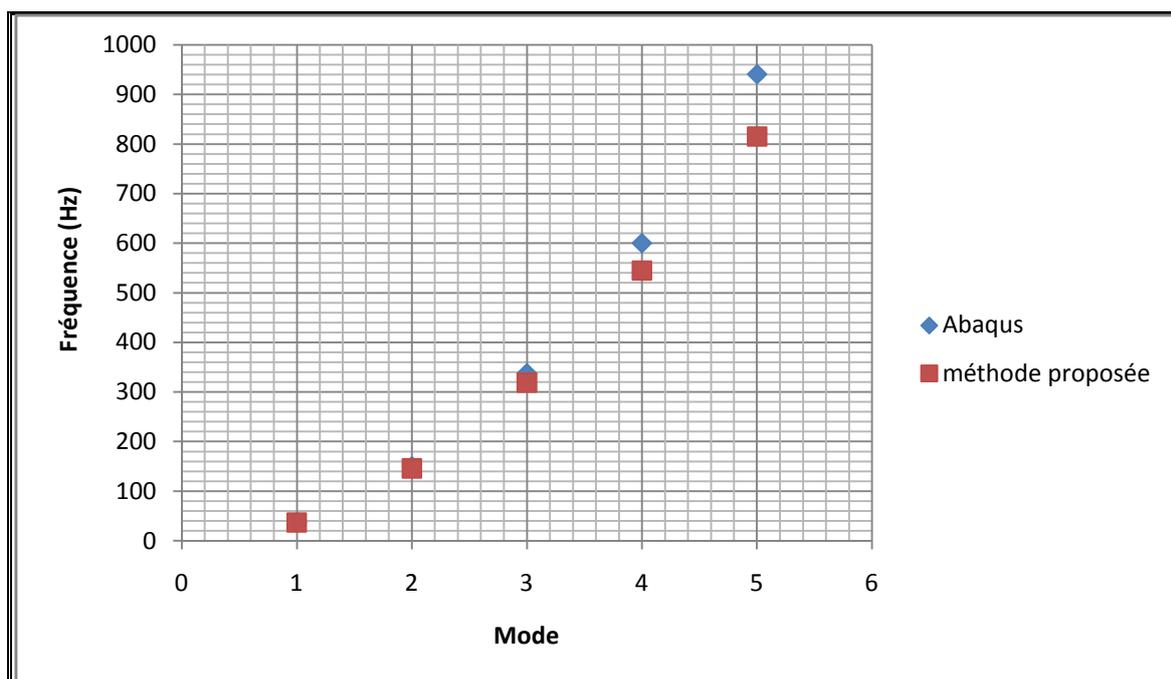


Fig.4.13: Comparaison des fréquences calculées par Abaqus et la méthode proposée pour la poutre sandwich

4.2.2.4. Influence du type du cœur de la poutre sandwich

A. Cas N° 1

Dans ce test nous nous sommes intéressés à l'influence de type du cœur de la poutre sandwich sur la possibilité de l'application du principe de Dowell. Pour cela nous essayons d'appliquer ce principe dans les deux cas suivants.

Les fréquences calculées à l'aide du logiciel Abaqus à partir des caractéristiques mécaniques et géométriques suivantes :

	L(m)	ht(m)	d(m)	h(m)	E (Pa)	$\nu$	P (kg/m <sup>3</sup> )
Cœur (C64D)	1	0.016	0.1	0.001	$0,4 \times 10^9$	0.49	1240
Peau 1 (aluminium)				0.01	$72 \times 10^9$	0.32	2685
Peau 2 (aluminium)				0.005	$72 \times 10^9$	0.32	2685

Tab.4.7: Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich (cas N°1)

<u>Etape 1</u>	<u>Etape 2</u>	<u>Etape 3</u>	<u>Etape 4</u>	<u>ERREUR (%)</u>
37,55	37,55	325,77	37.3030	0.7635
150,06	150,06	651,61	146.2324	0.8459
337,34	337,34	977,82	318.8960	0.9855
599,92	599,92	1305,2	545.0964	1.1522
940,35	940,35	1635	815.1469	1.3199

Tab. .4.8 : Résumé des résultats calculés par la méthode proposée (cas 1)

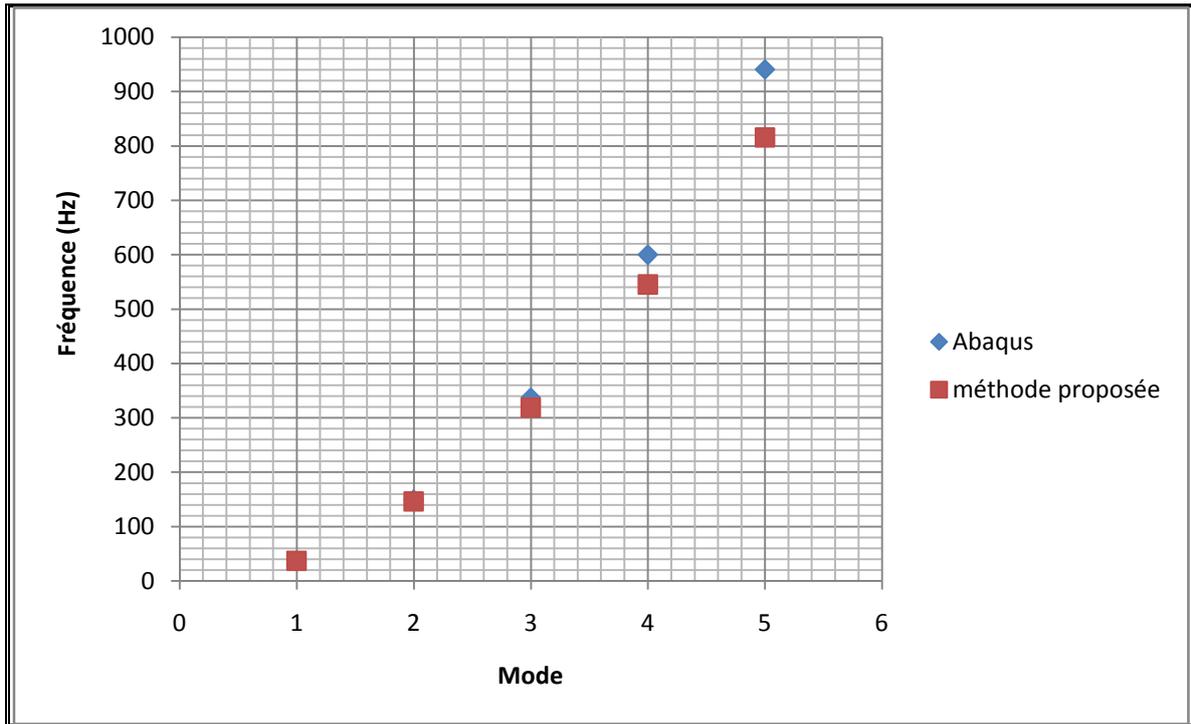


Fig.4.14: Comparaison des fréquences calculées par Abaqus et la méthode proposée de la poutre sandwich -cas 1-

**B. Cas N°2**

	L(m)	ht(m)	d(m)	h(m)	E (Pa)	$\nu$	P (kg/m <sup>3</sup> )
Cœur [25]	1	0.016	0.1	0.001	13,442x10 <sup>9</sup>	0.43	1890
Peau 1 (aluminium)				0.01	72x10 <sup>9</sup>	0.32	2685
Peau 2 (aluminium)				0.005	72x10 <sup>9</sup>	0.32	2685

Tab.4.9: Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich (cas 2)

**Résultats du test N°2**

Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	ERREUR (%)
37,601	37,55	1469,3	37.5377	0.1683
150,18	150,06	2938,9	149.8648	0,213
337,35	337,34	4410,2	336.3574	0,241
599,3	599,92	5886,6	596.8286	0,414
938,05	940,35	7374,1	932.7962	0,56

Tab.4.10 : Résumé des résultats calculés par la méthode proposée (cas 2)

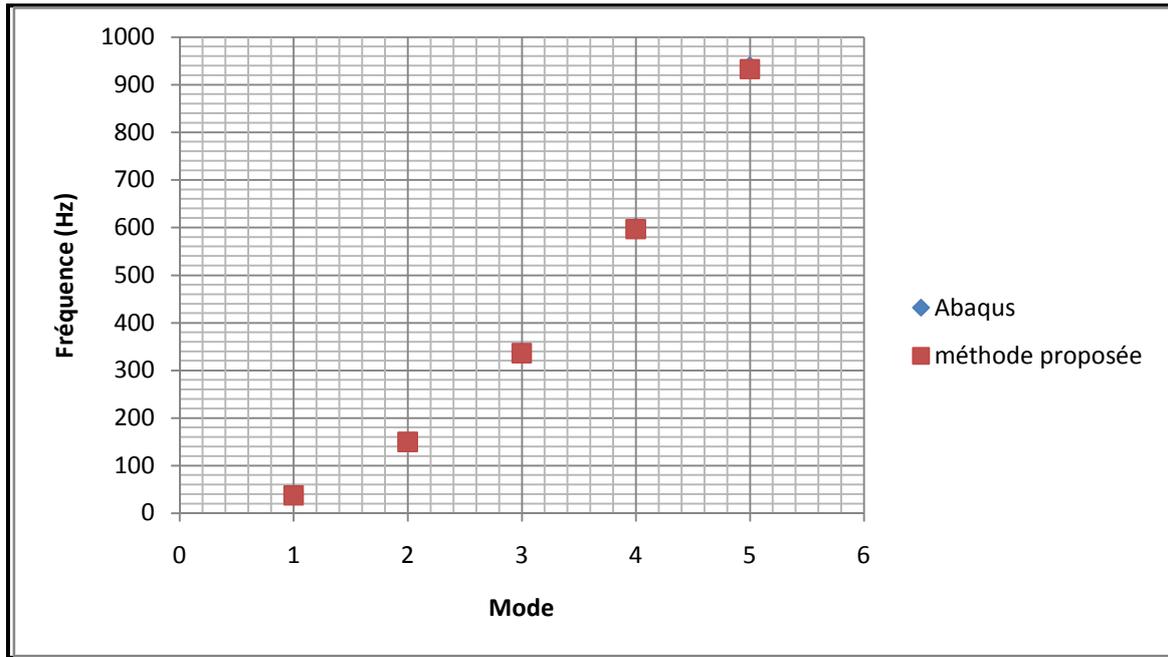


Fig.4.15 : Comparaisons des fréquences calculées par Abaqus et la méthode proposée de la poutre sandwich-cas 02-

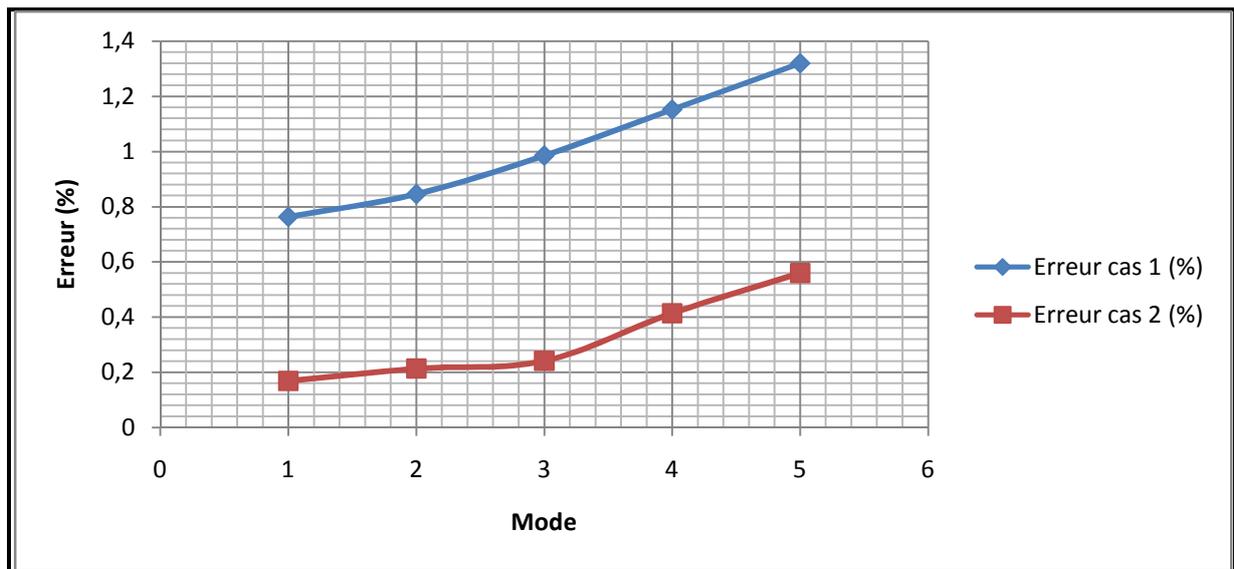


Fig.4.16: Comparaisons de l'erreur calculé entre Abaqus et la méthode proposée de la poutre sandwich

- Conclusion :** Nous concluons que ce principe est applicable dans les poutres sandwiches pour différents types de cœur

#### 4.2.2.5. Influence de l'épaisseur du cœur viscoélastique

##### A. Influence de l'épaisseur du cœur viscoélastique

Dans ce test nous nous sommes intéressés d'appliquer la méthode proposée dans les cas où la poutre sandwich a différentes épaisseurs du cœur pour cela nous gardons les mêmes caractéristiques mécaniques de la poutre sandwich présentées sur le tableau (4.7), aussi on garde l'épaisseur total et la largeur de la poutre sandwich et on change l'épaisseur du cœur viscoélastique, ce changement influence sur les épaisseurs des peaux élastiques pour cela on considère que l'épaisseur de la peau

supérieure est la moitié l'épaisseur de la peau inférieure, les résultats obtenus par les différents tests sont:

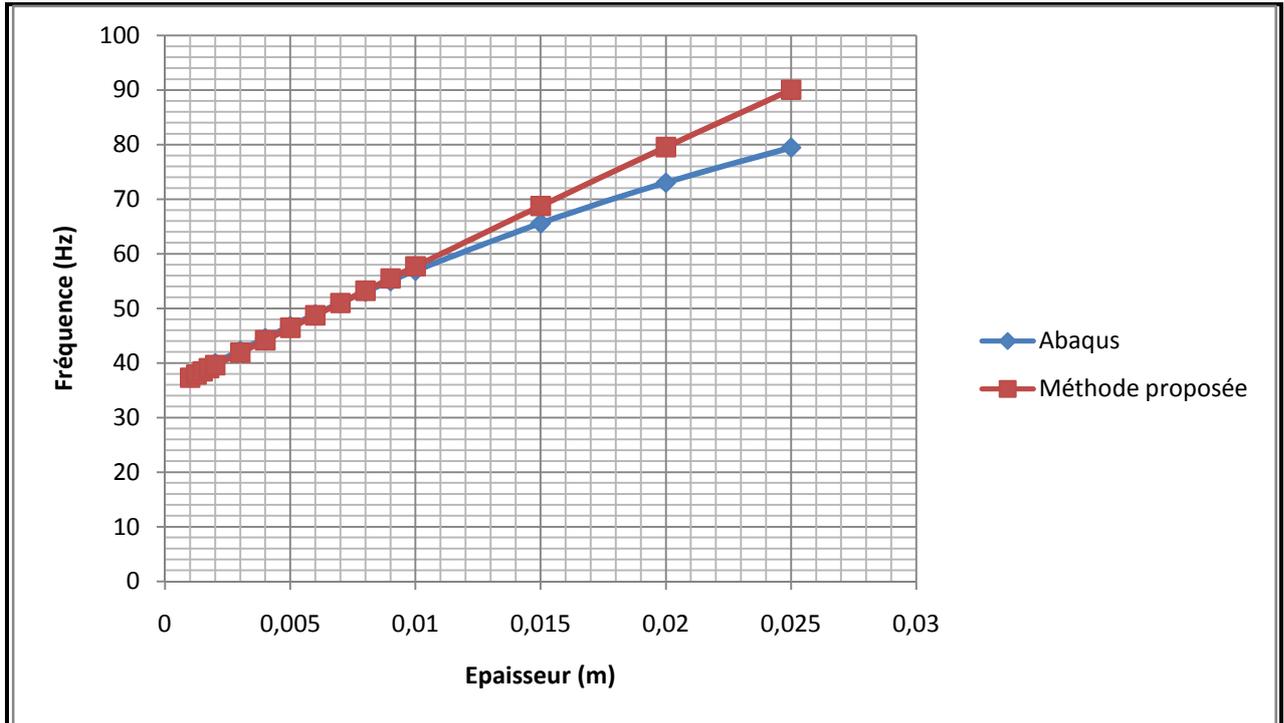


Fig.4.17.1 Variation de fréquences de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans le premier mode

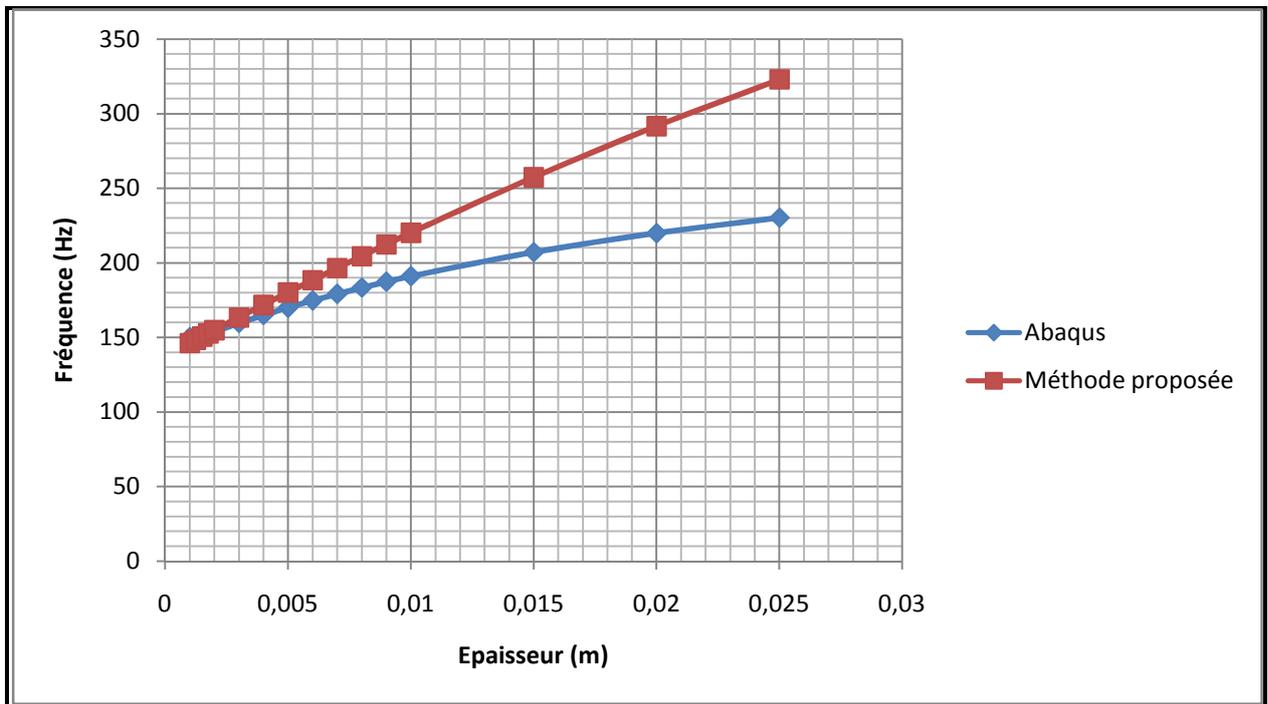


Fig.4.17.2 Variation de fréquences de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans le deuxième mode

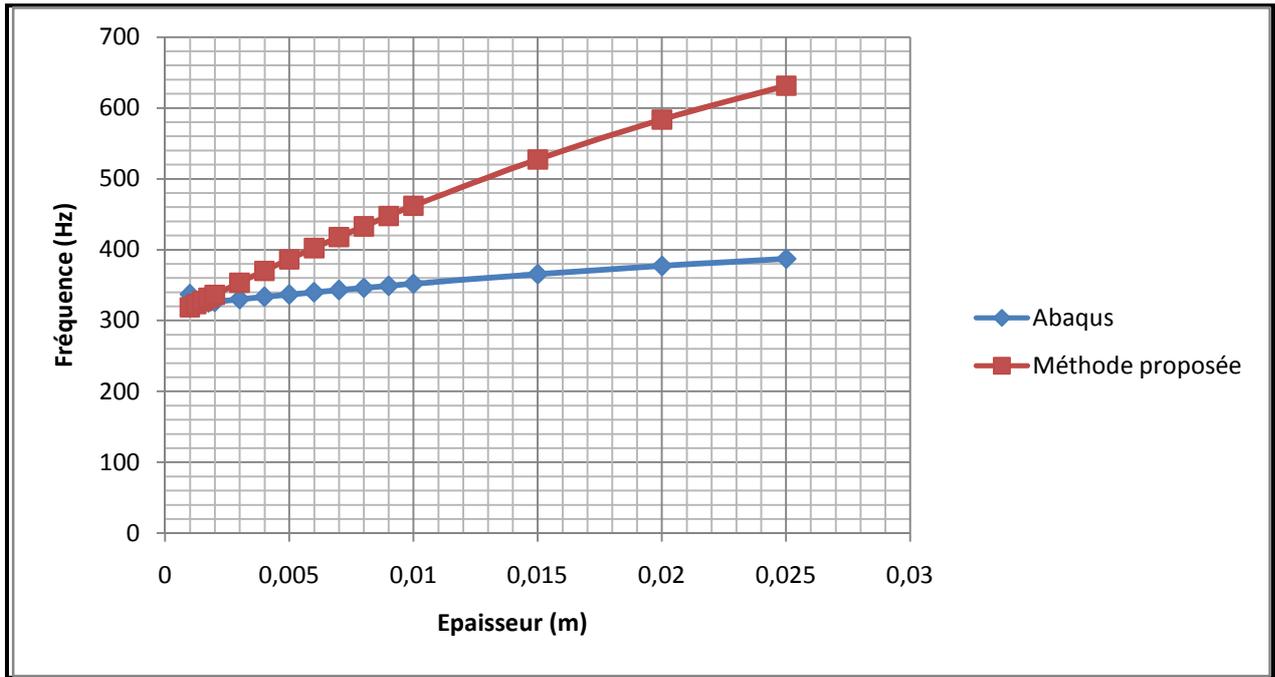


Fig.4.17.3 Variation de fréquences de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans le troisième mode

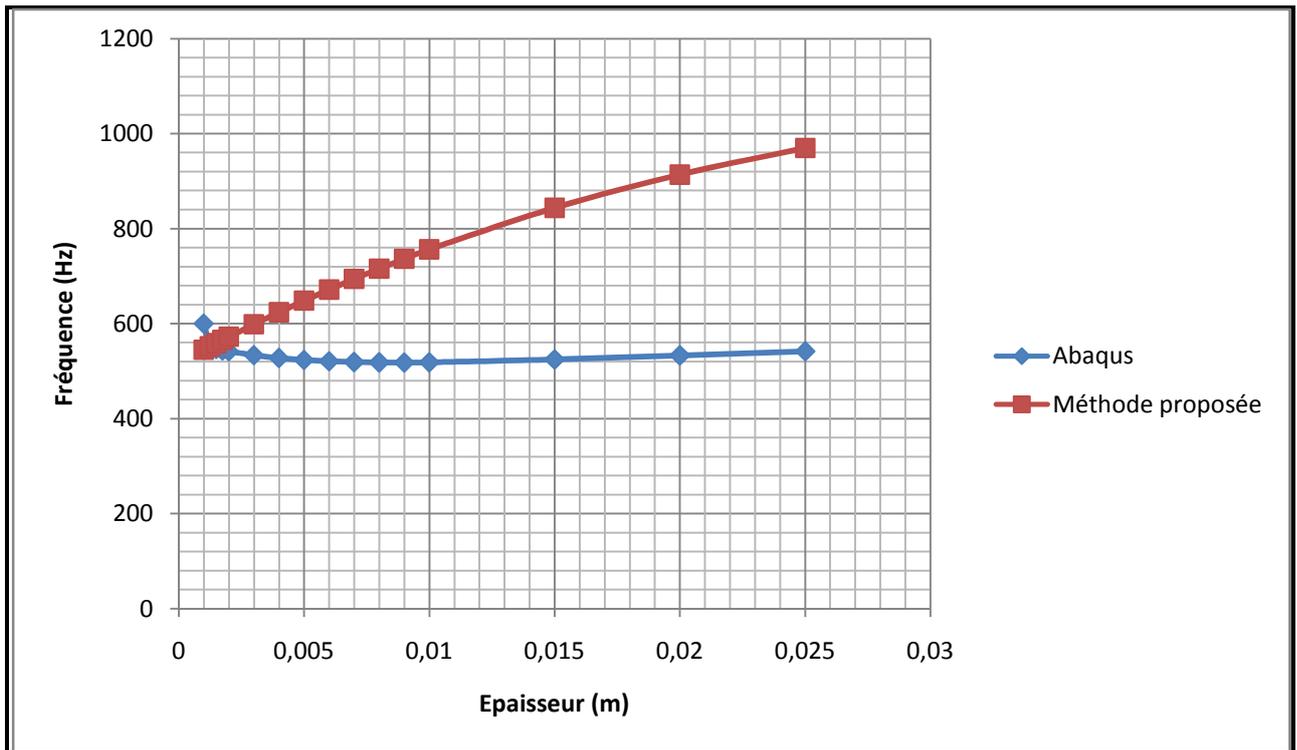


Fig.4.17.4 Variation de fréquences de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans le quatrième mode

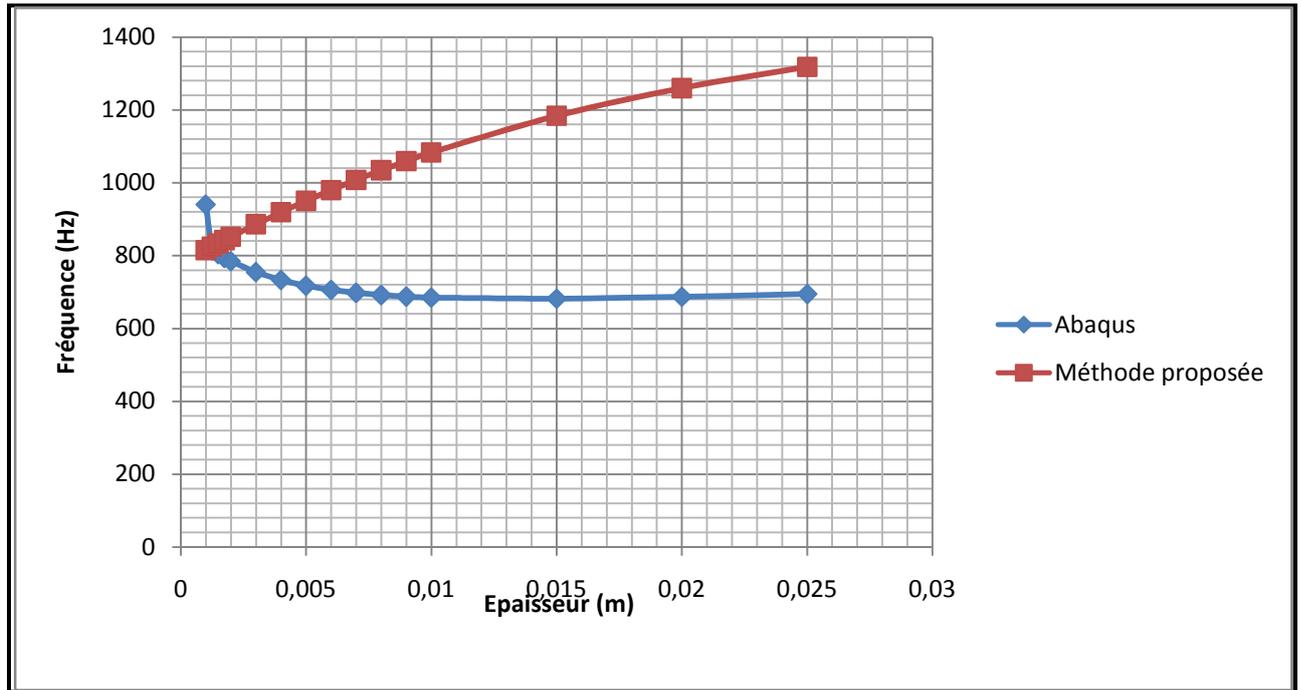


Fig.4.17.5 Variation de fréquences de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur de cœur dans le cinquième mode

**B. Variation de l'erreur en fonction de l'épaisseur du coeur viscoelastique**

L'erreur est calculé par la formule suivante :

$$E(\%) = \frac{R_{methode\ proposée}}{R_{Abaqus}} \times 100 \quad (73)$$

Tel que :

E : est l'erreur en %

$R_{methode\ proposée}$  : résultats calculée par la méthode proposée.

$R_{Abaqus}$  : résultats calculée par Abaqus.

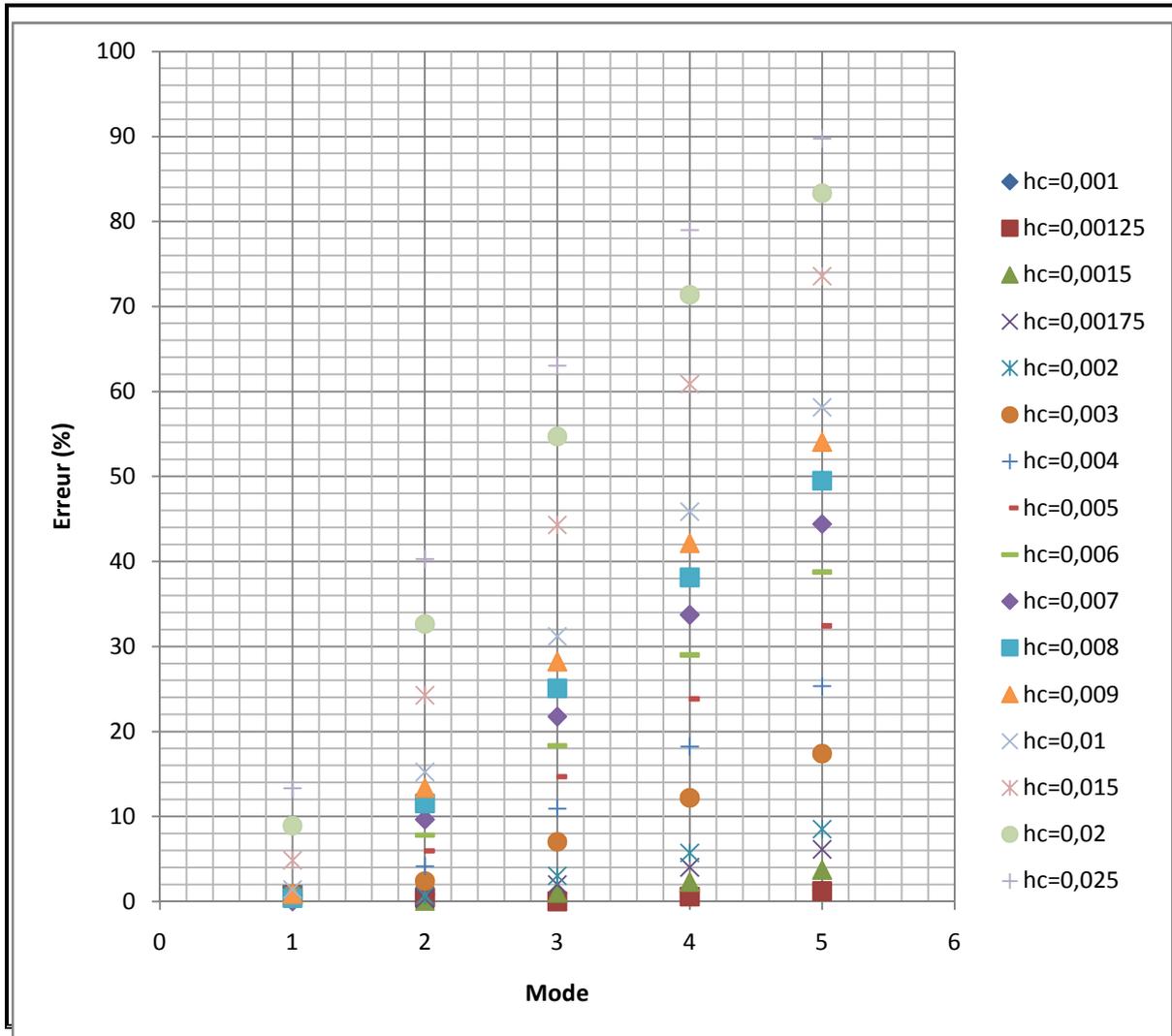


Fig. 4.18 : Variation de l'erreur en fonction de l'épaisseur du coeur viscoélastique

### C. Conclusion

La validité de la méthode proposée peut être résumée comme suit :

- $h_c < 0,002$  accepte l'application de la méthode proposée dans tous les modes.
- $0,002 < h_c < 0,003$  accepte l'application de la méthode proposée dans les trois premiers modes.
- $0,003 < h_c < 0,007$  accepte l'application de la méthode proposée dans les deux premiers modes.
- $0,007 < h_c < 0,02$  accepte l'application de la méthode proposée dans le premier modes.
- $h_c \geq 0,02$  n'accepte pas l'application de la méthode proposée.

#### 4.2.2.6. Effet de la température sur les caractéristiques dynamique de la poutre sandwich

##### 4.2.2.6.1. Effet de la température sur les fréquences de la poutre sandwich à différents cœurs (Choix de la couche viscoélastique)

Le but de ce test est de choisir le matériau viscoélastique le plus sensible à la variation des températures:

##### A. Semelles en Aluminium [26]

Densité = 2685 kg/m<sup>3</sup> ; h<sub>1</sub>=0,025 ; ν= 0.32

T(°C)	0	10	<b>20</b>	30	40	50	60	70	80
E(GPa)	73	72.5	<b>72</b>	69.5	68.5	68	67.5	67	66.5

Tab.4.11 : Variations des caractéristiques mécaniques du l'aluminium (Al) en fonction des températures.

##### B. Cœur en polyuréthane base polyester (C 64 D) [24] (cas N°1)

Densité = 1240 kg/m<sup>3</sup> ; h<sub>2</sub>=0,05; ν= 0.49

T(°C)	0	10	<b>20</b>	30	40	50	60	70	80
E(GPa)	0.650	0.500	<b>0.400</b>	0.320	0.250	0.210	0.200	0.190	0.170

Tab .4.12 : Variations des caractéristiques mécaniques du (C 64 D) en fonction des températures

##### C. Cœur élastollan base polyéther (1164d) [24] (cas N°2)

Densité = 1180 kg/m<sup>3</sup> ; h<sub>2</sub>=0,05; ν= 0.49

T(°C)	0	10	<b>20</b>	30	40	50	60	70	80
E (GPa)	0.500	0.400	<b>0.290</b>	0.200	0.150	0.120	0.100	0.090	0.080

Tab.4.13 : Variations des caractéristiques mécaniques du (1164d) en fonction des températures

##### D. Calcul des fréquences propres

Les fréquences propres de la poutre ont été calculées dans la température ambiante (20°C) sous Abaqus suivant type de calcul dynamique « *linear perturbation* » annexe n°01. Les fréquences trouvées sont trié dans les tableaux suivants :

##### 1<sup>er</sup> Cas Cœur en polyuréthane base polyester (C 64 D) thermoplastique polyuréthane élastomère:

Modes	Fréquences (Hz)
1	125.66
2	276.65
3	423.80
4	569.90
5	716.41

##### 2<sup>iem</sup> cas cœur élastollan à base polyéther 1164d :

Modes	Fréquences (Hz)
1	111.6
2	239.88
3	365.48
4	490.49
5	615.99

Tab.4.14 : Fréquences des cinq premiers modes dans les deux cas

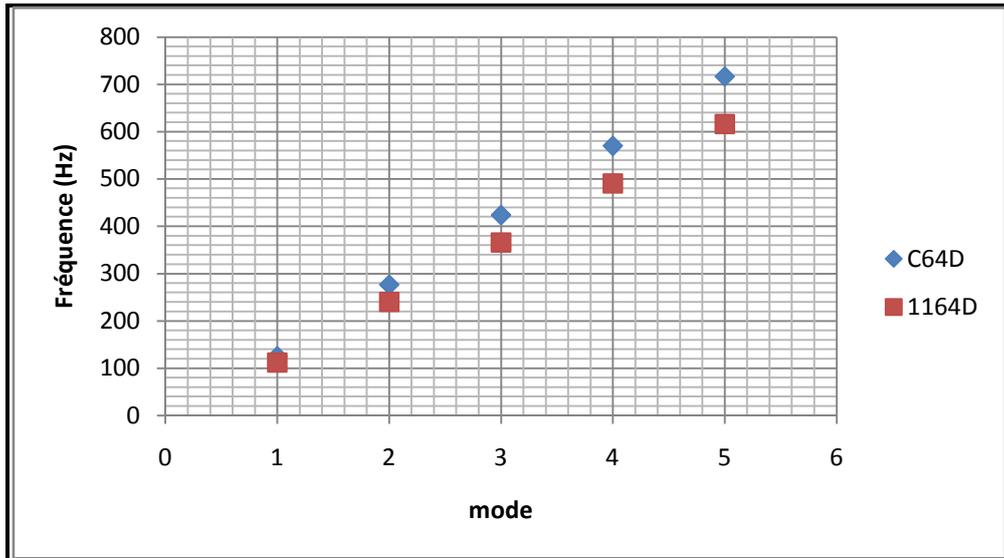


fig.4.19 : Fréquences de 5 premiers modes pour les deux type du cœur à T=20°C

E. Fréquences du premier mode :

Température (°c)	Fréquences de premier mode (Hz)	
	Cœur en C64D	Cœur en 1164D
0	149.64	137.45
10	136.56	126.74
20	125.66	111.60
30	111.89	95.272
40	103.74	83.943
50	95.394	75.908
60	93.326	69.812
70	90.115	66.473
80	87.861	62.906

Tab.4.15 : Variation des fréquences du premier mode en fonction de la température pour les deux types du cœur

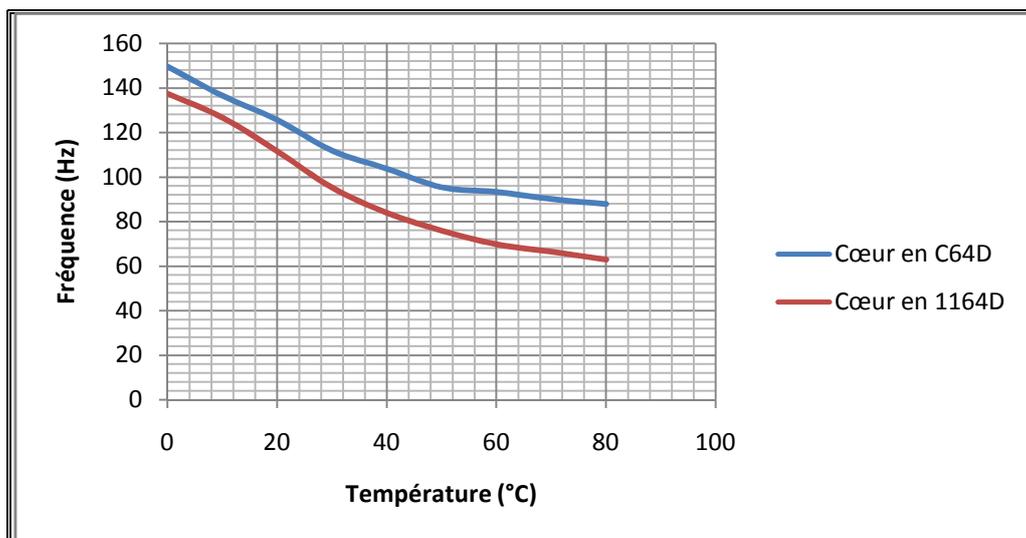


fig.4.20: Variation des fréquences du premier mode en fonction de la température pour les deux types du cœur

**F. Conclusion :** nous avons remarqué que la poutre à cœur en polyuréthane base polyester thermoplastique polyuréthane (C 64 D) est la plus sensible dans les mouvements vibratoires par rapport la poutre à cœur en élastollan à base polyéther 1164d.

**4.2.2.6.2. Effet de températures sur les fréquences des poutres sandwiches**

But de ce test est de voir l'influence de la température sur le comportement dynamique de la poutre sandwich. Dans ce test nous gardons la même géométrie de la poutre précédente et le même type d'analyse, seul les caractéristiques mécaniques des matériaux changent en fonction des températures :

- 1- les semelles sont réalisées en l'aluminium.
- 2- le cœur est réalisé en polyuréthanes à base de polyester (C64D)
- ❖ **Remarque :** Nous considérons que les matériaux utilisés dans ces tests sont isotropes élastiques et linaires.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont données dans les tableaux suivants:

**A. Caractéristiques mécaniques des matériaux**

**a. Semelles en Aluminium [26]**

Densité = 2685 kg /m<sup>3</sup> ν= 0.32

T(C°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
E(GPa)	73	72.5	72	69.5	68.5	68	67.5	67	66.5

*Variations des caractéristiques mécaniques du l'aluminium (Al) en fonction des températures (rappelle).*

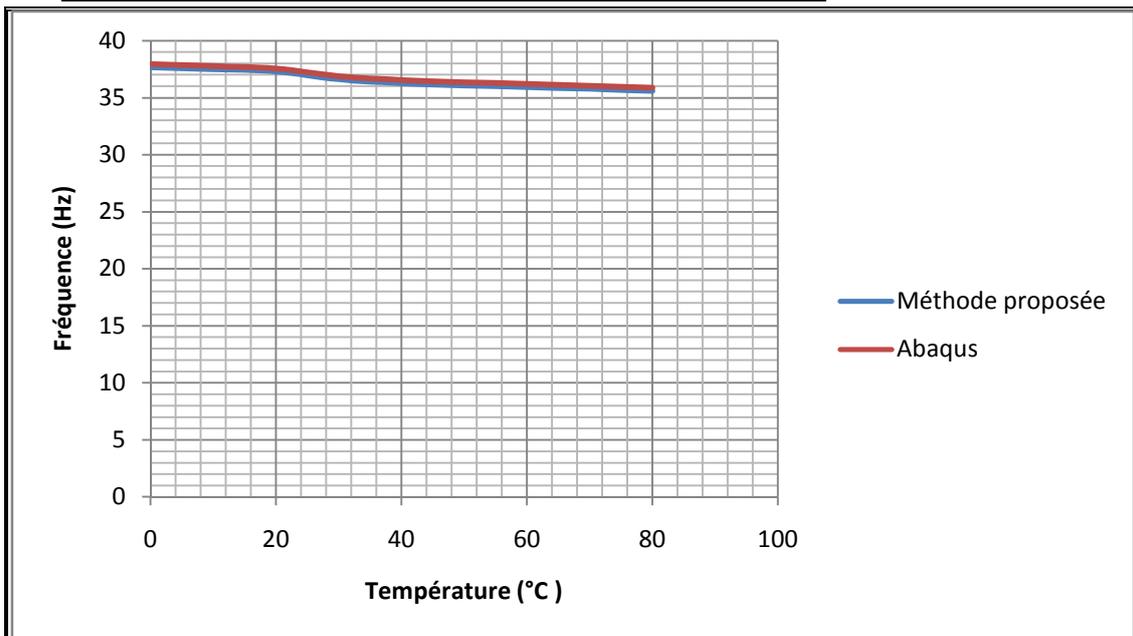
**b. Cœur en polyuréthane base polyester (C 64 D) [24]**

Densité = 1240 kg /m<sup>3</sup> ν= 0.49

T(C°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
E(GPa)	0.650	0.500	0.400	0.320	0.250	0.210	0.200	0.190	0.170

*Variations des caractéristiques mécaniques du (C 64 D) en fonction des températures (rappelle).*

**B. Résultats de la poutre testée dans les cinq premiers modes**



**fig.4.21.1 : Variation des fréquences de la poutre sandwich en fonction de la variation de la température (premier mode)**

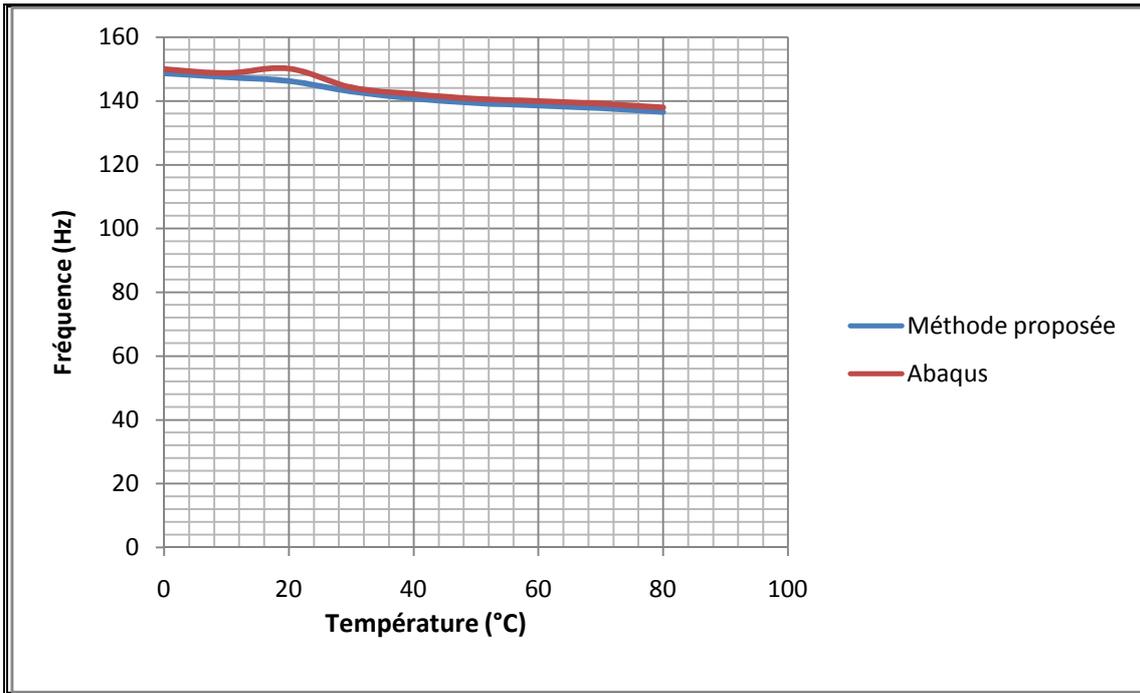


fig.4.21.2: Variation des fréquences de la poutre sandwich en fonction de la variation de la température (deuxième mode)

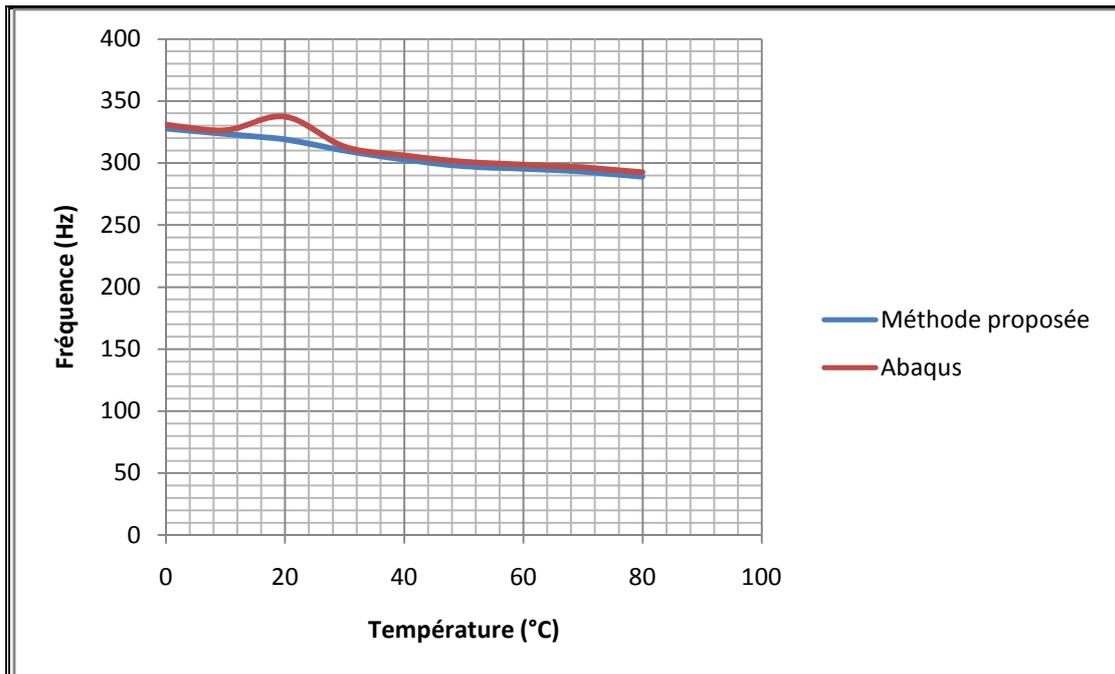


fig. 4.21.3 : Variation des fréquences de la poutre sandwich en fonction de la variation de la température (troisième mode)

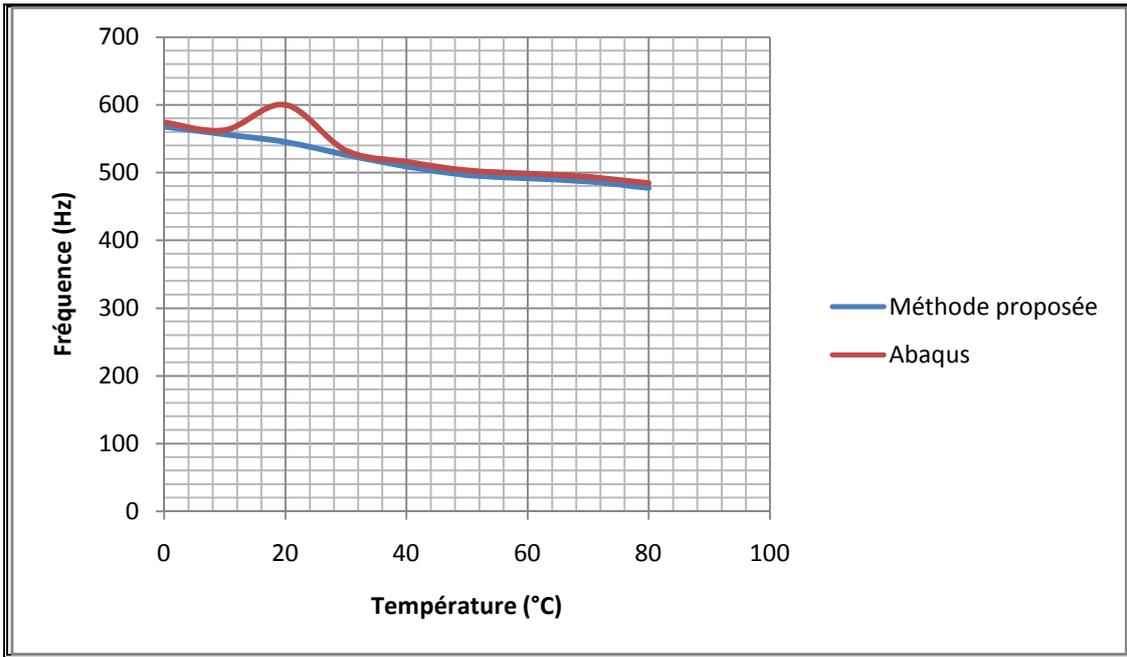


fig. 4.21.4 : Variation des fréquences de la poutre sandwich en fonction de la variation de la température (quatrième mode)

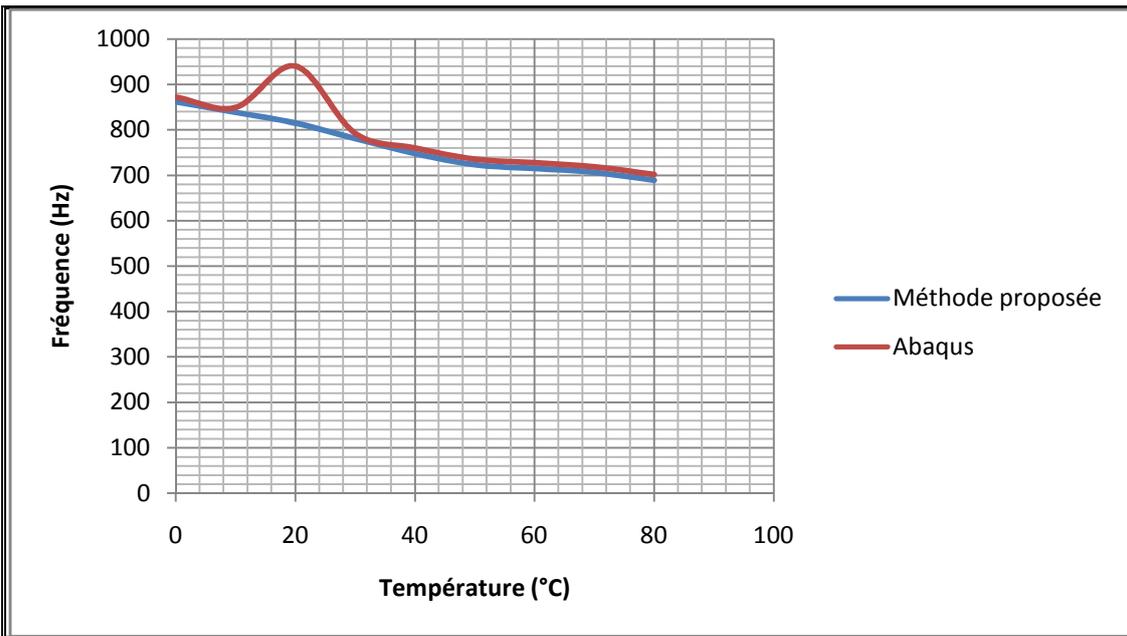


fig. 4.21.5 : Variation des fréquences de la poutre sandwich en fonction de la variation de la température (cinquième mode)

**C. Variation de l'erreur en fonction de températures**

Mode(Hz)	Température (°C)									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	
1	0,753	0,7286	0,7635	0,7519	0,7525	0,7692	0,7700	0,7729	0,7784	
2	0,807	0,8252	0,8459	0,8620	0,8962	0,9217	0,9272	0,9354	0,9614	
3	0,904	0,9428	0,9855	1,0274	1,0894	1,1418	1,1534	1,1689	1,2053	
4	1,024	1,0893	1,1522	1,2170	1,3084	1,3821	1,3997	1,4210	1,4709	
5	1,139	1,2335	1,3199	1,4027	1,5162	1,6059	1,6276	1,6513	1,7066	

Tab.4.16 : Résumé d'erreurs des fréquences de la poutre en fonction de températures

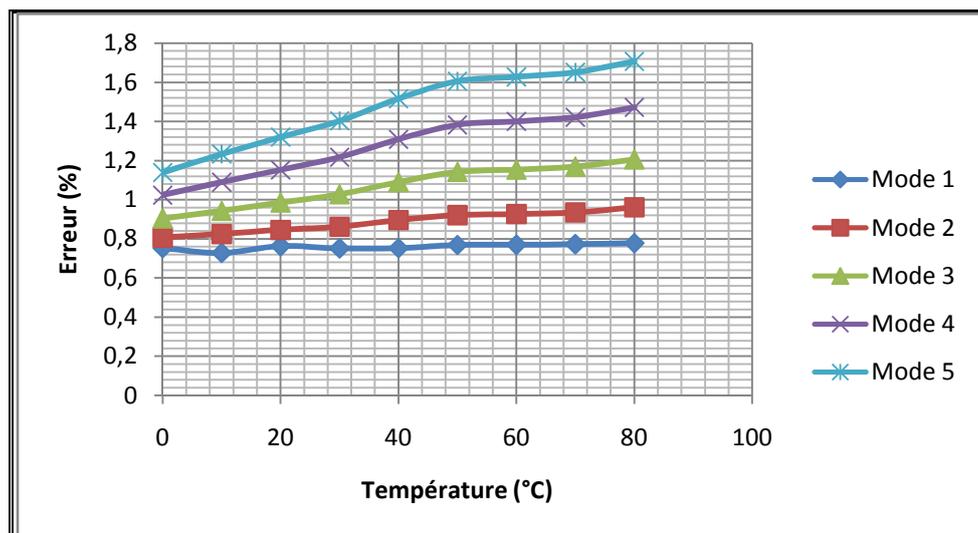


Fig.4.22 : Variation de l'erreur des premiers 5 modes de la poutre sandwich en fonction de la température

### 4.2.3. Représentation fréquentielle de l'effet de température sur la vibration des structures sandwiches

#### 4.2.3.1. Variation des fréquences des poutres sandwiches en fonction de la température

Dans ce type de tests nous nous intéressons à appliquer la méthode proposée par Dowell pour étudier l'influence de la variation de la température sur la vibration des structures sandwiches, pour cela nous fixons le type d'appuis et la géométrie de la poutre et les matériaux qui composent ces structures, seul le module d'élasticité change suivant la variation de la température.

#### A. Géométrie de la poutre sandwich

	L(m)	h <sub>1</sub> (m)	d(m)	h(m)
Cœur (C64D)	1	0.016	0.1	0.001
Peau 1				0.01
Peau 2				0.005

Tab.4.17 : Géométrie de la poutre sandwich modélisée

#### B. Caractéristiques mécaniques des composantes de la poutre sandwich

Concernons les matériaux des structures sandwiches nous gardons les mêmes matériaux des tests précédents (Semelles en aluminium / Cœur en polyuréthane base polyester (C 64 D))

##### a. Semelles en aluminium

Densité = 2685 kg /m<sup>3</sup> ; ν= 0.32

T(°C)	0	20	40	60	80
E(GPa)	73	72	68.5	67.5	66.5

##### b. Cœur en polyuréthane base polyester (C 64 D)

Densité = 1240 kg /m<sup>3</sup> ; ν= 0.49

T(°C)	0	20	40	60	80
E(GPa)	0.650	0.400	0.250	0.200	0.170

Selon le type d'appui de la poutre, la réponse dynamique au milieu de la poutre sandwich est calculée suivant la formule suivante :

$$w(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{\rho s l} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi_n \omega_n \omega} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x_0\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad [27] \quad (74)$$

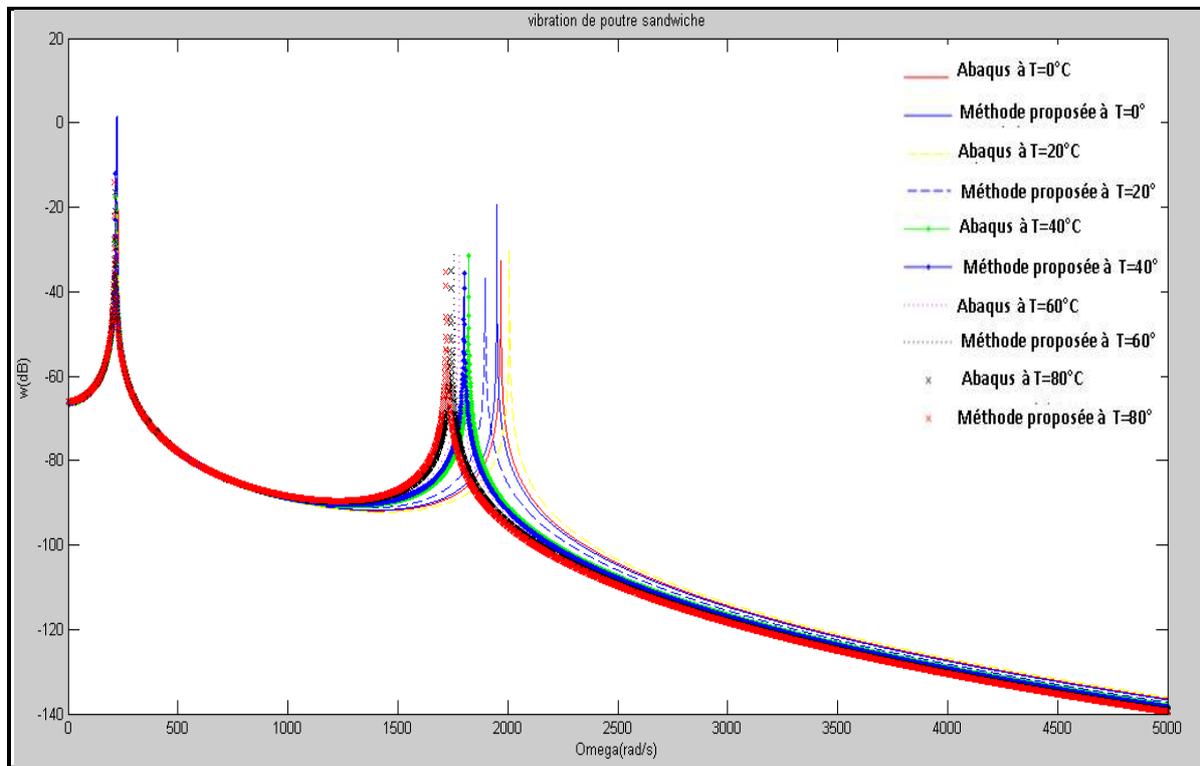
**Avec :**  $P(t) = 100 \cos(\omega t)$        $\omega = 100\pi \left(\frac{rad}{s}\right)$        $P=100 \text{ N}$

$l = 1 \text{ m}$      $\xi_1 = 0,054$      $x_0 = l/2 = 0,5 \text{ m}$        $x = \frac{3l}{4} = \frac{3}{4} \text{ m},$

$S=\text{varie},$        $\rho_{equi} = \frac{\rho_p v_p + \rho_c v_c}{v_{tot}} \quad [5] \quad (75)$

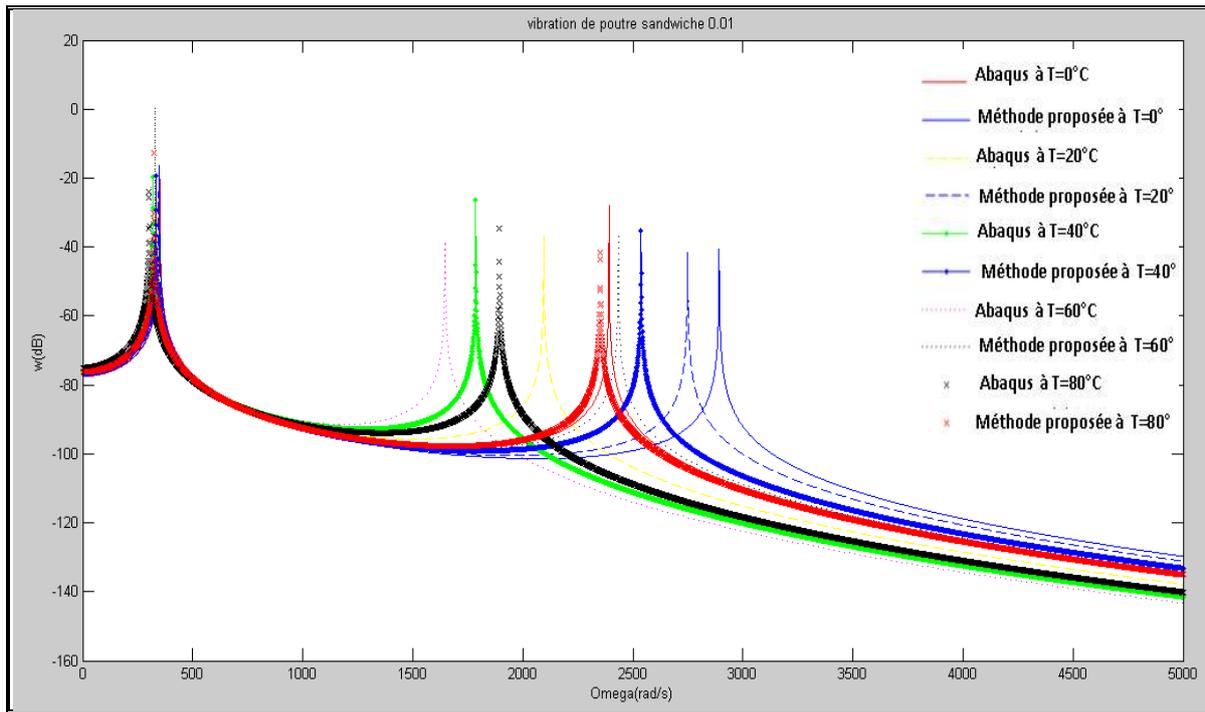
Ces fréquences sont extraites du logiciel Abaqus, celles-ci sont intégrées dans l'expression [48] pour suivre l'influence du changement des caractéristiques mécaniques (module de Young) des composantes de la poutre sandwich (semelles et cœur) en fonction du changement de la température.

**I. Cas de la poutre sandwich à une épaisseur du cœur égale à 0,001m**



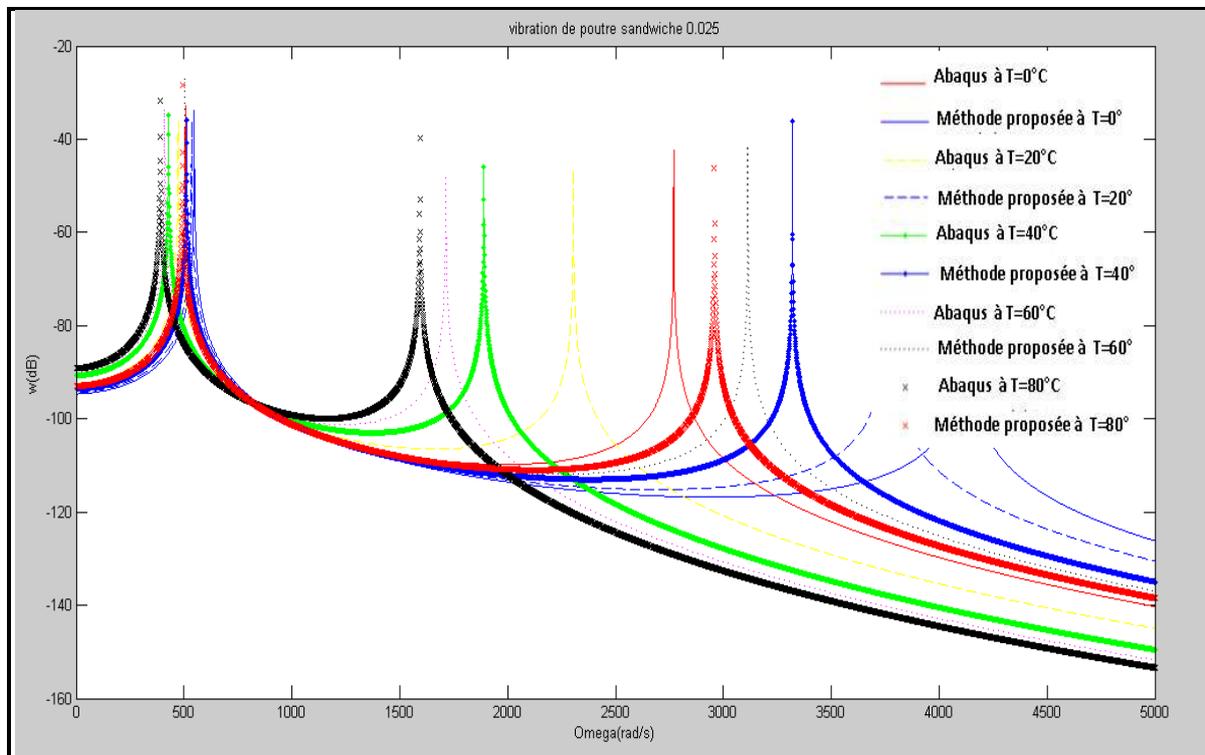
**fig.4.23 : Effet de la variation de la température sur la vibration d'une poutre sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égal à 0,001 m**

**II. Cas de la poutre sandwich à une épaisseur du cœur égale à 0,01m**



**fig.4.24: Effet de la variation de la température sur la vibration d'une poutre sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,01m**

**III. Cas de la poutre sandwich à une épaisseur du cœur égale à 0,025 m**



**Fig4.25 : Effet de la variation de la température sur la vibration d'une poutre sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,025m**

#### IV. Conclusion

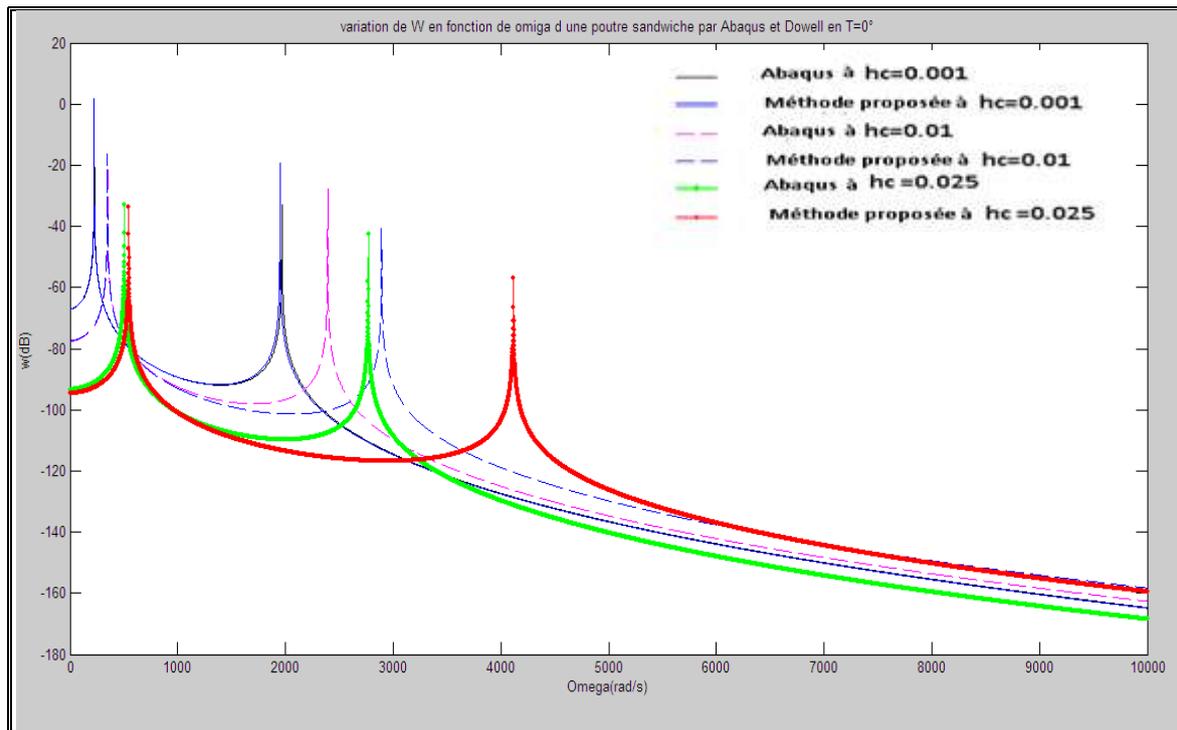
A partir des résultats précédents, on remarque que la température a une grande influence sur le mouvement vibratoire des poutres sandwiches, nous remarquons un déphasage des courbes vers la gauche. L'augmentation des amplitudes de la poutre sandwich vibrante diminuent rapidement quand la température augmente, on observe aussi que cette remarque est valable pour les différentes épaisseurs de la poutre sandwich (la variation d'amplitudes en fonction de la variation de l'épaisseur de la couche viscoélastique), seul le taux d'amortissement de la poutre change en fonction de l'épaisseur de la couche viscoélastique (le cœur).

##### 4.2.3.2. Vibration de la poutre sandwich sous l'effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique dans les différentes températures

Dans ce test nous essayons d'appliquer la méthode précédente pour voir l'effet du changement de l'épaisseur du cœur viscoélastique sur le comportement vibratoire de la structure sandwich, pour ce faire nous gardons tous les caractéristiques géométriques et mécaniques des composantes de la structure à chaque température, seule l'épaisseur du cœur viscoélastique est changée.

Nous utilisons la formule précédente de la poutre pour étudier l'effet de variation de l'épaisseur cœur viscoélastique de la poutre sandwich dans chaque température, les résultats des tests appliqués sur les poutres sandwiches dans les différentes épaisseurs des cœurs viscoélastiques sont les suivants :

##### I. Pour $T=0^{\circ}\text{C}$



**Fig.4.26.1 Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique à  $T=0^{\circ}\text{C}$**

II. Pour  $T=20^{\circ}\text{C}$

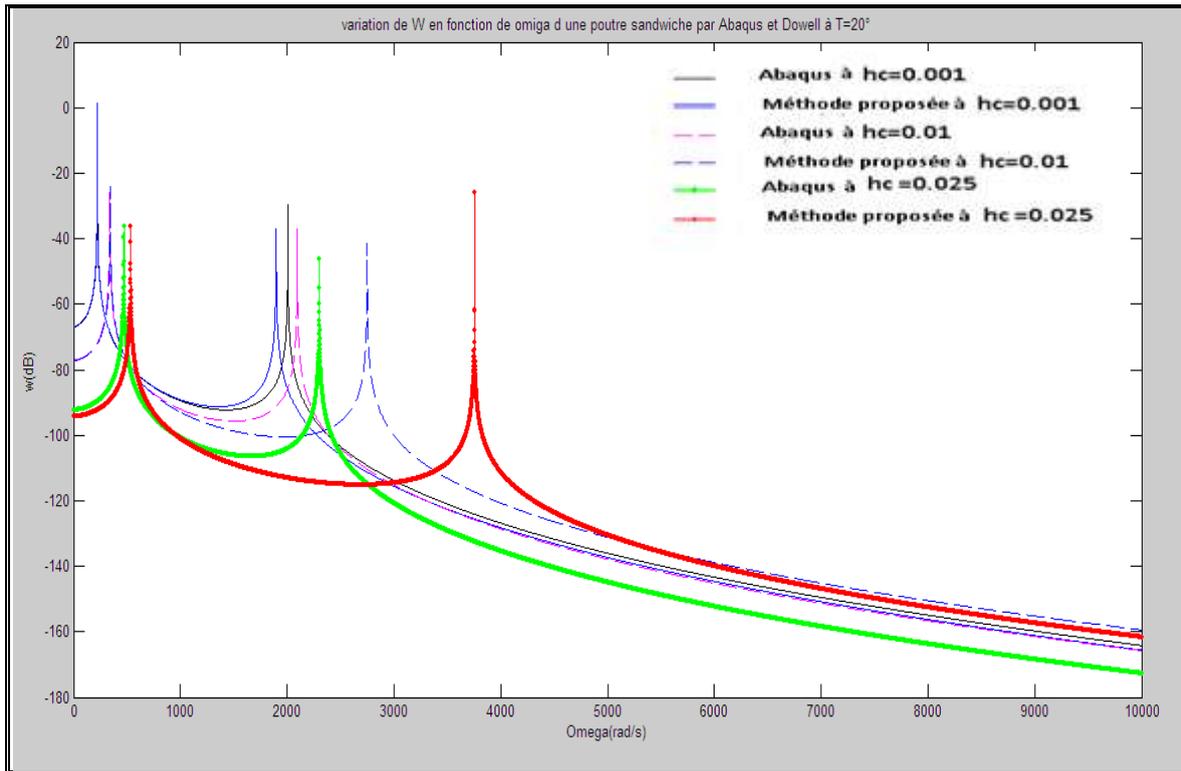


Fig. 4.26.2 Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique à  $T=20^{\circ}\text{C}$

III. Pour  $T=40^{\circ}\text{C}$

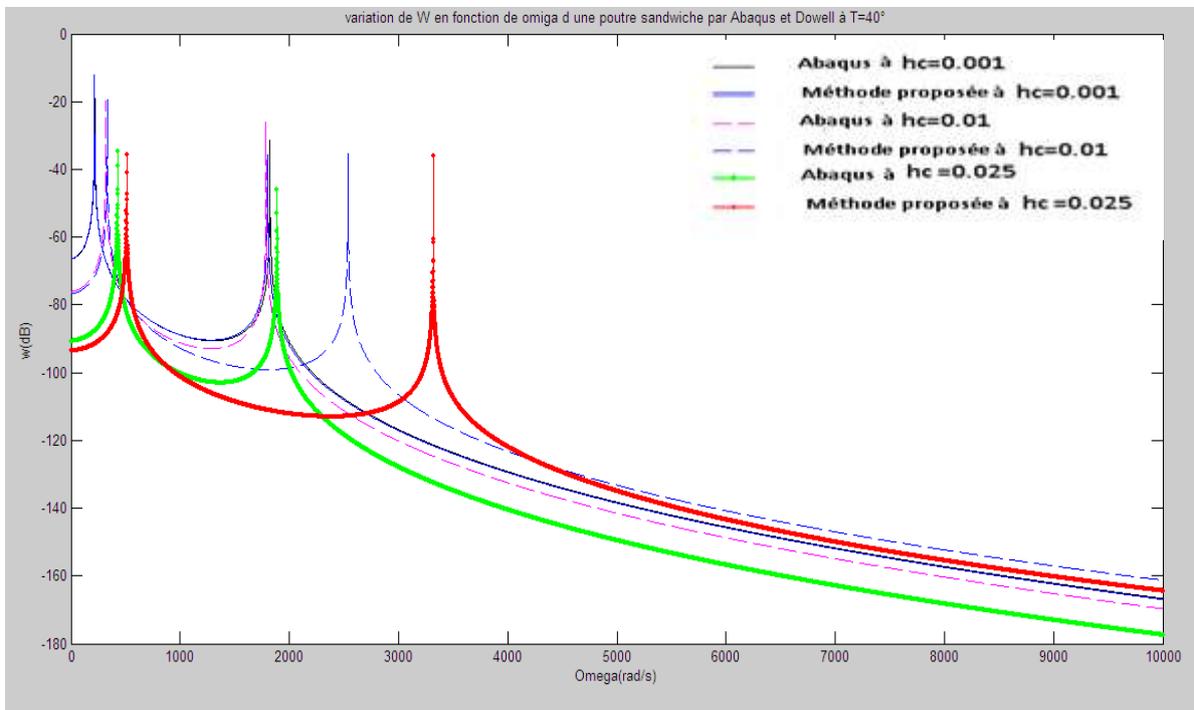
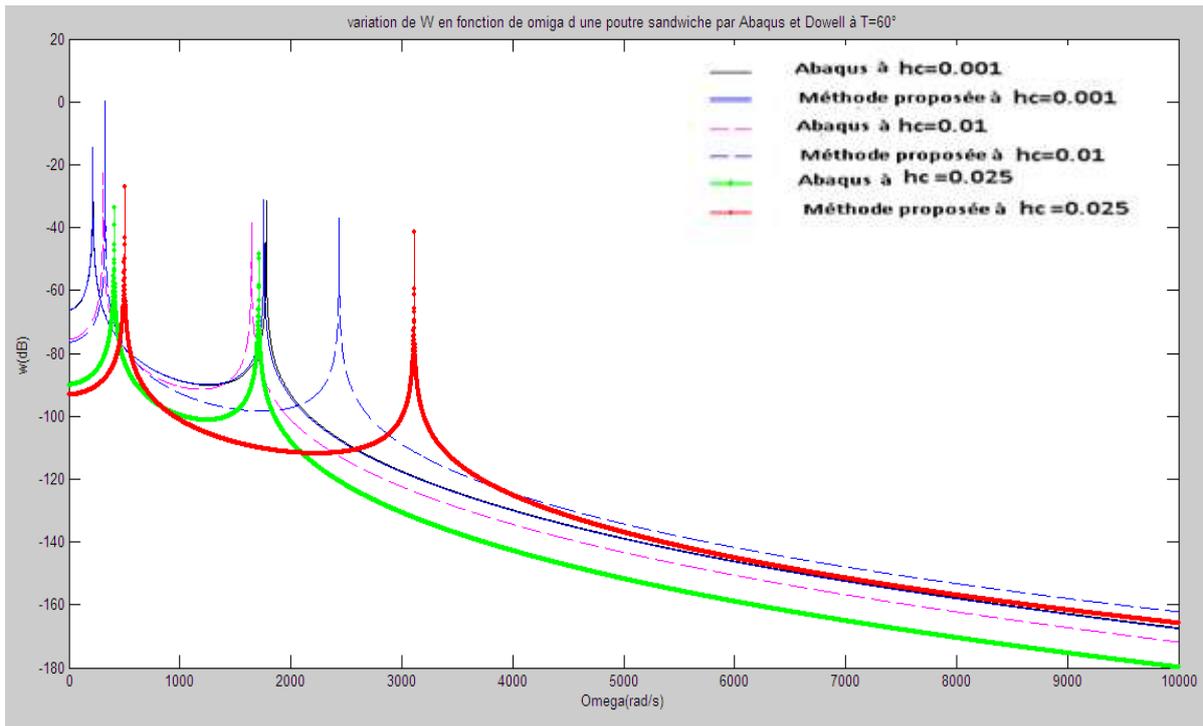


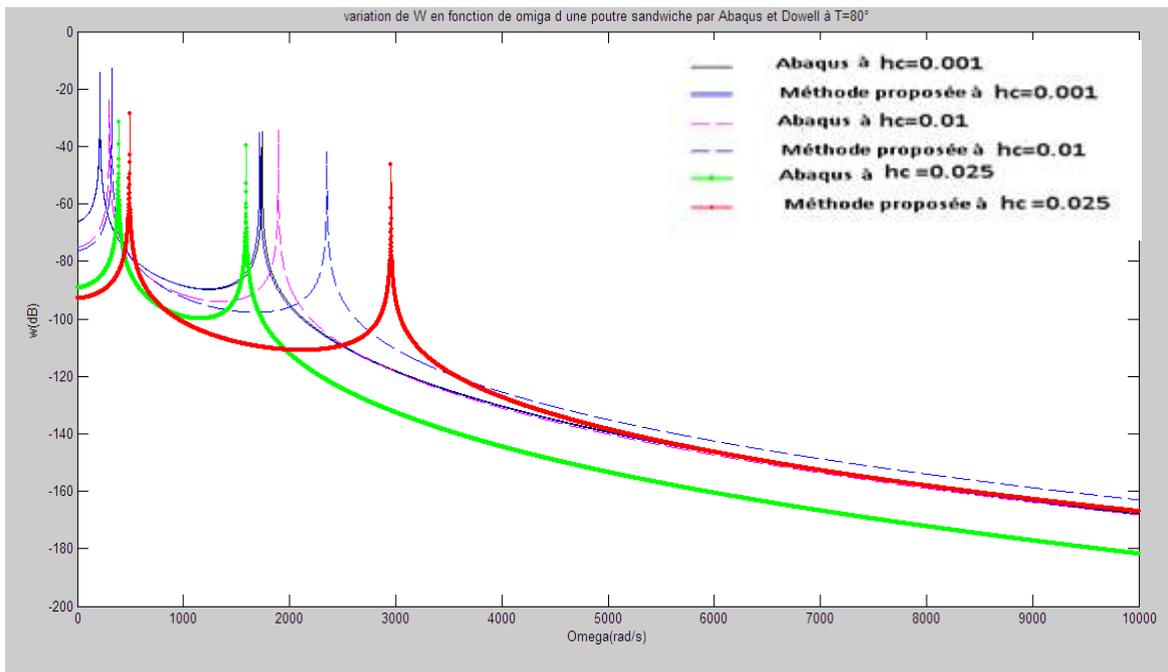
Fig. 4.26.3 Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique à  $T=40^{\circ}\text{C}$

**IV. Pour  $T=60^{\circ}\text{C}$**



**Fig. 4.26.4 Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique à  $T=60^{\circ}\text{C}$**

**V. Pour  $T=80^{\circ}\text{C}$**



**Fig. 4.26.5 Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique à  $T=80^{\circ}\text{C}$**

**4.2.4. Effet de variation de l'épaisseur du cœur sur les fréquences de la poutre sandwich à  $T=20^{\circ}\text{C}$**

Mode (Hz)	Méthode proposée à 0,001	Abaqus à 0,001	Méthode proposée à 0,00125	Abaqus à 0,00125	Méthode proposée à 0,0015	Abaqus à 0,0015	Méthode proposée à 0,00175
01	37,303	37,55	37,8822	38,181	38,4562	38,772	39,0298

02	146,2324	150,06	148,3954	149,09	150,553	150,67	152,6964
03	318,896	337,34	323,3032	323,27	327,68	324,4	332,0432
04	545,0964	599,92	551,9997	548,78	558,83	546,21	565,62
05	815,1469	940,35	824,447	814,48	833,629	803,8	842,69

Abaqus à 0,00175	Méthode proposée à 0,002	Abaqus à 0,002	Méthode proposée à 0,003	Abaqus à 0,003	Méthode proposée à 0,004	Abaqus à 0,004	Méthode proposée à 0,005	Abaqus à 0,005
39,36	39,6	39,947	41,89	42,265	44,17	44,534	46,4515	46,747
152,21	154,84	153,73	163,35	159,52	171,77	164,92	180,0998	169,96
325,48	336,37	326,51	353,47	330,28	370,17	333,72	386,4811	336,97
543,76	572,34	541,45	598,619	533,52	623,9366	527,64	648,2941	523,49
793,94	851,65	784,84	886,35	755	919,2638	733,4	950,5092	717,71

Méthode proposée à 0,006	Abaqus à 0,006	Méthode proposée à 0,007	Abaqus à 0,007	Méthode proposée à 0,008	Abaqus à 0,008	Méthode proposée à 0,009	Abaqus à 0,009
48,7208	48,899	50,981	50,99	53,2337	53,018	55,4786	54,985
188,3161	174,68	196,4356	179,12	204,4471	183,31	212,3486	187,27
402,385	340,11	417,8839	343,18	432,9781	346,2	447,6688	349,16
671,7153	520,73	694,207	519,08	715,798	518,27	736,5015	518,13
980,1033	706,32	1008,1	698,06	1034,6	692,13	1059,7	687,96

Méthode proposée à 0,01	Abaqus à 0,01	Méthode proposée à 0,015	Abaqus à 0,015	Méthode proposée à 0,02	Abaqus à 0,02	Méthode proposée à 0,025	Abaqus à 0,025
57,7144	56,891	68,7527	65,571	79,5323	73,008	90,0234	79,428
220,1383	191,01	257,3635	207,11	291,6342	219,85	322,9102	230,19
461,9515	352,05	527,4291	365,53	583,5418	377,2	631,2564	387,18
756,3499	518,48	843,6173	524,48	913,5847	533,06	969,5414	541,75
1083,4	685,1	1183,9	682,17	1260	687,39	1318,2	694,84

Tab.4.18 : Effet de variation de l'épaisseur du cœur de la poutre sandwich à T=20°C

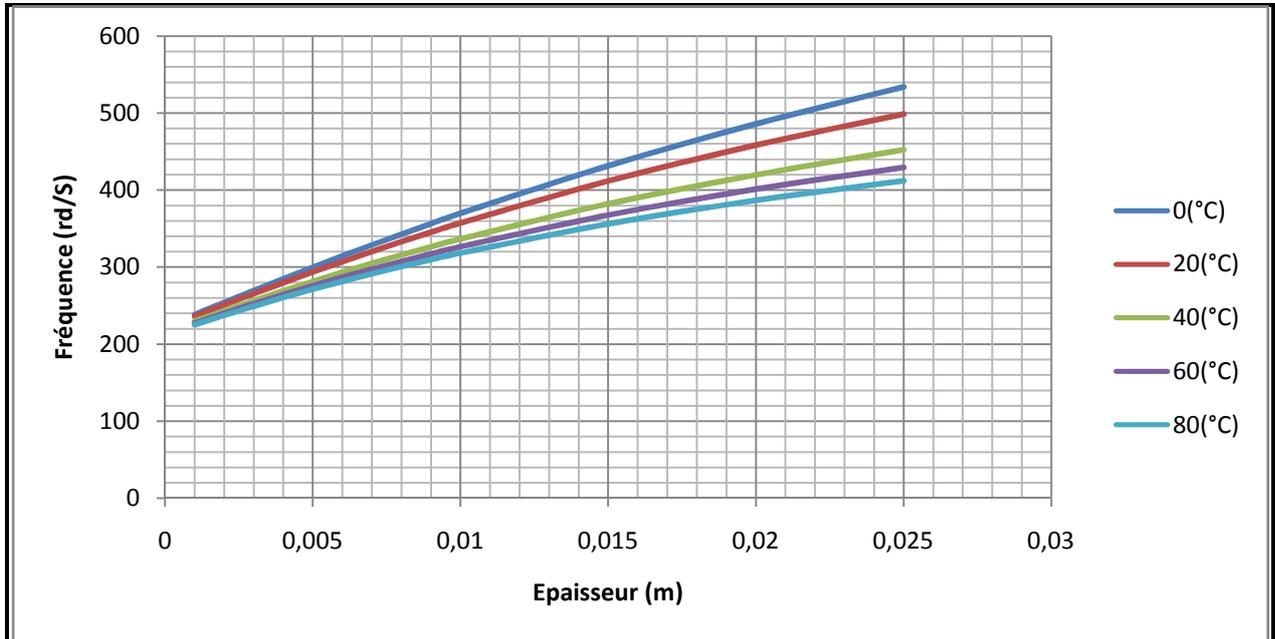
4.2.5. Variation des fréquences des cinq premiers modes en fonction de la température (hc=0,001m)

Mode (rd/s)	Temperature (°C)									
	0		20		40		60		80	
	Méthode proposée	Abaqus								
1	366,9	374,5	359,2	370,3	345,1	359,1	338,8	355,1	333,2	351,35
2	1332	1484,9	1867,8	1451,8	1118,8	1387,1	1060,2	1358,7	1014,9	1333,9
3	2637,7	3259,1	2326,7	3135,5	2026,7	2936,7	1879,7	2841,7	1772,9	2763,2
4	3177,1	3912,1	2825,2	3778,3	2445,4	3559,8	2269,4	3458,4	2141,1	3374,1
5	4132	4132	3613,9	4898,5	3095,5	4533,5	2855,7	4360,6	2684,1	4222,5

Tab.4.19 : fréquences des cinq premiers modes en fonction de la température (hc=0,001m)

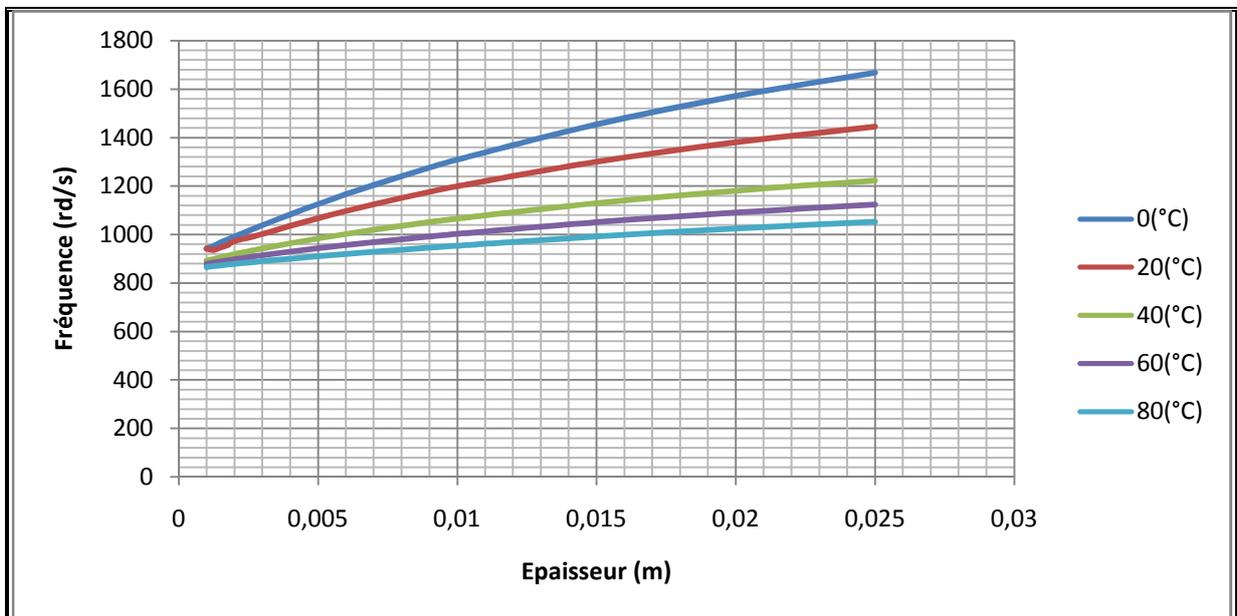
**4.2.6. Variation des fréquences des trois premiers modes en fonction de l'épaisseur du cœur pour différentes températures**

**A. Premier mode en rd/s**



**Fig. 4.27 :** Variation des fréquences du premier mode de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur pour différentes températures

**B. Deuxième mode en rd/s**



**Fig. 4.28:** Variation des fréquences du deuxième mode de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur pour différentes températures

**C. Troisième mode en rd/s**

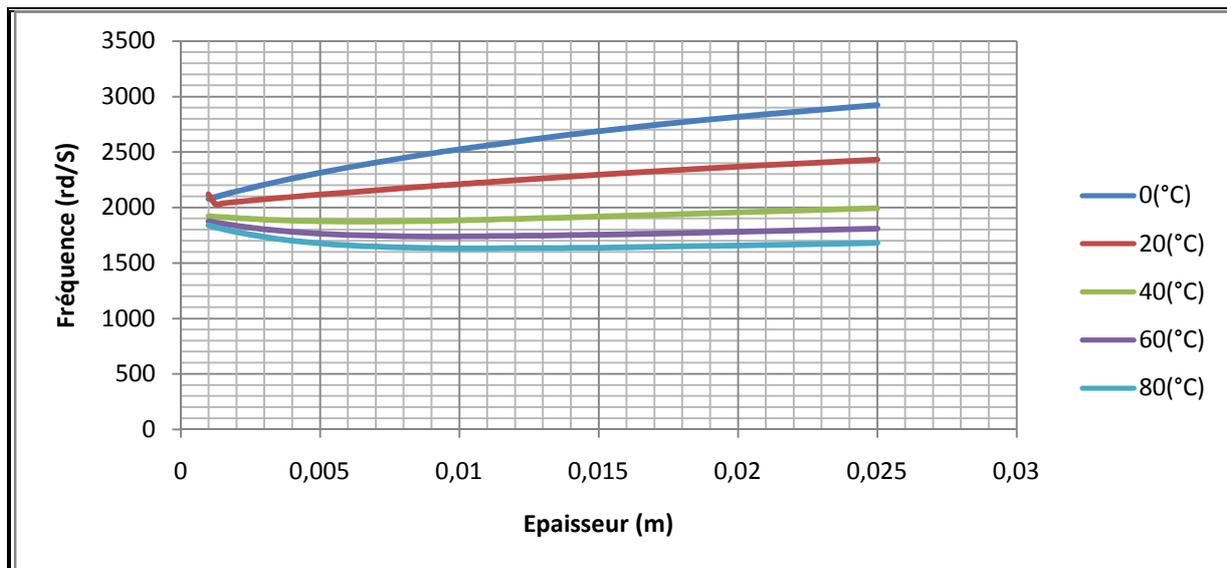


fig.4.29 : Variation des fréquences du troisième mode de la poutre sandwich en fonction de l'épaisseur de cœur pour différentes températures

**D. Conclusion :**

A partir des essais précédents on remarque que la température a une grande influence sur le mouvement vibratoire des poutres sandwiches à cause des effets que nous observons, les courbes de mouvement sont décalés vers la droite, les amplitudes des structures vibrantes diminuent rapidement quand la température augmente. L'épaisseur du cœur a une grande influence sur les vibrations des poutres sandwiches, ceci se manifeste par le shift des courbes des réponses d'une part, d'autre part les amplitudes des réponses diminuent lorsque l'épaisseur du cœur viscoélastique de la poutre augmente.

**4.2.7. Effet de variation de température sur le décrétement logarithmique**

Dans ce test nous extrairons les déplacements vibratoires ( $U_1$  et  $U_2$ ) de la structure à partir de logiciel de calcul (suivre les étapes présentées dans l'annexe n°02), puis on calcule le décrétement logarithmique ( $\delta$ ) dans les différentes températures comme celui suit :

$$\delta = \text{Ln} \left( \frac{U_1}{U_2} \right) \quad (76)$$

**A. Poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,001m**

T (°C)	U1	U2	Ln(U1 /U2)
0	0,623245	0,545437	0,13335239
10	0,628518	0,55124	0,13119438
20	0,633908	0,556871	0,12957022
30	0,659179	0,578215	0,13104935
40	0,671821	0,589677	0,13041701
50	0,679022	0,595613	0,1310624
60	0,684686	0,599808	0,13235074
70	0,690465	0,605836	0,13075596
80	0,697401	0,612615	0,12962389

Tab.4.20 : Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,001m

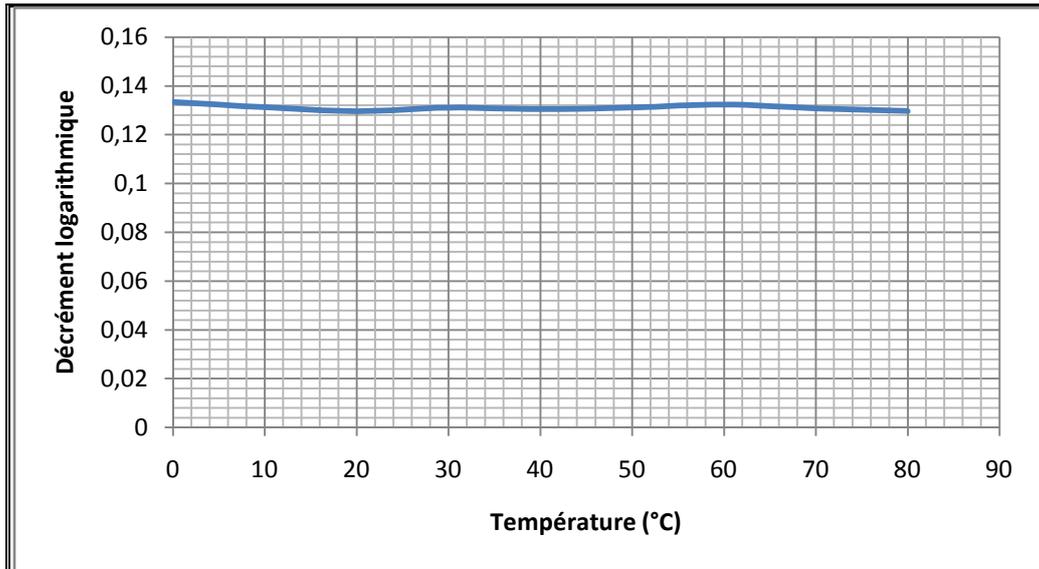


Fig.4.30 : Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,001m

**B. Poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m**

T (°C)	U1	U2	Ln (U1 /U2)
0	0,204067	0,178713	0,1326672
10	0,212169	0,186214	0,13048658
20	0,219373	0,192292	0,13175843
30	0,234072	0,205947	0,12800991
40	0,249029	0,21914	0,12785856
50	0,260704	0,22822	0,13307559
60	0,264892	0,232613	0,12994607
70	0,270061	0,237043	0,1304063
80	0,281515	0,245021	0,13884181

Tab.4.21 : Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m

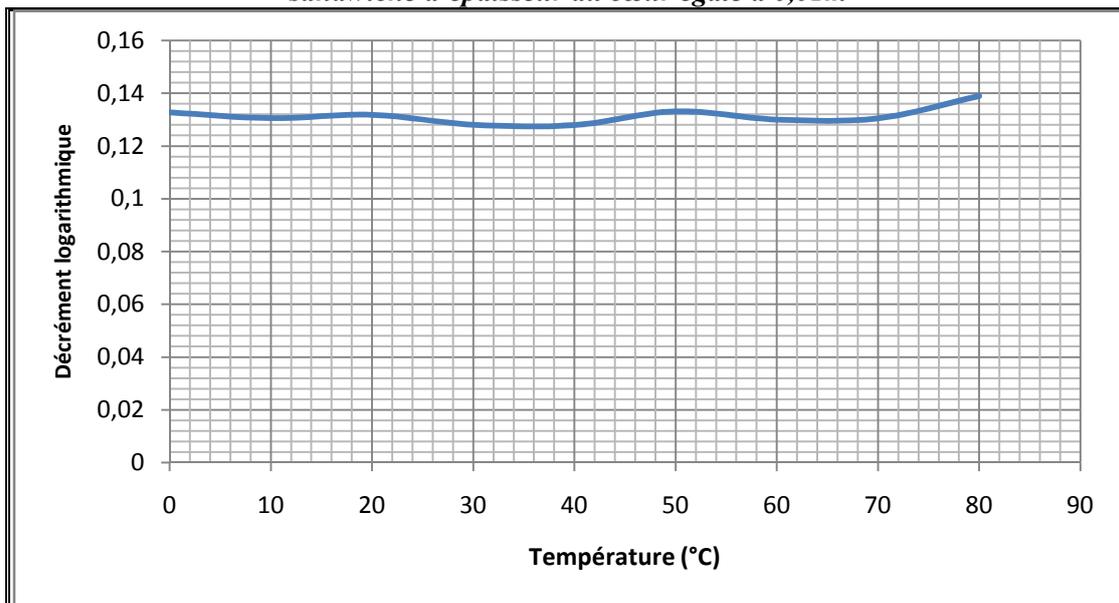
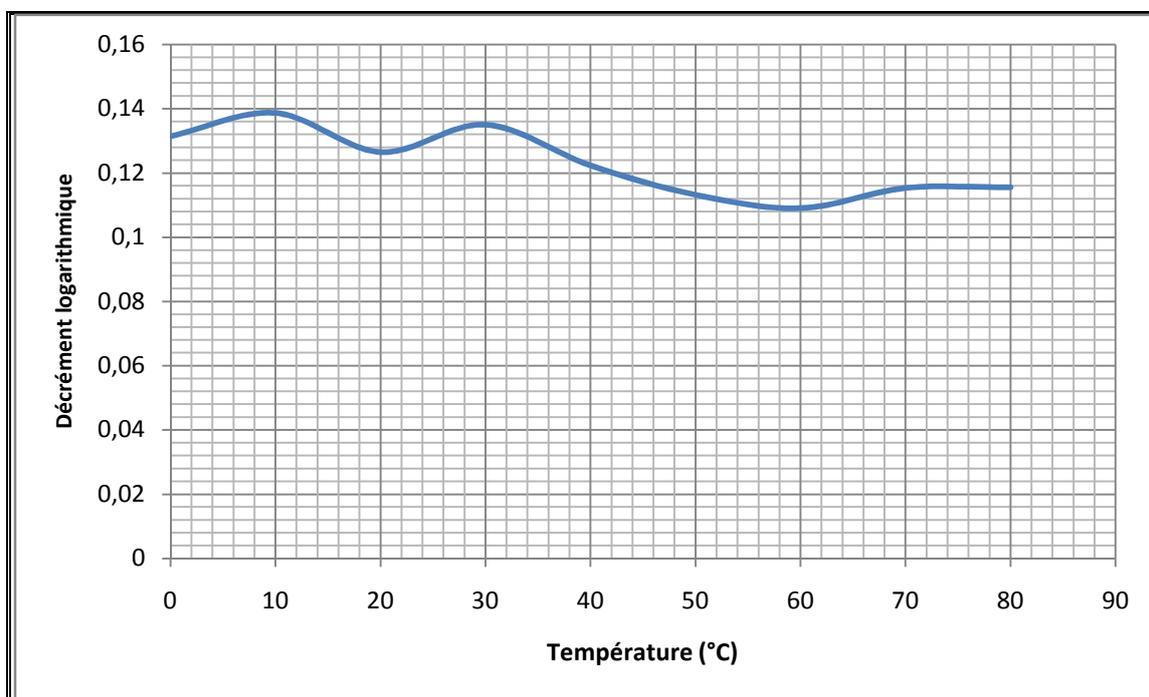


Fig.4.31: Variation du décrétement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m

**C. Poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,025m**

T (°C)	U1	U2	Ln(U1 /U2)
0	0,0728987	0,0639238	0,13137906
10	0,0790678	0,0688322	0,13863405
20	0,0839847	0,0740078	0,12646415
30	0,0931201	0,0813612	0,13499156
40	0,102665	0,0908464	0,12230109
50	0,110163	0,0983739	0,11318556
60	0,112792	0,101143	0,10901006
70	0,116088	0,103447	0,11528912
80	0,123222	0,109784	0,11547281

**Tab.4.22 : Variation du décrement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,025m**



**Fig4.32 : Variation du décrement logarithmique en fonction de la température pour la poutre sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,025m**

**D. CONCLUSION**

Nous avons constaté aussi que la variation de la température a une grande influence sur la variation du décrement logarithmique surtout pour les poutres épaisses (épaisseur du cœur entre 0,01 m et 0,025 m).

### 4.3. Extension de la méthode proposée aux plaques sandwiches

#### 4.3.1. Modalisation d'une plaque sandwich composite

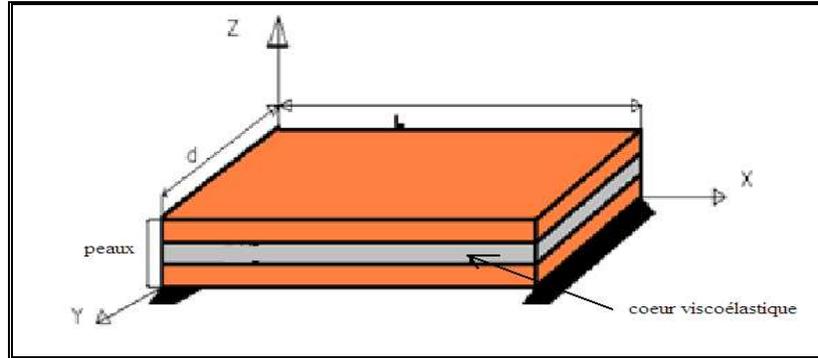


Fig.4.33 : Schéma d'une plaque sandwich

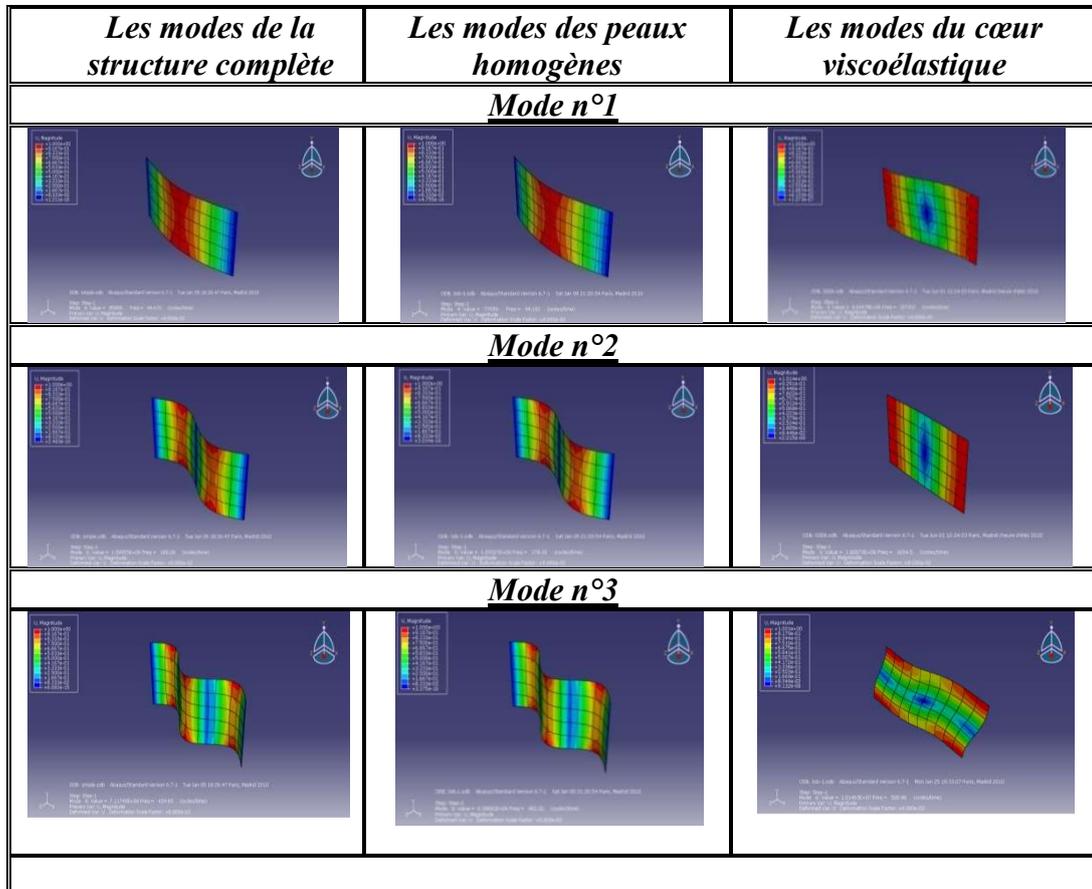
Dans ces tests on essaye d'appliquer le principe de Dowell sur les plaques sandwiches, pour cela nous suivrons les mêmes étapes de modélisations appliquées sur les poutres sandwiches.

#### A. Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque et des matériaux utilisés

	L(m)	ht	d(m)	h(m)	E (Pa)	$\nu$	P (kg/m <sup>3</sup> )
Cœur (C64D)	0,8	0.016	0.4	0.001	$0,4 \times 10^9$	0.49	1240
Peau 1 (aluminium)				0.01	$72 \times 10^9$	0.32	2685
Peau 2 (aluminium)				0.005	$72 \times 10^9$	0.32	2685

Tab.4.23 : Caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque sandwich

#### B. Formes de la plaque sandwich



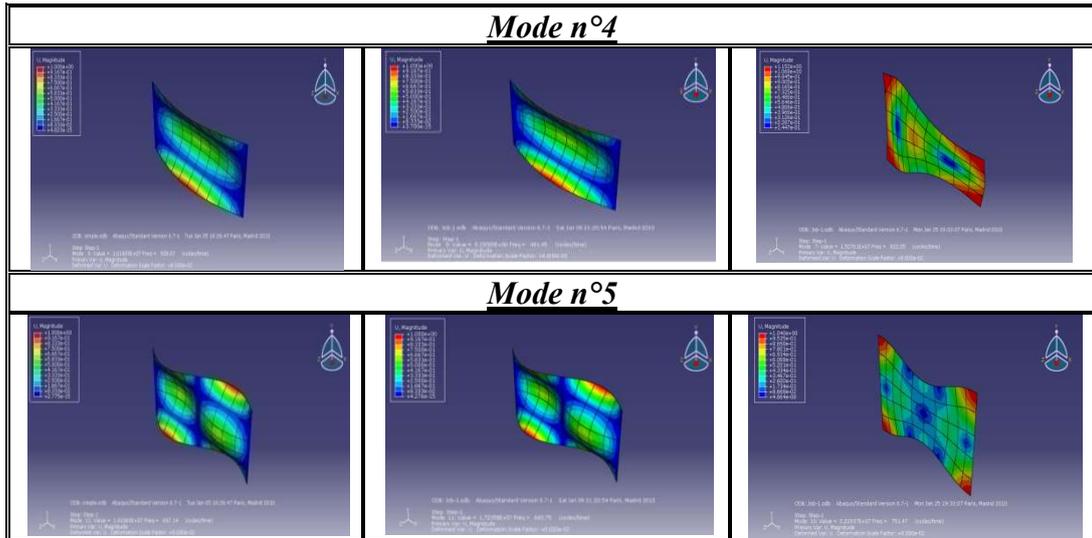


Fig.4.34 : Les cinq premiers modes de la plaque sandwich par Abaqus et la méthode proposée

**C. Les résultats obtenus par les différents tests**

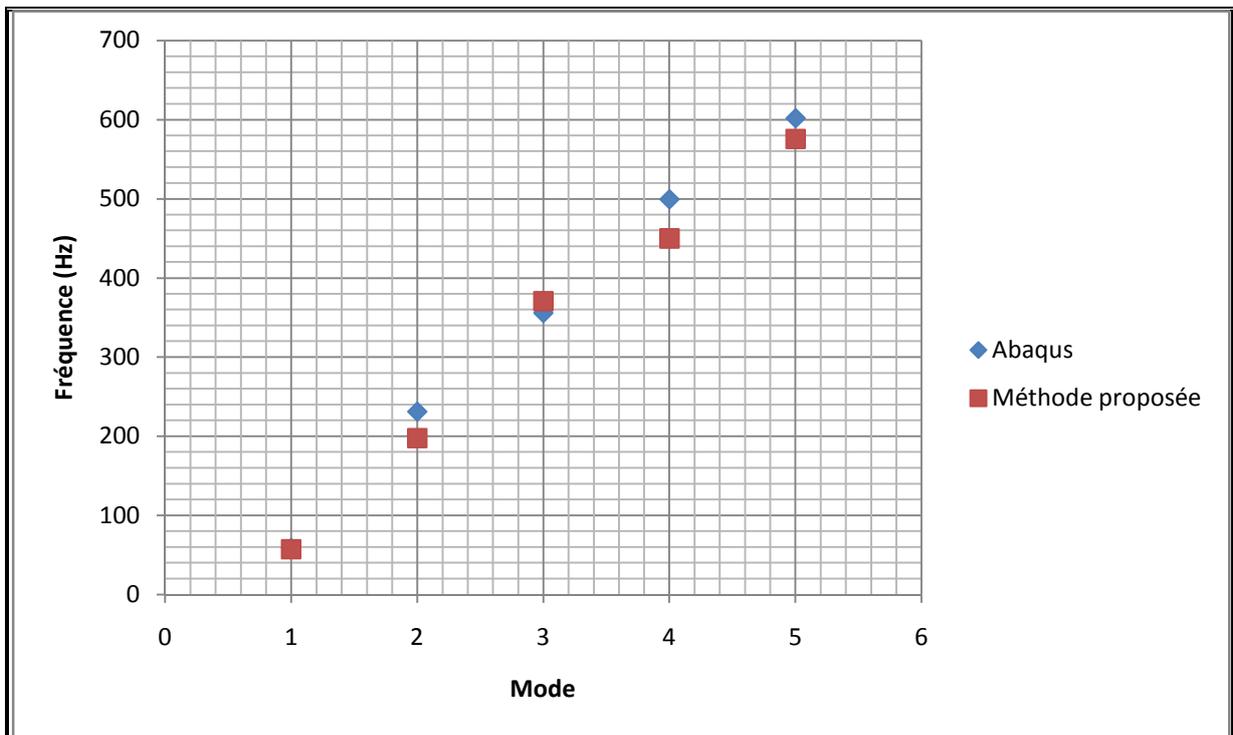


fig.4.35 : Fréquences de la plaque sandwich par Abaqus et la méthode proposée

**4.3.2. Effet de l'épaisseur du cœur de la plaque sandwich**

Les résultats obtenus par les différents tests sont résumés dans les figures suivantes

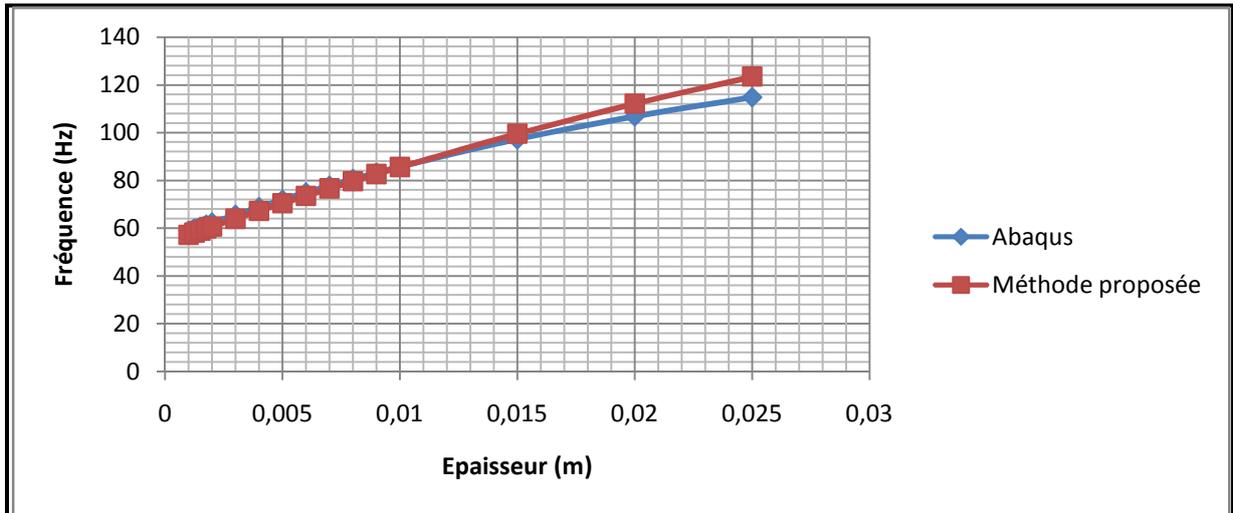


fig.4.36.1 : Variation des fréquences d'une plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du coeur dans le premier mode

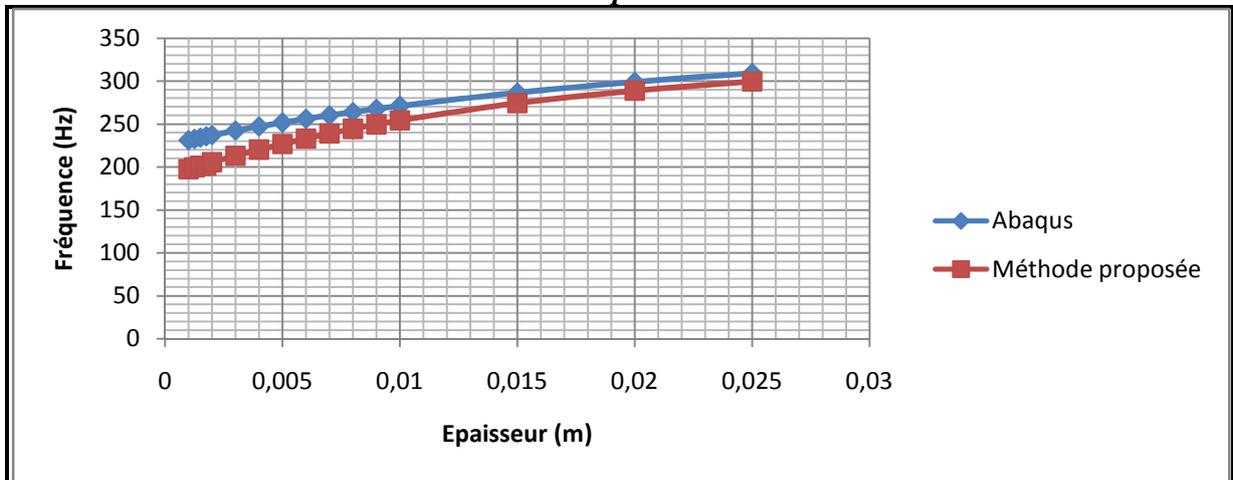


fig. 4.36.2 : Variation des fréquences d'une plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du coeur dans le deuxième mode

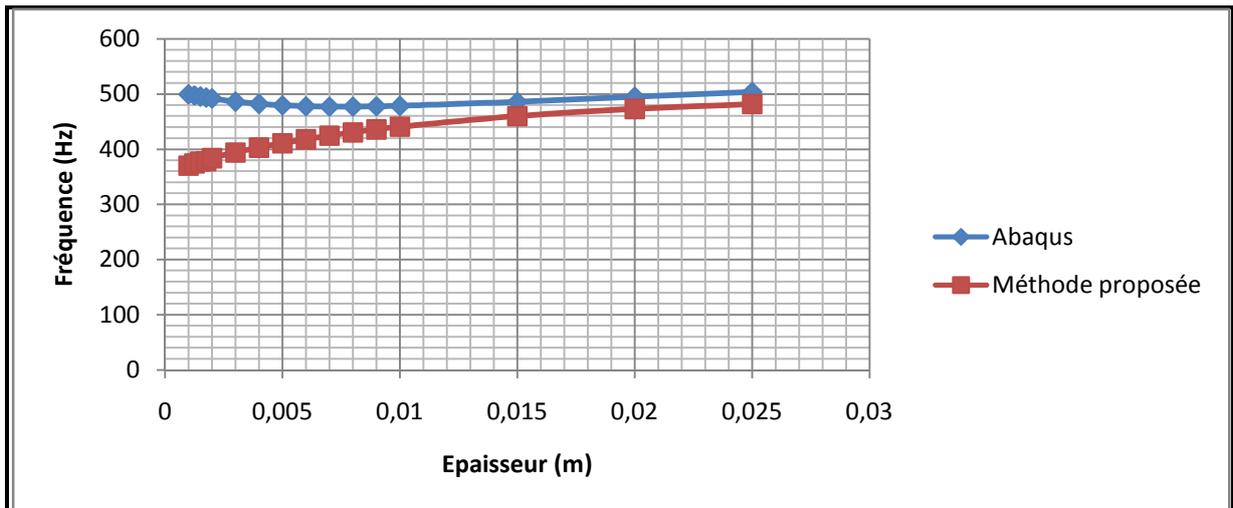


fig. 4.36.3 : Variation des fréquences d'une plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du coeur dans le troisième mode

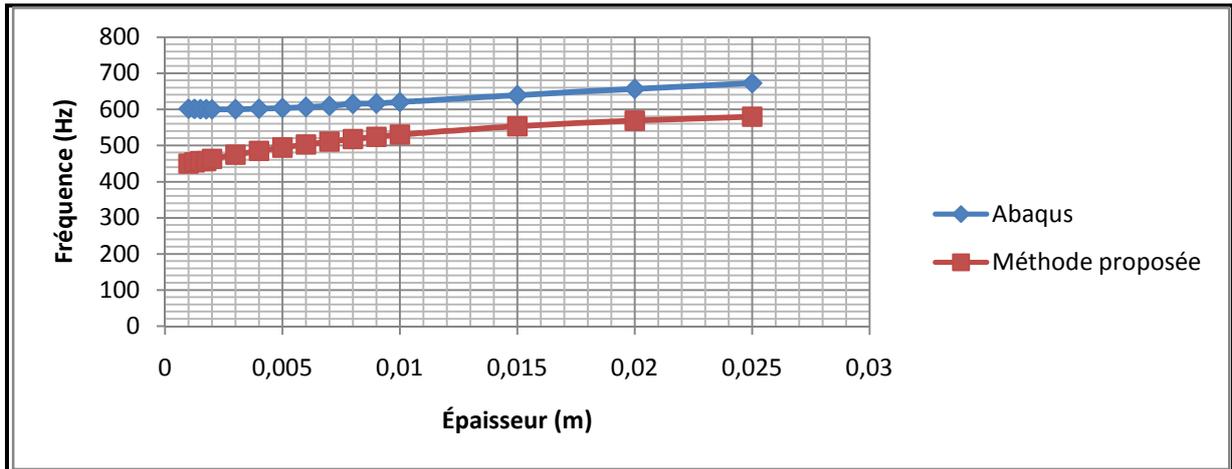


fig. 4.36.4 : Variation des fréquences d'une plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du coeur dans le quatrième mode

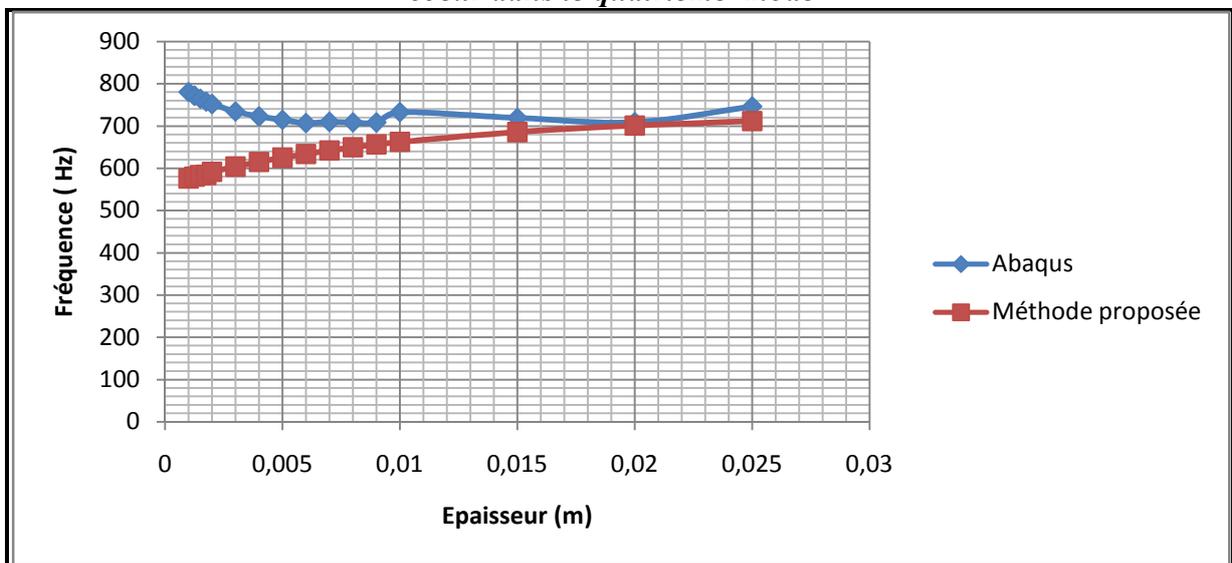


fig. 4.36.5 : Variation des fréquences d'une plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du coeur dans le cinquième mode

### 4.3.3. Effet de la température sur les caractéristiques dynamique de la plaque sandwich

#### 4.3.3.1. Variation des fréquences de la plaque sandwich par la méthode proposée

But de ce test est de voir l'influence de la température sur le comportement dynamique de la plaque sandwich. Dans ce test nous gardons la même géométrie de la plaque précédente et le même type d'analyse, seul les caractéristiques mécaniques des matériaux changent en fonction des températures :

- 1- les semelles sont réalisées en l'aluminium.
- 2- le coeur est réalisé en polyuréthanes à base de polyester (C64D).

❖ **Remarque :** Nous considérons que les matériaux utilisés dans ces tests sont isotropes élastiques et linaires.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont données dans les tableaux suivants:

**i. Semelles en Aluminium [37]**

Densité =  $2685 \text{ kg/m}^3$   $\nu = 0.32$

T(C°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
E(GPa)	73	72.5	72	69.5	68.5	68	67.5	67	66.5

Variations des caractéristiques mécaniques de l'aluminium (Al) en fonction des températures (rappelle).

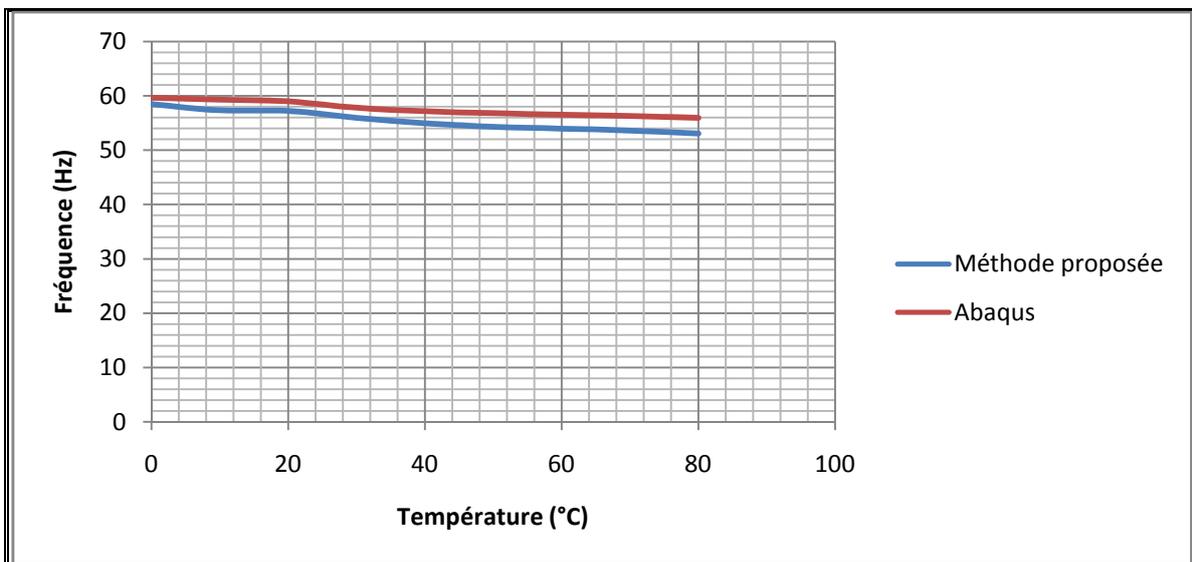
**ii. Cœur en polyuréthane base polyester (C 64 D) [26]**

Densité =  $1240 \text{ kg/m}^3$   $\nu = 0.49$

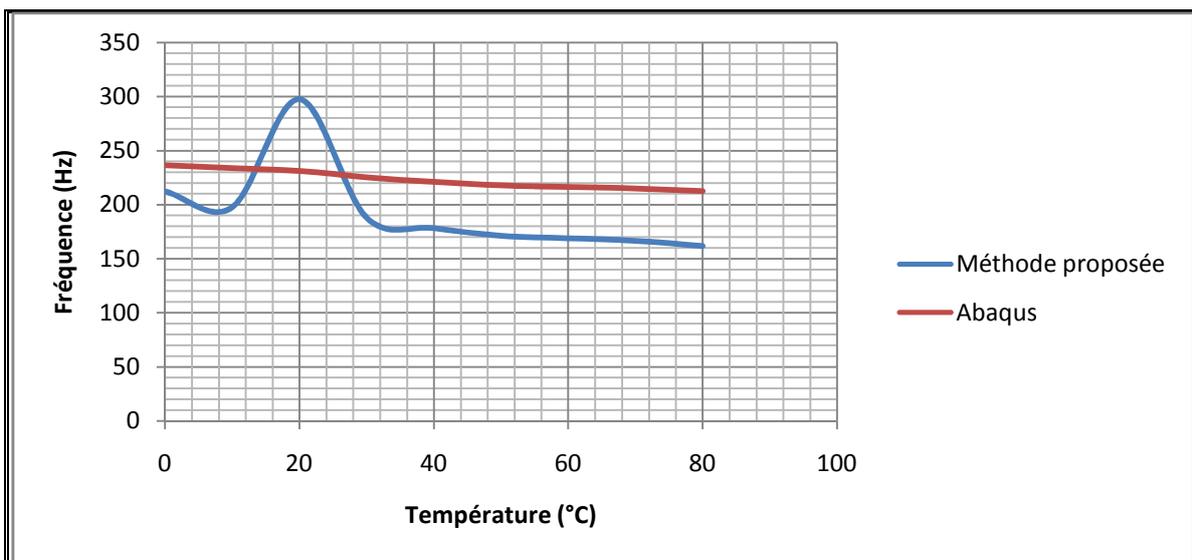
T(C°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
E(GPa)	0.650	0.500	0.400	0.320	0.250	0.210	0.200	0.190	0.170

Variations des caractéristiques mécaniques du (C 64 D) en fonction des températures (rappelle).

Les résultats obtenus par les différents tests sont les suivants :



**Fig. 4.37.1: Variation des fréquences de la plaque sandwich en fonction de la variation de la température (premier mode)**



**Fig. 4.37.2: Variation des fréquences de la plaque sandwich en fonction de la température (deuxième mode)**

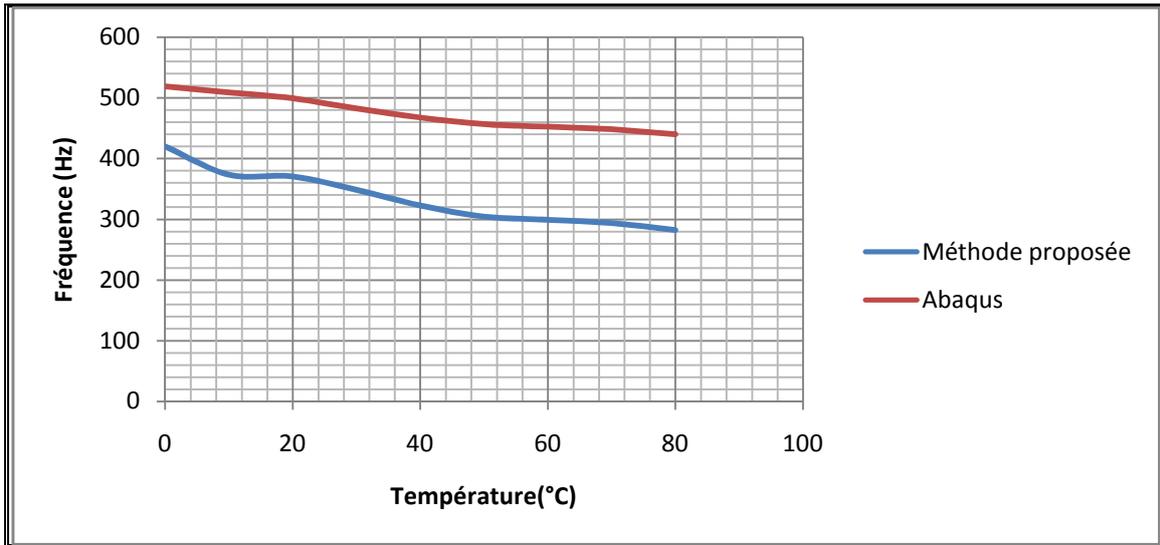


Fig. 4.37.3: Variation des fréquences de la plaque sandwich en fonction de la température (troisième mode)

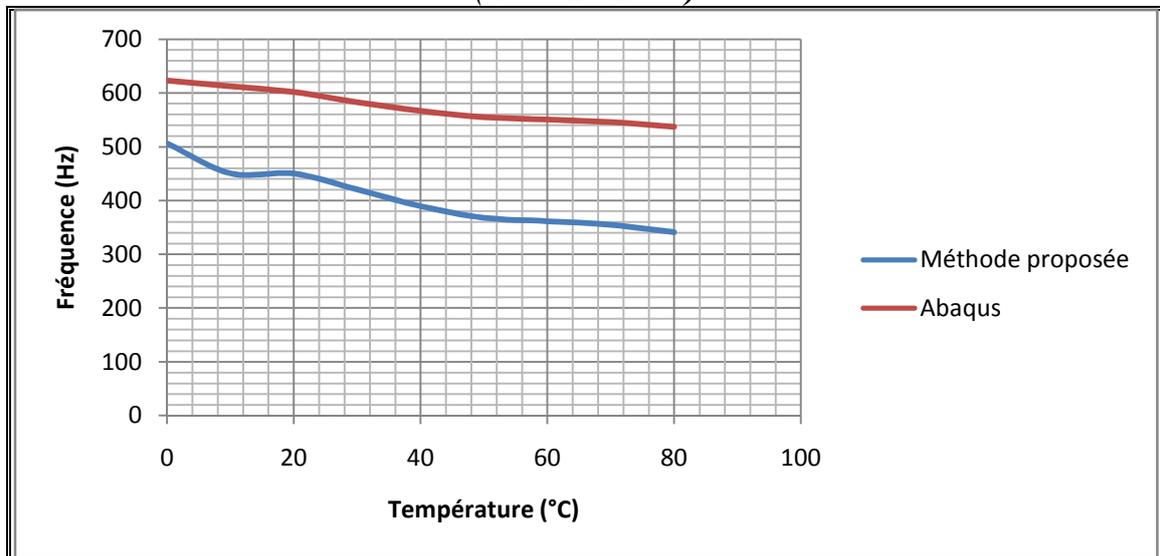


Fig. 4.37.4: Variation des fréquences de la plaque sandwich en fonction de la température (quatrième mode)

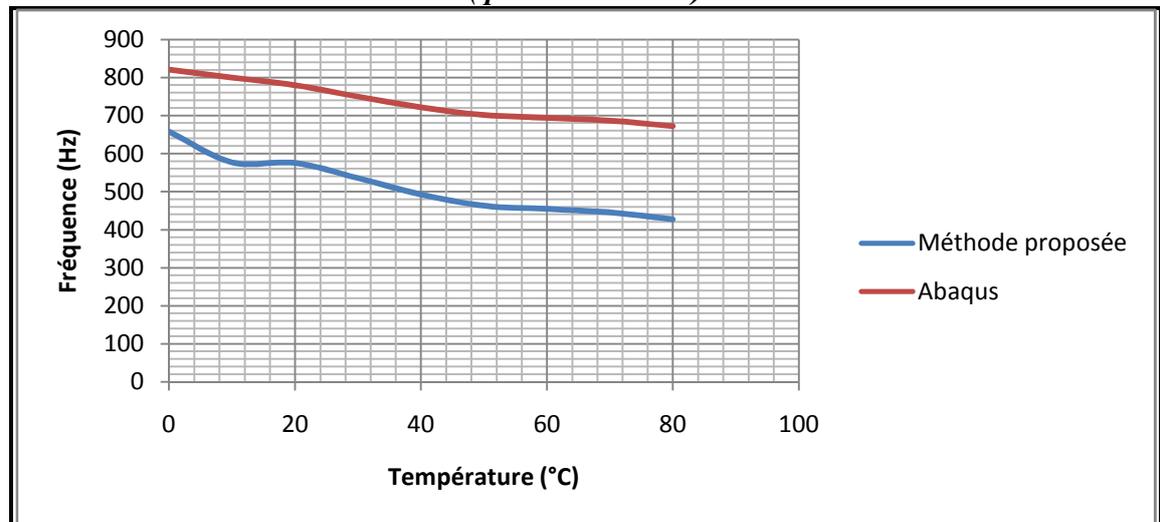
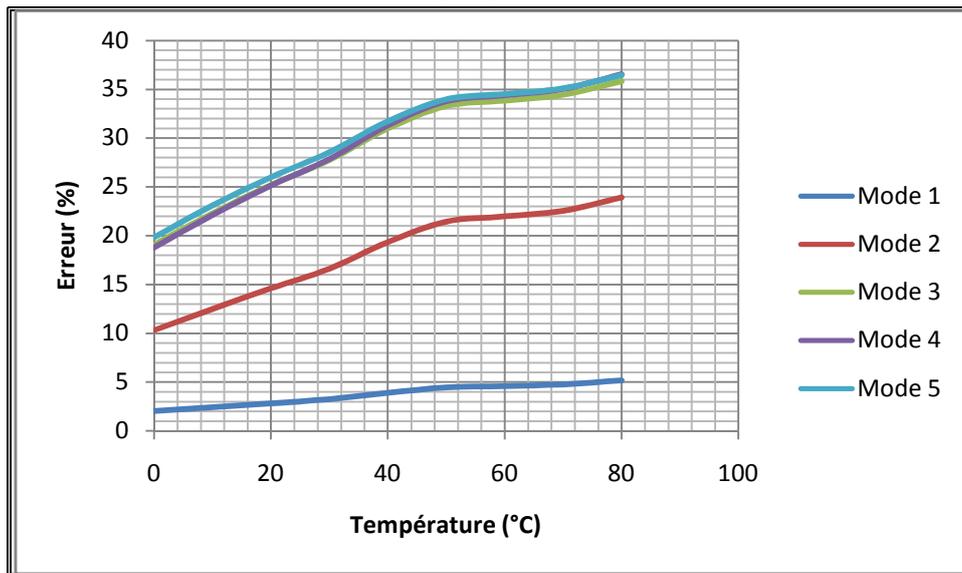


Fig. 4.37.5: Variation des fréquences de la plaque sandwich en fonction de la température (cinquième mode)

**4.3.3.2. Variation de l'erreur en fonction des températures**

Mode (Hz)	Température (°C)								
	0	10	20	30	40	50	60	70	80
1	2,0211	2,4052	2,8163	3,2452	3,8914	4,4427	4,5916	4,7562	5,1698
2	10,298	12,482	14,5900	16,611	19,338	21,437	21,971	22,543	23,917
3	19,065	22,290	25,1776	27,759	30,985	33,289	33,855	34,45	35,840
4	18,788	22,119	25,1324	27,852	31,304	33,770	34,382	35,029	36,545
5	19,844	23,106	25,994	28,551	31,72	33,963	34,513	35,089	36,436

**Tab.4.24: Variation de l'erreur en fonction de la température obtenue par les différents tests de la plaque sandwich**



**Fig. 4.38 : Variation de l'erreur des premiers 5 modes de la plaque sandwich en fonction de la température**

**4.3.4. Représentation fréquentielles de la réponse des plaques sandwiches en fonction de la température [27]**

La réponse forcée par décomposition modale pour une plaque simplement appuyée est donnée par la formule suivante :

$$w(x, y, \omega) = \sum_m \sum_n \frac{F_{mn} e^{j\omega t}}{M_{mn} [\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_{mn}\xi_{mn}]} \phi_{mn}(x, y) \quad (77)$$

Avec la masse généralisée :

$$M_{mn} = \rho h \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy \quad (78)$$

La force généralisée :

$$F_{mn} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) \phi_{mn}(x, y) dx dy \quad (79)$$

**Cas d'une plaque simplement supportée**

Déformée modale :

$$\phi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (80)$$

La masse généralisée :

$$M_{mn} = \frac{\rho h L_x L_y}{4} \quad (81)$$

La force généralisée :

$$F_{mn} = F_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (82)$$

$w(x, y, \omega)$  peut s'écrire :

$$w(x, y, \omega) = \sum_m \sum_n \frac{F_0 \sin \frac{m\pi x_0}{L_x} \sin \frac{n\pi y_0}{L_y} e^{j\omega t}}{M_{mn}[\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_{mn}\xi_{mn}]} \sin \left( \frac{m\pi x}{L_x} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{L_y} \right) \quad (83)$$

$$P(t) = 100 \cos(\omega t) \quad \omega = 100\pi \quad \left( \frac{rad}{s} \right) \quad P=100 \text{ N}$$

$$l_x = 0,8m ; l_y = 0,4m ; \xi_1 = 0,054 ; x_0 = 3l_x/4 = 0,6m ; y_0 = 3l_y/4 = 0,3m ;$$

$$x = \frac{3l_x}{4} = \frac{3 \times 0,8}{4} = 0,6m ; y = \frac{3l_y}{4} = \frac{3 \times 0,4}{4} = 0,3m ;$$

S : varie suivant l'épaisseur du cœur. La densité  $\rho_{equi} = \frac{\rho_p v_p + \rho_c v_c}{v_{tot}}$  ; m=1 et n= 1,2,3

**a. Géométrie et caractéristiques mécaniques de la plaque sandwich :**

	L(m)	h <sub>1</sub> (m)	d(m)	h(m)
Cœur (C64D)	0,8	0.016	0.4	0.001
Peau 1				0.01
Peau 2				0.005

Tab.4.25 : Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque sandwich modélisée

**b. Semelles en Aluminium :** Densité = 2685 kg /m<sup>3</sup> v= 0.32

T(°C)	0	20	40	60	80
E(GPa)	73	72	68.5	67.5	66.5

Tab : variation des caractéristiques mécaniques de l'aluminium en fonction des températures [33].

**c. Cœur en polyuréthane base polyester (C 64 D):** Densité = 1240 kg /m<sup>3</sup> v= 0.49

T(°C)	0	20	40	60	80
E(GPa)	0.650	0.400	0.250	0.200	0.170

Tab : variation des caractéristiques mécaniques du C 64 D en fonction des températures [34].

**4.3.4.1. Effet de l'épaisseur du cœur viscoélastique**

**I. Cas d'une Plaque d'épaisseur du cœur égale à 0,001m**

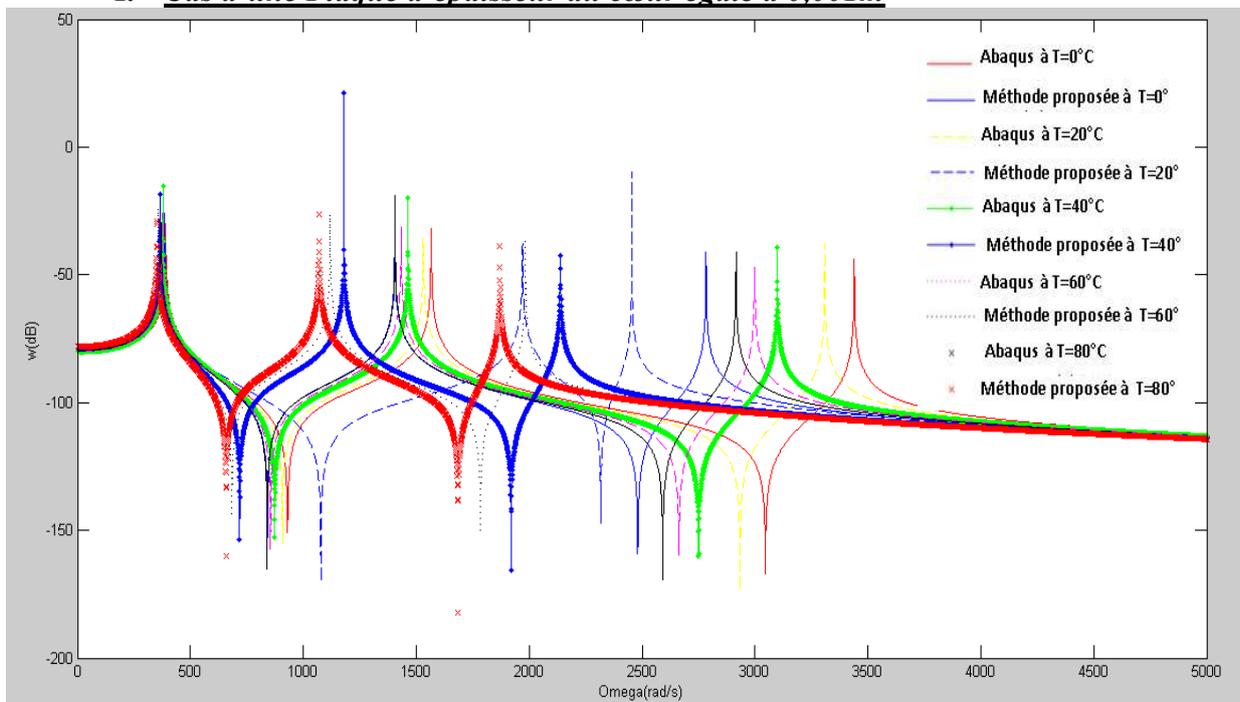


fig. 4.39: Effet de la variation de la température sur la vibration d'une plaque sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,001 m

**II. Cas d'une Plaque d'épaisseur du cœur égale à 0,01m**

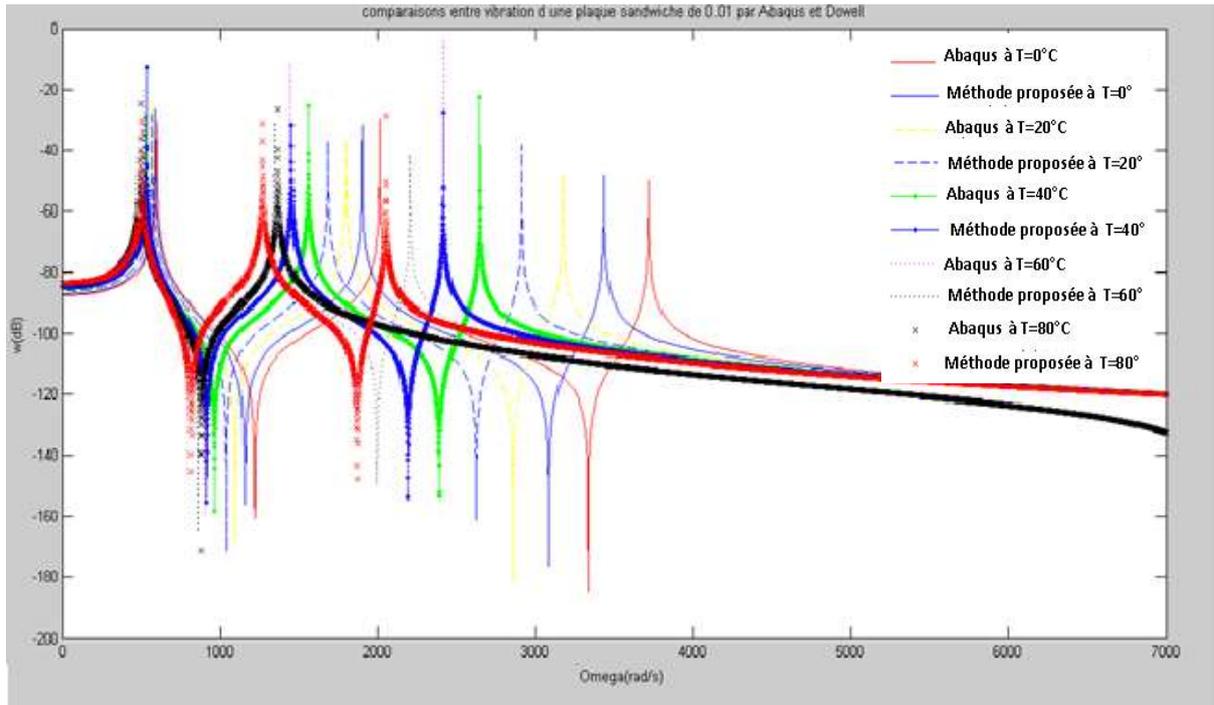


fig. 4.40 : Effet de la variation de la température sur la vibration d'une plaque sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,01 m

**III. Cas d'une Plaque d'épaisseur du cœur égale à 0,025m**

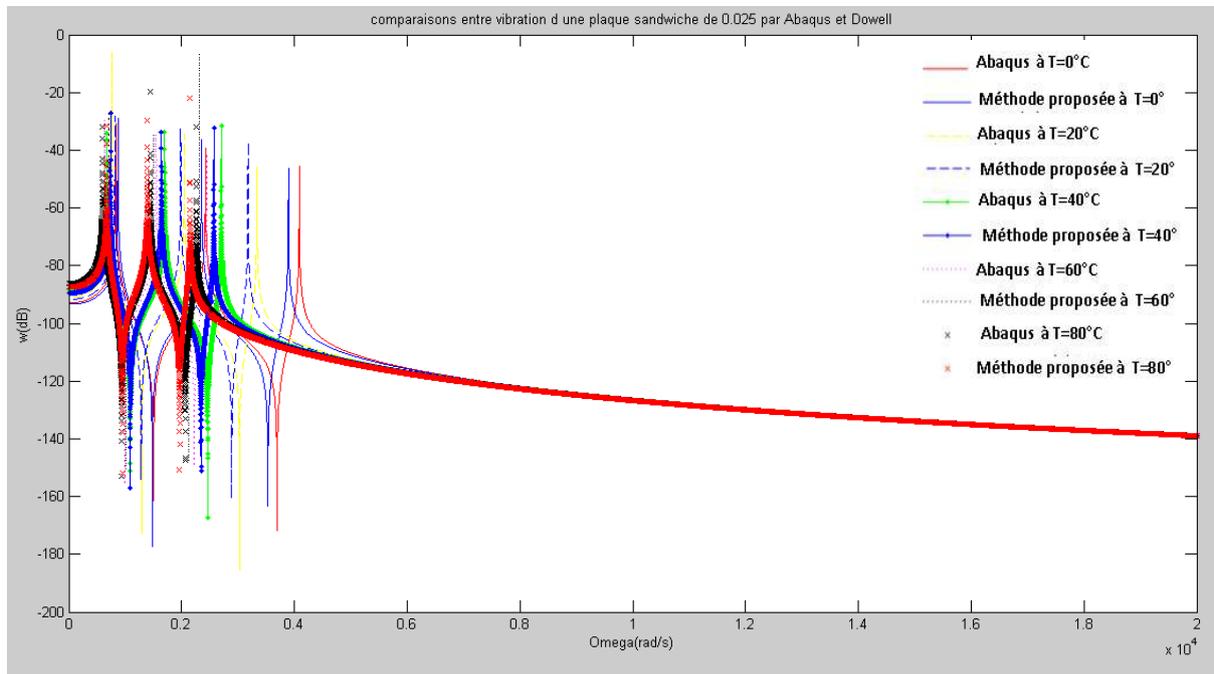
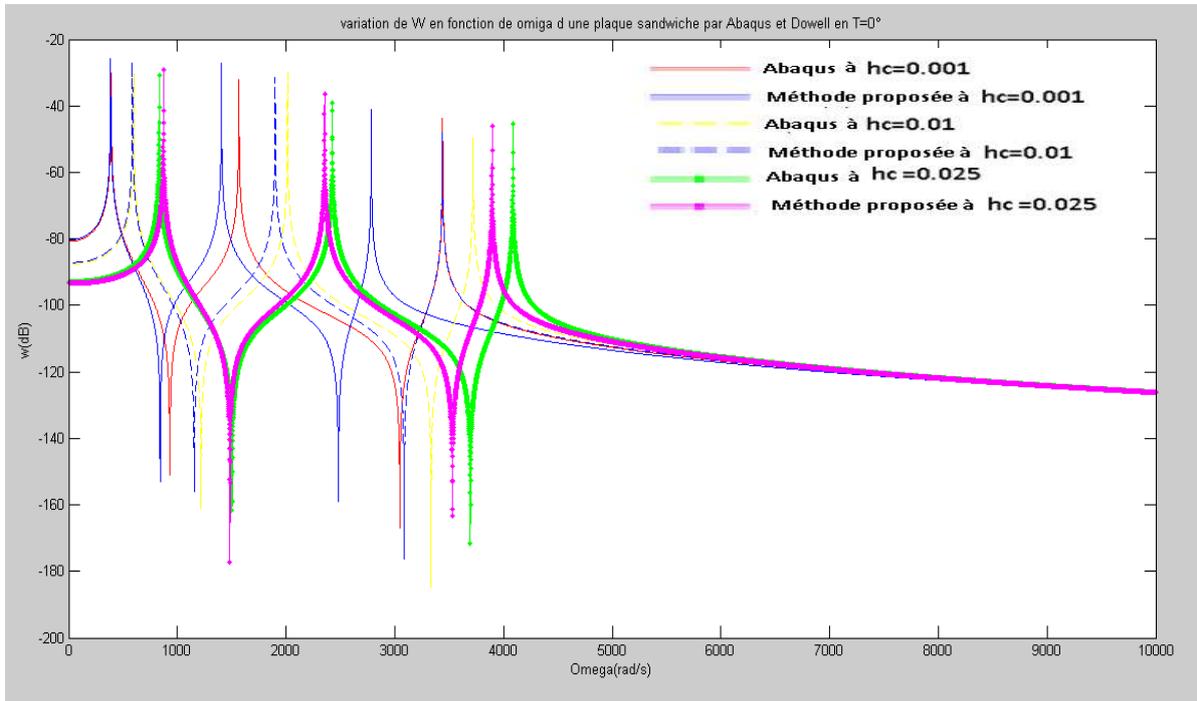


fig. 4.41 : Effet de la variation de la température sur la vibration d'une plaque sandwich à épaisseur du cœur viscoélastique égale à 0,025 m

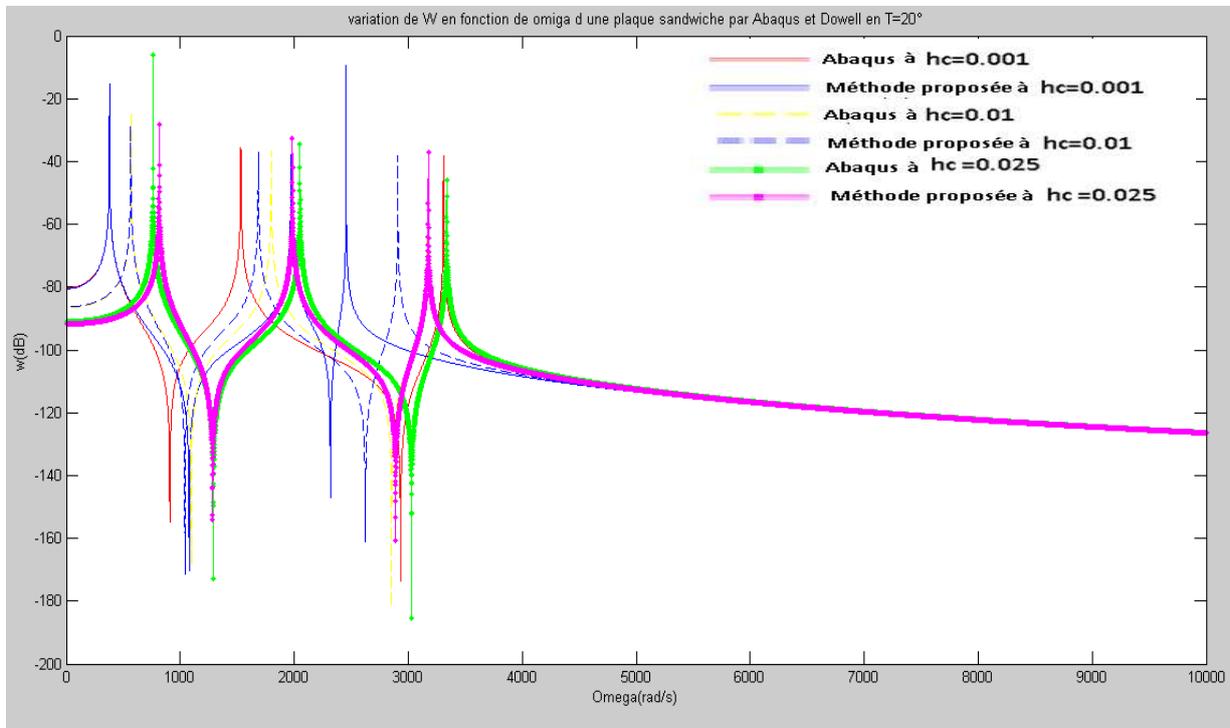
**4.3.4.2. Vibration des plaques sandwichs sous l'effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique dans les différentes températures**

**I. Variation de l'épaisseur à  $T=0^{\circ}\text{C}$**



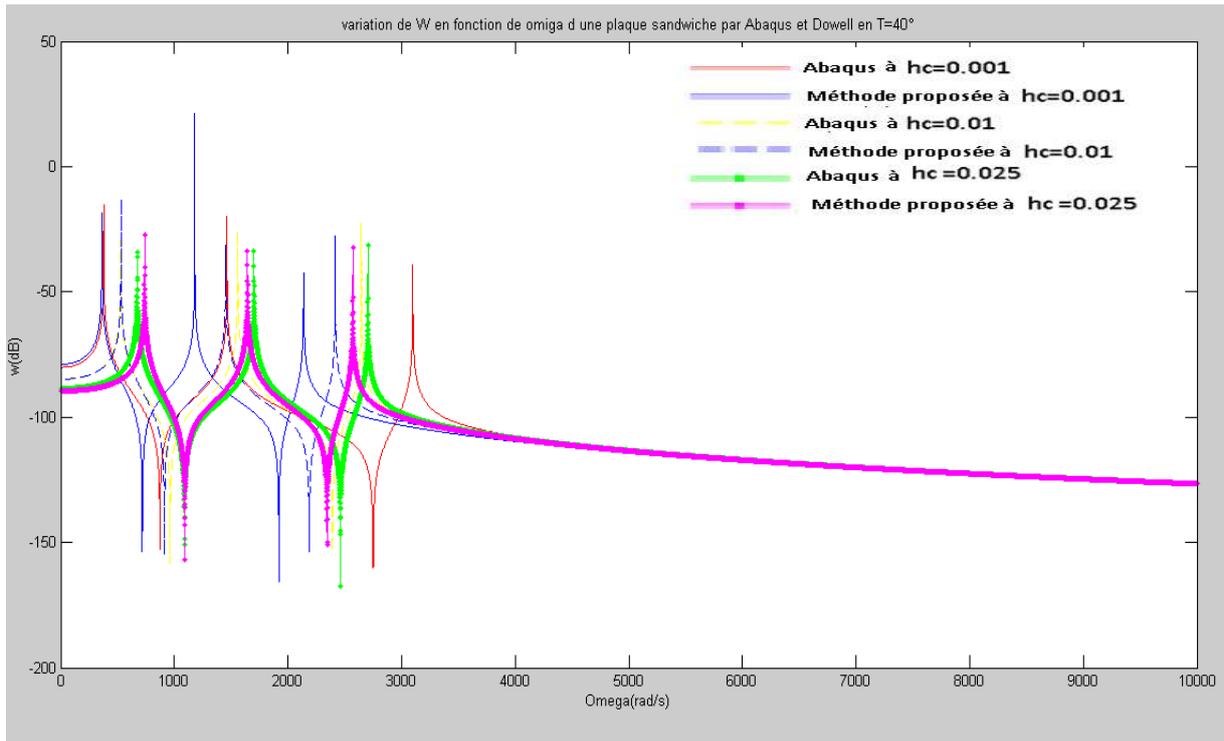
**Fig. 4.42.1 : Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique sur la vibration d'une plaque sandwich à  $T=0^{\circ}\text{C}$**

**II. Variation de l'épaisseur à  $T=20^{\circ}\text{C}$**



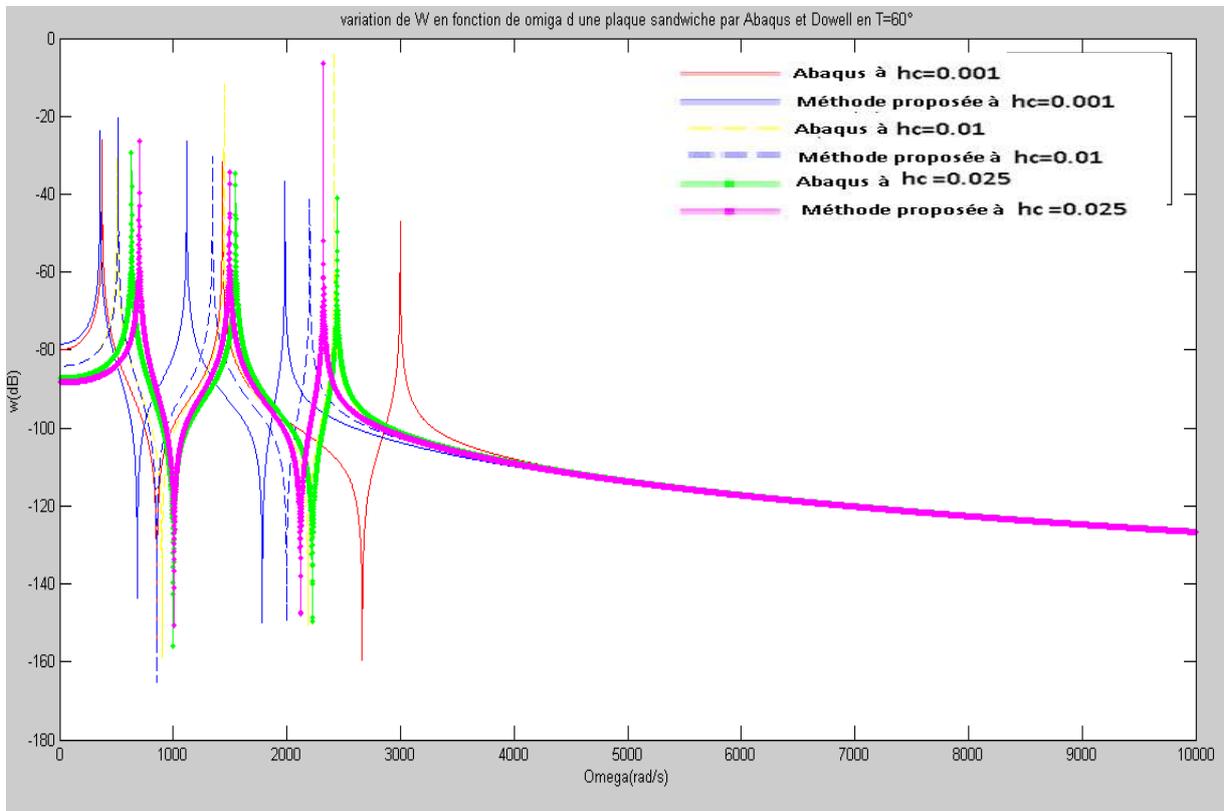
**Fig. 4.42.2 : Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique sur la vibration d'une plaque sandwich à  $T=20^{\circ}\text{C}$**

**III. Variation de l'épaisseur à  $T=40^{\circ}\text{C}$**



**Fig. 4.42.3 : Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique sur la vibration d'une plaque sandwiche à  $T=40^{\circ}\text{C}$**

**IV. Variation de l'épaisseur à  $T=60^{\circ}\text{C}$**



**Fig. 4.42.4 : Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique sur la vibration d'une plaque sandwiche à  $T=60^{\circ}\text{C}$**

V. Variation de l'épaisseur à T=80°C

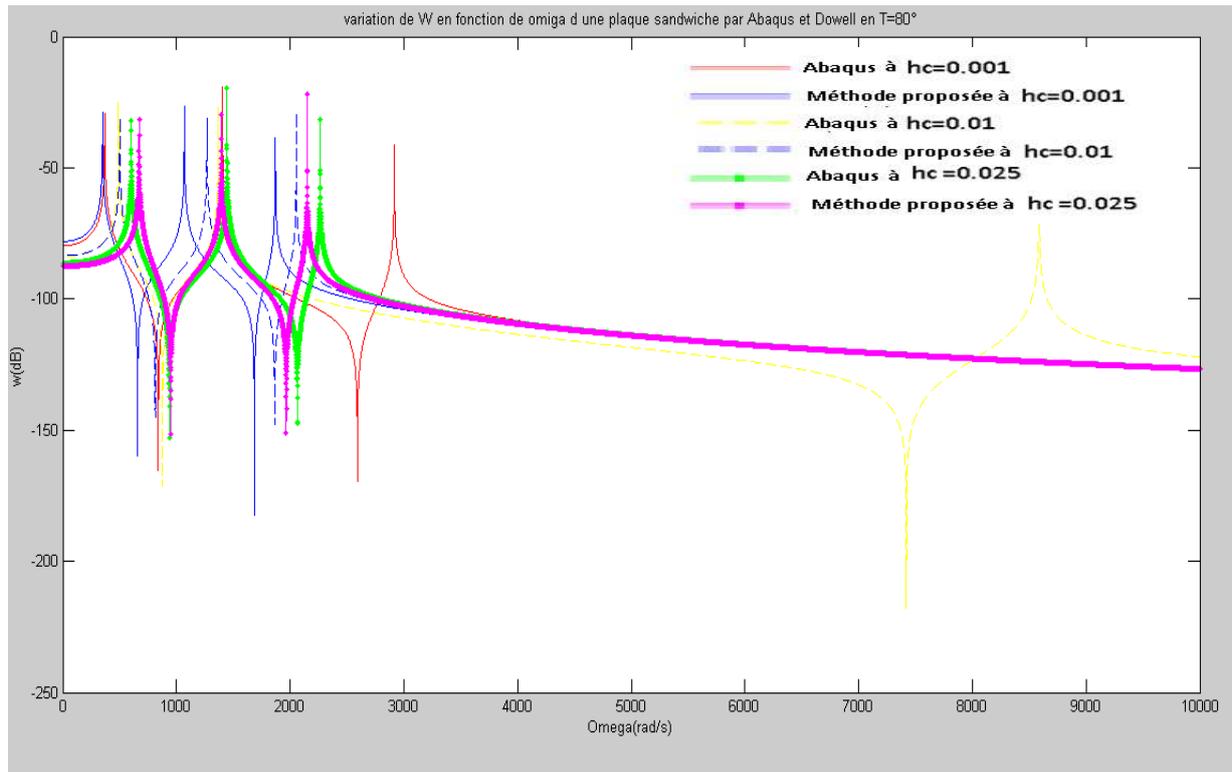


Fig. 4.42.5 : Effet de la variation de l'épaisseur du cœur viscoélastique sur la vibration d'une plaque sandwich à T=80°C

4.3.5. Variation des fréquences de la plaques sandwich en fonction de la variation des températures (hc=0,001m)

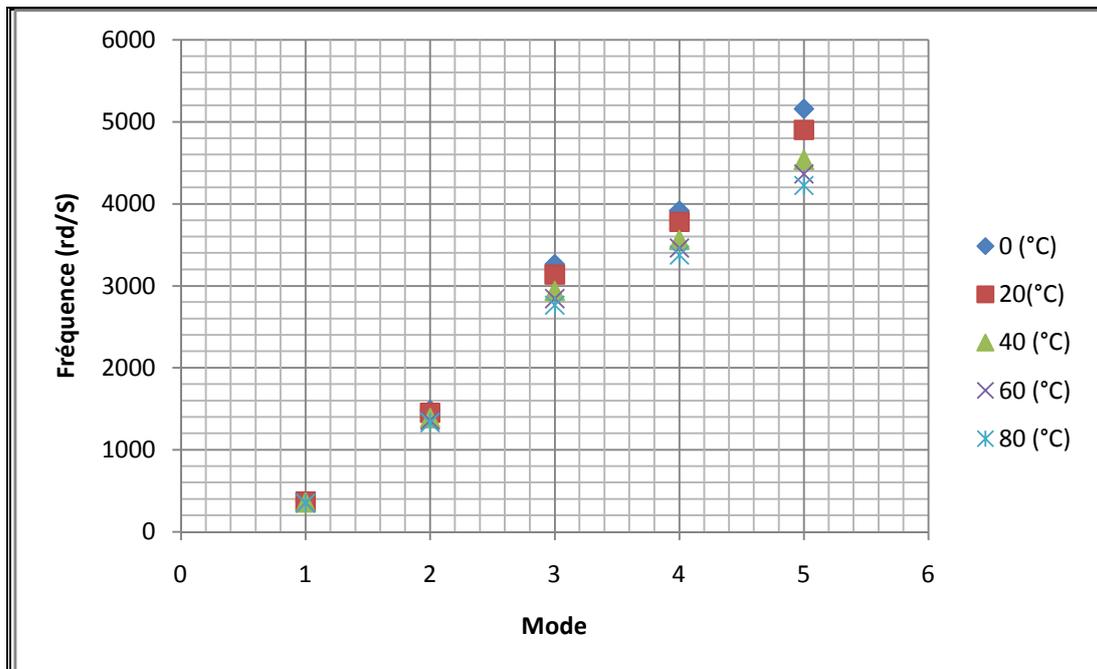


Fig. 4.43 : Variation des fréquences des 5 premiers modes de la plaque sandwich en fonction de variation de la température (hc=0,001m)

**4.3.6. Effet de variation de l'épaisseur de l'âme sur les fréquences des trois premiers modes de la plaque sandwich dans différentes température**

**A. Premier mode en rd/s**

Epaisseur (m)	Températures (°C)				
	0	20	40	60	80
0,001	374,48896	370,27508	359,07156	355,09004	351,34716
0,00125	380,27284	375,6068	363,7376	359,38556	355,32868
0,0015	386,05672	380,91968	368,37224	363,63712	359,26624
0,00175	391,82804	386,20744	372,97548	367,84472	363,15984
0,002	416,4268	391,4638	377,52848	372,00836	366,99692
0,003	420,38948	412,1878	395,31344	388,15424	381,824
0,004	442,75884	432,27124	412,3448	403,49	395,80956
0,005	464,60068	451,70156	428,61	418,03448	409,00384
0,006	485,87732	451,61364	444,14044	431,83164	421,46964
0,007	506,55736	488,5212	458,94868	444,92544	433,25092
0,008	526,64708	505,92308	473,07868	457,35356	444,4042
0,009	546,13392	522,66556	486,56812	469,17252	454,97344
0,01	565,03672	538,78632	499,4484	480,40744	465,00888
0,015	651,236	610,74256	555,86792	529,2156	508,35972
0,02	725,2772	670,7668	601,5612	568,28976	542,85576
0,025	789,3332	721,258	639,2412	600,22356	570,93364

Tab.4.26: Variation de l'épaisseur de l'âme sur les fréquences du premier mode modes de la plaque sandwich dans différentes température en rd /s

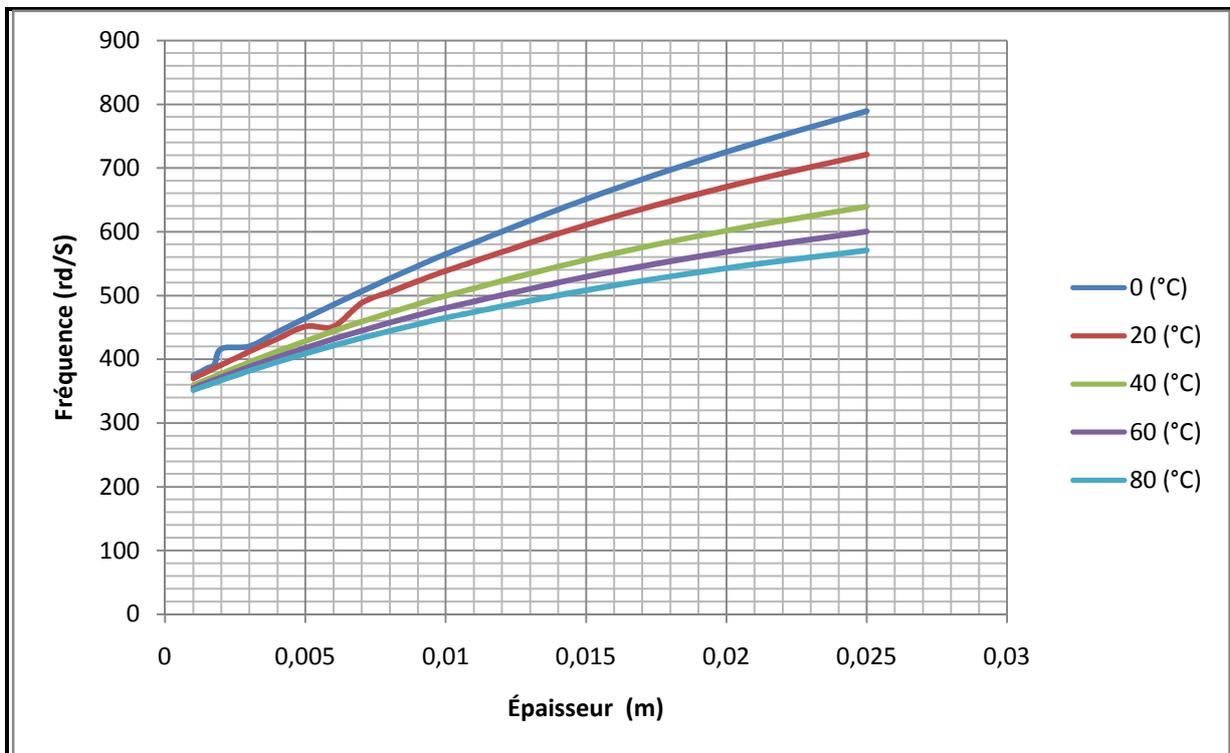


fig. 4.44 : Variation des fréquences du premier mode de la plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans différentes températures

**B. Deuxième mode en rd/s**

Épaisseur (m)	Températures (°C)				
	0	20	40	60	80
0,001	1484,906	1451,7476	1387,0636	1358,678	1333,9348
0,00125	1500,1036	1461,1676	1389,6384	1357,2336	1329,4132
0,0015	1515,1128	1470,462	1392,0876	1355,9148	1325,2056
0,00175	1529,8708	1479,5052	1394,5368	1354,6588	1321,2492
0,002	1544,3776	1488,2972	1396,9232	1353,5912	1317,544
0,003	1600,0812	1521,644	1406,2804	1350,3884	1305,4864
0,004	1652,268	1552,416	1415,5748	1349,258	1297,1968
0,005	1701,3148	1581,1156	1425,1832	1350,0116	1292,1728
0,006	1747,41	1608,1824	1435,1056	1352,398	1289,6608
0,007	1790,9932	1633,6792	1445,2792	1356,0404	1289,1584
0,008	1832,1272	1657,9828	1455,704	1360,6876	1290,226
0,009	1871,126	1681,0932	1466,1288	1366,0256	1292,4868
0,01	1908,1152	1703,136	1476,6164	1371,9916	1295,6268
0,015	2067,7528	1799,6596	1527,296	1405,2756	1318,5488
0,02	2194,7344	1878,034	1572,5748	1438,6224	1344,7992
0,025	2298,0404	1942,5924	1611,8876	1468,9548	1369,8564

Tab.4.27 : Variation des fréquences du deuxième mode de la plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans différentes températures en rd/s

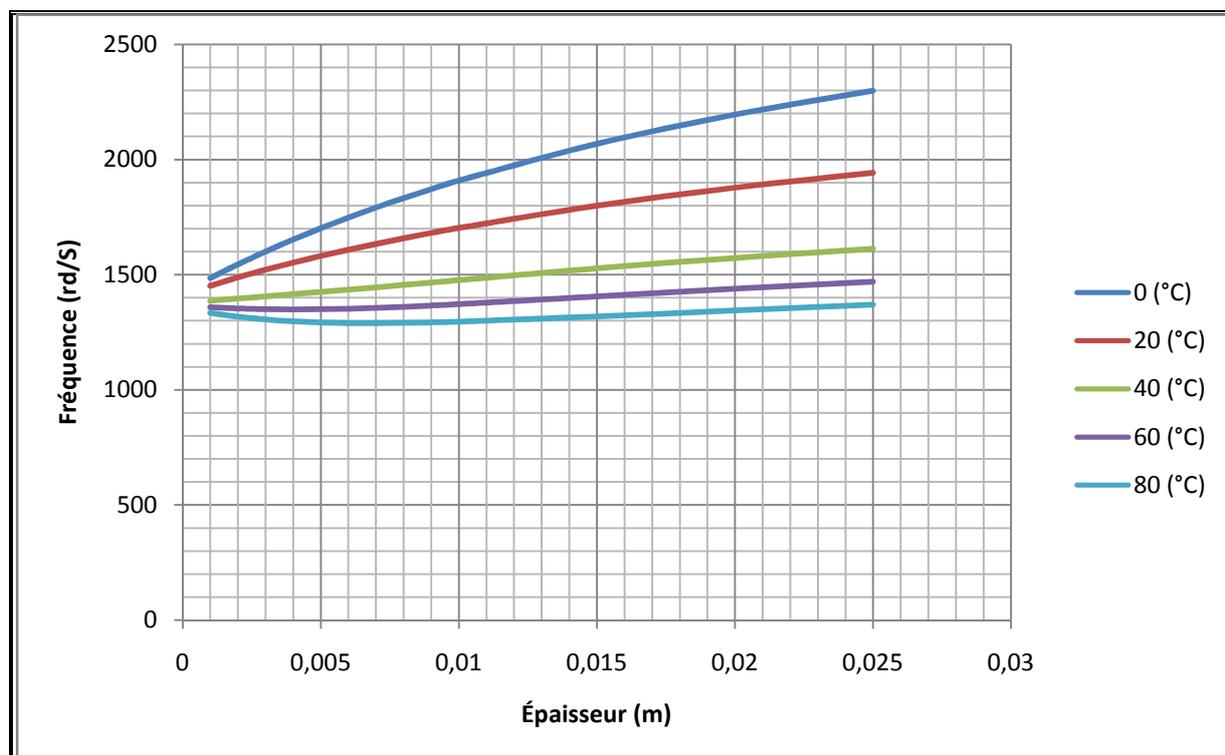


fig. 4.45 : Variation des fréquences du deuxième mode de la plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans différentes températures

**C. Troisième mode en rd/s**

Épaisseur (m)	Températures (°C)				
	0	20	40	60	80
0,001	3259,006	3135,4784	2936,6536	2841,7	2763,2
0,00125	3268,1748	3122,5416	2900,732	2793,5952	2706,5544
0,0015	3276,904	3110,2956	2867,6364	2749,8236	2655,6236
0,00175	3285,382	3098,8032	2837,1156	2710,0084	2609,5912
0,002	3293,6088	3088,0644	2808,9812	2673,6472	2567,9548
0,003	3324,6948	3052,2056	2716,7908	2556,7764	2435,8864
0,004	3354,148	3026,7716	2650,2228	2473,9432	2343,7588
0,005	3383,1616	3010,004	2602,1808	2414,4716	2278,1328
0,006	3411,924	3000,2072	2567,7036	2371,4536	2230,656
0,007	3440,6864	2995,8112	2543,1488	2340,3048	2196,116
0,008	3469,2604	2995,6228	2526,0044	2317,7596	2170,8076
0,009	3497,646	2998,5744	2514,4492	2301,62	2152,47
0,01	3525,6548	3003,9752	2507,1644	2290,3788	2139,2192
0,015	3657,786	3050,51	2506,7876	2275,4324	2116,7368
0,02	3773,4008	3107,5324	2531,7192	2290,2532	2125,9684
0,025	3872,6876	3162,9848	2562,868	2313,4892	2144,7456

Tab.4.28: Variation des fréquences du troisième mode de la plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans des différentes températures en rd/s

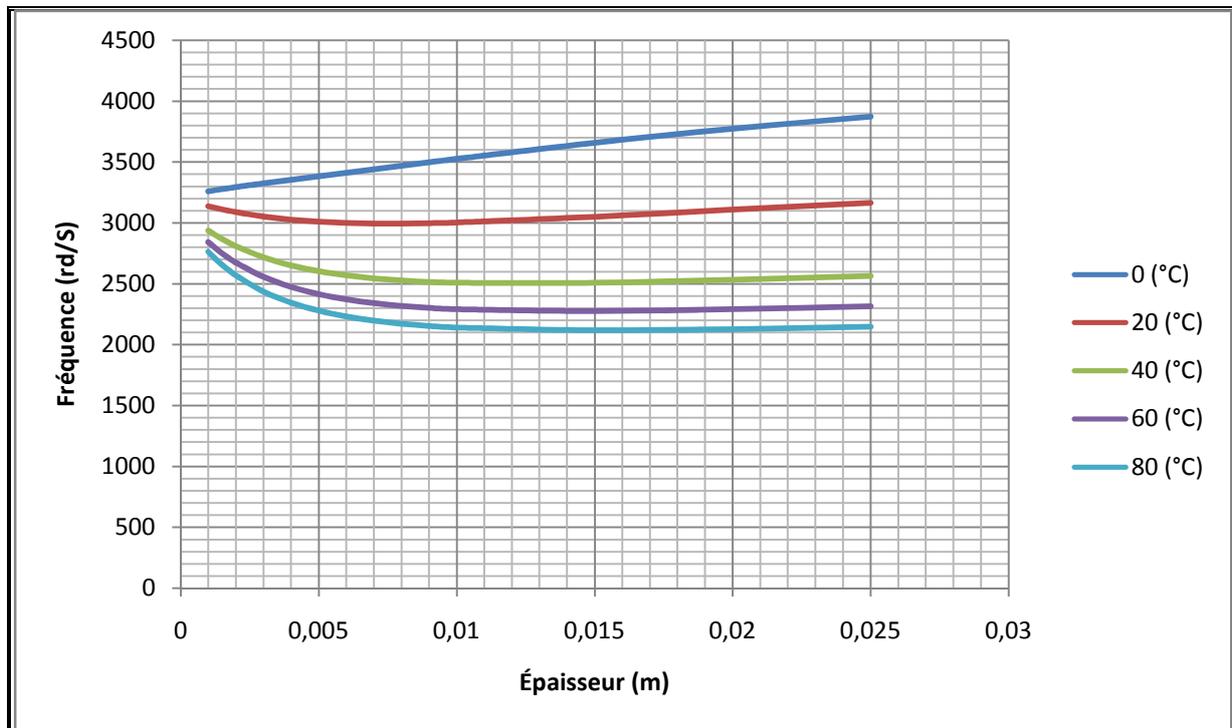


fig. 4.46: Variation des fréquences du troisième mode de la plaque sandwich en fonction de l'épaisseur du cœur dans différentes températures

**D. Conclusion**

On remarque que la température a une grande influence sur le mouvement vibratoire des plaques sandwichs. Les courbes du mouvement sont décalées vers la droite. Les amplitudes des structures vibrantes diminuent rapidement quand la température augmente, d'autre part on

conclut que l'épaisseur du cœur a une grande influence sur la vibration des plaques sandwichs parce que les courbes traçantes sont décalées à partir de droit ver la gauche qui signifie que les amplitudes vibratoires de la plaque vibrante diminuent quand le cœur viscoélastique augmente. Pour cela on peut dire que l'effet de l'augmentation d'épaisseur du cœur viscoélastique de la plaque sandwich est contrairement de l'effet de l'augmentation de la température.

**4.3.7. Effet de variation de température sur le décréent logarithmique de la plaque sandwich**

Dans ce test nous extrairons les déplacements vibratoires ( $U_1$  et  $U_2$ ) de la plaque sandwich à partir de logiciel de calcul (suivre les étapes présentées dans l'annexe n°02), puis on calcule le décréent logarithmique ( $\delta$ ) par la formule N°38 dans les différentes températures comme celui suit :

**4.3.7.1. Plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,001m**

T (°C)	U1	U2	Ln (U1 /U2)
0	0,105229	0,0923031	0,1310612
10	0,106381	0,0934823	0,12925488
20	0,107599	0,0947052	0,12764245
30	0,111936	0,0987093	0,12574811
40	0,114289	0,10101	0,12351081
50	0,116176	0,102513	0,12511666
60	0,116883	0,103482	0,12177575
70	0,118576	0,104479	0,12656801
80	0,120334	0,105861	0,1281443

Tab.4.29: Variation du décréent logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,001m

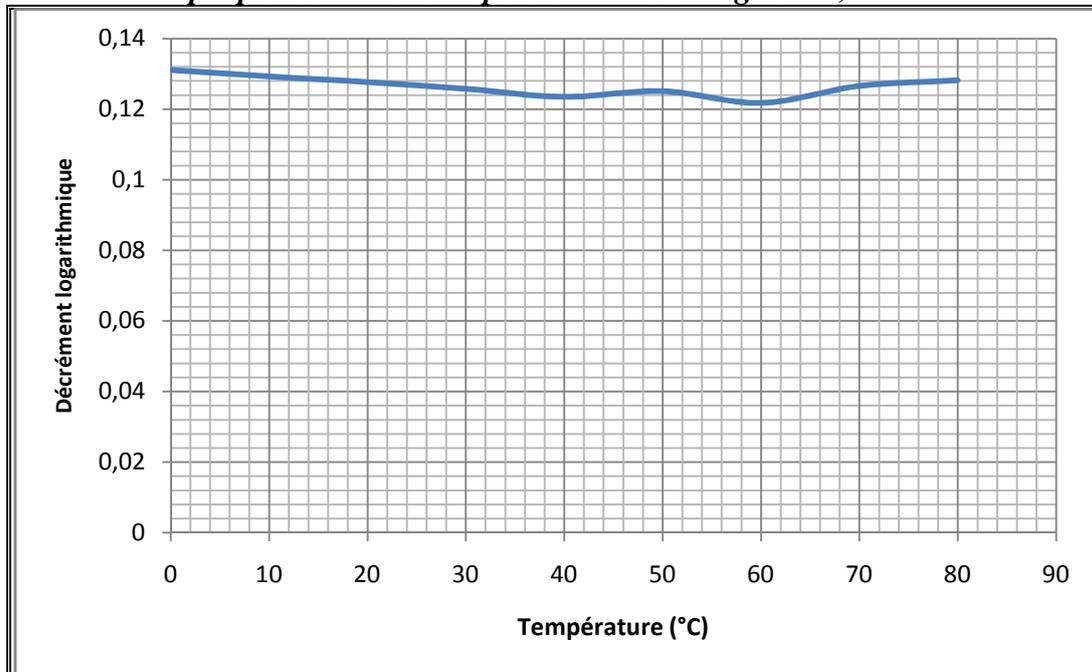
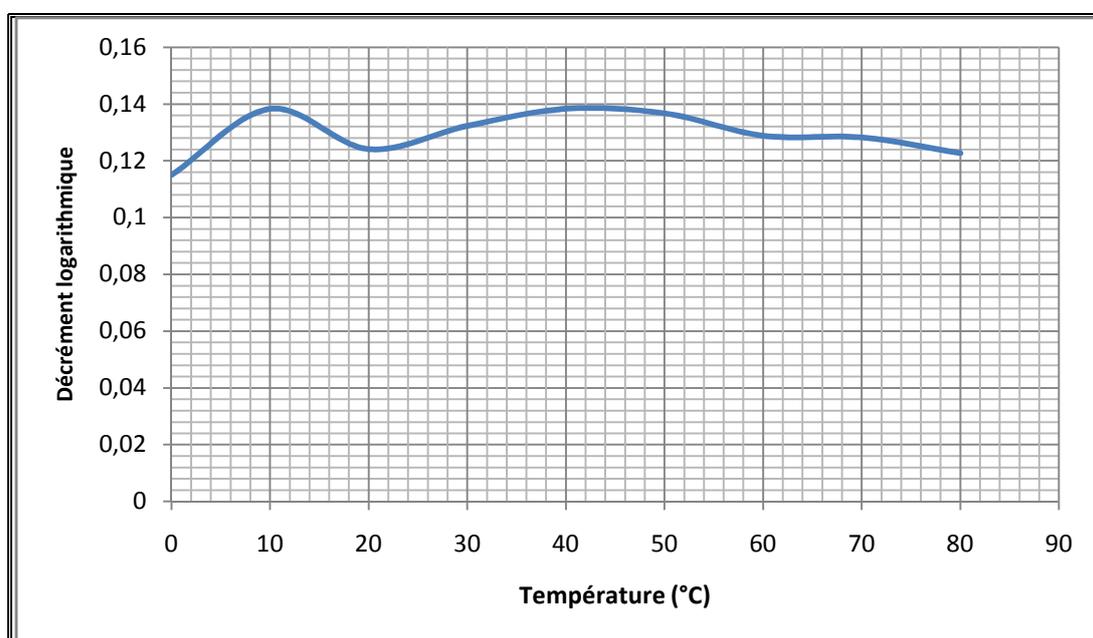


Fig4.47 : Variation du décréent logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwich d'épaisseur de cœur égale à 0,001m

4.3.7.2. Plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m

T(°C)	U1	U2	Ln (U1 /U2)
0	0,0366285	0,0326491	0,11500934
10	0,0387933	0,033781	0,13834904
20	0,0407992	0,0360363	0,12413571
30	0,0411359	0,0360363	0,13235446
40	0,044704	0,0389271	0,13837232
50	0,0481984	0,0420372	0,13677088
60	0,0517483	0,0454911	0,12887488
70	0,0528285	0,0464686	0,128274
80	0,0547994	0,0484701	0,12273213

**Tab.4.30:** Variation du décrement logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m

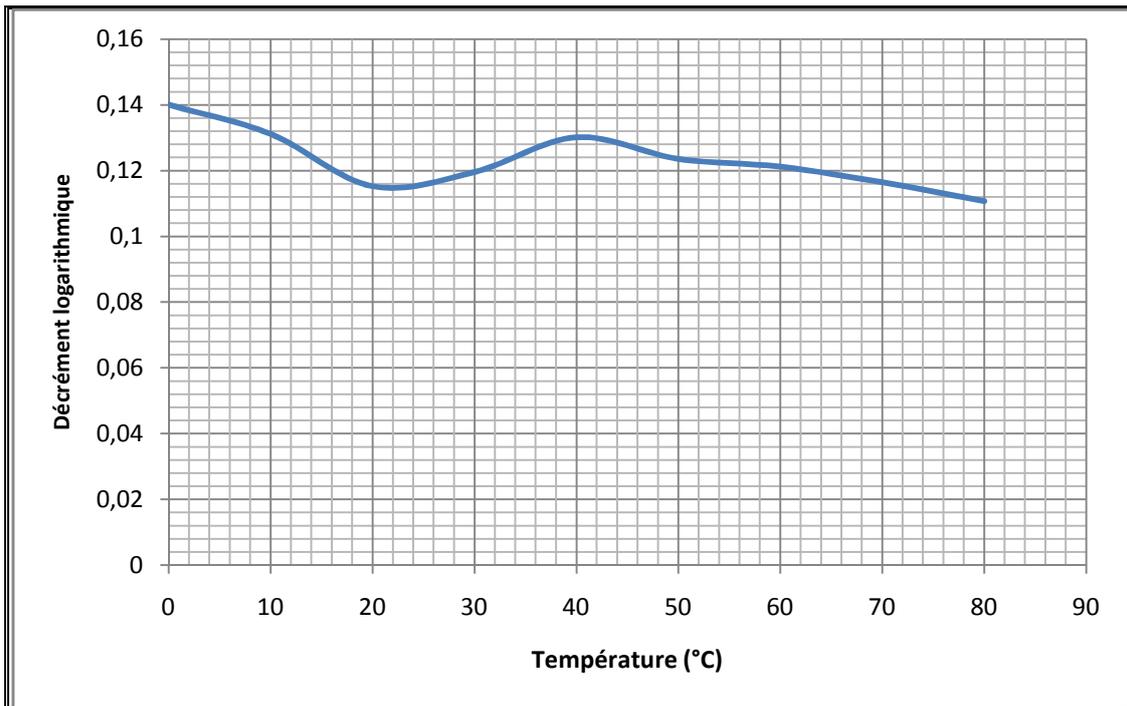


**Fig4.48 :** Variation du décrement logarithmique en fonction de température pour la plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,01m

4.3.7.3. Plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,025m

T (°C)	U1	U2	Ln (U1 /U2)
0	0,0142563	0,0123936	0,1400187
10	0,0154094	0,0135158	0,13111834
20	0,0167108	0,0148918	0,11524449
30	0,0189171	0,016785	0,11958064
40	0,0215797	0,0189469	0,13011273
50	0,023752	0,0209916	0,12354438
60	0,0245132	0,0217159	0,12116704
70	0,0252912	0,0225115	0,11643022
80	0,0270598	0,0242232	0,11073838

**Tab .4.31:** Variation du décrement logarithmique en fonction de la température pour la plaque sandwich d'épaisseur du cœur égale à 0,025m



*Fig. 4.49: Variation du décrement logarithmique en fonction de la temperature pour la plaque sandwich d'épaisseur de cœur égale à 0,025m*

#### **4.3.7.4. Conclusion**

Nous avons constaté que la variation de la température a une grande influence sur la variation du décrement logarithmique surtout pour les plaques épaisses (épaisseur du cœur entre 0,01 m et 0,025 m).

#### **4.4. Conclusion générale**

##### ***I. Validité de la méthode proposée***

À partir des différents résultats des tests on peut conclure que :

1. le principe de Dowell est applicable aux structures sandwiches (poutres et plaques) à cœur viscoélastique minces, quand l'épaisseur du cœur augmente, ce principe ne donne pas de résultats satisfaisants. Le taux d'erreurs entre les fréquences de la structure sandwich assemblée et celles de la structure décollée (peaux homogènes et cœur viscoélastique) est de plus en plus accentué lorsque l'épaisseur du cœur augmente.
2. Dans le cas où nous fixons la géométrie de la structure (épaisseur du cœur) et en variant les caractéristiques mécaniques des matériaux de celle-ci (modules de Young des peaux et du cœur variant en fonction de la température), les résultats obtenus par la méthode proposée ne sont pas satisfaisants lorsque la température prend des valeurs extrêmes.
3. Ce principe est donc applicable pour les structures composites sandwiches ayant des cœurs viscoélastiques minces à des températures moyennes.

##### ***II. Effet de la température et la variation du cœur du sandwich sur les caractéristiques dynamiques***

On peut conclure que la température a une grande influence sur le mouvement vibratoire des poutres et plaques sandwiches. Les courbes du mouvement sont décalées de la droite vers la gauche, ce qui signifie que les amplitudes des structures vibrantes diminuent rapidement quand la température augmente.

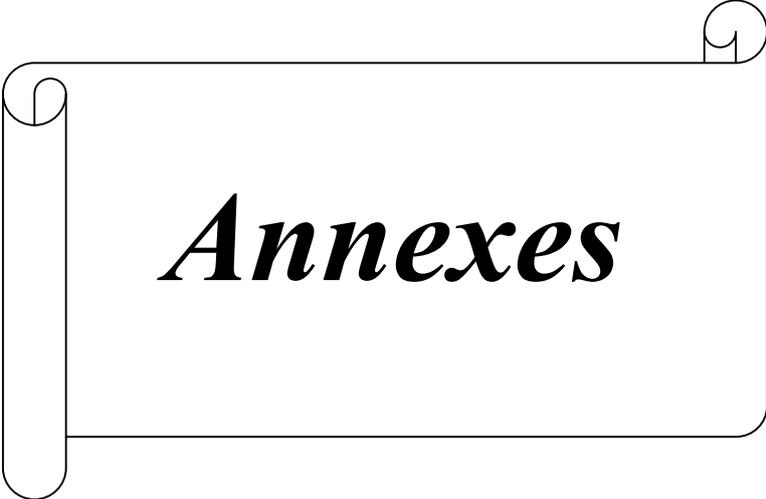
L'effet de l'augmentation de l'épaisseur du cœur viscoélastique des poutres et des plaques sandwiches inverse ce déphasage lors de l'augmentation de la température. On peut conclure que l'augmentation de l'épaisseur du cœur viscoélastique et celle de la température sont des facteurs primordiaux pour déterminer le comportement vibratoire ; (fréquences et amplitudes) de la structure vibrante (poutre ou plaque sandwich), et recalculer ainsi celui-ci et aboutir au comportement voulu.

Nous avons constaté aussi que la variation de la température a une grande influence sur la variation du décrétement logarithmique surtout pour les poutres et les plaques épaisses (épaisseur du cœur entre 0,01 m et 0,025 m).

## LES REFERENCES

1. **Alain Dessarthe** : *Introduction aux plastiques et composites en mécanique, (CETIM), techniques de l'ingénieur, traité génie mécanique, sous réf [B5170], publier le 10/08/1996.*
2. **Achraf Tafla**: *Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches, thèse de doctorat, université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.*
3. **Abderrezak Gharbi** : *Analyse des fissurations des matériaux composites et détermination de leur délaminage utilisant des capteurs piézo-électrique, Constantine, 2005;*
4. : **CARMA** : *glossaire matériaux composites - actualisation décembre 2004.*
5. **J. M. Berthelot** : *Mécanique des matériaux et structures composites, troisième édition, le Mans-France, novembre 2010.*
6. **Kaskas Saliha** : *Etude de l'effet du cisaillement transverse sur les comportements mécaniques de poutre composites, mémoire de magister, université Constantine, soutenue le : 29 / 04 / 2010.*
7. **F. Laurin** : *Introduction générale sur les matériaux composites, ONERA, par [www.univ.ubs.fr](http://www.univ.ubs.fr), 2013.*
8. **Jean-Jacques Barrau et Didier Guedra Degeorges**: *Structures en matériaux composites, techniques de l'ingénieur, sous réf [BM 5080], publier le 10/01/2004.*
9. **Dris Locif**: *Evaluation simultanée des vitesses de propagation et d'atténuation des ultrasons dans des matériaux composites et polymériques, mémoire de magister, université M'hamed Bougara de Boumerdès, soutenue le : 29 / 05 / 2007.*
10. **Laurent Gornet**: *Généralités sur les matériaux composites, polycopie du cours, école centrale de Nantes, version du 28/09/2008.*
11. **Bourouis Fairouz** : *Etude du comportement mécanique de structures sandwichs a différents matériaux de revêtements, mémoire de magister, université Constantine, 2005.*
12. **Albert Willian Faria**: *modélisation par éléments finis de plaque composites : contribution a l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte d'incertitudes, thèse de doctorat, université fédérale d'Uberlândia, soutenue le: 19/10/2010.*
13. **Massamaesso Bilasse** : *Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique, thèse de doctorat, Université Paul Verlaine – Metz, soutenue le 07 octobre 2010*
14. **Joël Landier** : *modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissant des tôles sandwich, thèse de doctorat, université de Metz, Soutenue le : 4 /11/1993.*
15. **Laetitia Duigou-Kersulec** : *Modélisation numériques de l'amortissement passif et actif des tôles sandwichs comportant des couches viscoélastiques ou piézo-électriques, thèse de doctorat, université de Metz, Soutenue le : 4 /11/1993.*
16. **Cheridi Houda**: *Analyse dynamique des plaques minces et épaisses: Application aux matériaux homogènes et non homogènes, mémoire de magister, université Constantine, 2006.*

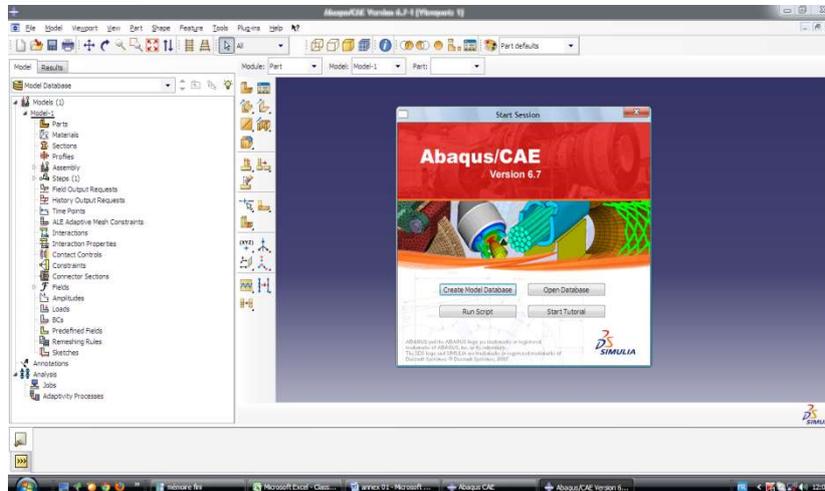
17. **Hamrit Fareh** : *Analyse des structures discrètes par la méthode des éléments finis, mémoire de magister, université Msila, 2001.*
18. **Zhi-Qiang Feng**: *Codes de calcul, cours, IUP Université d'Evry – Val d'Essonne, 2000.*
19. **Bing Tie**: *Eléments finis en élasticité linéaire, laboratoire de mécanique des sols-structures-matériaux (CNRS-URA 850), cours, école centrale Paris. septembre 2004.*
20. **L. Penazzi** : *Calcul de structures présentation de la méthode des éléments finis, premiers pas d'un utilisateur ABAQUS™, Ecole des Mines D'Albin Carmaux, Décembre 1999.*
21. **Stephane Bochart (d'après une présentation de Mickaël Abbas de L'UTC)** : *Introduction au logiciel Abaqus, version du 18/09/2012.*
22. **Ounis Houdheifa , Belkaid Khmissi** : *Modélisation du comportement dynamique d'un composites sandwich par éléments finis, thèse de master ,université Mohamed kheider, Biskra, 2010 .*
23. **Emmanuel Boyere** : *Code aster manuel de validation, SDLS 503-Vibration De Flexion D'une Poutre Sandwich ,2009.*
24. **BASF** : *Elastomères de polyuréthane thermoplastique, Gamme des produits (Elastollan).*
25. **M.N.Amrane and L.Jezequel**: *A numerical approach for a constrained sandwich plate design prediction by using finite elements method, IMAC-XII-12th-Int-12-44-3, 1994.*
26. **Roland Fortunier**: *Comportement mécanique des matériaux, polycopie du cours, école nationale supérieure des Mines, version 2012.*
27. **Jean Claude Pascal** : *vibration et acoustique, tome 2, école nationale supérieure d'ingénieurs du mans, année universitaire 2008-2009.*
28. **Michel Dupeux** : *Aide-mémoire Science Des Matériaux, Dunod, Paris, 2004.*
29. **Michel Dysli** : *Introduction Aux éléments finis, école polytechnique fédérale de Lausanne, 2eme édition, juin 1997.*
30. **M.J.Yan and E.H.Dowell**: *Governing Equation For Vibrating Constrained – Layer Damping Sandwich Plates And Beams, -Journal Of Applied Mechanics, December 1972.*
31. **Alexander Ern** : *Aide-mémoire Eléments Finis, DUNOD, Paris, 2005.*
32. **Hormoz Zareh**: *Abaqus/CAE Dynamic Response Tutorial, Mechanical Engineering, Portland State University, 2010.*
33. **J. M. Berthelot**: *Dynamics of composites materials and structures, Springer, New York 1999.*
34. **Valery V, Vasiliev Evgeny V, Morozov**: *Mechanics And Analysis Of Composite Materials, Elsevier, First Edition 2001.*
35. **Heng Hu** : *Modélisation multi-échelle des structures sandwich, thèse doctorat de l'université Paul Verlaine-Metz, , soutenue le 24 Octobre 2006*
36. **Mustapha Assarar** : *Etude expérimentale et modélisation du comportement dynamique des Composites stratifiés et sandwiches, thèse de doctorat, génie mécanique, université du Maine, soutenue le 13 décembre 2007.*
37. **Palash Dewangan**: *Passive viscoelastic constrained layer damping for structural application, master these of mechanical engineering, national institute of technology Rourkela, May, 2009.*



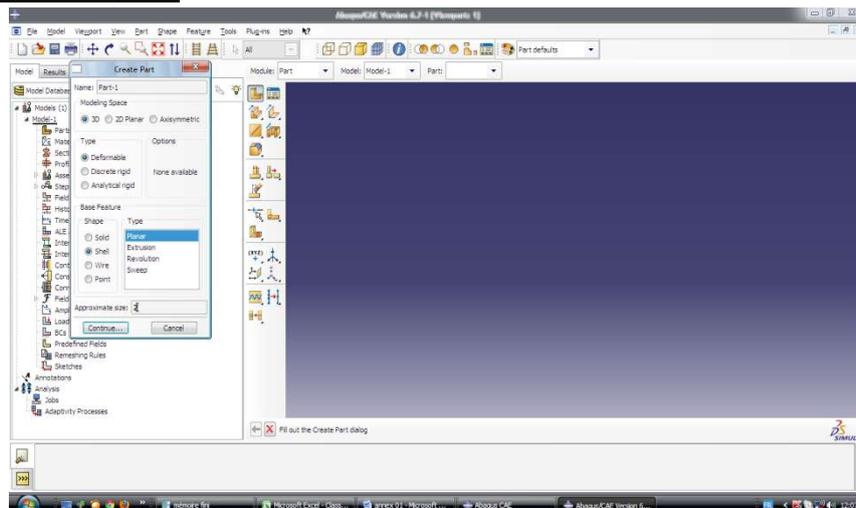
***Annexes***

## Annexe 1 : Tutoriel de vibration libre des poutres composites sandwiches

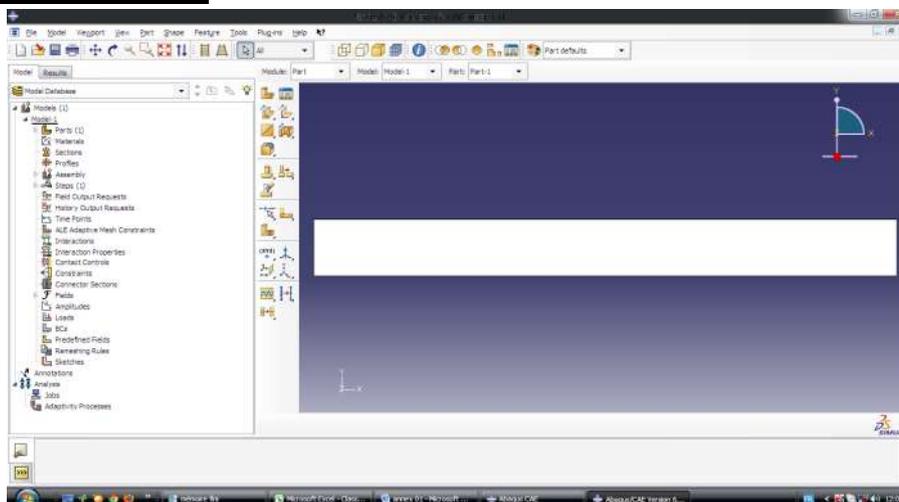
### 1. Ouvrir la section



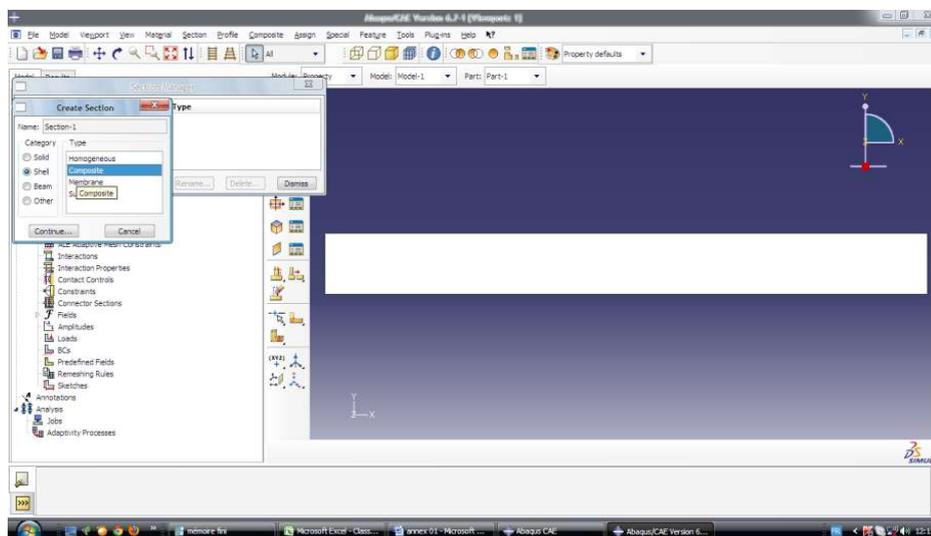
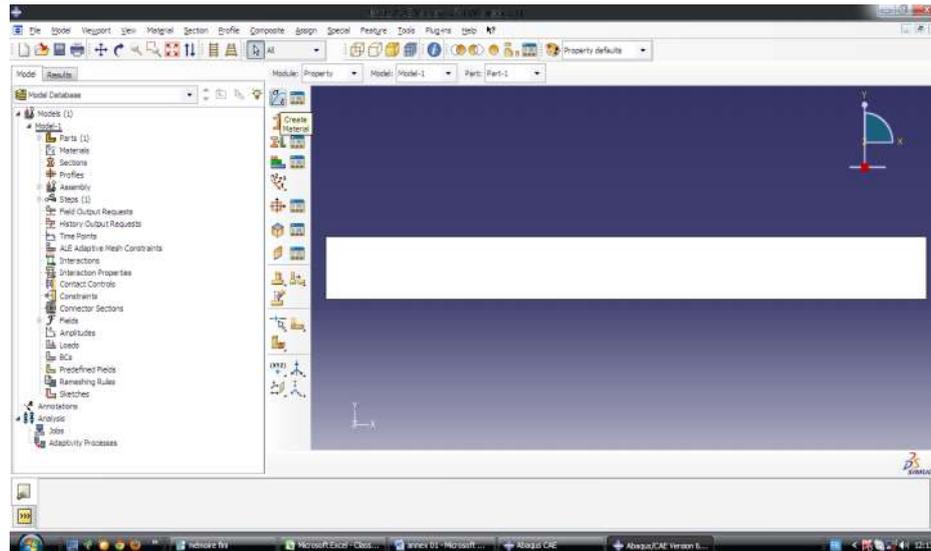
### 2. Création d'un part



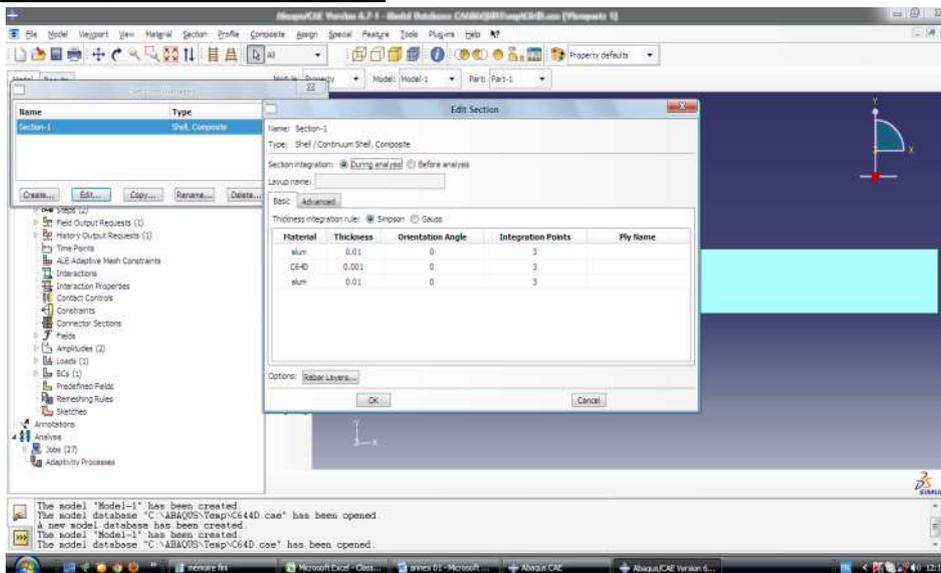
### 3. Dessin de la poutre



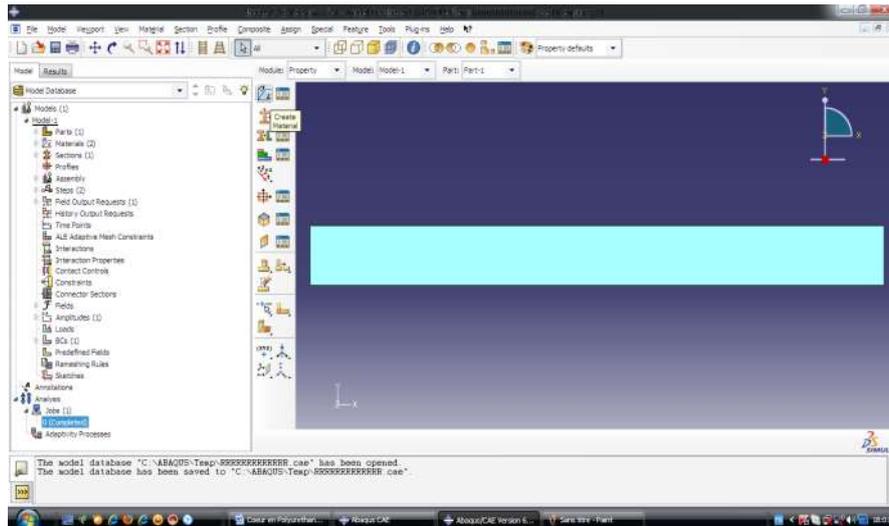
#### 4. Déclaration des caractéristiques des matériaux



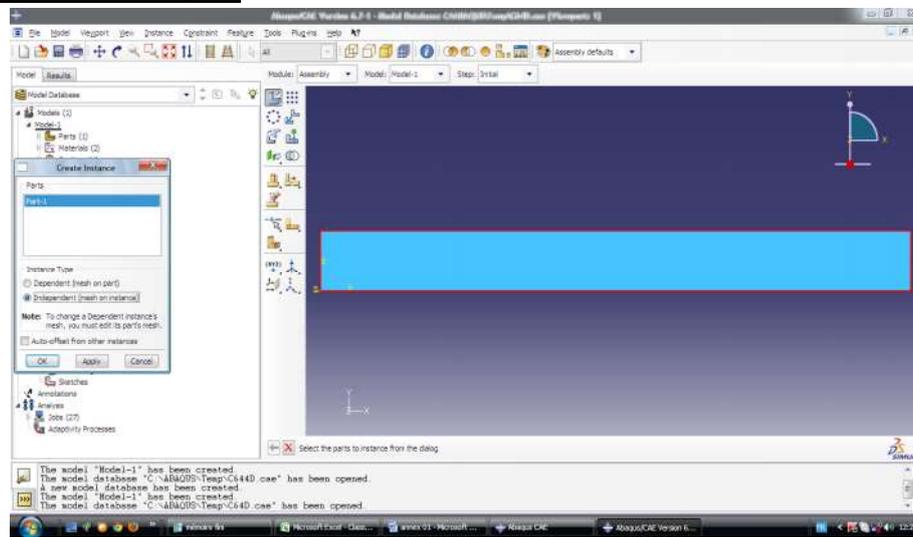
#### Déclaration de l'épaisseur des couches



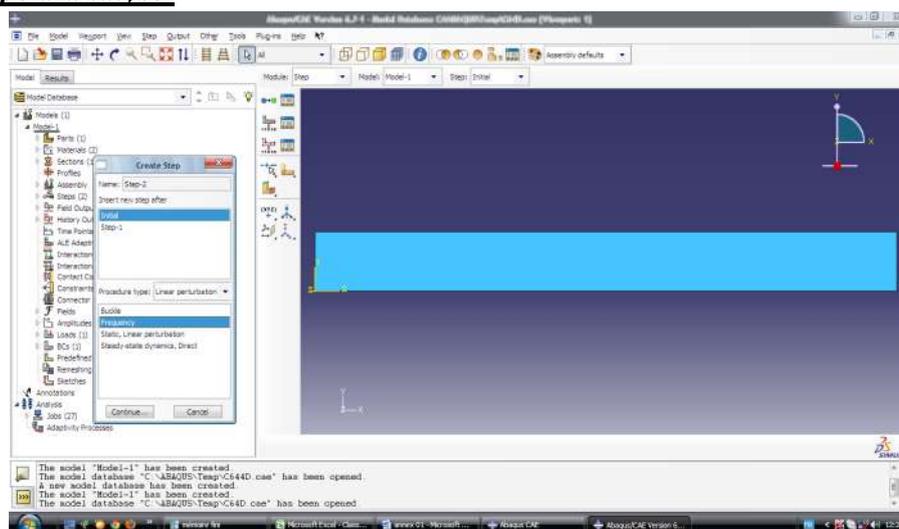
## Affectation de matériaux déclarés sur la poutre sandwich

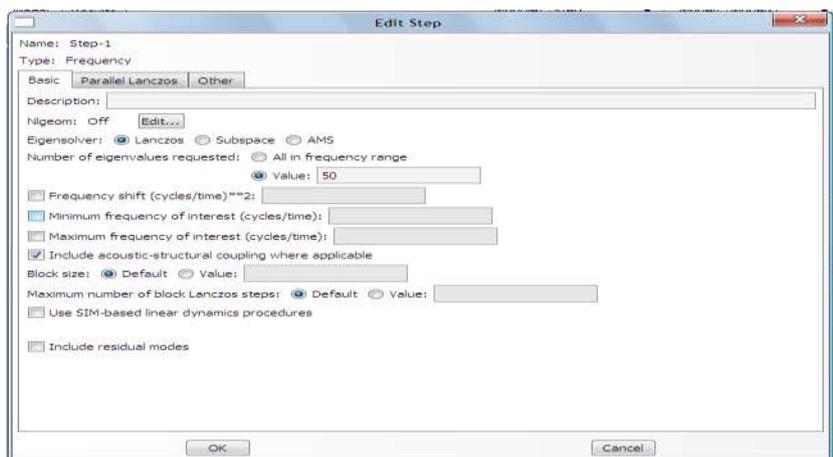


## Création d'une instance part



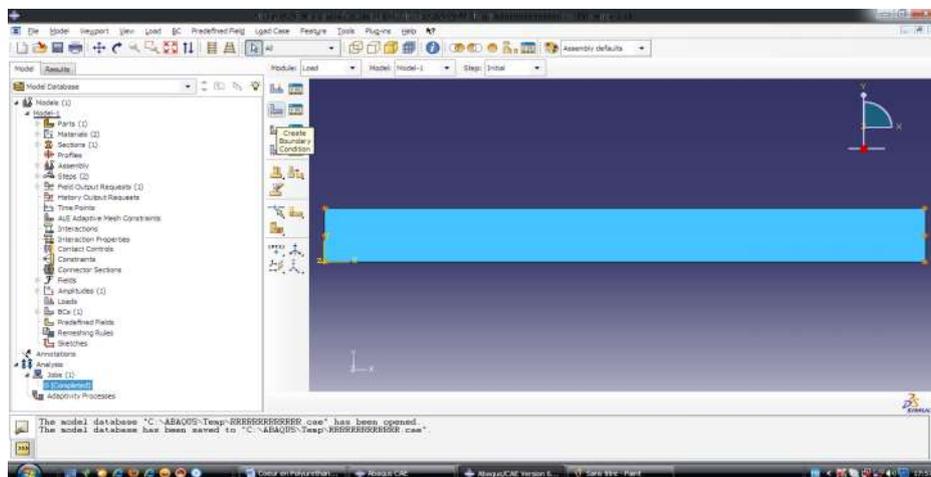
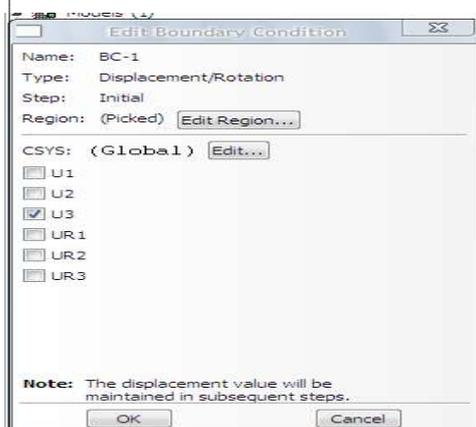
## Choix de type d'analyse



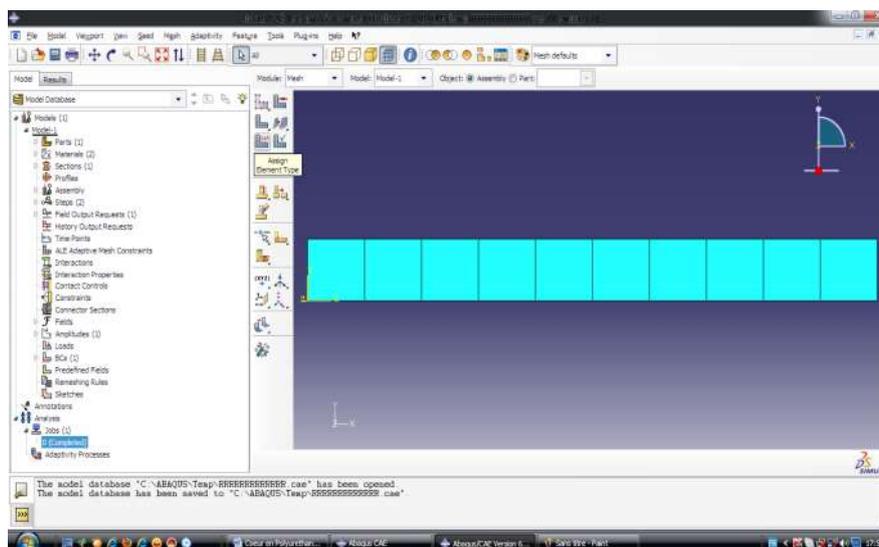


**Choix des conditions aux limites**

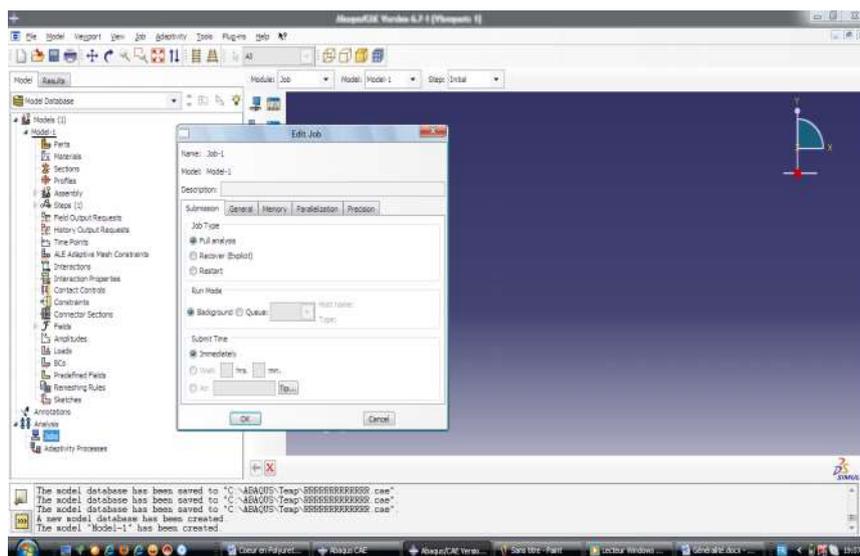
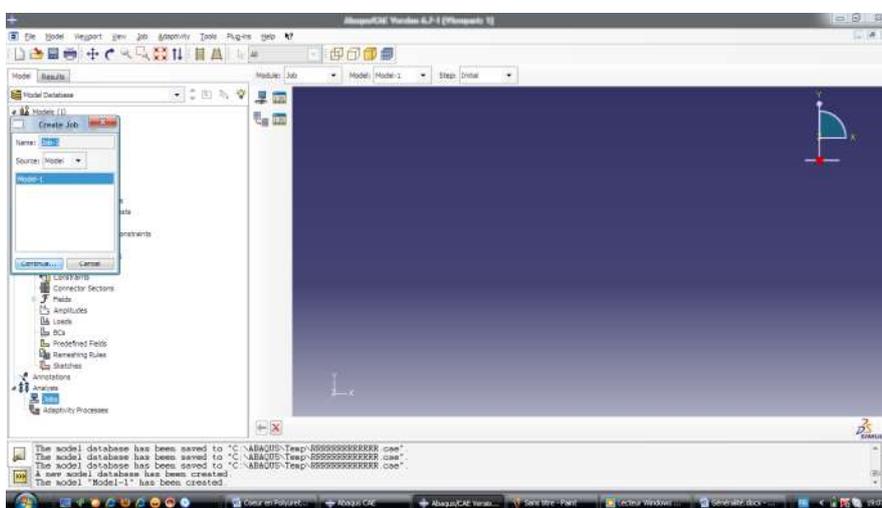
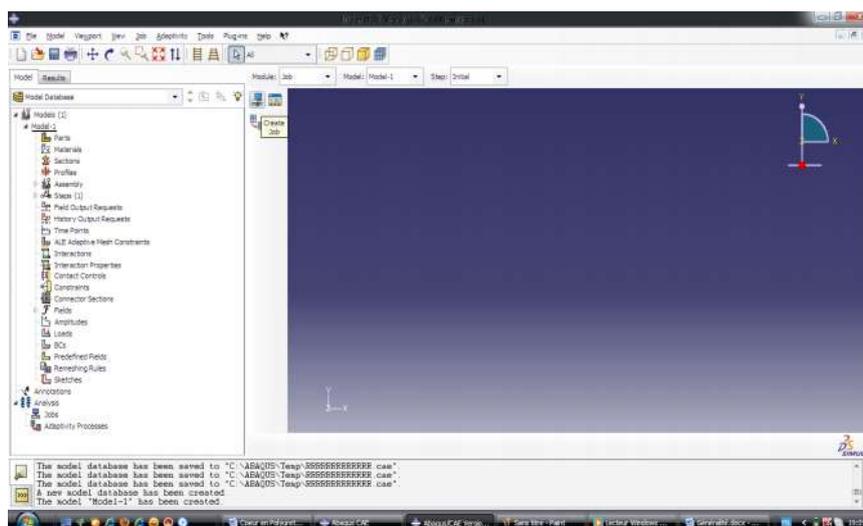
pourte simplement appuyée



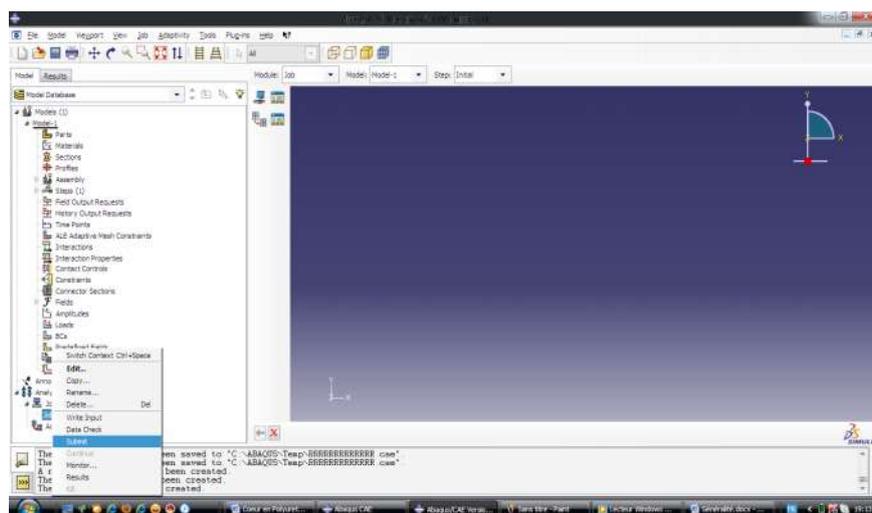
**Maillage de la poutre sandwich**



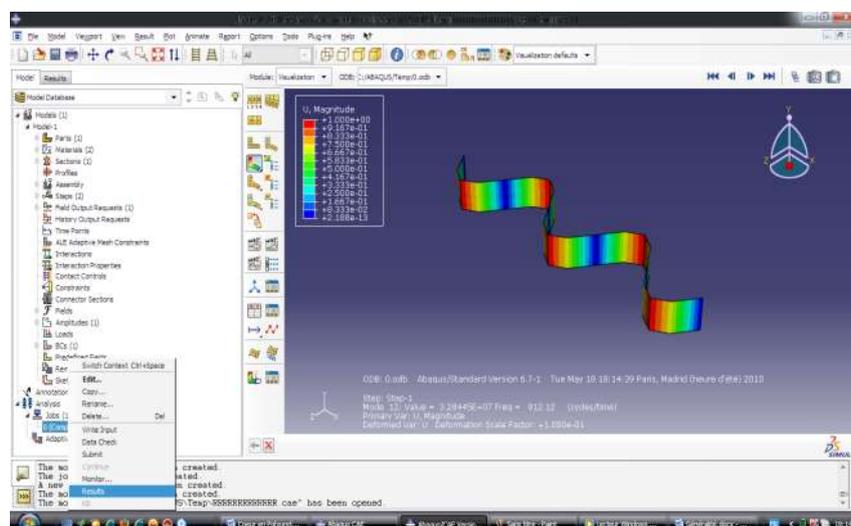
## Création de job



## Lancement l'analyse et extraction les résultats

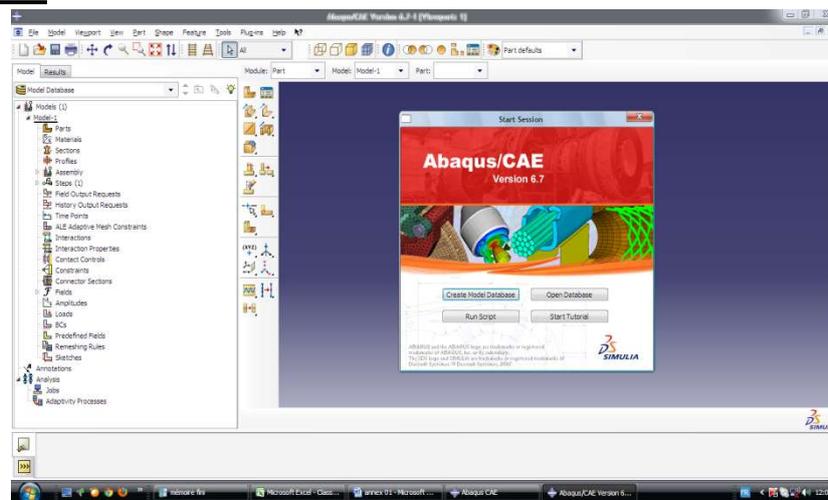


## Visualisation des résultats

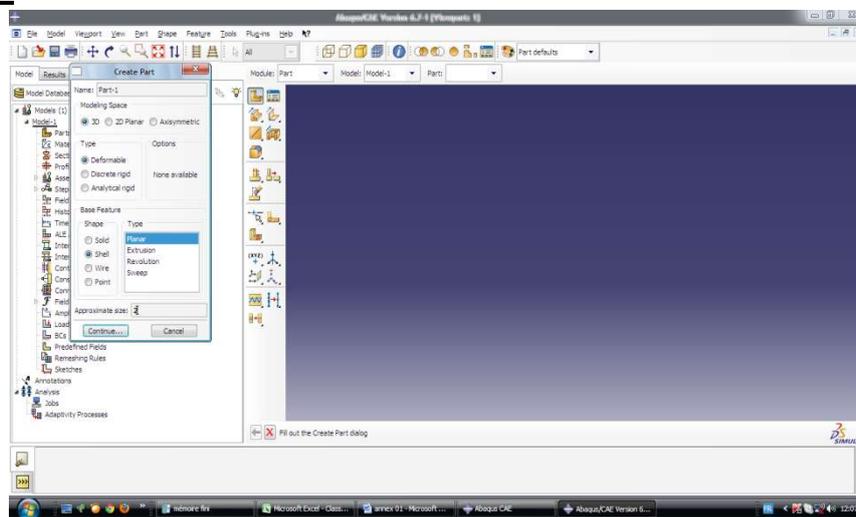


## Annexe 2 : Analyse temporelle des poutres composites sandwiches

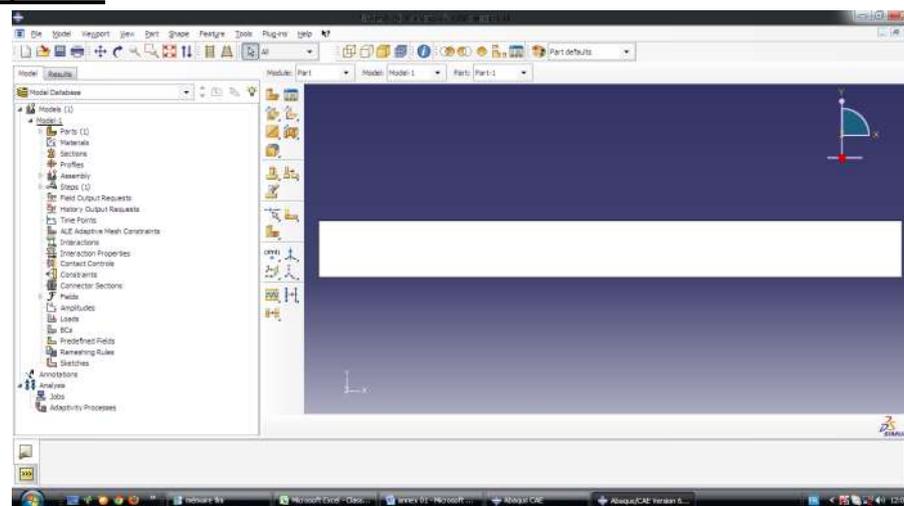
### Ouvrir la section



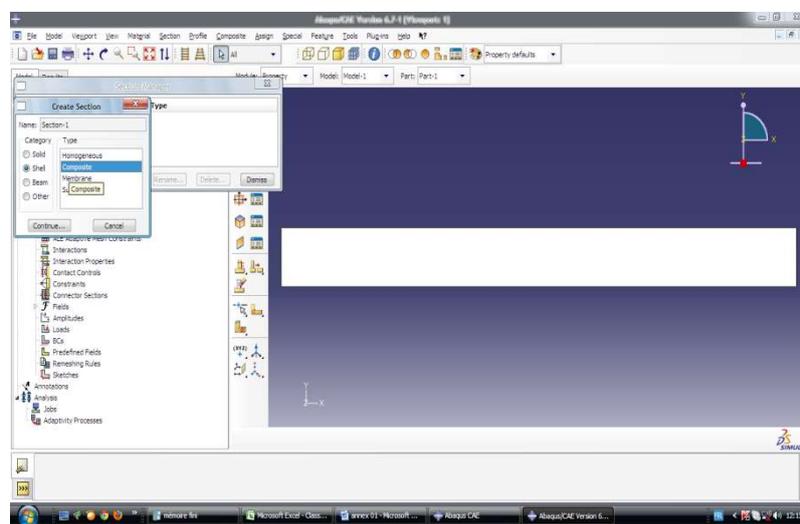
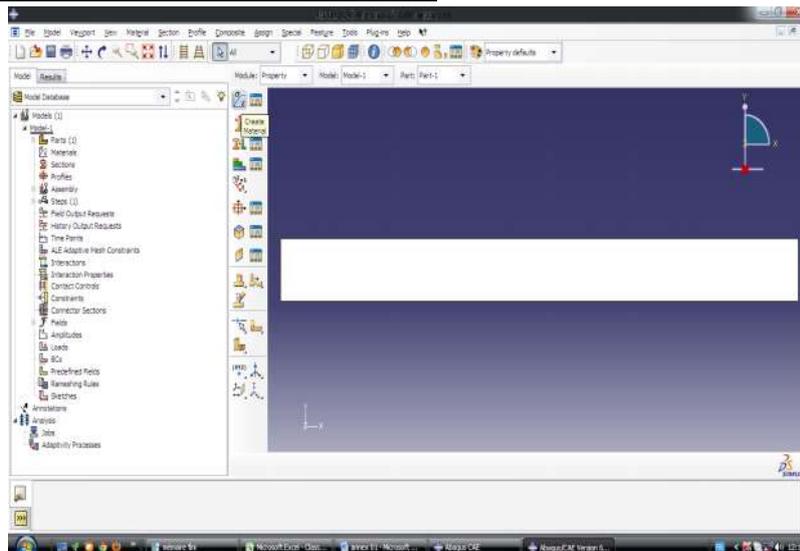
### Créat un part



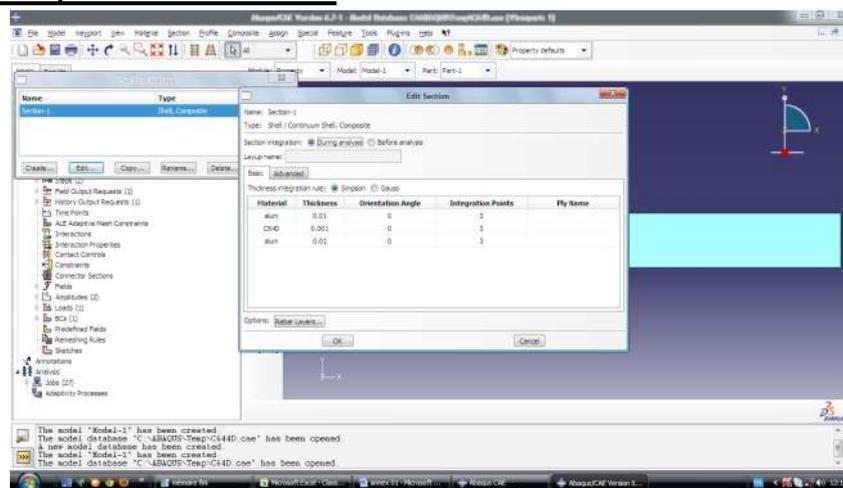
### Dessiner la poutre



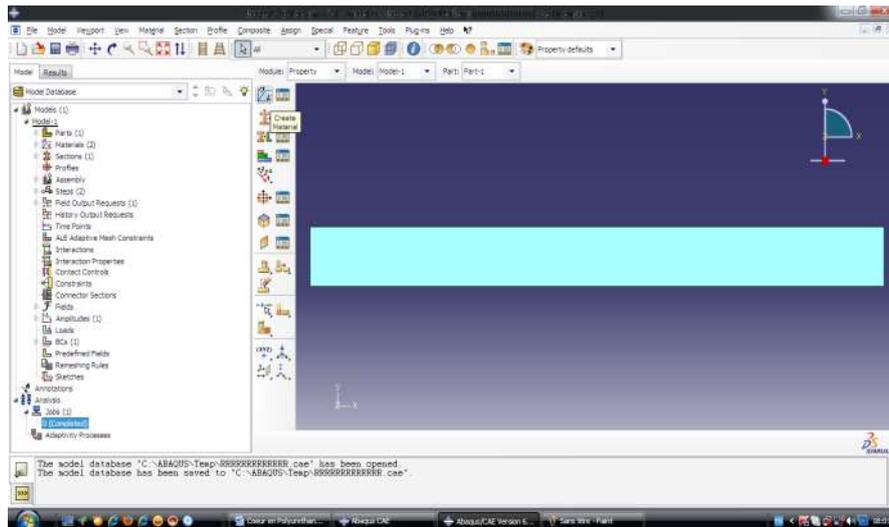
## Déclaration des caractéristiques des matériaux



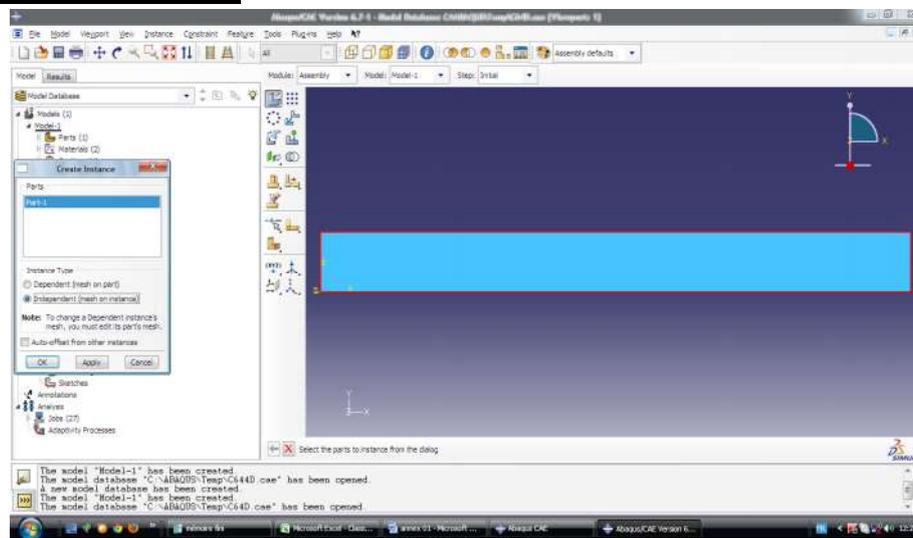
## Déclaration de l'épaisseur des couches



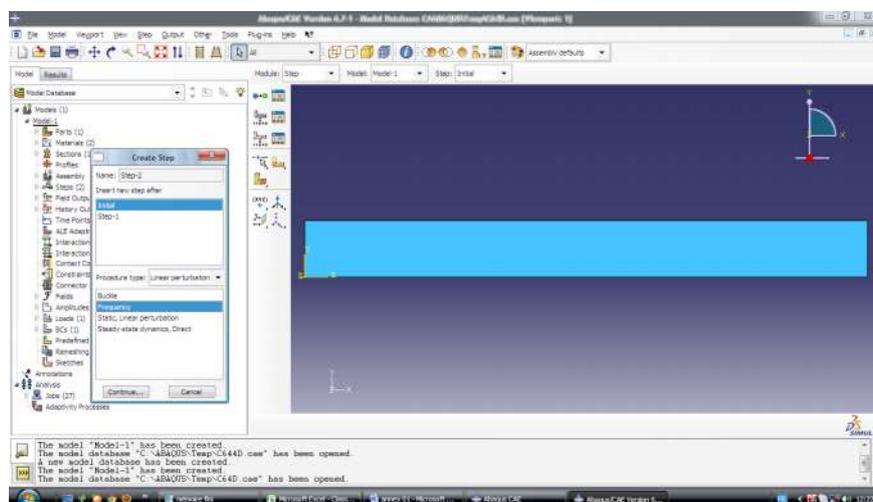
## Affectation de matériaux déclarants sur la poutre

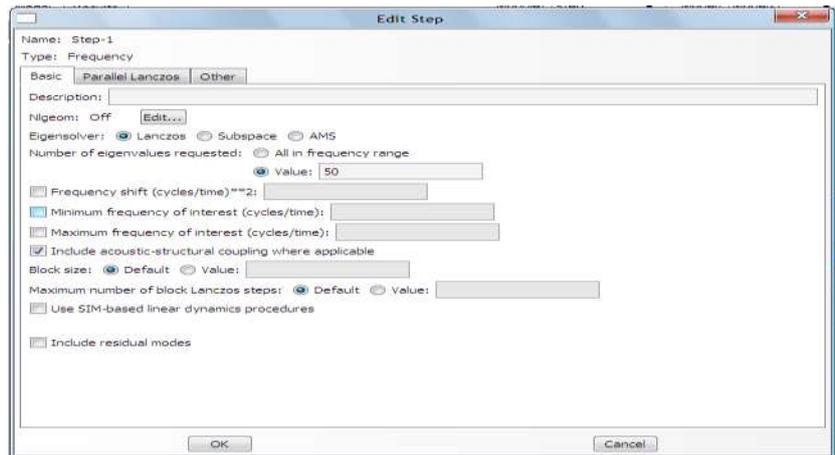


### Création d'une instance part



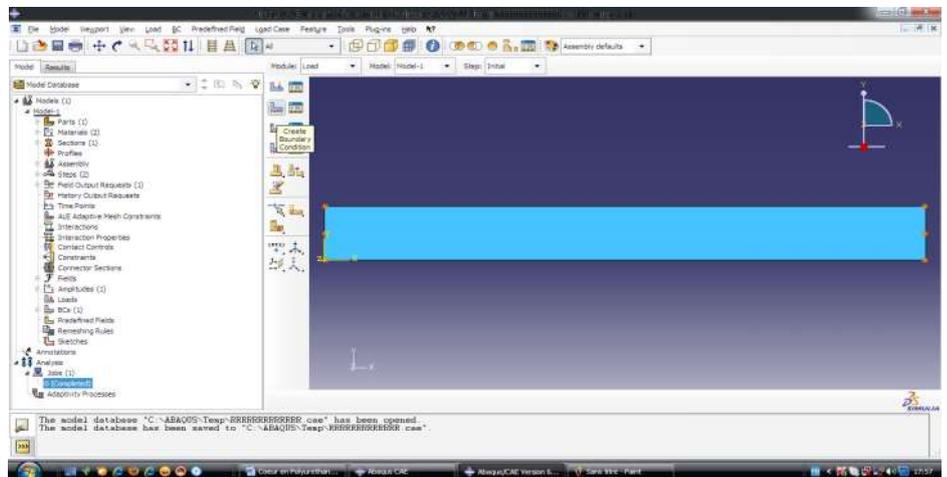
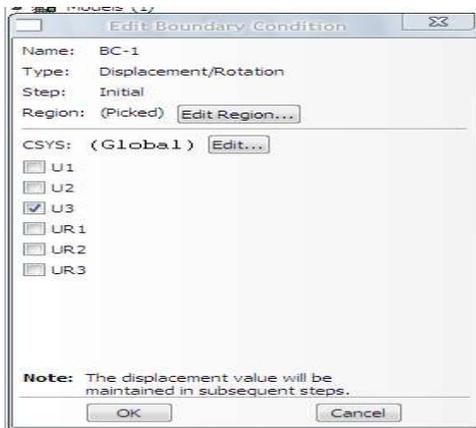
### Type d'analyse STEP 1



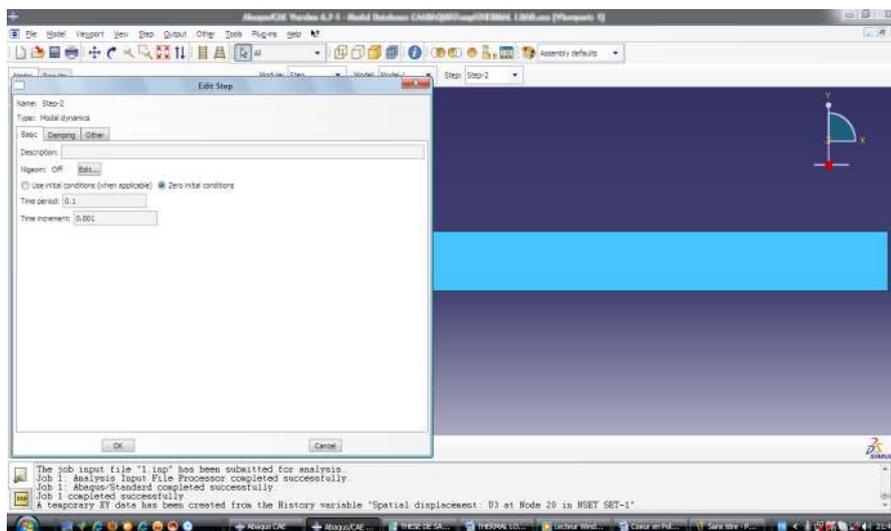


**Les conditions aux limites**

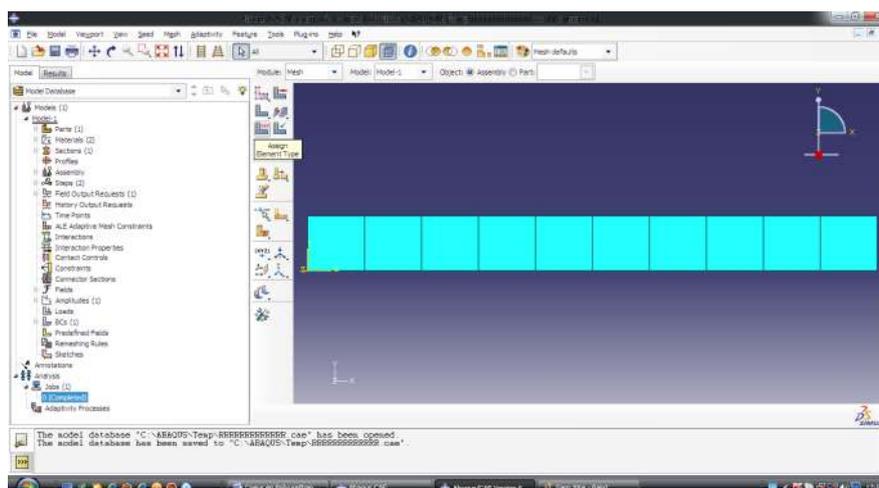
La poutre est simplement appuie



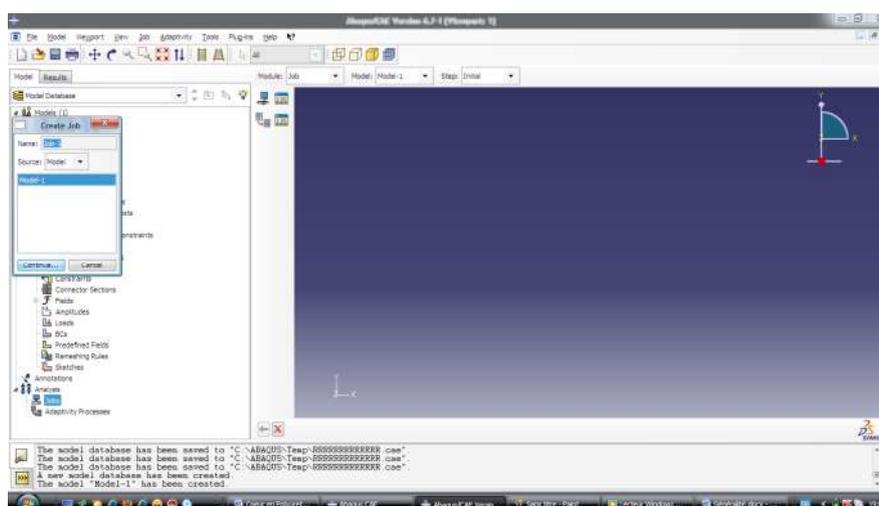
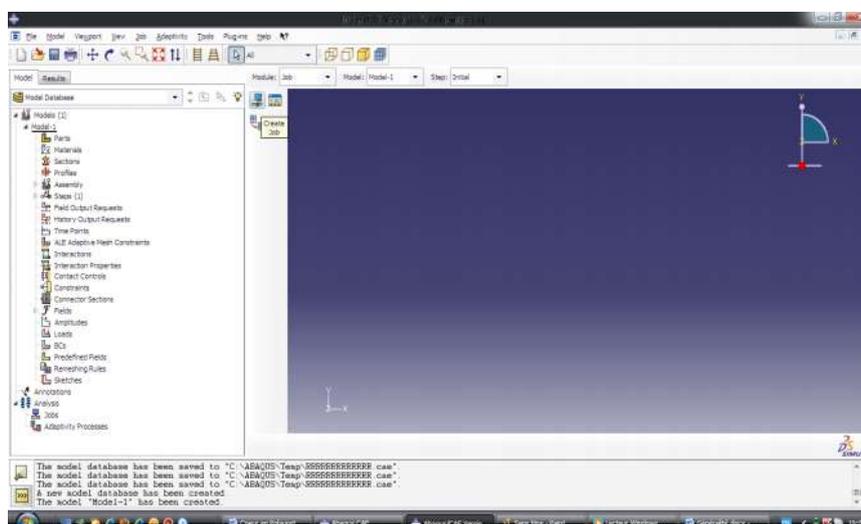
**STEP 2**

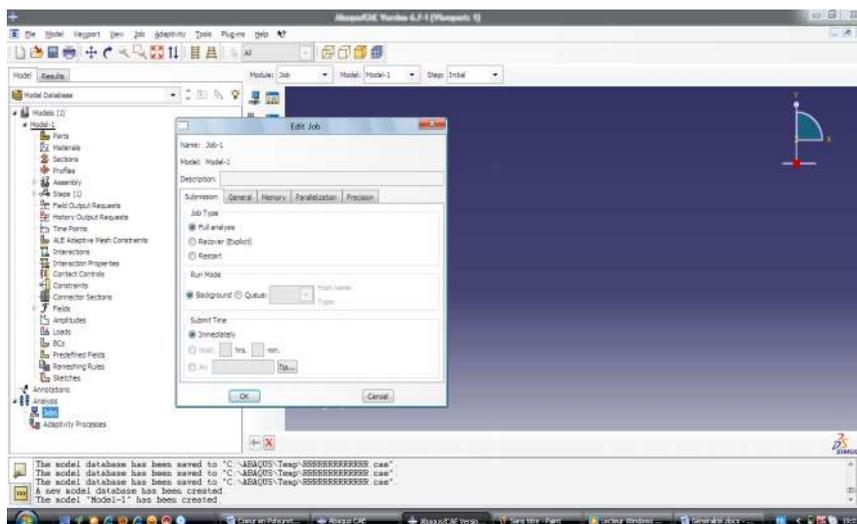


## Maillage

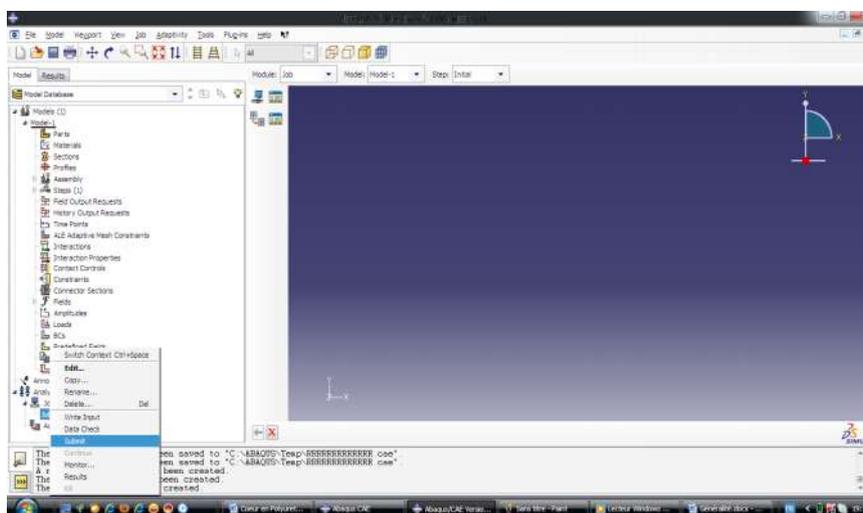


## Création de job

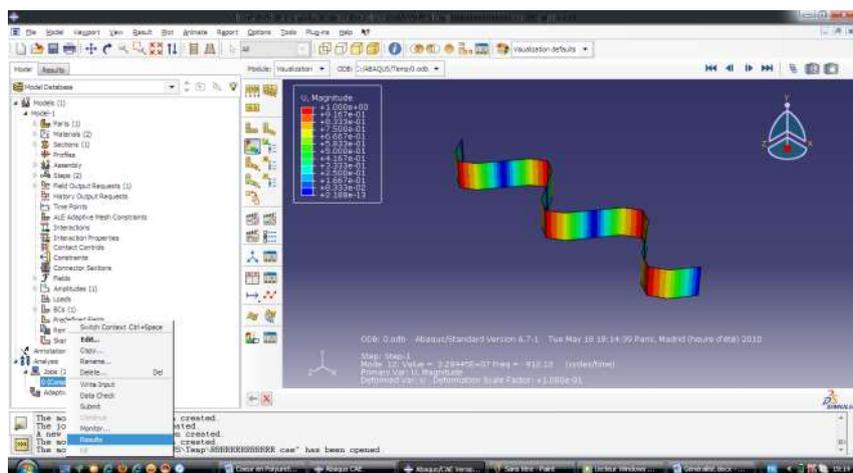




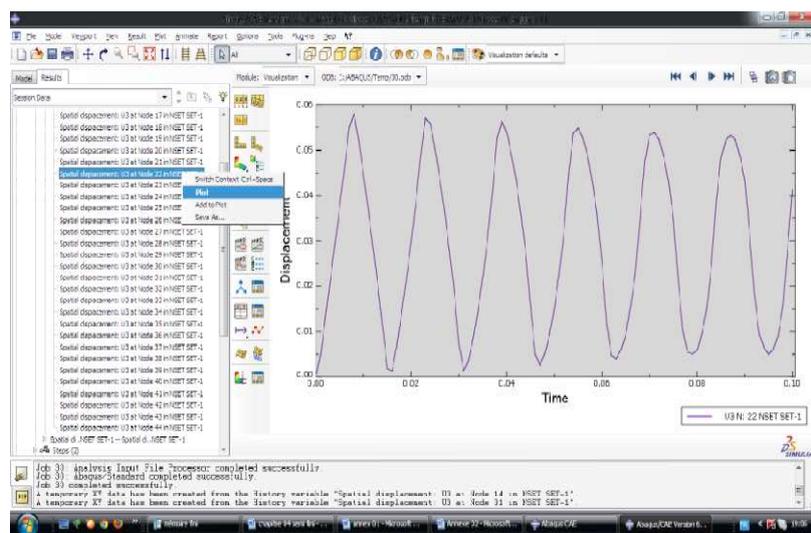
**Lancement l'analyse et extraction les résultats**



**Visualisation des résultats**



## Tracage des courbes



### المخلص

إن الاستعمال المكثف للهياكل المتألفة من نوع ساندويتش في الصناعات الحديثة يستوجب على الباحثين و مهندسي حساب الهياكل البحث واستحداث طرق جديدة من اجل تسهيل طرق الحساب و الرفع من دقة نتائجها. أثناء دراستنا قمنا بتأهيل إستراتيجية دويل الخاصة بحساب الاهتزازات بالهياكل المتجانسة في حساب اهتزازات الهياكل المتألفة من نوع ساندويتش.

الدراسة التي قمنا بها تهتم بتطبيق هذا المبدأ في حساب اهتزازات روافد وصفائح الساندويتش باستعمال طريقة العناصر المتناهية و ملاحظة مدى قابلية تطبيق هذا المبدأ عند تطبيق مختلف الشروط الميكانيكية و عند تغيير درجات الحرارة المؤثرة على الهيكل.

الكلمات المفتاحية: ديناميكا الهياكل ، الهياكل المتألفة ، هياكل الساندويتش، مبدأ دويل ، حساب هياكل الساندويتش، الاهتزازات الميكانيكية، الروافد المتألفة، الصفائح المتألفة، ديناميكا الهياكل المستمرة، الاهتزازات المخمدة.

### Résumé

*Les structures composites sandwiches sont très utilisées dans l'industrie moderne, ce qui pousse les chercheurs et les ingénieurs de calcul des structures à développer de nouvelles stratégies pour simplifier et augmenter la précision des méthodes de calcul. Dans notre travail nous avons développé une stratégie pour calculer les fréquences des structures sandwiches basée sur le principe de Dowell initialement conçue pour les structures homogènes isotropes.*

*Notre travail consiste à appliquer ce principe en utilisant la méthode des éléments finis dans le cas des poutres et des plaques sandwiches.*

*Ce principe est appliqué pour ce type de structures dans différentes conditions mécaniques et thermiques.*

Mots clés : *Dynamique des structures, structures composites, structures sandwiches, principe de Dowell, vibration des poutres composites, vibration des plaques composites, vibrations amorties.*

### Abstract

*The composite sandwich structures are most used in the modern industry, which pushes the structural engineers and researchers to develop new strategies to facilitate the calculus of such structures. In our work, we extend the Dowell's method initially dedicate to calculate frequencies of homogeneous and isotropic structures to calculate of sandwich structures.*

*Our study consists in applying this strategy by using the finite element method in the case of beams and sandwich plates.*

*In this work, we applied this law when the mechanical and thermal conditions have to be changed.*

Key words: *Structural vibration, composite structures, sandwich structures, Dowell law, calculus of sandwich structures, mechanical vibration, composites beams, composites plates, damped vibrations.*