الجمهوريـــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences

Option : Analyse Fonctionnelle

Par:

AMAR BOUGOUTAIA

Quelques idéaux des opérateurs linéaires et non-linéaires et leurs applications

Soutenue publiquement le:10 **/10 /2019**. devant le jury composé de:

Zouhir MOKHTARI	Prof.	U.M.K Biskra	Président
Amar BELACEL	MCA	U.A.T Laghouat	Directeur de la thèse
Abdelmoumen TIAIBA	MCA	U.M.B M'sila	Examinateur
Elhadj DAHIA	MCA	E.N.S. Boussaâda	Examinateur
Yahia DJEBRANE	Prof.	U.M.K Biskra	Examinateur

Année Universitaire : 2019 / 2020

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon directeur de thèse **Amar BELACEL**, Maître de conférences à l'université de Laghouat, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi. J'avais un grand plaisir de travailler avec lui.

Je tiens dans un premier temps à remercier le Professeur Zouhir MOKHTARI d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Mes remerciements vont aussi au Docteur Abdelmoumen TIAIBA, au Docteur Elhadj DAHIA et au Professeur Yahia DJEBRANE d'avoir accepté l'évaluation de ma thèse.

Je voudrais aussi remercier ma chère mère, qui a toujours été là avec sa propre attention, ainsi que tous mes frères, je dédie ce travail à l'esprit de mon cher père

Merci à mes amis qui ont toujours existé pour moi. Leur soutien et leurs encouragements illimités étaient d'excellents auxiliaires.

En particulier, je voudrais remercier les membres du laboratoire "LMPA" de l'Université de Laghouat.

Enfin, à tous ceux que je n'ai pas pu citer et qui m'ont aidé de prés ou de loin dans l'élaboration de ce travail, je les adresse mes remerciements les plus vifs.

Résumé:

Cette thèse traite les opérateurs multilinéaires, qui concerne les opérateurs positifs et les espaces de Banach réticulé, nous avons étudié deux points importants. Dans le premier point, nous introduisons et étudions la notion les opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement p-sommants. Parmi les résultats de cette recherche, nous avons donné la relation entre ces opérateurs et les opérateurs positivement p-sommants, en plus de cela nous avons prouvé un nouveau type du théorème de Pietsch, théorèmes de domination. Le deuxième point, que nous avons fait, était d'introduire et étudier la notion des opérateurs multilinéaires positifs Cohen p-nucléaires. Nous avons prouvé un analogue naturel du théorème de domination de Pietsch pour cette classe, en caractérisant leurs conjugués, et présentant le théorème de la factorisation de Kwapień. Et enfin nous avons établi des relations entre certaines classes d'opérateurs multilinéaires.

Mots clés et phrases :

Banach réticulé - Produit tensoriel - Opérateur multilinéaire - Opérateur positif - Opérateur positivement p-sommant - Opérateur positif fortement p-sommant - Opérateur multilinéaire Cohen p-nucléaire - Théorème de Pietsch – Théorème de factorisation de Kwapień.

الملخص:

هذه الأطروحة تعالج التطبيقات متعددة الخطية والتي ترتكز على التطبيقات الخطية الموجبة والفضاءات البناخية الشبكية. فقد قمنا بدراسة نقطتين جد مهمتين. في النقطة الأولى قمنا بإعطاء ودراسة مفهوم التطبيقات متعددة الخطية الموجبة كوهين بقوة p- جمعية ودرسنا العلاقة التي تربط هذه التطبيقات مع التطبيقات p- جمعية وكذلك أثبتنا نوع جديد لنظرية الهيمنة لبيتش. أما النقطة الثانية التي قمنا بها هي إدخال ودراسة مفهوم التطبيقات متعددة الخطية الموجبة p- نووية وبرهنا نظرية الهيمنة لبيتش الخاصة بهذه التطبيقات كما قمنا بتعيين المرافق لها و أعطينا بالإثبات نظرية التفكيك لكويين. وفي الأخير درسنا بعض العلاقات التي تربط هذه التطبيقات مع تطبيقات مدروسة من قبل.

الكلمات والجمل المفتاحية :

بناخ شبكي – جداء موتري – تطبيقات متعددة الخطية –تطبيق موجب- تطبيق خطي موجب p- جمعي – تطبيق خطي بقوة p- جمعي – التطبيقات متعددة الخطية كوهين p- نووية – نظرية الهيمنة لبيتش – نظرية التفكيك لكويين.

Abstract

This thesis deals with multilinear operators, which concerns positive operators and Banach lattice spaces, we have studied two important points. In the first point, we introduce and study the notion of Cohen positive strongly p-summing multilinear operators. Among the results of this research, we gave the relation between these operators and the positive p-summing operators; in addition to this we proved a new type of Pietsch's Domination Theorems. The second point, we made, was to introduce and study the notion of positive Cohen p-nuclear multilinear operators. We proved a natural analogue of Pietsch's domination theorem for this class and we have characterized their conjugates; we presented the theorem of Kwapień factorization. In the end we established relations between certain classes of multilinear operators.

Key words and phrases:

Banach lattice - Tensor norm - Multilinear operator - Positive operator - Positive p-summing operator – Positive strongly p-summing - Cohen positive strongly p-summing multilinear operators - Pietsch domination theorem - Kwapień's factorization theorem.

Table des matières

0.1 Notation

u^* :	Adjoint d'un opérateur linéaire continue u
p^* :	L'exposant conjugué de p $\left(\text{i.e., } \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1\right)$
B_X :	Boule unité fermée de l'espace X
X^* :	Le dual topologique de X
$\mathbb{K}$:	Corps des scalaires réels ou complexes
$\sigma(X, X^*)$:	Topologie faible définie sur X
$\sigma(X^*, X)$:	Topologie $*$-faible définie sur X^*
E^+ :	Le cône positif de E
$\mathcal{L}^+(E, F)$:	Ensemble des opérateurs positifs de E dans F
$\mathcal{L}^r(E, F)$:	Ensemble des opérateurs réguliers de E dans F
$C(K)$:	Ensemble des fonctions réelles continues sur l'espace compact K
$\mathcal{M}(K)$:	Ensemble des mesures régulières de Borel sur K
$\Pi_p(X, Y)$:	Ensemble des opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y
$\mathcal{D}_p(X, Y)$:	Ensemble des opérateurs linéaires fortement p-sommants de X dans Y
$\mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; Y)$:	Ensemble des opérateurs m-linéaires positifs Cohen fortement p-sommants
$\mathcal{C}_p^{vex,\ mult}(X_1, ..., X_m; F)$:	Ensemble des opérateurs m-linéaires multiples p-convexes
$\widehat{E}$:	La complétion du produit tensoriel projectif positif de $E_1, ..., E_m$
$\mathcal{N}_p^m(X_1 \times \cdots \times X_m; Y)$:	Ensemble des opérateurs m-linéaires Cohen p-nucléaires
$\Lambda_p^{mult}(E_1, ..., E_m; Y)$:	Ensemble des opérateurs multilinéaire positifs multiple p-sommants
$\mathcal{N}_p^{m+}(E_1 \times \cdots \times E_m; F)$:	Ensemble des opérateurs m-linéaires positifs Cohen p-nucléaires

0.2 Introduction

Plusieurs chercheurs en Mathématiques ont investi à la théorie des opérateurs p-sommants [5, 13, 19, 34, 35, ...], ils font des travaux sur les opérateurs linéaires p-sommants. Où cette théorie a été étudiée en premier lieu par Grothendieck pour $p = 1$ dans son mémoire 1955. Pietcsh en 1967, il est défini la classe des opérateurs absolument p-sommants Π_p $(p \geq 1)$ et est montré quelques propriétés intéressantes, parmi les principaux résultats parûs dans [34], on peut trouver les théorèmes des dominations et factorisations, d'inclusions, les propriétés des compositions et les relations avec les autres classes d'opérateurs linéaires. Aussi, Pietsch a montré que l'identité de ℓ_1 dans ℓ_2 est 2-sommant, mais son adjoint ne l'est pas. Pour cela, la classe d'opérateurs fortement p-sommants $\mathcal{D}_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ a été introduite par Cohen [19] comme une caractérisation des conjugués des opérateurs p^*-sommants, puis il a défini la classe des opérateurs linéaires Cohen p-nucléaires $\mathcal{N}_p = \mathcal{D}_p \circ \Pi_p$.

La première étude sur les opérateurs multilinéaires est apparue dans [33] est développée par plusieurs auteurs tels que, Alencar et Matos [4], Melendez et Tonge [29], et Schneider [39]. Il y a plusieurs notions concernent la sommabilité qui ont été généralisées aux opérateurs multilinéaires, telles que les concepts de p-sommant et fortement p-sommant voir [9, 16, 28, ...]). Dont la généralisation des opérateurs p-sommants connue trois formes où la première ne vérifie pas le théorème de domination de Pietsch et la deuxième donne un espace de Banach sous des conditions, et la troisième, de Dimant, satisfait les deux propriétés indiquées précédemment. Le dernier concept a été introduit par Achour et Mezrag [2]. Il vérifie le théorème de domination de Pietsch et l'espace associé est de Banach.

Le point de départ de la thèse était l'étude des opérateurs m-linéaires Cohen fortements p-sommants introduits par Achour et Mezrag en 2007, comme généralisation des opérateurs linéaires fortements p-sommants. Le travail, sur lequel cette thèse est basée, est le travail effectué par A. Belacel avec la collaboration de D. Achour dans [1], où nous avons étudié les opérateurs positifs fortement p-sommants ce qui étroitement liés aux opérateurs fortement (p,q)-sommants définis par Apiola [5], nous avons également prouvé la version positive du théorème de domination-factorisation de Pietsch pour ces opérateurs. Le deuxième point de cette thèse concerne la généralisation de la définition et les résultats trouvés dans le travail réalisé par Achour et Alouani [3] à la situation positive, où ils ont étudié les opérateurs m-linéaires Cohen $p-$nucléaires.

Ce travail est divisé en quatre chapitres qui sont les suivants :

Dans le **premier** chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base utilisées dans cette thèse et les résultats élémentaires, à savoir les définitions importantes et les théorèmes fondamentaux. Nous y introduisons des espaces de Banach classiques et des espaces de Banach réticulés. Nous présentons également les concepts des opérateurs positifs, opérateurs réguliers et les opérateurs p-convexes (resp. p-concaves). Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous rappellons quelques propriétés des applications non linéaires (multilinéaire) et nous terminons ce chapitre en donnant quelques exemples d'idéaux d'opérateurs linéaires sommants.

Dans le **deuxième** chapitre, on s'intéresse par $\mathcal{D}_q^+(X,F)$ l'ensemble des opérateurs positifs fortement p-sommants introduits par D. Achour et A. Belacel [1] et $\Pi_p^+(E,Y)$ l'ensemble des opérateurs positivement p-sommants introduits par O. Blasco [8], nous rappelons la caractérisation des conjugués d'opérateurs positivement p-sommants. Nous également comparons la notion des opérateurs positivement p-sommants et les opérateurs positifs fortement q-sommants; en généralisant un résultat dû à Bu [13].

Le but du **troisième** chapitre est de donner et d'étudier la notion d'opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants. Nous prouvons un analogue naturel du théorème de domination de Pietsch pour cette classe et caractérisons leurs conjugués. Une de nos contributions consiste à mettre en évidence la relation entre ces opérateurs et les opérateurs positivement $p-$sommants. Comme applications, nous généralisons un résultat dû à Q. Bu et Z. Shi [17], et nous donnons quelques inclusions et sur tout avec la classe des opérateurs $m-$linéaires multiples $p-$convexes. Ces résultats se trouvent dans

[10].

Nous introduisons et étudions, dans le **quatrième,** la notion des opérateurs multilinéaires positifs Cohen p-nucléaires. Nous prouvons un analogue naturel du théorème de domination de Pietsch pour cette classe et caractérisons leurs conjugués. La motivation initiale de notre recherche est de donner une version multilinéaire du théorème de la factorisation de Kwapień : $\mathcal{N}_p^{m+} = \mathcal{D}_p^{m+} \circ \left(\Pi_p^+, ..., \Pi_p^+\right)$. En application, nous étudions une relation entre certaines classes d'opérateurs m-linéaires positifs (Multiple p-sommant et Cohen fortement p-sommant). Pour cela voir prochainement [7].

Liste des Publications :

1$-$ Bougoutaia, A.,Belacel, A.: Cohen positive strongly $p-$summing and $p-$convex multilinear operators. Positivity **23**, $379-395$(2019).

2$-$ Bougoutaia, A.,Belacel, A.: On some mapping properties of positive operators. (**Submitted**)

3$-$ Belacel, A., Bougoutaia, A., Hamdi, H.: Domination and Kwapień's factorization theorems for positive Cohen $p-$nuclear $m-$linear operators. (**Submitted**)

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base utilisées dans notre travail, à savoir les définitions importantes et les théorèmes fondamentaux (voir [12, 38, 40, ...]). Dans la deuxième partie, nous rappellons quelques propriétés des applications non linéaires (multilinéaire, produit tensoriel) et nous terminons ce chapitre en donnant quelques exemples d'idéaux d'opérateurs sommants linéaires.

1.1 Rappels sur les opérateurs linéaires

1.1.1 Opérateurs Continus

Définition 1.1.1. (Continuité des opérateurs linéaires). Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur linéaire u défini de X dans Y est dit continu au point x_0 de X si, on a la propriété suivante:

Pour toute suite (x_n) de X converge vers x_0; la suite $(u(x_n))$ converge vers $u(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u(x_n) = u(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n) = u(x_0).$$

L'opérateur linéaire u est dit continu sur X; s'il est continu en chaque point de l'ensemble X.

On note $L(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y. On écrira $L(X)$ à la place de $L(X,X)$.

On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de X dans Y. On écrira $\mathcal{L}(X)$ à la place de $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, l'ensemble des formes linéaires sur X. Le triplet $(\mathcal{L}(X,Y),+,\times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.2.

1) Un opérateur linéaire $u : X \longrightarrow Y$ est inversible s'il existe un opérateur linéaire noté $u^{-1} : Y \longrightarrow X$ tel que $u^{-1} \circ u = id_X$, et $u \circ u^{-1} = id_Y$, où id_X (id_Y) est un opérateur d'identité sur X (sur Y) .

2) Un opérateur linéaire $u : X \longrightarrow Y$ entre deux espace normés X et Y est un isomorphisme si u est une bijection continue dont l'inverse u^{-1} est également continu. Dans ce cas les espaces X et Y sont isomorphes, de plus si $\|u(x)\| = \|x\|$, pour tout $x \in X$, alors u est un isomorphisme isométrique.

1.1.2 Adjoint d'un opérateur borné

Soit u un opérateur linéaire borné défini d'un espace normé X à valeurs dans un espace normé Y, alors pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, on définit les fonctionnelles linéaires bornées $U \in Y^* = \mathcal{L}(Y,\mathbb{K})$ et $V \in X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ comme suit

$$\begin{array}{cccc} U : & Y & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y & \longmapsto & U(y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} V : & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & V(x) \end{array}$$

L'opérateur noté u^* défini de Y^* dans X^* est dit opérateur adjoint de u si l'on a, pour tous $U \in Y^*$ et $V \in X^*$

$$\begin{array}{cccl} u^* : & Y^* & \longrightarrow & X^* \\ & U & \longmapsto & u^*(U) \text{ tel que } (u^*U)(x) = U(u(x)) = V(x), \end{array}$$

De sorte que $\|u^*\| = \|u\|$.

1.2 Topologie faible et $*$-faible

Soit X un espace de Banach, La boule unité de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X, l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f(x)| .$$

Les éléments de X^* seront le plus généralement notés par x^*.

On note par X^{**} le bidual de X^* $(X^{**} = (X^*)^*)$. Soit $x \in X$ l'application $x^* \longrightarrow \langle x^*, x\rangle$ de X^* dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur X^*, donc un élément de X^{**}, on désignera souvent $\langle x^*, x\rangle$ au lieu de $x^*(x)$.

La topologie faible $\sigma(X, X^*)$

La topologie faible sur X est la topologie la plus faible sur X rendant continues toutes les applications $\varphi \in X^*$. On la note $\sigma(X, X^*)$.

La topologie $*$-faible $\sigma(X^*, X)$

Pour chaque $x \in X$, on considère l'application $\varphi_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_x(f) = \langle f, x\rangle \text{ avec } f \in X^*.$$

La topologie $*$-faible sur X^* est la topologie la plus faible sur X^* qui rend continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in X}$. On la note $\sigma(X^*, X)$.

On définit sur X^* trois topologies : la topologie forte, la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$ et la topologie $*$-faible $\sigma(X^*, X)$.

Notons que chaque φ_x est continue comme forme linéaire sur X^* (avec la topologie forte) et donc $\varphi_x \in X^{**}$. Ainsi φ_x est continue pour la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$ et par définition de la topologie $*$-faible, on obtient que la topologie $*$-faible est plus faible que la topologie faible qui elle-même est plus faible que la topologie forte.

L'importance de la topologie $*$-faible est sans aucun doute contenue dans le théorème de Alaoglu-Banach-Bourbaki voir [12, Page 43].

Théorème 1.2.1. (Alaoglu-Banach-Bourbaki).

L'ensemble $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie $*$-faible $\sigma(X^*, X)$.

Théorème 1.2.2. (Kakutani).

Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si $B_X = \{\varphi \in X : \|\varphi\| < 1\}$ est compact pour la topologie $\sigma(X, X^*)$.

1.3 Espaces de Banach réticulés

Définition 1.3.1. Soit E un ensemble non vide, un ordre sur E est une relation binaire notée ici par " $\leq$ ", qui est réflexive, antisymétrique et transitive c'est-à-dire

1. $x \leq x$, $\forall x \in E$.
2. $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$, $x, y \in E$.
3. $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$, $x, y, z \in E$.

La borne supérieure d'un ensemble à deux éléments est notée par $x \vee y$ ou $\sup\{x, y\}$ et la borne inférieure d'un ensemble à deux éléments est notée par $x \wedge y$ ou $\inf\{x, y\}$.

Définition 1.3.2. On dit que E est réticulé (resp. complètement réticulé) si toute paire d'éléments $\{x, y\}$ possède sup et inf (resp. $\forall A \subset E \Longrightarrow \sup A \in E$ avec $A \neq \varnothing$)

Définition 1.3.3. Un espace vectoriel ordonné est un espace vectoriel équipé d'un ordre qui est compatible avec la structure vectorielle dans le sens suivant.

$i)$ $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, $\forall x, y, z \in E$.

$ii)$ $x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$, $\forall x \in E$ et $0 \leq \alpha$.

Soit E un espace vectoriel ordonné, l'ensemble $E^+ = \{x \in E : 0 \leq x\}$ est appelé cône positif de E, et ses éléments sont appelés positifs. Pour tout $x \in E$, la partie positive de x est $x^+ = x \vee 0$, et la partie négative est $x^- = x \wedge 0$, donc le module de x est $|x| = x^+ \vee x^-$. Deux éléments $x, y \in E$, avec $x \neq y$, sont appelés orthogonaux (on écrit $x \perp y$) si $|x| \wedge |y| = 0$.

Si l'espace vectoriel ordonné est réticulé alors est appelé un espace vectoriel réticulé. Une norme sur un espace vectoriel réticulé E est dite une norme réticulé si,

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|, \text{ avec } x, y \in E. \tag{1.1}$$

Proposition 1.3.4. [38, Proposition 1.4] *Soit E un espace vectoriel réticulé, pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad |\lambda x| = |\lambda|\,|x|,$

$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \qquad |x+y| \leq |x| + |y|, \qquad x^+ \perp x^-$

$x + y = x \vee y + x \wedge y, \qquad |x - y| \leq x \vee y - x \wedge y,$

$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \qquad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z).$

Remarque 1.3.5. Pour tout espace vectoriel réticulé complet E (par rapport à une norme réticulé) est dit un espace de Banach réticulé. La propriété (1.1) donne l'identité importante $\|x\| = \||x|\|$ pour tout $x \in E$.

Example 1.3.6.

1) Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ avec leurs normes euclidiennes sont tous Banach réticulé.

2) Si K est un espace compact, alors l'espace vectoriel ordonné $C(K)$ (l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'espace K) est ordonné par l'ordre défini par $f \leq g$ ($f \leq g$ si et seulement si $f(x) \leq g(x), \forall x \in K$), alors l'espace $C(K)$ est un espace est un espace de Banach réticulé avec $\|f\| = \sup\limits_{t \in K} |f(t)|$.

3) L'espace $L_p (1 \leq p \leq \infty)$ est un espace de Banach complètement réticulé.

Remarque 1.3.7. [27] Le dual E^* d'un Banach réticulé E est complètement Banach réticulé muni par l'ordre naturel

$$x_1^* \leq x_2^* \Longleftrightarrow \langle x_1^*, x \rangle \leq \langle x_2^*, x \rangle \qquad \forall x \in E^+. \tag{1.2}$$

où $\langle ., . \rangle$ est le crochet de dualité.

Démonstration. Nous allons esquisser la démonstration. Nous définissons le cône positif dans E^* par

$$x^* \geq 0 \iff x^*(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ dans } E.$$

Dans ce cas, il est facile de vérifier que pour tout x^*, y^* dans E^* et pour tout $x \geq 0$, on a

$$(x^* \vee y^*)(x) = \sup\{x^*(u) + y^*(x-u) : 0 \leq u \leq x\}.$$

et

$(x^* \wedge y^*)(x) = \sup\{x^*(v) + y^*(x-v) : 0 \leq v \leq x\}$. Pour plus de détails voir [27, p3]. $\blacksquare$

Dans ce qui suit, E, F sera deux espaces de Banach réticulés et X, Y seront deux espaces de Banach.

1.3.1 Opérateurs positifs

Définition 1.3.8. L'opérateur $u : E \longrightarrow F$ est positif si $Tx \geq 0$ pour tout $x \in E^+$, c'est-à-dire $u(E^+) \subset F^+$. L'ensemble de tous ces opérateurs est noté $\mathcal{L}^+(E, F)$.

L'espace engendré par des opérateurs positifs est l'espace vectoriel des opérateurs réguliers noté $\mathcal{L}^r(E, F)$.

Soit $u \in \mathcal{L}^+(E, F)$, on dit que l'opérateur u est régulier s'il existe deux opérateurs $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^+(E, F)$, tels que $u = u_1 - u_2$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}^r(E, F)$; la norme de u est :

$$\|u\|_r := \inf \{\|v\| : v \in \mathcal{L}^+(E, F) \text{ et } u(x) \leq v(x), \qquad \forall x \in E^+\}.$$

Théorème 1.3.9 [18]

Tout opérateurs positif d'un espace de Banach réticulé dans un espace normé réticulé est continu.

Preuve. Soit $u : E \longrightarrow F$ un opérateur positif, dont E et F sont, successivement, espace de Banach réticulé et espace normé réticulé.

On suppose que u n'est pas continu. Alors il existe une suite $\{x_n\}$ de E avec $\|x_n\| = 1$ et $\|u(x_n)\| \geq n^3$ pour tout n. On a $|u(x_n)| \leq u(|x_n|)$, on peut prendre $x_n \geq 0$ pour tout n. Comme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} < \infty$ et E est complet, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ converge en norme dans E. Soit $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$. Donc, il est clair que $0 \leq \frac{x_n}{n^2} \leq x$ pour tout n, et

$$n \leq \left\|u\left(\tfrac{x_n}{n^2}\right)\right\| \leq \|u(x)\| < \infty, \text{ pour tout } n.$$

Ceci est impossible. Alors u est continu. ■

Proposition 1.3.10 [30]

L'espace $(\mathcal{L}^r(E, F), \|.\|_r)$ *est un espace de Banach, et on a aussi* $\mathcal{L}^r(E, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

1.4 Les espaces des suites $p-$sommables

Soient n un entier, $1 \leq p \leq +\infty$ et p^* est le conjugué de p i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Soient X un espace de Banach et $1 \leq p < +\infty$, nous notons par $\ell_p^n(X)$, l'espace de toutes les suites $(x_i)_{i=1}^n$ dans X avec la norme

$$\left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_p := \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$

$$\left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_\infty := \sup_{1\leq i\leq n} \|x_i\|,$$

et $\ell_{p,weak}^n(X)$ l'espace de toutes les suites $(x_i)_{i=1}^n$ avec la norme

$$w_p\left((x_i)_{i=1}^n\right) := \sup_{\xi\in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$

$$w_\infty\left((x_i)_{i=1}^n\right) = \sup_{\xi\in B_{X^*}} \sup_{1\leq i\leq n} |\langle x_i, \xi\rangle|.$$

$\ell_{p,weak}^n(X)$ est un espace de Banach avec la norme $w_p(.)$.

Nous savons que pour $1 \leq p < \infty$ et $(\varphi_i)_{i=1}^n \in \ell_{p^*,weak}^n(Y^*)$, on a :

$$\|(\varphi_i)_i\|_{\ell_{p^*,weak}(Y^*)} = \sup_{\psi\in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\psi(\varphi_i)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} = \sup_{y\in B_Y} \|\varphi_i(y)_i\|_{p^*}.$$

L'espace $(c_0)_{weak}(X) = \{(x_n) : x_n \in X \text{ et } \langle x, \xi\rangle \in c_0, \forall\xi \in X^*\}$ est un sous espace fermé dans $\ell_{\infty,weak}^n(X)$. On sait que $\ell_{p,weak}^n(X)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}(\ell_{p^*}^n; X)$ pour $1 < p \leq \infty$ et pour $p = 1$, $\ell_{1,weak}^n(X)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}(c_0; X)$.

En remplaçant X par un espace de Banach réticulé E, (voir [20]) et on définit

$$\begin{cases} \ell_{p,|weak|}^n(E) := \left\{(x_i)_{i=1}^n : (|x_i|)_{i=1}^n \in \ell_{p,weak}^n(E)\right\}; \\ (c_0)_{|weak|}(E) := \left\{(x_i)_{i=1}^n : (|x_i|)_{i=1}^n \in (c_0)_{weak}(E)\right\} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{p,|weak|}^n(E)} = w_p((|x_i|)_{i=1}^n). \tag{1.3}$$

En plus, soit $B_{E^*}^{+} = \{\xi \in B_{E^*} : \xi \geq 0\} = B_{E^*} \cap E^{*+}$.

Puisque $|\langle |x_i|, \xi\rangle| \leq \langle |x_i|, |\xi|\rangle$ on a

$$\begin{cases} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{1,|weak|}^n(E)} = \sup\limits_{\xi \in B_{E^*}^{+}} \sum\limits_{i=1}^n \langle |x_i|, \xi\rangle = \left\| \sum\limits_{i=1}^n |x_i| \right\|_E \\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{p,|weak|}^n(E)} = \sup\limits_{\xi \in B_{E^*}^{+}} \left(\sum\limits_{i=1}^n \langle |x_i|, \xi\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty \\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{\infty,|weak|}^n(E)} = \sup\limits_{\xi \in B_{E^*}^{+}} \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \langle |x_i|, \xi\rangle . \end{cases} \tag{1.4}$$

Si $x_1, ..., x_n \geq 0$; on a:

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{p,|weak|}^n(E)} = \sup_{\xi \in B_{E^*}^{+}} \left(\sum_{i=1}^n \langle x_i, \xi\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} = w_p((x_i)_{i=1}^n) \tag{1.5}$$

L'espace $\ell_{p,|weak|}^n(E)$ est un espace de Banach réticulé avec l'ordre induit par l'ordre ponctuelle sur $E^{\mathbb{N}}$, voir [26, Théorème 7.8] pour plus de détails.

1− L'espace de Banach réticulé $\ell_{p,|weak|}^n(E)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^r(\ell_{p^*}^n; E)$ pour $1 < p \leq \infty$ et $\ell_{1,|weak|}^n(E)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^r(c_0; E)$.

2− L'espace de Banach réticulé $\ell_{p,|weak|}^n(E^*)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^r(E; \ell_p^n)$ pour $1 < p \leq \infty$ et $\ell_{1,|weak|}^n(E^*)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^r(E; c_0)$.

1.5 Opérateurs $p-$convexes et $p-$concaves

Définition 1.5.1.

$a)$ L'opérateur linéaire $u : X \longrightarrow F$ est $p-$convexe, si il existe une constante $M > 0$ telle que pour toute suite $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n |u(x_i)|^p \right\|^{\frac{1}{p}} \leq M \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } 1 \leq p < \infty.$$

et

$$\left\|\sup_{1\leq i\leq n}|u(x_i)|\right\|\leq M\max_{1\leq i\leq n}\|x_i\|\qquad \text{si } p=\infty.$$

L'ensemble de tous ces opérateurs est noté par $\mathcal{C}_p^{vex}(X,F)$ et la plus petite constante M est notée par $\mathcal{C}_p^{vex}(u)$.

$b)$ L'opérateur linéaire $u:E\longrightarrow Y$ est $p-$concave, si il existe une constante $M>0$ telle que pour toute suite $(x_i)_{i=1}^n\subset X$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^n\|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq M\left\|\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right\|^{\frac{1}{p}}\qquad \text{si } 1\leq p<\infty.$$

et

$$\left(\max_{1\leq i\leq n}\|u(x_i)\|\right)\leq M\left\|\sup_{1\leq i\leq n}|x_i|\right\|\qquad \text{si } p=\infty.$$

L'ensemble de tous ces opérateurs est noté par $\mathcal{C}_p^{cav}(E,Y)$ et la plus petite constante M est notée par $\mathcal{C}_p^{cav}(u)$.

- Un espace de Banach X est p-convexe (resp. p-concave) si id_X est p-convexe (resp. p-concave).

Exemple 1.5.2.

- Tout espace de Banach est 1-convexe et ∞-concave.

- La p-convexité et la p-concavité pour $1\leq p\leq\infty$ sont décroissante et croissante avec p, respectivement, voir [34].

- L'espace L_p pour $1\leq p<\infty$ est p-convexe et p-concave et $\mathcal{C}_p^{vex}(L_p)=\mathcal{C}_p^{cav}(L_p)$.

Théorème 1.5.3. [22, Théorème 16.21] *Soit* $1\leq p\leq+\infty$.

$a)$ L'opérateur $u\in\mathcal{L}(X,F)$ est $p-$convexe si et seulement si $u^*\in\mathcal{L}(F^*,X^*)$ est p^*-concave.

$b)$ L'opérateur $u\in\mathcal{L}(E,Y)$ est $p-$concave si et seulement si $u^*\in\mathcal{L}(Y^*,E^*)$ est p^*-convexe.

Soient $m\in\mathbb{N}^*, X_1,...,X_m,Y,Z$ des espaces de Banach et $E_1,...,E_m,F,G$ des espaces de Banach réticulés.

1.6 Les opérateurs multilinéaires

On considère le produit cartésien

$$X_1 \times \cdots \times X_m = \left\{ \left(x^1, ..., x^m\right) : x^j \in X_j,\ 1 \leq j \leq m \right\},$$

qui est un espace normé muni de la norme

$$\left\| \left(x^1, ..., x^m\right) \right\| := \max \left\{ \left\| x^j \right\| : x^j \in X_j,\ 1 \leq j \leq m \right\}.$$

L'opérateur $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ est appelé multilinéaire (ou $m-$linéaire) si les opérateurs

$$\begin{array}{rccl} T_j : & X_j & \longrightarrow & Y \\ & x^j & \longmapsto & T\left(x^1, ..., x^j, ..., x^m\right) \end{array}$$

sont linéaires pour chaque $x^j \in X_j, 1 \leq j \leq m$, en d'autres termes

$$T\left(x^1, ..., \lambda x^j + y^j, ..., x^m\right) = \lambda T\left(x^1, ..., x^j, ..., x^m\right) + T\left(x^1, ..., y^j, ..., x^m\right),$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x^j, y^j \in X_j$.

L'ensemble $L\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ est l'espace vectoriel de tous les opérateurs $m-$linéaires de $X_1 \times \cdots \times X_m$ de Y, muni par les deux opérations

$$\begin{aligned} \left(T_1 + T_2\right)\left(x^1, ..., x^m\right) &= T_1\left(x^1, ..., x^m\right) + T_2\left(x^1, ..., x^m\right) \\ \left(\lambda T_1\right)\left(x^1, ..., x^m\right) &= \lambda T_1\left(x^1, ..., x^m\right). \end{aligned}$$

Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $L\left(X_1, ..., X_m\right)$, l'espace des formes multilinéaires.

Définition 1.6.1. L'opérateur $m-$linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ est continu s'il est continu comme une fonction entre deux espaces normés.

Une conséquence de cette définition est l'égalité suivante:

$$T\left(x^1, ..., x^m\right) - T\left(y^1, ..., y^m\right) =$$
$$T\left(x^1 - y^1, x^2, ..., x^m\right) + T\left(x^1, x^2 - y^2, x^3, ..., x^m\right) + \cdots + T\left(x^1, ..., x^{m-1}, x^m - y^m\right).$$

Similaire au cas linéaire. Nous avons ce théorème qui caractérise les opérateurs multilinéaires continu:

Théorème 1.6.2. **(**Multilinéaire continu (voir [40])). *Pour tout* $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$ *les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1) T *est continu;*

2) T *est continu en* $(\underbrace{0, ..., 0}_{m \text{ fois}})$;

3) *Il existe une constante* $C > 0$, *telle que*

$$\left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq C \left\|x^1\right\| \times \cdots \times \|x^m\|, \qquad \textit{pour tout } x^j \in X_j. \tag{1.6}$$

Dans ce cas, on pose

$$\|T\| = \sup_{\substack{x^j \in B_{X_j} \\ 1 \leq j \leq m}} \|T(x^1, ..., x^m)\|.$$

On note par $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace vectoriel de tous les opérateurs $m-$linéaires continus (ou bornés) de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y. Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$, et pour simplification si $X_1 = \cdots = X_m = X$ on écrit $\mathcal{L}(^m X; Y)$.

On peut voir que $\|T\| = \inf\{C : C$ vérifiant l'inégalité (1.6)$\}$.

On dira que l'opérateur $m-$linéaire $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ est positif si $T(x^1, ..., x^m) \in F^+$, pour chaque $x^1 \in E_1^+, ..., x^m \in E_m^+$, et on note par $\mathcal{L}^+(E_1, ..., E_m; F)$ l'espace vectoriel de tous les opérateurs positifs $m-$linéaires continus de $E_1 \times \cdots \times E_m$ dans F, muni de la norme

$$\|T\| = \sup_{\substack{x^j \in B^+_{E_j} \\ 1 \leq j \leq m}} \|T(x^1, ..., x^m)\|.$$

Dans [36], l'adjoint d'un opérateur m-linéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est défini par:

$$T^* : Y^* \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, ..., X_m), y^* \longmapsto T^*(y^*) : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow \mathbb{K}$$

tel que $T^*(y^*)(x^1, ..., x^m) = y^*(T(x^1, ..., x^m))$.

1.7 Produit tensoriel

1.7.1 Produit tensoriel algébrique

On considère le dual algébrique $L(X_1, ..., X_m)^*$ de l'espace $L(X_1, ..., X_m)$, tel que

$$L(X_1, ..., X_m)^* = \{\phi : L(X_1, ..., X_m) \longrightarrow \mathbb{K} : \phi \text{ est une forme linéaire}\}.$$

Le produit tensoriel de $X_1, ..., X_m$ sera construit à partir des éléments de l'espace $L(X_1, ..., X_m)^*$.

Soit $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ on définit

$$x^1 \otimes \cdots \otimes x^m : L(X_1, ..., X_m) \longrightarrow \mathbb{K}$$

par

$$x^1 \otimes \cdots \otimes x^m (\varphi) = \varphi(x^1, ..., x^m),$$

où φ est une forme $m-$linéaire.

On pose D l'ensemble formé par tous ces éléments,

$$D := \{x^1 \otimes \cdots \otimes x^m : x^1 \in X_1, ..., x^m \in X_m\} \subseteq \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^*.$$

La forme $x^1 \otimes \cdots \otimes x^m$ s'appelle tenseur élémentaire.

Définition 1.7.1.1. Le sous-espace vectoriel de $L(X_1, ..., X_m)^*$ engendré par D est dit produit tensoreil algébrique de $X_1 \times \cdots \times X_m$, et sera noté par $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ ainsi que les éléments de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ s'appellent tenseurs, et sont écrits sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m,$$

tels que $n \in \mathbb{N}$, $x_i^j \in X_j$, $(\lambda_i) \in \mathbb{K}$, $j = 1, ..., m$, $i = 1, ..., n$.

Cette représentation de u n'est pas unique.

Si $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ et ϕ une forme multilinéaire sur $X_1 \times \cdots \times X_m$, alors

$$u(\phi) = \left\langle \phi, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi\left(x_i^1, ..., x_i^m\right).$$

La valeur de cette expression est indépendante du choix de u. Par définition, le produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors, on peut voir dans la proposition suivante quelques propriétés algèbriques sur les tenseurs élémentaires.

Proposition 1.7.1.2. *Soient* $x^j, y^j \in X_j$, $j = 1, ..., m$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *alors:*

1) $x^1 \otimes \cdots \otimes (x^j + y^j) \otimes \cdots \otimes x^m = (x^1 \otimes \cdots \otimes x^j \otimes \cdots \otimes x^m) + (x^1 \otimes \cdots \otimes y^j \otimes \cdots \otimes x^m)$.

2) $x^1 \otimes \cdots \otimes \lambda x^j \otimes \cdots \otimes x^m = \lambda\left(x^1 \otimes \cdots \otimes x^j \otimes \cdots \otimes x^m\right)$.

3) $x^1 \otimes \cdots \otimes 0 \otimes \cdots \otimes x^m = 0$.

Proposition 1.7.1.3. [40]. *Soient* $T_j : X_j \longrightarrow Y_j$, *pour tout* $j = 1, ..., m$, *des opérateurs linéaires, alors il existe un unique opérateur*

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_m : X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \longrightarrow Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_m,$$

tel que

$$(T_1 \otimes \cdots \otimes T_m)\left(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m\right) = T_1\left(x^1\right) \otimes \cdots \otimes T_m\left(x^m\right).$$

pour tout $\left(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m\right) \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$.

1.7.2 Produit tensoriel projectif

Définition 1.7.2.1. Soit $m \in \mathbb{N}$, pour chaque $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$, nous définissons le nombre réel positif

$$\pi(u) = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i^1\| \cdots \|x_i^m\|,$$

où l'infimum est porte sur toutes les représentations possibles de u,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m.$$

Alors π est une norme sur l'espace $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ et de plus, on a

$$\pi\left(x^1\otimes\cdots\otimes x^m\right)=\left\|x_i^1\right\|\cdots\left\|x_i^m\right\|.$$

La norme π s'appelle la norme projective, et l'espace $X_1\otimes\cdots\otimes X_m$ muni de la norme π est un espace normé mais n'est pas complet, alors on note par $X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_m$ son complété. L'espace de Banach $X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_m$ s'appelle le produit tensoriel projectif de $X_1,...,X_m$. Pour plus de détails voir [37, 40].

Maintenant, on définit le produit tenseriel projectif des opérateurs continus.

Proposition 1.7.2.2. [37] *Soient $T_j : X_j \longrightarrow Y_j$ $(j=1,...,m)$ des opérateurs linéaires continus, alors il existe un unique opérateur linéaire continu*

$$T_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi T_m : X_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi X_m\longrightarrow Y_1\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi Y_m$$

tel que

$$T_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi T_m\left(x^1\otimes\cdots\otimes x^m\right)=T_1\left(x^1\right)\otimes\cdots\otimes T_m\left(x^m\right),$$

pour tout $x^j\in X_j$, et de plus on a

$$\left\|T_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi T_m\right\|=\prod_{j=1}^m\left\|T_j\right\|.$$

1.7.3 Produit tensoriel injectif

Définition 1.7.3.1. La norme injective sur $X_1\otimes\cdots\otimes X_m$ est définie par

$$\varepsilon(u)=\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n\phi\left(x_i^1\right)\cdots\phi\left(x_i^m\right)\right|,\ \phi\in B_{X_j^*},\ j=1,...,m\right\}$$

où $\sum_{i=1}^n x_i^1\otimes\cdots\otimes x_i^m$ est une représentation de $u\in X_1\otimes\cdots\otimes X_m$.

On note par $X_1\otimes_\varepsilon\cdots\otimes_\varepsilon X_m$ le produit tensoriel muni de la norme ε. Cet espace n'est pas complet en général, alors on note par $X_1\widehat{\otimes}_\varepsilon\cdots\widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$ son complété. L'espace de Banach $X_1\widehat{\otimes}_\varepsilon\cdots\widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$ s'appelle le produit tensoriel injectif des espaces de Banach $X_1,...,X_m$.

Proposition 1.7.3.2. **[21]** *Soit $1\leq j\leq m$, on a*

1) $\varepsilon\left(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m\right) = \|x^1\| \cdots \|x^m\|$

2) $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$ *pour tout* $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$.

Q. Bu, G. Buskes [15] et Fremlin [24, 25] ont introduit le produit tensoriel réticulé, appelé le produit tensoriel projectif positif. Le cône projectif sur le produit tensoriel $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ est défini comme:

$$E_1^+ \otimes \cdots \otimes E_m^+ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m : x_i^j \in E_j^+,\ j = 1, ..., m,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

La norme tensorielle projective positive sur $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ est définie par

$$\|u\|_{|\pi|} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\| : x_i^j \in E_j^+, n \in \mathbb{N}, |u| \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \right\},$$

pour tout $u \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$. On désigne par $E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_m$ la complétion du produit tensoriel projectif positif de $E_1, ..., E_m$ (Produit tensoriel projectif de Fremlin). Alors $E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_m$ avec la norme ci-dessus, est un espace de Banach réticulé, on pose $\widehat{E} = E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_m$.

1.8 Formules et inégalités

Soit $r_n(t)$ les fonctions de Rademacher [22, p10], à savoir,

$$r_n(t) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

définies par $r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi t)$.

Inégalité de Khinchin [22, p 10]

Pour tout $0 < p < +\infty$, il existe des constantes positives A_p, B_p, telles que pour tous les scalaires $a_1, a_2, ..., a_n$ nous avons

$$A_p. \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p. \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

L'inégalité de Kahane [22, p 211]

Si $0 < p, q < +\infty$ alors il y a une constante $K_{p,q} > 0$ pour laquelle

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^q dt\right)^{1/q} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^p dt\right)^{1/p}.$$

Inégalité de Hölder

Soient

$$a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n \ et\ 1 < p < \infty,$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{p^*}\right)^{1/p^*}.$$

Inégalité de Minkowski

Soient

$$a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n \ et\ 1 < p < \infty,$$

on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

1.9 Idéaux d'opérateurs

On dit que l'opérateur $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un opérateur de rang fini si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie. De plus, u est de rang fini si et seulement si

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x\rangle\, y_i$$

avec $(x_i^*)_{i=1}^n \subset X^*$ et $(y_i)_{i=1}^n \subset Y$. L'espace des opérateurs linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X, Y)$.

Définition 1.9.1 Un idéal d'opérateurs $\mathcal{I}$ est une sous-classe de la classe $\mathcal{L}$ de tous les opérateurs linéaires continus entre les espaces de Banach tels que pour tous espaces de Banach X et Y ses composants $\mathcal{I}(X, Y) := \mathcal{L}(X, Y) \cap \mathcal{I}$ satisfisant:

$i)$ $\mathcal{I}(X,Y)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(X,Y)$ qui contient les opérateurs de rang fini.

$ii)$ Propriété d'idéal: si $u \in \mathcal{L}(X_1,X), v \in \mathcal{I}(X,Y)$ et $w \in \mathcal{L}(Y,Y_1)$, alors la composition $w \circ v \circ u$ est dans $\mathcal{I}(X_1,Y_1)$.

Si $\|.\|_I : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait

1) $(\mathcal{I}(X,Y), \|.\|_{\mathcal{I}})$ est un espace normé (Banach).

2) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$.

3) Si $u \in \mathcal{L}(X_1,X), v \in \mathcal{I}(X,Y)$ et $w \in \mathcal{L}(Y,Y_1)$, $\|w \circ v \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|w\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Alors $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ s'appelle un idéal normé (Banach) d'opérateurs linéaires.

1.9.1 Opérateurs linéaires p-sommant

Rappelons la définition d'un opérateur linéaire p-sommant introduite par Grothendieck pour $p=1$; dans son mémoire 1955. En 1967, Pietcsh était le premier qui a généralisé la notion des opérateurs p-sommants, il a défini la classe des opérateurs p-sommants et a montré quelques propriétés intéressantes, parmi les principaux résultats parûs dans [34] on peut trouver les théorèmes de domination, factorisation, les théorèmes d'inclusions,....

Définition 1.9.1.1. Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que l'opérateur $u : X \longrightarrow Y$ est dit absolument p-sommant $(u \in \Pi_p(X,Y))$ si il existe une constante positive C telle que pour toute suite finie $(x_i)_{i=1}^n$ de X on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{p,weak}^n(X)} \tag{1.7}$$

la plus petite constante C vérifie (1.7), notée $\pi_p(u)$. La classe $(\Pi_p, \pi_p(.))$ des opérateurs p-sommants est un idéal de Banach. Pour $p=\infty$, on a $\Pi_\infty(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

1.9.2 Opérateurs linéaires fortement p-sommant

Pietsch a montré dans [34] que l'identité de ℓ_1 dans ℓ_2 est 2-sommant; mais l'opérateur adjoint n'est pas 2-sommant. Pour cela, le concept d'opérateurs fortement p-sommants

$(1 \leq p \leq \infty)$ a été introduit par Cohen [19] comme une caractérisation des conjugués des opérateurs p^*-sommants.

Définition 1.9.2.1. Soit $1 < p \leq +\infty$**.** On dit que l'opérateur $u : X \longrightarrow Y$ est fortement $p-$sommant $(u \in \mathcal{D}_p(X,Y))$ si il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left\| (x_i)_{i=1}^n \right\|_p \left\| (y_i^*)_{i=1}^n \right\|_{\ell_{p,weak}^n(Y^*)} . \tag{1.8}$$

La plus petite constante C vérifie (1.8) , notée $d_p\,(u)$, oú $d_p\,(.)$ dite la norme fortement p-sommant sur l'espace $\mathcal{D}_p(X,Y)$ de tous les opérateurs fortement p-sommants de X dans Y qui défini un idéal de Banach. Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1(X,Y) = \mathcal{L}\,(X,Y)$.

Proposition 1.9.2.2.

1. *Soit* $1 \leq p < +\infty$. *L'opérateur* u *est* p*-sommant de* X *dans* Y *si et seulement si l'opérateur adjoint* u^* *est fortement* p^**-sommant de* Y^* *dans* X^* *et de plus* $d_{p^*}\,(u^*) = \pi_p\,(u)$.

2. *Soit* $1 < p \leq +\infty$. *L'opérateur* u *est fortement* p*-sommant de* X *dans* Y *si et seulement si l'opérateur adjoint* u^* *est* p^**-sommant de* Y^* *dans* X^* *et on a* $d_p\,(u) = \pi_{p^*}\,(u^*)$.

CHAPITRE 2

Les opérateurs linéaires positifs fortement p-sommants

Nous allons rappeler dans ce chapitre la notion des opérateurs positivement p-sommants [8] et celle des opérateurs positifs fortement p-sommants introduits par D. Achour et A. Belacel [1], nous donnons la caractérisation du conjugué d'un opérateur positivement p-sommant. Nous également comparons la notion des opérateurs positivement p-sommants et celle des opérateurs positifs fortement q-sommants; en généralisant un résultat dû à Bu [13], où nous montrons que l'espace $\Pi_p^+(H,F)$ de tous les opérateurs positivement p-sommants de H en F est inclus dans $\mathcal{D}_q^+(H,F)$ l'espace de tous les opérateurs positifs fortement q-sommants de H dans F, où H est un espace de Hilbert.

2.1 Les opérateurs positivement p-sommants

Définition 2.1.1. [8] Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que l'opérateur $u : E \longrightarrow Y$ est positivement p-sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

et toute $(x_i)_{i=1}^n \subset E^+$, on a

$$\|u(x_i)_{i=1}^n\|_p \leq C \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle x_i, \xi \rangle^p \right)^{1/p} = C w_p\left((x_i)_{i=1}^n\right), \tag{2.1}$$

la plus petite constante C vérifie (2.1), notée $\pi_p^+(u)$. L'espace $\Pi_p^+(X,Y)$ de tous les opérateurs positivement p-sommants de E dans Y est un espace de Banach avec la norme $\pi_p^+(.)$. Pour $p = \infty$, on a $\Pi_\infty^+(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

Proposition 2.1.2. [1] *Soient $1 \leq p \leq \infty$, $u \in \mathcal{L}(E,Y)$ et $v \in \mathcal{L}^r(F,E)$. Alors*

1) *$u \in \Pi_p^+(E,Y)$ si, et seulement s'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $x_1, ..., x_n \in E$, on a l'inégalité*

$$\|u(x_i)_{i=1}^n\|_p \leq K \|(x_i)\|_{\ell_{p,|weak|}^n(E)}.$$

2) *Si $u \in \Pi_p^+(E,Y)$, alors uv est un opérateur positivement p-sommant de F dans Y.*

3) *Pour toute constante $C > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u \in \Pi_p^+(E,Y)$ avec $\pi_p^+(u) \leq C$.

(ii) Pour tout $v \in \mathcal{L}^r\left(\ell_{p^*}^n, E\right)$, uv est positivement p-sommant et $\pi_p^+(uv) \leq 2C\|v\|_r$.

Démonstration. 1) Soit $u \in \Pi_p^+(E,Y)$, pour tous $x_1, ..., x_n \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\|u(x_i)_{i=1}^n\|_p &= \left\|u\left(x_i^+\right)_{i=1}^n - u\left(x_i^-\right)_{i=1}^n\right\|_p \\
&\leq \left\|u\left(x_i^+\right)_{i=1}^n\right\|_p + \left\|u\left(x_i^-\right)_{i=1}^n\right\|_p \\
&\leq C \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \left\langle x_i^+, \xi \right\rangle^p \right)^{1/p} + C \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \left\langle x_i^-, \xi \right\rangle^p \right)^{1/p} \\
&= 2C \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle |x_i|, \xi \rangle^p \right)^{1/p} \\
&= K \|(x_i)\|_{\ell_{p,|weak|}^n(E)}.
\end{aligned}$$

2) Soit $x_1, ..., x_n \in F^+$.

$$\begin{aligned}
\|uv(x_i)_{i=1}^n\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n \|u(v^+(x_i) - v^-(x_i))\|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \|u(v^+(x_i))\|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n \|u(v^-(x_i))\|^p \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\leq \pi_p^+(u) \sup_{\xi\in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle v^+(x_i), \xi\rangle^p\right)^{1/p} + \pi_p^+(u) \sup_{\xi\in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle v^-(x_i), \xi\rangle^p\right)^{1/p}$$
$$\leq 2\pi_p^+(u) \sup_{\xi\in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle |v|(x_i), \xi\rangle^p\right)^{1/p}$$
$$\leq 2\pi_p^+(u) \||v|\| \sup_{\xi\in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \left\langle x_i, \frac{|v|^*}{\||v|^*\|}(\xi)\right\rangle^p\right)^{1/p}$$
$$\leq 2\pi_p^+(u) \|v\|_r \sup_{\varphi\in B_{F^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle x_i, \varphi\rangle^p\right)^{1/p}.$$

Donc $uv \in \Pi_p^+(F,Y)$ et $\pi_p^+(uv) \leq 2\pi_p^+(u)\|v\|_r$.

3) Il est clair. ■

Théorème 2.1.3. [41] (**Théorème de domination**). *Soit $u \in \mathcal{L}(E,Y)$. u est un opérateur positivement p-sommant si, et seulement s'il existe une probabilité μ sur l'ensemble $K = B_{E^*}^+$, muni par la topologie* $*$-faible, *et une constante positive C telle que*

$$\|u(x)\| \leq C\left(\int_K \langle x, x^*\rangle^p \, d\mu(x^*)\right)^{1/p}, \tag{2.2}$$

pour tout $x \in E^+$. En plus, dans ce cas $\pi_p^+(u) = \inf\{C, C$ vérifiant l'inégalité $(2.2)\}$.

Remarque 2.1.4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E,Y)$. Alors u est un opérateur positivement p-sommant si, et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a*

$$\|u(x)\| \leq C\left(\int_K \langle |x|, x^*\rangle^p \, d\mu(x^*)\right)^{1/p}.$$

En effet, soit $x \in E$, Comme $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$, on a

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &= \|u(x^+ - x^-)\| \\
&\leq \|u(x^+)\| + \|u(x^-)\| \\
&\leq C\left(\int_K \langle x^+, x^*\rangle^p \, d\mu(x^*)\right)^{1/p} + C\left(\int_K \langle x^-, x^*\rangle^p \, d\mu(x^*)\right)^{1/p} \\
&\leq 2C\left(\int_K \langle |x|, x^*\rangle^p \, d\mu(x^*)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

L'nverse est clair.

Théorème 2.1.5. [41]. Supposons $u \in \mathcal{L}(E,X)$. Alors, $u \in \Pi_p^+(E,X)$ si et seulement si $u^{**} \in \Pi_p^+(E^{**},X^{**})$. De plus $\pi_p^+(u) = \pi_p^+(u^{**})$.

2.2 Théorème de factorisation

Maintenant; nous donnons le théorème de factorisation de Pietsch pour les opérateurs positivement p-sommants. Dans [1, p792-793], Achour et Belacel ont introduit un nouvel espace des fonctions. Soient $x, y \in E$ et $\mu \in \mathcal{M}\left(B_{E^*}^+\right)$ (l'espace des mesures régulières de Borel sur$B_{E^*}^+$), ils ont défini la relation d'équivalence $\sim$ par : $x \sim y \iff \langle |x-y|, .\rangle = 0$ μ-p.p.

On note i_E l'injection $E \longrightarrow \mathcal{C}\left(B_{E^*}^+\right)$ définie par $i_E(x) = \langle x, .\rangle$. L'application i_E est une injection isomorphique. Si $x \geq 0$, on a $\|x\|_E = \|\langle x, .\rangle\|_{\mathcal{C}\left(B_{E^*}^+\right)}$, voir [1, p792-793].

Pour $f \in i_E(E) \subset \mathcal{C}\left(B_{E^*}^+\right)$; ils ont défini la semi norme

$$|||f||| = \inf\left\{\left(\int_{B_{E^*}^+} \langle |z|, .\rangle^p \, d\mu(.)\right)^{1/p} : \langle |z-f|, .\rangle = 0 \ \mu\text{-p.p}\right\}.$$

Soit $\mathcal{R} = \{f \in i_E(E),\ |||f||| = 0\} \subset i_E(E)$. oú $L_0^p(\mu)$ est la complété de l'espace quotient $i_E(E)/\mathcal{R}$ avec la norme $\|[f]\| = |||f|||$, $[f]$ est la classe d'équivalence de $f \in i_E(E)$, on remarque que

$$|||f||| = |||g||| \qquad \forall g \in [f].$$

Lemme 2.2.1. L'opérateur $J_{p,0} \circ i_E : E \longrightarrow i_E(E) \longrightarrow L_0^p(\mu)$ est positivement p-sommant et $\pi_p^+(J_{p,0} \circ i_E) \leq 1$.

Démonstration. Soit $(x_i)_{i=1}^n \subset E$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|J_{p,0} \circ i_E(x_i)\|_{L_0^p(\mu)}^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{E^*}^+} \langle |x_i|, \varphi\rangle^p \, d\mu(\varphi)\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{B_{E^*}^+} \sum_{i=1}^n \langle |x_i|, \varphi\rangle^p \, d\mu(\varphi)\right)^{1/p} \\
&\leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{p,|weak|}^n(E)}.
\end{aligned}$$

Alors, $J_{p,0} \circ i_E \in \Pi_p^+ (E, L_0^p(\mu))$ et $\pi_p^+ (J_{p,0} \circ i_E) \leq 1.$ ■

Théorème 2.2.3. (**Théorème de Factorisation**). *Pour tout opérateur* $u : E \longrightarrow Y$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est positivement p-sommant.*

(ii) *Il existe une probabilité de Borel régulière μ sur $B_{E^*}^+$, un espace de Banach $L_0^p(\mu)$ et un opérateur $v : L_0^p(\mu) \longrightarrow Y$ tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & Y \\ i_E \downarrow & & \uparrow v \\ i_E(E) & \xrightarrow{J_{p,0}} & L_0^p(\mu) \\ \cap & & \\ \mathcal{C}\left(B_{E^*}^+\right) & & \end{array}$$

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si u est positivement p-sommant, le théorème de domination de Pietsch implique l'existence d'une probabilité de Borel régulière μ sur $B_{E^*}^+$ telle que, pour tout $x \in E$

$$\|u(x)\| \leq \pi_p^+(u) \left(\int_{B_{E^*}^+} \langle |x|, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*) \right)^{1/p}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \pi_p^+(u) \, \|[\langle x, . \rangle]\|_{L_0^p(\mu)} \\ &= \pi_p^+(u) \, \|J_{p,0} \circ i_E(x)\|_{L_0^p(\mu)}. \end{aligned}$$

Si on note le rang du $J_{p,0} \circ i_E$ par S. Par définition $\overline{S} = L_0^p(\mu)$, l'application $S \longrightarrow Y : J_{p,0} \circ i_E(x) \longmapsto u(x)$ est bien défini. Il est continu pour la topologie de $L_0^p(\mu)$ avec norme $\leq \pi_p^+(u)$, puisque

$$\|u(x)\| \leq \pi_p^+(u) \, \|J_{p,0} \circ i_E(x)\|_{L_0^p(\mu)} \qquad \forall x \in E.$$

Alors l'extension naturelle de cet application à $L_0^p(\mu)$ est l'opérateur demandé v.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Comme $u = v \circ J_{p,0} \circ i_E$, du lemme précédent et de la propriété d'idéal, on déduit que l'opérateur u est positivement p-sommant et $\pi_p^+(u) \leq \|v\| \, \pi_p^+(J_{p,0} \circ i_E) \leq \|v\|.$ ■

2.3 Les opérateurs positifs fortement p-sommants

Définition 2.3.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'opérateur $u : X \longrightarrow F$ est positif fortement p-sommant, s'il existe une constante positive C telle que pour tous $n \in \mathbb{N}, (x_i)_{i=1}^n \subset X$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset F^*$, on a:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left\| (x_i)_{i=1}^n \right\|_p \left\| (y_i^*)_{i=1}^n \right\|_{\ell^n_{p^*,|weak|}(F^*)}, \tag{2.3}$$

où $\mathcal{D}_p^+(X, F)$ est l'espace des opérateurs positifs fortement p-sommants de X dans F, qui devient un espace de Banach avec la norme $d_p^+(.)$, où $d_p^+(u) = \inf \{C,\ C \text{ vérifiant } (2.3)\}$. Nous avons $\mathcal{D}_1^+(X, F) = \mathcal{L}(X, F)$.

Remarque 2.3.2. Soit $u \in \mathcal{L}(X, F)$. Alors u est positif fortement p-sommant si, et seulement si, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, (x_i)_{i=1}^n \subset X$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset F^{*+}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq K \left\| (x_i)_{i=1}^n \right\|_p w_{p^*}\left((y_i^*)_{i=1}^n\right). \tag{2.4}$$

Proposition 2.3.3. *Soient $u \in \mathcal{L}(Y, E)$, v un opérateur positif de $\mathcal{L}(E, F)$ et w dans $\mathcal{L}(X, Y)$. Si $u \in \mathcal{D}_p^+(Y, E)$, alors $vuw \in \mathcal{D}_p^+(X, F)$* et $d_p^+(vuw) \leq \|v\| \, d_p^+(u) \, \|w\|$.

Démonstration. Soient $0 \leq z_1^*, ..., z_n^*$ dans F^* et $x_1, ..., x_n \in X$. Comme $u \in \mathcal{D}_p^+(Y, E)$ et $v^*(z_i^*) \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle vuw(x_i), z_i^* \rangle| &\leq \sum_{i=1}^{n} |\langle uw(x_i), v^*(z_i^*) \rangle| \\
&\leq d_p^+(u) \left\| w(x_i)_{i=1}^n \right\|_p \sup_{\zeta \in B_{E^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle v^*(z_i^*), \zeta \rangle^{p^*} \right)^{1/p^*} \\
&\leq d_p^+(u) \|v\| \|w\| \left\| (x_i)_{i=1}^n \right\|_p \sup_{\zeta \in B_{E^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^*, \frac{\zeta}{\|v^{**}\|} \right\rangle^{p^*} \right)^{1/p^*} \\
&\leq d_p^+(u) \|v\| \|w\| \left\| (x_i)_{i=1}^n \right\|_p \sup_{\varphi \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle z_i^*, \varphi \rangle^{p^*} \right)^{1/p^*}.
\end{aligned}$$

On conclut que $vuw \in \mathcal{D}_p^+(X, F)$ et $d_p^+(vuw) \leq \|v\| \, d_p^+(u) \, \|w\|$. ■

Théorème 2.3.4. *Soient* $1 \leq p \leq +\infty$.

1) $u \in \Pi_p^+(F,Y)$ *si, et seulement si* $u^* \in \mathcal{D}_{p^*}^+(Y^*,F^*)$.

2) $u \in \mathcal{D}_p^+(X,F)$ *si, et seulement si* $u^* \in \Pi_{p^*}^+(F^*,X^*)$.

Démonstration. 1) $(\Rightarrow)$ Soit $u \in \Pi_p^+(F,Y)$, pour tous $n \in \mathbb{N}, (y_i^{**})_{i=1}^n \subset F^{**}$ et $(x_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$; on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |\langle u^*(x_i^*), y_i^{**}\rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle x_i^*, u^{**}(y_i^{**})\rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|u^{**}(y_i^{**})\| \, \|x_i^*\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|u^{**}(y_i^{**})\|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*}\right)^{1/p^*} \\ &\leq \pi_p^+(u) \sup_{\xi \in B_{F^{***}}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle |y_i^{**}|, \xi\rangle^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*}\right)^{1/p^*}.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n |\langle u^*(x_i^*), y_i^{**}\rangle| \leq \pi_p^+(u) \sup_{\xi \in B_{F^{***}}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle |y_i^{**}|, \xi\rangle^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*}\right)^{1/p^*}.$$

Alors,

$$u^* \in \mathcal{D}_{p^*}^+(Y^*,F^*) \text{ et } d_p^+(u^*) \leq \pi_p^+(u). \tag{2.5}$$

$(\Leftarrow)$ Supposons que $u^* \in \mathcal{D}_{p^*}^+(Y^*,F^*)$. Soient $n \in \mathbb{N}, (x_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$ et $(y_i)_{i=1}^n \subset F$; on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n \langle u(y_i), x_i^*\rangle\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^n \langle u(y_i), x_i^*\rangle\right| \\ &\leq d_{p^*}^+(u^*) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*}\right)^{1/p^*} \sup_{\xi \in B_{F^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle |y_i|, \xi\rangle^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{\|(x_i^*)\|_{p^*} \leq 1} \left|\sum_{i=1}^n \langle u(y_i), x_i^*\rangle\right| \leq d_{p^*}^+(u^*) \sup_{\xi \in B_{F^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle |y_i|, \xi\rangle^p\right)^{1/p}.$$

Donc

$$\|u(y_i)_{i=1}^n\|_p \leq d_{p^*}^+(u^*) \sup_{\xi \in B_{F^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle |y_i|, \xi\rangle^p\right)^{1/p}.$$

Finalement,

$$u \in \Pi_p^+(F,Y) \text{ et } \pi_p^+(u) \leq d_{p^*}^+(u^*). \tag{2.6}$$

Des inégalités (2.5) et (2.6); nous concluons que $\pi_p^+(u) = d_{p^*}^+(u^*)$.

2) Il est clair (on utilisant la même méthode en 1)). ■

Corollaire 2.3.5.

$$u \in \mathcal{D}_p^+(X,F) \text{ si, et seulement si } u^{**} \in \mathcal{D}_p^+(X^{**},F^{**}).$$

Proposition 2.3.6. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on a

$$\mathcal{D}_p(X,F) \subset \mathcal{D}_p^+(X,F)$$

Preuve. Si $u \in \mathcal{D}_p(X,F)$ par [5], l'opérateur $u^* \in \Pi_{p^*}(F^*,X^*)$. D'après la Proposition 3 dans [8], $u^* \in \Pi_{p^*}^+(F^*,X^*)$. Par le Théorème 2.3.4, on a $u \in \mathcal{D}_p^+(X,F)$. ■

Théorème 2.3.7. (**Théorème de Domination**).

L'opérateur $u \in \mathcal{L}(X,F)$ *est positif fortement p-sommant* $(1 < p \leq \infty)$*, si et seulement si il existe une positive constante* $C > 0$ *et une mesure de probabilité de Radon* μ sur $B_{F^{**}}^+$ *telles que pour tous* $x \in X$ *et* $y^* \in F^*$*, on a :*

$$|\langle u(x), y^* \rangle| \leq C \|x\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{1/p^*}. \tag{2.7}$$

En plus, dans ce cas, $d_p^+(u) = \inf \{C, C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.7)\}$.

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit $u \in \mathcal{D}_p^+(X,F)$ et puisque $u^* \in \Pi_{p^*}^+(F^*,X^*)$,on obtient:

$$\begin{aligned}|\langle u(x), y^* \rangle| &= |\langle x, u^*(y^*) \rangle| \\ &\leq \|x\| \|u^*(y^*)\| \\ &\leq \pi_{p^*}^+(u^*) \|x\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu(\psi) \right)^{1/p^*}.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soient $n \in \mathbb{N}$, $(x_i^*)_{i=1}^n \subset F^*$ et $(y_i)_{i=1}^n \subset X$; on a

$$|\langle u(x_i), y^* \rangle| \leq C \|x_i\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y_i^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{1/p^*},$$

pour tout i dans $\{1,...,n\}$, par conséquent

$$\sum_{i=1}^n |\langle u(x_i), y^* \rangle| \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y_i^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{1/p^*}$$

$$\leq C\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{B^+_{F^{**}}}\langle|y_i^*|,\psi\rangle^{p^*}d\mu\right)^{1/p^*}$$
$$\leq C\left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_p\left\|(y_i^*)_{i=1}^n\right\|_{\ell^n_{p^*,|weak|}(F^*)}.$$

Alors, $u\in\mathcal{D}_p^+(X,F)$. ■

Corollaire 2.3.8. Si $1<p<q<\infty$, alors

$$\mathcal{D}_q^+(X,F)\subset\mathcal{D}_p^+(X,F).$$

Proposition 2.3.9. [1, Proposition 5.3]. Pour $1<p\leq\infty$, alors$\geq$

1) $\mathcal{D}_p^+(X,F)\subset\mathcal{C}_p^{vex}(X,F)$.

2) $\mathcal{D}_p^+(X,c_0)=\mathcal{L}(X,c_0)$.

3) $\mathcal{D}_p^+(X^*,\ell_1)=\mathcal{C}_p^{vex}(X^*,\ell_1)$.

2.4 Théorème de Bu sur les opérateurs positifs

Dans [13], Q. Bu a généralisé un résultat de [19, Theorem 4.2.2] pour p et q $(1<p,q<+\infty)$, i.e. $\Pi_p(H,Y)\subset\mathcal{D}_q(H,Y)$, où H est un espace de Hilbert. Dans ce paragraphe, nous comparons la notion des opérateurs positivement p-sommants et celle des opérateurs positifs fortement q-sommants, en généralisant un résultat dû à Bu.

Théorème 3.1. *Soient $1<p,q<+\infty$; et H un espace de Hilbert, on a*

$$\Pi_p^+(H,F)\subset\mathcal{D}_q^+(H,F).$$

Démonstration. D'abord considérer $H=\ell_2^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$. Soit $u\in\Pi_p^+(H,F)$. Par le théorème de la domination de Pietsch [1, Proposition 3.4], il existe une mesure de probabilité μ sur $B^+_{\ell_2^n}$ muni par la topologie $*$-faible, telle que pour tout $x\in\ell_2^n$; on a

$$\|u(x)\|\leq\pi_p^+(u)\left(\int_{B^+_{\ell_2^n}}\langle|x|,x^*\rangle^p d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}\tag{2.8}$$

Maintenant pour $x_1, ..., x_m \in \ell_2^n$ et $y_1^*, ..., y_m^* \in F^*$, nous avons

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{k,i} e_i \qquad k = 1, 2, ..., m$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |\langle u(x_k), y_k^* \rangle| &= \sum_{k=1}^{m} \left|\left\langle u(x_k), y_k^{*+} - y_k^{*-} \right\rangle\right| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_{k,i} u\left(e_i\right), y_k^{*+} - y_k^{*-} \right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \left(\left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_{k,i} u\left(e_i\right), y_k^{*+} \right\rangle\right| + \left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_{k,i} u\left(e_i\right), y_k^{*-} \right\rangle\right| \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_{k,i}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle u\left(e_i\right), y_k^{*+} \right\rangle\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle u\left(e_i\right), y_k^{*-} \right\rangle\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right],
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Khinchin

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| . \frac{1}{A_{q^*}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} r_i\left(t\right) \left\langle u\left(e_i\right), y_k^{*+} \right\rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| \frac{1}{A'_{q^*}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} r_i\left(t\right) \left\langle u\left(e_i\right), y_k^{*-} \right\rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&\leq \frac{1}{A_{q^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} r_i\left(t\right) \left\langle u\left(e_i\right), y_k^{*+} \right\rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&\quad + \frac{1}{A'_{q^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} r_i\left(t\right) \left\langle u\left(e_i\right), y_k^{*-} \right\rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{A_{q^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} r_i\left(t\right) \left\langle u\left(e_i\right), y_k^{*+} \right\rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{A'_{q^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} r_i\left(t\right) \left\langle u\left(e_i\right), y_k^{*-} \right\rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&= \left\| \left(x_k\right)_1^m \right\|_q \frac{1}{A_{q^*}} \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{m} \left| \left\langle \sum_{i=1}^{n} r_i\left(t\right) u\left(e_i\right), y_k^{*+} \right\rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}}
\end{aligned}$$

$$+\left\|(x_k)_1^m\right\|_q \frac{1}{A'_{q^*}}\left(\int_0^1 \sum_{k=1}^m \left|\left\langle \sum_{i=1}^n r_i(t)\, u(e_i), y_k^{*-}\right\rangle\right|^{q^*} dt\right)^{\frac{1}{q^*}}$$

$$\leq \left\|(x_k)_1^m\right\|_q \frac{1}{A_{q^*}}\left(\int_0^1 \left(\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, u(e_i)\right\| . \left\|y_k^{*+}\right\|_{\ell_{q^*,|weak|}(F^*)}\right)^{q^*} dt\right)^{\frac{1}{q^*}}$$

$$+\left\|(x_k)_1^m\right\|_q \frac{1}{A'_{q^*}}\left(\int_0^1 \left(\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, u(e_i)\right\| . \left\|y_k^{*-}\right\|_{\ell_{q^*,|weak|}(F^*)}\right)^{q^*} dt\right)^{\frac{1}{q^*}}$$

$$= \left\|(x_k)_1^m\right\|_q \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, u(e_i)\right\|^{q^*} dt\right)^{\frac{1}{q^*}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{A_{q^*}}\left\|y_k^{*+}\right\|_{\ell_{q^*,|weak|}(F^*)} + \frac{1}{A'_{q^*}}\left\|y_k^{*-}\right\|_{\ell_{q^*,|weak|}(F^*)}\right).$$

On pose $\frac{1}{A''_{q^*}} = \max\left\{\frac{1}{A_{q^*}}, \frac{1}{A'_{q^*}}\right\}$, donc

$$\sum_{k=1}^m \left|\langle u(x_k), y_k^*\rangle\right| \leq \frac{2}{A''_{q^*}}\left\|(x_k)_1^m\right\|_q \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, u(e_i)\right\|^{q^*} dt\right)^{\frac{1}{q^*}} \left\|y_k^*\right\|_{\ell_{q^*,|weak|}(F^*)}. \quad (2.9)$$

Maintenant, par l'inégalité de Kahane et (2.8), nous avons:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, u(e_i)\right\|^{q^*} dt\right)^{\frac{1}{q^*}} &\leq K_{p,q^*}.\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, u(e_i)\right\|^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K_{p,q^*}.\pi_p^+(u).\left(\int_0^1 \left(\int_{B^+_{\ell_2^n}} \left\langle \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)(e_i)\right|, x^*\right\rangle^p d\mu(x^*)\right) dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K_{p,q^*}.\pi_p^+(u).\left(\int_0^1 \left(\int_{B^+_{\ell_2^n}} \left\langle \sum_{i=1}^n \left|r_i(t)(e_i)\right|, x^*\right\rangle^p d\mu(x^*)\right) dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K_{p,q^*}.\pi_p^+(u).\left(\int_{B^+_{\ell_2^n}} \left(\int_0^1 \left\langle \sum_{i=1}^n \left|r_i(t)(e_i)\right|, x^*\right\rangle^p dt\right) d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

et par l'inégalité de Khinchin,

$$\leq K_{p,q^*}.\pi_p^+(u).\left(\int_{B^+_{\ell_2^n}} \left(B_p\left(\sum_{i=1}^n \langle e_i, x^*\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= K_{p,q^*}.\pi_p^+(u).B_p \left(\int_{B^+_{\ell_2^n}} \|x^*\|^p d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ alors}$$

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, u(e_i)\right\|^{q^*} dt\right)^{\frac{1}{q^*}} \leq K_{p,q^*}\pi_p^+(u)\, B_p. \tag{2.10}$$

Donc nous avons par (2.9) et (2.10)

$$\sum_{k=1}^m |\langle u(x_k), y_k^*\rangle| \leq \frac{2}{A''_{q^*}} K_{p,q^*}.\pi_p^+(u).B_p \left\|(x_k)_1^m\right\|_q \|y_k^*\|_{\ell_{q^*,|weak|}(F^*)}. \tag{2.11}$$

D'après [1, Definition 4.1], on obtient $u \in \mathcal{D}_q^+(\ell_2^n, F)$ avec

$$d_q^+(u) \leq \frac{2}{A''_{q^*}} K_{p,q^*} B_p \pi_p^+(u).$$

Considérons maintenant en général un espace de Hilbert H. Soient $x_1, ..., x_m \in H$ et $y_1^*, ..., y_m^* \in F^*$. Ensuite, il y a un $n \in \mathbb{N}$ tel que span $\{x_k\}_{k=1}^m$ est isométriquement isomorphe à ℓ_2^n. Soit P la projection orthogonale de H sur span $\{x_k\}_{k=1}^m$.

Alors d'après (2.11),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m |\langle u(x_k), y_k^*\rangle| &= \sum_{k=1}^m |\langle u(P(x_k)), y_k^*\rangle| \\
&\leq \frac{2}{A''_{q^*}} K_{p,q^*}.\pi_p^+(u).B_p \left\|P(x_k)_1^m\right\|_q \|y_k^*\|_{\ell_{q^*,|weak|}(F^*)}. \\
&= \frac{2}{A''_{q^*}} K_{p,q^*}.\pi_p^+(u).B_p \left\|(x_k)_1^m\right\|_q \|y_k^*\|_{\ell_{q^*,|weak|}(F^*)}.
\end{aligned}$$

Cela nous montre que $u \in \mathcal{D}_q^+(H, F)$ avec

$$d_q^+(u) \leq \frac{2}{A''_{q^*}} K_{p,q^*}.B_p.\pi_p^+(u). \quad \blacksquare$$

CHAPITRE 3

Les opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement p-sommants

Le but de ce chapitre est de donner et d'étudier la notion d'opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants. Nous prouvons un analogue naturel du théorème de domination de Pietsch pour cette classe et caractérisons leurs conjugués. En application, nous généralisons un résultat dû à Q. Bu et Z. Shi [17], et nous comparons cette classe avec la classe des opérateurs $m-$linéaires multiples $p-$convexes.

Soient $m \in \mathbb{N}^*, X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach et $E_1, ..., E_m, F, G$ des espaces de Banach réticulés.

Définition 3.0.1. (**Opérateurs multilinéaires de rang fini**). Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de rang fini s'il s'écrit comme une somme finie d'opérateurs de la forme

$$T : (x^1, ..., x^m) \longrightarrow x_1^* (x^1) ... x_m^* (x^m) y,$$

où $x_k^* \in X_k^* (1 \leq k \leq m)$ et $y \in Y$. L'espace des opérateurs m-linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$.

Définition 3.0.2. (**Idéal des opérateurs multilinéaires**).

Un idéal d'opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) est la classe $\mathcal{M}$ des opérateurs multilinéaires bornés entre des espaces de Banach tels que l'ensemble

$$\mathcal{M}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) := \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) \cap \mathcal{M},$$

satisfait :

(i) $\mathcal{M}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ est un sous espace de $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ qui contient les opérateurs m-linéaires de rang finis.

(ii) Propriété d'idéal : Si $T \in \mathcal{M}\left(G_1, ..., G_m; Y\right), A_j \in \mathcal{L}\left(X_j, G_j\right)$ avec $j = 1, ..., n$ et $v \in \mathcal{L}\left(Y, Z\right)$, alors $v \circ T \circ \left(A_1, ..., A_m\right) \in \mathcal{M}\left(X_1, ..., X_m; Z\right)$.

Si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait :

(1) $\left(\mathcal{M}\left(X_1, ..., X_m; Y\right), \|.\|_{\mathcal{M}}\right)$ est un espace normé (Banach),

(2) $\|T^n : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} : T^n\left(x^1, ..., x^m\right) = x^1 ... x^m\|_{\mathcal{M}} = 1$ quelque soit n,

(3) Si $T \in \mathcal{M}\left(G_1, ..., G_m; Y\right), A_j \in \mathcal{L}\left(X_j, G_j\right)$ avec $j = 1, ..., n$ et $v \in \mathcal{L}\left(Y, Z\right)$, alors

$$\|v \circ T \circ \left(A_1, ..., A_m\right)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|A_1\| \cdots \|A_m\|.$$

Donc $\left(\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}}\right)$ s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs multilinéaires. On définit

$$\mathcal{M}^{\mathbb{K}} := \left\{\mathcal{M}\left(X_1, ..., X_m; \mathbb{K}\right) : m \in \mathbb{N}\right\},$$

on dit que $\mathcal{M}^{\mathbb{K}}$ est un idéal des formes multilinéaires.

3.1 Opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants

Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants ont été introduits par Achour et Mezrag dans [2], tels que un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ est Cohen fortement p-sommant ($1 < p \leq +\infty$), s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$; $1 \leq j \leq m$, et tous $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in Y^*$:

$$\left\| \left\langle T(x_i^1,...,x_i^m), y_i^* \right\rangle \right\|_{\ell_1^n} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| y_i^* (y) \right\|_{\ell_{p^*}^n}. \tag{3.1}$$

La classe des opérateurs $m-$linéaires Cohen fortement $p-$sommants de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y notée $\mathcal{D}_p^m (X_1, ..., X_m; Y)$; est un multi-idéal de Banach avec la norme $d_p^m(.)$,

$$d_p^m(T) = \inf \{C, \ C \text{ vérifiant l'inégalité } (3.1)\}.$$

Si $p = 1$, on trouve $\mathcal{D}_1^m (X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L} (X_1, ..., X_m; Y)$.

Dans l'article [31], L. Mezrag et K. Saadi ont étudié les propriétés de l'adjoint d'un opérateur $m-$linéaire Cohen fortement $p-$sommant et ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 3.1.1. *Soit $1 < p \leq +\infty$. Soit $T \in \mathcal{L} (X_1, ..., X_m; Y)$ et T^* son adjoint. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) L'opérateur multilinéaire T est Cohen fortement $p-$sommant.

ii) Il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que, pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ et tout $y^* \in Y^*$

$$\left| \left\langle T \left(x^1, ..., x^m \right), y^* \right\rangle \right| \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| x^j \right\|_{X_j} \left\| y^* \right\|_{L_{p^*}(\mu)}. \tag{3.2}$$

iii) L'opérateur adjoint T^* est p^*-sommant, de plus on a

$$d_p^m (T) = \pi_{p^*} (T^*) = \inf \{C, \ C \text{ vérifiant } (3.2)\}.$$

3.2 Opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants

La version linéaire a été introduite par Achour et Belacel dans [1]. Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions la notion les opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants. Une de nos contributions consiste à mettre en évidence la relation entre ces opérateurs et les opérateurs positivement $p-$sommants. Nous prouvons un nouveau type du théorème de Pietsch (Théorèmes de domination). Comme applications, nous avons également montré des relations avec les opérateurs m-linéaires multiples p-convexes. Ces résultats apparaîtront dans [10].

Définition 3.2.1. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Un opérateur $m-$linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow F$ est positif Cohen fortement $p-$sommant s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$; $1 \leq j \leq m$, et tous $y_1^*, ..., y_n^* \in F^*$

$$\left\| \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle \right\|_{\ell_1^n} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left\| (y_i^*)_{i=1}^n \right\|_{\ell_{p^*,|weak|}^n (F^*)}. \tag{3.3}$$

En plus, la classe des opérateurs $m-$linéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans F notée $\mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$. Notre espace est un espace de Banach pour la norme $d_p^{m+}(.)$, $d_p^{m+}(T)$ qui est la plus petite constante C vérifiant l'inégalité (3.3).

Remarque 3.2.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; F)$, Alors T est un opérateur multilinéaire positif Cohen fortement $p-$sommant si, et seulement si, il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\left\| \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle \right\|_{\ell_1^n} \leq K \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} w_{p^*}\left((y_i^*)_{i=1}^n \right), \tag{3.4}$$

pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$; $1 \leq j \leq m$, et $y_1^*, ..., y_n^* \in F^{*+}$.

En effet, pour la première partie, il suffit d'utiliser l'égalité

$$\left(\left\| (x_i)_{i=1}^n \right\|_{\ell_{p,|weak|}^n (E)} = \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, \xi \rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} = w_p((x_i)_{i=1}^n) \right).$$

Pour l'autre sens, soient $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$; $1 \leq j \leq m$, et $y_1^*, ..., y_n^* \in F^*$.

$$\begin{aligned}
\| \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle \|_{\ell_1^n} &= \left\| \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^{*+} - y_i^{*-} \right\rangle \right\|_{\ell_1^n} \\
&\leq \left\| \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^{*+} \right\rangle \right\| + \left\| \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^{*-} \right\rangle \right\| \\
&\leq K \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{*+}(y^{**}) \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\quad + K \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{*-}(y^{**}) \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

$$\leq 2K \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left| y_i^* \right| (y^{**}) \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} .$$

$$= C \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left\| (y_i^*)_{i=1}^n \right\|_{\ell_{p^*, |weak|}^n (F^*)} .$$

Proposition 3.2.3. *Soient $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; F)$, R un opérateur dans $\mathcal{L}^+(F, G)$ et S_j dans $\mathcal{L}(E_j, X_j)$ $(1 \leq j \leq m)$.*

(i) Si T est positif Cohen fortement $p-$sommant, alors RT est positif Cohen fortement $p-$sommant et $d_p^{m+}(RT) \leq d_p^{m+}(T) \|R\|$.

(ii) Si T est positif Cohen fortement $p-$sommant, alors $T \circ (S_1, ..., S_m)$ est positif Cohen fortement $p-$sommant et

$$d_p^{m+} \left(T \circ (S_1, ..., S_m) \right) \leq d_p^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| .$$

Démonstration. $i)$ Soit $T \in \mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$. Alors d'après (3.4) on a

$$\| \langle RT(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle \|_{\ell_1^n} = \| \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), R^*(y_i^*) \rangle \|_{\ell_1^n}$$

$$\leq d_p^{m+}(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle R^*(y_i^*), y^{**} \rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq d_p^{m+}(T) \|R\| \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i^*, \frac{R^{**}(y^{**})}{\|R^{**}\|} \right\rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq d_p^{m+}(T) \|R\| \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{G^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, \varphi \rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} .$$

Donc $RT \in \mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; G)$ et $d_p^{m+}(RT) \leq d_p^{m+}(T) \|R\|$.

$ii)$ Soit $T \in \mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$. Alors,

$$\| \langle T \circ (S_1, ..., S_m)(x_i^1, ... x_i^m), y_i^* \rangle \|_{\ell_1^n}$$

$$\leq d_p^{m+}(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| S_j x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \| y_i^*(y^{**}) \|_{\ell_{p^*}^n}$$

$$\leq d_p^{m+}(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|S_j\|^p \left\| x_i^j \right\|_{E_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \| y_i^*(y^{**}) \|_{\ell_{p^*}^n}$$

$$\leq d_p^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{E_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \| y_i^*(y^{**}) \|_{\ell_{p^*}^n} .$$

Donc, $T\circ(S_1,...,S_m)$ est un opérateur multilinéaire positif Cohen fortement $p-$sommant et

$$d_p^{m+}\left(T\circ\left(S_1,...,S_m\right)\right)\leq d_p^{m+}\left(T\right)\prod_{j=1}^{m}\|S_j\|. \blacksquare$$

Le résultat principal de ce chapitre est l'extension suivante du théorème de domination de Pietsch à la classe des opérateurs multilinéaire positifs Cohen fortement $p-$sommants. Pour la preuve, nous utilisons le lemme de Ky Fan, voir [22, p. 190].

Lemme 3.2.4. (Ky Fan). Soient E un espace vectoriel topologique séparé, $\mathcal{C}$ une partie convexe compacte de E. Soit M un ensemble de fonctions définies sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $(-\infty,+\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes:

$a)$ Toute $f\in M$ est convexe et semicontinue inférieurement;

$b)$ Si $g\in conv(M)$, il existe $f\in M$ telle que $g(x)\leq f(x)$, $\forall x\in\mathcal{C}$;

$c)$ Il existe $r\in\mathbb{R}$ telle que toute $f\in M$ prend une valeur r.

Alors, il existe $x_0\in\mathcal{C}$ telle que $f(x_0)\leq r$ pour toute $f\in M$.

Théorème 3.2.5. (**Théorème de Domination**)

Si un opérateur $m-$linéaire $T\in\mathcal{L}(X_1,...,X_m;F)$ est positif Cohen fortement $p-$sommant $(1<p\leq\infty)$, *alors il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{F^{**}}^{+}$ telle que pour tous $(x^1,...,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$ et $y^*\in F^{*+}$ nous avons:*

$$\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\leq d_p^{m+}\left(T\right)\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|\|y^*\|_{L_{p^*}\left(B_{F^{**}}^{+},\mu\right)}. \tag{3.5}$$

À l'inverse, s'il y a une constante positive C et une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{F^{**}}^{+}$ telle que pour tous $(x^1,...,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$ et $y^*\in F^{*+}$, on a:

$$\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\leq C\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|\|y^*\|_{L_{p^*}\left(B_{F^{**}}^{+},\mu\right)} \tag{3.6}$$

alors $T\in\mathcal{D}_p^{m+}\left(X_1,...,X_m;F\right)$ et $d_p^{m+}\left(T\right)\leq C$.

Démonstration. Tout d'abord, nous prouvons l'inverse, soient $(x_i^1,...,x_i^m)\in X_1\times\cdot\cdot$ $\cdot\times X_m$ $(1\leq i\leq n)$ et $y_1^*,...,y_n^*\in F^{*+}$. Nous avons d'après (3.6)

$$|\langle T(x_i^1,...,x_i^m), y_i^*\rangle| \leq C\prod_{j=1}^m \|x_i^j\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{1/p^*}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1,...,x_i^m), y_i^*\rangle| \\
&\leq C\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m \|x_i^j\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{1/p^*}\right) \quad \text{(par Hölder)} \\
&\leq C\left(\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m \|x_i^j\|\right)^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**})\right)\right)^{1/p^*} \\
&\leq C\left(\sum_{i=1}^n\prod_{j=1}^m \|x_i^j\|^p\right)^{1/p} \sup_{y^{**}\in B_{F^{**}}^+} \|(y_i^*(y^{**}))_{i=1}^n\|_{\ell_{p^*}^n}.
\end{aligned}$$

Cela implique que $T \in \mathcal{D}_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$ et $d_p^{m+}(T) \leq C$.

Pour prouver (3.5), soit $K = B_{F^{**}}^+$. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des mesures de probabilité sur $C(K)^*$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est un convexe compact dans $C(K)^*$ muni de sa topologie $*$-faible $\sigma(C(K)^*, C(K))$. Soit M un ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f_{((x_i^j),(y_i^*))}(\mu) = \sum_{i=1}^n (|\langle T(x_i^1,...,x_i^m), y_i^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^m \|x_i^j\|^p$$

$$-\frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \langle y_i^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**})) \tag{3.7}$$

où $(x_i^j)_{i=1}^n \subset X_j$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset F^{*+}, (1 \leq j \leq m)$.

Ces fonctions sont convexes et continues. Nous appliquons maintenant le lemme de Ky Fan avec $E = C(K)^*$. Soient f, g dans M et $\alpha \in [0,1]$ telles que

$$\begin{aligned}
f_{((x_i'^j),(y_i'^*))}(\mu) = &\sum_{i=1}^k (|\langle T(x_i'^1,...,x_i'^m), y_i'^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^m \|x_i'^j\|^p \\
&-\frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \langle y_i'^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))
\end{aligned}$$

et

$$g_{((x_i''^j),(y_i''^*))}(\mu) = \sum_{i=1}^l (|\langle T(x_i''^1,...,x_i''^m), y_i''^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^m \|x_i''^j\|^p$$

$$-\frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \langle y_i''^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**})).$$

Il s'ensuit que

$$\alpha f = \sum_{i=1}^{k}\alpha(|\langle T(x_i'^1,...,x_i'^m), y_i'^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i'^j\right\|^p$$
$$-\frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \langle y_i'^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))$$
$$= \sum_{i=1}^{k}(\left|\left\langle T\left(\alpha^{1/(mp)}x_i'^1,...,\alpha^{1/(mp)}x_i'^m\right), \alpha^{1/p^*}y_i'^*\right\rangle\right|$$
$$-\frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|\alpha^{1/(mp)}x_i'^j\right\|^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \left\langle\alpha^{1/p^*}y_i'^*, y^{**}\right\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}));$$

et

$$(1-\alpha)g = \sum_{i=1}^{l}(1-\alpha)(|\langle T(x_i''^1,...,x_i''^m), y_i''^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i''^j\right\|^p$$
$$-\frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \langle y_i''^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))$$
$$= \sum_{i=1}^{l}(\left|\left\langle T\left((1-\alpha)^{1/(mp)}x_i''^1,...,(1-\alpha)^{1/(mp)}x_i''^m\right), (1-\alpha)^{1/p^*}y_i''^*\right\rangle\right|$$
$$-\frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|(1-\alpha)^{1/(mp)}x_i''^j\right\|^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \left|\left\langle(1-\alpha)^{1/p^*}y_i''^*, y^{**}\right\rangle\right|^{p^*} d\mu(y^{**})).$$

Enfin, nous avons

$$\alpha f + (1-\alpha)g$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(|\langle T(x_i^1,...,x_i^m), y_i^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \langle y_i^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**})\right);$$

avec $n = k + l$,

$$x_i^j = \begin{cases} \alpha^{1/(mp)}x_i'^j & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ (1-\alpha)^{1/(mp)}x_i''^j & \text{si } k+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

et $y_i^* = \begin{cases} \alpha^{1/p^*}y_i'^* & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ (1-\alpha)^{1/p^*}y_i''^* & \text{si } k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$

Soit $y_0 \in B^+_{F^{**}}$ tel que

$$\sup_{y^{**}\in B^+_{F^{**}}} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y^{**}\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y_0\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}, \tag{3.8}$$

et f de la forme (3.7). On a

$$\begin{aligned} f(\delta_{y_0}) & \\ = & \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \langle y_i^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\delta_{y_0}(y^{**})\right) \\ = & \sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\sum_{i=1}^{n}\langle y_i^*, y_0\rangle^{p^*}. \end{aligned}$$

δ_{y_0} est la mesure de Dirac supportée par y_0.

En utilisant l'identité élémentaire

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{*+} \quad \alpha\beta = \inf_{\xi>0}\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^p + \frac{1}{p^*}(\xi\beta)^{p^*}\right\} \tag{3.9}$$

nous trouvons que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\sum_{i=1}^{n}\langle y_i^*, y_0\rangle^{p^*} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - d_p^{m+}(T)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{i=1}^{n}\langle y_i^*, y_0\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\right); \end{aligned}$$

et ceci d'après (3.4) est inférieur ou égale à zero. D'après le lemme de Ky Fan, il existe $\mu \in \mathcal{C}$ telle que $f(\mu) \leq 0$ pour toute $f \in M$. Si on prend $x = (x^1, ..., x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ et $y^* \in F^{*+}$, on a:

$$\begin{aligned} f(\mu) &= f_{(x,y^*)}(\mu) \\ &= \left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right), y^*\right\rangle\right| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*}\int_K \langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}) \leq 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq d_p^{m+}(T)\left(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|^p + \frac{1}{p^*}\int_K \langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**})\right).$$

Fixant $\xi > 0$. Et en remplaçant x^j par $\frac{1}{\xi^{1/m}}x^j$, et y^* par ξy^*, on trouve

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right| &= \left|\left\langle T\left(\frac{1}{\xi^{1/m}}x^1,...,\frac{1}{\xi^{1/m}}x^m\right),\xi y^*\right\rangle\right| \\
&\leq\ d_p^{m+}(T)\left(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|\frac{x^j}{\xi^{1/m}}\right\|^p+\frac{1}{p^*}\int_K\left\langle \xi y^*,y^{**}\right\rangle^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right) \\
&\leq\ d_p^{m+}(T)\left(\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\xi}\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|\right)^p+\frac{1}{p^*}\left(\xi\left(\int_K\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}\right)^{p^*}\right).
\end{aligned}
$$

Prendre l'inf sur tout $\xi>0$ et en utilisant l'identité élémentaire (3.9), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right| \\
&\quad\leq d_p^{m+}(T)\inf_{\xi>0}\left(\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\xi}\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|\right)^p+\frac{1}{p^*}\left(\xi\left(\int_K\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}\right)^{p^*}\right) \\
&\quad= d_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|\left(\int_K\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique

$$
\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\leq d_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|\,\|y^*\|_{L_{p^*}\left(B^+_{F^{**}},\mu\right)}.\ \blacksquare
$$

Proposition 3.2.6. *Un opérateur $m-$linéaire $T\in\mathcal{L}(X_1,...,X_m;F)$ est positif Cohen fortement p-sommant $(1<p\leq\infty)$, si et seulement s'il existe une constante positive $K>0$ et une mesure de probabilité de Radon μ sur $B^+_{F^{**}}$ telles que pour tous $(x^1,...,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$ et $y^*\in F^*$, on a*

$$
\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\leq K\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\left(|y^*|\left(y^{**}\right)\right)^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^*}. \tag{3.10}
$$

Démonstration. **Implication directe.** Soient $(x^1,...,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$ et $y^*\in F^*$ on a

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle T\left(x^{1},...,x^{m}\right),y^{*}\right\rangle\right| &= \left|\left\langle T\left(x^{1},...,x^{m}\right),y^{*+}-y^{*-}\right\rangle\right| \\
&\leq \left|\left\langle T\left(x^{1},...,x^{m}\right),y^{*+}\right\rangle\right|+\left|\left\langle T\left(x^{1},...,x^{m}\right),y^{*-}\right\rangle\right| \\
&\leq C\prod_{j=1}^{m}\|x^{j}\|\left(\int_{B^{+}_{F^{**}}}\left(y^{*+}\left(y^{**}\right)\right)^{p^{*}}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^{*}} \\
&\quad +C\prod_{j=1}^{m}\|x^{j}\|\left(\int_{B^{+}_{F^{**}}}\left(y^{*-}\left(y^{**}\right)\right)^{p^{*}}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^{*}} \\
&\leq 2C\prod_{j=1}^{m}\|x^{j}\|\left(\int_{B^{+}_{F^{**}}}\left(\left|y^{*}\right|\left(y^{**}\right)\right)^{p^{*}}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^{*}}.
\end{aligned}
$$

Implication indirecte. Soient $(x_i^1,...,x_i^m)\in X_1\times\cdots\times X_m, 1\leq i\leq n$, et $y_1^*,...,y_n^*\in F^*$. On a d'après (3.10)

$$
\left|\left\langle T\left(x_{i}^{1},...,x_{i}^{m}\right),y_{i}^{*}\right\rangle\right|\leq K\prod_{j=1}^{m}\left\|x_{i}^{j}\right\|\left(\int_{B^{+}_{F^{**}}}\left(\left|y_{i}^{*}\right|\left(y^{**}\right)\right)^{p^{*}}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^{*}}.
$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_{i}^{1},...,x_{i}^{m}\right),y_{i}^{*}\right\rangle\right| \\
&\leq K\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{m}\left\|x_{i}^{j}\right\|\left(\int_{B^{+}_{F^{**}}}\left(\left|y_{i}^{*}\right|\left(y^{**}\right)\right)^{p^{*}}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^{*}}\right] \\
&\leq K\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_{i}^{j}\right\|^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{B^{+}_{F^{**}}}\left(\left|y_{i}^{*}\right|\left(y^{**}\right)\right)^{p^{*}}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^{*}} \\
&\leq K\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_{i}^{j}\right\|^{p}\right)^{1/p}\sup_{y^{**}\in B^{+}_{F^{**}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left|y_{i}^{*}\right|\left(y^{**}\right)\right)^{p^{*}}\right)^{1/p^{*}} \\
&\leq K\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_{i}^{j}\right\|_{X_j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left\|\left(y_{i}^{*}\right)_{i=1}^{n}\right\|_{\ell^{n}_{p^{*},|weak|}(F^{*})}.
\end{aligned}
$$

Alors, $T\in\mathcal{D}_{p}^{m+}\left(X_1,...,X_m;F\right)$ et cela terminer la preuve. ■

Théorème 3.2.7. *Considérons* $1<p_1\leq p_2\leq+\infty$.

Si $T\in\mathcal{D}_{p_2}^{m+}\left(X_1,...,X_m;F\right)$, *alors* $T\in\mathcal{D}_{p_1}^{m+}\left(X_1,...,X_m;F\right)$ *et*

$$
d_{p_1}^{m+}\left(T\right)\leq d_{p_2}^{m+}\left(T\right).
$$

Démonstration. Si $T\in\mathcal{D}_{p_2}^{m+}\left(X_1,...,X_m;F\right)$, d'après (3.5) on a

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right| &\leq d_{p_2}^{m+}(T)\prod_{j=1}^m\left\|x^j\right\|\left\|y^*\right\|_{L_{p_2^*}\left(B_{F^{**}}^+,\mu\right)}\\
&\leq d_{p_2}^{m+}(T)\prod_{j=1}^m\left\|x^j\right\|\left\|y^*\right\|_{L_{p_1^*}\left(B_{F^{**}}^+,\mu\right)},
\end{aligned}
$$

tel que pour chaque $(x^1,...,x^m)\in X_1\times\cdots\times X_m$ et $y^*\in F^{*+}$.

Cela implique que $T\in\mathcal{D}_{p_1}^{m+}(X_1,...,X_m;F)$ et $d_{p_1}^{m+}(T)\leq d_{p_2}^{m+}(T)$. ■

Le théorème suivant, établi la relation entre les opérateurs positivement $p-$sommants et les opérateurs $m-$linéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants.

Théorème 3.2.8. *Soit $1<p\leq\infty$. Soit $T\in\mathcal{L}(X_1,...,X_m;F)$ et T^* son adjoint. Alors T appartient à $\mathcal{D}_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$, si et seulement si, T^* appartient à $\Pi_{p^*}^+(F^*,\mathcal{L}(X_1,...,X_m))$, et nous avons $d_p^{m+}(T)=\pi_{p^*}^+(T^*)$, où $\Pi_{p^*}^+$ est la classe des opérateurs positivement p^*-sommants* (voir [1, 8]).

Démonstration. Supposons que $T\in\mathcal{D}_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$. D'après (3.10) on a

$$
\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\leq d_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^m\left\|x^j\right\|\left(\int_{B_{F^{**}}^+}\left(\left|y^*\right|\left(y^{**}\right)\right)^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^*}
$$

pour tous $(x^j)\in X_j\,(1\leq j\leq m)$ et $y^*\in F^*$.

Nous prenons le supremum sur toutes les suites $(x^j)_{j=1}^m$ avec $\|x^j\|\leq1$, on obtient

$$
\sup_{\|x^1\|,...,\|x^m\|\leq1}\left|T^*\left(y^*\right)\left(x^1,...,x^m\right)\right|\leq d_p^{m+}(T)\left(\int_{B_{F^{**}}^+}\left(\left|y^*\right|\left(y^{**}\right)\right)^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^*}.
$$

Alors

$$
\left\|T^*\left(y^*\right)\right\|\leq d_p^{m+}(T)\left(\int_{B_{F^{**}}^+}\left(\left|y^*\right|\left(y^{**}\right)\right)^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{1/p^*}.
$$

Par le théorème de domination de Pietsch [1, Proposition 3.4], $T^*\in\Pi_{p^*}^+(F^*,\mathcal{L}(X_1,...,X_m))$ et $\pi_{p^*}^+(T^*)\leq d_p^{m+}(T)$.

Pour prouver l'inverse, supposons que $T^*\in\Pi_{p^*}^+(F^*;\mathcal{L}(X_1,...,X_m))$. On a pour tous $(x^j)\in X_j\,(1\leq j\leq m)$ et $y^*\in F^*$

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right| &= \left|T^*\left(y^*\right)\left(x^1,...,x^m\right)\right|\\
&\leq \left\|T^*\left(y^*\right)\right\|\prod_{j=1}^m\left\|x^j\right\|.
\end{aligned}
$$

En utilisant le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs positivement

p^*-sommants, on obtient

$$|\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle| \leq \pi^+_{p^*}(T^*) \prod_{j=1}^m \|x^j\| \left(\int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{1/p^*}.$$

Finalement, d'après la Proposition 3.2.6, T est un opérateur multilinéaire positif Cohen fortement $p-$sommant et $d^{m+}_p(T) = \pi^+_{p^*}(T^*)$. ■

Théorème 3.2.9. *Pour* $1 < p \leq \infty$.

$$\mathcal{D}^m_p(X_1,...,X_m;F) \subseteq \mathcal{D}^{m+}_p(X_1,...,X_m;F).$$

Démonstration. Si $T \in \mathcal{D}^m_p(X_1,...,X_m;F)$ par le Théorème 3.1 dans [31], l'opérateur $T^* \in \Pi_{p^*}(F^*;\mathcal{L}(X_1,...,X_m))$. D'après la Proposition 3 dans [8], nous avons $T^* \in \Pi^+_{p^*}(F^*;\mathcal{L}(X_1,...,X_m))$. Par le Théorème 3.2.8, on trouve $T \in \mathcal{D}^{m+}_p(X_1,...,X_m;F)$. ■

3.3 Applications

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ désigne le produit tensoriel projectif de $X_1,...,X_m$. Chaque $T \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ a un opérateur linéaire associé $T_L \in \mathcal{L}(X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m;Y)$ défini par $\forall x^j \in X_j$ $(j=1,...,m)$, $T_L(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = T(x^1,...,x^m)$. Soit $\delta_m : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ l'opérateur canonique $m-$linéaire, c'est-à-dire $\delta_m(x^1,...,x^m) = x^1 \otimes \cdots \otimes x^m$. Alors,

$$T = T_L \circ \delta_m. \tag{3.11}$$

Proposition 3.3.1. *Soient* $1 < p \leq \infty$ *et* $T \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;F)$. *Alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

i) $T \in \mathcal{D}^{m+}_p(X_1,...,X_m;F)$;

ii) $T_L \in \mathcal{D}^+_p(X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m;F)$;

iii) Il existe un espace de Banach $Z, u \in \mathcal{D}^+_p(Z;F)$ et $S \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Z)$ tels que $T = uS$.

Démonstration. *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* Soit $T \in \mathcal{D}^{m+}_p(X_1,...,X_m;F)$ et pour tout $y^* \in F^*$ et $z \in X_1\widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, z admet une représentation $z = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} (\|x_i^1\| \times \cdots \times \|x_i^m\|) \leq \|z\| + \varepsilon.$$

D'après la Proposition 3.2.6, nous avons

$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| \leq d_p^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} \|x^j\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{1/p^*}$. Alors

$$\begin{aligned}
|\langle T_L(z), y^* \rangle| &= \left| \left\langle T_L \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \right), y^* \right\rangle \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y^* \rangle \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y^* \rangle| \\
&\leq d_p^{m+}(T) \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{1/p^*} \\
&\leq d_p^{m+}(T)(\|z\| + \varepsilon) \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{1/p^*}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\langle T_L(z), y^* \rangle| \leq d_p^{m+}(T) \|z\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{1/p^*}.$$

Il découle de [1, Theorem 4.13] que $T_L \in \mathcal{D}_p^+(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m; F)$.

$ii) \Longrightarrow iii)$ Si $T_L \in \mathcal{D}_p^+(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m; F)$ et le fait que $T = T_L \circ \delta_m$, on prend donc $Z = X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$.

$iii) \Longrightarrow i)$ Supposons qu'il existe un espace de Banach $Z, u \in \mathcal{D}_p^+(Z; F)$ et $S \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Z)$ tels que $T = uS$. Alors

$\|S(x^1, ..., x^m)\| \leq \|S\| \prod_{j=1}^{m} \|x^j\|$ et par [1, Theorem 4.13]

$|\langle u(z), y^* \rangle| \leq d_p^{m+}(u) \|z\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{1/p^*}$. Alors

$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| = |\langle u(S(x^1, ..., x^m)), y^* \rangle|$

$$\leq \quad d_p^{m+}(u) \left\| S(x^1,...,x^m) \right\| \left(\int_{B^+_{F^{**}}} \left(|y^*| \left(y^{**} \right) \right)^{p^*} d\mu \left(y^{**} \right) \right)^{1/p^*}$$

$$\leq \quad d_p^{m+}(u) \left\| S \right\| \prod_{j=1}^{m} \left\| x^j \right\| \left(\int_{B^+_{F^{**}}} \left(|y^*| \left(y^{**} \right) \right)^{p^*} d\mu \left(y^{**} \right) \right)^{1/p^*} .$$

Nous avons, selon la Proposition 3.2.6, $T \in \mathcal{D}_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$. ∎

Définition 3.3.2. Pour $1 \leq p < \infty$, un opérateur $m-$linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow F$ est appelé multiple $p-$convexe s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour chaque suite finie $\left(x_i^j\right)_{i=1}^{n_j} \subset X_j$; $1 \leq j \leq m$.

$$\left\| \left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left| T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou

$$\left\| \bigvee_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left| T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right) \right| \right\| \leq C \prod_{j=1}^{m} \max_{1 \leq i \leq n} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}, \text{ quand } p = \infty.$$

Dans ce cas, nous donnons la norme de l'opérateur multiple $p-$convexe T par

$$C_p^{vex}(T) := \inf \left\{ C : C \text{ vérifie l'inégalité ci-dessus} \right\}.$$

Il est facile de vérifier que la classe $\mathcal{C}_p^{vex,\ mult}(X_1,...,X_m;F)$ d'opérateurs $m-$linéaires multiples $p-$convexes, avec sa norme associée $C_p^{vex}(.)$, est un espace de Banach.

Proposition 3.3.3. Si $1 < p < \infty$, alors

1)$\mathcal{D}_p^{m+}(X_1,...,X_m;F) \subset \mathcal{C}_p^{vex,\ mult}(X_1,...,X_m;F)$.

2)$\mathcal{D}_p^{m+}(X_1,...,X_m;c_0) = \mathcal{L}(X_1,...,X_m;c_0)$.

Démonstration. 1) Soit $T \in \mathcal{D}_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$, alors $T = T_L \circ \delta_m$ tel que $T_L \in \mathcal{D}_p^{+}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m;F)$ et $\delta_m(X_1,...,X_m;X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m)$ l'opérateur canonique $m-$linéaire. Par [1, Proposition 5.3], $T_L \in \mathcal{C}_p^{vex}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m;F\right)$ où $\mathcal{C}_p^{vex}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m,F\right)$ la classe de tous les opérateurs $p-$convexes de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ dans F voir [22].

Pour chaque suite finie $\left(x_i^j\right)_{i=1}^{n_j} \subseteq X_j$; $1 \leq j \leq m$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n_1,\dots,n_m} \left| T\left(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m\right) \right|^p \right)^{1/p} \right\| &= \left\| \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n_1,\dots,n_m} \left| T_L \circ \delta_m \left(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m\right) \right|^p \right)^{1/p} \right\| \\
&= \left\| \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n_1,\dots,n_m} \left| T_L \left(\delta_m \left(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m\right) \right) \right|^p \right)^{1/p} \right\| \\
&\leq M \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n_1,\dots,n_m} \left\| \delta_m \left(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m\right) \right\|^p \right)^{1/p} \\
&\leq M \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n_1,\dots,n_m} \left\| x_{i_1}^1 \right\|^p \times \cdots \times \left\| x_{i_m}^m \right\|^p \right)^{1/p} \\
&= M \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left\| x_{i_1}^1 \right\|^p \times \sum_{i_2=1}^{n_2} \left\| x_{i_2}^2 \right\|^p \times \cdots \times \sum_{i_m=1}^{n_m} \left\| x_{i_m}^m \right\|^p \right)^{1/p} \\
&= M \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^j \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Puis par la Définition 3.3.2, $T \in \mathcal{C}_p^{vex,\ mult}(X_1, ..., X_m; F)$.

2) Il est clair que

$$\mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; c_0) \subset \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; c_0).$$

Maintenant, prenons $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; c_0)$, puis $T = u \circ \delta_m$ tel que $u \in \mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m; c_0)$, nous avons par [1, Proposition 5.3], $u \in \mathcal{D}_p^{+}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m; c_0)$, et par la proposition ci-dessus, $T \in \mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; c_0)$, dans ce cas

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; c_0) \subset \mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; c_0).$$

Alors

$$\mathcal{D}_p^{m+}(X_1, ..., X_m; c_0) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; c_0). \blacksquare$$

CHAPITRE 4

Théorèmes de domination et Kwapień-factorisation pour les opérateurs multilinéaires positifs Cohen p-nucléaires

Dans [3], Achour et Alouani ont représenté la classe $\mathcal{N}_p^m$ de tous les opérateurs multilinéaires Cohen p-nucléaires comme suit; $\mathcal{N}_p^m = \mathcal{D}_p^m \circ (\Pi_p, ..., \Pi_p)$, et dans [3, Theorem 2.5], ils ont caractérisé cette classe par le théorème de domination de Piestch. Dans ce chapitre, nous généralisons cette notion aux opérateurs positifs et prouvons, entre autres résultats, le théorème de domination pour cette nouvelle classe d'opérateurs.

Définition 4.0.1 [16]. Soit $1 \leq p < \infty$. Un opérateur m-linéaire $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow Y$ est positif multiple p-sommant s'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout choix de suites finies $(x_i^j)_{i=1}^{n_j} \subseteq E_j^+ \,(1 \leq j \leq m)$,

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^{n_j} \right\|_{\ell_{p,weak}^n\left(E_j\right)} . \tag{4.1}$$

Dans ce cas, nous définissons la norme T par

$$\Lambda_p(T) = \inf \{K : K \text{ vérifie l'inégalité } (4.1)\}$$

Il est facile de vérifier que la classe $\Lambda_p^{mult}(E_1, ..., E_m; Y)$, des opérateurs multilinéaires positifs multiple p-sommants, munie par sa norme associée $\Lambda_p(.)$, est un espace de Banach.

4.1 Opérateurs multilinéaires Cohen p-nucléaires

Les opérateurs multilinéaires Cohen p-nucléaires ont été introduits par Achour et Alouani dans [3], tel que un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ est Cohen $p-$nucléaire $(1 < p < \infty)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$ et tous $y_1^*, ..., y_n^* \in F^*$, nous avons

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle \right| \leq C \left(\sup_{\substack{x^{j*} \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left| \left\langle x_i^j, x^{j*} \right\rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| y_i^*(y) \right\|_{\ell_{p^*}^n} . \quad (4.2)$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen $p-$nucléaires de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y, qu'est notée par $\mathcal{N}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ est un espace de Banach muni par la norme $n_p^m(.)$, oú $n_p^m(u)$ la plus petite constante C vérifie (4.2).

Dans le cas $p = \infty$, la formule (4.2) s'écrit :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle \right| \leq C \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j} \right) \sup_{y \in B_Y} \left\| y_i^*(y) \right\|_{\ell_1^n} .$$

4.2 Opérateurs multilinéaires positifs Cohen p-nucléaires

Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions la notion des opérateurs multilinéaires positifs Cohen p-nucléaires. Nous prouvons un analogue naturel du théorème de domination de Pietsch pour cette classe et caractérisons leurs conjugués. La motivation initiale de notre recherche est de donner une version multilinéaire du théorème de la factorisation de Kwapień : $\mathcal{N}_p^{m+} = \mathcal{D}_p^{m+} \circ \left(\Pi_p^+, ..., \Pi_p^+\right)$. En application, nous étudions une relation entre certaines classes d'opérateurs m-linéaires positifs (Multiple p-sommants et Cohen fortement p-sommants). Ces résultats apparaîtront dans [7].

Définition 4.2.1. On dit qu'un opérateur m-linéaire $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ est positif Cohen p-nucléaire ($1 < p < \infty$) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in E_j$ ($1 \leq j \leq m$) et tous $y_1^*, ..., y_n^* \in F^*$, nous avons

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle\right| \leq C \left(\sup_{\substack{x^{j*} \in B^+_{E_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\langle \left|x_i^j\right|, x^{j*} \right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{\ell^n_{p^*,|weak|}(F^*)}. \quad (4.3)$$

De plus, la classe de tous les opérateurs m-linéaires positifs Cohen p-nucléaires de $E_1 \times \cdots \times E_m$ dans F est notée par $\mathcal{N}_p^{m+}(E_1, ..., E_m; F)$, ou $\mathcal{N}_p^{+}(E; F)$ si $m = 1$; l'espace des opérateurs linéaires positifs Cohen p-nucléaires. Notre espace est un espace de Banach avec la norme $n_p^{m+}(.)$, $n_p^{m+}(T)$ qui est la plus petite constante C vérifiant l'inégalité (4.3). Pour $p = \infty$, on a $\mathcal{N}_\infty^{m+}(E_1, ..., E_m; F) = \mathcal{D}_\infty^{m+}(E_1, ..., E_m; F)$.

Proposition 4.2.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$. Alors T est un opérateur multilinéaire positif Cohen $p-$nucléaire si, et seulement si, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle \leq C \left(\sup_{\substack{x^{j*} \in B^+_{E_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^j, x^{j*} \right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} w_{p^*}\left((y_i^*)_{i=1}^n\right), \quad (4.4)$$

pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in E_j^+$ ($1 \leq j \leq m$), et $y_1^*, ..., y_n^* \in F^{*+}$.

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, on utilise les égalités

$$y_i^* = y_i^{*+} - y_i^{*-} \text{ et } |y_i^*| = y_i^{*+} + y_i^{*-}. \blacksquare$$

Proposition 4.2.3. *Soient $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$, R un opérateur positif $\mathcal{L}^+(F, G)$ et S_j un opérateur positif $\mathcal{L}^+(F_j, E_j)$ $(1 \leq j \leq m)$.*

(1) Si T est positif Cohen p-nucléaire, alors RT est positif Cohen p-nucléaire de $E_1 \times \cdots \times E_m$ dans G et $n_p^{m+}(RT) \leq n_p^{m+}(T) \|R\|$.

(2) Si T est positif Cohen p-nucléaire, alors $T \circ (S_1, ..., S_m)$ est positif Cohen p-nucléaire de $F_1 \times \cdots \times F_m$ dans F et

$$n_p^{m+}(T \circ (S_1, ..., S_m)) \leq n_p^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\|.$$

Démonstration. 1) Soit $T \in \mathcal{N}_p^{m+}(E_1, ..., E_m; F)$. Nous avons par (4.4),

$$\sum_{i=1}^{n} \langle RT(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), R^*(y_i^*) \rangle$$

$$\leq n_p^{m+}(T) \left(\sup_{\substack{x^{j*} \in B_{E_j^*}^+ \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^j, x^{j*} \right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle R^*(y_i^*), y^{**} \rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq n_p^{m+}(T) \|R\| \left(\sup_{\substack{x^{j*} \in B_{E_j^*}^+ \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^j, x^{j*} \right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i^*, \frac{R^{**}(y^{**})}{\|R^{**}\|} \right\rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq n_p^{m+}(T) \|R\| \left(\sup_{\substack{x^{j*} \in B_{E_j^*}^+ \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^j, x^{j*} \right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\psi \in B_{G^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, \psi \rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Donc, $RT \in \mathcal{N}_p^{m+}(E_1, ..., E_m; G)$ et $n_p^{m+}(RT) \leq n_p^{m+}(T) \|R\|$.

2) Soit $T \in \mathcal{N}_p^{m+}(E_1, ..., E_m; F)$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \langle T \circ (S_1, ..., S_m)(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle$$

$$\leq n_p^{m+}(T) \left(\sup_{\substack{x^{j*} \in B_{E_j^*}^+ \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\langle S_j x_i^j, x^{j*} \right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \|y_i^*(y^{**})\|_{\ell_{p^*}^n}$$

$$\leq n_p^{m+}(T)\,\|S_j\| \left(\sup_{\substack{x^{j*}\in B^+_{E_j^*} \\ 1\leq j\leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^j, \frac{S_j^*(x^{j*})}{\|S_j\|} \right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**}\in B^+_{F^{**}}} \|y_i^*(y^{**})\|_{\ell_{p^*}^n}$$

$$\leq n_p^{m+}(T)\,\|S_j\| \left(\sup_{\substack{\varphi_j\in B^+_{F_j^*} \\ 1\leq j\leq m}} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**}\in B^+_{F^{**}}} \|y_i^*(y^{**})\|_{\ell_{p^*}^n}.$$

Donc, $T\circ(S_1,...,S_m)$ est un opérateur multilinéaire positif Cohen p-nucléaire et

$$n_p^{m+}(T\circ(S_1,...,S_m)) \leq n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\|S_j\|. \quad \blacksquare$$

Le résultat principal de ce chapitre est l'extension suivante du théorème de domination de Pietsch à la classe des opérateurs multilinéaire positifs Cohen p-nucléaires. Pour la preuve, nous utilisons le lemme de Ky Fan.

Théorème 4.2.4. *Un opérateur m-linéaire $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ est positif Cohen p-nucléaire $(1<p\leq\infty)$, si et seulement s'il existe une constante positive $C>0$ et des mesures de probabilité de Radon μ_j sur $B^+_{E_j^*}$ $(1\leq j\leq m)$ et λ sur $B^+_{F^{**}}$ telles que pour tous $(x^1,...,x^m)\in E_1^+\times\cdots\times E_m^+$ et $y^*\in F^{*+}$, nous avons*

$$\left\langle T(x^1,...,x^m),y^*\right\rangle \leq C\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|_{L_p\left(B^+_{E_j^*},\mu_j\right)}\|y^*\|_{L_{p^*}\left(B^+_{F^{**}},\lambda\right)}. \tag{4.5}$$

Démonstration. Tout d'abord, nous prouvons la première implication. Soient $(x_i^1,...,x_i^m)\in E_1^+\times\cdots\times E_m^+$ et $y_i^*\in F^{*+}$, d'après (4.5) on a

$$\sum_{i=1}^{n}\langle T(x_i^1,...,x_i^m),y_i^*\rangle$$

$$\leq C\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B^+_{E_j^*}}\left\langle x_i^j,x^{j*}\right\rangle^p d\mu_j(x^{j*})\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\langle y_i^*,y^{**}\rangle^{p^*}d\lambda(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}\right),$$

pour tout $1\leq i\leq n$. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n}\langle T(x_i^1,...,x_i^m),y_i^*\rangle$$

$$\leq C\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\int_{B^+_{E_j^*}}\left\langle x_i^j, x^{j*}\right\rangle^p d\mu_j\left(x^{j*}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{B^+_{F^{**}}}\left\langle y_i^*, y^{**}\right\rangle^{p^*} d\lambda\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}$$
$$\leq C\left(\sup_{x^{j*}\in B^+_{E_j^*}}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\langle x_i^j, x^{j*}\right\rangle^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{y^{**}\in B^+_{F^{**}}}\sum_{i=1}^{n}\left\langle y_i^*, y^{**}\right\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$$
$$\leq C\left(\sup_{x^{j*}\in B^+_{E_j^*}}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\langle x_i^j, x^{j*}\right\rangle^p\right)^{\frac{1}{p}} w_{p^*}\left((y_i^*)_{i=1}^n\right).$$

Cela implique que $T \in \mathcal{N}_p^{m+}(E_1, ..., E_m; F)$ et $n_p^{m+}(T) \leq C$.

Pour prouver l'inverse, supposons que $T \in \mathcal{N}_p^{m+}(E_1, ..., E_m; F)$. Suivons l'idée appliquée dans [10]. Nous considérons les ensembles $P\left(B^+_{E_j^*}\right)(1 \leq j \leq m)$ et $P\left(B^+_{F^{**}}\right)$ des mesures de probabilité sur $C\left(B^+_{E_j^*}\right)^*$ et $C\left(B^+_{F^{**}}\right)^*$ respectivement. Ce sont des ensembles convexes qui sont compacts lorsque nous munissons $C\left(B^+_{E_j^*}\right)^*$ et $C\left(B^+_{F^{**}}\right)^*$ par leurs topologie $*$-faible. Nous allons appliquer le lemme de Ky Fan avec $E = C\left(B^+_{E_1^*}\right)^* \times \cdots \times C\left(B^+_{E_m^*}\right)^* \times C\left(B^+_{F^{**}}\right)^*$ et $\mathcal{C} = P\left(B^+_{E_1^*}\right) \times \cdots \times P\left(B^+_{E_m^*}\right) \times P\left(B^+_{F^{**}}\right)$.

Soit M l'ensemble des fonctions sur $\mathcal{C}$ avec des valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(\mu_1, ..., \mu_m, \lambda)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle - \frac{n_p^{m+}(T)}{p}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\int_{B^+_{E_j^*}}\left\langle x_i^j, x^{j*}\right\rangle^p d\mu_j\left(x^{j*}\right) \qquad (4.6)$$
$$-\frac{n_p^{m+}(T)}{p^*}\sum_{i=1}^{n}\int_{B^+_{F^{**}}}\left\langle y_i^*, y^{**}\right\rangle^{p^*} d\lambda\left(y^{**}\right),$$

pour tout $(\mu_1, ..., \mu_m, \lambda) \in \mathcal{C}$ avec $(x_i^j)_{i=1}^n \subset E_j^+$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset F^{*+}, (1 \leq j \leq m)$. Ces fonctions sont continues et affines et que l'ensemble M est un cône convexe, et par conséquent les conditions (a) et (b) du lemme de Ky Fan sont remplies.

Soient $x_0^{j*} \in B^+_{E_j^*}$ et $y_0 \in B^+_{F^{**}}$ tels que

$$\sup_{y^{**}\in B^+_{F^{**}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle y_i^*, y^{**}\right\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle y_i^*, y_0\right\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}; \qquad (4.7)$$

et

$$\sup_{x^{j*}\in B^+_{E_j^*}} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^{j*}, x^{j*}\right\rangle^p = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^{j*}, x_0^{j*}\right\rangle^p ; \tag{4.8}$$

et f de la forme (4.6). En utilisant l'identité élémentaire

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \qquad \alpha\beta = \inf_{\xi>0} \left\{ \frac{1}{p}\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^p + \frac{1}{p^*}(\xi\beta)^{p^*} \right\} \tag{4.9}$$

nous trouvons que

$$\begin{aligned}
&f\left(\delta_{x_0^{*1}}, ..., \delta_{x_0^{*m}}, \delta_{y_0}\right) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle - \frac{n_p^{m+}(T)}{p} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \int_{B^+_{E_j^*}} \left\langle x_i^j, x^{j*}\right\rangle^p d\delta_{x_0^{*j}}\left(x^{j*}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{n_p^{m+}(T)}{p^*} \sum_{i=1}^{n} \int_{B^+_{F^{**}}} \left\langle y_i^*, y^{**}\right\rangle^{p^*} d\delta_{y_0}\left(y^{**}\right) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle - \frac{n_p^{m+}(T)}{p} \sup_{x^{j*}\in B^+_{E_j^*}} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^j, x^{j*}\right\rangle^p \\
&\qquad\qquad - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i^*, y\right\rangle^{p^*} \right) \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{n} \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle - n_p^{m+}(T) \left(\left(\sup_{\substack{x^{j*}\in B^+_{E_j^*} \\ 1\leq j\leq m}} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \left\langle x_i^j, x^{j*}\right\rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i^*, y_0\right\rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \right).
\end{aligned}$$

Où δ_x est la mesure de Dirac supportée par x, et ceci d'après (4.4) est inférieur ou égale à zero. D'après le lemme de Ky Fan, il existe $(\mu_1, ..., \mu_m, \lambda) \in \mathcal{C}$ telle que $f(\mu_1, ..., \mu_m, \lambda) \leq 0$ pour toute $f \in M$. Si on prend $x = (x^1, ..., x^m) \in E_1^+ \times \cdots \times E_m^+$ et $y^* \in F^{*+}$, on a:

$$\begin{aligned}
&f(\mu_1, ..., \mu_m, \lambda) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle - \frac{n_p^{m+}(T)}{p} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \int_{B^+_{E_j^*}} \left\langle x_i^j, x^{j*}\right\rangle^p d\mu_j\left(x^{j*}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \sum_{i=1}^{n} \int_{B^+_{F^{**}}} \left\langle y_i^*, y^{**}\right\rangle^{p^*} d\lambda\left(y^{**}\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle \le n_p^{m+}(T)\left(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m}\int_{B^+_{E^*_j}}\langle x^j, x^{j*}\rangle^p d\mu_j(x^{j*}) - \frac{1}{p^*}\int_{B^+_{F^{**}}}\langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\lambda(y^{**})\right).$$

Fixant $\xi > 0$. Et en remplaçant x^j par $\frac{1}{\xi^{1/m}}x^j$, et y^* par ξy^*, on trouve

$$\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle = \left\langle T\left(\frac{1}{\xi^{1/m}}x^1,...,\frac{1}{\xi^{1/m}}x^m\right), \xi y^*\right\rangle$$

$$\le n_p^{m+}(T)\left(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m}\int_{B^+_{E^*_j}}\left\langle \frac{1}{\xi^{1/m}}x^j, x^{j*}\right\rangle^p d\mu_j(x^{j*}) - \frac{1}{p^*}\int_{B^+_{F^{**}}}\langle \xi y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\lambda(y^{**})\right)$$

$$\le n_p^{m+}(T)\left(\frac{1}{p}\left(\left(\frac{1}{\xi}\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B^+_{E^*_j}}\langle x^j, x^{j*}\rangle^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p d\mu_j(x^{j*})\right) - \frac{1}{p^*}\left(\xi\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\lambda(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}\right)^{p^*}\right)$$

Prendre l'inf sur tout $\xi > 0$ et en utilisant l'identité élémentaire (4.9), on obtient

$$\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle \le n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B^+_{E^*_j}}\langle x^j, x^{j*}\rangle^p d\mu_j(x^{j*})\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\lambda(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Ce qui implique

$$\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle \le n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|_{L_p\left(B^+_{E^*_j},\mu_j\right)}\|y^*\|_{L_{p^*}\left(B^+_{F^{**}},\lambda\right)}. \blacksquare$$

Nous avons aussi le résultat suivant:

Théorème 4.2.5. *Un opérateur m-linéaire $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ est positif Cohen p-nucléaire $(1 < p \le \infty)$, si et seulement s'il existe une constante positive C et mesures de probabilité de Radon μ_1 sur $B^+_{E^*_1}\times\cdots\times B^+_{E^*_m}$ et μ_2 sur $B^+_{F^{**}}$ telles que*

$$\left\langle T(x^1,...,x^m), y^*\right\rangle \le C\left(\int_{B^+_{E^*_1}\times\cdots\times B^+_{E^*_m}}\left(\prod_{j=1}^{m}\left\langle x^j, \varphi^j\right\rangle\right)^p d\mu_1\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\langle y^*, \varphi\rangle^{p^*} d\mu_2\right)^{\frac{1}{p^*}} \tag{4.10}$$

pour tous $(x^1,...,x^m) \in E^+_1\times\cdots\times E^+_m$ et $y^* \in F^{*+}$.

Pour prouver ce théorème, nous utilisons le théorème général de Domination de Pietsch récemment présenté par Pellegrino et al. dans [32].

Soient $X_1,...,X_m, Y$ et $Z_1,...,Z_k$ des ensembles non vides (arbitraires), $\mathcal{H}$ une famille des opérateurs de $X_1\times\cdots\times X_m$ dans Y. Soient $K_1,...,K_t$ des espaces topologiques compacts de Hausdorff et $G_1, ..., G_t$ sont des espaces de Banach. Supposons que les opérateurs

$$\begin{cases} R_j : K_j \times Z_1 \times \cdots \times Z_k \times G_j \longrightarrow [0, +\infty), j = 1, ..., t \\ S : \mathcal{H} \times Z_1 \times \cdots \times Z_k \times G_1 \times \cdots \times G_t \longrightarrow [0, +\infty). \end{cases}$$

satisfassent:

(1) Pour chaque $x^l \in Z_l$ et $b \in G_j$, avec $(j, l) \in \{1, ..., t\} \times \{1, ..., k\}$ l'opérateur

$$(R_j)_{x^1,...,x^k,b} : K_j \longrightarrow [0, +\infty),$$

défini par

$$(R_j)_{x^1,...,x^k,b} (\varphi_j) = R_j (\varphi_j, x^1, ..., x^k, b)$$

est continu.

(2) Les inégalités suivantes sont valables:

$$\begin{cases} R_j (\varphi_j, x^1, ..., x^k, \eta_j b^j) \leq \eta_j R_j (\varphi_j, x^1, ..., x^k, b^j) \\ S(f, x^1, ..., x^k, \alpha_1 b^1, ..., \alpha_t b^t) \geq \alpha_1 ... \alpha_t S(f, x^1, ..., x^k, b^1, ..., b^t), \end{cases}$$

pour tous $\varphi_j \in K_j, x^l \in Z_l, 0 \leq \eta_j, \alpha_j \geq 1, b^j \in G_j$, avec $(j, l) \in \{1, ..., t\} \times \{1, ..., k\}$ et $f \in \mathcal{H}$.

Définition 4.2.6. [32]. Si $0 \leq p_1, ..., p_t, q < \infty$, avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t}$. Un opérateur $f : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ de $\mathcal{H}$ est dit $R_1, ..., R_t$-S-abstract $(p_1, ..., p_t)$-sommant s'il y a une constante $C > 0$ pour que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} S(f, x_i^1, ..., x_i^k, b_i^1, ..., b_i^t)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{j=1}^{t} \sup_{\varphi_j \in K_j} \left(\sum_{i=1}^{n} R_j (\varphi_j, x_i^1, ..., x_i^k, b_i^j)^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}, \quad (4.11)$$

pour tous $(x_i^s)_{i=1}^n \subset Z_s, (b_i^j)_{i=1}^n \subset G_j, n \in \mathbb{N}$ et $(s, j) \in \{1, ..., k\} \times \{1, ..., t\}$.

Théorème 4.2.7. [32]. *un opérateur $f \in \mathcal{H}$ est $R_1, ..., R_t$-S-abstract $(p_1, ..., p_t)$-sommant si et seulement s'il existe une constante positive C et mesures de probabilité de*

Borel μ_j *sur* K_j*, telles que*

$$S(f, x^1, ..., x^k, b^1, ..., b^t) \leq C \prod_{j=1}^{t} \left(\int_{K_j} R_j \left(\varphi_j, x^1, ..., x^k, b^j \right)^{p_j} d\mu_j \right)^{\frac{1}{p_j}}, \tag{4.12}$$

pour tous $x^l \in Z_l, l \in \{1, ..., k\}$ *et* $b^j \in G_j$ *avec* $j = 1, ..., t$.

Preuve du Théorème 4.2.5. En choisissant les paramètres

$$\begin{cases} t = 2, k = m \\ Z_l = E_l^+, l = 1, ..., m \\ K_1 = B_{E_1^*}^+ \times \cdots \times B_{E_m^*}^+ \text{ et } K_2 = B_{F^{**}}^+ \\ G_1 = \mathbb{K}, G_2 = F^{*+} \\ \mathcal{H} = \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F) \\ q = 1, p_1 = p, p_2 = p^* \\ S(T, x^1, ..., x^m, b, y^*) = |b| \left\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \right\rangle \\ R_1 \left((\varphi^1, ..., \varphi^m), (x^1, ..., x^m), b \right) = |b| \prod_{j=1}^{m} \left\langle x^j, \varphi^j \right\rangle \\ R_2 \left(\varphi, x^1, ..., x^m, y^* \right) = \left\langle y^*, \varphi \right\rangle, \end{cases}$$

on peut facilement conclure que $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ est positif Cohen p-nucléaire si et seulement si T est R_1, R_2-S-abstract (p, p^*)-sommant. Le Théorème 4.2.7 dit que T est R_1, R_2-S-abstract (p, p^*)-sommant si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ et des mesures de probabilité μ_1*sur* K_1 *et* μ_2 *sur* K_2 telles que

$$S(T, x^1, ..., x^m, b, y^*) \leq C \left(\int_{K_1} \left(\prod_{j=1}^{m} \left\langle x^j, \varphi^j \right\rangle \right)^p d\mu_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{K_2} \left\langle y^*, \varphi \right\rangle^{p^*} d\mu_2 \right)^{\frac{1}{p^*}} \tag{4.13}$$

et on trouve (4.10). ■

Remarque. Les deux Théorèmes **4.2.4** et **4.2.5** sont équivalents.

Proposition 4.2.8. *Un opérateur* $m-$*linéaire* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ *est positif Cohen* p*-nucléaire* $(1 < p \leq \infty)$*, si et seulement s'il existe une constante positive* $C > 0$ et *mesures de probabilité de Radon* μ_j *sur* $B_{E_j^*}^+$ $(1 \leq j \leq m)$ *et* λ *sur* $B_{F^{**}}^+$ *telles que*

$$|\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\rangle| \leq$$
$$n_p^{m+}\left(T\right)\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B^+_{E_j^*}}\langle|x^j|,x^{j*}\rangle^p\,d\mu_j\left(x^{j*}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\langle|y^*|,y^{**}\rangle^{p^*}\,d\lambda\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}};$$

pour tout $(x^1,...,x^m)\in E_1\times\cdots\times E_m$ et $y^*\in F^*$.

4.3 Théorème de factorisation de Kwapień

Nous présentons maintenant notre résultat principal, le théorème de la factorisation de Kwapień. Pour la preuve, nous utiliserons le lemme dû à D. Achour et A. Belacel, voir [1, Lemma 3.5].

Théorème 4.3.1. *Soient* $1<p\leq\infty$ *et* $j=1,...,m$. *Alors* $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ *est positif Cohen p-nucléaire, si et seulement s'il existe des espaces de Banach* $G_1,...,G_m$, *des opérateurs positivement p-sommants* $u_j\in\mathcal{L}(E_j,G_j)$ *et un opérateur multilinéaire positif Cohen fortement* $p-$*sommant* $S\in\mathcal{L}(G_1,...,G_m;F)$ *tels que* $T=S\left(u_1,...,u_m\right)$, *i.e.* $\mathcal{N}_p^{m+}=\mathcal{D}_p^{m+}\circ\left(\Pi_p^+,...,\Pi_p^+\right)$, *de plus*

$$n_p^{m+}(T)=\inf\left\{d_p^{m+}\left(S\right)\prod_{j=1}^{m}\pi_p^+(u_j):T=S\left(u_1,...,u_m\right)\right\}.$$

Démonstration. L'implication directe. Nous prenons $T\in\mathcal{N}_p^{m+}\left(E_1,...,E_m;F\right)$. Alors, par (4.5), il existe des mesures de probabilité du Radon μ_j sur $B^+_{E_j^*}$ $(1\leq j\leq m)$ et λ sur $B^+_{F^{**}}$ telles que pour tous $(x^1,...,x^m)\in E_1^+\times\cdots\times E_m^+$ et $y^*\in F^{*+}$

$$\langle T(x^1,...,x^m),y^*\rangle\leq C\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|_{L_p\left(B^+_{E_j^*},\mu_j\right)}\|y^*\|_{L_{p^*}\left(B^+_{F^{**}},\lambda\right)}.$$

Et nous considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
E_1 & \times\cdots\times & E_m & \xrightarrow{T} & & F & \\
\downarrow\ i_{E_1} & & \downarrow\ i_{E_m} & & & \uparrow\ S & \\
i_{E_1}\left(E_1\right) & \times\cdots\times & i_{E_m}\left(E_m\right) & \underset{(J_{p,0},...,J_{p,0})}{\longrightarrow} & L_0^p\left(\mu_1\right) & \times\cdots\times & L_0^p\left(\mu_m\right) \\
\cap & & \cap & & & & \\
C\left(B^+_{E_1^*}\right) & & C\left(B^+_{E_j^*}\right) & & & &
\end{array}$$

Où $i_{E_j} : E_j \longrightarrow C\left(B^+_{E_j^*}\right)$ est l'injection canonique. Si on note l'image du $J_{p,0} \circ i_{E_j}$ par G_j, et la fermeture de G_j par $L^p_0\left(\mu_j\right)$, l'opérateur $G_1 \times \cdots \times G_m \longrightarrow F : J_{p,0} \circ i_{E_j}\left(x^1, ..., x^m\right) \longmapsto T\left(x^1, ..., x^m\right)$ est bien défini. Nous appliquons maintenant le Lemme 3.5 dans [1], nous constatons que les opérateurs $u_j = J_{p,0} \circ i_{E_j} : E_j \longrightarrow i_{E_j}\left(E_j\right) \longrightarrow L^p_0\left(\mu_j\right)$ sont positivement p-sommants, et $\pi^+_p\left(u_j\right) \leq 1$.

L'opérateur S est défini sur $\overline{u_1\left(E_1\right)} \times \cdots \times \overline{u_m\left(E_m\right)}$, où $u_j\left(x^j\right) = \left(J_{p,0} \circ i_{E_j}\right)\left(x^j\right)$, par

$$S\left(u_1\left(x^1\right), ..., u_m\left(x^m\right)\right) := T\left(x^1, ..., x^m\right),$$

cette définition a un sens car

$$\begin{aligned}\left|\left\langle S\left(u_1\left(x^1\right), ..., u_m\left(x^m\right)\right), y^*\right\rangle\right| &= \left\langle S\left(u_1\left(x^1\right), ..., u_m\left(x^m\right)\right), y^*\right\rangle \\ &\leq n^{m+}_p(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|u_j\left(x^j\right)\right\|_{L^p_0\left(\mu_j\right)}\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\left\langle y^*, y^{**}\right\rangle^{p^*} d\lambda\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}$$

D'après [10, Theorem 2.5], S est un opérateur $m-$linéaire positif Cohen fortement $p-$sommant et $d^{m+}_p\left(S\right) \leq n^{m+}_p(T)$.

Inversement, c'est clair, (nous utilisons les théorèmes de domination de Pietsch pour un opérateur positivement p-sommant et un opérateur m-linéaire positif Cohen fortement $p-$sommant). ■

Dans la proposition suivante, nous établissons des relations entre certaines classes d'opérateurs multilinéaires.

Proposition 4.3.2. *Soit* $1 < p < \infty$. On a

1) *Si* $T \in \mathcal{N}^{m+}_p\left(E_1, ..., E_m; F\right)$, *alors* $T \in \mathcal{D}^{m+}_p\left(E_1, ..., E_m; F\right)$ *et* $d^{m+}_p\left(T\right) \leq n^{m+}_p\left(T\right)$.

2) *Si* $T \in \mathcal{N}^{m+}_p\left(E_1, ..., E_m; F\right)$, *alors* $T \in \mathcal{C}^{vex,\ mult}_p\left(E_1, ..., E_m; F\right)$.

3) *Si* $T \in \mathcal{N}^{m+}_p\left(E_1, ..., E_m; F\right)$, *alors* $T \in \Lambda^{mult}_p(E_1, ..., E_m; F)$ *et* $\Lambda_p(T) \leq n^{m+}_p\left(T\right)$.

Démonstration. 1) Si T est un opérateur positif Cohen p-nucléaire. Alors d'après (4.5), il existe des mesures de probabilité du Radon μ_j sur $B^+_{E_j^*}$ $(1 \leq j \leq m)$ et λ sur $B^+_{F^{**}}$ telles que pour tous $(x^1, ..., x^m) \in E^+_1 \times \cdots \times E^+_m$ et $y^* \in F^{*+}$, on a

$$\left|\left\langle T(x^1, ..., x^m), y^*\right\rangle\right| = \left\langle T(x^1, ..., x^m), y^*\right\rangle$$

$$\leq n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B^+_{E_j^*}}\left\langle x^j,\xi^j\right\rangle^p d\mu_j\left(\xi^j\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle^{p^*} d\lambda\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\left(\sup_{\xi^j\in B^+_{E_j^*}}\left\langle x^j,\xi^j\right\rangle\right)\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle^{p^*} d\lambda\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle^{p^*} d\lambda\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Par le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs $m-$linéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants [10, Theorem 2.5], $T\in\mathcal{D}_p^{m+}(E_1,...,E_m;F)$ et $d_p^{m+}(T)\leq n_p^{m+}(T)$.

2) Si T est positif Cohen p-nucléaire. Alors, $T\in\mathcal{D}_p^{m+}(E_1,...,E_m;F)$ et nous avons par [10, Proposition 3.3], $T\in\mathcal{C}_p^{vex,\, mult}(E_1,...,E_m;F)$.

3) Soit T un opérateur dans $\mathcal{N}_p^{m+}(E_1,...,E_m;F)$, nous avons pour tous $(x_i^j)_{i=1}^{n_j}\subseteq E_j^+$ $(1\leq j\leq m)$ et $y^*\in F^{*+}$

$$\left\|T\left(x^1_{i_1},...,x^m_{i_m}\right)\right\|=\sup_{y^*\in B^+_{F^*}}\left\langle T\left(x^1_{i_1},...,x^m_{i_m}\right),y^*\right\rangle$$

$$\leq\sup_{y^*\in B^+_{F^*}} n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B^+_{E_j^*}}\left\langle x^j_{i_j},\xi^j\right\rangle^p d\mu_j\left(\xi^j\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B^+_{F^{**}}}\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle^{p^*} d\lambda\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B^+_{E_j^*}}\left\langle x^j_{i_j},\xi^j\right\rangle^p d\mu_j\left(\xi^j\right)\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{y^*\in B^+_{F^*}}\left\|y^*\right\|$$

Donc,

$$\left\|T\left(x^1_{i_1},...,x^m_{i_m}\right)\right\|\leq n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B^+_{E_j^*}}\left\langle x^j_{i_j},\xi^j\right\rangle^p d\mu_j\left(\xi^j\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$ Alors on a

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m}\left\|T\left(x^1_{i_1},...,x^m_{i_m}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq n_p^{m+}(T)\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m}\prod_{j=1}^{m}\int_{B^+_{E_j^*}}\left\langle x^j_{i_j},\xi^j\right\rangle^p d\mu_j\left(\xi^j\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq n_p^{m+}(T)\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n_1,\ldots,n_m}\prod_{j=1}^{m}\sup_{\xi^j\in B^+_{E_j^*}}\left\langle x^j_{i_j},\xi^j\right\rangle^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= n_p^{m+}(T)\left(\sum_{i_1=1}^{n_1}\sup_{\xi^1\in B^+_{E_1^*}}\left\langle x^1_{i_1},\xi^1\right\rangle^p\times\sum_{i_2=1}^{n_2}\sup_{\xi^2\in B^+_{E_2^*}}\left\langle x^2_{i_2},\xi^2\right\rangle^p\times\cdots\times\sum_{i_m=1}^{n_m}\sup_{\xi^m\in B^+_{E_m^*}}\left\langle x^m_{i_m},\xi^m\right\rangle^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= n_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^{n_j}\right\|_{\ell^n_{p,weak}\left(E_j\right)}.$$

Encore une fois par Définition 4.0.1, nous avons $T\in\Lambda_p^{mult}(E_1,...,E_m;F)$ *et* $\Lambda_p(T)\leq n_p^{m+}(T)$. ■

Proposition 4.3.3. *Pour* $1<p\leq\infty$.

$$\mathcal{N}_p^m(E_1,...,E_m;F)\subseteq\mathcal{N}_p^{m+}(E_1,...,E_m;F).$$

Démonstration. Si $T\in\mathcal{N}_p^m(E_1,...,E_m;F)$, par le Théorème 3.1 dans [3], il existe des espaces de Banach $G_1,...,G_m$ tels que $T=S(u_1,...,u_m)$ où $S\in\mathcal{D}_p^m(G_1,...,G_m;F)$ et $u_j\in\Pi_p(E_j,G_j)\,(1\leq j\leq m)$. Par le Théorème 2.10 dans [10], $S\in\mathcal{D}_p^{m+}(G_1,...,G_m;F)$ et d'après la Proposition 3 dans [8], $u_j\in\Pi_p^+(E_j,G_j)$. Par le Théorème 4.3.1, on trouve $T\in\mathcal{N}_p^{m+}(E_1,...,E_m;F)$. ■

4.4 Quelques résultats supplémentaires

Pour tout opérateur multilinéaire positif T, il existe un unique opérateur linéaire positif T_L qui vérifie la relation (3.11). Le résultat suivant justifie l'introduction des opérateurs multilinéaires positifs Cohen p-nucléaires, car il établit un lien direct avec leur linéarisation.

Théorème 4.4.1. *Soient* $1<p\leq\infty$ *et* $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$. *Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) $T\in\mathcal{N}_p^{m+}(E_1,...,E_m;F)$;

(2) $T_L\in\mathcal{N}_p^{+}(\widehat{E};F)$. *En plus,* $n_p^+(T_L)=n_p^{m+}(T)$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $T \in \mathcal{N}_p^{m+}(E_1, ..., E_m; F)$. d'après le Théorème 2.6, nous avons

$$\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle \le n_p^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} \|x^j\|_{L_p\left(B_{E_j^*}^+, \mu_j\right)} \|y^*\|_{L_{p^*}\left(B_{F^{**}}^+, \lambda\right)},$$

pour tout $(x^1, ..., x^m) \in E_1^+ \times \cdots \times E_m^+$ et $y^* \in F^{*+}$.

Nous prenons $z \in \widehat{E}$. pour tout $\varepsilon > 0$, z admet une représentation $z = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\|x_i^1\|_{L_p\left(B_{E_1^*}^+, \mu_1\right)} \times \cdots \times \|x_i^m\|_{L_p\left(B_{E_m^*}^+, \mu_m\right)} \right) \le \|z\|_{L_p\left(B_{(\widehat{E})^*}^+, \mu\right)} + \varepsilon, \tag{4.14}$$

où $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_m$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle T_L(z), y^* \rangle| &= \left\langle T_L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m\right), y^* \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y^* \rangle \\ &\le n_p^{m+}(T) \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\|_{L_p\left(B_{E_j^*}^+, \mu_j\right)} \|y^*\|_{L_{p^*}\left(B_{F^{**}}^+, \lambda\right)}. \\ &\le n_p^{m+}(T) \left(\|z\|_{L_p\left(B_{(\widehat{E})^*}^+, \mu\right)} + \varepsilon \right) \|y^*\|_{L_{p^*}\left(B_{F^{**}}^+, \lambda\right)}. \end{aligned}$$

Il découle de (4.5), $T_L \in \mathcal{N}_p^+(\widehat{E}; F)$ et $n_p^+(T_L) \le n_p^{m+}(T)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supposons que l'opérateur T_L est positif Cohen p-nucléaire. Soient $(x^1, ..., x^m) \in E_1^+ \times \cdots \times E_m^+$ et $y^* \in F^{*+}$, on a

$$\begin{aligned} &\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle = \langle T_L(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m), y^* \rangle \\ &\le n_p^+(T_L) \|x^1 \otimes \cdots \otimes x^m\|_{L_p\left(B_{(\widehat{E})^*}^+, \mu\right)} \|y^*\|_{L_{p^*}\left(B_{F^{**}}^+, \lambda\right)} \\ &\le n_p^+(T_L) \left(\int_{B_{(\widehat{E})^*}^+} \langle x^1 \otimes \cdots \otimes x^m, \xi \rangle^p d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \|y^*\|_{L_{p^*}\left(B_{F^{**}}^+, \lambda\right)} \\ &\le n_p^+(T_L) \left(\int_{B_{(\widehat{E})^*}^+} \langle x^1 \otimes \cdots \otimes x^m, \xi \rangle^p d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_m)(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \|y^*\|_{L_{p^*}\left(B_{F^{**}}^+, \lambda\right)} \end{aligned}$$

$$\leq n_p^+\left(T_L\right)\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|_{L_p\left(B^+_{E_j^*},\mu_j\right)}\|y^*\|_{L_{p^*}\left(B^+_{F^{**}},\lambda\right)}.$$

Donc, d'après (4.5), $T\in\mathcal{N}_p^{m+}(E_1,...,E_m;F)$ et $n_p^{m+}(T)\leq n_p^+(T_L)$. ■

Le théorème suivant caratérise le dual d'un opérateur m-linéaire positif Cohen p-nucléaire.

Théorème 4.4.2. *Soient* $1<p\leq\infty$ et $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$. *Alors* T *appartient à* $\mathcal{N}_p^{m+}(E_1,...,E_m;F)$, *si et seulement si,* T^* *appartient à* $\mathcal{N}_{p^*}^{+}(F^*,\mathcal{L}(E_1,...,E_m))$, *et nous avons* $n_p^{m+}(T)=n_{p^*}^{+}(T^*)$.

Démonstration. Supposons d'abord que $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ est positif Cohen p-nucléaire. Par le théorème ci-dessus, sa linéarisation $T_L:\widehat{E}\longrightarrow F$ est un opérateur positif Cohen p-nucléaire. Alors $T_L^*:F^*\longrightarrow\left(\widehat{E}\right)^*$ est positif Cohen p^*-nucléaire. En effet, il y a un espace de Banach G, un opérateur positivement p-sommant $u:\widehat{E}\longrightarrow G$ et un opérateur positif Cohen fortement p-sommant $S:G\longrightarrow F$ tels que $T_L=S\circ u$. D'après [1, Theorem 4.6], nous avons $T_L^*=u^*\circ S^*$ tel que u^* est un opérateur positif Cohen fortement p^*-sommant et S^* un opérateur positivement p^*-sommant, donc on a T_L^* est un opérateur positif Cohen p^*-nucléaire. Considérons l'isomorphisme isométrique $\Delta_m:\mathcal{L}(E_1,...,E_m)\longrightarrow\left(\widehat{E}\right)^*$ avec $\Delta_m(T)=T_L$. Puisque $T=T_L\circ\delta_m$, par la dualité nous obtenons $T^*=\delta_m^*\circ T_L^*=\Delta_m^{-1}\circ T_L^*$. La propriété d'idéal assure que T^* est un opérateur positif Cohen p^*-nucléaire.

Inversement, supposons que T^* est positif Cohen p^*-nucléaire. Alors l'égalité $T_L^*=\Delta_m\circ T^*$ et la propriété d'idéal donnent que T_L^* est positif Cohen p^*-nucléaire, alors T_L est positif Cohen p-nucléaire et d'après le Théorème 4.4.1, nous concluons que T est positif Cohen p-nucléaire. ■

Conclusion

Dans un article publié en [Positivity $\mathbf{23}, 379-395(2019)$] le candidat a introduit la notion des opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement p-sommants, où il a généralisé des travaux intéressants; ce de Achour et Merzrag (On the Cohen strongly $p-$summing multilinear operators. *J. Math. Anal. Appl.* $\mathbf{327}, 550-563(2007)$) et ce de Achour et Belacel (Domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators. *Positivity.* $\mathbf{18}, 785-804(2014)$), et l'importance de ces opérateurs est : Toutes les propriétés importantes restent vraies est correctes.

Et à partir du travail précédemment cité, le docteur a construit et étudié une nouvelle classe, celle des opérateurs m-linéaire positifs Cohen p-nucléaires, où il a caractérisé plusieurs propriétés concernant cette classe.

Les perspectives

Mes perspectives sont:

$1-$ Dans un premier temps, nous présenterons une généralisation naturelle de la notion de positif Cohen fortement p-sommant, aux polynômes homogènes.

$2-$ Nous présenterons et étudierons une nouvelle classe entre deux espaces Banach réticulés et étendrons la notion introduite par Dimant à la situation positive.

$3-$ Nous introduisons également un "cross norm" raisonnable sur $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m \otimes F$ de sorte que le dual topologique de l'espace résultant est isométrique à

$$\left(\mathcal{N}_p^{m+}(E_1 \times \cdots \times E_m; F), n_p^{m+}\right)\text{...etc}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ACHOUR, D., BELACEL, A. : Domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators. *Positivity.* $\mathbf{18}, 785-804(2014)$.

[2] ACHOUR, D., MEZRAG, L. : On the Cohen strongly $p-$summing multilinear operators. *J. Math. Anal. Appl.* $\mathbf{327}, 550-563(2007)$.

[3] ACHOUR, D., ALOUANI, A. : On multilinear generalizations of the concept of nuclear operators. *Colloquium Mathematicae* $\mathbf{120}(1), 85-102\,(2010)$.

[4] ALENCAR, A., MATOS, M.C. : Some classes of multilinear mappings between Banach spaces. Publications del Departamento de Análisis Matemático. Universidad Complutense de Madrid 12, (1985).

[5] APIOLA, H : Duality between spaces of p-summable sequences, (p,q)-summing operators and characterizations of nuclearity, *Math. Ann.* $\mathbf{219}, 53-64(1976)$.

[6] BELACEL, A. : Opérateurs sommants et factorisation par les espaces de Köthe, *thèse de doctorat.* Universite Mohamed Boudiaf-M'sila (2015).

[7] BELACEL, A., BOUGOUTAIA, A., HAMDI, H. : Domination and Kwapień's Factorization Theorems for positive Cohen $p-$nuclear $m-$linear operators. (**Submitted**)

[8] BLASCO, O. : A class of operators from a Banach lattice into a Banach space. Collect. Math. $\mathbf{37}(1), 13-22(1986)$.

[9] BOMBAL, F., PÉREZ-GARCIA, D., VILLANUEVA, I. : Multilinear extensins of Grothendieck's theorem. Q.J. Math.55, $441-450(2004)$.

[10] BOUGOUTAIA, A.,BELACEL, A. : Cohen positive strongly $p-$summing and $p-$convex multilinear operators. *Positivity.* $\mathbf{23}, 379-395(2019)$.

[11] BOUGOUTAIA, A.,BELACEL, A. : On some mapping properties of positive operators. (**Submitted**)

[12] BREZIS, H. : Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Dunod, 1983.

[13] Bu, Q : Some mapping properties of $p-$summing operators with Hilbertian domain, *Contemp. Math.* $\mathbf{328}, 145 - 149\,(2003)$.

[14] Bu., Q., Buskes, G. : The Radon-Nikodym property for tensor products of Banach lattices, *Positivity* $\mathbf{10}(2), 365 - 390(2006)$.

[15] Bu, Q., Buskes, G. : Polynomials on Banach lattices and positive tensor products, J. Math. Anal. Appl. $388, 845 - 862(2012)$.

[16] Bu, Q., Labuschagne, C.A. : Positive Multiple Summing and Concave Multilinear Operators on Banach Lattices. *Mediterr. J. Math.* $\mathbf{12}, 77 - 87(2015)$.

[17] Bu, Q., Shi, Z. : On Cohen almost summing multilinear operators. *J. Math. Anal. Appl.* **401**,174 − 181(2013).

[18] Charalambos, D : Alipantis and Owen Burkinshaw. Positive Operators. Academic Press INC (1985) .

[19] Cohen, J.S. : Absolutely $p-$summing, $p-$nulear operators and thier conjugates. *Math.Ann.* $\mathbf{201}, 177 - 200(1973)$.

[20] Cullender, F., Labuschagne, C.A. : A note on the $m-$norm of Chaney-Schaefer. *Quaestiones Mathematicae* $\mathbf{30}(2007)151 - 158$.

[21] Dahia, E : Sur la représentation tensorielle des idéaux multilinéaires, *thèse de doctorat*, Universite Mohamed Boudiaf-M'sila, 2014.

[22] Diestel, J., Jarchow, H., Tonge, A. : Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, 1995.

[23] Dimant, V. : Strongly $p-$summing multilinear operators. *J. Math. Anal. Appl.* $\mathbf{278}, 182 - 193(2003)$.

[24] Fremlin. D.H. : Tensor products of Archimedean vector lattices, Amer. J. Math. $94, 777 - 798(1972)$.

[25] Fremlin. D.H. : Tensor products of Banach lattices, Math. Ann. $211, 87 - 106(1974)$.

[26] Labuschagne, C.C.A. : Riesz reasonable cross norms on tensor products of Banach lattices, *Quaestiones Mathematicae* $\mathbf{27}(2004)243 - 266$.

[27] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L. : Classical Banach Spaces I and II. Springer, Berlin, 1996.

[28] Matos, M.C. : Fully absolutely summing and Hilbert–Schmidt multilinear mappings. *Collect. Math.* $\mathbf{54}\,(2)\,, 111 - 136(2003)$.

[29] Matos, M.C., Tonge, A : Polynomials and the Pietsch domination theorem. Math. Proc. Royal Irish Acad. $2, 195 - 212(1999)$.

[30] Meyer-Nieberg, P. :Banach lattices. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[31] Mezrag, L., Saadi, K. : Inclusion theorems for Cohen strongly summing multilinear operators. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.* $\mathbf{16}, 1 - 11(2009)$.

[32] Pellegrino, D., Santos, J., Seoane-Sepúlveda, J. : Some techniques on nonlinear analysis and applications, *Adv. Math.* **229**,1235 − 1265(2012).

[33] Pietsch, A. : Ideals of multilinear functionals (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leibzig), Teubner-Texte, 185 − 199, (1983).

[34] Pietsch, A. : Absolut $p-$summierende in Abbildungen in normierten Räumen. *Studia Math.* **28**(1967), 333 − 353.

[35] Kwapien, S : A linear topological characterization of inner-product spaces, *Studia Mathematica.,* **38**, 277 − 278(1970).

[36] Ramanujan, M. S., Schock. E. : Operator ideals and spaces of bilinear operators, *Lin. Multilin. Alg.* 18, 307 − 318(1985).

[37] Ryan, R. : Introduction to Tensor Product of Banach Spaces, La linéarisation du polynômes $m-$homogènes Springer-Verlag, London, 2002.

[38] Schaefer, H.H. : Banach Lattices and Positive Operators. Springer, Berlin, 1974.

[39] Schneider, B : On absolutely p-summing and related multilinear mappings. Brandenburggische Landeshochschule Wissenschaftliche Zeitschrift. 35, 105 − 117(1991).

[40] Silva, A.R. : Linearização de aplicações multilineares continuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.

[41] Zhukova, O.I. : On modifications of the classes of $p-$nuclear, $p-$summing and $p-$integral operators, *Sib. Math. J.* **30**(5), 894 − 907(1998).