

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie-Mécanique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة الميكانيكية
المرجع:

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en sciences en : Génie Mécanique

Intitulé

**Eléments finis d'élasticité plane et de volume basés sur l'approche
en déformation**

Présentée par :
GUERRAICHE Khelifa

Soutenue publiquement le : 7/12/2014

Devant le jury composé de :

Dr. BENMEBAREK Sadok
Dr. BELOUNAR Lamine
Dr. HECINI Mabrouk
Dr. BRIOUA Mourad
Dr. KHEMISSA Mohamed
Dr. BENMOUSSA Hocine

Professeur
Professeur
Professeur
Professeur
Professeur
Professeur

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

Université de Biskra
Université de Biskra
Université de Biskra
Université de Batna
Université de Msila
Université de Batna

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Ma mère et mon père.

Ma femme et mes enfants

Mes frères et soeurs

Toute ma famille

Remerciements

Je remercie en premier lieu Allah tout puissant qui m'a donné le courage et la volonté de pouvoir accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse :

Mr Belounar Lamine, Professeur à l'université de Biskra pour ses conseils bénéfiques et son soutien qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier le président de jury **Mr Bemebarek Sadok**, professeur à l'université de Biskra d'avoir accepté de présider cette soutenance.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury les professeurs **Mr. Hecini Mabrouk**, **Mr. Brioua Mourad**, **Mr. Khemissa Mohamed**, **Mr. Benmoussa Hocine** pour l'intérêt qu'ils ont montré en acceptant de rapporter ce travail et à tous les enseignants du département de génie mécanique et génie civil de l'université de Biskra, ainsi que mes amis Haoues Nouredine, Rebiai Cherif, Benhadda Nabil. Je tiens aussi à remercier en particulier mes collègues de travail de l'université de Djelfa.

SOMMAIRE

ملخص.....	
RESUME.....	
ABSTRACT.....	
NOTATIONS.....	
LISTE DES FIGURES.....	
LISTE DES TABLEAUX.....	
INTRODUCTION GENERALE.....	1

Chapitre 1.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Introduction.....	4
1.2. Rappel sur la théorie des plaques en flexion.....	4
1.2.1. Géométrie d'une plaque.....	4
1.2.2. plaques minces (modèle de Kirchhoff)	4
1.2.2.1. Hypothèse cinématique	5
1.2.2.2. Forces et moments agissant sur la plaque.....	6
1.2.2.3. Conditions aux limites.....	10
1.2.3. Plaques épaisses (modèles de Reissner-Mindlin).....	11
1.3. Historique sur le modèle en déformation	16
1.3.1. Eléments finis type poutre courbée.....	16
1.3.2. Eléments coques basés sur le modèle en déformation.....	17
1.3.3. Eléments finis 2 D basés sur le modèle en déformation.....	18
1.3.4. Eléments finis de plaque basés sur le modèle en déformation.....	21

Chapitre 2.

DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI D'ELASTICITE 3D A 9 NŒUDS

2.1. Introduction.....	23
2.2. Considérations théoriques	23
2.3. Formulation de l'élément développé SBB	25
2.4. Validation numérique	27
2.4.1. Plaque carrée en flexion avec diverses conditions.....	27

2.4.2. L'effet du rapport L / h sur la flèche au centre d'une plaque carrée.....	33
2.4.3. Plaque carrée à deux bords encastrés et deux libres.....	36
2.4.4. Poutre console avec différentes valeurs du coefficient de Poisson	37
2.4.5. Test de sensibilité à l'élanement (L/h).....	38
2.4.6. Test de la poutre élancée de MacNeal.....	39
2.4.7. Test de poutre de Cheung and Chen	41
2.5. Conclusions	42

Chapitre 3.

DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI D'ELASTICITE 3D A 8 NŒUDS

3.1. Introduction	43
3.2. Formulation de l'élément développé SBBE	43
3.3. Validation numérique du cas linéaire	45
3.3.1. Plaque carrée en flexion avec diverses conditions.....	45
3.3.2. L'effet du rapport L / h sur la flèche au centre d'une plaque carrée	51
3.3.3. Poutre console avec différentes valeurs du coefficient de Poisson	53
3.3.4. Test de sensibilité à l'élanement (L/h).....	54
3.3.5. Test de la poutre élancée de MacNeal	55
3.3.6. Test de poutre de Cheung and Chen	56
3.4 Validation numérique du cas non linéaire (elasto-plastique)	58
3.4.1. Analyse élasto-plastique d'un matériau 3D.....	58
3.4.2. Test d'analyse de pression passive des terres	59
3.4.3. Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent	60
3.5. Conclusions	62

Chapitre 4.

FORMULATION ET VALIDATION DES ELEMENTS AXISYMETRIQUES A CHAMP DE DEFORMATION.

4.1. Introduction	63
4.2. Considérations théoriques	63
4.2.1. Forces nodales équivalentes pour un élément rectangulaire axisymétrique.....	64
4.2.1.1. Forces de volume.....	64
4.2.1.2. Forces surfaciques.....	65
4.3. Formulation axisymétrique des éléments à champ de déformation étudiés.....	66
4.3.1. Formulation axisymétrique de l'élément (SBRIE) [SAB.83a].....	66
4.3.2. Formulation axisymétrique de l'élément SBRIEIR [Sab.85a].....	68
4.4. Tests de validation.....	69
4.4.1. Cylindre épais soumis à une pression interne.....	69
4.4.2. Disque mince en rotation.....	73
4.4.3. Plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée.....	76
4.5. Conclusions.....	81
Conclusion générale	82
Bibliographie	84
Annexe	90

ملخص

العمل المنجز في هذه الأطروحة يخص في الاول تطوير وتقييم عنصرين محددين ثلاثي الابعاد يعتمدان أساسا على مبدأ التشوه, الاول عبارة عن عنصر ثلاثي الابعاد بتسعة عقد والمسمى (Strain Based Brik) SBB للدراسة الخطية للصفائح السميكة و الرفيعة. هذا العنصر له ثلاث درجات للحرية الخارجية والأساسية (ثلاث انتقالات) في كل من الثماني عقد للحواف والعقدة المركزية. هذا العنصر يستعمل بعد تطبيق تقنية التكتيف السكوني للعقدة المركزية. الثاني عبارة عن عنصر ثلاثي الابعاد بثمانى عقد والمسمى (Strain Based Brik Equilibrium) SBBE والذي له ثلاث درجات للحرية الخارجية والأساسية (u,v,w) في كل من الثماني عقد للحواف, حقل الانتقالات لكل من هذين العنصرين قد تم تطويره باستعمال مبدأ التشوه, وتستند هذه العناصر على الوظائف التي تؤدي لمختلف مكونات التشوه بينما ترضي معادلة التوافق مع معدلات التوازن بالنسبة للعنصر SBBE.

اداء هذه العناصر تم تقييمه من خلال سلسلة من الاختبارات الخطية الخاصة بانحناء الصفائح الدقيقة و السميكة و الخاصة بمشاكل التحليل البنيوي بالنسبة للمسائل المرنة-البلاستيكية للعنصر SBBE النتائج المتحصل عليها و المقارنة مع النتائج التحليلية و مع بعض العناصر الأخرى أظهرت سرعة التقارب والأداء الجيد لهذه العناصر.

الجزء الثاني من هذا العمل يدرس تقييم عنصرين محددين عشائيين مستطيلي الشكل و الذين يعتمدان أساسا على مبدأ التشوه وهما العنصرين (SBRIE, SBERIEIR) في المسائل ذات التناظر. اداء هذه العناصر تم تقييمه من خلال سلسلة من الاختبارات الخطية الخاصة بالمسائل ذات التناظر. النتائج المتحصل عليها و المقارنة مع النتائج التحليلية و مع بعض العناصر الأخرى أظهرت سرعة التقارب والاداء الجيد لهذه العناصر في هذا النوع من المسائل.

الكلمات المفتاحية: عنصر ثلاثي الابعاد; مبدأ التشوه; انحناء الصفائح; القص الشاقولي; التكتيف السكوني

RESUME

Ce travail de thèse concerne en premier lieu la formulation et l'évaluation de deux éléments finis brique basés sur l'approche en déformation:

Le premier est un élément brique à neuf nœuds nommé **SBB** (Strain Based Brik), pour l'analyse linéaire des plaques minces et épaisses. Cet élément possède seulement trois degrés de liberté externes essentiels (trois translations) à chacun des huit nœuds du sommet ainsi qu'au nœud central. La technique de condensation statique est utilisée pour cet élément.

Le deuxième est un élément brique à huit nœuds nommé **SBBE** (Strain Based Brik Equilibrium) qui a trois degrés de liberté externes essentiels (u , v et w) à chacun des huit nœuds de sommet.

Le champ de déplacement de chacun de ces éléments a été développé en utilisant l'approche en déformation. Ils sont basés sur des fonctions assumées pour les différentes composantes de déformation qui satisfont les équations de compatibilités, ainsi que les équations d'équilibre pour l'élément SBBE. Les performances de ces éléments sont évaluées en analyse linéaire à travers plusieurs tests de la flexion des plaques minces et épaisses, ainsi que des problèmes de comportement élasto-plastique pour l'élément SBBE. Les résultats obtenus comparés aux résultats analytiques et aux autres éléments, ont montré la rapidité de convergence et la bonne performance de ces éléments.

La seconde partie de ce travail traite la formulation et l'évaluation de deux éléments membranaires à champ de déformation (**SBRIE**, **SBERIEIR**) en axisymétrie. Les performances de ces éléments sont évaluées à travers une série de tests liée aux problèmes axisymétriques. Les résultats obtenus comparés aux résultats analytiques et aux autres éléments, ont montré la haute performance de ces éléments dans ce type de problème.

Mots Clés/ Élément brique; approche en déformation; flexion des plaques; cisaillement transverse; condensation statique

ABSTRACT

This work of thesis treats firstly the formulation and evaluation of two new brick finites elements based on the strain approach. The first is a nine nodes brick element named **SBB** (Strain Based Brick) for the linear analysis of thin and thick plates. This element has only the essential external degrees of freedom (three translations) at each of the eight corner nodes as well as at the centroidal node. The static condensation technique is used for the internal node of the SBB element. The second is an eight nodes brick element named **SBBE** (Strain Based Brick Equilibrium) which has three external degrees of freedom (u , v and w) at each of the eight corner nodes. The displacement field of each of these elements has been developed using the strain approach and they are based on the assumed functions for the various strains satisfying the compatibility equations and the equilibrium equation for the SBBE element. The performances of these elements are evaluated on several problems related to thick and thin plate bending in linear analysis as well as forelasto-plastic behavior problems for the SBBE element. The results are compared with the analytical results and with other elements and the obtained results show the good performances and accuracy in both analyses.

The second part of this work deals with the formulation and evaluation of two membrane elements based on the strain approach (SBRIE, SBERIEIR) in the axisymmetric problems. The performances of these elements are evaluated through a several series of tests. The obtained results are compared with the analytical solutions and with other elements and the results confirm high performance in this type of problem.

Keywords/ Brick element; strain approach; plate bending; transverse shear; static condensation

NOTATIONS

$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[K]$	Matrice de rigidité globale
$[B]$	Matrice de déformation
$[K_0]$	Matrice de rigidité $[K_0]$
ddl	Degrés de liberté
$[J]$	Matrice Jacobéenne
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
γ	Poids volumique
$[D]$	Matrice d'élasticité
M.E.F.	Méthode des éléments finis.
\int	Intégrale.
$[]$	Matrice
$[]^T$	Matrice transposé.
$[]^{-1}$	Matrice inverse.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes du repère global.
u, v, w	Déplacements suivant les directions x, y et z respectivement.
θ_z	Rotation dans le plan.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et ε_z	Déformations directes suivant x et y et z respectivement.
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformation tangentielle.
$\tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$	Déformation tangentielle (<i>déformation circonférentielles</i>)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions x et y et z respectivement.
σ_{rz} :	Contrainte tangentielle (<i>circonférentielles</i>).
u_r, v_z :	Déplacements suivant les directions r et z respectivement
$\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta$	Déformations directes suivant r et z et θ respectivement.
$\gamma_{rz}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}$	Déformation tangentielle (<i>déformation circonférentielles</i>).
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions r et θ et z respectivement.
σ_{rz}	Contrainte tangentielle (<i>circonférentielles</i>).
α_i	Paramètres généraux de l'approximation
CT	Cisaillement transverse

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1.

Figure 1.1	Géométrie des plaques.....	5
Figure 1.3	Déplacements de la surface moyenne	5
Figure 1.4	Distribution des contraintes dans la plaque et efforts résultants.....	7
Figure 1.5	Cinématique de Reissner-Mindlin	11

Chapitre 2.

Figure 2.1	Élément fini d'élasticité 3D à huit nœuds.....	27
Figure 2.2	Plaque carrée en flexion avec diverses conditions ($E=10.92$, $\nu=0.3$ et le facteur de cisaillement $k=5/6$).....	27
Figure 2.3a	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100)$ $L/h=10$	28
Figure 2.3b	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100)$ $L/h=100$	28
Figure 2.3c	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100)$ $L/h=500$	29
Figure 2.4a	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=10$	29
Figure 2.4b	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=100$	30
Figure 2.4c	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=500$	30
Figure 2.5a	Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100)$ $L/h=10$	31
Figure 2.5b	Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100)$ $L/h=100$	31
Figure 2.5c	Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100)$ $L/h=500$	32
Figure 2.6a	Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=10$	32
Figure 2.6b	Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=100$	33
Figure 2.6c	Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=10$	33

Figure 2.7a	Influence de (L/h) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge concentrée.....	34
Figure 2.7b	Influence de (L/h) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge uniforme.....	34
Figure 2.8a	Influence de (L/h) pour une plaque encastree soumise à une charge concentrée.....	35
Figure 2.8b	Influence de (L/h) pour une plaque encastree soumise à une charge uniforme.....	35
Figure 2.9	Plaque carrée avec deux bords encastres et deux libres.....	36
Figure 2.10	Poutre console avec des différentes valeurs du coefficient de Poisson ($F=300$, $E=107$, and $\nu = 0.3 - 0.4999999$).....	37
Figure 2.11	Test la sensibilité d'un seul élément à l'élanement L/h ($E = 207 \times 10^9$ N/m ² , $\nu = 0.25$, $h = e = 0, 12$ m, $P = 6900$ N and $L/h = 1-16$).....	39
Figure 2.12	Poutre élancée de MacNeal ($P=1$, $M=10$, $L=6$, $h=0.2$, $E = 107$, $\nu=0.3$ and $b=0.1$).....	40
Figure 2.13	Tests de Cheung et Chen ($P_1=1000$, $P=150$, $E=1500$, $\nu=0.25$).....	41

Chapitre 3

Figure 3.1	Élément fini d'élasticité 3D à huit nœuds	44
Figure 3.2	Plaque carrée en flexion avec diverses conditions ($E=10.92$, $\nu=0.3$ et le facteur de cisaillement $k=5/6$).....	45
Figure 3.3a	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme ($(WD/ql^4) \times 100$) $L/h=10$	45
Figure 3.3b	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme ($(WD/ql^4) \times 100$) $L/h=100$	46
Figure 3.3c	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme ($(WD/ql^4) \times 100$) $L/h=500$	46
Figure 3.4a	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée ($(WD/pl^2) \times 100$) $L/h=10$	47
Figure 3.4b	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée ($(WD/pl^2) \times 100$) $L/h=100$	47
Figure 3.4c	Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée ($(WD/pl^2) \times 100$) $L/h=500$	48
Figure 3.5a	Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge uniforme ($(WD/ql^4) \times 100$) $L/h=10$	48

Figure 3.5b	Flèche normalisée au centre d'une plaque encadrée avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100) L/h=100$	49
Figure 3.5c	Flèche normalisée au centre d'une plaque encadrée avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100) L/h=500$	49
Figure 3.6a	Flèche normalisée au centre d'une plaque encadrée avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100) L/h=10$	50
Figure 3.6b	Flèche normalisée au centre d'une plaque encadrée avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100) L/h=100$	50
Figure 3.6c	Flèche normalisée au centre d'une plaque encadrée avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100) L/h=10$	51
Figure 3.7a	Influence de (L/h) sur la flèche centrale (W_c/W_{ref}) pour des plaques simplement supportées soumise à une charge concentrée.....	51
Figure 3.7b	Influence de (L/h) sur la flèche centrale (W_c/W_{ref}) pour des plaques simplement supportées soumise à une charge uniforme.....	52
Figure 3.8a	Influence de (L/h) sur la flèche centrale (W_c/W_{ref}) pour des plaques encadrées soumise à une charge concentrée.....	52
Figure 3.8b	Influence de (L/h) sur la flèche centrale (W_c/W_{ref}) pour des plaques encadrées soumise à une charge uniforme.....	53
Figure 3.9	Poutre console avec des différentes valeurs du coefficient de Poisson ($F=300, E=107, \text{ and } \nu = 0.3 - 0.4999999$).....	53
Figure 3.10	Test la sensibilité d'un seul élément à l'élancement L/h ($E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \nu = 0.25, h = e = 0, 12\text{m}, P = 6900 \text{ N}$ and $L/h = 1-16$).....	54
Figure 3.11	Poutre élancée de MacNeal ($P=1, M=10, L=6, h=0.2, E = 107, \nu=0.3$ and $b=0.1$).....	55
Figure 3.12	Tests de Cheung et Chen ($P_1=1000, P=150, E=1500, \nu=0.25$).....	57
Figure 3.13	Analyse élasto plastique d'un matériau 3D.....	58
Figure 3.14	Géométrie et maillage pour le test d'analyse d'une terre passive.....	60
Figure 3.15	Analyse d'une terre passive.....	60
Figure 3.16	Géométrie et maillage de la semelle flexible.....	61
Figure 3.17	Capacité portante d'un sol purement cohérent.....	61

Chapitre 4.

Figure 4.1	Force nodale équivalente pour un élément rectangulaire.....	65
Figure 4.2	Géométrie et maillage d'un Cylindre épais soumis à une pression interne.....	69
Figure 4.3	Cylindres à paroi épaisse sous une pression interne déplacement radial maillage 1x4.....	70
Figure 4.4	Cylindre à paroi épaisse sous une pression interne contrainte radiale calculée au centre des éléments maillage 1x4.....	71
Figure 4.5	Cylindre à paroi épaisse sous une pression interne contrainte tangentielle calculée au centre des éléments maillage 1x4.....	71
Figure 4.6	Cylindres à paroi épaisse sous une pression interne déplacement radial maillage 1x16.....	72
Figure 4.7	Cylindre à paroi épaisse sous une pression interne contrainte radiale calculée au centre des éléments maillage 1x16.....	72
Figure 4.8	Cylindre à paroi épaisse sous une pression interne contrainte tangentielle calculée au centre des éléments maillage 1x16.....	73
Figure 4.9	Géométrie et maillage d'un Disque mince en Rotation	73
Figure 4.10	Disque en rotation déplacement radiale maillage 1x4.....	74
Figure 4.11	Disque en rotation contrainte radiale calculée au centre des éléments maillage 1x4.....	75
Figure 4.12	Disque en rotation contrainte tangentielle calculée au centre des éléments maillage 1x4.....	75
Figure 4.13	Géométrie et maillage d'une Plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée.....	76
Figure 4.14	Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge ponctuelle P avec un maillage 2x4 (déplacement radial u_r).....	77
Figure 4.15	Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge ponctuelle P avec un maillage 2x4 (contrainte radiale σ_{rr} calculée au centre des éléments).....	78
Figure 4.16	Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge concentrée P avec un maillage 2x4(contrainte tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ calculée au centre des éléments).....	78

Figure 4.17	Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge concentrée P avec un maillage 2×16 (déplacement radial u_r).....	79
Figure 4.18	Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge concentrée P avec un maillage 2×16 (contrainte radiale σ_{rr} calculée au centre des éléments).....	79
Figure 4.19	Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge concentrée P au centre de la plaque avec un maillage 2×16 (contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ calculée au centre des éléments).....	80

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 2.

Tableau 2.1	Plaque carrée à deux bords encastrés et deux libres ($P=100$, $L=10$, $h=0.4$, $E=3600$ and $\nu=0.3$).....	36
Tableau 2.2	Plaque carrée à deux bords encastrés et deux libres ($q=0.9$, $L=10$, $h=0.4$, $E=3600$ et $\nu=0.3$).....	37
Tableau 2.3	Flèche normalisé d'une poutre cantilever avec différentes valeurs du coefficient de Poisson.....	38
Tableau 2.4	Flèche normalisée pour le test de la sensibilité d'un seul élément à l'élanement L/h	39
Tableau 2.5	Tests de la poutre élancée de MacNeal (déflexion normalisée à l'extrémité libre(W)).....	40
Tableau 2.6	Tests de Cheung et Chen : déplacements normalisés à l'extrémité libre (flexion pure).....	41
Tableau 2.7	Tests de Cheung et Chen : déplacements normalisés à l'extrémité libre (effort tranchant).....	42

Chapitre 3.

Tableau 3.1	Flèche normalisée d'une poutre cantilever avec différentes valeurs du coefficient de Poisson.....	54
Tableau 3.2	Flèche normalisée pour le test de la sensibilité d'un seul élément à l'élanement L/h	55
Tableau 3.3	Tests de la poutre élancée de MacNeal (déflexion normalisées à l'extrémité libre(W)).....	56
Tableau 3.4	Tests de Cheung et Chen : déplacements normalisés à l'extrémité libre (flexion pure).....	57

Tableau 3.5	Tests de Cheung et Chen : déplacements normalisés à l'extrémité libre (effort tranchant).....	58
Tableau 3.6	Déplacement axial par rapport aux contraintes normales (σ_x , σ_y et σ_z) pour l'analyse élasto-plastique des matériaux.....	59

INTRODUCTION GENERALE

Introduction

Aujourd'hui, les éléments finis sont un outil majeur, incontournable en mécanique des fluides et des solides et en interactions et structures. La méthode des éléments finis connaît un développement fulgurant accompagné par les progrès de l'informatique. Avec ce progrès, le nombre d'éléments utilisés pour l'analyse des structures est facilement gérable, ce qui a amené le succès de la méthode et sa puissance. Elle est appliquée à des problèmes de plus en plus grands et complexes où on cherche à avoir des solutions approchées et non des solutions exactes et fermes, car elles nécessitent énormément d'efforts intellectuels et de temps lorsqu'elles sont possibles.

La modélisation des éléments de structure en éléments finis est certainement la branche la plus féconde de la méthode des éléments finis. Ces modélisations sont utilisables en mécanique linéaire et non linéaire, sous des hypothèses, de petits déplacements, de grands déplacements et de grandes rotations suivant les modélisations.

Les plaques et les coques sont des structures largement utilisées dans beaucoup d'applications technologiques, elles sont utilisées généralement dans les industries d'espace aéronautique et d'automobile. Les éléments de coques et de plaques sont particulièrement utilisés pour modéliser des structures minces.

Un très grand nombre d'éléments finis de plaque en flexion a été développé, ces éléments finis peuvent se classer en trois types: éléments de type Kirchhoff, éléments de type Reissner/Mindlin et éléments de type Kirchhoff discret. A cause de l'exigence de continuité, les éléments de plaque de type Kirchhoff sont relativement difficiles à formuler. Les premiers éléments de plaque ont été formulés en utilisant la théorie de Kirchhoff qui néglige les effets de cisaillement transverse (CT) [Wem.68].

Une grande attention a été orientée durant ces dernières années au développement des éléments de plaque basés sur la théorie du premier ordre (Reissner/Mindlin) [Rei.45], [Min.51], qui prend en compte l'effet de cisaillement où la continuité C^0 est seulement requise pour l'approximation des déplacements et des rotations. Des phénomènes inhérents à ce type d'élément dû à la mauvaise représentation des déformations de cisaillement transversal qui conduit au blocage en cisaillement. Des traitements pour éviter le blocage en cisaillement transversal ont été proposés :

- ✓ Introduction des modes incompatibles supérieurs [Tay.76].
- ✓ Intégration réduite ou sélective [Zie.77] et [Pug.78].

- ✓ Construction de champ de déformation de cisaillement de substitution [Hin.91], [Don.87], [Bat.85].

Il existe, cependant, d'autres types d'éléments avec CT basés sur des théories dites (d'ordre supérieur). Des distributions plus générales des champs de déplacements ou de contraintes sont alors considérées. Une revue sommaire des différents éléments est faite par Lardeur [Lar. 90] et par Noor et al [Nor. 89]. En utilisant des éléments d'ordre supérieur, ces phénomènes de verrouillage sont réduits, mais l'effort de calcul devient plus grand. La plupart des tentatives pour remédier à ce problème ont eu recours à l'utilisation des techniques basées sur l'intégration réduite [Zie.77].

D'autres travaux de recherche ont été consacrés aux éléments tridimensionnels pour les plaques épaisses en flexion [Gal.76] et [Zie.89]. Cependant, ces éléments ont tendance à provoquer des phénomènes de blocage de cisaillement indésirables lorsqu'ils traitent le cas des plaques minces. Ainsi, il existe un besoin réel, d'avoir des éléments finis volumiques polyvalents, efficaces et capables de traiter de façon autonome tous les types de plaques. Des formulations ont été mises en place pour développer des éléments tridimensionnels robustes, [Cha.90], [Ven.96], [Bas.00a], [Bas.00b], [Lem.00], [Lo.00], [Sze.01], [Ooi.04], [Che.04], [Fre.07], [Trin.09] et [Trin.11], qui permettent d'empêcher le verrouillage en cisaillement lorsqu'il s'agit de structures minces.

Une approche différente au développement des fonctions de formes, a été établie par Sabir et son groupe (1971-1995). Cette approche en déformation a été d'avantage appliquée par Sabir [Sab.83a] pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes. Dans cette approche l'interpolation est directe sur les déformations, ce qui permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs et sur les contraintes et les déplacements (obtenus par intégration) contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour les déplacements [Ash.71a], [Ash.71b], [Sab.72], [Sab.83], [Sab.83a], [Sab.83b], [Bul.84], [Sab.95], [Bela.97], [Sab.97], [Bela.98], [Bela.99], [Belo.05], [Djo.03], [Djo.04], [Bela.05b], [Reb.13].

Pour les éléments basés sur l'approche en déformation le champ des déplacements est composé de deux parties; la première est reliée aux conditions du mouvement de corps rigide, tandis que la deuxième est due à la déformation de l'élément.

Les avantages de la formulation en déformation sont:

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence (modes de corps rigide et mode de déformation constante).
- Découplage des différentes composantes de la déformation.
- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction des nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires.

Objectifs et contenu de la thèse

Ce travail de thèse s'intéressera d'une part au développement d'éléments finis 3D basés sur l'approche en déformation, pour la modélisation des plaques minces et épaisses. Dans ce contexte, deux nouveaux éléments, finis 3D (géométrie volumique, degrés de liberté de déplacements et relation de comportement tridimensionnelle modifiée) nommés SBB (Strain Based Brik) et SBBE (Strain Based Brik Equilibrium) qui se comporte bien en flexion seront développés. D'autre part, une extension de l'approche en déformation aux problèmes axisymétriques sera effectuée.

Plan de la thèse

La thèse se divise en quatre chapitres:

Le premier chapitre, abordera, en premier lieu, les bases théoriques de la flexion des plaques et en second lieu, nous présenterons, une synthèse bibliographique sur les éléments à champs de déformation développés durant les quatre dernières décennies.

Le deuxième chapitre sera consacré à la formulation et au développement du premier élément fini d'élasticité 3D à neuf nœuds, basé sur l'approche en déformation pour la flexion des plaques minces et épaisses.

Le troisième chapitre, portera sur la formulation et le développement du deuxième élément fini d'élasticité 3D à huit nœuds basé sur l'approche en déformation en analyse linéaire et en élasto-plasticité.

Dans le quatrième chapitre, deux éléments finis membranaires à champ de déformation (SBRIE, SBRIEIR) seront formulés et validés en axisymétrie, les performances de ces éléments seront évaluées à travers des cas tests liés à ce type de problème.

A la fin de cette thèse, une conclusion générale présente le bilan de ce travail et quelques perspectives liées à l'extension de l'approche utilisée.

Chapitre 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Chapitre 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Introduction

Etant donné que les plaques constituent la majorité des structures industrielles, il s'agit de corps solides minces dont au moins une dimension, est petite par rapport aux autres dimensions. L'analyse du comportement et la conception de ces structures ont une grande importance.

Nous proposerons, dans ce chapitre, en premier, un rappel sur la théorie des plaques élastiques minces en flexion pour des matériaux homogènes et isotropes, ainsi que les équations de mouvement, les lois de comportement, les relations de déformation-déplacement et les conditions aux limites. Ces relations locales obtenues seront utilisées pour caractériser le comportement global d'une plaque épaisse élastique.

Et en second, on présentera une étude bibliographique sur le développement de l'approche en déformation réalisée le long des quatre dernières décennies, ainsi que ces avantages par rapport à l'approche en déplacement.

1.2. Rappel sur la théorie des plaques en flexion

Ce paragraphe résulte d'une petite synthèse des références suivantes: [Cou.80], [IMB.84], [Tim.59] et [Riv.69].

1.2.1. Géométrie d'une plaque

Une plaque est un solide tridimensionnel dont une des dimensions appelée épaisseur est négligeable par rapport aux autres dimensions (largeur et longueur). Ce solide comporte généralement un plan de symétrie en $z=0$ plan (oxy) appelé surface de référence ou surface moyenne de la plaque voir Figure (1.1).

On distingue deux types de plaques suivant leurs épaisseurs ; les plaques minces et les plaques épaisses.

1.2.2 Plaques minces (modèle de Kirchhoff)

Ce type de plaques sont caractérisées par une structure limitée par deux plans parallèles distancés de (h) voir figure (1.1). Le repère oxyz est lié au plan moyen (S) de la plaque, la troisième direction z est celle de l'épaisseur h. On supposera que h est une constante et que les propriétés matérielles sont homogènes en épaisseur.

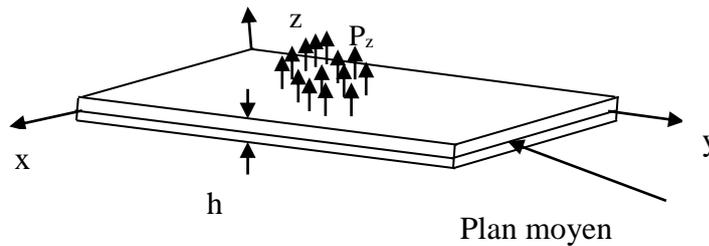


Figure (1.1) : Géométrie des plaques.

Comme dans la théorie des poutres, la théorie classique des plaques a deux hypothèses importantes:

- 1) Une ligne normale à la surface moyenne de la plaque est inextensible.
- 2) Une ligne droite normale à la surface moyenne non déformée reste droite et tourne afin de rester normale au plan déformé de la surface moyenne.

Ces hypothèses impliquent qu'il n'y a pas de contrainte transversale normale $\sigma_{zz} = 0$ (hypothèse 1) et de déformation de cisaillement $\varepsilon_{zz} = 0$, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{yz} = 0$ (hypothèse 2),

1.2.2.1 Hypothèse cinématique

L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après déformation voir figure (1.2). Dans lequel (u, v, w) sont les composantes du déplacement, dans un repère de coordonnées cartésiennes, d'un point appartenant au feuillet moyen (plan de la plaque, $z = 0$).

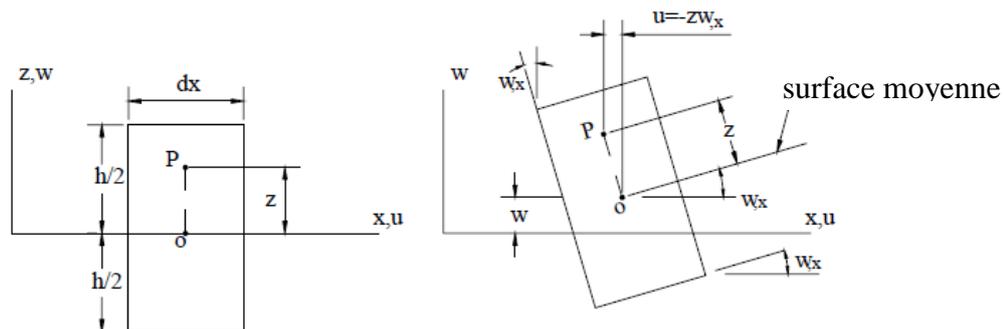


Figure (1.2) : Déplacements de la surface moyenne

La cinématique peut être décomposée en deux effets, celui de la flexion (rotation des sections) et le déplacement suivant z . On ne considère pas ici l'effet membrane. Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur dont le champ de déplacements est le suivant:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= -z \theta_y(x, y) \\
v(x, y, z) &= -z \theta_x(x, y) \\
w(x, y, z) &= w(x, y, 0)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Où : $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ et $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$ sont les rotations d'une normale à la surface moyenne autour de x et y et qui est négative selon ce dernier. Le vecteur des déformations planes s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Où: k est le tenseur des courbures qui sont les déformations généralisées pour le cas des plaques. On remarque qu'il existe a priori un couplage entre les déformations dans les directions x et y introduit par la composante ε_{xy} non nulle.

Les contraintes de cisaillement transverses σ_{xz} et σ_{yz} sont donc nulles dans ce cas. Ce modèle s'applique uniquement aux plaques très minces. Il existe des modèles de plaques épaisses qui tiennent compte du cisaillement. Les contraintes s'écrivent: $\sigma = D\varepsilon$. Avec [D]: matrice de comportement relative à l'état plan de contraintes.

1.2.2.2. Forces et moments agissant sur la plaque

La figure (1.3), montre la distribution des contraintes dans l'épaisseur de la plaque. On définit le moment de flexion M , l'effort tranchant Q et Les contraintes Intégrées sur l'épaisseur de la plaque.

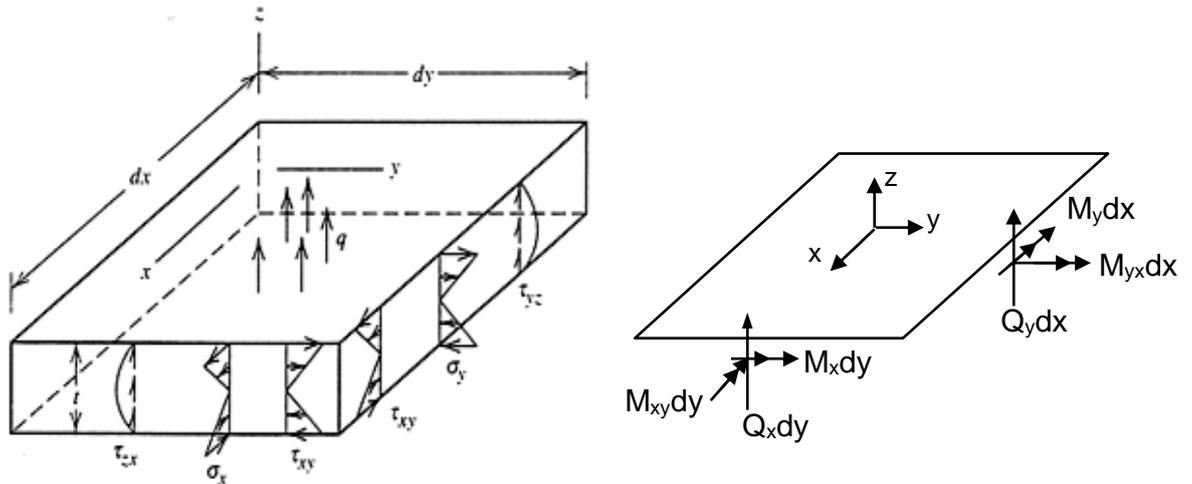


Figure 1.3 : Distribution des contraintes dans la plaque et efforts résultants

Les contraintes internes, d'une part, et leurs forces résultantes correspondantes, d'autre part, ont une relation les unes aux autres; l'application de l'équivalence statique engendre les relations désirées. Par l'intégration sur l'épaisseur de la plaque nous obtenons :

$$M_x = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$$

$$M_y = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \tag{1.4}$$

$$M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz$$

$$Q_x = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz$$

$$Q_y = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \tag{1.5}$$

La théorie classique des plaques dans le plan (xy) utilise l'hypothèse de contrainte plane pour un matériau isotrope. Alors dans ce cas les relations des contraintes-déformations sont données par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\
\sigma_{xy} &= G \varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \\
G &= \frac{E}{2(1-\nu)}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Où: E , ν et G sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement pour un matériau isotrope.

Les moments de flexion sont définis par:

$$M_{xx} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = \int_{h/2}^{-h/2} \frac{-E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) z dz \tag{1.7}$$

$$M_{xx} = - \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \tag{1.8}$$

Où:

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \tag{1.9}$$

Alors:

$$M_{xx} = - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{1.10}$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \tag{1.11}$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \tag{1.12}$$

La rigidité de la plaque en flexion est définie par: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Donc, la relation de comportement de la plaque est donnée par:

$$M = \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ 2K_{xy} \end{pmatrix} = -DK \quad (1.13)$$

L'équation d'équilibre dans la direction x (pas de force suivant la direction x) donne:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1.14)$$

En intégrant l'équation d'équilibre (1.14) sur l'épaisseur on obtient :

$$\frac{h}{2} \int \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) z dz = 0 \quad (1.15)$$

En termes de moments de flexion et d'efforts tranchants on a:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = 0 \quad (1.16)$$

On intègre par partie le dernier terme de l'équation (1.16), on obtient:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz + [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} = 0 \quad (1.17)$$

$$\text{Où : } \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = Q_x$$

Comme, aucun cisaillement n'est appliqué aux faces supérieures et inférieures de la plaque, on a donc:

$$Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (1.18)$$

Et similairement, on utilisant l'équilibre suivant l'axe y.

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \quad (1.19)$$

L'équation d'équilibre dans la direction z intégrée sur l'épaisseur est:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (1.20)$$

En tenant compte de la définition des résultantes Q_x et Q_y , on déduit que:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + [\sigma_{zz}]_{-h/2}^{-h/2} = 0 \quad (1.21)$$

En $z = h/2$, on a supposé qu'il existe une distribution surfacique p (pression) cette dernière est équilibrée par σ_{zz} , d'où:

$$[\sigma_{zz}]_{-h/2}^{-h/2} = 0 - (-p) = p \quad (1.22)$$

L'équilibre vertical en termes de résultantes est comme suit:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (1.23)$$

Ou en termes de moments :

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + p = 0 \quad (1.24)$$

En utilisant, la déflexion w comme inconnue, on trouve:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (1.25)$$

C'est l'équation bi harmonique qui décrit la flexion de la plaque. Notons que les équations (1.24) en termes de moments sont valables pour tout matériau; tandis que l'équation en termes de la flexion w est seulement valable pour un matériau élastique linéaire. L'équation (1.25) est l'équation classique de la théorie des plaques, appelée souvent équation de Lagrange. Elle doit être agrémentée de conditions aux limites appropriées à l'étude des plaques.

1.2.2.3. Conditions aux limites

La solution des équations définissant u , v et w exige une attention particulière aux conditions aux limites. Nous considérons seulement les plaques rectangulaires dont les bords sont parallèles aux axes x et y , les déplacements u et v chacun doivent être au moins spécifiés le long d'une des frontières de la plaque. Nous pouvons écrire les conditions aux limites selon le type de frontière:

$$\checkmark \text{ Bord encastre: } w = 0, \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$\checkmark \text{ Bord simplement appuyé: } w = 0, \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\checkmark \text{ Bord libre } \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = 0$$

1.2. 3. Plaques épaisses (modèles de Reissner-Mindlin)

On a recours à une théorie plus complète, (théorie de Reissner-Mindlin), lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff. Les hypothèses cinématiques de cette théorie sont proches de celles utilisées dans les poutres de Timoshenko, et suppose que tout élément normal au plan moyen de la plaque se comporte comme un solide rigide Figure (1.4). En se plaçant dans les cas de petits déplacements et d'une plaque sous sollicitations de flexion, on peut écrire:

$$\begin{aligned} u &= -z \theta_x(x, y) \\ v &= -z \theta_y(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1.26)$$

La relation (1.26) fait apparaître trois inconnues cinématiques: une translation (w) et deux rotations (θ_x et θ_y), qui représentent respectivement la flèche de la plaque et les rotations de la normale autour des axes x et y du plan moyen.

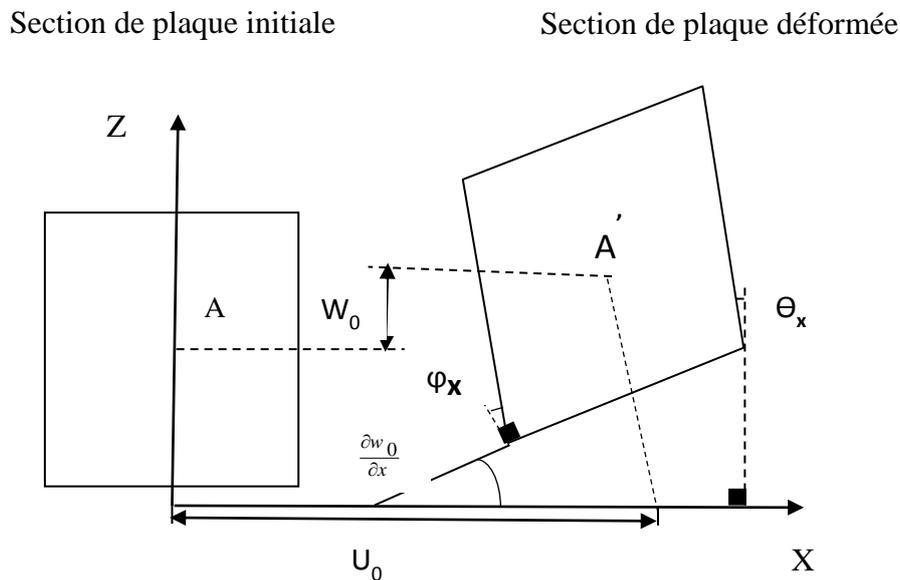


Figure 1. 4 : Cinématique de Reissner-Mindlin

Avec ces hypothèses cinématiques, une fibre initialement orthogonale au plan moyen reste droite (pas de gauchissement). On admettant l'hypothèse qu'elle reste orthogonale à la fibre neutre après déformation. A partir du champ des déplacements (1.26), on peut calculer le tenseur de déformations. On obtient:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = - \left(-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = - \left(-\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Les courbures κ_x , κ_y , κ_{xy} et les déformations de cisaillement, γ_{xz} , γ_{yz} sont données par:

$$\begin{aligned}
\kappa_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\
\kappa_y &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\
\kappa_{xy} &= \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= \left(-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\gamma_{yz} &= \left(-\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Ainsi le vecteur des déformations s'écrit de la façon suivante:

$$\{\varepsilon\} = [\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \tag{1.29}$$

Les déformations données par les équations (1.28) sont utilisées pour obtenir les équations de compatibilité en éliminant w , et θ_x , θ_y , d'où:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial \kappa_y}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Pour les plaques très minces, les déformations de cisaillement (γ_{xz} , γ_{yz}) deviennent négligeables et on retrouve l'hypothèse de Love Kirchhoff: tout segment normal au plan moyen avant déformation demeure normal à la déformée de ce plan après déformation.

La relation (1.28) implique que ces composantes sont constantes dans l'épaisseur. Dans ce cas les contraintes σ_{xz} et σ_{yz} ne respectent pas les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure. Pour corriger cette situation, on introduit des facteurs de correction afin de mieux prendre en compte la variation réelle de ces contraintes. L'hypothèse $\sigma_{zz} = 0$ étant maintenue, nous pouvons calculer l'état de contrainte en inversant la relation:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Qui donne:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

On a donc: $\sigma = D\varepsilon$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = z \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

On peut ensuite calculer les moments et efforts tranchants résultants:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (1.35)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (1.36)$$

Deux lois de comportement pour les plaques de Reissner-Mindlin sont écrites. Une pour la flexion qui relie les moments M et les courbures K , la deuxième relie les efforts tranchants Q au vecteur des angles de cisaillement γ , on obtient:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = -[D] \{ \kappa \} \quad (1.37)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz = Gkh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = [\alpha] \{ \gamma \} \quad (1.38)$$

Où: le facteur $K < 1$ est introduit pour corriger l'hypothèse fautive d'une contrainte en cisaillement indépendante de z , $\alpha = Gkh$ est la rigidité d'une plaque au cisaillement

et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement.

Les équations (1.37) et (1.38) peuvent être regroupées comme suit:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = [D] \{ \varepsilon \} \quad (1.41)$$

Où: M_x , M_y , M_{xy} , Q_x et Q_y représentent les moments de flexion, de torsion et des forces de cisaillement transversaux par unité de longueur, respectivement. $[D]$ est la matrice de rigidité qui contient des termes d_{ij} , définies par:

$$\begin{aligned} d_{11} = d_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ d_{12} &= \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ d_{33} = d_{11} &\frac{(1-\nu)}{2} \\ d_{44} = d_{55} &= \frac{kEh}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Les équations d'équilibre peuvent être déduites, comme pour les plaques de Kirchhoff, les équations d'équilibre locales suivant x, y et z. sont données par:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1.43)$$

Qui entraîne:

$$Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (1.44)$$

Et

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.45)$$

Qui entraîne:

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \quad (1.46)$$

Ces deux équations d'équilibre (1.43), (1.45) ne diffèrent pas de celles de la théorie des plaques de Kirchhoff.

L'équation qui traduit l'équilibre transversal (ou vertical) est donnée par.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0 \quad (1.47)$$

1.3. Historique sur le modèle en déformation

1.3.1. Éléments finis de type poutre courbée

Le développement des polynômes du champ de déplacement par l'utilisation de l'approche en déformation a été appliqué pour la première fois à des structures courbes. Il a été montré, que pour obtenir des résultats satisfaisants et convergents par l'utilisation des éléments finis basés sur le modèle en déplacement à des structures courbes, que cela exigent un grand nombre d'éléments. Ceci a motivé les chercheurs pour le développement de l'approche en déformation afin de pallier ce type de problèmes.

Ashwell, Sabir et Roberts [Ash.72] et [Ash.71] ont montré que pour une analyse par des éléments courbes sur des arcs circulaires simples avec différents rapports, lorsque les polynômes du champ de déplacement utilisés sont découplés, la structure doit être divisée en un grand nombre d'éléments afin d'obtenir des résultats convergents et satisfaisants.

Par contre, lorsque le champ de déformation utilisé est découplé, les résultats obtenus sont convergents, même avec un maillage grossier, donc une convergence plus rapide pour les éléments à champ de déformation. Par conséquent, ils ont continué à développer une nouvelle classe d'éléments finis simples et efficaces pour différents types de problèmes qui reposent sur l'hypothèse des déformations indépendantes plutôt que les champs de déplacement indépendants. Une étude concernant les problèmes de vibration a été utilisée pour une comparaison d'éléments finis type poutres courbes [Sab.71]. Les travaux antérieurs sur les fonctions de forme des éléments finis utilisés pour les structures courbes, comme les arcs, sont prolongés de la statique à des problèmes de vibrations. Dans cette étude, les vibrations libres d'un anneau sont prises en considération et quatre fonctions de forme sont utilisées et la convergence trouvée est plus rapide.

Ashwell et al ont utilisé également l'approche en déformation pour développer un élément arc de déformation dans le plan [Ash.71a], [Ash.71b], et hors plan contenant une courbure [Sab.75], ils ont eu l'occasion de montrer que les éléments d'ordre supérieur peuvent être obtenus par l'approche en déformation et peuvent également être condensés aux seuls degrés de liberté externes essentiels. Cette condensation statique au niveau de l'élément a été utilisée pour produire une amélioration supplémentaire de la convergence aux résultats.

Un élément courbe a été également développé par Sabir et Lok [Sab.73] pour l'analyse de non linéarité géométrique des arcs circulaires. La supériorité de cet élément a été démontrée. Le travail a été étendu par Sabir [Sab.75] pour développer un élément d'arc se déformant aussi bien hors plan de courbure que dans le plan.

1.3.2. Eléments coques basés sur le modèle en déformation

Sabir et Ashwell [Ash.72] ont présenté un élément fini de type coque cylindrique basé sur l'approche en déformation qui a vingt degrés de liberté. Cet élément utilise seulement les déplacements nodaux géométriquement externes (trois déplacements et deux rotations) satisfaisant les conditions de déplacements de corps rigide et de déformation constante. Avec cet élément et avec un maillage grossier, la convergence est excellente. La supériorité de cet élément est particulièrement marquée quand il est appliqué aux coques minces. Comme les éléments rectangulaires qui ont été développés ne peuvent pas être utilisés pour la modélisation des coques ayant des bords courbes irrégulières, Sabir et Charchafchi [Sab. 82] ont utilisé l'approche en déformation pour développer un élément de coque quadrilatère et Sabir a utilisé cet élément pour le problème de concentration de contraintes dans des cylindres avec des trous circulaires et elliptiques [Sab.79], ainsi que le problème d'intersection droit des cylindres [Sab.83].

En 1985, Sabir et Ramadani [Sab.85] ont développé un élément fini courbe simple, basé sur les équations de coque peu profonde possédant les seuls degrés de liberté externes essentiels. L'élément a été testé en l'appliquant à l'analyse des problèmes cylindriques [Sab.85], sphérique [Sab.87] et pour des coques paraboliques, hyperboliques qui a donné un degré de précision élevé.

Djoudi [Djo.85] a développé un élément de coque triangulaire peu profond courbé. Cet élément ne contient que cinq degrés de liberté essentiels à chaque nœud. Plusieurs exemples de coques avec différentes charges et conditions aux limites ont été examinés et les résultats obtenus ont été jugés satisfaisants pour la plupart des problèmes.

Sabir et El-Erris [Sab.88] ont développé un élément fini coque conique courbe adapté à l'analyse de la flexion des coques coniques. Cet élément est simple et possède toutes les conditions requises pour moins d'effort de calcul. L'élément possède 20 degrés de liberté et satisfait à la représentation exacte des modes de déplacement de corps rigide. Les caractéristiques de convergence de l'élément ont été testées en l'appliquant à l'analyse de la flexion des coques coniques et il a été montré que les résultats obtenus sont d'un niveau acceptable de précision lors de l'utilisation d'un maillage grossier.

L'approche en déformation a également été utilisée pour le développement de plusieurs éléments de coque qui ont été élaborés par Mousa, A. [Mou.94] et [Mou.01]. Ces éléments comprennent des éléments coniques, cylindriques et sphériques. En outre, deux groupes d'éléments triangulaires à double courbure ont été développés, le premier groupe comprend trois éléments qui ont cinq degrés de liberté à chaque nœud, tandis que le second groupe comprend deux éléments qui ont six degrés de liberté à chaque nœud. Ces éléments ont une grande précision en termes de déplacements et contraintes pour l'analyse des structures complexes.

Une autre analyse à l'aide des éléments à champ de déformation de plusieurs structures coques rigides est effectuée par [Ass.99]. En effet, l'élément fini de coque utilisé dans cette analyse a été développé à l'origine par [Ash.72], et il a été modifié par la suite, de façon indépendante par [Cha.82] et [Ass.84] dans le but d'améliorer sa performance. Cet élément a cinq degrés de liberté par nœud, basé sur des fonctions de déformation généralisées simples satisfaisant l'exigence de déformations constantes et indépendantes plutôt que la formulation habituelle basée sur les déplacements indépendants.

1.3.3. Eléments finis d'élasticité 2D basés sur le modèle en déformation

L'approche en déformation a été étendue par Sabir [Sab.83a] pour les problèmes d'élasticité plane. Une nouvelle famille de ces éléments a été développée. Ces éléments répondent aux exigences du mouvement du corps rigide et vérifient les équations de compatibilité au sein de l'élément. Un élément rectangulaire de base nommé SBRIE a été développé et testé en l'appliquant à l'analyse en deux dimensions d'une poutre et d'une plaque trouée. Le champ de déformation est donné comme suit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8\end{aligned}\tag{1.48}$$

Ces mêmes champs de déformation ont été appliqués à l'élément triangulaire dénommé (SBTIE) [Sab.95]. Cet élément possède deux degrés de liberté, u et v , à chacun des trois nœuds des sommets et au niveau du nœud supplémentaire au milieu du côté de l'élément.

Une autre version de cet élément [Sab.95] où un élément rectangulaire nommé (SBRIE1) à quatre nœuds aux quatre sommets de l'élément ainsi qu'un nœud au milieu satisfaisant aux exigences ci-dessus a été développé et testé, cet élément est utilisé après condensation statique. Les termes associés aux constantes (a_9, a_{10}) qui correspondent aux

deux ddl du nœud supplémentaire, sont additionnés à la troisième équation du champ de déformation qui représente la déformation de cisaillement γ_{xy} .

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y\end{aligned}\tag{1.49}$$

Une autre version de cet élément [Sab.95] dénommée (SBRIE2) satisfaisant aux exigences ci-dessus, ainsi qu'aux équations d'équilibre a également été développé et testé. Le couplage représenté par les termes associés aux constantes a_9 , a_{10} dans les déformations ε_x , ε_y a permis d'ajouter les termes entre parenthèses de façon à ce que les équations d'équilibre seront satisfaisantes.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y - \left(1 - \frac{\mu}{2\mu}\right) \alpha_{10} x \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x - \left(1 - \frac{\mu}{2\mu}\right) \alpha_9 y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y\end{aligned}\tag{1.50}$$

Ces deux éléments membranaires rectangulaires et triangulaires basés sur le modèle en déformation sont développés pour l'analyse linéaire.

Avec l'utilisation de l'approche en déformation, le problème de l'intégration de la rotation dans le plan comme un degré de liberté supplémentaire a été introduit par Sabir [Sab.85a], un élément rectangulaire simple et efficace, avec rotation dans le plan nommé (SBRIEIR) a été développé:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \left(\alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} x y^3\right) \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x + \left(-\alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} x^3 y\right) \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + \left(\alpha_5 x + \alpha_7 y\right)\end{aligned}\tag{1.51}$$

Les termes associés aux constantes a_4 , a_6 et a_8 sont les termes correspondant aux états de contrainte constante qui assurent la convergence. Les termes contenant les constantes a_5 , a_7 et a_9 permettent un comportement de déformation linéaire. Les termes d'ordre supérieur entre parenthèse sont ajoutés de façon à ce que les équations de compatibilité seront satisfaites.

Un autre élément triangulaire intégrant la rotation dans le plan [Sab.85a], nommé SBTIEIR, est également développé avec le champ de déformation suivant:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_7 x \\
\varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 y + \alpha_5 x \\
\gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9(x + y)
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Une autre amélioration dans le comportement linéaire de l'élément [Sab.85a], a été présenté par [Bela.05a], où le champ vérifie, comme conditions supplémentaires, les équations d'équilibre pour enrichir le champ sans ajouter des degrés de liberté non essentiels.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y - \alpha_7(\nu x) + \alpha_9(-c_0 x) \\
\varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x - \alpha_5(\nu y) + \alpha_9(-c_0 y) \\
\gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9(x + y) \\
c_0 &= \frac{1-\nu}{2}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Plus tard un nouvel élément fini membranaire rectangulaire [Bela.05b], baptisé R4BM pour l'analyse des problèmes d'élasticité plane linéaire a été développé, cet élément possède deux degrés de liberté aux quatre nœuds du sommet ainsi qu'au nœud du centre de l'élément dont le champ de déformation est comme suit.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_9 x \\
\varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_{10} y \\
\gamma_{xy} &= \alpha_8
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Les degrés de libertés supplémentaires ajoutés aux nœuds du centre de l'élément qui correspond aux termes associés aux constantes α_9 , α_{10} ont permis d'enrichir les déformations en termes de x et y .

Plus récemment un élément membranaire rectangulaire intégrant la rotation dans le plan nommé SBREDR est également développé par [Reb.13], son champ de déformation est donné par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_6 y + \alpha_8 x + \alpha_{10} y^2 + 2\alpha_{11} xy^3 \\
\varepsilon_y &= \alpha_7 + \alpha_8 x + 2\alpha_9 y - \alpha_{10} x^2 - 2\alpha_{11} yx^3 \\
\gamma_{xy} &= 2\alpha_5 + 2\alpha_6 x + 2\alpha_8 y + 2\alpha_9 y + 2\alpha_{10}(y - x) + 2\alpha_{12} x
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Un autre élément membranaire rectangulaire intégrant la rotation dans le plan nommé SBQE est également développé par [Reb.14], son champ de déformation est donné par:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_6 y + \alpha_7 x + \alpha_{10} y^2 + 2\alpha_{11} xy^3 \\
\varepsilon_y &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y - \alpha_{10} x^2 - 2\alpha_{11} yx^3 \\
\gamma_{xy} &= 2\alpha_5 (y+1) + 2\alpha_6 x + 2\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + \alpha_9 y + 2\alpha_{12} x
\end{aligned} \tag{1.56}$$

1.3.4. Eléments finis de plaque basés sur le modèle en déformation

L'approche en déformation a été également prolongée à l'analyse des plaques. Une contribution de l'approche en déformation pour l'analyse des problèmes de flexion des plaques minces et épaisses a été présentée par [Belo.05], où un nouvel élément fini rectangulaire à quatre nœuds pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques avec effet de cisaillement transverse a été développé, le champ de déformation est donné par:

$$\begin{aligned}
\kappa_x &= a_4 + a_5 y \\
\kappa_y &= a_6 + a_7 x \\
\kappa_{xy} &= a_8 \\
\gamma_{xz} &= a_9 + a_{10} y - (a_7 y^2) \\
\gamma_{yz} &= a_{11} + a_{12} x - (a_5 x^2)
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Numériquement, cet élément est trouvé plus efficace que celui à champ de déplacement correspondant et sa précision est évaluée à travers une série de cas de test liés aux problèmes des plaques minces et épaisses.

Une autre extension de cette approche à l'étude des plaques minces et épaisses a été établie par [Bela.99], un nouvel élément hexaédrique simple à huit nœuds et à trois degrés de liberté par nœuds (u, v, w) a été développé, son champ de déformation est donné par:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_7 + a_8 y + a_9 z + a_{10} yz \\
\varepsilon_y &= a_{11} + a_{12} x + a_{13} z + a_{14} xz \\
\varepsilon_z &= a_{15} + a_{16} x + a_{17} y + a_{18} xy \\
\gamma_{yz} &= a_{19} + a_{20} x + a_{22} x - a_{10} x^2 \\
\gamma_{xz} &= a_{21} + a_{22} y + a_{24} y - a_{14} y^2 \\
\gamma_{xy} &= a_{23} + a_{24} z + a_{20} z - a_{18} z^2
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Les composantes normales du champ de déformation ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} de cet élément sont découplés, par contre les composantes de cisaillement γ_{yz} , γ_{xz} , γ_{xy} sont couplées entre eux et aux composantes normales de déformation pour vérifier les équations de compatibilité. Une matrice d'élasticité modifiée est utilisée pour l'obtention de la matrice de rigidité de cet élément. La modification des constantes élastiques vise à adoucir la matrice

de rigidité dans le but de représenter exactement le comportement réel des plaques en flexion qu'elles soient minces ou épaisses. Cet élément est numériquement plus performant que celui du modèle en déplacement.

Sur la base de cet élément, Hamadi [Ham.10] a enrichi le champ de déformation par l'addition des termes en x , y et z associés aux constantes a_{25} , a_{26} , a_{27} et aux composantes normales ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} du champ de déformation successivement, qui correspond aux degrés de liberté du neuvième nœud ajouté au centre de l'élément. Cet élément nommé SBP8C a été trouvé numériquement plus performant comparativement avec celui du modèle en déplacement.

En 2011 Himeur [Him.11], a développé un nouvel élément fini triangulaire de plaque basé sur l'hypothèse de la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff), pour l'analyse des plaques minces avec un quatrième nœud fictif où la condensation statique est utilisée pour cet élément. Plusieurs tests liés aux problèmes de flexion des plaques minces sont utilisés montrant la robustesse et la performance de cet élément.

Chapitre 2

DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI D'ELASTICITE 3D A 9 NŒUDS

Chapitre 2. DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI D'ELASTICITE 3D A 9 NŒUDS

2.1. Introduction

L'approche en déformation permet d'obtenir les champs de déplacement en intégrant les déformations, ce qui permet d'avoir un champ de déplacement enrichi par des termes d'ordre supérieur sans introduire de degrés de liberté non essentiels.

Un nouvel élément fini d'élasticité 3D à 9 nœuds basé sur l'approche en déformation nommé SBB (**S**train **B**ased **B**rick) sera formulé pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques minces et épaisses. Il possède les huit nœuds de sommet ainsi qu'un nœud au centre de l'élément avec les trois degrés de liberté (u, v et w) par nœuds. Pour la formulation de l'élément, on utilisera la technique de condensation statique [Sab.95], [Bela.05b] et [Him.11]. Cet élément sera examiné et comparé avec d'autres éléments à travers des cas tests, afin de confirmer la bonne performance de l'approche en déformation.

2.2. Considérations théoriques

Pour une analyse linéaire tridimensionnelle les six composantes de la déformation et les six équations de compatibilité sont respectivement données par:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\
\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Où ε_x , et ε_y , ε_z sont les déformations normales, et γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} sont les déformations de cisaillement. Les déplacements dans les directions x, y et z sont respectivement u, v et w.

La relation contrainte-déformation des plaques isotropes homogènes en flexion [Cha.90], [Tri.09], [Bela.99] et [Ait.84] est donnée par l'équation (2.3). La matrice d'élasticité [D] est modifiée pour représenter l'état de contrainte plane, et par l'introduction des coefficients de cisaillement. La modification des constantes de la matrice d'élasticité a pour but de modifier la matrice de rigidité de l'élément, afin de représenter le comportement réel de la flexion des plaques (épaisses ou minces).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

Où σ_x , σ_y et σ_z sont les contraintes normales et τ_{xy} , τ_{yz} et τ_{zx} sont les contraintes de cisaillement. Les constantes sont définies comme suit: $d_{33} = \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)}$, $d_{44} = \frac{(1-\nu)}{2}$, $k = 5/6$

Où ν , E et K sont respectivement le coefficient de Poisson, le module de Young et le facteur de cisaillement.

2.3. Formulation de l'élément développé SBB

Nous intégrons l'équation (2.1) avec l'ensemble des six déformations égales à zéro pour obtenir:

$$u = a_1 + a_4 y + a_6 z, \quad v = a_2 - a_4 x - a_5 z, \quad w = a_3 + a_5 y - a_6 x \quad (2.4)$$

Ces équations représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide, qui nécessite six constantes ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$).

L'élément SBB à neuf nœuds contient 27 degrés de libertés ce qui permet que le champ de déplacement doit contenir 27 constantes ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{27}$). Six entre elles ont été utilisées pour représenter les déplacements de corps rigide et les 21 constantes restantes sont pour représenter de façon approximative la déformation dans l'élément tout en vérifiant les six équations de compatibilité (2.2). Ces 21 constantes ($\alpha_7, \alpha_8, \dots, \alpha_{27}$) sont réparties entre les déformations comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \alpha_7 + \alpha_8 y + \alpha_9 z + \alpha_{10} yz + \alpha_{11} x \\ \varepsilon_{yy} &= \alpha_{12} + \alpha_{13} x + \alpha_{14} z + \alpha_{15} xz + \alpha_{11} y \\ \varepsilon_{zz} &= \alpha_{16} + \alpha_{17} x + \alpha_{18} y + \alpha_{19} xy + \alpha_{11} z \\ \gamma_{xy} &= \alpha_{20} + \alpha_{21} z + \alpha_{22} x + \alpha_{23} y - \alpha_{19} z^2 \\ \gamma_{yz} &= \alpha_{24} + \alpha_{25} x - \alpha_{10} x^2 \\ \gamma_{xz} &= \alpha_{26} + \alpha_{27} y - \alpha_{15} y^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le champ de déformation du présent élément donné par l'équation (2.5) satisfait les équations de compatibilités l'équation (2.2). Après substitution des équations (2.5) dans (2.1) et après intégration nous obtenons les fonctions de déplacements u, v et w comme suivant:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_7 x + \alpha_8 xy + \alpha_9 xz + \alpha_{10} xyz + 0.5 \alpha_{11} x^2 - 0.5 \alpha_{13} y^2 - 0.5 \alpha_{15} y^2 z \\ &\quad - 0.5 \alpha_{17} z^2 - 0.5 \alpha_{19} yz^2 + 0.5 \alpha_{20} y + 0.5 \alpha_{21} yz - 0.5 \alpha_{25} yz + 0.5 \alpha_{23} y^2 + 0.5 \alpha_{26} z + 0.5 \alpha_{27} yz \\ v &= -0.5 \alpha_8 x^2 - 0.5 \alpha_{10} x^2 z + 0.5 \alpha_{11} y^2 + \alpha_{12} y + \alpha_{13} yx + \alpha_{14} yz + \alpha_{15} xyz \\ &\quad - 0.5 \alpha_{18} z^2 - 0.5 \alpha_{19} xz^2 + 0.5 \alpha_{20} x + 0.5 \alpha_{21} xz + 0.5 \alpha_{22} x^2 + 0.5 \alpha_{24} z + 0.5 \alpha_{25} xz - 0.5 \alpha_{27} xz \\ w &= -0.5 \alpha_9 x^2 - 0.5 \alpha_{10} x^2 y + 0.5 \alpha_{11} z^2 - 0.5 \alpha_{14} y^2 - 0.5 \alpha_{15} xy^2 + \alpha_{16} z \\ &\quad + \alpha_{17} xz + \alpha_{18} yz + \alpha_{19} xyz - 0.5 \alpha_{21} xy + 0.5 \alpha_{24} y + 0.5 \alpha_{25} xy + 0.5 \alpha_{26} x + 0.5 \alpha_{27} xy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le champ de déplacement final est la somme des expressions des équations (2.6) et (2.4).

$$\begin{aligned}
u &= \alpha_1 + \alpha_4 y + \alpha_6 z + \alpha_7 x + \alpha_8 xy + \alpha_9 xz + \alpha_{10} xyz + 0.5 \alpha_{11} x^2 - 0.5 \alpha_{13} y^2 - 0.5 \alpha_{15} y^2 z \\
&\quad - 0.5 \alpha_{17} z^2 - 0.5 \alpha_{19} yz^2 + 0.5 \alpha_{20} y + 0.5 \alpha_{21} yz - 0.5 \alpha_{25} yz + 0.5 \alpha_{23} y^2 + 0.5 \alpha_{26} z + 0.5 \alpha_{27} yz \\
v &= \alpha_2 - \alpha_4 x - \alpha_5 z - 0.5 \alpha_8 x^2 - 0.5 \alpha_{10} x^2 z + 0.5 \alpha_{11} y^2 + \alpha_{12} y + \alpha_{13} yx + \alpha_{14} yz + \alpha_{15} xyz \\
&\quad - 0.5 \alpha_{18} z^2 - 0.5 \alpha_{19} xz^2 + 0.5 \alpha_{20} x + 0.5 \alpha_{21} xz + 0.5 \alpha_{22} x^2 + 0.5 \alpha_{24} z + 0.5 \alpha_{25} xz - 0.5 \alpha_{27} xz \\
w &= \alpha_3 + \alpha_5 y - \alpha_6 x - 0.5 \alpha_9 x^2 - 0.5 \alpha_{10} x^2 y + 0.5 \alpha_{11} z^2 - 0.5 \alpha_{14} y^2 - 0.5 \alpha_{15} xy^2 + \alpha_{16} z \\
&\quad + \alpha_{17} xz + \alpha_{18} yz + \alpha_{19} xyz - 0.5 \alpha_{21} xy + 0.5 \alpha_{24} y + 0.5 \alpha_{25} xy + 0.5 \alpha_{26} x + 0.5 \alpha_{27} xy
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Le présent élément (SBB) dont le champ de déplacement contient des termes quadratiques en x, y et z possèdent neuf nœuds avec 27 degrés de liberté et étant donné que la matrice [C] qui relie les 27 déplacements nodaux aux 27 constantes (α_1 à α_{27}) n'est pas singulière, son inverse existe. Comme pour les éléments finis de type de déplacement [Zie.89] la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ peut être donnée par:

$$[K^e] = \int [B]^T [D] [B] dv \tag{2.8}$$

La matrice de déformation [B] est donnée comme suit:

$$[B] = [Q] [C]^{-1} \tag{2.9}$$

D'où

$$[K^e] = [C]^T \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [[Q(x, y, z)]]^T [D] [[Q(x, y, z)]] dV \right\} [C]^{-1} \tag{2.10}$$

Donc

$$[K^e] = [C]^T [K_0] [C]^{-1} \tag{2.11}$$

Avec

$$K_0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D] [Q] \det |J| d\zeta d\eta d\xi \tag{2.12}$$

Où [Q], [D] et [J] sont respectivement les matrices de déformation, d'élasticité et le Jacobien. La matrice $[K_0]$ donnée par l'équation (2.12) est numériquement évaluée ainsi que les matrices [C] et [Q] sont données en annexe.

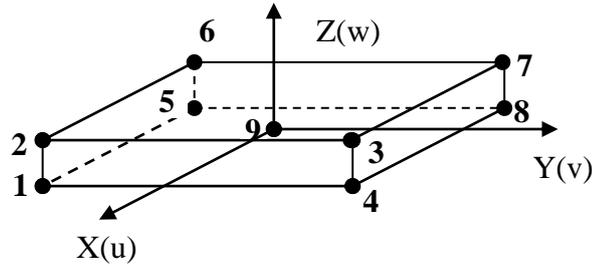


Figure 2.1: Éléments finis d'élasticité 3D à 9 nœuds

2.4. Validation numérique

2.4.1. Plaque carrée en flexion avec diverses conditions

Plaque carrée de longueur L avec différentes conditions aux limites, chargée soit avec une charge uniforme ou concentrée au centre de la plaque est étudiée pour des rapports d'épaisseur ($L/h = 10, 100$ et 500). Due aux conditions de symétrie, seul le quart de la plaque est modélisé figure (2. 2). Les solutions de référence pour les plaques minces ($L/h = 100$, et 500) sont prises à partir de [Tim.59]. Tandis que pour les plaques épaisses ($L/h=10$), les solutions de référence pour la charge répartie et la charge concentrée sont données respectivement par [Jir.95] et [Yua.88].

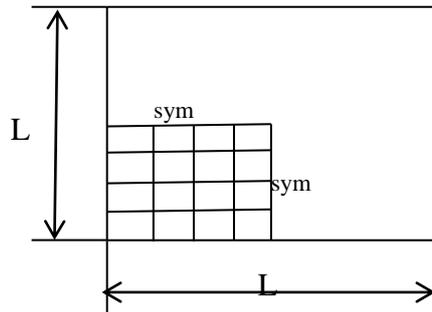


Figure 2.2: Plaque carrée en flexion avec diverses conditions ($E=10.92$, $\nu=0.3$ et le facteur de cisaillement $k=5/6$)

Les résultats de la flèche maximale obtenue au centre de la plaque pour l'élément SBB avec différents maillages sont présentés et comparés à ceux des autres éléments et avec les solutions de référence figure (2. 3-6). Les résultats montrent que l'élément développé SBB converge assez rapidement à la solution de référence pour les plaques minces et épaisses, et il est en bonne concordance avec d'autres résultats numériques. L'élément développé est libre de tout blocage en cisaillement transverse car il converge vers les solutions de Kirchhoff pour des plaques minces, contrairement à l'élément brique DBB8 basé sur le modèle en déplacement. L'élément SBB se comporte mieux que l'élément SBH8 [Bela.99], pour le cas des plaques minces et très minces ($L/h = 100$, et 500).

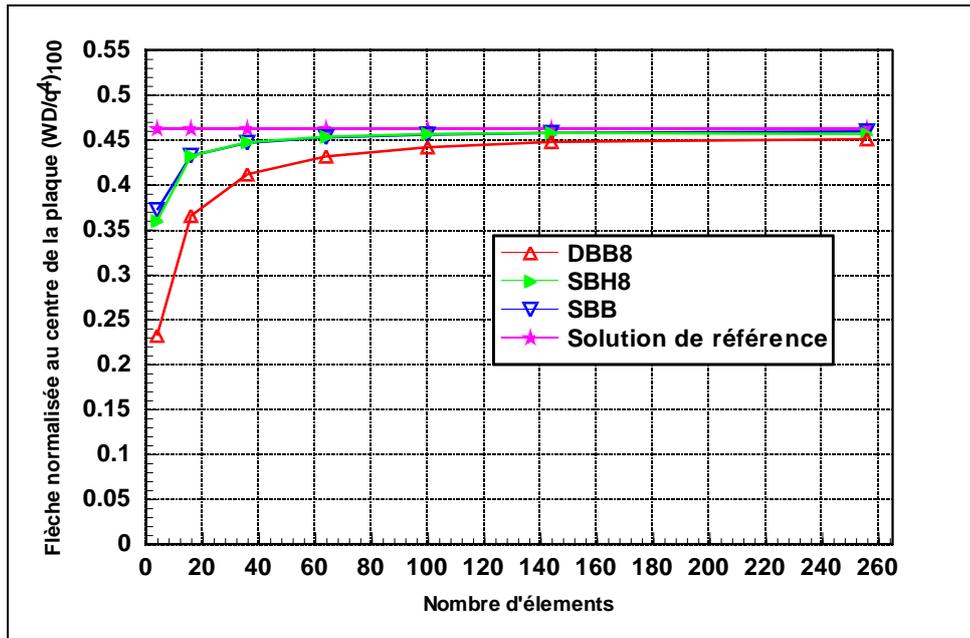


Fig. 2.3.a: Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100)$ $L/h=10$

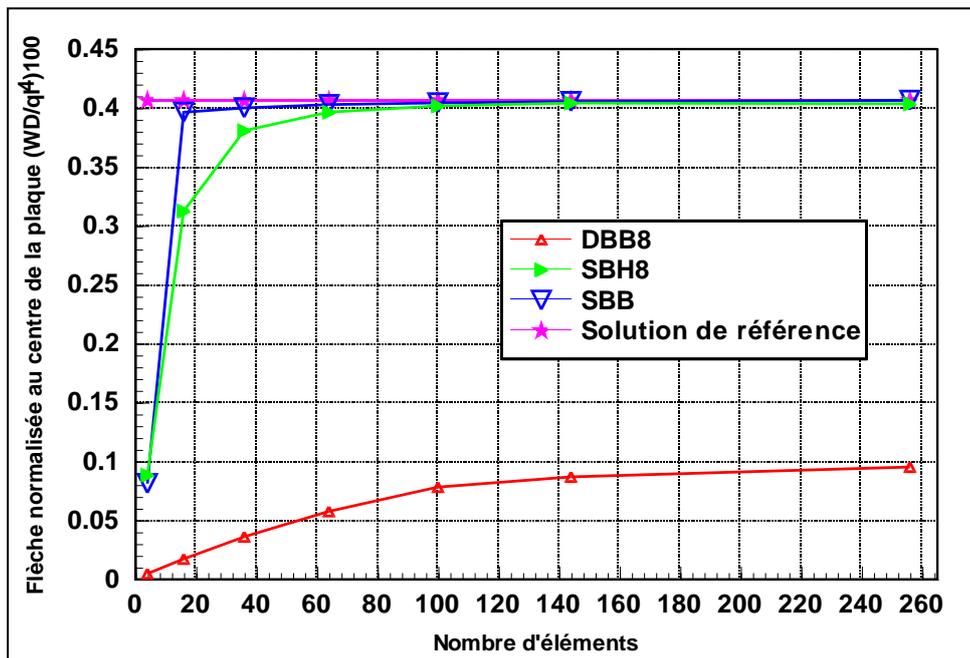


Fig. 2.3.b: Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100)$ $L/h=100$

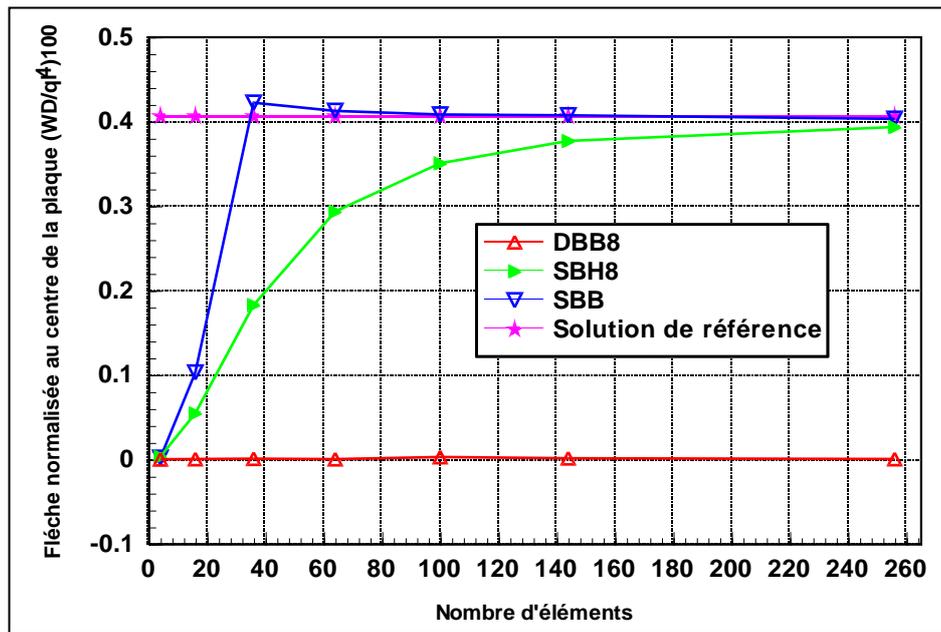


Figure 2.3.c: Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme $((WD/q^4) \times 100)$ $L/h=500$

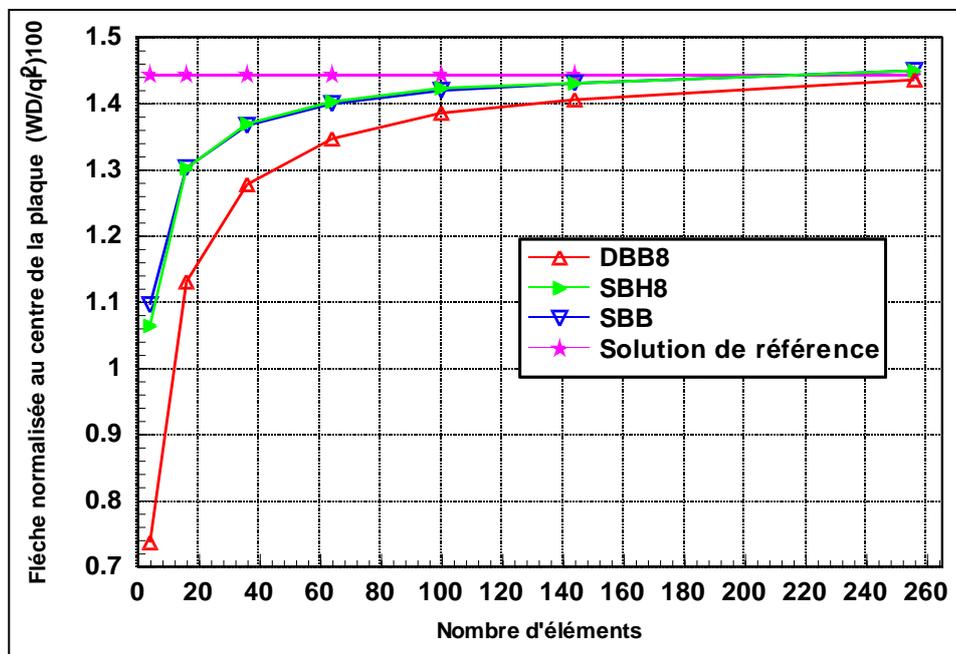


Figure 2.4.a: Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée $((WD/p^2) \times 100)$ $L/h=10$

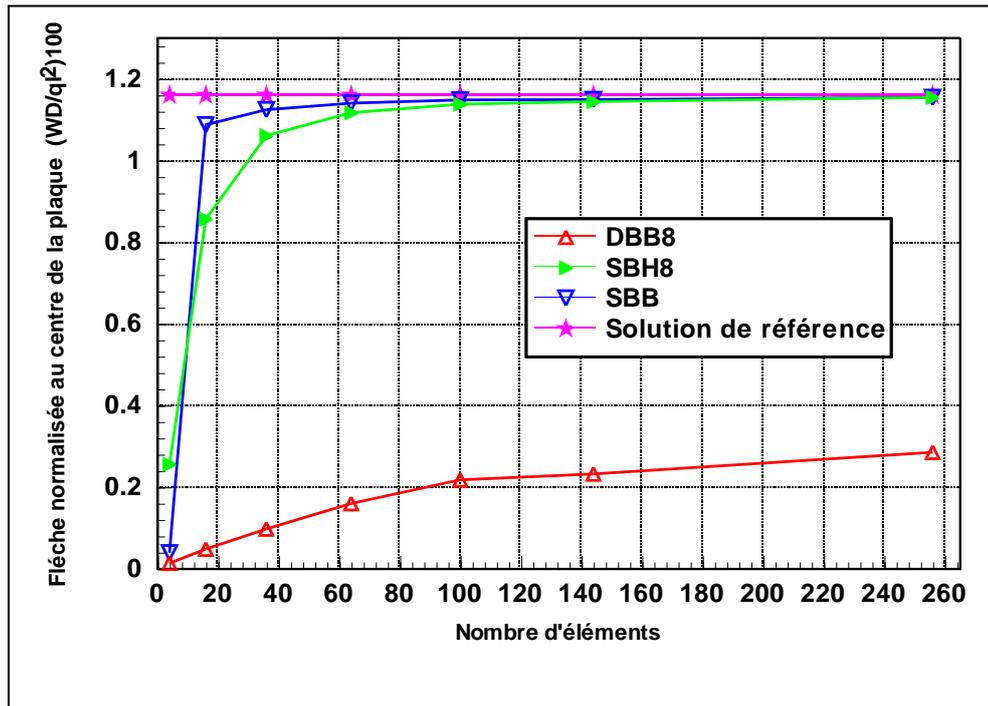


Figure 2.4.b: Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=100$

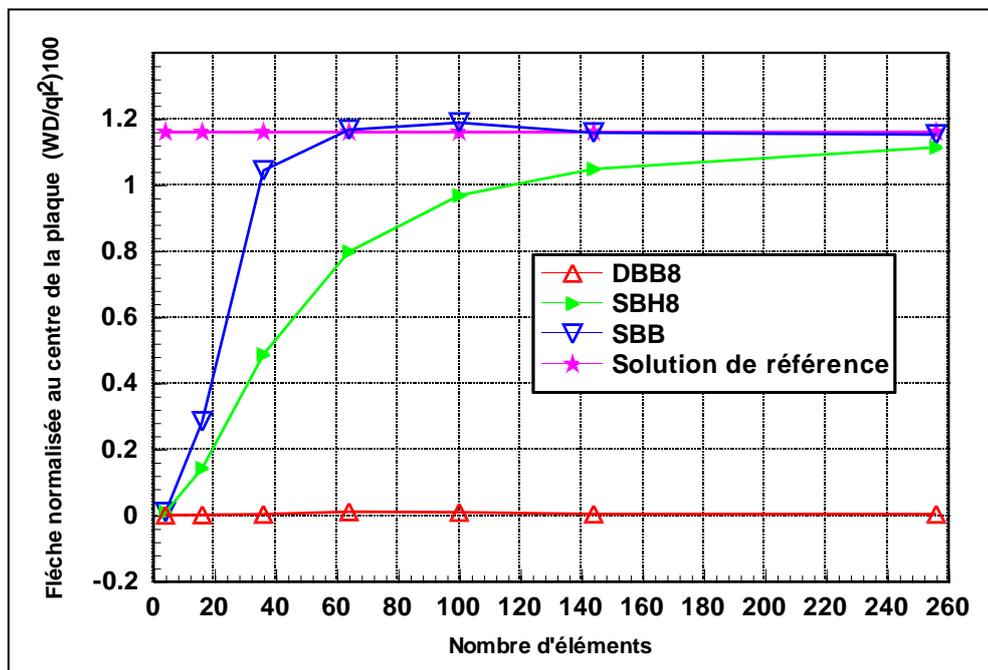


Figure 2.4.c: Flèche normalisée au centre d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=500$

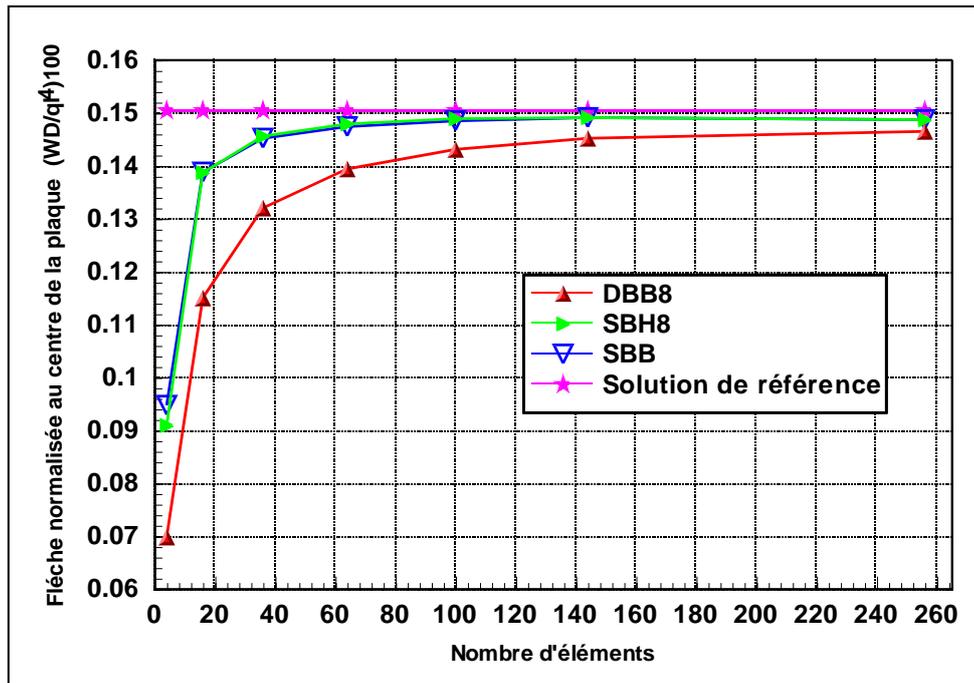


Figure 2.5.a: Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100) L/h=10$

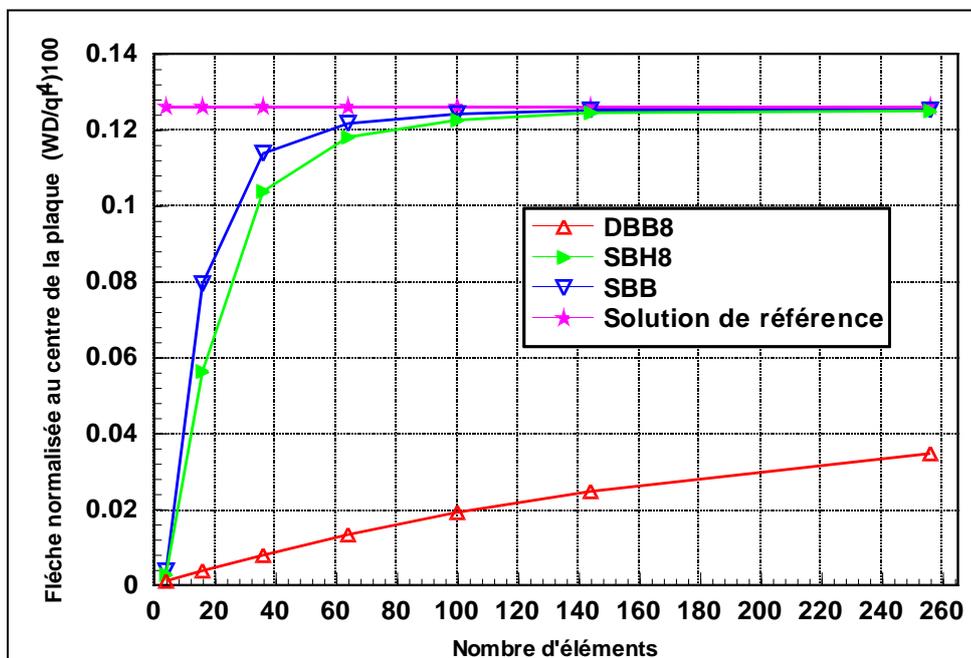


Figure 2.5.b: Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge uniforme $((WD/ql^4) \times 100) L/h=100$

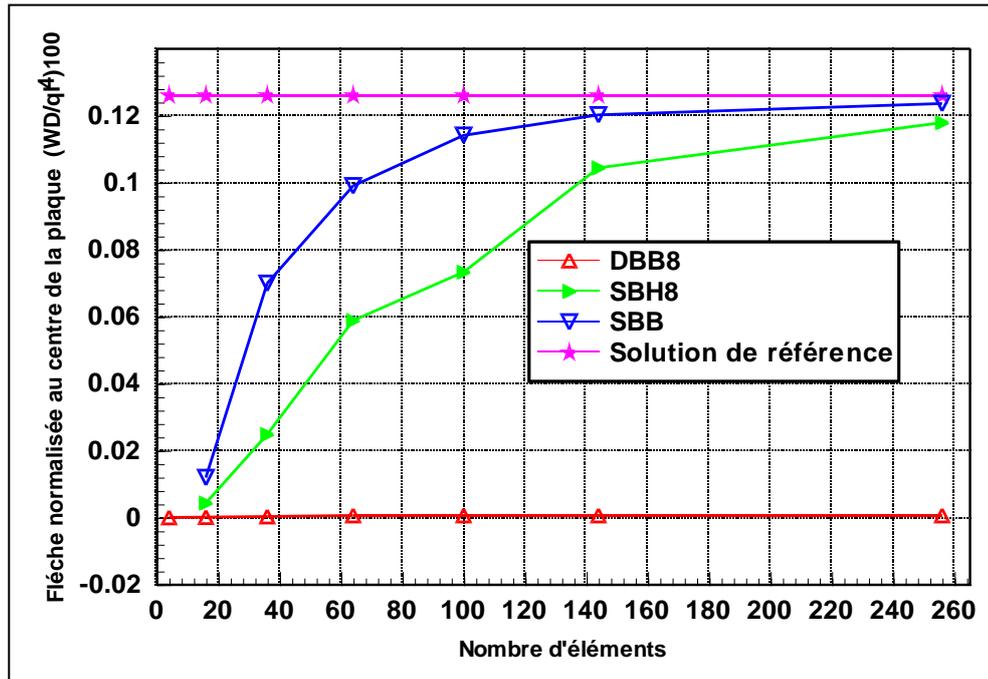


Figure 2.5.c: Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge uniforme $((WD/q1^4) \times 100) L/h=500$

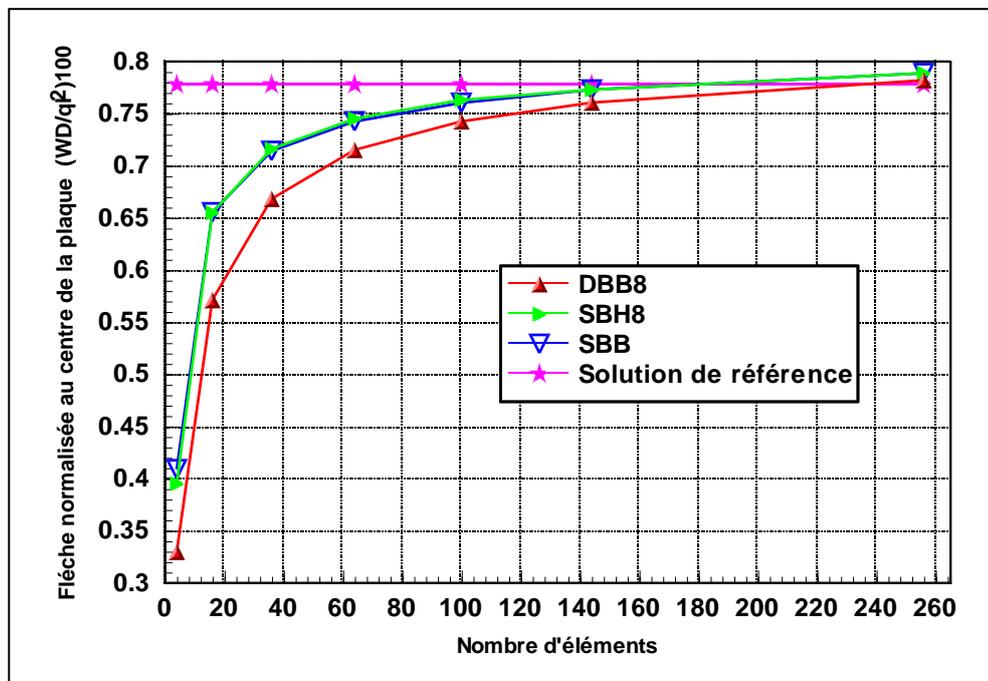


Figure 2.6.a: Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge concentree $((WD/p1^2) \times 100) L/h=10$

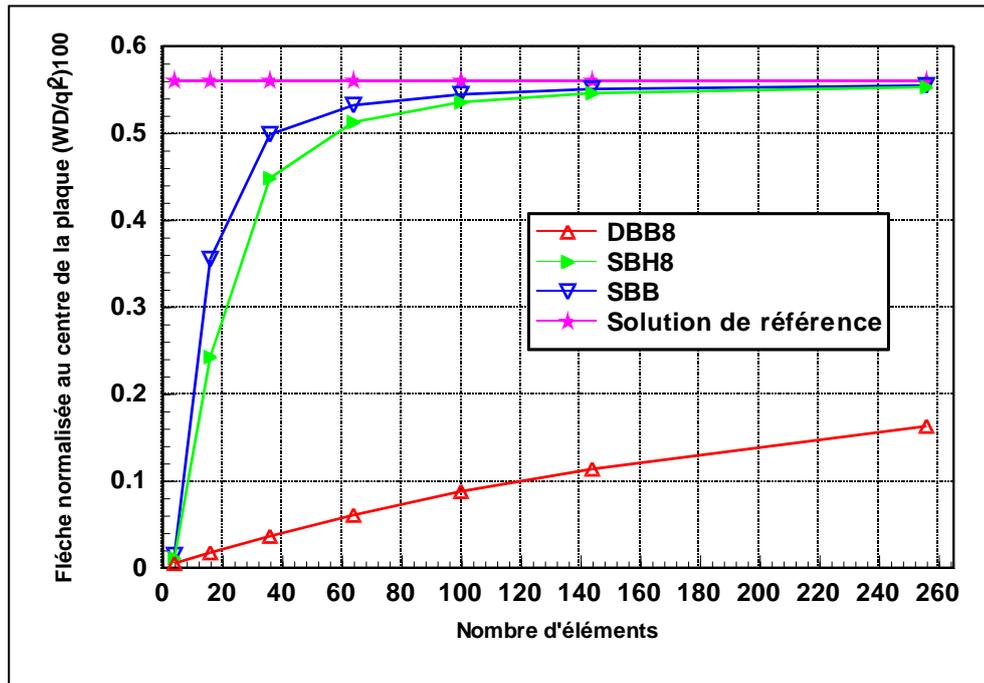


Figure 2.6.b: Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=100$.

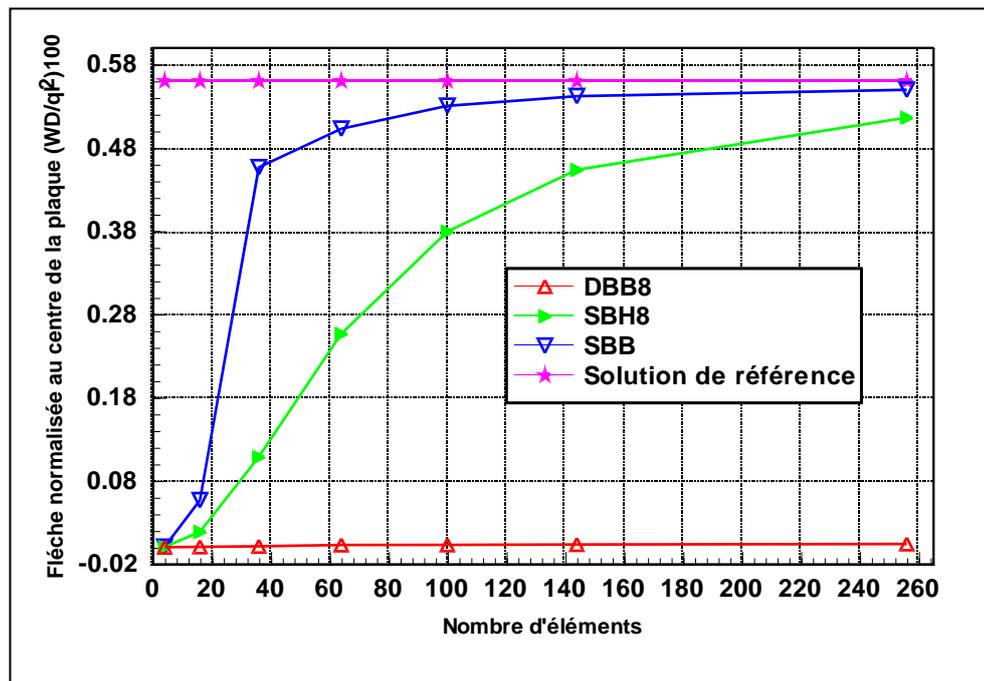


Figure 2.6.c: Flèche normalisée au centre d'une plaque encastree avec une charge concentrée $((WD/pl^2) \times 100)$ $L/h=500$

2.4. 2. L'effet du rapport L/h sur la flèche au centre d'une plaque carrée

Plaques avec diverses conditions (de chargement et de conditions aux limites) sont étudiées pour plusieurs valeurs du rapport L/h (longueur/épaisseur). C'est un test

pour vérifier l'effet du cisaillement transversal sur la flèche pour les problèmes de la flexion des plaques qui a été traité par de nombreux chercheurs [Bela.99], [Aya.95] et [Zie.00].

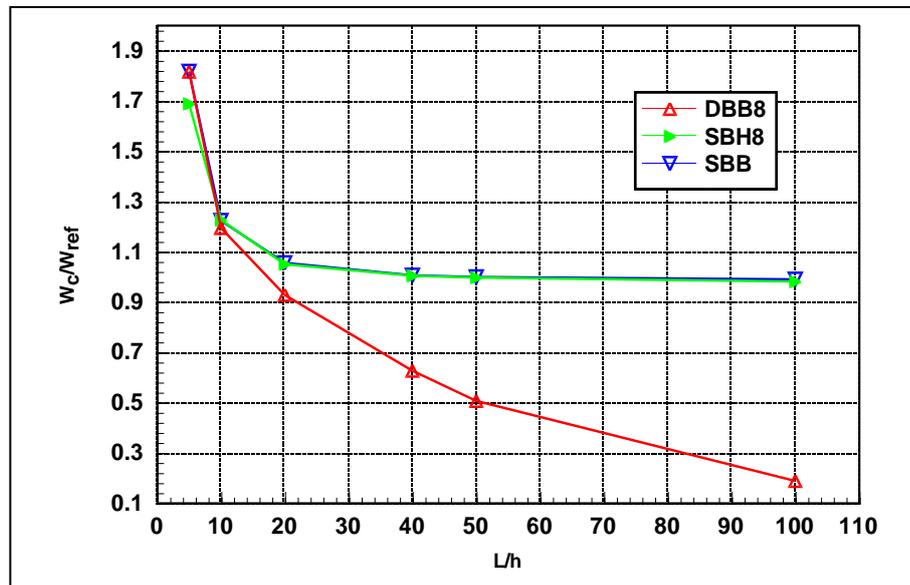


Figure 2.7.a: Influence de (L/h) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge concentrée

Les résultats présentés dans les figures (2.7, 2.8), pour un maillage de 10×10 en termes d'un rapport entre la flèche au centre W_c et la solution de référence de Kirchhoff [Tim.59], montrent que les éléments basés sur le modèle en déformation (SBH8, SBB) sont libres de tout verrouillage en cisaillement contrairement à l'élément DBB8 basé sur le modèle en déplacement.

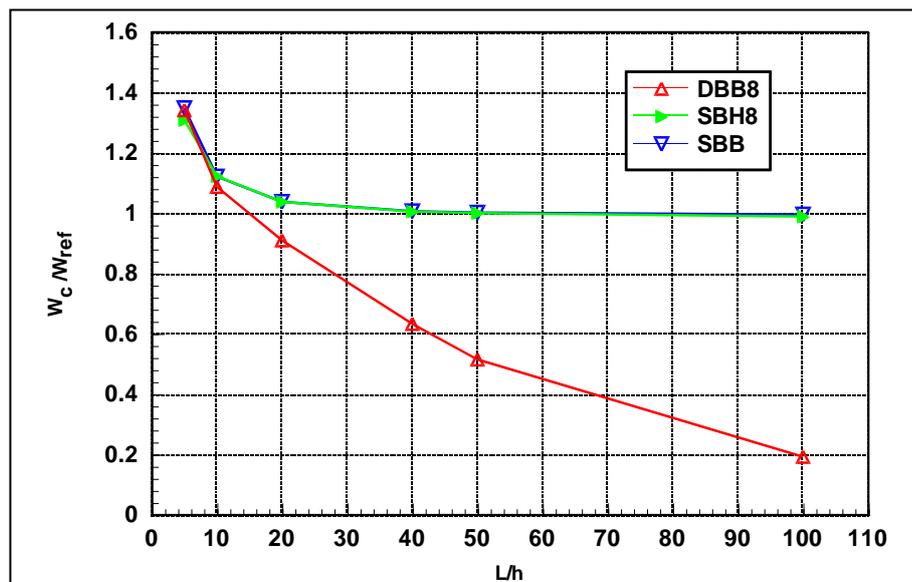


Figure 2.7.b: Influence de (L/h) pour une plaque simplement supportée soumise à une charge uniforme

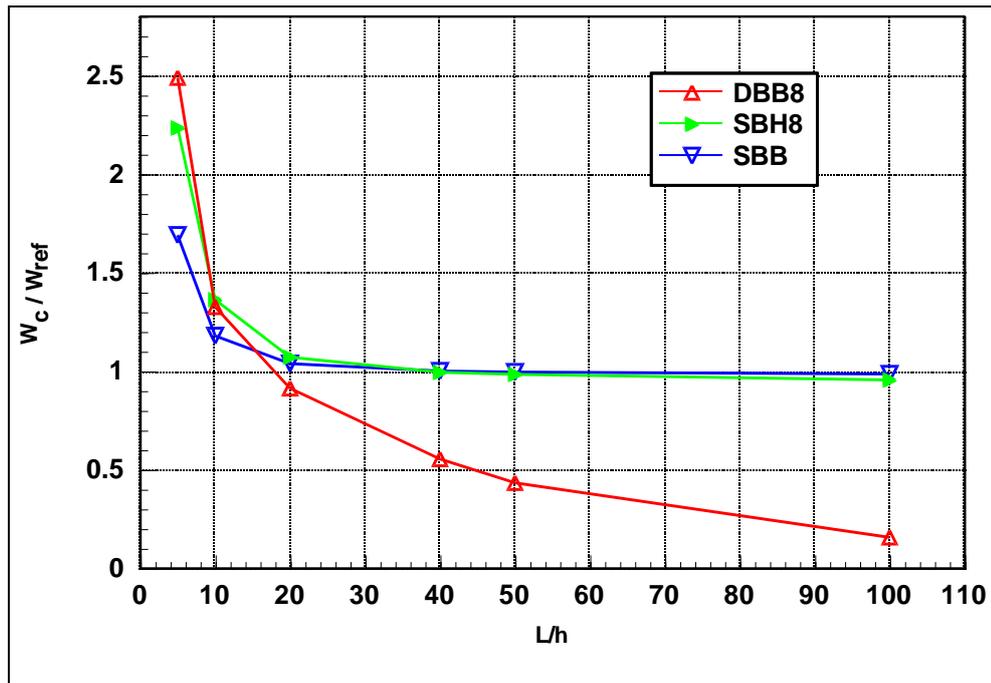


Figure 2.8.a: Influence de (L/h) pour une plaque encastree soumise à une charge concentree

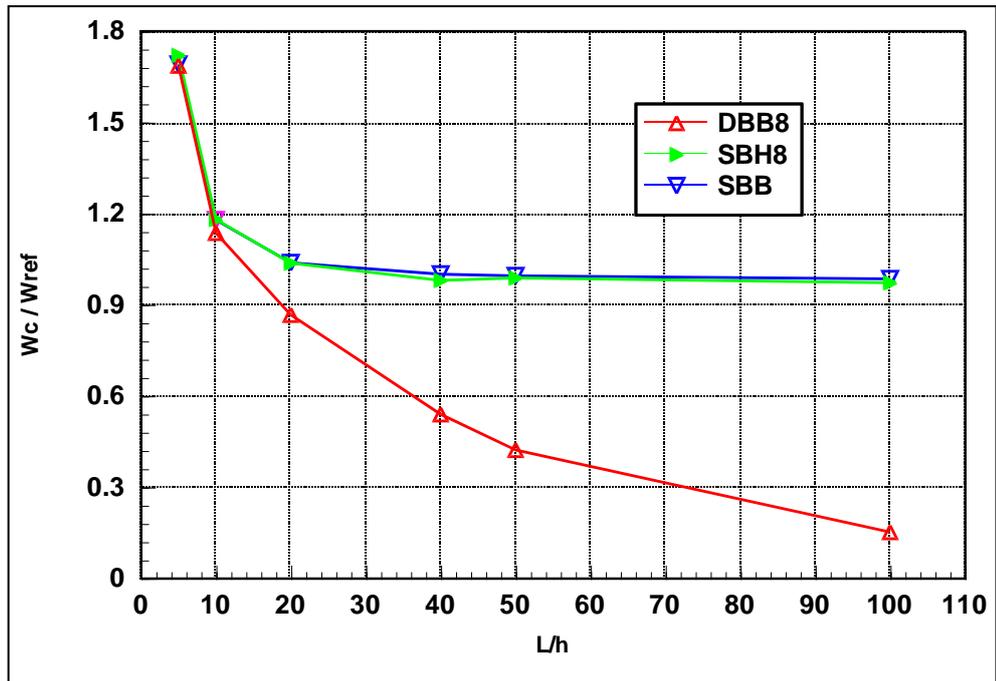


Figure 2.8.b: Influence de (L/h) pour une plaque encastree soumise à une charge uniforme

2.4.3. Plaque carrée à deux bords encastrés et deux libres

Une plaque carrée avec deux bords encastrés et libre aux autres bords figure (2.9) avec deux cas de chargement est examinée,

- a) Charge concentrée au coin libre (p)
- b) Charge uniforme (q)

La solution de référence pour le déplacement du coin libre est donnée par [De.90], pour un maillage de 30 x 30 éléments.

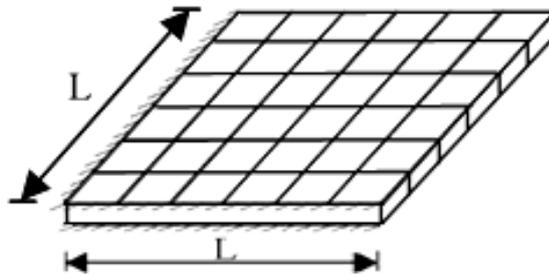


Figure 2.9: Plaque carrée avec deux bords encastrés et deux libres

Les résultats figurants, dans les tableaux 2.1 et 2.2, montrent que la convergence à la solution de référence est tout à fait rapide avec l'élément (SBB), contrairement à l'élément basé sur le modèle en déplacement DBB8. Les bonnes performances des éléments à champ de déformation (SBB et SBH8) sont confirmées.

Maillage	La flèche au coin libre (w)		
	DBB8	SBH8	SBB
2x2	6.730	030.29	052.86
4x4	24.80	114.65	143.50
6x6	45.41	134.21	136.80
8x8	64.19	138.54	139.80
9x9	71.91	139.44	139.90
Solution de référence	139.07		

Tableau 2.1: Plaque carrée à deux bords encastrés et deux libres ($P=100$, $L=10$, $h=0.4$, $E=3600$ et $\nu=0.3$)

Maillage	La flèche au coin libre (w)		
	DBB8	SBH8	SBB
2x2	0.9496	3.775	2.705
4x4	3.036	14.850	14.11
6x6	5.504	17.858	18.05
8x8	7.854	18.489	18.61
9x9	8.846	18.571	18.65
solution de référence	18.64		

Tableau 2.2: Plaque carrée à deux bords encastrés et deux libres ($q=0.9$, $L=10$, $h=0.4$, $E=3600$ et $\nu=0.3$)

2.4.4. Poutre console avec différentes valeurs du coefficient de Poisson

La poutre est soumise à une charge de cisaillement à l'extrémité libre comme il est indiqué dans la figure (2.10). L'élément SBB est testé en variant les valeurs du coefficient de Poisson de (0,3 à 0,4999999) [Bas.00a] et comparé avec d'autres éléments. Les résultats présentés dans le tableau (2. 3) confirment que l'élément développé est libre de tous blocage en cisaillement, même avec un matériau presque incompressible $\nu = 0,4999999$ contrairement à l'élément RGH4 [Bas.00a].

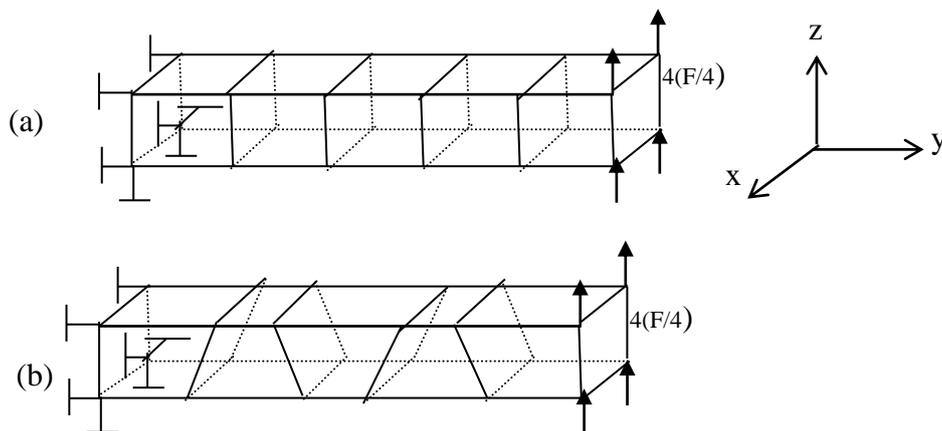


Figure 2.10: Poutre console avec différentes valeurs du coefficient de Poisson ($F=300$, $E=10^7$, et $\nu = 0.3 - 0.4999999$).

	Coefficient de Poisson	SBB	RGH4 ^a	PN5X1 ^a	Théorie (10 ⁻³) ^a
maillage (a)	0.3	1,004	0.976	1.032	7.7340
	0.4	1,004	0.975	1.028	7.7520
	0.49	1,007	0.972	1.026	7.7682
	0.499	1,007	0.972	1.025	7.7698
	0.4999	1,007	0.972	1.014	7.7699
	0.49999	1,007	0.972	1.013	7.7699
	0.4900000	1,007	0.972	1.013	7.7699
	0.49999999	1,007	0.972	1.013	7.7699
maillage (b)	0.3	1.005	-	1.032	7.7340
	0.4	1.007	0.829	1.028	7.7520
	0.49	1.008	0.850	1.026	7.7682
	0.499	1.008	0.874	1.025	7.7698
	0.4999	1.008	0.877	1.015	7.7699
	0.49999	1.008	0.877	1.013	7.7699
	0.4900000	1.008	0.877	1.013	7.7699
	0.49999999	1.008	-	1.013	7.7699

^a Source: Bassayya et Shriniva [Bas.00a].

Tableau 2.3: Flèche normalisée d'une poutre cantilever avec différentes valeurs du coefficient de Poisson.

2.4.5. Test de sensibilité à l'élancement (L/h)

Ce test est utilisé pour évaluer la sensibilité d'un élément au verrouillage quand l'élancement (L/h) devient élevé Figure (2.11), il a été proposé par Robinson [Rob.86] et étudié par [Bas.00b], [Bas.00a]. Il s'agit d'une poutre encastree, modélisée par un seul élément et soumise à un chargement qui génère un état de flexion pure sans l'influence du cisaillement. On effectue une variation de la longueur de la poutre de manière à obtenir des élancements (longueur sur hauteur) allant de 1 à 16.

Les résultats en termes de déplacement (tableau (2.4)) montrent que l'élément développé SBB n'a pas subi de verrouillage, même avec des élancements plus élevés. Les

déplacements verticaux obtenus pour tous les élancements sont exactement égaux aux valeurs théoriques pour tous les élancements pris.

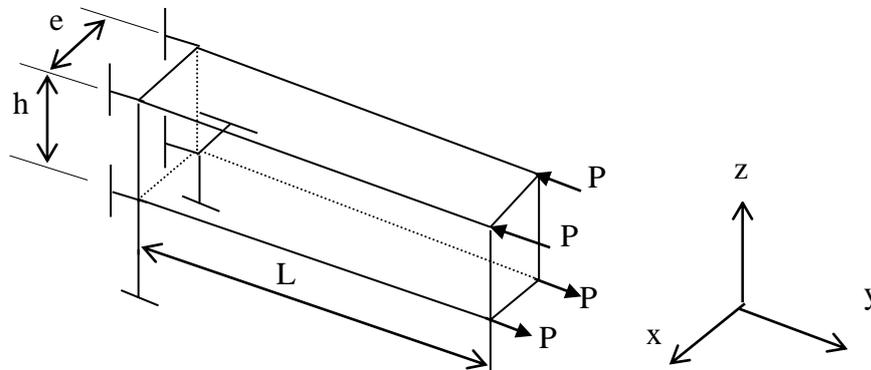


Figure 2.11: Test de la sensibilité d'un seul élément à l'élancement L/h ($E=207 \times 10^9$ N/m², $\nu = 0.25$, $h = e = 0,12$ m, $P = 6900$ N and $L/h = 1-16$).

l'élancement	SBB	PN5X1 ^b	FC CSA/NASTRAN ^a	PN340 ^a	Théorie x (10 ⁻⁶) ^a
1	1.0	1.0	0.938	1.0	3.333
2	1.0	1.0	0.937	1.0	13.33
4	1.0	1.0	0.937	1.0	53.33
8	1.0	1.0	0.937	1.0	213.3
16	1.0	1.0	0.937	-	853.3

^a Source: Bassayya, bhattacharya et Shriniva [Bas.00b].

^b Source: Bassayya et Shriniva [Bas.00a].

Tableau 2.4: Flèche normalisée pour le test de la sensibilité
à l'élancement L/h

2.4.6. Test de la poutre élancée de MacNeal

Le problème d'une poutre élancée montré sur la figure (2.12) a été traité par MacNeal et Harder, [Mac.85] et par de nombreuses recherches [Bas.00a], [Bas.00b]. Celui-ci est considéré comme test d'une poutre mince avec cisaillement dans le plan et hors plan, un effort de traction et un moment de flexion constant.

Les résultats de la flèche normalisée à l'extrémité libre présentés au tableau (2.5) montrent que l'élément à champ de déformation SBB présente une excellente performance et donne de très bons résultats pour tous les types de chargement, ainsi qu'il est libre de tout phénomène de blocage contrairement à d'autres éléments (ANSYS, PN340 et PN34)

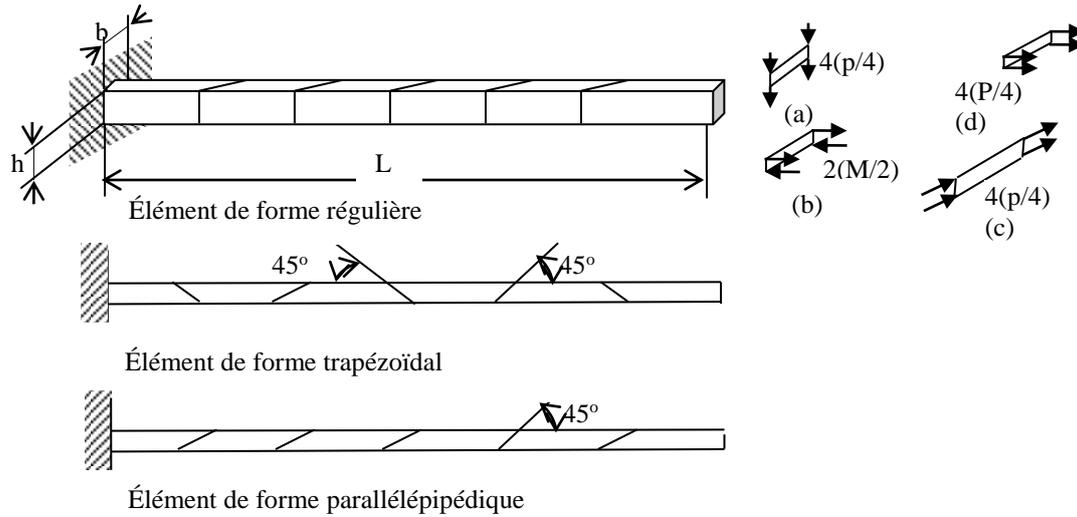


Figure 2.12: Poutre élançée de MacNeal ($P=1$, $M=10$, $L=6$, $h=0.2$, $E = 10^7$, $\nu=0.3$ and $b=0.1$).

Forme de l'élément	Type de chargement	Déflexion normalisés à l'extrémité libre(W)						
		SBB	HEX8 ^a	HEX20 ^a	ANSYS ^a	PN340 ^a	PN34 ^a	PN5X1 ^b
Régulière	Chargement (a)	0.980	0.981	0.970	0.982	0.982	0.981	0.998
	chargement (b)	0.991	-	-	-	-	-	0.999
	chargement (C)	0.980	0.981	0.961	0.980	0.980	0.981	1.000
	chargement (d)	0.995	-	0.994	-	-	-	0.985
Trapézoïdale	chargement (a)	0.980	0.069	0.886	0.065	0.065	0.982	0.999
	chargement (b)	0.990	-	-	-	-	-	1.000
	chargement (C)	0.979	0.051	0.920	0.370	0.370	0.051	0.996
	chargement (d)	1.029	-	0.994	-	-	-	0.988
Parallélépipédique	chargement (a)	0.980	0.080	0.967	0.620	0.620	0.980	0.997
	chargement (b)	0.990	-	-	-	-	-	1.000
	chargement (C)	0.979	0.055	0.941	0.547	0.547	0.055	0.998
	chargement (d)	1.001	-	0.994	-	-	-	0.989
théorie	chargement (a)	déflexion à l'extrémité libre $w = 0.1081$						
	chargement (b)	déflexion à l'extrémité libre $w = 0.27$						
	chargement (C)	déflexion à l'extrémité libre $w = 0.4321$						
	chargement (d)	déflexion à l'extrémité libre $w = 0.3 \times 10^6$						

^a Source: Bassayya, bhattacharya et Shriniva [Bas.00b].

^b Source: Bassayya et Shriniva [Bas.00a].

Tableau 2.5: Tests de la poutre élançée de MacNeal (déflexion normalisés à l'extrémité libre(W))

2.4.7. Teste de poutre de Cheung and Chen

Ce problème a été proposé par Cheung et Chen et traité par [Li.08] pour tester la performance des éléments hexaédriques. Sept configurations différentes, de (A1 à A7) comme il est indiqué dans la figure (2.13).

Ils mettent en évidence l'effet de la distorsion géométrique des éléments sur la précision des résultats des deux cas de charge. Le premier est un moment de flexion à l'extrémité et le second est une force concentrée à l'extrémité libre de la poutre

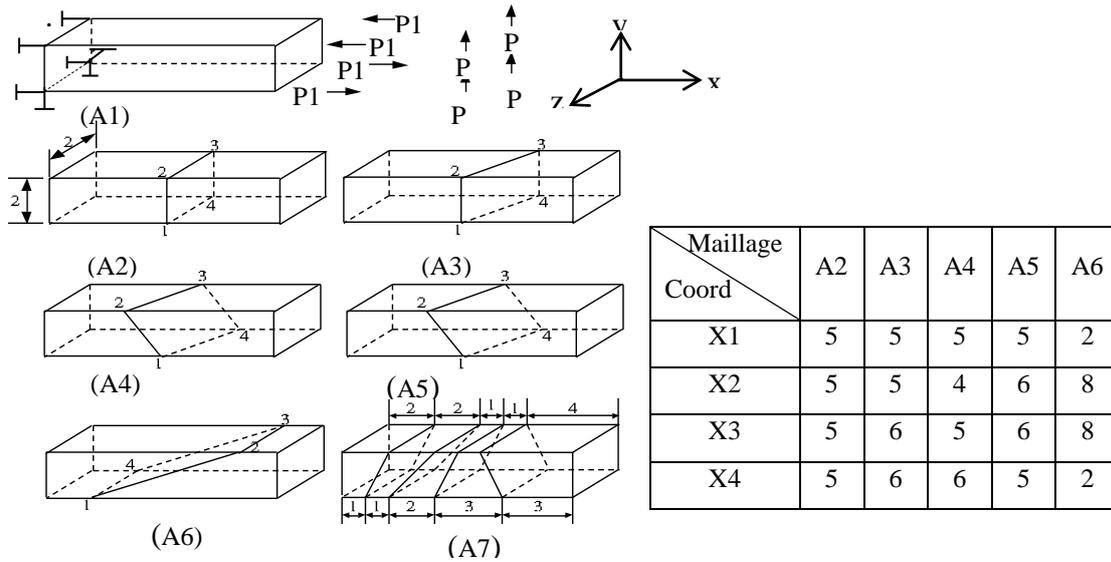


Figure 2.13: Tests de Cheung et Chen ($P1=1000, P=150, E=1500, \nu=0.25$).

maillage	C3D8 ^a	C3D8I ^a	Wilson_H8 ^a	HVCC8 ^a	HVCC86EM ^a	SBB
A1	0.0956	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000
A2	0.3382	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000
A3	0.2684	0.8756	0.9397	1.0027	1.0039	1.000
A4	0.2529	0.7652	0.8962	1.0020	1.0033	1,004
A5	0.2441	0.7738	0.8836	1.0000	1.0000	1.000
A6	0.0919	0.4516	0.7875	1.0000	1.0000	1,009
A7	0.8013	0.9956	0.9826	1.0000	1.0000	1.000
Solution théorique	100					

^aSource: [Li.08].

Tableau 2.6: Tests de Cheung et Chen : déplacements normalisés; à l'extrémité libre (flexion pure)

Maillage	C3D8 ^a	C3D8I ^a	Wilson_H8 ^a	HCCC8 ^a	HVCC86EM ^a	SBB
A1	0.0942	0.7554	0.7554	0.7554	0.7554	0,7820
A2	0.3329	0.9367	0.9340	0.9340	0.9366	0.9737
A3	0.2648	0.8445	0.8773	0.9254	0.9368	0.9553
A4	0.2692	0.7696	0.8479	0.9295	0.9441	0.9628
A5	0.2485	0.7658	0.8491	0.9383	0.9408	0.9878
A6	0.1330	0.4800	0.8723	1.2292	1.2302	1.0620
A7	0.8690	0.9536	0.9770	0.9999	1.0004	1.0210
Solution théorique	102.6					

^a Source: [Li.08]

Tableau 2.7: Tests de Cheung et Chen : déplacements normalisés à l'extrémité libre (effort tranchant)

Les résultats sont donnés dans les tableaux (2.6) et (2.7). On peut voir clairement que l'élément développé donne la solution exacte pour la flexion pure et des résultats encore meilleurs pour le cisaillement. L'élément basé sur l'approche en déformation (SBB) se comporte de la même façon que les éléments (HVCC8 et HVCC86EM).

2.5. Conclusion

Un élément fini d'élasticité 3D nommé (SBB) basé sur l'approche en déformation ayant les trois translations (u , v et w) à chaque nœud est présenté pour l'analyse de la flexion des plaques minces et épaisses. Cet élément utilisé avec une modification de la loi de comportement est simple, possède les degrés de liberté essentiels, et contient des termes polynomiaux d'ordre supérieur. Les résultats numériques obtenus en utilisant le nouvel élément (SBB) montrent sa bonne performance en termes de précision et de vitesse de convergence.

Il a été constaté que l'élément est libre de tout verrouillage en cisaillement pour l'analyse de la flexion des plaques, contrairement à l'élément classique DBB8 basé sur l'approche en déplacement.

Chapitre 3

DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI D'ELASTICITE 3D A 8 NŒUDS

Chapitre 3. DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT FINI D'ELASTICITE 3D A 8 NŒUDS

3.1. Introduction

Dans ce chapitre un nouvel élément fini d'élasticité tridimensionnelle à 8 nœuds, basé sur l'approche en déformation sera développé pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques, ainsi que l'analyse élasto-plastique des structures en 3D. Cet élément nommé **SBBE** (**Strain Based Brik Equilibrium**), possède les trois degrés de liberté (u, v et w) de chacun des huit nœuds de coin. Le champ des déplacements de l'élément développé est basé sur des fonctions assumées de déformation satisfaisant les équations de compatibilité et les équations d'équilibre comme conditions supplémentaires [Sab.95], [Bela.05a]. On évaluera les performances de cet élément à travers une série de tests d'analyse linéaire relatifs à la flexion des plaques minces et épaisses ainsi qu'à des problèmes de comportement élasto-plastique.

3.2. Formulations de l'élément développé SBBE

Pour l'analyse linéaire 3D, les six composantes de la déformation et les six équations de compatibilité sont respectivement données par les équations (2.1), (2.2), cependant l'équation d'équilibre est donnée par:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.1)$$

De même que pour l'élément SBB (chapitre 2 paragraphe 3), la formulation de l'élément SBBE est similaire. Ce dernier possède huit nœuds avec trois degrés de liberté en chaque nœud de coins comme le montre la figure (3.1). Le champ des déformations de cet élément est donné par:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_7 + \alpha_8 y + \alpha_9 z + \alpha_{10} yz - (\alpha_{12} vx + \alpha_{14} vxz) \\ \varepsilon_y &= \alpha_{11} - (\alpha_8 vy + \alpha_{10} vyz) + \alpha_{12} x + \alpha_{13} z + \alpha_{14} xz \\ \varepsilon_z &= \alpha_{15} + \alpha_{16} x + \alpha_{17} y + \alpha_{18} xy \\ \gamma_{xy} &= \alpha_{19} - \alpha_{18} z^2 + \alpha_{20} z \\ \gamma_{yz} &= \alpha_{21} - \alpha_{10} x^2 + \alpha_{22} x \\ \gamma_{xz} &= \alpha_{23} - \alpha_{14} y^2 + \alpha_{24} y \end{aligned} \quad (3.2)$$

Avec ν est le coefficient de Poisson.

Le champ des déformations donné par l'équation (3.2) doit satisfaire les équations de compatibilité (2.2) et les équations d'équilibre (3.1). Les fonctions de déplacements (u , v et w) de l'élément développé (SBBE) obtenus par intégration sont comme suit:

$$\begin{aligned}
u &= a_7x + a_8xy + a_9xz + a_{10}xyz - \frac{1}{2}a_{12}(vx^2 + y^2) - \frac{1}{2}a_{14}(vx^2z + y^2z) \\
&\quad - \frac{1}{2}a_{16}z^2 - \frac{1}{2}a_{18}yz^2 + \frac{1}{2}a_{19}y + \frac{1}{2}a_{20}yz - \frac{1}{2}a_{22}yz + \frac{1}{2}a_{23}z + \frac{1}{2}a_{24}yz \\
v &= -\frac{1}{2}a_8(vy^2 + x^2) - \frac{1}{2}a_{10}(vy^2z + x^2z) + a_{11}y + a_{12}xy + a_{13}yz + a_{14}xyz \\
&\quad - \frac{1}{2}a_{17}z^2 - \frac{1}{2}a_{18}xz^2 + \frac{1}{2}a_{19}x + \frac{1}{2}a_{20}xz + \frac{1}{2}a_{21}z + \frac{1}{2}a_{22}xz - \frac{1}{2}a_{24}xz \\
w &= -\frac{1}{2}a_9x^2 - a_{10}\left(\frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{6}vy^3\right) - \frac{1}{2}a_{13}y^2 - a_{14}\left(\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}vx^3\right) + a_{15}z + a_{16}xz \\
&\quad + a_{17}yz + a_{18}xyz - \frac{1}{2}a_{20}xy + \frac{1}{2}a_{21}y + \frac{1}{2}a_{22}xy + \frac{1}{2}a_{23}x + \frac{1}{2}a_{24}yx
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Le champ de déplacement final est:

$$\begin{aligned}
u &= a_1 + a_4y + a_6z + a_7x + a_8xy + a_9xz + a_{10}xyz - \frac{1}{2}a_{12}(vx^2 + y^2) - \frac{1}{2}a_{14}(vx^2z + y^2z) \\
&\quad - \frac{1}{2}a_{16}z^2 - \frac{1}{2}a_{18}yz^2 + \frac{1}{2}a_{19}y + \frac{1}{2}a_{20}yz - \frac{1}{2}a_{22}yz + \frac{1}{2}a_{23}z + \frac{1}{2}a_{24}yz \\
v &= a_2 - a_4x - a_5z - \frac{1}{2}a_8(vy^2 + x^2) - \frac{1}{2}a_{10}(vy^2z + x^2z) + a_{11}y + a_{12}xy + a_{13}yz + a_{14}xyz \\
&\quad - \frac{1}{2}a_{17}z^2 - \frac{1}{2}a_{18}xz^2 + \frac{1}{2}a_{19}x + \frac{1}{2}a_{20}xz + \frac{1}{2}a_{21}z + \frac{1}{2}a_{22}xz - \frac{1}{2}a_{24}xz \\
w &= a_3 + a_5y - a_6x - \frac{1}{2}a_9x^2 - a_{10}\left(\frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{6}vy^3\right) - \frac{1}{2}a_{13}y^2 - a_{14}\left(\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}vx^3\right) + a_{15}z + a_{16}xz \\
&\quad + a_{17}yz + a_{18}xyz - \frac{1}{2}a_{20}xy + \frac{1}{2}a_{21}y + \frac{1}{2}a_{22}xy + \frac{1}{2}a_{23}x + \frac{1}{2}a_{24}yx
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Etant donné que la matrice $[C]$ de l'élément développé reliant les 24 déplacements nodaux aux 24 constantes est non singulière, alors son inverse existe. L'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ du présent élément est similaire à celle de l'élément SBB développé précédemment.

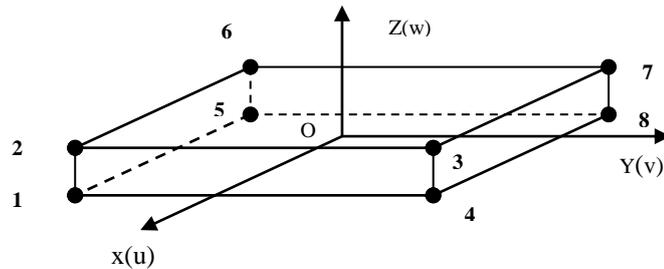


Figure 3.1: Élément fini d'élasticité 3D à huit nœuds

3.3. Validation numérique du cas linéaire

3.3.1. Plaque carrée en flexion avec diverses conditions

Ce test a été traité par plusieurs auteurs pour l'étude de la flexion de la plaque avec diverses conditions, soumise à des charges uniformément réparties ou concentrées. Les différentes conditions aux limites et les solutions de référence sont les mêmes que celles qui ont été prises pour l'élément SBB au (chapitre 2 paragraphe 2.4.1).

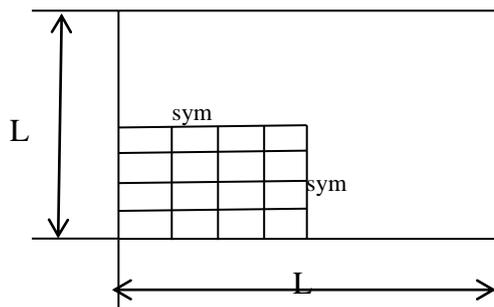


Figure 3.2: Plaque carrée en flexion avec diverses conditions ($E=10.92$, $\nu=0.3$ et le facteur de cisaillement $k=5/6$)

Les résultats représentés sur les figures (3.3-6), montrent la bonne convergence de l'élément développé vers les solutions de référence pour les plaques minces et épaisses. On constate que l'élément SBBE est libre de tout blocage en cisaillement transverse contrairement à celui basé sur le modèle en déplacement (DBB8) qui souffre d'un blocage sévère dans le cas des plaques minces et très minces.

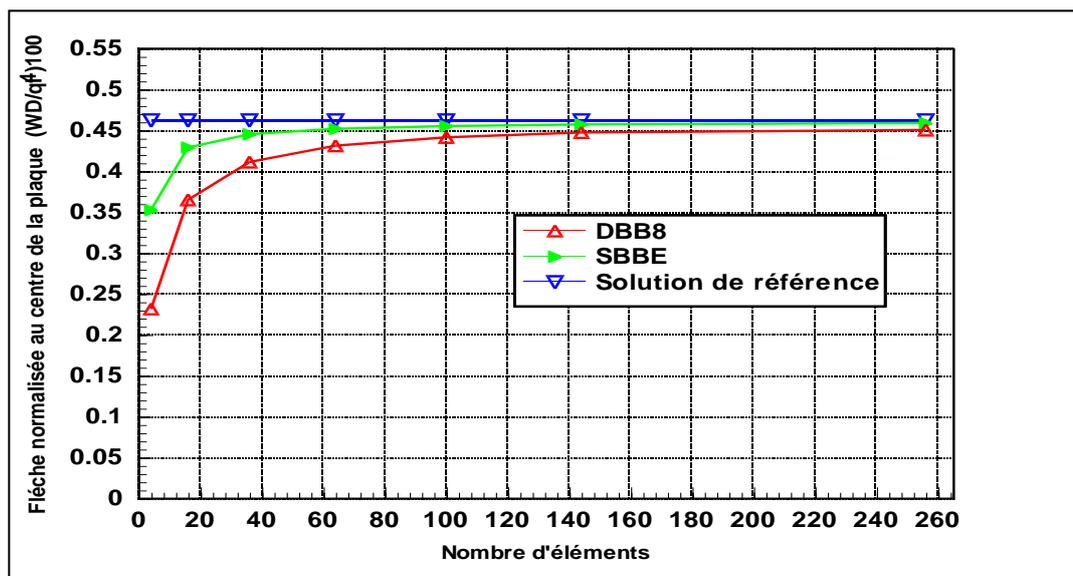


Figure 3.3a: Flèche normalisée d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme ($L/h=10$)

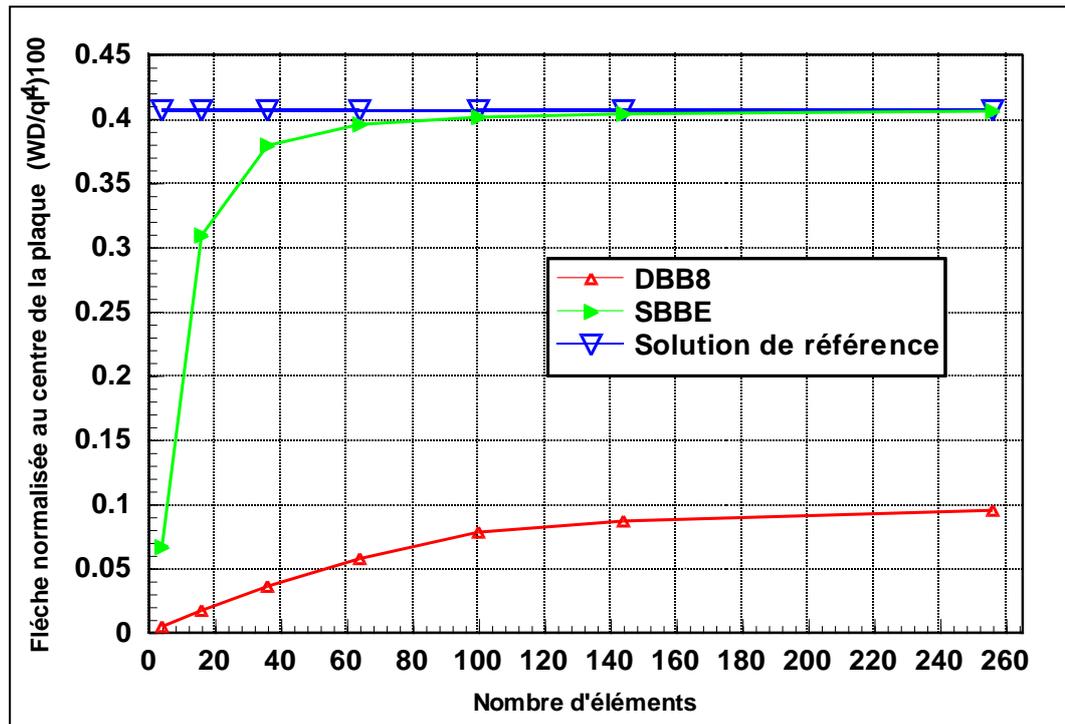


Figure 3.3b: Flèche normalisée d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme ($L/h=100$)

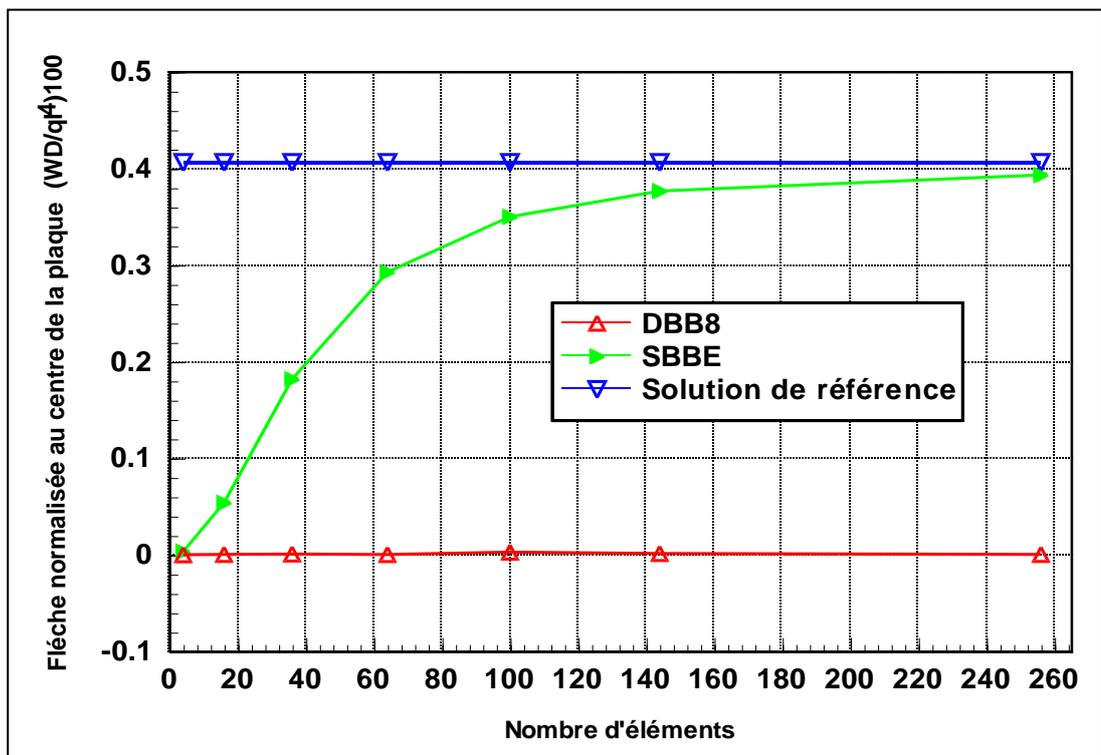


Figure 3.3c: Flèche normalisée d'une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme ($L/h=500$)

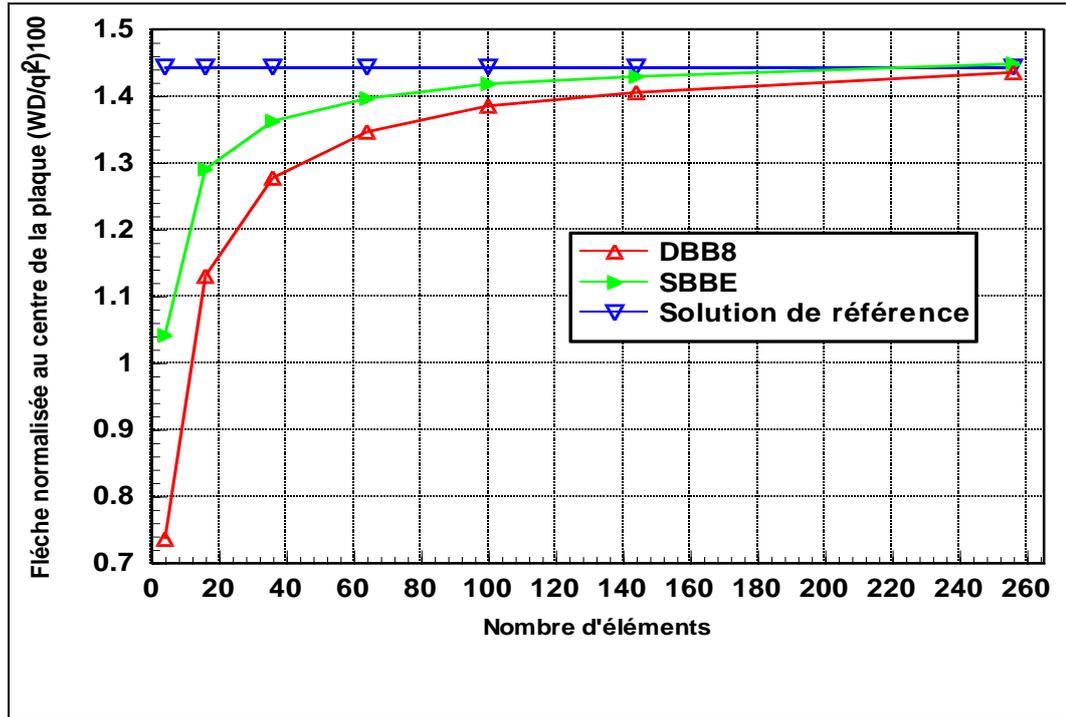


Figure 3.4a: Flèche normalisée d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée ($L/h=10$)

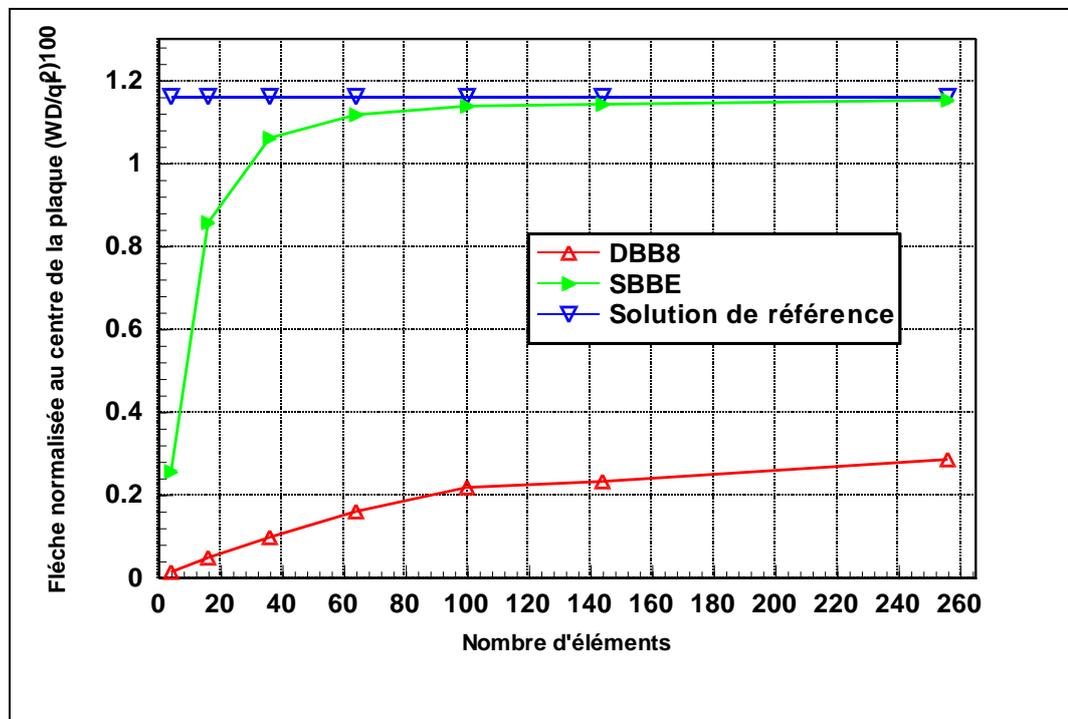


Figure 3.4b: Flèche normalisée d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée ($L/h=100$)

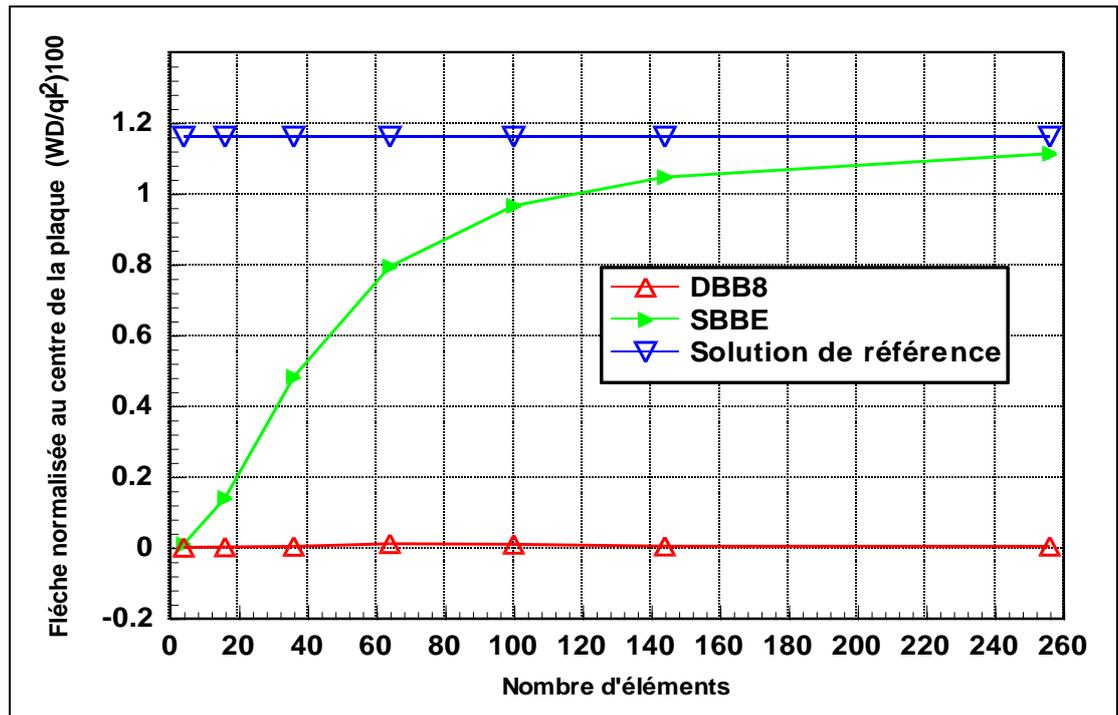


Figure 3.4c: Flèche normalisée d'une plaque simplement appuyée avec une charge concentrée (L/h=500)

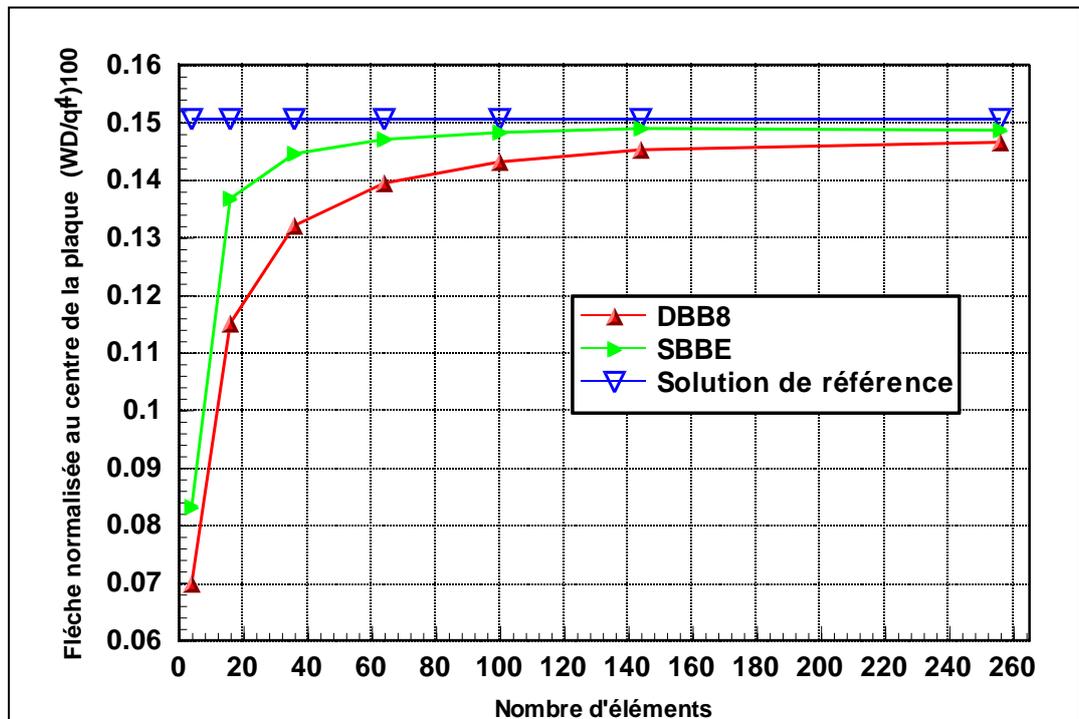


Figure 3.5a: Flèche normalisée d'une plaque encastree avec une charge uniforme (L/h=10)

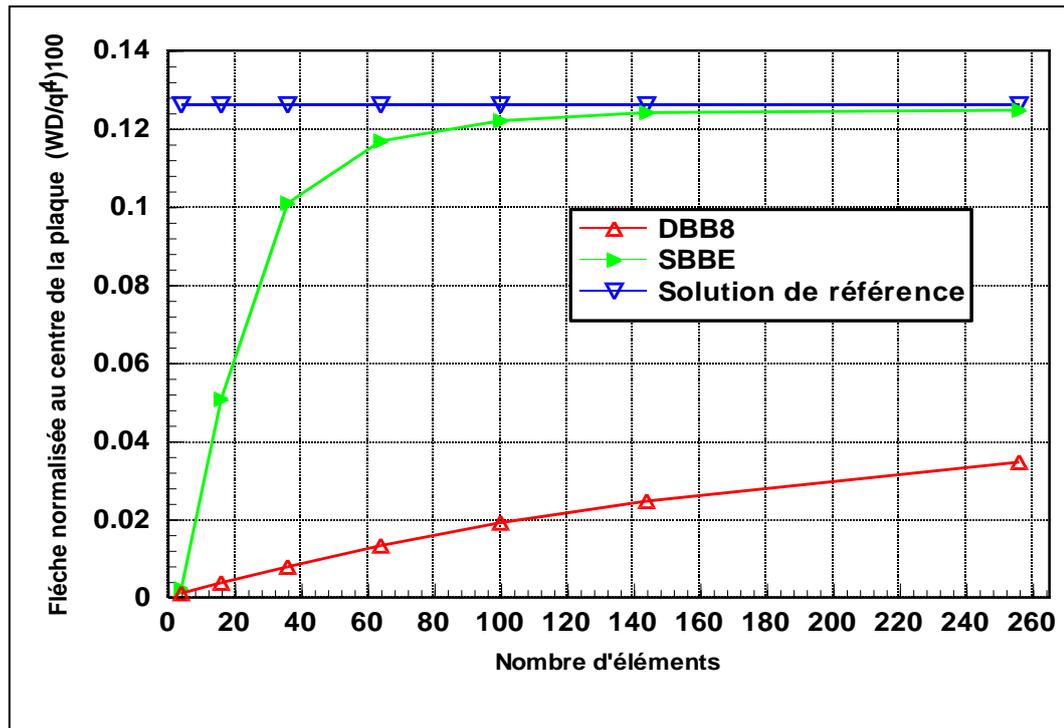


Figure 3.5b: Flèche normalisée d'une plaque encastree avec une charge uniforme ($L/h=100$)

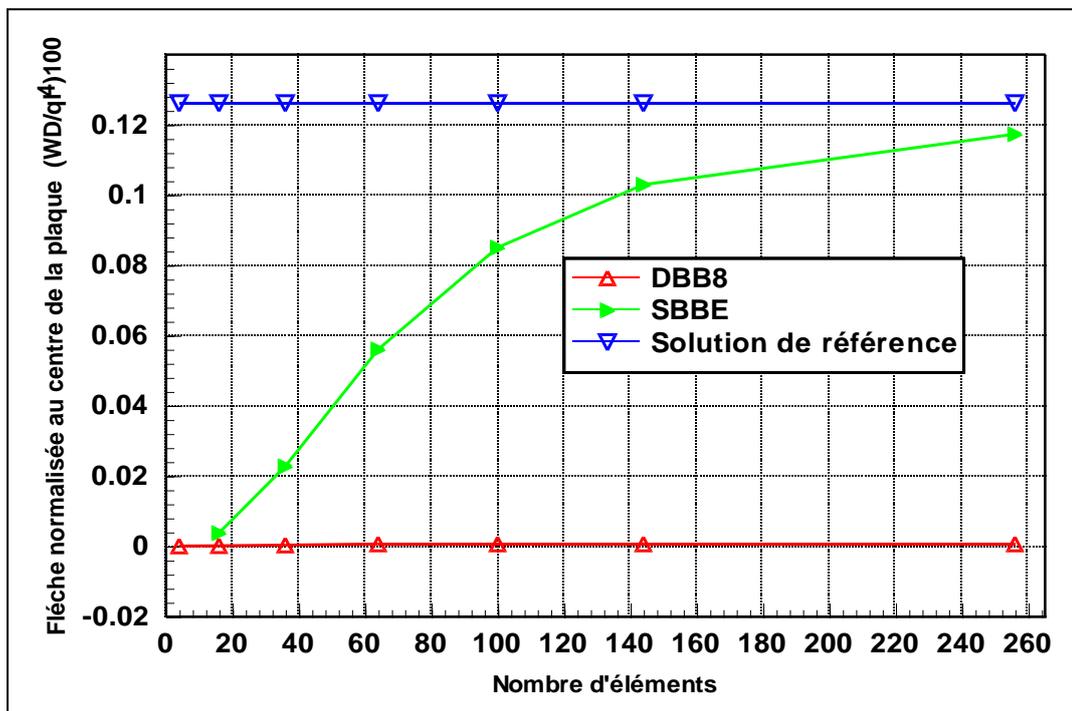


Figure 3.5c: Flèche normalisée d'une plaque encastree avec une charge uniforme ($L/h=500$)

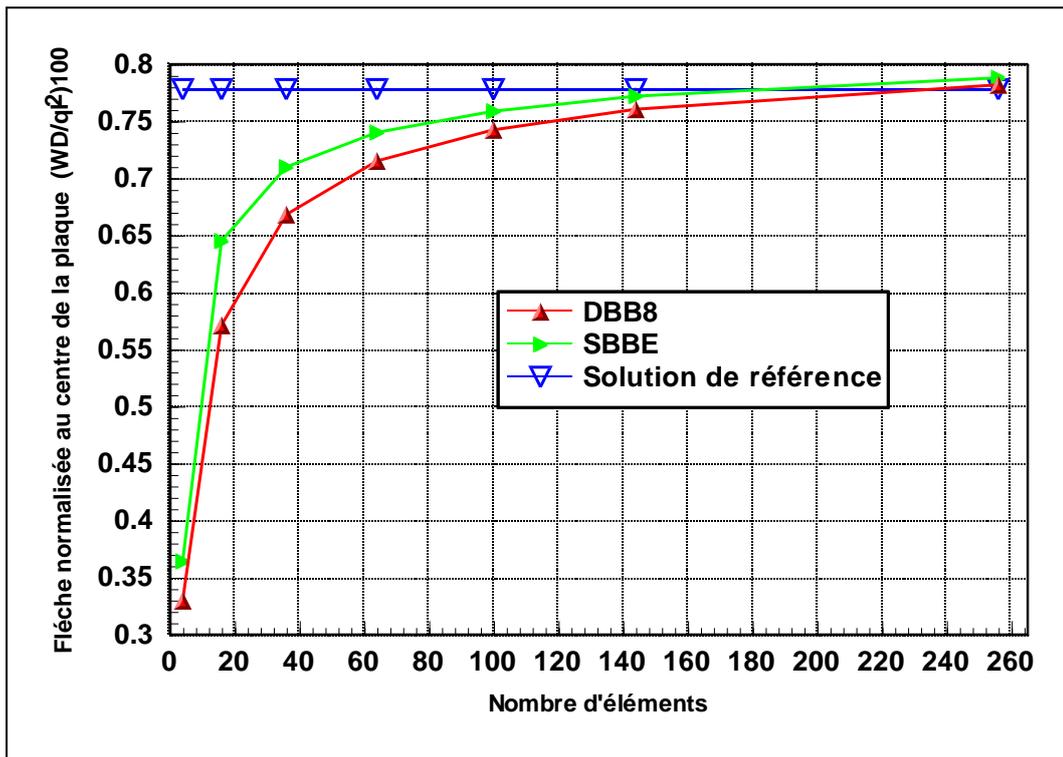


Figure 3.6a: Flèche normalisée d'une plaque encadrée avec une charge concentrée ($L/h=10$)

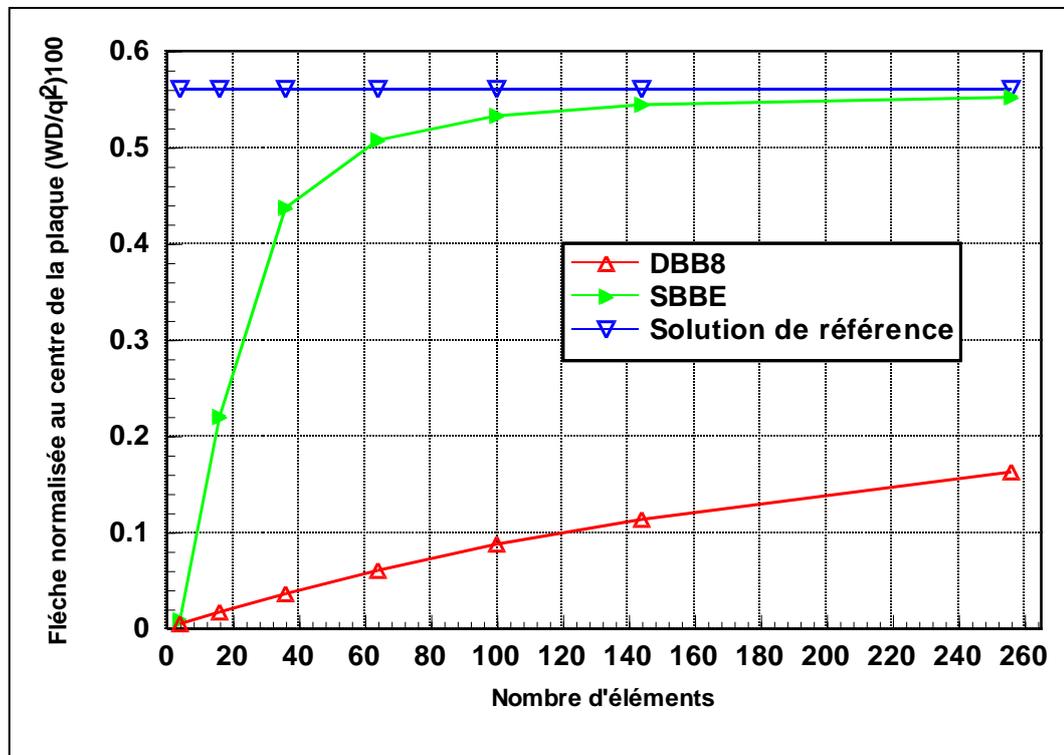


Figure 3.6b: Flèche normalisée d'une plaque encadrée avec une charge concentrée ($L/h=100$)

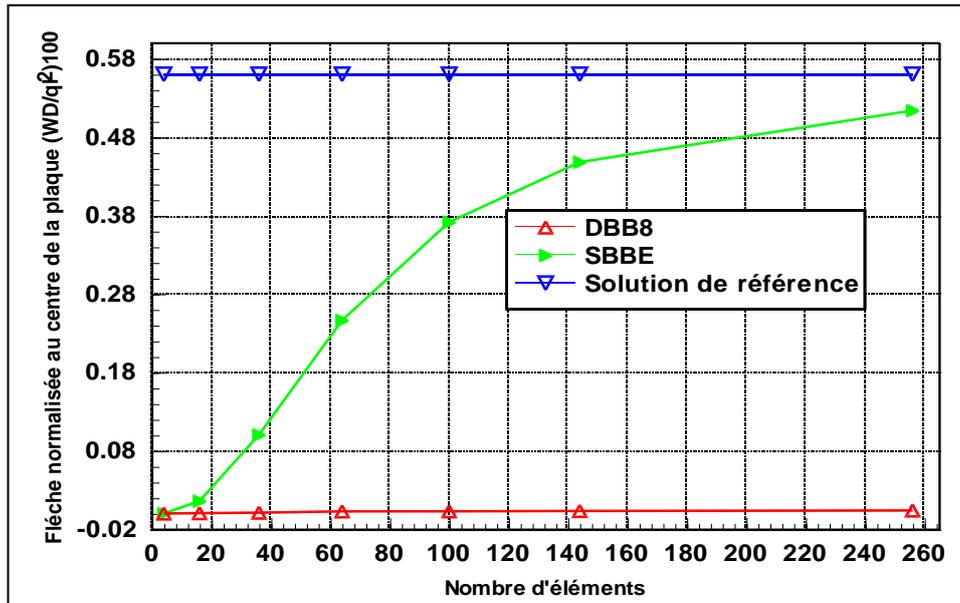


Figure 3.6c: Flèche normalisée d'une plaque encastree avec une charge concentree ($L/h=50$)

3.3.2. L'effet du rapport L/h sur la flèche au centre d'une plaque carrée

Ce test a pour but de vérifier l'effet du cisaillement transversal sur la flèche pour les problèmes de la flexion des plaques, selon l'étude faite au (chapitre 2 paragraphe 2.4.2) pour l'élément SBB.

Les résultats présentés dans les figures (3.7, 3.8), montrent comme pour l'élément SBB, l'élément SBBE est libre de tout blocage en cisaillement transverse, par contre l'élément (DBB8) basé sur le modèle en déplacement est infecté par un blocage en cisaillement transverse pour le cas des plaques minces.

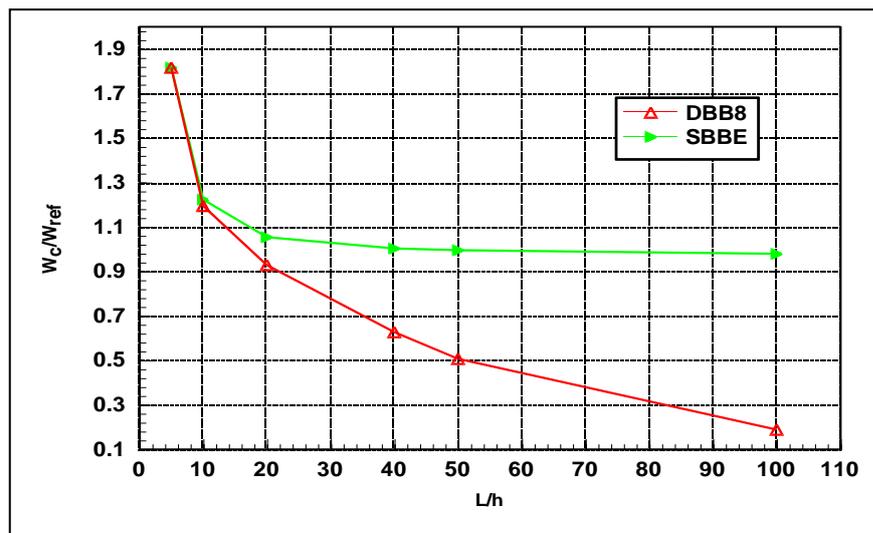


Fig 3.7a: Influence de (L/h) sur la flèche centrale (W_c/W_{ref}) pour des plaques simplement supportées soumises à une charge concentree

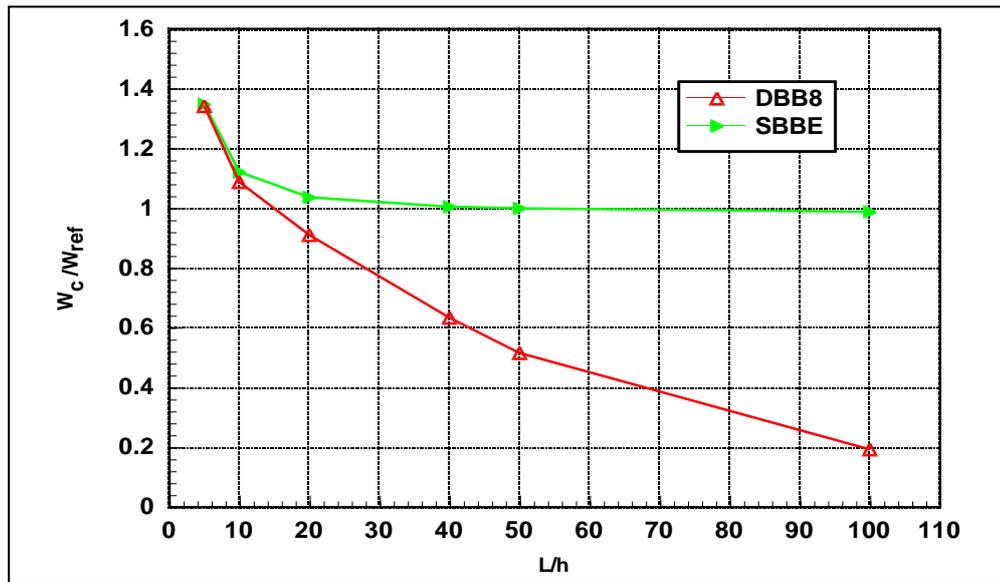


Figure 3.7b: Influence de (L/h) sur la flèche centrale (W_c/W_{ref}) pour des plaques simplement supportées soumises à une charge uniforme

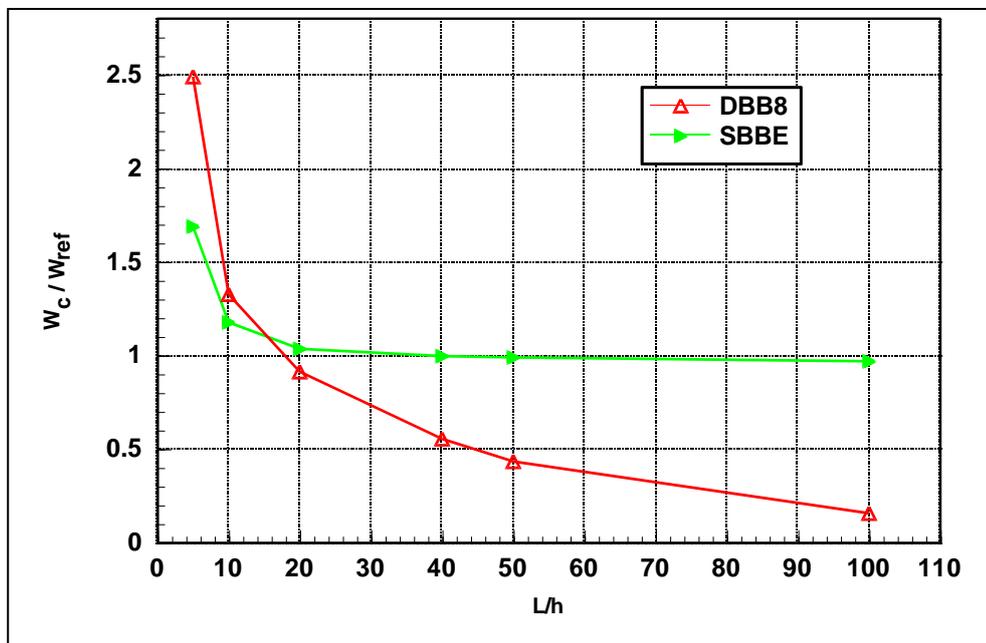


Figure 3.8a: Influence de (L/h) sur la flèche centrale (W_c/W_{ref}) pour des plaques encastées soumises à une charge concentrée

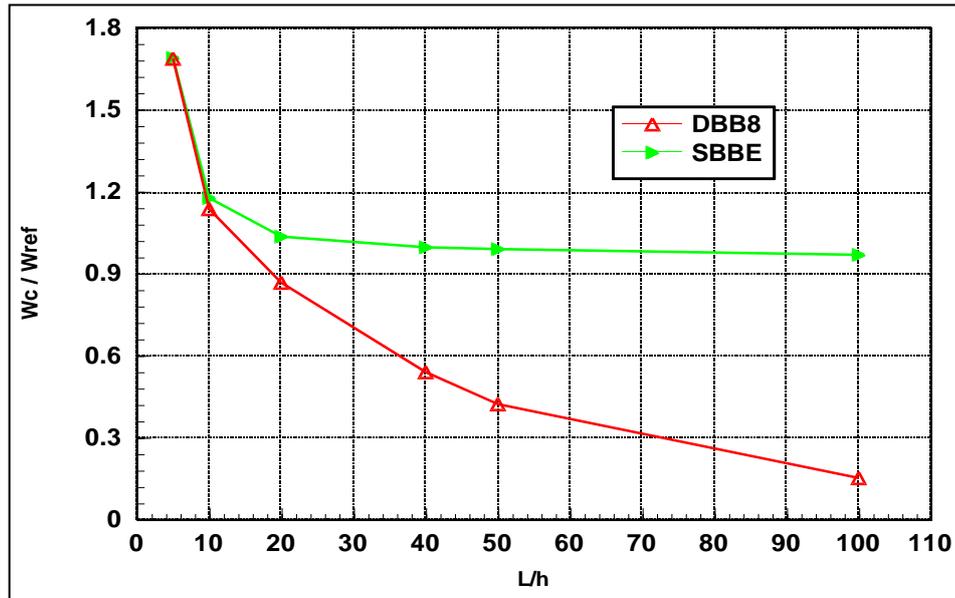


Figure 3.8b: Influence de (L/h) sur la flèche centrale (W_c / W_{ref}) pour des plaques encadrées soumises à une charge uniforme.

3.3.3. Poutre console avec différentes valeurs du coefficient de Poisson

L'élément SBBE est testé par ce test figure (3.9) déjà traité pour l'élément SBB (chapitre 2 paragraphe 2.4.4). Les résultats présentés dans le tableau (3.1) montrent que l'élément développé SBBE donne presque la solution théorique, que ce soit pour un maillage régulier ou trapézoïdal. Il est aussi libre de tout blocage même pour $\nu=0,4999999$, contrairement à l'élément RGH4, qui donne de mauvais résultats surtout pour un matériau presque incompressible et particulièrement pour le maillage trapézoïdal.

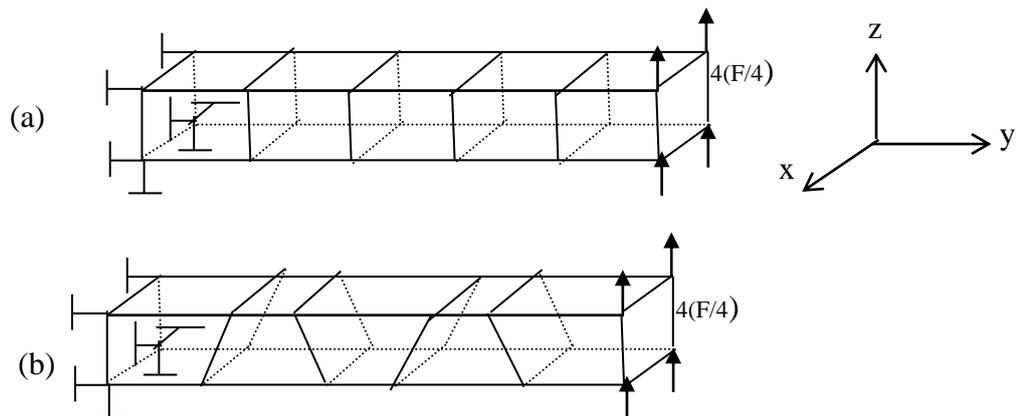


Figure 3.9: Poutre console avec des différentes valeurs du coefficient de Poisson ($F=300$, $E=10^7$, and $\nu = 0.3 - 0.4999999$).

	Coefficient de Poisson	SBBE	RGH4 ^a	PN5X1 ^a	Theory(10 ⁻³) ^a
maillage (a)	0.3	1,007	0.976	1.032	7.7340
	0.4	1,011	0.975	1.028	7.7520
	0.49	1,015	0.972	1.026	7.7682
	0.499	1,015	0.972	1.025	7.7698
	0.4999	1,015	0.972	1.014	7.7699
	0.49999	1,015	0.972	1.013	7.7699
	0.4900000	1,015	0.972	1.013	7.7699
	0.49999999	1,015	0.972	1.013	7.7699
maillage (b)	0.3	1,008	-	1.032	7.7340
	0.4	1,012	0.829	1.028	7.7520
	0.49	1,015	0.850	1.026	7.7682
	0.499	1,015	0.874	1.025	7.7698
	0.4999	1,015	0.877	1.015	7.7699
	0.49999	1,015	0.877	1.013	7.7699
	0.4900000	1,015	0.877	1.013	7.7699
	0.49999999	1,015	-	1.013	7.7699

^a Source: Bassayya and Shriniva [Bas.00a]

Tableau 3.1: Flèche normalisée d'une poutre cantilever avec différentes valeurs du coefficient de Poisson.

3.3.4. Test de sensibilité à l'élanement (L/h)

Ce test présenté par la figure (3.10) et traité précédemment (chapitre 2 paragraphe 2.4.5) a été proposé pour évaluer l'élément SBBE.

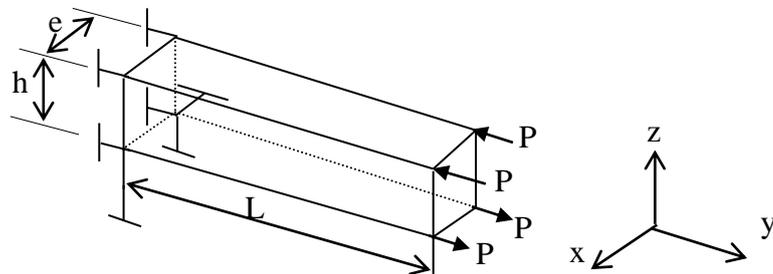


Figure 3.10: Test de sensibilité à l'élanement L/h ($E = 207 \times 10^9$ N/m², $\nu = 0.25$, $h = e = 0,12$ m, $P = 6900$ N and $L/h = 1-16$).

Les résultats présentés dans le tableau (3.2) montrent que l'élément développé donne toujours la solution théorique même pour des élancements élevés et il est libre de tout blocage

l'élancement	SBBE	PN5X1 ^b	FC CSA/NASTRAN ^a	PN340 ^a	Théorie x (10 ⁻⁶) ^a
1	1.0	1.0	0.938	1.0	3.333
2	1.0	1.0	0.937	1.0	13.33
4	1.0	1.0	0.937	1.0	53.33
8	1.0	1.0	0.937	1.0	213.3
16	1.0	1.0	0.937	-	853.3

^a Source: Bassayya, bhattacharya et Shriniva [Bas.00b]

^b Source: Bassayya et Shriniva [Bas.00a]

Tableau 3.2: Déflexions normalisées pour test de sensibilité à l'élancement

3.3.5. Test de la poutre élancée de MacNeal

Il s'agit d'une poutre console élancée de MacNeal figure (3.11) traitée pour l'élément SBB (chapitre 2 paragraphe 2.4.6).

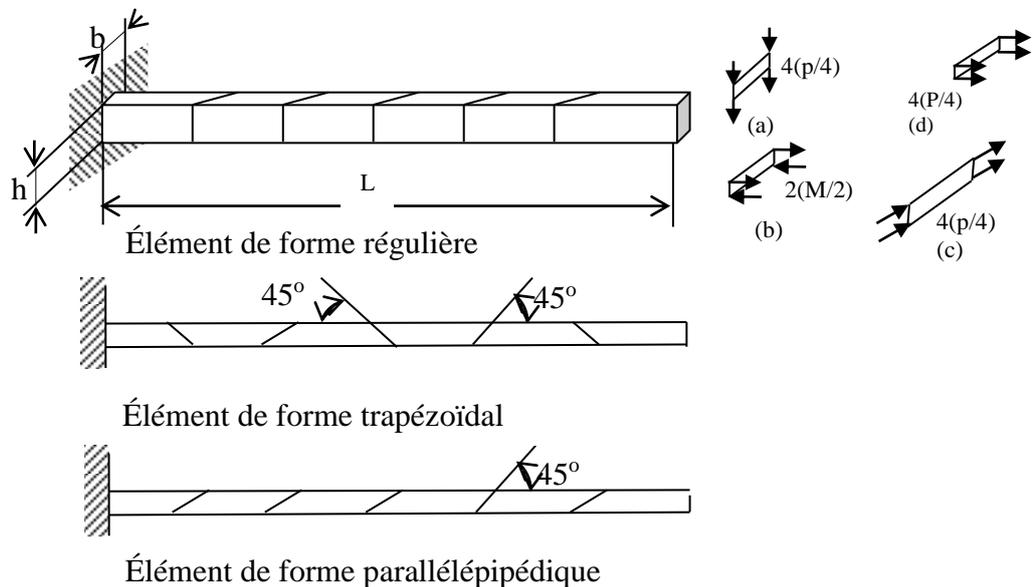


Figure 3.11 : Poutre élancée de MacNeal ($P=1$, $M=10$, $L=6$, $h=0.2$, $E = 10^7$, $\nu=0.3$ et $b=0.1$)

Les résultats obtenus pour l'élément SBBE présentés dans le tableau (3.3) montrent que l'élément SBBE est caractérisé par une très bonne performance, surtout pour le cas de chargement (d et b) (traction et flexion) et cela pour tous les types de maillage.

Pour le cas de chargement de cisaillement dans le plan et hors plan (a et c), les résultats sont moins satisfaisantes, mais ils seront améliorés si on raffine le maillage

Forme de l'élément	Type de chargement	Déflexion normalisée à l'extrémité libre (W)						
		SBBE	HEX8 ^a	HEX20 ^a	ANSYS ^a	PN340 ^a	PN34 ^a	PN5X1 ^b
Régulière	chargement (a)	0.980	0.981	0.970	0.982	0.982	0.981	0.998
	chargement (b)	0.991	-	-	-	-	-	0.999
	chargement(C)	0.980	0.981	0.961	0.980	0.980	0.981	1.000
	chargement (d)	0.995	-	0.994	-	-	-	0.985
Trapézoïdale	chargement (a)	0.980	0.069	0.886	0.065	0.065	0.982	0.999
	chargement (b)	0.991	-	-	-	-	-	1.000
	chargement(C)	0.980	0.051	0.920	0.370	0.370	0.051	0.996
	chargement (d)	0.998	-	0.994	-	-	-	0.988
Parallélépipédique	chargement (a)	0.980	0.080	0.967	0.620	0.620	0.980	0.997
	chargement (b)	0.991	-	-	-	-	-	1.000
	chargement(C)	0.980	0.055	0.941	0.547	0.547	0.055	0.998
	chargement (d)	1.013	-	0.994	-	-	-	0.989

^a Source: Bassayya, bhattacharya et Shriniva [Bas.00b]

^b Source: Bassayya et Shriniva [Bas.00a]

Tableau 3.3: Test de poutre élancée de MacNeal (Déflexion normalisée à l'extrémité libre(W))

3.3.6. Test de poutre de Cheung et Chen

Ce test de poutre figure (3.12) déjà traité pour l'élément SBB (chapitre 2 paragraphe 2.4.7) est proposé pour évaluer l'élément SBBE.

Les résultats de l'élément développés tableaux (3.4) et (3.5) montrent que la convergence est atteinte pour le cas de la flexion et que pour le cas du cisaillement, les résultats sont très similaires à ceux des éléments (HVCC8 et HVCC86EM).

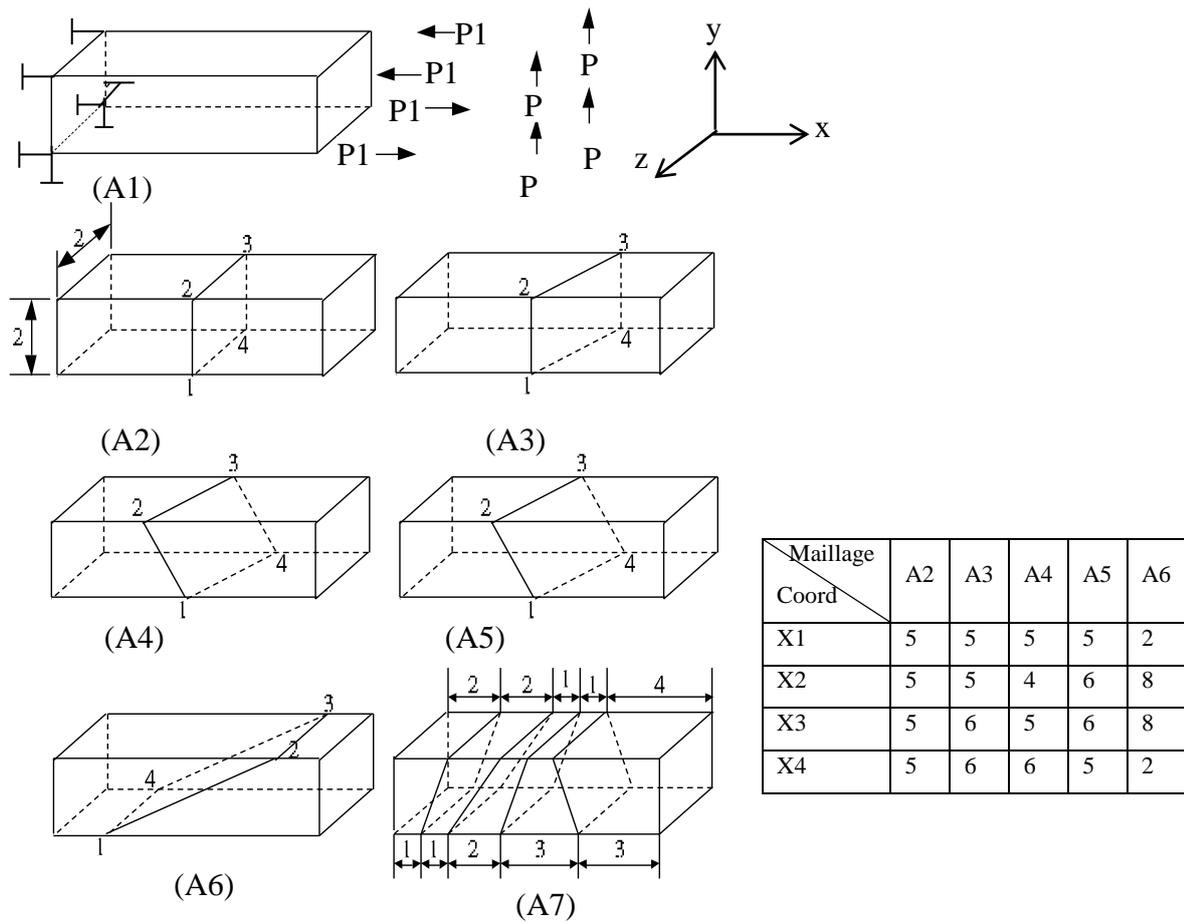


Figure 3.12: Test de Cheung et Chen ($P1=1000, P=150, E=1500, \nu=0.25$)

mesh	C3D8 ^a	C3D8I ^a	Wilson_H8 ^a	HVCC8 ^a	HVCC86EM ^a	SBBE
A1	0.0956	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000
A2	0.3382	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000
A3	0.2684	0.8756	0.9397	1.0027	1.0039	1,002
A4	0.2529	0.7652	0.8962	1.0020	1.0033	1,004
A5	0.2441	0.7738	0.8836	1.0000	1.0000	1.000
A6	0.0919	0.4516	0.7875	1.0000	1.0000	1,004
A7	0.8013	0.9956	0.9826	1.0000	1.0000	1.000

^a Source: [Li.08].

Tableau 3.4: Test de Cheung et Chen: déplacements normalisés à l'extrémité libre (flexion pure)

mesh	C3D8a	C3D8Ia	Wilson_H8a	HCCC8a	HVCC86EMa	SBBE
A1	0.0942	0.7554	0.7554	0.7554	0.7554	0,7869
A2	0.3329	0.9367	0.9340	0.9340	0.9366	0,9583
A3	0.2648	0.8445	0.8773	0.9254	0.9368	0,9412
A4	0.2692	0.7696	0.8479	0.9295	0.9441	0,9643
A5	0.2485	0.7658	0.8491	0.9383	0.9408	0,9606
A6	0.1330	0.4800	0.8723	1.2292	1.2302	0,9310
A7	0.8690	0.9536	0.9770	0.9999	1.0004	0,9990

^a Source: [Li.08]

Tableau 3.5: Test de Cheung et Chen : déplacements normalisés à l'extrémité libre (effort tranchant)

3.4. Validation numérique du cas non linéaire (élasto-plastique)

3.4.1. Analyse élasto-plastique d'un matériau 3D

Ce problème traité par Smith [Smi.88], [Smi.04] représente un cube figure (3.13) soumis à des déplacements imposés sur la face supérieure (dans la direction Z). Vue la symétrie, le système étudié représente 1/8 du cube d'une longueur de 2 m de côté avec trois plans de symétrie, où il n'y a pas de mouvement perpendiculaire à ces plans. Les propriétés des matériaux sont: le module de Young $E = 100 \text{ kN/m}^2$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$, la cohésion $c = 0$, l'angle de friction $\phi = 30^\circ$, et un état isotropique de contrainte initiale $\sigma = 20 \text{ kN/m}^2$.

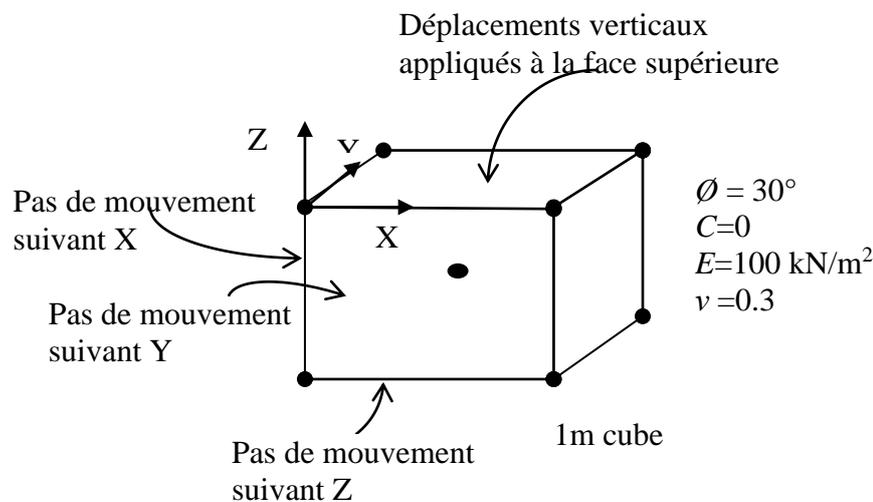


Figure 3.13: Analyse élasto-plastique d'un matériau 3D

Les résultats obtenus (tableau 3.6) sont donnés en termes de déplacement axial (dans la direction Z), et les trois contraintes normales (contraintes principales) σ_x , σ_y et σ_z après chaque incrément de déplacement. Comme les charges sont appliquées axialement et le cube est libre de se déplacer dans les directions x et y, les deux contraintes principales (σ_x et σ_y) restent constantes et égales à 20 kN/m² partout, tandis que la contrainte axiale qui est la troisième contrainte principale (σ_z ou σ_1) atteint un maximum de 60 kN/m² qui reste constante à cette valeur comme prévu pour un matériau de Mohr-Coulomb. On voit clairement que l'élément développé (SBBE) se comporte de manière similaire à l'élément 3D à 20 nœuds (B20) à champ de déplacement, mais l'élément développé est beaucoup plus économique car il utilise beaucoup moins de degrés de liberté.

	B20^a			SBBE		
déplacements	σ_z	σ_y	σ_x	σ_z	σ_y	σ_x
0.050	25.000	20.000	20.000	25.000	20.000	20.000
0.100	30.000	20.000	20.000	30.000	20.000	20.000
0.150	35.000	20.000	20.000	35.000	20.000	20.000
0.200	40.000	20.000	20.000	40.000	20.000	20.000
0.250	45.000	20.000	20.000	45.000	20.000	20.000
0.300	50.000	20.000	20.000	50.000	20.000	20.000
0.350	55.000	20.000	20.000	55.000	20.000	20.000
0.400	60.000	20.000	20.000	59.990	20.000	20.000
0.450	60.000	20.000	20.000	59.990	20.000	20.000
0.500	60.000	20.000	20.000	59.990	20.000	20.000

^a Source [Smi.88], [Smi.04]

Tableau 3.6: Déplacement axial par rapport aux contraintes normales (σ_x , σ_y et σ_z) pour l'analyse élasto-plastique des matériaux

3.4.2. Test d'analyse de pression passive des terres

Le problème étudié (figure 3.14) et traité par Smith [Smi.88], [Smi.04] possède les propriétés de résistance (angle de frottement $\phi = 30$, la cohésion $c = 0$ et l'angle de dilatation $\psi = 0$) qui est soumis à des déplacements imposés le long du côté gauche. Les contraintes initiales dans le sol sont calculées en supposant que le poids volumique $\gamma = 20$ kN/m³ et au repos (coefficient de pression de la terre $K_0 = 1$). Le problème étudié est discrétisé avec un maillage de (7 x 7 x 1). Le critère de Mohr-Coulomb et la méthode de la

contrainte initiale sont utilisés. Après chaque incrément de déplacement, et après la convergence numérique, la force résultante agissant sur la paroi est calculée.

Les résultats obtenus pour ce problème figure (3.15) montrent que, pour l'élément développé la force atteint une valeur maximale de 29,54 kN /m, ce qui est en bon accord avec la solution de Rankine 30 kN /m [Smi.88], [Smi.04].

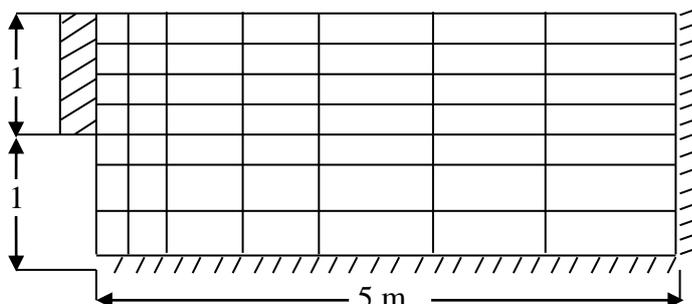


Figure 3.14: géométrie et maillage pour le test analyse d'une terre passive

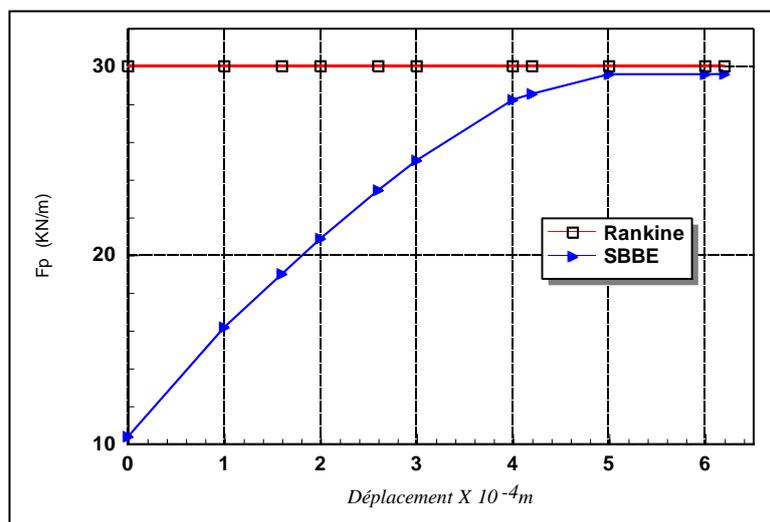


Figure 3.15: Analyse d'une terre passive

3.4.3. Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent

Il s'agit d'une semelle flexible poinçonnée sur une surface d'une couche d'argile uniforme (Figure 3.16) traitée dans la référence [Smi.88], [Smi.04]. La semelle supporte une contrainte uniforme $q = 1 \text{ kN/m}^2$ qui est augmentée progressivement jusqu'à la rupture, et les paramètres du sol sont: le module de Young $E = 105 \text{ kN/m}^2$, coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et la cohésion non drainée $c_u = 100 \text{ kN/m}^2$ la méthode viscoplastique, et le critère de Von Mises sont utilisés. La rupture dans ce problème se produit lorsque q atteint la charge de Prandtl: $q_u = (2 + \pi) c_u$.

La semelle est discrétisée avec un maillage (8 x 4 x 1) dont un seul élément utilisé dans le sens de la profondeur.

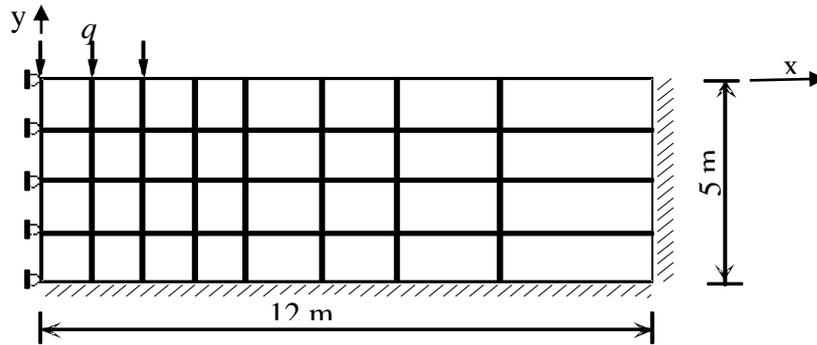


Figure 3.16: géométrie et maillage de la semelle flexible

Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure (3.17). Ces résultats montrent que la valeur (q/c_u) atteint la valeur maximale de 5.15, qui est en bon accord avec la solution donnée par Prandtl qui vaut 5,14 [Smi.88], [Smi.04] et que l'élément développé SBBE a une convergence rapide vers la solution de référence.

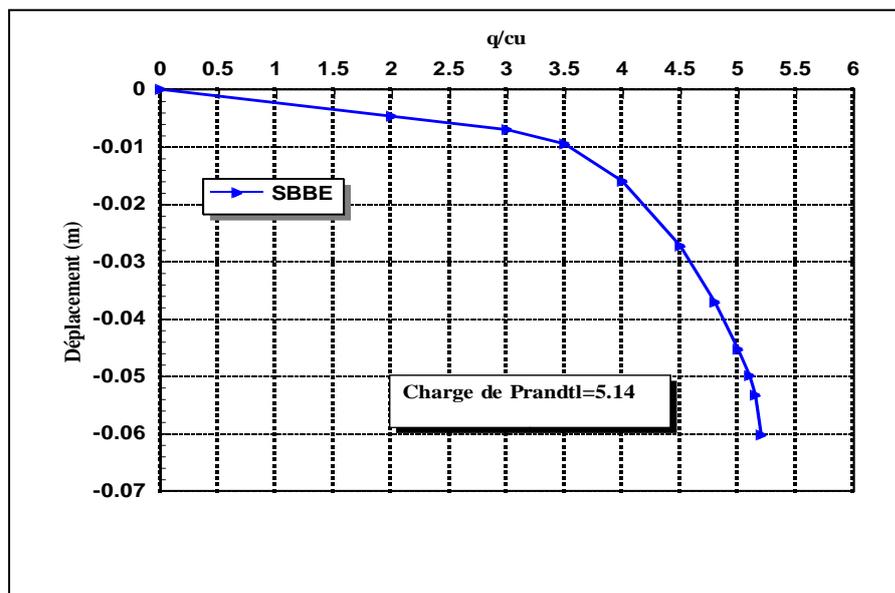


Figure 3.17: Capacité portante d'un sol purement cohérent

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre on a pu développer un élément fini brique (SBBE) en 3D basé sur l'approche en déformation, avec trois degrés de liberté essentiels par nœud (u , v et w) dédié à l'analyse de la flexion des plaques minces et épaisses. La matrice d'élasticité utilisée dans la formulation de cet élément est modifiée par introduction des constantes de contrainte plane et un coefficient de correction de cisaillement. Le présent élément qui contient des termes polynomiaux d'ordre supérieur a été utilisé dans l'analyse linéaire pour la flexion des plaques minces et épaisses ainsi que pour le comportement élasto-plastique. L'étude montre que l'élément développé est très performant en termes de précision et de convergence à la fois pour le cas linéaire et non linéaire. Cet élément est aussi libre de tout verrouillage en cisaillement contrairement à l'élément DBB8 basé sur l'approche en déplacement.

Chapitre 4

FORMULATION ET VALIDATION DES ELEMENTS AXISYMETRIQUES A CHAMP DE DEFORMATION

Chapitre 4. Formulation et validation des éléments axisymétriques à champ de déformation.

4.1. Introduction

La modélisation axisymétrique est un moyen qui sert à analyser une pièce de révolution en la transformant en un modèle 2D dans lequel la géométrie et le chargement sont axisymétriques. En réduisant un modèle 3D en un modèle 2D, le temps de calcul ainsi que la taille des fichiers peuvent être considérablement réduits.

Dans cette étude, deux éléments membranaires à champ de déformation de Sabir (SBRIE, SBRIEIR) [SAB.83a] [SAB.85a] seront formulés et évalués en axisymétrie, à travers trois tests liés à ce type de problème.

4.2. Considérations théoriques

Les déformations non nulles sont:

$$\{\varepsilon_x\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Dans le cas de la cinématique des petites déformations, en exprimant les déformations en fonction des déplacements du solide axisymétrique on obtient :

$$\{\varepsilon_x\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

L'équation constitutive (contrainte déformation) peut être exprimée par: $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

La matrice d'élasticité est donnée par:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

4.2.1. Forces nodales équivalentes pour un élément rectangulaire axisymétrique

4.2.1.1 Force de volume

Pour les force de volume telle que la gravité, Le vecteur de forces nodales, lorsqu'il est intégré sur un radian est donné par:

$$\{f_v\} = \int_s [N]^T \begin{Bmatrix} q_r \\ q_z \end{Bmatrix} r dr dz \quad (4.5)$$

Les vecteurs de force liés aux forces centrifuges dus à la rotation autour de l'axe z et à l'effet du poids propre nécessitent un vecteur q , qui est calculé en utilisant la gravitation g et la vitesse de rotation ω :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_r \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho r \omega^2 \\ -\rho g \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\{f_{v_i}\} = \iint_s [N_i]^T \begin{Bmatrix} q_r \\ q_z \end{Bmatrix} r dr dz \quad (4.7)$$

Pour un cas où on a seulement les forces centrifuges dues à la rotation (l'effet du poids propre est négligé), on a pour un $h=1$ et sur un radian:

$$\{f_{b_i}\} = \iint_s [N_i]^T \begin{Bmatrix} q_r \\ 0 \end{Bmatrix} r dr dz \quad (4.8)$$

$$\{f_b\} = \frac{\rho\omega^2 B}{64} \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}(6A^2 - 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3}(6A^2 + 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3}(6A^2 + 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3}(6A^2 - 4AB + 2B^2) \\ 0 \end{Bmatrix}, A=r_1 + r_0, B=r_1 - r_0 \quad (4.9)$$

Où: r_1 , r_2 et h sont respectivement le rayon interne, le rayon externe et la hauteur de l'élément (Figure 4.1)

4.2.1.2. Forces surfaciques

Pour les forces surfaciques, le vecteur force nodal équivalent lorsqu'il est intégré sur un radian sera écrit par :

$$\{f_s\} = \int_L [N]^T \begin{Bmatrix} q_r \\ q_z \end{Bmatrix} r dl \quad (4.10)$$

Où: dl représente la longueur élémentaire autour de la limite de l'élément. Pour une unité de pression, l'équation (4.10) est intégrée sur un élément linéaire, les forces nodales équivalentes sont représentées sur la figure (4.1).

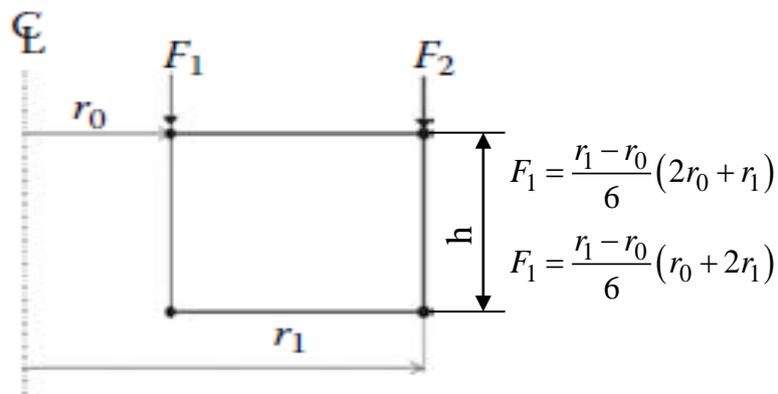


Figure 4.1: Force nodale équivalente pour un élément rectangulaire.

4.3. Formulation axisymétrique des éléments à champ de déformation étudiés

4.3. 1. Formulation axisymétrique de l'élément (SBRIE) [SAB.83a]

Le champ de déformation de l'élément est donné par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8\end{aligned}\tag{4.11}$$

Le champ de déplacement est le suivant:

$$\begin{aligned}u &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} \\ v &= \alpha_2 + \alpha_3 x - \alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{4.12}$$

Sous forme matricielle le champ de déplacement de l'élément (SBRIE) est comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\varphi(x, y)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ \\ \\ \\ a_8 \end{Bmatrix}\tag{4.13}$$

Où :

$$[\varphi(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -\frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} \end{bmatrix}\tag{4.14}$$

L'élément axisymétrique à deux degrés de liberté (u, v) par nœud, l'un radial et l'autre dans les directions axiales, l'équation (4.14) est de la forme:

$$[\varphi(r, z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z & r & rz & 0 & -\frac{z^2}{2} & \frac{z}{2} \\ 0 & 1 & r & 0 & -\frac{r^2}{2} & z & rz & \frac{r}{2} \end{bmatrix}\tag{4.15}$$

Où u et v sont respectivement les déplacements dans les directions r et z .

La matrice de rigidité élémentaire $[Ke]$ peut être obtenue par:

$$[K^e] = \int [B]^T [D] [B] dV \quad (4.16)$$

$$[B] = [Q][C]^{-1} \quad (4.17)$$

Alors on aura:

$$[K^e] = [C]^T \underbrace{\left\{ \int [[Q(x,y)]^T [D] [[Q(x,y)]] dV \right\}}_{[K_0]} [C]^{-1} = [C]^T [K_0] [C]^{-1} \quad (4.18)$$

$$\text{Où : } [K_0] = \iiint [Q]^T [D] [Q] dv \quad (4.19)$$

Les matrices des déformations $[B]$ et $[Q]$ dépendent des coordonnées r et z du point considéré. Pour le cas axisymétriques l'expression précédente devient :

$$[K_0] = \iiint [Q]^T [D] [Q] r dr d\theta dz \quad (4.20)$$

Pour un élément différentiel circonférentiel l'intégral devient:

$$[K_0] = 2\pi \iint [Q]^T [D] [Q] r dr dz \quad (4.21)$$

$[K_0]$ est intégrée numériquement on a;

$$[K_0] = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D] [Q] \det |J| r d\xi d\eta \quad (4.22)$$

Où : $[Q]$, $[J]$ et $[D]$ sont respectivement: la matrice de déformation, le Jacobien et la matrice d'élasticité.

Les matrices $[C]$ et $[Q]$ sont respectivement données par:

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_i & r_i & r_i z_i & 0 & -\frac{z_i^2}{2} & \frac{z_i}{2} \\ 0 & 1 & r_i & 0 & -\frac{r_i^2}{2} & z_i & r_i z_i & \frac{r_i}{2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Où: r_i et z_i sont les coordonnées des quatre nœuds i ($i = 1, 4$).

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{z}{r} & 1 & z & 0 & -\frac{z^2}{2r} & \frac{z}{2r} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

La matrice $[K_0]$ donnée par les équations. (4.22) et. (4.21) sera évaluée numériquement et analytiquement.

Lors du calcul analytique on obtient des termes en $\text{Log}(r_0/r_1)$. Lorsqu'un point touche l'axe de révolution ($r_0=0$), ce qui arrive fréquemment dans les structures axisymétriques qui sont souvent fermées, il faut évaluer le logarithme de zéro (cas indéterminé). Pour éviter ce problème, nous avons eu recours à l'intégration numérique pour ce cas précis, par contre pour les autres termes ils seront évalués analytiquement.

4.3.2. Formulation axisymétrique de l'élément SBRIEIR [Sab.85a]

Le champ de déformation de l'élément est:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + (\alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} x y^3) \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x + (-\alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} x^3 y) \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + (\alpha_5 x + \alpha_7 y)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Le champ de déplacement est obtenu après intégration:

$$\begin{aligned}u &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_5 x y + \alpha_{10} \frac{y^2}{2} + \alpha_{11} x y^2 + \alpha_{12} x^2 y^3 \\ v &= \alpha_2 + \alpha_3 y + \alpha_6 y + \alpha_8 \frac{x}{2} + \alpha_7 x y + \alpha_9 \frac{x^2}{2} - \alpha_{11} x y^2 - \alpha_{12} x^3 y^2 \\ \phi &= \alpha_3 - \alpha_5 \frac{x}{2} + \alpha_7 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{y}{2} - 2\alpha_{11} x y - 3\alpha_{12} x^2 y^2\end{aligned}\quad (4.26)$$

Sous forme matricielle le champ de déplacement de l'élément (SBRIEIR) est:

$$[\varphi(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & \frac{y^2}{2} & xy^2 & x^2 y^3 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 & y & xy & \frac{x}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 & -x^2 y & -x^3 y^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{y}{2} & 0 & \frac{x}{2} & -\frac{y}{2} & -2xy & -3x^2 y^2 \end{bmatrix}\quad (4.27)$$

Pour un élément axisymétrique à trois degrés de liberté par nœud, l'équation (4.27) devient :

$$[\varphi(r, z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z & r & rz & 0 & 0 & \frac{z}{2} & 0 & \frac{z^2}{2} & rz^2 & r^2 z^3 \\ 0 & 1 & r & 0 & 0 & z & rz & \frac{r}{2} & \frac{r^2}{2} & 0 & -r^2 z & -r^3 z^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{r}{2} & 0 & \frac{z}{2} & 0 & \frac{r}{2} & -\frac{z}{2} & -2rz & -3r^2 z^2 \end{bmatrix}\quad (4.28)$$

La matrice de rigidité élémentaire [Ke] peut être obtenue comme précédemment, les matrices [Q] et [C] sont respectivement données par:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^2 & 2rz^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 & 0 & -r^2 & -2r^3z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & z & 1 & r & z & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{z}{r} & 1 & z & 0 & 0 & \frac{z}{2r} & 0 & \frac{z^2}{2r} & z^2 & rz^3 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_i & r_i & r_i z_i & 0 & 0 & \frac{z_i}{2} & 0 & \frac{z_i^2}{2} & r_i z_i^2 & r_i^2 z_i^3 \\ 0 & 1 & r_i & 0 & 0 & z_i & r_i z_i & \frac{r_i}{2} & \frac{r_i^2}{2} & 0 & -r_i^2 z_i & -r_i^3 z_i^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{r_i}{2} & 0 & \frac{z_i}{2} & 0 & \frac{r_i}{2} & -\frac{z_i}{2} & -2r_i z_i & -3r_i^2 z_i^2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Où r_i et z_i sont les coordonnées des quatre nœuds i ($i = 1, 4$).

4.4. Test de validation

Afin d'évaluer les performances des éléments à champ de déformation étudiés, dans des applications axisymétriques, divers exemples de problèmes axisymétriques sont présentés.

4.4.1. Cylindre épais soumis à une pression interne

On considère un cylindre creux d'axe z , de rayon $r_1 = a = 4$, $r_2 = b = 10$, en acier de module de Young $E=1000$ et de coefficient de Poisson $\nu=0.3$, il est soumis à une pression intérieure $p=10$.

Le cylindre se prolonge indéfiniment le long de l'axe z , il est en état de déformation plane le long de cette direction. Une "tranche" d'épaisseur (b) est extraite et discrétisée en utilisant 4 éléments annulaires quadrilatéral le long de la radiale r et un élément le long de la direction axiale z comme le montre la figure (4.2).

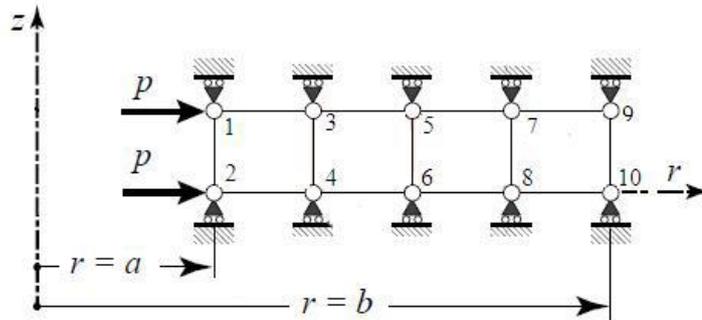


Figure 4.2: Géométrie et maillage d'un cylindre épais soumis à une pression interne

La solution analytique proposée par Timoshenko [Tim 51] pour un cylindre épais soumis à une pression interne est donnée par:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= p \frac{a^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= p \frac{a^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{zz} &= p \frac{2a^2\nu}{b^2-a^2}\end{aligned}\tag{4.31}$$

Pour un rayon r donné, le déplacement radial exact est:

$$u_{rr} = p \frac{a^2(1+\nu)(b^2+r^2(1-2\nu))}{E(b^2-a^2)r}\tag{4.32}$$

Les conditions aux limites imposées à ce problème montrent que les nœuds se déplacent dans la direction radiale seulement.

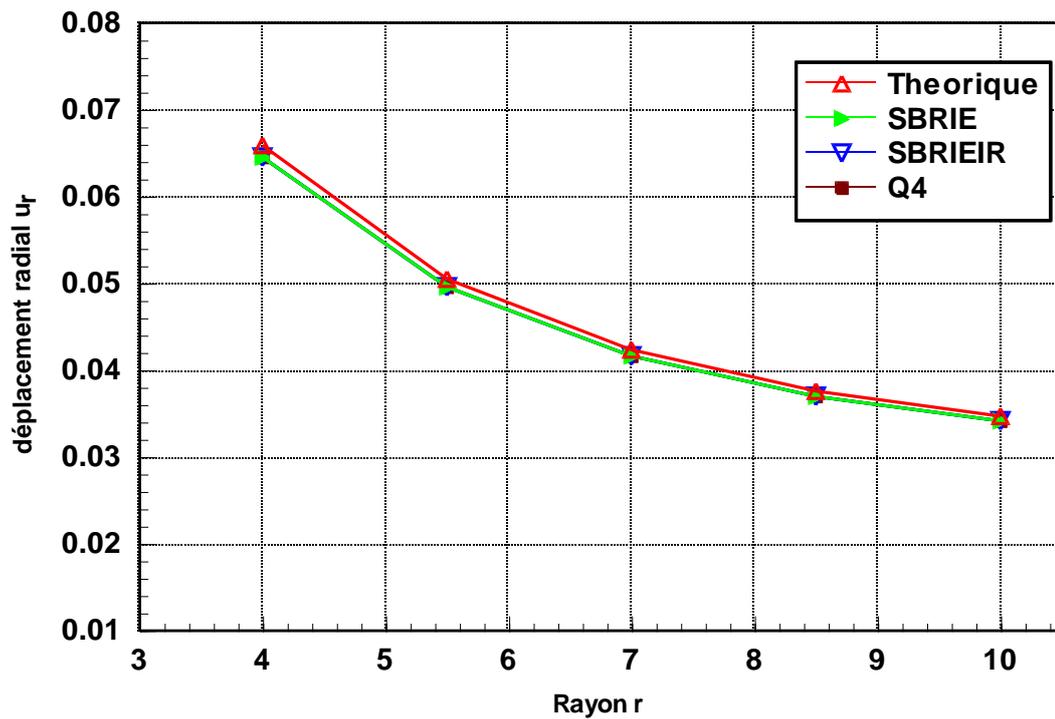


Figure 4.3: Cylindres à paroi épaisse sous une pression interne; déplacement radial (maillage 1x4)

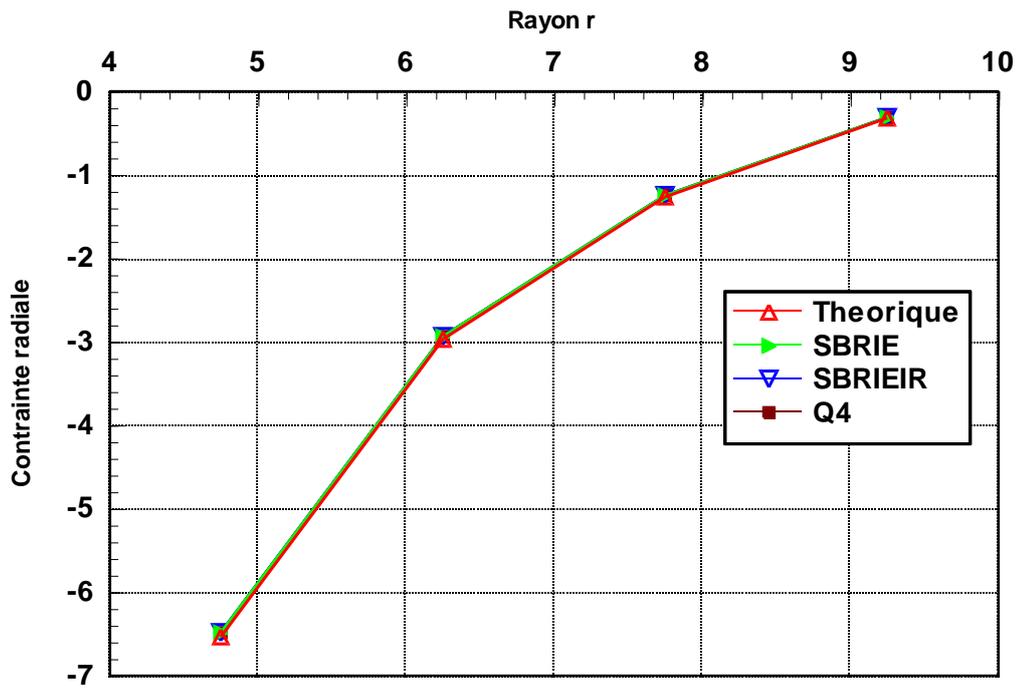


Figure 4.4: Cylindre à paroi épaisse sous une pression interne; contrainte radiale calculée au centre des éléments (maillage 1x4)

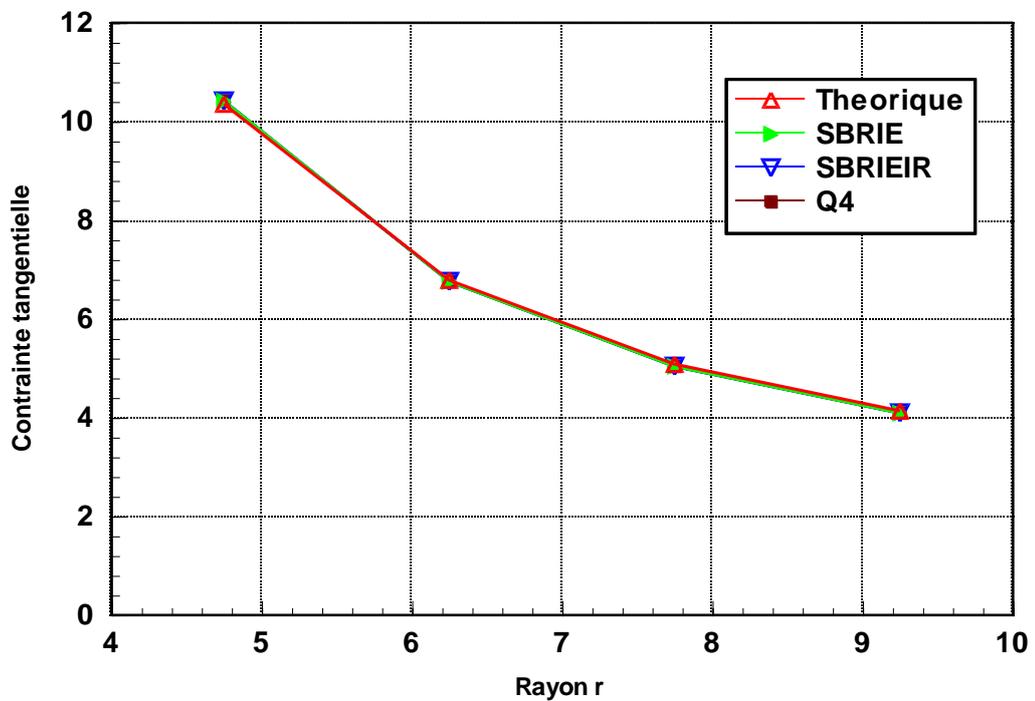


Figure 4.5: Cylindre à paroi épaisse sous une pression interne; contrainte tangentielle calculée au centre des éléments (maillage 1x4).

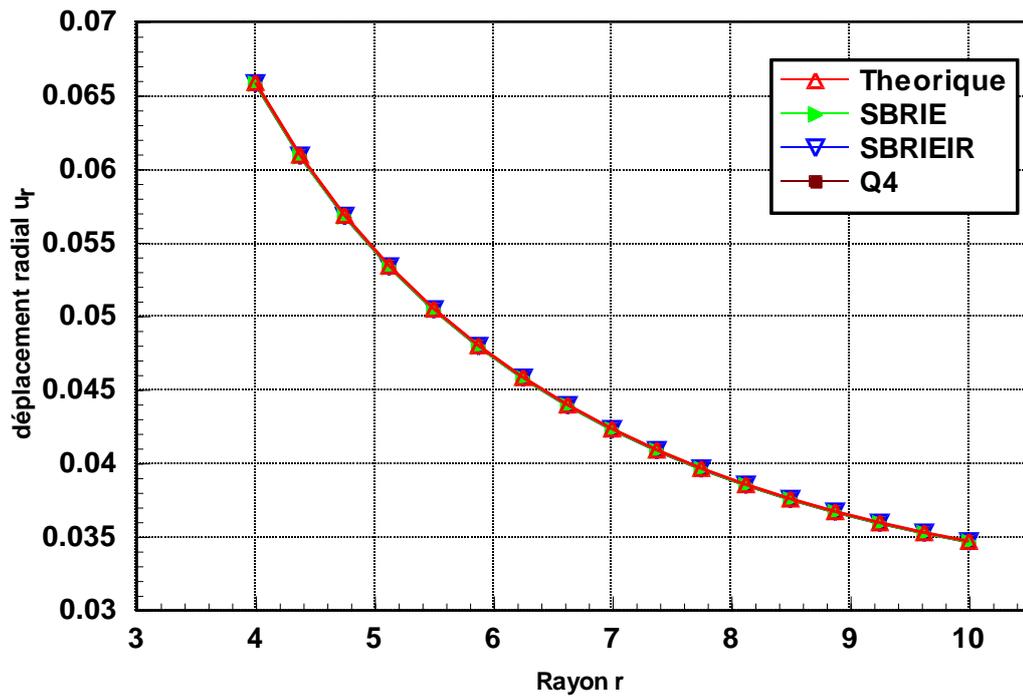


Figure 4.6: Cylindres à paroi épaisse sous une pression interne; déplacement radial maillage (1x16)

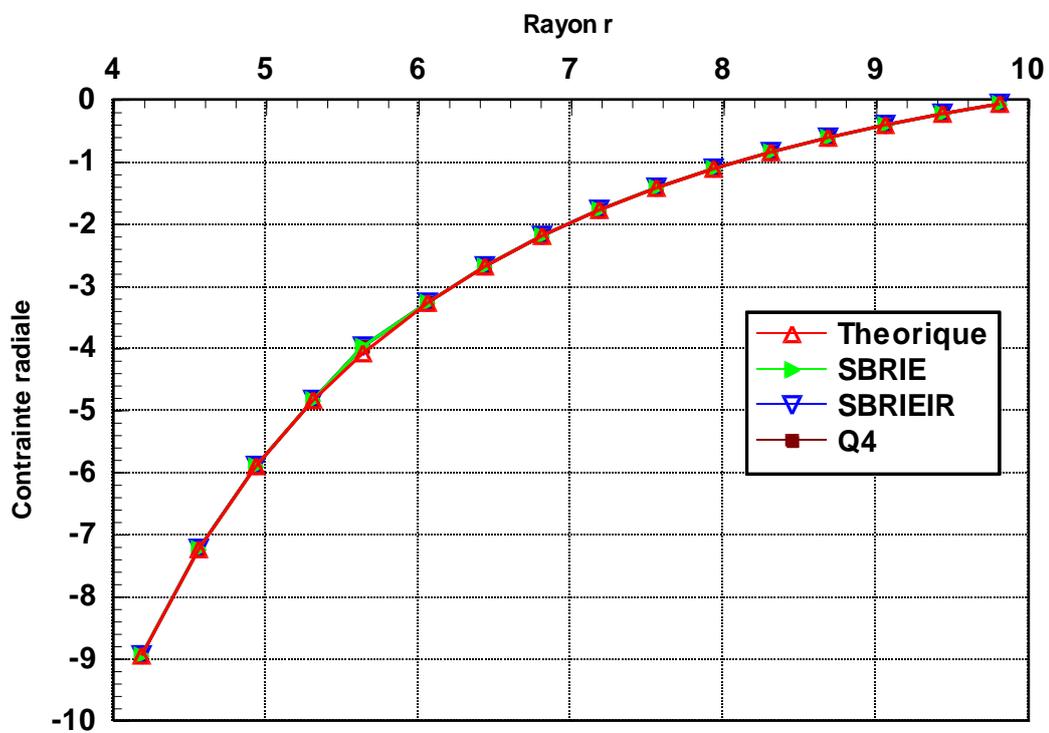


Figure 4.7: Cylindre à paroi épaisse sous une pression interne; contrainte radiale calculée au centre des éléments (maillage 1x16)

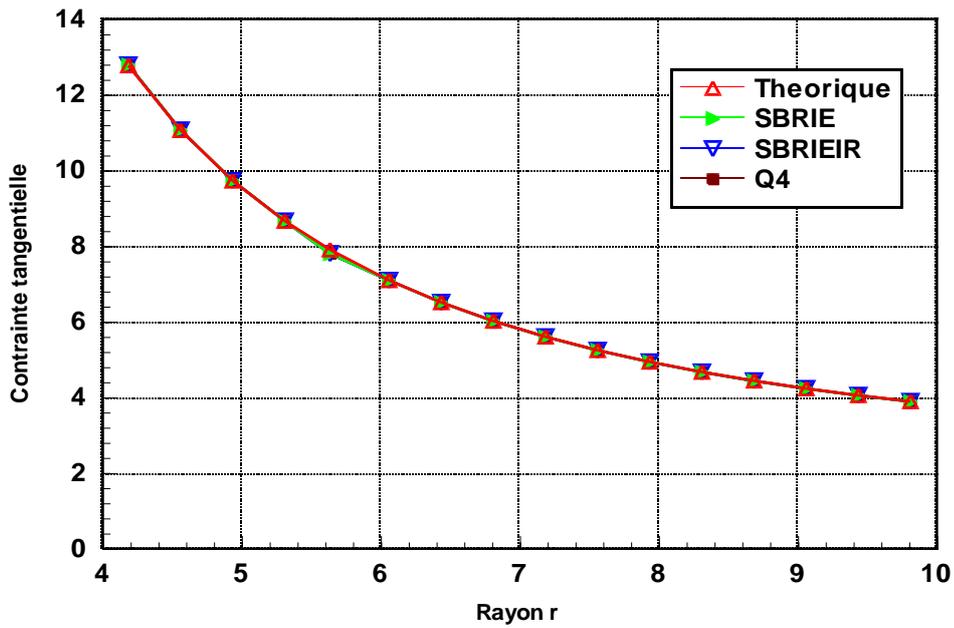


Figure 4.8: Cylindre à paroi épaisse sous une pression interne; contrainte tangentielle calculée au centre des éléments (maillage 1x16)

Les figures (4-3 à 8) représentent la solution exacte [Tim 51], ainsi que les résultats obtenus pour les éléments formulés et ceux de l'élément Q4. Pour les déplacements radiaux et les contraintes radiales et tangentielles, ces résultats montrent un assez bon accord avec la solution analytique pour tous les éléments. Les contraintes ont été tracées au centre des éléments.

4.4.2. Disque mince en Rotation

Le deuxième problème de référence est un disque circulaire creux, mince d'épaisseur $h=1$, de rayon ($a=4$ et $b=10$) figure (4.9). Il tourne autour de l'axe z avec une vitesse angulaire constante $\omega=0.5$. Le matériau est isotrope avec module d'élasticité $E=1000$, coefficient de Poisson $\nu=1/3$ et la densité de masse $\rho=3$.

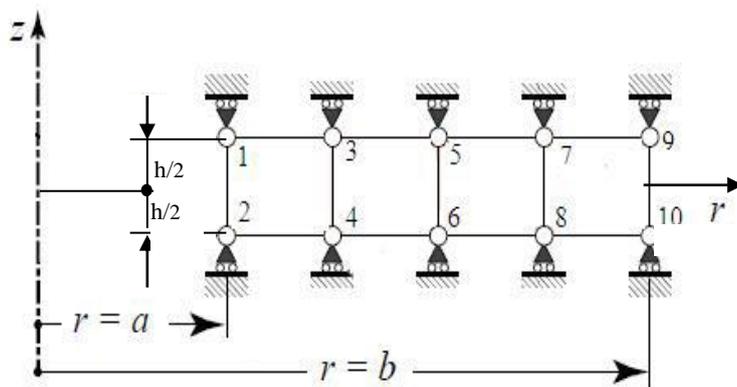


Figure 4.9: Géométrie et maillage d'un disque mince en rotation

Le maillage est les conditions aux limites imposées au problème sont présentés sur la figure (4.9). Quatre éléments dans la direction radiale, un seul élément est utilisé dans le sens axial. La seule charge est une force centrifuge (force de volume) agissant le long de r ($b_r = \rho\omega^2 r$ et $b_z = 0$). La solution analytique proposée par Timoshenko [Tim 51] est comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 \left(a^2 + b^2 - r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 \left(a^2 + b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) \\ u_r &= \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 \frac{1-\nu}{E} r \left(a^2 + b^2 - \frac{1+\nu}{3+\nu} r^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Les résultats sont représentés sur les figures (4.10-12) où les déplacements radiaux u_r , contraintes radiales σ_{rr} et contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ sont comparés avec la solution exacte. Les déplacements sont calculés aux nœuds par contre les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont calculées au centre des éléments.

Les résultats montrent que le déplacement radial et la contrainte radiale σ_{rr} calculée sont en accord avec la solution analytique. Par contre, les contraintes tangentielles sont moins satisfaisantes pour ce maillage.

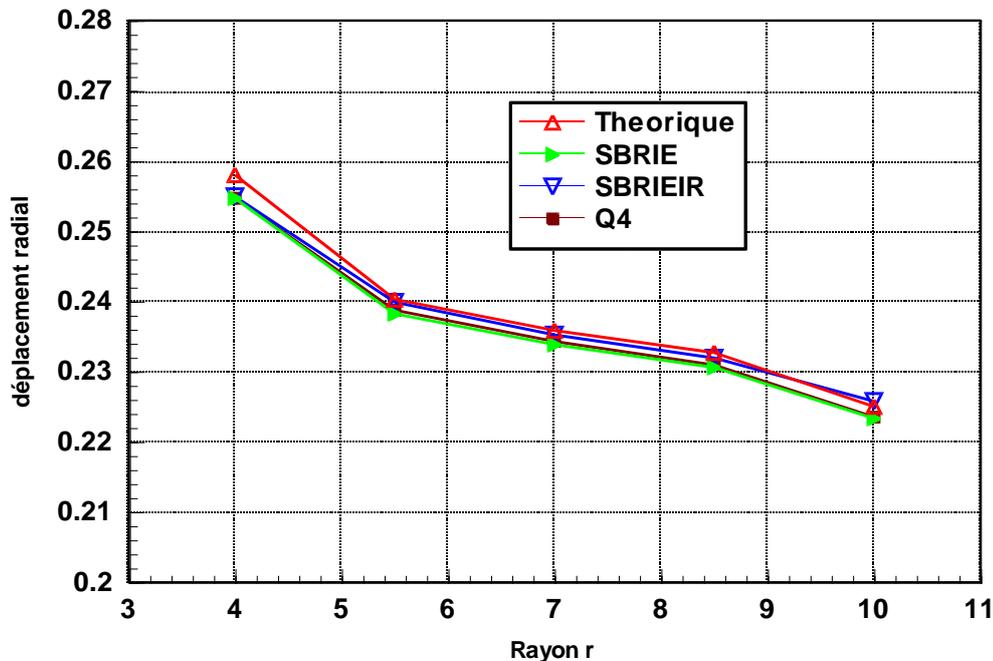


Figure 4.10: Disque en rotation; déplacement radial (maillage 1x4)

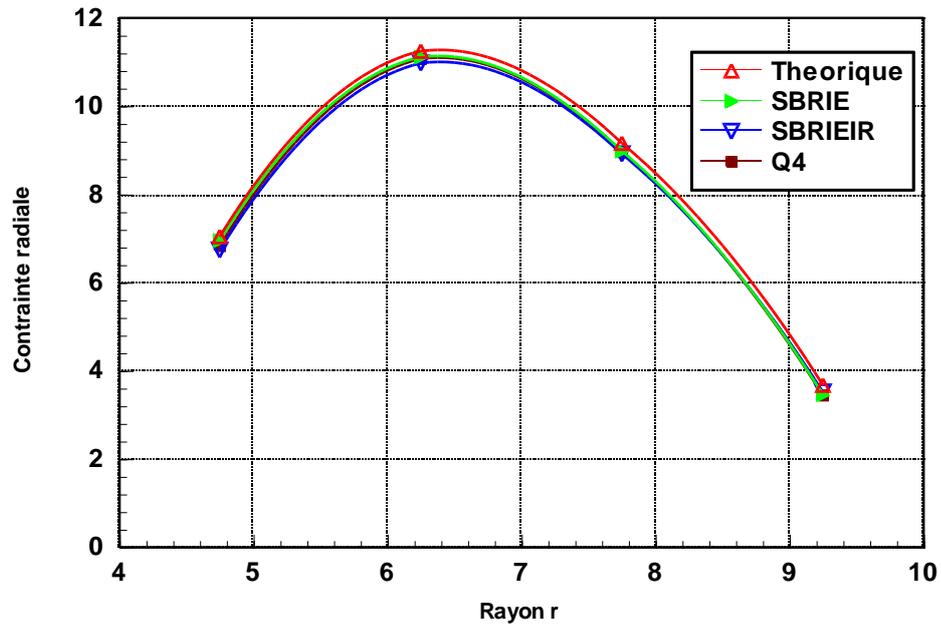


Figure 4.11: Disque en rotation; contrainte radiale calculée au centre des éléments (maillage 1x4)

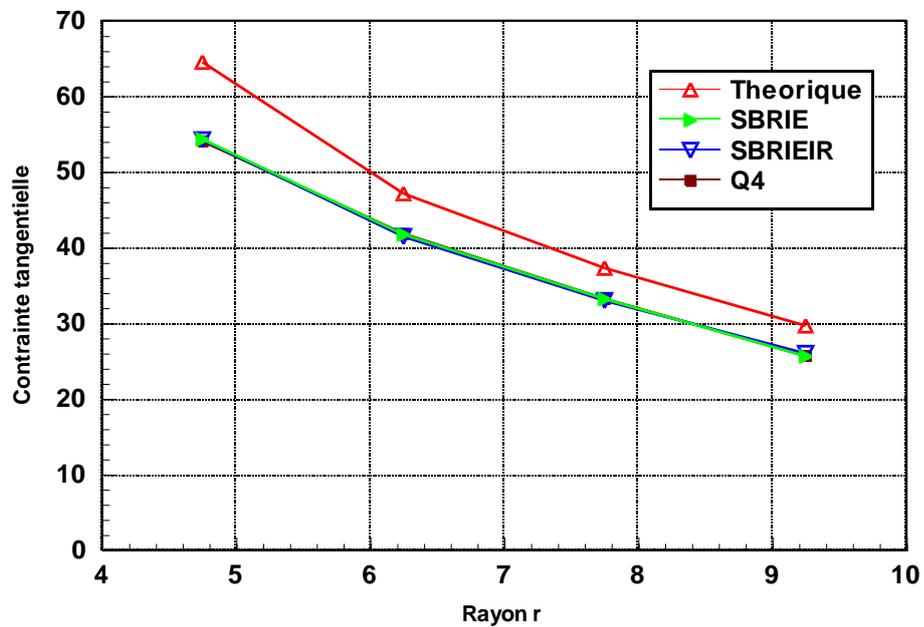


Figure 4.12: Disque en rotation; contrainte tangentielle calculée au centre des éléments (maillage 1x4)

4.4.3. Plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée

Une plaque circulaire d'épaisseur $h=1$, de rayon $r=10$ et en appui simple, soumise à une charge ponctuelle $P=10$ agissant au centre de la plaque. Le matériau est isotrope avec un module d'élasticité $E = 1000$ et un coefficient de Poisson $\nu = 1/3$.

La figure (4.13) représente la géométrie et le maillage utilisés. La solution analytique pour ce problème est prise à partir de Timoshenko [Tim 59].

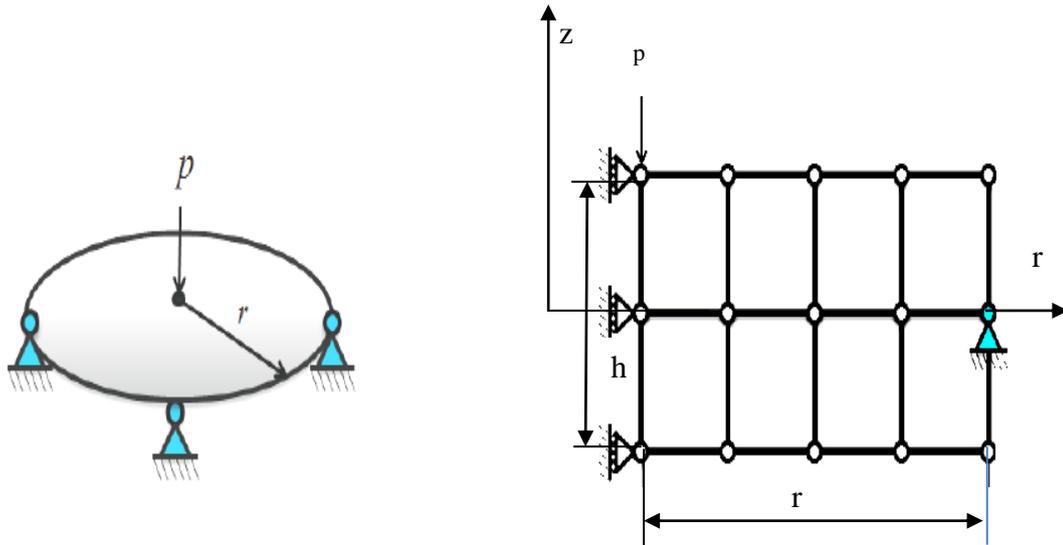


Figure 4.13: Géométrie et maillage d'une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée.

La solution exacte [Tim 59] des moments de flexion et les contraintes associées est donnée comme suit:

$$M_{rr} = \frac{P}{4\pi} (1+\nu) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4.34)$$

$$M_{\theta\theta} = \frac{P}{4\pi} \left((1+\nu) \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 1 - \nu \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{12M_{\theta\theta}z}{h^3} \quad (4.35)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{12M_{rr}z}{h^3}$$

Où : a et b sont le rayon interne et externe pour le cas de plaque circulaire trouée.

Les moments et les contraintes données par les équations (4.34) et (4.35) deviennent infinis à ($r = a = 0$) sous une charge ponctuelle, donc pour comparer à une solution obtenue par la méthode des éléments finis, on prend un rayon ($r \leq r_{\text{struc}} = r/1000$).

Les contraintes aux niveaux des surfaces supérieures et inférieures de la plaque, sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \pm \frac{12M_{rr}(h/2)}{h^3} = \pm 6M_{rr}/h^2 \\ \sigma_{\theta\theta} &= \pm \frac{12M_{\theta\theta}(h/2)}{h^3} = \pm 6M_{\theta\theta}/h^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Le déplacement radial est donné par:

$$u_r = -z \frac{\partial U_z}{\partial r} = \frac{P}{8\pi D} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1 - 2\ln\left(\frac{a}{b}\right) \right) rz \quad (4.37)$$

Où $D = \frac{Eh^3}{12(1-2\nu)}$ est la rigidité de la plaque.

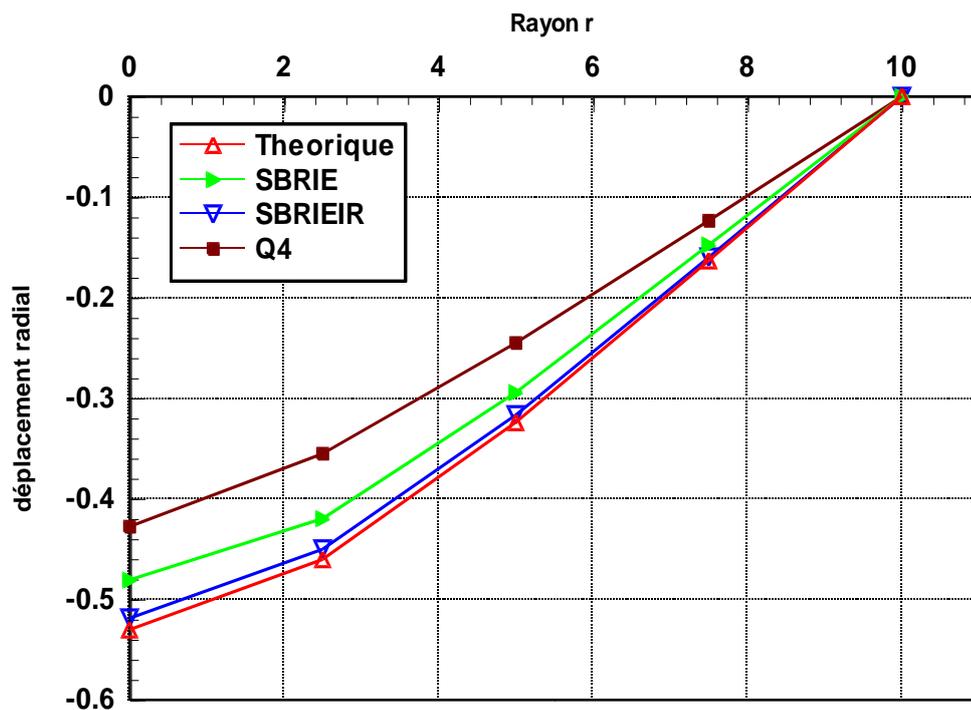


Figure 4.14: Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge ponctuelle P avec un maillage 2x4 (déplacement radial u_r)

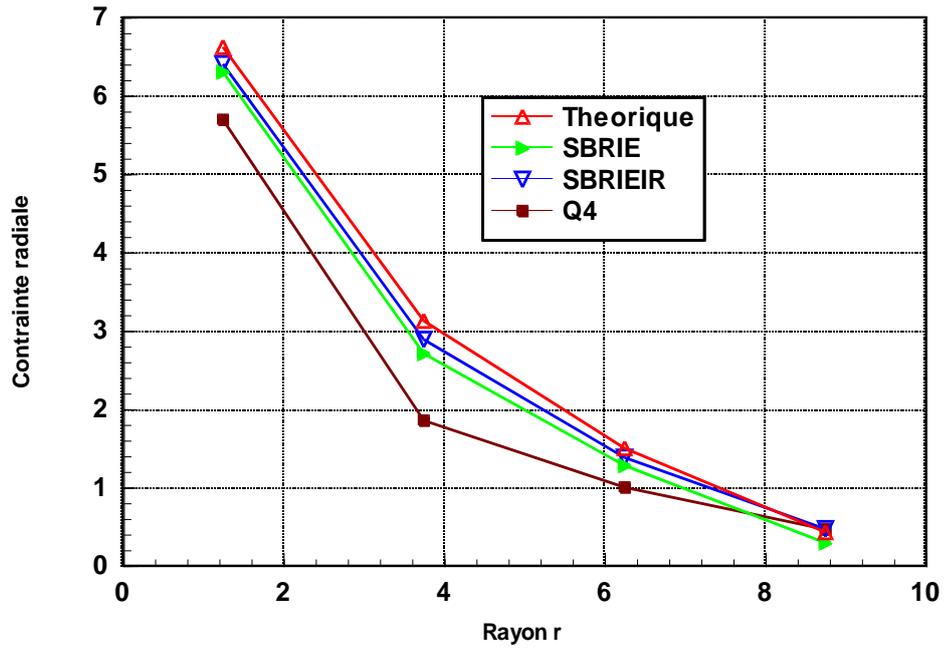


Figure 4.15: Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge ponctuelle P avec un maillage 2x4 (contrainte radiale σ_r calculée au centre des éléments)

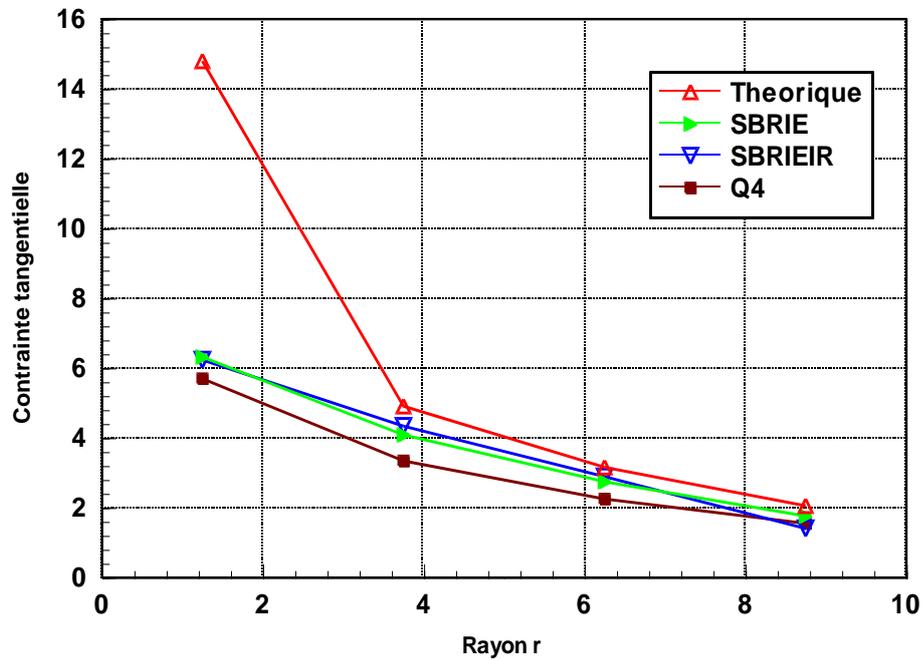


Figure 4.16: Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge concentrée P avec un maillage 2x4 (contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ calculée au centre des éléments)

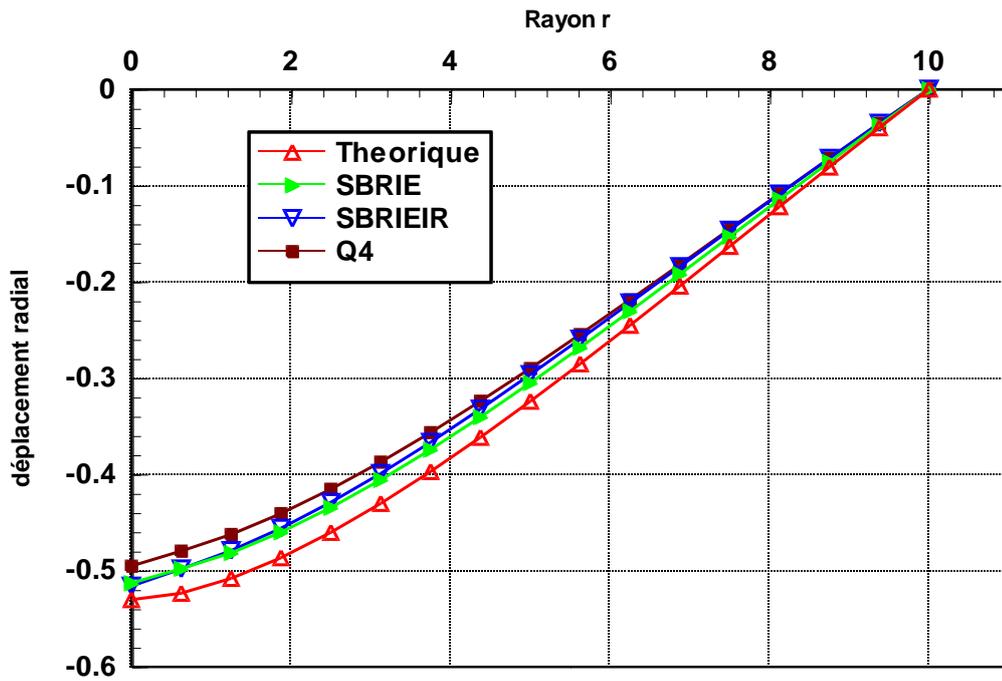


Figure 4.17: Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge concentrée P avec un maillage 2x16 (déplacement radial u_r)

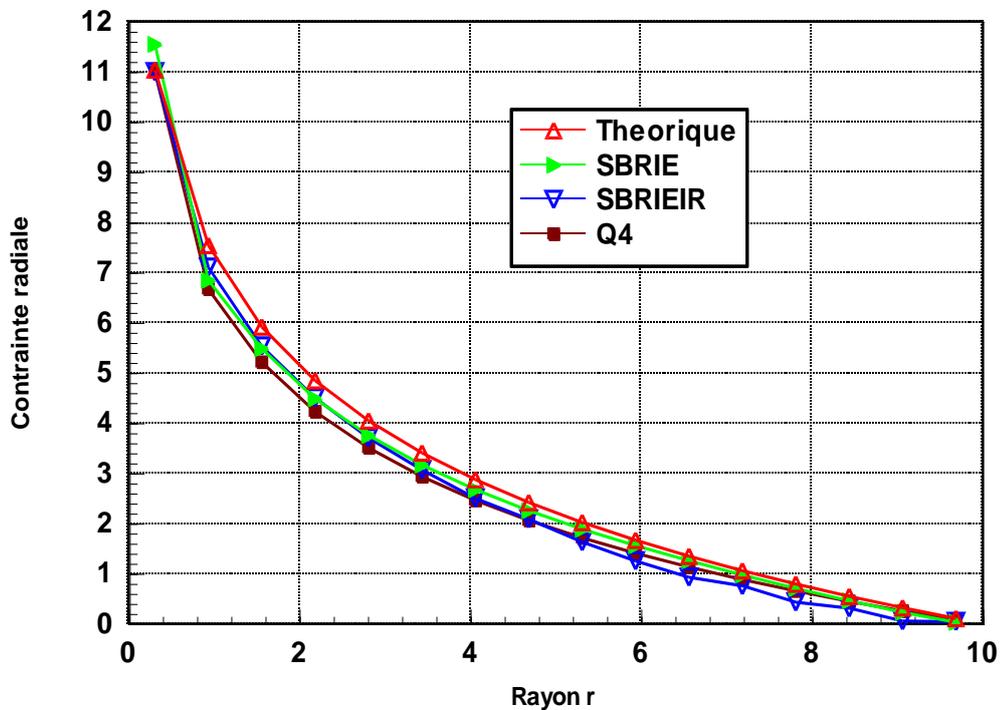


Figure 4.18: Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge concentrée P avec un maillage 2x16 (contrainte radiale σ_{rr} calculée au centre des éléments)

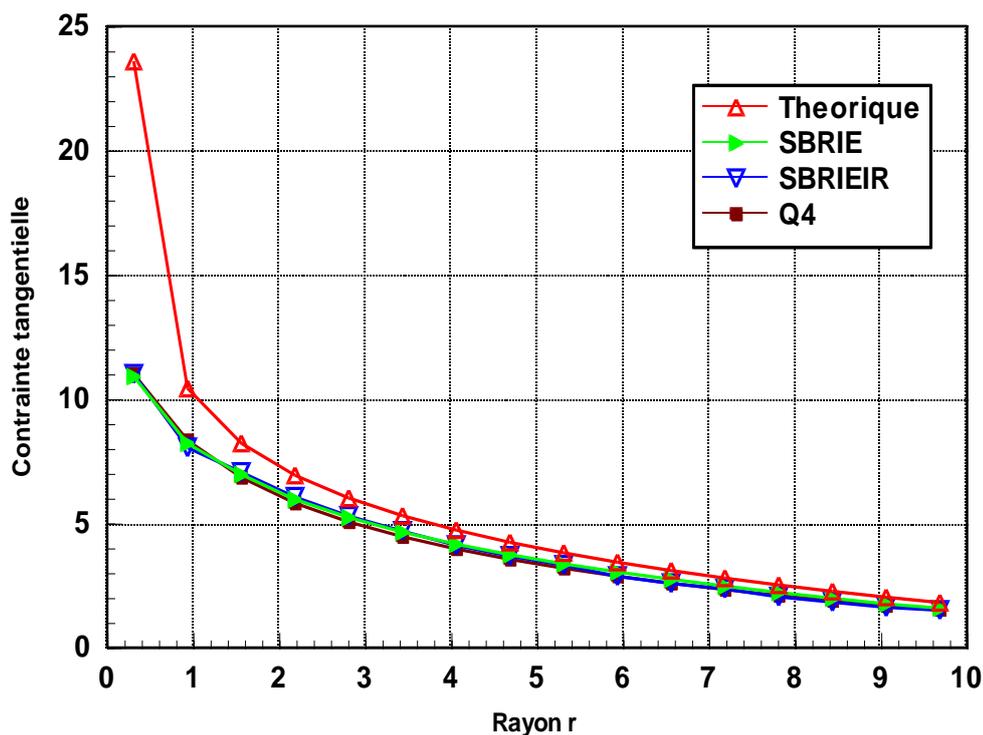


Figure 4.19: Plaque circulaire mince en appui simple soumise à une charge concentrée P au centre de la plaque avec un maillage 2x16 (contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ calculée au centre des éléments)

Les résultats représentés sur les figures (4.14-19) montrent que pour le déplacement radial les éléments à champ de déformation donnent de meilleurs résultats même pour un maillage grossier, l'élément SBRIEIR donne presque la solution théorique. L'élément Q4 pour un maillage grossier est loin de la solution analytique. Il est infecté par un léger blocage de cisaillement résultant de sa surrigidité. Lorsqu'on raffine le maillage ses résultats s'améliorent mais les éléments à champ de déformation donnent de meilleurs résultats.

Pour les contraintes radiales avec un maillage grossier, les éléments à champ de déformation donnent presque la solution théorique, contrairement à l'élément Q4 qui donne de mauvais résultats par rapport à la solution théorique.

Pour les contraintes tangentielles les résultats montrent que les éléments à champ de déformation donnent des résultats acceptables uniquement pour des rayons supérieurs à 6.5, l'élément Q4 reste loin de la solution. Lorsqu'on raffine le maillage, la distribution de la contrainte près du centre est sensiblement améliorée pour un rayon supérieur à 2.

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons formulé les éléments membranaires à champ de déformation SBRIE et SBRIEIR en axisymetrie, la matrice de rigidité est calculée analytiquement et numériquement. Les cas tests proposés pour valider ces éléments à champ de déformation en les comparants avec l'élément Q4 et la solution théorique ont montré que les éléments à champ de déformation donnent presque la solution théorique même pour un maillage grossier, ainsi que pour l'élément Q4 dans le cas où la flexion est non dominante.

Par contre, dans le cas où la structure présente des sollicitations de flexion, les éléments à modèle en déformation sont meilleurs et donnent de bons résultats surtout en termes de déplacements radiaux et contraintes radiales. Pour les contraintes tangentielles les résultats s'améliorent lorsqu'on raffine le maillage pour des rayons proches du centre.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Au cours de ce travail nous avons présenté deux éléments tridimensionnels dédiés à l'étude des structures minces et épaisses de types plaques qui s'appuient sur l'approche en déformation. L'intégration numérique est utilisée pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire au lieu de l'intégration analytique utilisée auparavant dans cette approche, après satisfaction des conditions de compatibilité pour l'élément SBB et en plus les équations d'équilibre pour l'élément SBBE. Ces éléments ne sont formulés qu'avec des degrés de liberté de déplacements. Les relations de comportement utilisées sont les relations matricielles classiques, la loi de comportement est modifiée de façon à prendre en compte l'hypothèse de contrainte plane. En effet, les résultats numériques obtenus en utilisant ces éléments sont en bon accord avec les résultats analytiques, et montrent qu'ils sont libres de tout blocage en cisaillement transverse lorsqu'on modélise les plaques minces et convergent vers les solutions de Kirchhoff, contrairement à l'élément d'élasticité 3D basé sur l'approche en déplacement DBB8. Ces éléments ont un taux de convergence assez rapide vers les solutions de référence pour les tests examinés. On a constaté que l'élément développé SBB se comporte mieux que l'élément SBH8 et surtout pour le cas des plaques minces et très minces.

Plusieurs tests sont utilisés pour vérifier l'effet de la distorsion sur les éléments développés ainsi que leur sensibilité à la variation de l'élanement (rapport de longueur/épaisseur) et du coefficient de Poisson. Les résultats ont montré de bonnes performances et de bonnes précisions.

Pour l'analyse élasto-plastique des tests réputés sévères sont examinés avec l'élément SBBE. Les résultats obtenus confirment sa bonne performance dans cette analyse.

La prise en compte du cisaillement transverse améliore considérablement la vitesse de convergence de ces éléments tridimensionnels, pour le calcul des plaques en flexion. Malgré leur nombre de degrés de liberté élevé, ces derniers présentent beaucoup d'avantages:

- une formulation plus rapide des matrices de rigidité,
- prendre en compte facilement des variations d'épaisseur de plaque
- être raccordés sans modifications à des structures tridimensionnelles.

La qualité principale de ces éléments, outre son aspect volumique, est qu'elle s'appuie uniquement sur des degrés de liberté de translation. Aucun degré de liberté de rotation n'étant introduit.

Finalement, on a formulé et examiné deux éléments membranaires basés sur l'approche en déformation dans le cas des structures axisymétriques. Les éléments formulés et testés sont les éléments de Sabir (SBRIE, SBRIEIR) dont le premier est un élément rectangulaire avec deux degrés de liberté par nœud, par contre le deuxième est un élément rectangulaire qui admet une rotation dans le plan comme degré de liberté additionnel (deux translations et une rotation autour de l'axe z). Les deux méthodes d'intégration (analytique et numérique) sont utilisées pour l'obtention de la matrice de rigidité. Les résultats ont montré que les éléments à champ de déformation donnent de bons résultats et surtout lorsque la flexion est dominante.

En conclusion, nous pouvons dire que les nombreuses applications numériques étudiées prouvent la validité et l'efficacité de l'approche en déformation. Les résultats des éléments basés sur l'approche en déformation sont forts encourageants et permettent d'augurer sur les possibilités réelles d'élargir cette technique à l'étude dynamique ainsi que la non linéarité géométrique des plaques et des coques.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [Ait.84] Ait-Ali L. Développement d'éléments finis de coque pour le calcul des ouvrages d'art, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Des Ponts Chaussées Paris Tech 1984.
- [Ash.71a] Ashwell D.G, Sabir A.B. Limitation of certain curved finite elements applied to arches. *IJMS* 13, 133-139 (1971)
- [Ash.71b] Ashwell D.G, Sabir A.B, Roberts T.M. Further studies in application of curved finite elements to circular arches. *International Journal of Mechanics Science* 13, 507-17 (1971).
- [Ash.72] Ashwell D.G, Sabir A.B. A new cylindrical shell finite element based on simple indépendant strain functions. *IJMS* 14, 171-183 (1972).
- [Ass.84] Assan A.E. Reservatorios com parede ondulada- um enfoque pelo método dos elementos finitos. Doctoral Dissertation, Sao Carlos, SP (Brasil): Escola de Engenharia de Sao Carlos (1984).
- [Ass.99] Assan A.E. Analysis of multiple cylindrical stiffened barrel shell structures by strain based finite element. *Thin-Walled Structures* 35, 233-253 (1999).
- [Aya.95] Ayad R, Batoz J.L, Dhatt G. Un élément quadrilatéral de plaque basé sur une formulation mixte-hybride avec projection en cisaillement, *Revue Européenne des Eléments Finis* 4 (4) (1995) 415-440.
- [Bas.00a] Bassayya K, Shrinivasa U. A 14-node brick element, PN5X1, for plates and shells, *Computers & Structures* 74 (2) (2000) 176 -178.
- [Bas.00b] Bassayya K, Bahattacharya K, Shrinivasa U. Eight–Node brick, PN340, represents constant stress fields exactly, *Computers & Structures* 74 (4) (2000) 441-460.
- [Bat.85] Bathe K.J, Dvorkin E.H. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate bending theory and mixed interpolation,” *IJNME*, 21, 367-383, (1985).
- [Don.87] Donea J, Lamain L. G. A Modified Representation of Transverse Shear in C° Quadrilateral Plate Elements, *CMAME*, 63, (1987), 183-207.
- [Bela.98] Belarbi M.T, Charif A. Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation Dans le plan, *Revue Européenne des Eléments Finis* 7 (4) (1998) 439-458.
- [Bela.99] Belarbi M.T, Charif A. Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, *Revue Européenne des Eléments Finis* 8 (2) (1999) 135-157.
- [Bela.97] Belarbi M.T, Charif A. Analyse des plaques relativement épaisses à l'aide d'un élément cubique simple basé sur le modèle en déformation. 1^{er} Congrès arabe de la mécanique. Damas (Syrie) 1-3 Juin 2, 25-30 (1997).

- [Bela.05a] Belarbi M.T, Bourezane M. On improved Sabir triangular element with drilling rotation. *Revue européenne de Génie Civil*. 9, 1151-1175 (2005).
- [Bela.05b] Belarbi M.T, Maalam T. On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne des Eléments Finis* 40, 985-997 (2005).
- [Belo.05] Belouar L, Guenfoud M. A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin-Walled Structures* 43 (1) (2005) 47-63.
- [Bul.84] Bull J.W. The Strain approach to the development of thin cylindrical shell finite element, *Thin-Walled Structures* 2 (3) (1984) 195-205.
- [Cha.82] Charchafchi T.A. Curved rectangular and general quadrilateral shell elements for cylindrical shells. In: Whitman J, editor. *Mathematical of Finite Elements and Applications IV*. London: Academic Press, 231-239 (1982).
- [Cha.90] Charhabi A. Calcul des plaques minces et épaisses à l'aide des éléments finis tridimensionnels, *Annales de l'ITBTP n° 486*, septembre 1990.
- [Che.04] Chen Y.I, Wu G.Y. A mixed 8-node hexahedral element based on the Hu-Washizu principle and the field extrapolation technique, *Structural Engineering and Mechanics* 17 (1) (2004) 113-140.
- [Cou.80] Courbon J. *Plques Minces Elastiques*, Editions Eyrolles.1980
- [De.90] De Rosa M.A, Franciosi C. Plate bending analysis by the cell method: numerical comparisons with finite element methods, *Computers & Structures* 37 (5) (1990) 731-735.
- [Djo.85] Djoudi M.S. A Sector Finite Element for Plane Elasticity with In-Plane Rotation, M. Sc. Thesis, University of Wales, U.K, 1985.
- [Djo.03] Djoudi M.S, Bahai H. A shallow shell finite element for the linear and non-linear analysis of cylindrical shells, *Engineering Structures* 25 (6)(2003)769-778.
- [Djo.04] Djoudi M. S, Bahai H. Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with opening, *Thin-Walled structures* 42 (4) (2004) 575–588.
- [Don.87] Donea J, Lamain L.G. A Modified Representation of Transverse Shear in C^0 Quadrilateral Plate Elements, *CMAME*, 63, (1987), 183-207.
- [Fre.07] Fredriksson M, Ottosen N.S. Accurate eight-node hexahedral element, *International Journal for Numerical Methods and Engineering* 72 (6) (2007) 631–657.

- [Gal.76] Gallagher R.H. Introduction aux éléments finis, Edition Pluralis, 1976.
- [Ham.10] Hamadi D, Maalem T. Presentation of an Efficient Parallelepiped Finite Element Based on the Strain Approach "SBP8C" Proceedings of the World Congress on Engineering 2010 Vol III WCE 2010, June 30 - July 2, 2010, London, U.K.
- [Hin.91] Hinton E, Ozakca M, Rao N.V.R. Adaptive analysis of thin shells using facet elements,".IJNME, 32, p.1283-1301. (1991).
- [Him.11] Himeur M, Guenfoud M. Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach, European Journal of Computational Mechanics 20 (7-8) (2011) 455-485.
- [Imb.84] Imbert J.F. Analyse des structures par éléments finis. Cepadues Editions .1984.
- [Jir.95] Jirousek J, Wroblewski A, Qin Q, He X. A family of quadrilateral hybrid – Trefftz p-elements for thick plate analysis, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering 127 (1-4) (1995) 315-344.
- [Lar.90] Lardeur P. Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transverse" ctorat, UTC, 1990.
- [Lem.00] Lemosse D. Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces, Thèse de doctorat, Ecole Doctorale SPMI/INSA-Rouen, 2000.
- [Li.08] Li H.G, Cen S, Cen Z.Z. Hexahedral volume coordinate method (HVCM) and improvements on 3D Wilson hexahedral element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 197 (51-52) (2008) 4531-4548.
- [Lo.00] Lo S.H, Ling C. Improvement on the 10-node tetrahedral element for three-dimensional problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 189 (3) (2000) 961-974.
- [Mac.85] Mac Neal R.H, Harder R.L. A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy, Finite Element in Analysis and Design 1 (1) (1985) 3-20.
- [Min.51] Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, Journal of Applied Mechanics 18 (1951) 31–38.
- [Mou.94] Mousa A. I, Sabir A. B. Finite Element Analysis of Fluted Conical Shell Roof Structures, Civil-Comp-Ltd, Edinburgh, Scotland, Computational Structural Engineering for Practice, pp. 173-181, 1994.
- [Mou.01] Mousa A. I. Finite Element Analysis of Rectangular-Plan Cylindrical Croined Vault, Al Azhar University Engineering Journal, AUEJ, Vol. 2, Egypt, 2001.

- [Nor.89] Nor A, Burton W.S. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates, ASME, Applied Mechanics Review, Vol. 42,N°1, p. 1-13(1989)
- [Ooi.04] Ooi E.T, Rajendran S, Yeo J.H. A 20-node hexahedron element with enhanced distortion tolerance, International Journal for Numerical Methods in Engineering 60 (15) (2004) 2501–2530.
- [Pug.78] Pugh E.D.L, Hinton E, Zienkiewicz O.C. A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration, IJNME, 12, p.1059-1079,(1978).
- [Reb.13] Rebiai C, Belounar L. A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis, archives of civil and mechanical engineering 13 (2013) 72–81.
- [Reb.14] Rebiai C, Belounar L. An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach, Measurement 50 (2014) 263–269
- [Riv.69] Rivello R.M. Theory and Analysis of Flight Structures, McGraw-Hill. 1969
- [Rei.45] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, Journal of Applied Mechanics ASME 12 (1945) 69-77.
- [Rob.86] Robinson J. New FEM user project – single element test for aspect ratio sensitivity for solids (Part I). Finite Element News 1986; 1:26-32.
- [Sab.71] Sabir A.B, Ashwell D.G. A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems. Journal of Sound and Vibration, Volume 18, Issue 4, 22 October 1971, Pages 555-563 766-775(1972).
- [Sab.72] Sabir A.B, Lock A.C. Curved Cylindrical Shell Finite element, International Journal of Mechanical Sciences, 14 (2) (1972) 125–135.
- [Sab.73] Sabir A.B, Lock AC. Large deflection geometrically nonlinear finite elements analysis of circular arches. International Journal of Mechanical Sciences 15, 37-47 (1973).
- [Sab.75] Sabir A.B. Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions. The mathematics of finite elements and applications II. Editor J.R.Whiteemen, Chapter 34, 411-421 Academic Press (1975).
- [Sab.78] Sabir A.B, Ashwell D.G. Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells, the mathematics of finite elements and application III, Editor .R.Whiteemen, Academic Press (1978).
- [Sab.79] Sabir A.B, Ashwell, D.G. Diffusion of Concentrated Loads into Thin Cylindrical Shells, The Math of Finite Element and Applications II, Academic Press, 33, pp. 379-389, 1979.
- [Sab.82] Sabir A.B, Charchafchi T.A. Curved rectangular and quadrilateral shell element for cylindrical shell. The mathematics of finite elements and application IV Editor. JR.Whiteeman 231- 239 (1982).

- [**Sab.83**] Sabir A.B. Strain based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders. Nuclear engineering and design. 76, 111-120 (1983).
- [**Sab.83a**] Sabir A.B. A new class of finite elements for plane elasticity problems, CAFEM 7th, international Conf, structures. Mechanics. In reactor Technology Chicago (1983).
- [**Sab.83b**] Sabir A.B, Chow F.Y. Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes. International conference on instability and plastic collapse of steel structures. Manchester University (1983).
- [**Sab.85**] Sabir A.B, Ramadhani F. A shallow shell finite element for general shell analysis, Variational Methods in Engineering Proceeding of the 2nd International Conference, University of Southampton England (1985).
- [**Sab.85a**] Sabir A.B. A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, Chap 9 in Proceeding of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering. Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, 17-25 (1985).
- [**Sab.87**] Sabir A.B. Strain Based Shallow Spherical Shell Element, Proc. Of Int. Conf. on the Mathematics of Finite Elements and Applications, Brunel University, 1987.
- [**Sab.88**] Sabir A.B, El-Erris H.F. A New Conical Shell Finite Element Computational Mechanics m, 88, pp 613-616, 1988
- [**Sab.95**] Sabir A.B, Sfeidji A. Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. Thin-Walled Structures 21, 225-232 (1995).
- [**Sab.97**] Sabir A.B, Moussa A.I. Analysis of fluted conical shell roofs using the finite element method, Computers & Structures 64 (1-4) (1997) 239-251.
- [**Smi.88**] Smith I.M, Griffith D.V. Programming the Finite Element Method, second ed., John Wiley & Sons, UK, (1988).
- [**Smi.04**] Smith I.M, Griffith D.V. Programming the Finite Element Method, 4th ed, John Wiley & Sons, Ltd, UK, (2004).
- [**Sze.01**] Sze K.Y, Chan W.K. A six-node pentagonal assumed natural strain solid-shell element, Finite Elements in Analysis and Design 37 (8) (2001) 639-655.
- [**Tay.76**] Taylor R.L, Beresford P.J, Wilson E.L. A non-conforming element for stress analysis," IJNME, 10, p.1211-1219, (1976).
- [**Tim.51**] Timoshenko S. and Goodier J. N. Theory of Elasticity, McGraw-Hill. 2nd ed 1951

- [Tim.59] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells, London, McGraw-Hill, 1959.
- [Trin.09] Trinh V.D. Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous intégrés Stabilisés utilisables pour des problèmes a cinématique et comportement non linéaires, Thèse de doctorat, Ecole Doctorale, ENSAM-Paris, 2009.
- [Trin.11] Trinh V.D, Abed-Meraim F, Combescure A. Assumed strain solid-shell formulation "SHB6" for the six-node prismatic, Journal of Mechanical Science and Technology 25 (9) (2011) 2345-2364.
- [Ven.96] Venkatesh D.N, Shrinivasa U. Plate bending with hexahedral with PN elements, Computers & Structures 60 (4) (1996) 635-641.
- [Wem.68] Wempner G.A, Oden J.T, Kross D.A. Finite element analysis of thin shells, Engng.Mech.Div, Proc.ASCE, Vol. 94, EM6, p. 1273-1294 (1968)
- [Yua.88] Yuan F, Miller R.E. A rectangular finite element for moderately thick flat plates, Computers & Structures 30 (6) (1988) 1375-1387.
- [Zie.77] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. The finite element method, third edition, McGraw-Hill, 1977.
- [Zie.89] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. The finite element method, McGraw-Hill vol, 1, (1989), vol, 2, (1991).
- [Zie.00] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. The finite element method, Butterworth-Heinemann, vol, 2, (2000) 5th Ed.

ANNEXES

Annexe B

Les déplacements nodaux sont donnés en termes de constantes $\alpha_1 \dots \alpha_{24}$ en tant que

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ , \\ , \\ U_8 \\ V_8 \\ W_8 \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ , \\ , \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{24} \end{bmatrix}$$

La matrice $[C]$ (24 x 24) pour l'élément SBBE est:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \\ [C_4] \\ [C_5] \\ [C_6] \\ [C_7] \\ [C_8] \end{bmatrix}$$

Où:

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y_i & 0 & z_i & x_i & x_i y_i & x_i z_i & x_i y_i z_i & 0 & -0.5(\nu x_i^2 + y_i^2) & 0 & -0.5(\nu x_i^2 z_i + y_i^2 z_i) & 0 & -0.5z_i^2 & 0 & -0.5y_i z_i^2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_i & -z_i & 0 & 0 & -0.5(\nu y_i^2 + x_i^2) & 0 & -0.5(\nu y_i^2 z_i + x_i^2 z_i) & y_i & x_i y_i & y_i z_i & x_i y_i z_i & 0 & 0 & -0.5z_i^2 & -0.5x_i z_i^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_i & -x_i & 0 & 0 & -0.5x_i^2 & -(0.5x_i^2 y_i - \frac{1}{6}\nu y_i^3) & 0 & 0 & -0.5y_i^2 & -(0.5x_i y_i^2 - \frac{1}{6}\nu x_i^3) & z_i & x_i z_i & y_i z_i & x_i y_i z_i \\ 0.5y_i & 0.5y_i z_i & 0 & -0.5y_i z_i & 0.5z_i & 0.5y_i z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5x_i & 0.5x_i z_i & 0.5z_i & 0.5x_i z_i & 0 & -0.5x_i z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5x_i y_i & 0.5y_i & 0.5x_i y_i & 0.5x_i & 0.5x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et x_i , y_i et z_i sont les coordonnées des huit nœuds i ($i = 1, 8$).

La matrice de déformation $[Q(x, y, z)]$ de l'élément SBBE est:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & z & yz & 0 & -\nu x & 0 & -\nu xz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu y & 0 & -\nu yz & 1 & x & z & xz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z^2 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 \end{bmatrix}$$

Annexe c

Pour l'obtention de la matrice de rigidité élémentaire un programme en fortran à été élaboré dont l'organigramme est le suivant :

